시간영역에서의 시스템 해석

한양대학교
HANYANG UNIVERSITY

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

5.1. 개요

대상 시스템의 특성은 일정한 입력이 시스템에 가해질 경우, 시스템이 어떻게 응답하는가를 통해서 파악할 수 있다.

1) **시간응답(time response)** 특성을 살펴보기 위해 자주 사용되는 기준입력에는 단위계단입력, 임펄스입력, 경사입력, 사인 입력 등이 있는데, 대부분 경우에 단위계단 신호를 사용한다. **단위계단 응답(unit step response)**을 알면 나머지 임펄스응답과 경사응답을 유추할 수 있기 때문이다.

2) 시간응답은 **과도응답(transient response)**과 **정상상태응답(steady-state response)** 두 가지로 구별된다.

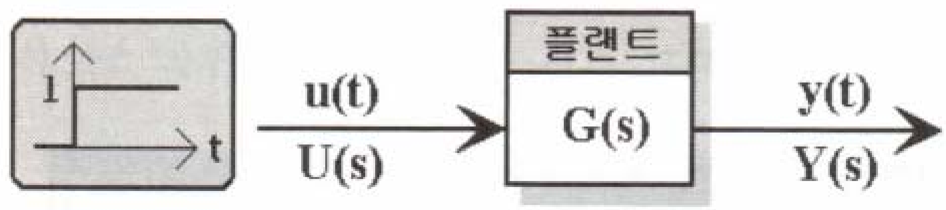
3) <u>**시스템의 시간영역 해석(time-domain analysis)**</u>은 과도응답과 정상상태응답의 특징을 분석하는 것이다 **(➔ 성능지표 평가).**

과도응답은 폐루프 시스템의 극점, 영점의 위치와 관련이 있으며,

정상상태응답은 전달함수의 형번호(type number)와 관련이 있다.

5.2. 계단입력과 시간응답

5.2.1. 1차 시스템의 단위계단응답(unit step response)



[그림 5.1] 단위 계단 응답

전달함수가 1차 시스템일 때, $G(s)=\dfrac{K}{\tau s+1}$

$U(s)=\dfrac{1}{s}$ 이므로, $Y(s)=G(s)U(s)=\dfrac{K}{\tau s+1}\dfrac{1}{s}=K\left(\dfrac{1}{s}-\dfrac{\tau}{\tau s+1}\right)$ $\Rightarrow$ $y(t)=K\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

