kaspersky.academy

Комбинаторика

Лекция 4. Вероятность и случайность

Математика в кибербезопасности

Лекция 4. Вероятность и случайность

Множество событий и вероятность

1:36

В Черном Замке происходит странное: Король Ночи и Джон Сноу решают сыграть в игру и бросить кости. Каждый хочет выиграть, и каждому нужна выигрышная стратегия. Как им может помочь математика?

Рассмотрим, из чего Сноу и Король Ночи могут выбирать.

Ω = {орел, решка}

Ω - множество событий в данной задаче

Выпадение орла или решки – **элементарное событие** – принадлежит множеству Ω

Когда Король Ночи бросит кубик, произойдет элементарное событие.

Вероятность события

2:06

Договоримся, что Сноу выигрывает в случае, если происходит событие A. Но событие A не обязательно должно быть элементарным событием – оно может состоять из нескольких элементарных событий.

Джон Сноу говорит: я выигрываю, если монетка падает вверх решкой **ИЛИ** орлом. Если Король Ночи очень устанет после ночных игр, он может потерять бдительность и согласится с этой фантастической концепцией.

В этом случае событие A состоит из двух элементарных событий: выпадение орла и выпадение решки.

Событие A – подмножество элементарных событий:

$$p\,(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Ω - множество всех событий, p – вероятность события A

Теперь рассмотрим более реалистичный сценарий. Король Ночи и Джон Сноу договорились, что Сноу бросает кость первым. **Чтобы выиграть, Джону Сноу нужно выбросить 1 или 6.**

Тогда пространство элементарных событий выглядит так:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Чтобы понять, с какой вероятностью Джон Сноу выиграет, определим событие А:

$$A = \{1, 6\}$$

Сноу удовлетворит любой из вариантов: выпадение единицы, выпадение шестерки.

И вероятность выигрыша Джона Сноу будет такой:

$$p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Еще одна задача – «Голосование в Черном Замке»

3:58

Отважные воины голосуют – идти им за стену или остаться в замке. Они принесли шары - Джон Сноу должен случайным образом, не глядя, вытащить пять из них. Если Сноу вытащит больше белых шаров, чем черных, все останутся в теплом замке.

Какая вероятность для Джона Сноу вытащить хотя бы три белых шара?

Вот наши короткие условия задачи:

Всего 11 шаров.
Из них 5 белых шаров («за») и 6 черных («против»)

Какова вероятность вытащить 3 белых и 2 черных шара?

Число всех исходов:

$$C_{11}^{5} = \frac{11!}{5!6!} = 462$$

3 белых шара из 5 можно выбрать:

$$C_{5}^{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

2 черных шара из 6 можно выбрать:

$$C_{6}^{2} = \frac{6!}{2!4!} = 15$$

$$A = \frac{C_{5}^{3} \cdot C_{6}^{2}}{C_{11}^{5}} = \frac{10 \cdot 15}{462} = 0.3246 \approx 32\%$$

Слова и буквы

5:27

А теперь кто-то захотел составить слово из 5 букв:

$$\_\ \_\ \_\ \_\ \_$$

$$A = \{О, И, Е\}$$

Какова вероятность того, что в получившемся слове буква Е встретится в слове хотя бы 2 раза?

На каждом месте в слове из 5 букв мы можем использовать любую из трех букв, которые у нас есть. Значит, вероятность выбора буквы Е равна $\frac{1}{3}$ – вне зависимости от того, на каком месте она стоит.

$$A = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

Случайные последовательности чисел

6:18

В случайной последовательности чисел:

- Числа появляются равновероятно
- Невозможно предсказать следующее число

Сгенерировать случайную последовательность автоматически мы не можем.

Примеры случайной последовательности:

- Бросание честной монетки
- Шум дождя
- Белый шум: шум, спектр которого распределен равномерно по всему диапазону задействованных частот

Генераторы псевдослучайных последовательностей

7:45

Гамма – длина неповторяющейся части псевдослучайной последовательности чисел.

41231412314123141231

| Г | = 5 – длина гаммы

Чем длиннее гамма, тем сложнее предсказать следующее число – а значит, тем больше псевдослучайная последовательность похоже на случайную.