Комбинаторика

Лекция 3. Комбинаторика

Математика в кибербезопасности

Правило умножения

Видео 1, 1:40

Король Ночи – злодей, и Джон Сноу хочет его победить. Джон Сноу знает, что Король Ночи спрятал важную информацию о том, как это можно сделать, в сундук. Сундук он закрыл на цифровой замок из четырех цифр.

Джон Сноу будет вынужден перебирать все возможные комбинации для этого замка. **А много существует возможных комбинаций?**

Всего цифр десять:

$$C = \{1, 2, 3, \ldots 8, 9, 0\}.$$

На каждую позицию кода мы можем поставить любую из 10 цифр. Поэтому, чтобы пересчитать все возможные комбинации мы перемножим все варианты.

Выбор цифр Джон Сноу производит выбор каждой цифры независимо – следующая цифра не зависит от предыдущей. Такие события (независимый выбор цифр) называются **совместными.** Совместные события умножаются (И) – может произойти **И** первое, **И** второе событие.

Правило суммы

Видео 1, 2:30

В этом эпизоде задача Джона Сноу – **дойти из поселения Одичалых до Черного Замка.** Сноу может пойти по верхнему пути или по нижнему. Нижний путь раздваивается, а верхний путь разделяется аж на три дорожки. Если Сноу выбирает верхний путь, то дальше ему нельзя будет пойти ни по одной из дорожек, лежащей на нижнем пути. Такие события называются **несовместными.**

Несовместные события складываются (ИЛИ) – может произойти **ИЛИ** первое событие, **ИЛИ** второе.

Размещение с повторением

Видео 2, 1:04

Размещение (как и было сказано) – это способ расставить предметы на k мест.

A – размещение (arrangement)
Элементы в каждой позиции могут повторяться. Тогда количество размещений выразим так:

$$\bar{A}_n^k = n^k$$

n – количество элементов, из которых мы выбираем,
k - количество позиций в размещении

Верхняя черта над A означает, что предметы могут повторяться и каждый из них можно использовать бесконечное количество раз.

Пример:

Код состоит из 4 позиций, состоящих из 10 цифр от 0 до 9. Сколько таких кодов может составить Король Ночи для своего ключа?

$\bar{A}_{10}^{4} = 10^4 = 10000$ комбинаций

Перестановка и факториал

Видео 2, 1:55

Что, если у нас есть n предметов и их нужно расставить на n мест? Давайте посчитаем, сколько способов существует для такой перестановки, но до этого сверим часы и вспомним, что такое факториал.

Факториал — это произведение всех чисел, которые стоят до данного числа включительно.

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Запоминаем нелогичное: $0! = 1$

Перестановку будем обозначать буквой P.

P – перестановка (permutation)

n элементов можно переставлять на n позициях:

$$P_n = n!$$

Размещение без повторений

Видео 2, 3:18

А теперь разместим предметы, которые заканчиваются! Каждый предмет уникален и переиспользовать его **нельзя**.

Если Король Ночи составляет ключ для замка, он выбирает любую из 10 цифр столько раз, сколько он захочет. Но если каждая цифра выписана на клочок бумаги, то каждую из них Король Ночи может использовать ровно один раз – все цифры уникальны и эти кусочки бумаги могут заканчиваться.

В этом случае мы будем размещать предметы без повторения. Итак, мы рассматриваем размещение без повторения, если:

- предметов больше, чем мест
- их нужно разместить без повторений

Формула для таких размещений:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Пример задачи:

Сколько существует комбинаций для четырёхзначного кода, если всего цифр 6, и каждая встречается только 1 раз?

$$C = \{ 1, 2, 3,.. 8, 9, 0 \}$$

Ответ: 6 * 5 * 4 * 3 = 360

Сочетание (без повторений)

Видео 3, 0:00

Джон Сноу должен выбрать 2 стражников из 10 воинов. Он сделает это, применяя выборку без повторения:

$$A_{10}^{2} = \frac{10!}{2!} = 10 * 9 = 90$$

Сноу выбрал первого воина (В1) и второго воина (В2). Но выборке без повторения имеет значение порядок (В1 В2 не равно В2 В1). Но в данном случае порядок выбора не важен, и Сноу нужно исключить одинаковые сочетания. И после того, как выбор сделан, нужно разделить финальный результат на количество перестановок предметов, чтобы не посчитать лишнего.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!\ k!}$$

Ответ: $C_{10}^{2} = \frac{A_{10}^{2}}{P_2} = \frac{10!}{(10-2)!2!} = 45$

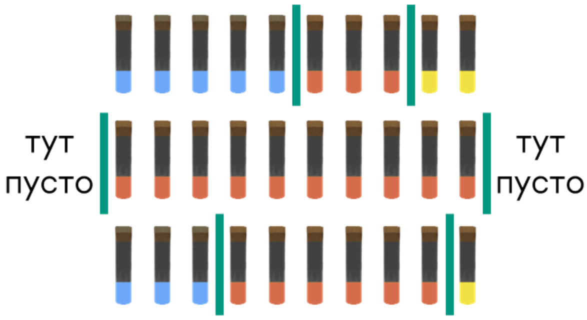
Сочетание (с повторениями)

Видео 3, 1:30

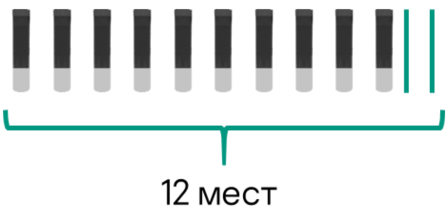
В алхимической лаборатории стоят 10 пробирок с бесцветной жидкостью.

Сколькими способами можно раскрасить жидкости в 3 цвета?

Как делим: добавим разделяющие перегородки



Колбы: n = 10, краски: k = 3, количество перегородок: $k - 1$, всего мест для размещений: $n + (k - 1)$



Чтобы раскрасить все пробирки в 3 цвета, нужно разделить их 2 перегородками. Из $n + (k - 1)$ позиций выбираем 2 позиции для перегородок:

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{(n-k)!\,k!}$$

Задача свелась к предыдущей:
сочетания без повторений.

Ответ:

$$\bar{C}_{10}^3 = C_{10+3-1}^3 = C_{12}^3 = \frac{12!}{9!3!} = \frac{12 * 11 * 10}{2 * 3} = 220$$