DC gain

시상수

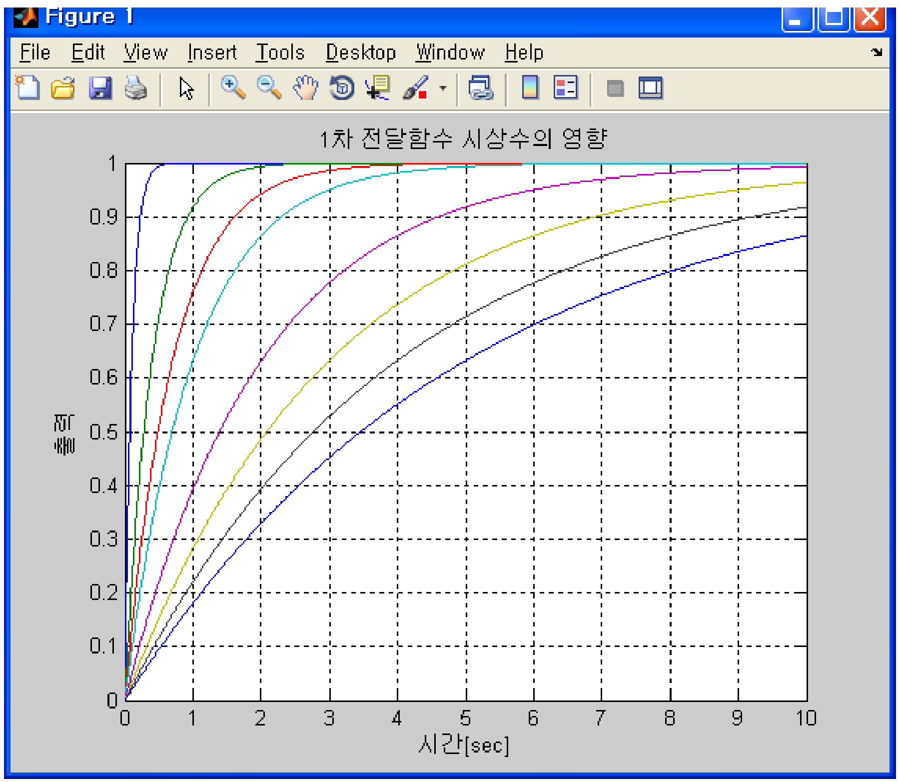
Time constant

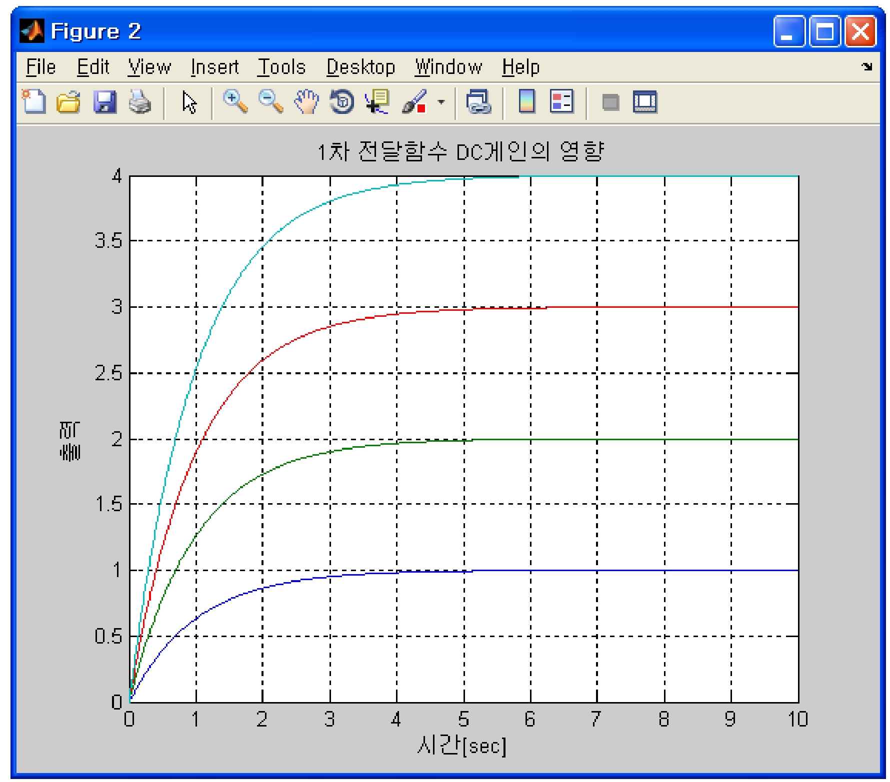
E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

5.2. 계단입력과 시간응답

5.2.1. 1차 시스템의 단위계단응답(unit step response)

[ex5_1] 1차 시스템의 시상수와 DC이득의 영향





E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

5.2. 계단입력과 시간응답

5.2.2. 2차 시스템의 단위계단응답(unit step response)

전달함수가 2차 시스템일 때, $G(s) = \dfrac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

ζ : 감쇠비

ω_n : 고유진동수

$\dfrac{1}{\sigma} = \dfrac{1}{\zeta\omega_n}$: 2차시스템의 시상수

$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$: 감쇠진동수

감쇠비 ζ에 따라 두 개의 실수 또는 켤레 복소수 극점을 갖는다.

$$s_{1,2} = \begin{cases} -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \equiv -\sigma \pm j\omega_d & \text{if } 0 < \zeta < 1 \\ -\omega_n\left(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) & \text{if } \zeta \geq 1 \end{cases}$$

