

Probability Distribution

2022-06-10

离散分布

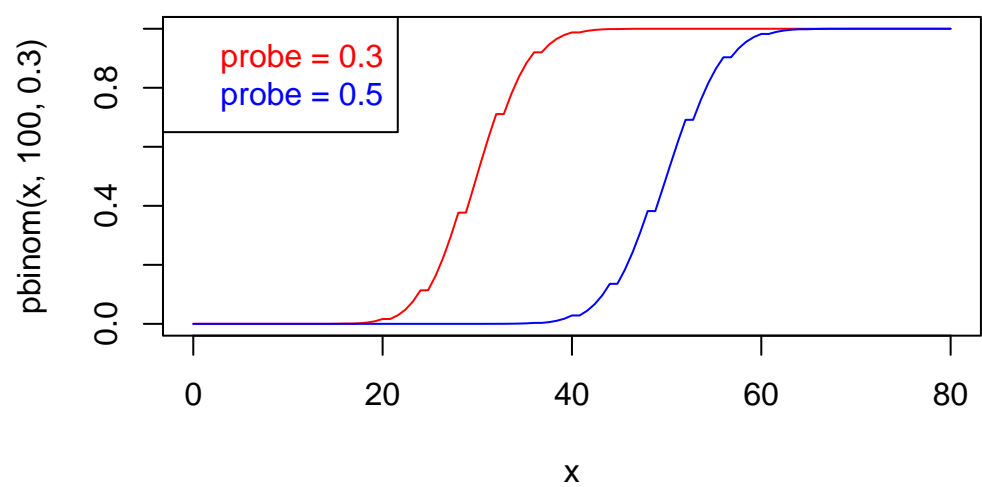
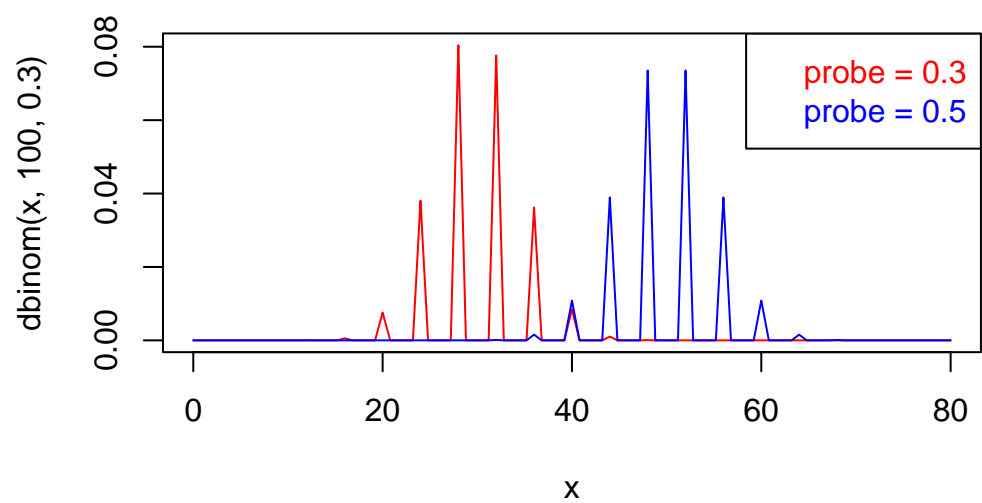
二项分布 (Binomial Distribution)

多重伯努利实验中，已知事件 A 成功的概率为 p ，且实验次数 n 固定，那么随机变量 X —— 事件 A 发生次数 X ：

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n.$$

记为：

$$X \sim b(n, p) \text{ Where } E(X) = np, D(X) = np(1 - p)$$



两点分布 (Bernoulli Distribution) ，即一重伯努利实验, 为二项分布的特殊分布。

负二项分布 (Negative Binomial Distribution)

多重伯努利实验中，已知事件 A 发生的概率为 p ，那么当事件 A 第 r 次发生，那么随机变量 X —— 伯努利实验次数：

$$P(X = K) = C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, k = r, r+1, \dots$$

记作：

$$X \sim Nb(r, p), \text{ Where } E(X) = \frac{r}{p}, D(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

