

kaspersky.academy

Алгебра логики

Лекция 2. Булевы функции

Математика в кибербезопасности



## Лекция 2. Булевы функции

### Нормальные формы

0:35

Любую булеву функцию можно выразить с помощью  $\vee$ ,  $\wedge$ ,  $\neg$ .  
Булева функция представлена в виде нормальной формы, если в этом представлении содержатся только дизъюнкция, конъюнкция и инверсия (одна инверсия располагается ровно над одним операндом).

Пример нормальной формы:

$$f = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$$

Не нормальная форма:

$$f = x_1 + x_2 \cdot x_3$$

### Совершенные нормальные формы

1:09

**СДНФ** – совершенная дизъюнктивная нормальная форма (дизъюнкция конъюнкций):

$$f = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$$

**СКНФ** – совершенная конъюнктивная нормальная форма (конъюнкция дизъюнкций):

$$f = (x_1 + x_2 + x_3) \cdot (x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3})$$

## Восстановление функции по вектору значений

1:57

У нас есть вектор значений, по которому мы должны восстановить исходную функцию:

$$f = 10001000$$

1. Сколько переменных в этой функции?

$$|f| = 8$$

$$2^n = 8$$

$$n = 3$$

$f$  – функция от трех переменных

2. Заполним значения для переменных
3. Каких значений функции (столбец  $f$ ) меньше – нулей или единиц?  
В этой функции меньше единиц.
4. Будем использовать **СДНФ** – совершенную дизъюнктивную нормальную форму.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

## Используем СДНФ и восстановим функцию

2:57

1. Выберем все наборы, на которых функция равна единице.
2. Напишем конъюнкции на наборах переменных. Если в наборе 10 – переменная инвертируется.
3. Объединим конъюнкции дизъюнкцией

$$f = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$$

Мы восстановили исходную функцию.

x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

## А что если у функции нулей меньше, чем единиц?

3:42

Строим СКНФ – совершенную конъюнктивную нормальную форму. Пример:

$$f = 10110111$$

Восстановим функцию:

1. Выберем все наборы, на которых функция равна нулю.
2. Напишем дизъюнкции на наборах переменных. Если в наборе 1 – переменная инвертируется.
3. Объединим дизъюнкции конъюнкцией

Восстановленная функция:

$$f = (x_1 + x_2 + \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 + x_2 + x_3)$$

x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

## А что с импликацией?

4:30

$$f = x_1 \rightarrow x_2$$

$f = 1101$  – это вектор значений функции «импликация»

1. У функции 2 переменных
2. Нулей меньше, чем единиц – значит, строим СКНФ

Восстановленная функция:  $f = \bar{x}_1 + x_2$

x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	f
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1