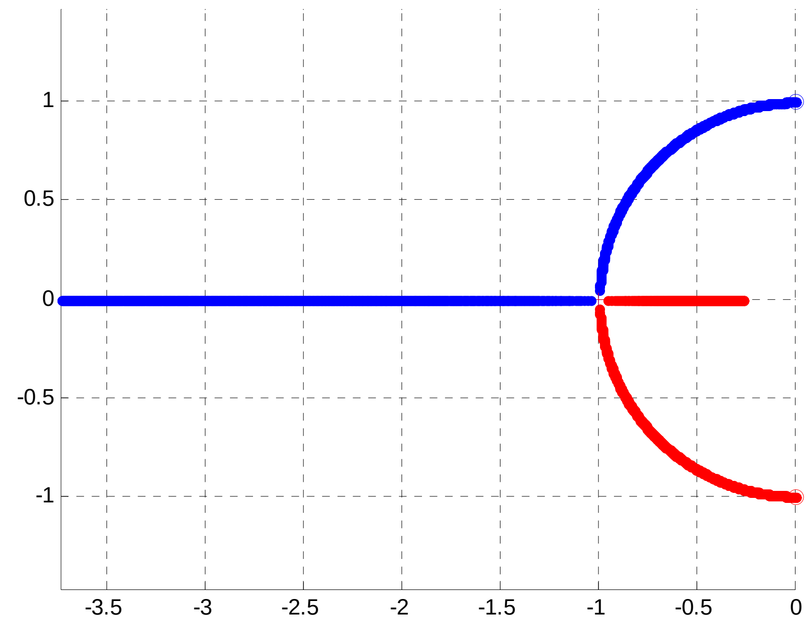
E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

5.2. 계단입력과 시간응답

5.2.2. 2차 시스템의 단위계단응답(unit step response)

감쇠비 ζ에 따라 극점을 구해보자.

```
Wn=1;

figure; hold on; grid on; axis equal;

for Zeta=0:0.001:2;
    s=roots([1 2*Zeta*Wn Wn^2]);

    if(Zeta==0)
        plot(real(s(1)),imag(s(1)),'bo');
        plot(real(s(2)),imag(s(2)),'ro');
    elseif(Zeta==1)
        plot(real(s(1)),imag(s(1)),'b+');
        plot(real(s(2)),imag(s(2)),'r+');
    else
        plot(real(s(1)),imag(s(1)),'b.');
        plot(real(s(2)),imag(s(2)),'r.');
    end

end
```



[Roots_of_2nd_eq.m]

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

5.2. 계단입력과 시간응답

5.2.2. 2차 시스템의 단위계단응답(unit step response)

***K*=1**인 경우, 단위계단응답

$0<\zeta<1$ 인 경우, $Y(s)=G(s)U(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\dfrac{1}{s}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{s+2\zeta\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$

이때, $\dfrac{s+2\zeta\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}=\dfrac{(s+\zeta\omega_n)+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+(1-\zeta^2)\omega_n^2}=\dfrac{(s+\zeta\omega_n)}{(s+\zeta\omega_n)^2+(1-\zeta^2)\omega_n^2}+\dfrac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+(1-\zeta^2)\omega_n^2}$

$$=\frac{(s+\zeta\omega_n)}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\omega_d}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2} \qquad \omega_d^2=(1-\zeta^2)\omega_n^2$$

$$\Rightarrow\ e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_d t+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t\right)=\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left(\sqrt{1-\zeta^2}\cos\omega_d t+\zeta\sin\omega_d t\right)$$

따라서, $y(t)=1-\dfrac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t+\phi)$ $\qquad \phi=\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$

5.2. 계단입력과 시간응답

5.2.2. 2차 시스템의 단위계단응답(unit step response)