几何分布 (Geometric Distribution) 为负二项分布的特殊分布，即当 $r = 1$ 时的负二项分布。

记为：

$$X \sim Ge(p)$$

超几何分布

不放回的随机抽样，设有 N 件产品，其中 M 件不合格品，从中不放回的随机抽取 n 件，则其中的不合格的件数服从超几何分布：

$$P(X = k) = \frac{C_M^K C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

记为： $X \sim h(n, N, M)$

$$E(X) = n \frac{M}{N}$$
$$D(X) = \frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

泊松分布 (Poisson Distribution)

涉及到单位时间，面积，体积的计数过程，数量 X :

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

记为:

$$X \sim P(\lambda)$$

$$E(X) = \lambda$$

$$D(X) = \lambda$$

连续分布

正态分布

正态分布含有两个参数 μ , σ , 其中 μ 为位置参数，控制曲线在 x 轴上的位置； σ 为尺度参数，用于控制曲线的参数。记为:

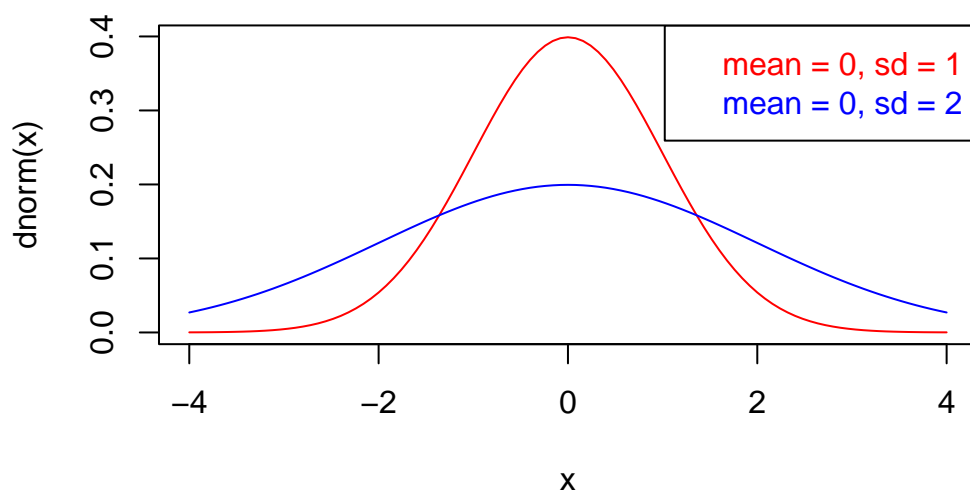
$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

$$E(X) = \mu$$

$$D(X) = \sigma^2$$

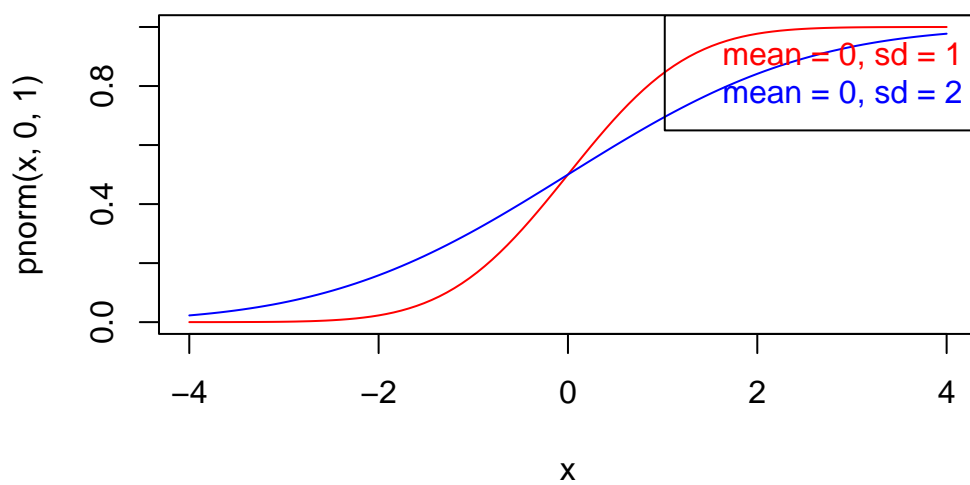
概率密度函数:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



