

kaspersky.academy

Алгебра логики

Лекция 3. Минимизация

булевых функций

Математика в кибербезопасности



Лекция 3. Минимизация булевых функций

Минимизация булевых функций

0:27

Любую функцию можно построить с помощью \cdot , $+$, $\bar{}$

Для минимизации используются свойства логических операций, а также законы де Моргана и поглощения.

Законы де Моргана

1:17

$$\begin{aligned}\overline{x \cdot y} &= \bar{x} + \bar{y} \\ \overline{x + y} &= \bar{x} \cdot \bar{y}\end{aligned}$$

Проверим, что законы де Моргана действительно выполняются. Рассмотрим первый пример:

$$\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}$$

Для этого построим вектор значений для левой и правой частей уравнения:

Считаем $\overline{x \cdot y}$:

x	y	$x \cdot y$	$\overline{x \cdot y}$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Считаем $\bar{x} + \bar{y}$:

x	y	\bar{x}	\bar{y}	$\bar{x} + \bar{y}$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0

Столбцы значений для функций совпадают, значит, выражение $\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}$ истинно

Законы поглощения

2:15

$$x \cdot (x + y) = x$$

$$x + (x \cdot y) = x$$

$$x \cdot \bar{x} = 0$$

$$x + \bar{x} = 1$$

Проверим работу закона поглощения на примере первого выражения:

$$x \cdot (x + y) = x \cdot x + x \cdot y = x + x \cdot y = x \cdot (1 + y) = x$$

Пример минимизации функции

3:00

$$f = \underline{x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3} + \underline{x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3} + \underline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3} + \underline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3} =$$

1. Вынесем общие множители за скобки
2. Используем закон поглощения

$$= x_1 \cdot \bar{x}_3 \cdot \underbrace{(x_2 + \bar{x}_2)}_{\equiv 1} + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \underbrace{(x_3 + \bar{x}_3)}_{\equiv 1} =$$

$$= x_1 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$$

Мы успешно минимизировали функцию!

Рассмотрим еще один пример

3:50

$$f = \underbrace{\bar{x}_1 \cdot x_2}_{\text{Правило де Моргана}} + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + \bar{x}_3 + \underbrace{\bar{x}_1 + x_3}_{\text{Правило де Моргана}} + \bar{x}_3 =$$

$$= \underline{x_1} + \underline{\bar{x}_2} + \underline{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} + \underline{\bar{x}_3} + \underline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3} + \cancel{\bar{x}_3} =$$

Закон
поглощения

$$= x_1 \cdot \underbrace{(1 + x_2 \cdot x_3)}_{\equiv 1} + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 \cdot \underbrace{(1 + \bar{x}_1)}_{\equiv 1} =$$

$$= x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3$$