***K*=1**인 경우, 단위계단응답

$0<\zeta<1$ 인 경우,

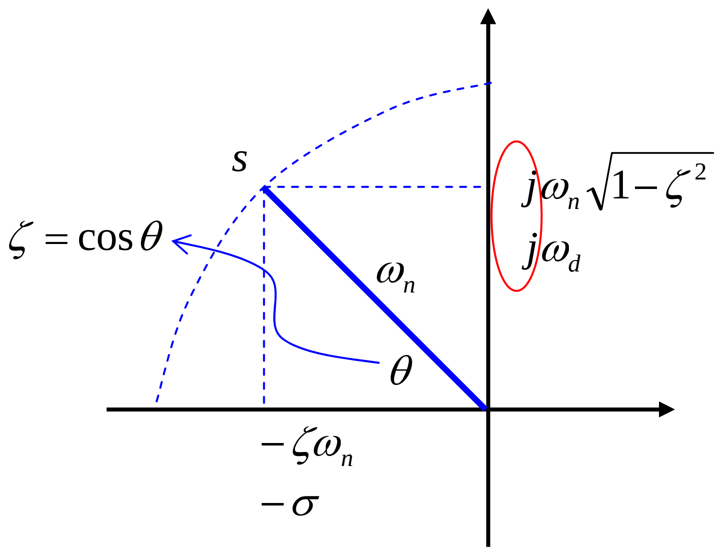
$$G(s)=\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

ζ :감쇠비

ω_n :고유진동수

$\frac{1}{\sigma}=\frac{1}{\zeta\omega_n}$:2차시스템의 시상수

$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$:감쇠진동수



E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

5.2. 계단입력과 시간응답

5.2.2. 2차 시스템의 단위계단응답(unit step response)

***K*=1**인 경우, 단위계단응답

$\zeta = 1$ 인 경우, $Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2}\frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\omega_n} - \frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2}$

따라서, $y(t) = 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}$

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

5.2. 계단입력과 시간응답

5.2.2. 2차 시스템의 단위계단응답(unit step response)

***K*=1인 경우**, 단위계단응답

$\zeta > 1$ 인 경우,
$$Y(s)=G(s)U(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\frac{1}{s}=\frac{1}{s}-\frac{s+2\zeta\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\begin{cases} s_1=-\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1} \\ s_2=-\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1} \end{cases}$$

이때,
$$\frac{s+2\zeta\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{A}{s-s_1}+\frac{B}{s-s_2}=\frac{(A+B)s+(A+B)\zeta\omega_n+(A-B)\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left(\frac{\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}}{s-s_1}+\frac{-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}}{s-s_2}\right)$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A-B=\dfrac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{\sqrt{\zeta^2-1}+\zeta}{2\sqrt{\zeta^2-1}} \\ B=\dfrac{\sqrt{\zeta^2-1}-\zeta}{2\sqrt{\zeta^2-1}} \end{cases}$$

$$=\frac{1}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}\left(\frac{\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}{s-s_1}+\frac{-\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}{s-s_2}\right)$$

$$=\frac{1}{s_1-s_2}\left(\frac{-s_2}{s-s_1}+\frac{s_1}{s-s_2}\right)$$

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

5.2. 계단입력과 시간응답

5.2.2. 2차 시스템의 단위계단응답(unit step response)

$$Y(s)=G(s)U(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\frac{1}{s}=\frac{1}{s}-\frac{s+2\zeta\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{1}{s_1-s_2}\left(\frac{-s_2}{s-s_1}+\frac{s_1}{s-s_2}\right)$$

$$\begin{cases} s_1=-\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1} \\ s_2=-\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1} \end{cases}$$

$$=\frac{1}{s}+\frac{s_2}{s_1-s_2}\frac{1}{s-s_1}-\frac{s_1}{s_1-s_2}\frac{1}{s-s_2}$$

$$=\frac{1}{s}+\frac{-\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}\frac{1}{s-\left(-\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}\right)}-\frac{-\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}\frac{1}{s-\left(-\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}\right)}$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}+1\right)\frac{1}{s-\left(-\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}\right)}+\frac{1}{2}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}-1\right)\frac{1}{s-\left(-\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}\right)}$$

$$\Rightarrow\quad y(t)=1-\frac{1}{2}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}+1\right)e^{-\omega_n\left(\zeta_n-\sqrt{\zeta^2-1}\right)t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}-1\right)e^{-\omega_n\left(\zeta_n+\sqrt{\zeta^2-1}\right)t}$$