分布函数:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$



均匀分布

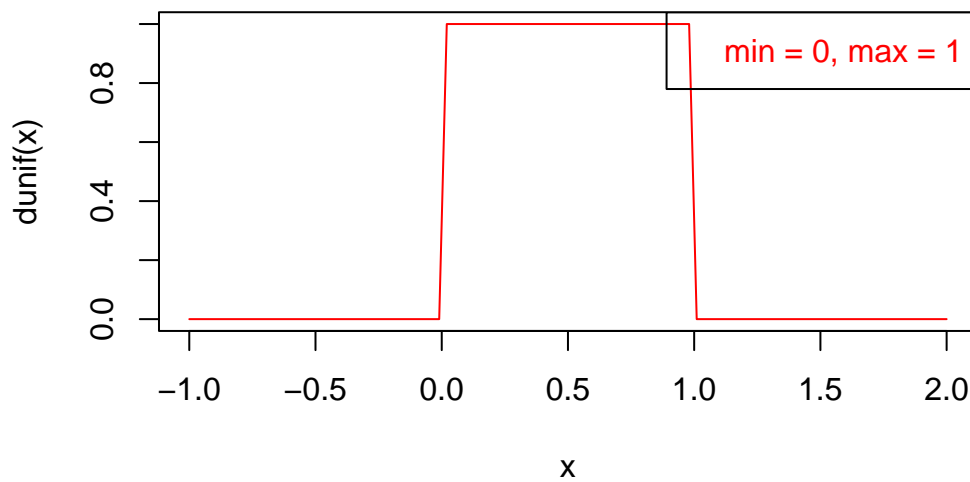
记为：

$$X \sim U(a, b)$$

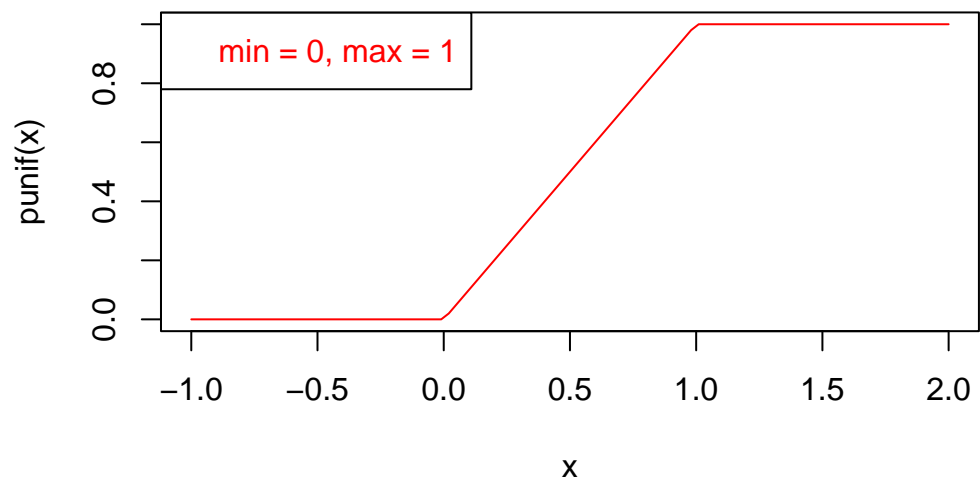
$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{for } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{for } a \leq x < b, \\ 1 & \text{for } x \geq b. \end{cases}$$



指数分布

记为：

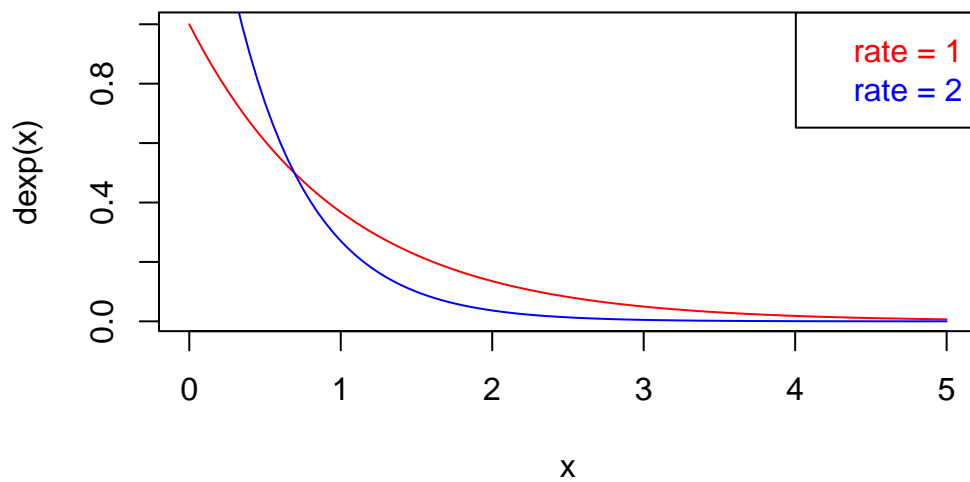
$$X \sim \text{Exp}(\lambda)$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

