T1

a) Pallokondensaattorin kapasitanssi on $C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{r_a r_b}{r_a - r_b}$

& potentiaalienergia on $U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \frac{r_a - r_b}{r_a r_b} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right)$

Integroidaan $u = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2$, pallosymmetrisen takia $E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$, eli $u = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\right)^2 = \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{Q^2}{16\pi^2 r^4 \varepsilon_0^2}$

$= \frac{Q^2}{32\pi^2 r^4 \varepsilon_0}$ $\quad U = \int_{r_b}^{r_a} \frac{Q^2}{32\pi^2 r^4 \varepsilon_0} \, dA \, dr$

$= \int_{r_b}^{r_a} \frac{Q^2}{32\pi^2 r^4 \varepsilon_0} 4\pi r^2 \, dr = \int_{r_b}^{r_a} \frac{Q^2}{8\pi r^2 \varepsilon_0} dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \int_{r_b}^{r_a} \frac{1}{r^2} dr$

$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\left(-\frac{1}{r_a}\right) - \left(-\frac{1}{r_b}\right)\right) = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right)$

b) Maksimi pot. energia saadaan kun r_a menee äärettömyyteen, koska termi $\frac{1}{r_a}$ häviää kapasitanssi on tällöin

$$\lim_{r_a \to \infty} 4\pi\varepsilon_0 \frac{r_a r_b}{r_a - r_b} = \lim_{r_a \to \infty} 4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{r_a r_b}{r_a\left(1 - \frac{r_b}{r_a}\right)}\right)$$

$$= \lim_{r_a \to \infty} 4\pi\varepsilon_0 \frac{r_b}{1 - \frac{r_b}{r_a}} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{r_b}{1 - 0} = \underline{4\pi\varepsilon_0 r_b}$$

c) Työ on sama kuin pot. energia eli

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right)$$

T2

a) Jotta tanko leijuu, pitää magneettisen voiman F_B olla yhtäsuuri tangon painon F_g kanssa $F_B = F_g$

Tangon paino on $F_g = \pi (\frac{d}{2})^2 \cdot l \cdot \rho \cdot g$ missä l on tangon pituus ja ρ tiheys. Tankoon kohdistuva mag. voima $\vec{F}_B = I \vec{L} \times \vec{B}$, eli $\|\vec{F}_B\| = F_B = I \cdot (l \cdot \cos(45°) \cdot B)$

Ratkaistaan $I(l \cdot \cos(45°) \cdot B) = \pi (\frac{d}{2})^2 \cdot l \cdot \rho \cdot g$

$\Longrightarrow I \approx 50\,000\,A$

b) Kyllä c) Oletetaan, että $I = 900A$ ja ratkaistaan B

$\Longrightarrow B \approx 1{,}9mT$ (otin pois myös $\cos(45°)$ termin, koska pyydettiin voimakkuutta)

d) Eli kuinka paljon voimaa "jää" yli

$F_{nosto} = F_B - F_{g_{tanko}} = I \cdot l \cdot B - \pi (\frac{d}{2})^2 \cdot l \cdot \rho \cdot g \approx 0{,}829N$

$\frac{0{,}829N}{g} \approx$ 84,4 grammaa

T3 Superpositioperiaatteen mukaisesti voimme laskea suorien osuuksien ja puoliympyrän kentät erikseen ja summata ne yhteen. Lasketaan ensin $B_{puoliympyrä}$

$B_{puoliympyrä} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cdot \pi = \frac{\mu_0 I}{4R}$ Äärettömän osuuksien kontribuutiot ovat molempien $\frac{\mu_0 I}{\pi R}$, eli kokonaisuudessaan tämä on $B = \frac{\mu_0 I}{4R} + 2\left(\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\right) = \frac{\mu_0 I}{4R} + \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$