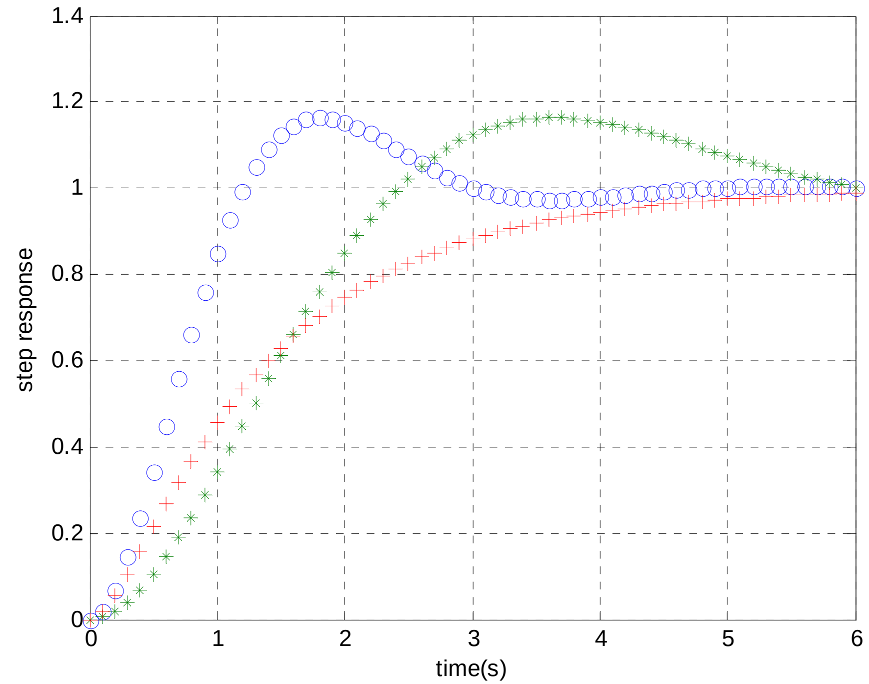
http://seit.unsw.adfa.edu.au/staff/sites/hrp/teaching/ct1/docs/step2ndorder.pdf

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

5.2. 계단입력과 시간응답

5.2.2. 2차 시스템의 단위계단응답(unit step response)

```
function [t, y]=ex0502_Step2nd(zeta, wn)
K=1;

numG=K*wn^2;
denG=[1 2*zeta*wn wn^2];

t=[0:0.1:6];
y=step(numG,denG,t);
```




```
>> [t y1]=ex0502_step2nd(0.5, 2);
>> [t y2]=ex0502_step2nd(0.5, 1);
>> [t y3]=ex0502_step2nd(1.5, 2);
>> figure(1); plot(t,y1,'o',t,y2,'*',t,y3,'+');
>> xlabel('time(s)'); ylabel('step response');
>> grid on;
```

5.2. 계단입력과 시간응답

5.2.3. 과도응답의 종류

2차 시스템의 단위계단 입력에 대한 응답은, 그 모양에 따라 세 가지로 구분할 수 있다.

1) 과소감쇠(under-damped response) $0 < \zeta < 1$

2) 임계감쇠(critically-damped response) $\zeta = 1$

3) 과다감쇠(over-damped response) $\zeta > 1$

$\zeta = 0$ 시스템은 임계안정한 상태가 되고, 출력은 사인함수 곡선과 같다.