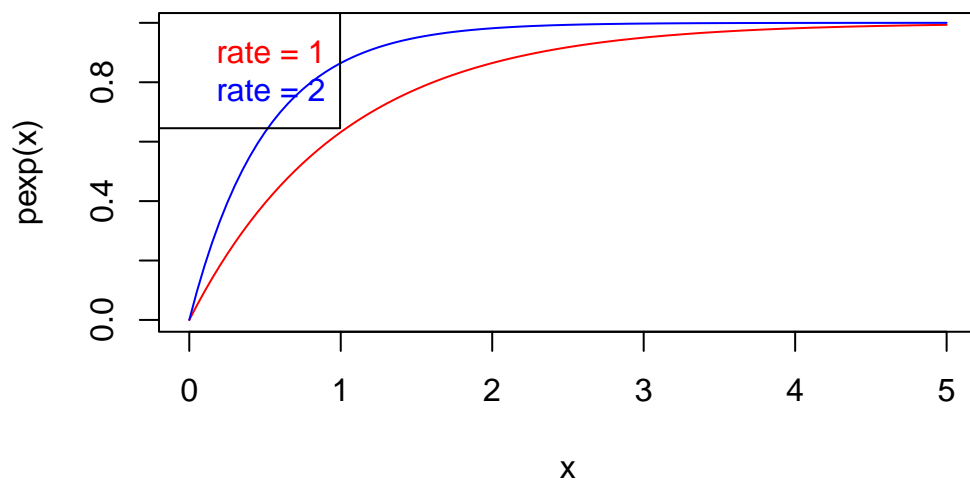
$$D(x) = \frac{1}{\lambda^2}$$

密度函数

$$f(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{for } x \geq 0 \text{ and } \lambda > 0.$$



$$F(x; \lambda) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{for } x \geq 0 \text{ and } \lambda > 0.$$



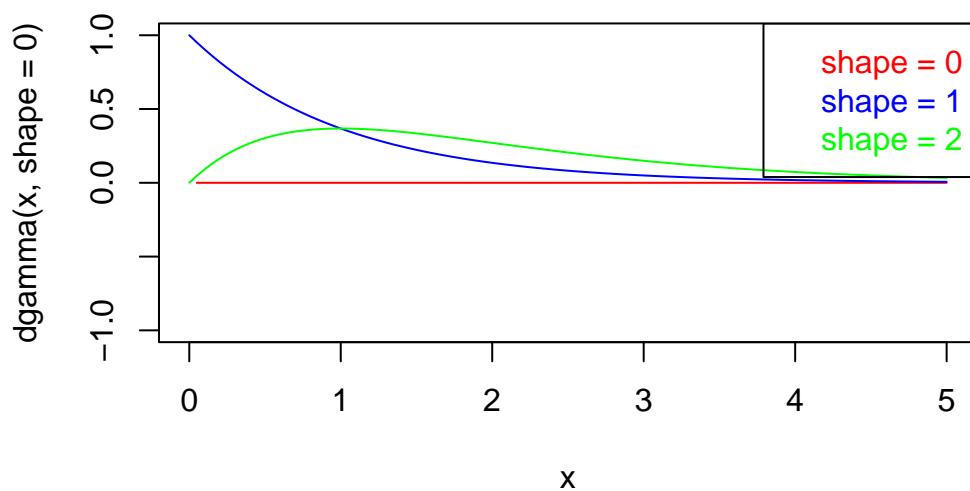
Γ 分布

记为: $X \sim Ga(\alpha, \lambda)$ $E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$, $D(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$

