[illegible] on $U = qEy$ ja kineettinen energia

on $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ nämä pitää olla yhtäsuuret jokaisessa

kohdassa $\frac{1}{2}mv^2 = qEy \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qEy}{m}}$

---

4. a) $v \mapsto (x(v), y(v), z(v))$, missä $y(v) = 0$,
$x(v) = r\cos(v)$ ja $z(v) = r\sin(v)$

b) täytyy vain R lisätä x-koordinaattiin, eli;
$x(v) = r\cos(v) + R$ ja muut ovat samat kuin
kohdassa a)

c)
$$\begin{bmatrix} \cos(u) & -\sin(u) & 0 \\ \sin(u) & \cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r\cos(v) + R \\ 0 \\ r\sin(v) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(u)(r\cos(v) + R) \\ \sin(u)(r\cos(v) + R) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r\sin(v) \end{bmatrix}$$

eli uusi paresm. on $x(v,u) = \cos(u)(r\cos(v) + R)$,
$y(v,u) = \sin(u)(r\cos(v) + R)$ ja $z(u,v) = r\sin(v)$

5. Todistetaan ensin normaalivektoreiden ominaisuus.

$$\vec{r}_u = \begin{bmatrix} -\frac{v\sin(\frac{u}{2})\cos(u)}{4} - \sin(u)\left(\frac{v\cos(\frac{u}{2})}{2}+1\right) \\ -\frac{v\sin(\frac{u}{2})\sin(u)}{4} + \cos(u)\left(\frac{v\cos(\frac{u}{2})}{2}+1\right) \\ \frac{v\cos(\frac{u}{2})}{4} \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_v = \begin{bmatrix} \frac{\cos(\frac{u}{2})\cos(u)}{2} \\ \frac{\sin(u)\cos(\frac{u}{2})}{2} \\ \frac{\sin(\frac{u}{2})}{2} \end{bmatrix}$$

ja kun sijoitetaan $(0,0)$, niin saadaan

$\vec{r}_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ja $\vec{r}_v = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ja kun sijoitetaan $(2\pi, 0)$, niin

saadaan $\vec{r}_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ja $\vec{r}_v = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, jolloin

ristitulo on $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, eli vastakkaissuuntaiset vektorit.

Me saamme saman pisteen, koska kun sijoitetaan $(0,0)$, niin saadaan piste $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ja kun sijoitetaan $(2\pi, 0)$, niin saadaan myös $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ∎

6.

Ei voida käyttää jacobin determinanttia, koska matriisi ei ole neliö. Lasketaan $\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|$

Saadaan ristituloksi

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{bmatrix} r(R+r\cos(v))\cos(u)\cos(v) \\ r(R+r\cos(v))\sin(u)\cos(v) \\ r(R+r\cos(v))\sin(u)^2\sin(v)+r(R+r\cos(v))\sin(v)\cos(u)^2 \end{bmatrix}$$

Tämän magnitudi on

$$\sqrt{(r(R+r\cos(v))\cos(u)\cos(v))^2+(r(R+r\cos(v))\sin(u)\cos(v))^2+(r(R+r\cos(v))\sin(u)^2\sin(v)+r(R+r\cos(v))\sin(v)\cos(u)^2)^2}$$

Merkitään $k := r(R+r\cos(v))$, eli

$$\sqrt{(k\cos(u)\cos(v))^2+(k\sin(u)\cos(v))^2+(k\sin(u)^2\sin(v)+k\sin(v)\cos(u)^2)^2} = \sqrt{k^2\cos(u)^2\cos(v)^2+k^2\sin(u)^2\cos(v)^2+k^2\sin(u)^4\sin(v)^2+2k^2\sin(u)^2\sin(v)^2\cos(u)^2+k^2\sin(v)^2\cos(u)^4}$$

$$= k\sqrt{(\cos(u)^2+\sin(u)^2)(\cos(v)^2+\cos(u)^2\sin(v)^2+\sin(u)^2\sin(v)^2)}$$

$$= k\sqrt{\sin(u)^2\sin(v)^2+\sin(v)^2\cos(u)^2+\cos(v)^2} = k\sqrt{\sin(v)^2(\sin(u)^2+\cos(u)^2)+\cos(v)^2}$$

$$= k\sqrt{\sin(v)^2+\cos(v)^2} = k = r(R+r\cos(v))$$

Pinta-ala:

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(R+r\cos(v))\,dv\,du = r\int_0^{2\pi} du \int_0^{2\pi}(R+r\cos(v))\,dv$$

$$= r\cdot 2\pi\cdot\left(\int_0^{2\pi} R\,dv+\int_0^{2\pi} r\cos(v)\,dv\right) = r\cdot 2\pi\cdot 2\pi R+0 = 4\pi^2 rR$$

$$= (2\pi r)\cdot(2\pi R)$$