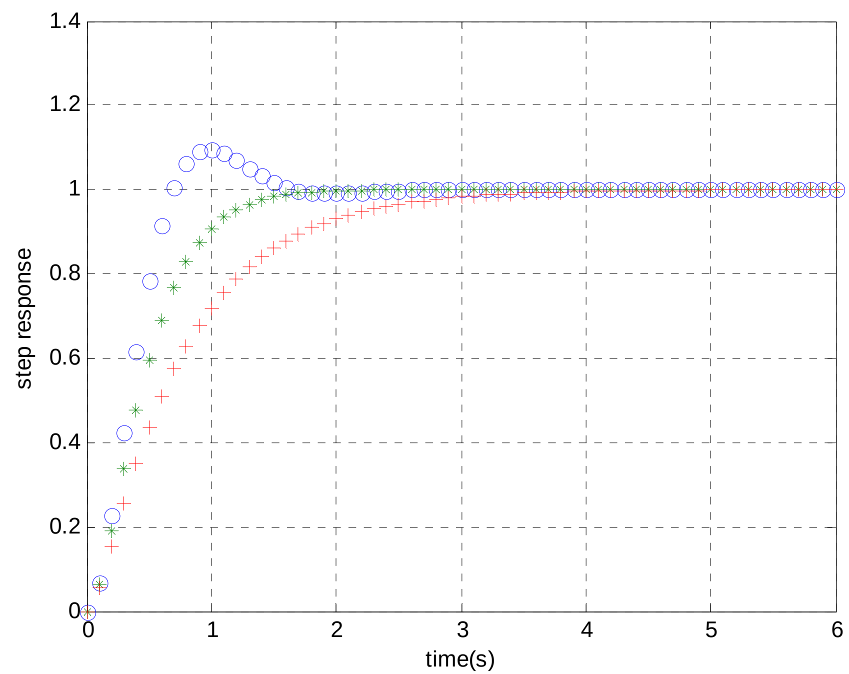
$\zeta < 0$ 시스템이 불안정하게 된다.

로봇제어에서는 충돌에 의한 영향을 줄이기 위해, 임계 응답이나 과다감쇠 응답이 많이 쓰인다.

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

5.2.3. 과도응답의 종류

```
>> [t y1]=ex0502_step2nd(0.6, 4);
>> [t y2]=ex0502_step2nd(1.0, 4);
>> [t y3]=ex0502_step2nd(1.6, 4);
>> figure(1); plot(t,y1,'o',t,y2,'*',t,y3,'+');
>> xlabel('time(s)'); ylabel('step response');
>> grid on;
```



E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

5.2. 계단입력과 시간응답

5.2.4. 임펄스, 경사응답 및 사인파응답

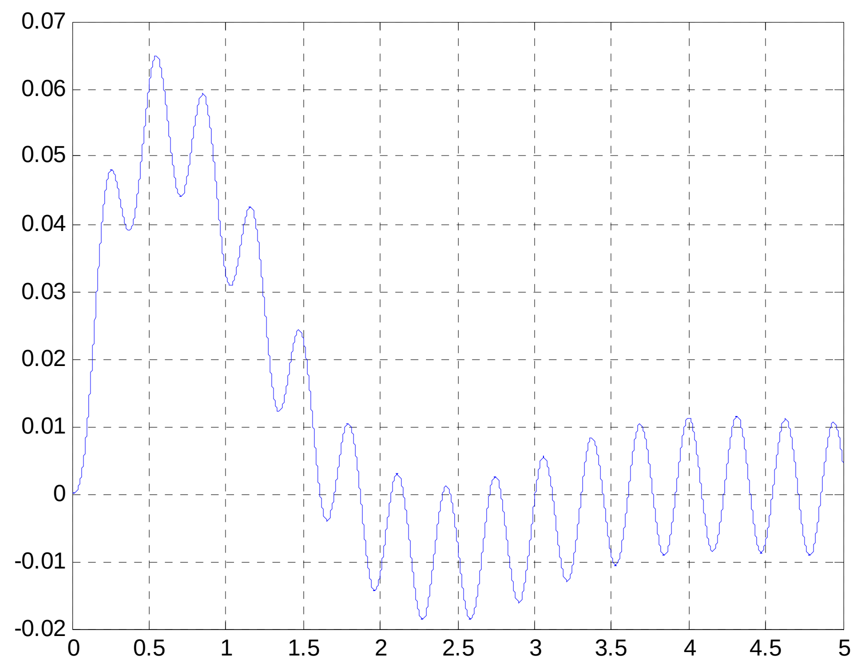
```
>>t=[초기시간:시간간격:최종시간];
>>yi=impulse(numG, denG, t);
>>ys=step(numG, denG, t);
>>r=t;
>>yr=lsim(numG, denG, r, t);
>>r=cos(t);
>>yc=lsim(numG, denG, r, t);
```