密度函数

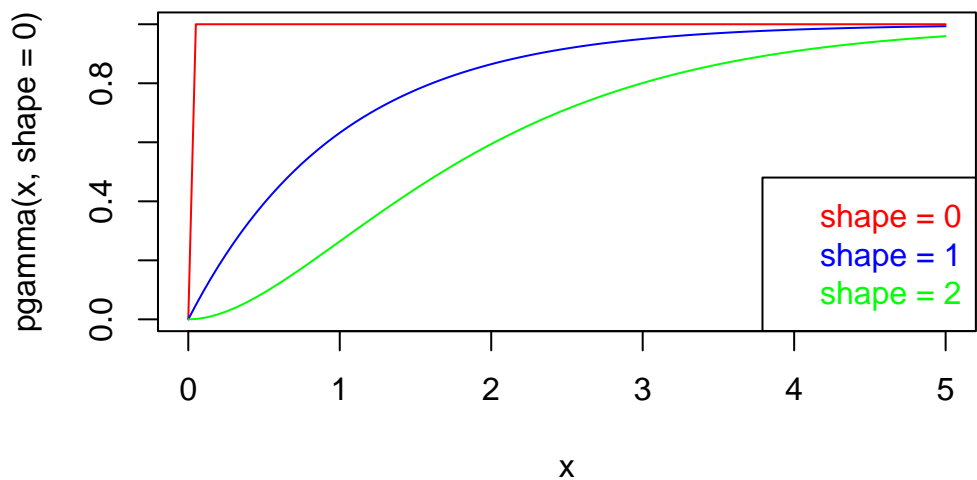
$$f(x; k, \theta) = \frac{x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta^k \Gamma(k)} \quad \text{for } x > 0 \text{ and } k, \theta > 0.$$

其中, k 是形状参数 (也称为度数), θ 是尺度参数 (与标准差成比例), 而 $\Gamma(k)$ 是伽马函数。



分布函数

$$F(x; k, \theta) = \int_0^x \frac{t^{k-1} e^{-\frac{t}{\theta}}}{\theta^k \Gamma(k)} dt = \frac{\gamma(k, \frac{x}{\theta})}{\Gamma(k)} \quad \text{for } x > 0 \text{ and } k, \theta > 0.$$



β 分布

记为: $X \sim Be(a, b)$ $E(X) = \frac{a}{a+b}$, $D(x) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$

密度函数

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} \quad \text{for } 0 < x < 1 \text{ and } \alpha, \beta > 0,$$

分布函数

$$F(x; \alpha, \beta) = I_x(\alpha, \beta) = \frac{B_x(\alpha, \beta)}{B(\alpha, \beta)} \quad \text{for } 0 \leq x \leq 1 \text{ and } \alpha, \beta > 0$$

三大抽样分布

抽样分布指的是从总体中抽取样本, 样本统计量的分布。这里首先给出三大抽样分布构造的定义;

卡方分布为特殊的伽玛分布, 在概率论中其定义如下:

$$\chi = \gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

- 若 $\{X_i\}_{i=1}^n$ 独立同分布于 $N(0, 1)$, 那么 $\sum X_i^2 \sim \chi(n)$, 其 $E(\chi^2) = n, \text{Var}(\chi^2) = 2n$.
- 若有 $\chi_1(m), \chi_2(n)$, 那么 $\frac{\chi_1}{\chi_2} \sim F(m-1, n-1)$.
- 若有 $X \sim N(0, 1)$, 以及 χ , 那么 $\frac{X}{\sqrt{\frac{\chi(n)}{n}}} \sim t(n-1)$

关于抽样分布的几个定理

定理一

若 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 是来自正态总体 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 其样本均值和方差分别为

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i, s^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x - \bar{x})^2$$

则:

1. \bar{X} 与 s^2 相互独立。
2. $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2) \rightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma \cdot \sqrt{\frac{1}{n}}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$
3. $(n-1)\frac{s^2}{\sigma^2} \sim \chi(n)$

定理二

若 x, y 分别是来自正态总体 X, Y 的样本, 其样本方差分别为 s_x, s_y , 则:

$$\frac{s_x^2/\sigma_x^2}{s_y^2/\sigma_y^2} \sim F(m-1, n-1)$$

定理三

设 $\{X_i\}_{i=1}^n$ 是来自正态总体 $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ 的样本, 则:

$$\frac{\bar{x} - \mu}{s \cdot \sqrt{\frac{1}{n}}} \sim t(n-1)$$

test