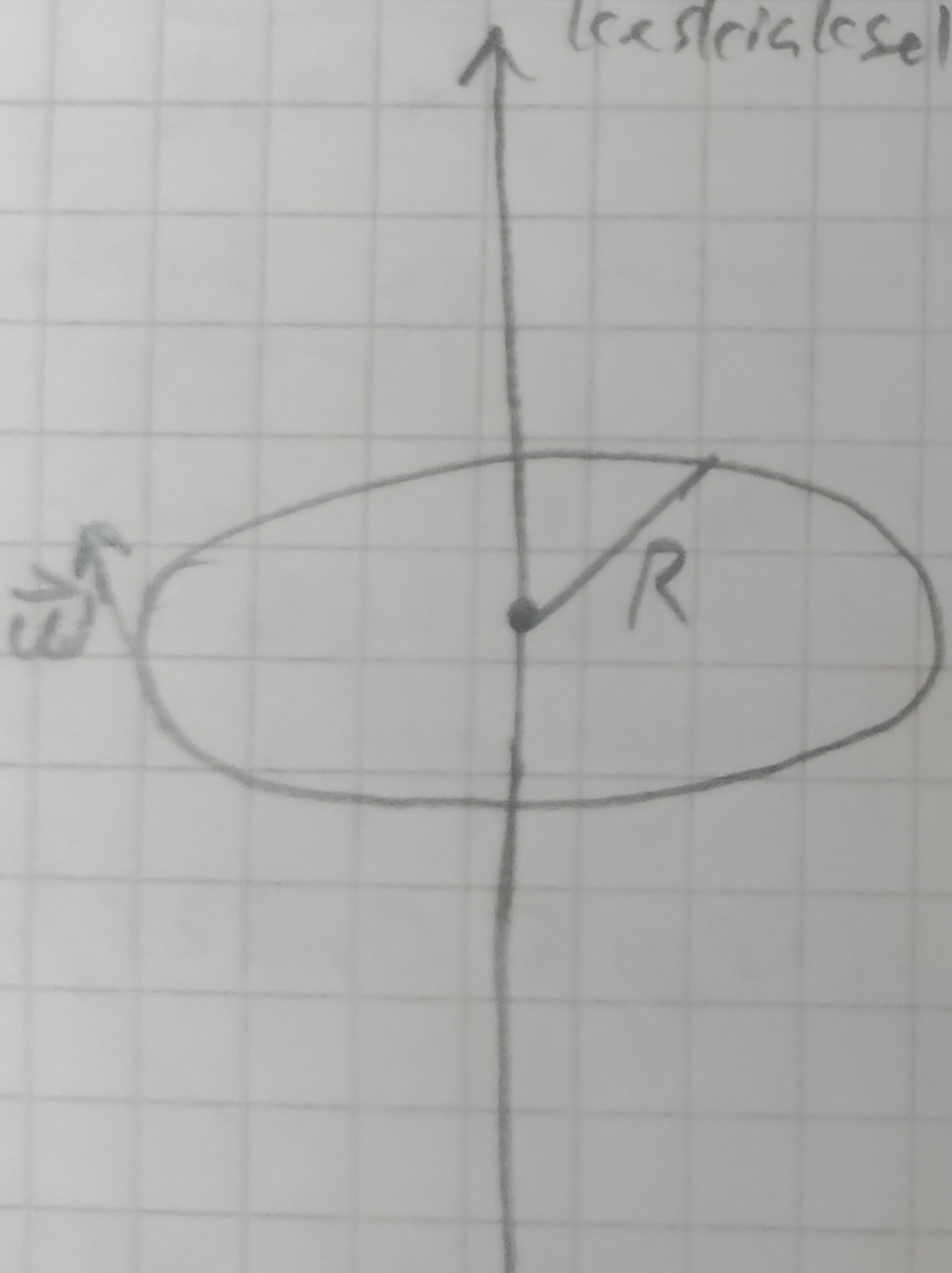
ja suunta on ruutuun päin

4. $\vec{F} = I\vec{l}\times\vec{B}$ Mieritään pienä keepelin pala

$d\vec{F} = I\,d\vec{l}\times\vec{B}$ ja koska magneettikenttä on voimakkuudeltaan ja suunnaltaan vakio, niin voiman suuruus on $F = NILB\sin\theta$ missä L on yhden kierroksen pituus $L = 2\pi R$ eli kokonaisvoima on $F = NI\cdot 2\pi R\cdot B\cdot \sin(60^\circ)$ $F \approx 0{,}43\,N$

ja suunta on alaspäin.

5.



Jaetaan kiekko pieniin renkaisiin etäisyydelle r ja paksuudelle dr

Tiedämme että johdinsilmukalle

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r} \quad \text{ja} \quad I = \frac{Q}{t} \quad \text{ja} \quad \omega = \frac{2\pi}{t}$$

$$\Rightarrow t = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow I = \frac{Q\omega}{2\pi}$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 Q\omega}{4\pi r}$$ ja koska σ

$$Q = 2\pi r\cdot\sigma\cdot dr$$ niin $$B = \frac{\mu_0 \cdot 2\pi r\sigma\omega}{4\pi r}dr$$

$$B = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}dr$$

Integroidaan tämä

$$B = \int_0^R \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}dr = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\int_0^R dr$$

$$= \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\cdot R = \frac{R\mu_0\sigma\omega}{2}$$