E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

5.2. 계단입력과 시간응답

5.2.4. 임펄스, 경사응답 및 사인파응답

```
K=1;
zeta=0.5; wn=2;
numG=K*wn^2;
denG=[ 1 2*zeta*wn wn^2];

t=[0:0.001:5];
r=sin(20*t);
y=lsim(numG,denG,r,t);
figure; plot(t,y); grid on;
```



E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

5.3. 2차 시스템과 과도응답 성능지표

전형적인 2차 시스템의 계단응답을 기준으로, 성능지표를 살펴보면 다음과 같다.

1) 첨두치 시간(peak time): 최고값에 도달할 때의 시간.

$$T_{peak} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}, 0 < \zeta < 1$$

2) 상승 시간(rise time): 출력이 10%에서 90%까지 걸리는 시간.

$$T_{rise} = \frac{\pi - \phi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi - \phi}{\omega_d}, \tan\phi = \frac{-\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

3) 오버슈트(overshoot): 출력 최대값과 정상상태 사이의 차이.

최대값 $M_p = 1 + e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$ POS(percent overshoot) $POS = 100\, e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}, 0 < \zeta < 1$

4) 정착시간(settling time): 정상상태 출력의 2% 또는 5% 이내로 수렴하는 시간.

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{\sigma} \qquad T_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} = \frac{3}{\sigma}$$

$$e^{-\zeta\omega_n t} = p \qquad -\zeta\omega_n t = \log p \qquad t = \frac{\log p}{-\zeta\omega_n}$$

포락선

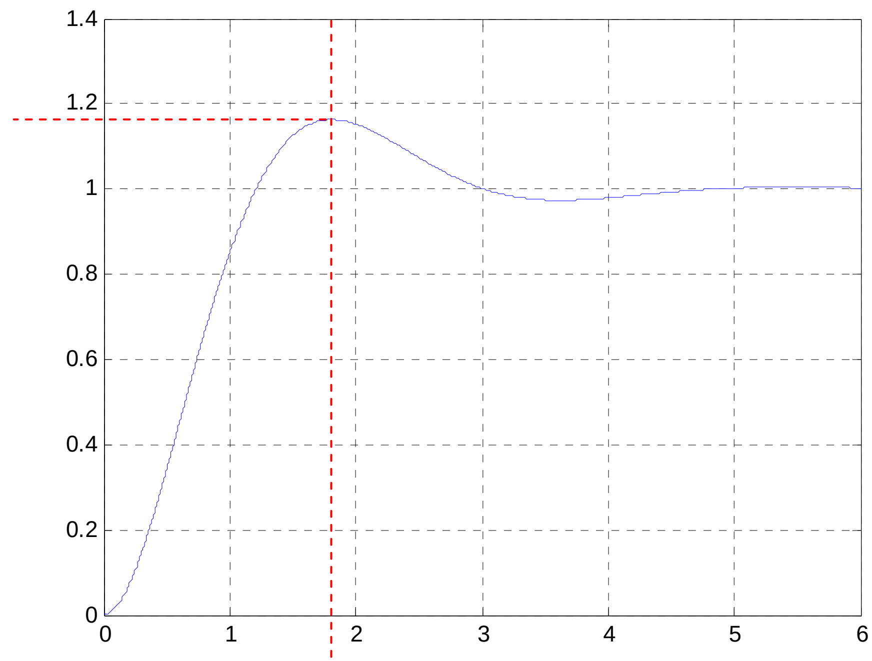
5) 정상상태 응답(steady-state response) $y_{ss} = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} sG(s)U(s) = \lim_{s\to 0} sG(s)\frac{1}{s} \to G(0)$

5.3. 2차 시스템과 과도응답 성능지표

[예제 5-6]

```
zeta=0.5; wn=2;
numG=wn^2;
denG=[1 2*zeta*wn wn^2];

t=[0:0.001:6];
y=step(numG,denG,t);

plot(t,y);

[Mp index]=max(y)
PO=(Mp-1)/1*100
Tpeak=t(index)
```

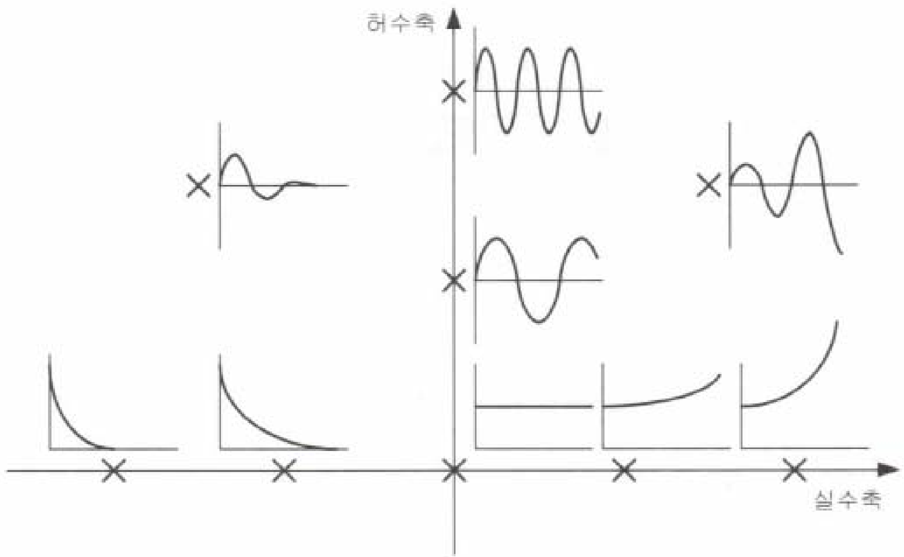
```
Mp =

    1.1630


index =

        1815


PO =

   16.3034


Tpeak =

    1.8140
```



E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

5.4. 극점, 영점과 과도응답

5.4.1. 극점 위치와 과도응답



[그림 5.15] 극점위치와 대응되는 임펄스응답 파형

- 극점이 좌반평면에 있으면 안정 → 시간응답 수렴
- 극점이 우반평면에 있으면 불안정 → 시간응답 발산
- 극점이 허수축 상에 있으면 임계안정(marginally stable) → 시간응답 진동
- 좌반평면의 극점이 원점 및 허수축과 멀수록, 빨리 수렴
- 극점이 실수축으로부터 멀수록, 진동주파수 증가

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

5.4. 극점, 영점과 과도응답

5.4.3. 영점 위치와 과도응답

영점은 극점처럼 시스템의 특성에 결정적인 영향을 주지는 않지만, 과도응답에 영향을 준다.

-영점이 원점으로부터 멀리 떨어져 있으면, 영점은 시스템 출력에 거의 영향을 주지 않는다.

- 영점이 s-평면의 좌반부에 있으면서 허수축에 가까워질수록, 출력신호의 오버슈트가 커진다.

- 영점이 s-평면의 우반부에 있으면서 허수축에 가까워질수록, 출력신호의 언더슈트가 커진다.

E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

5.5. 형 번호(Type Number)와 시간응답

어떤 시스템의 전달함수 G(s)를 인수분해하면, 다음과 같은 일반적인 형태로 표시할 수 있다.

$$G(s) = \frac{K\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)}{s^N \prod_{k=1}^{Q}(s+p_k)}$$

여기서, 상수 N 즉 전달함수에 포함된 적분기의 개수를 그 전달함수의 형 번호(type number)라고 한다.

[계단응답의 형태]

형 번호 0번: 일정한 값으로 수렴

형 번호 1번: 직선형태로 증가

형 번호 2번: 포물선 형태로 증가

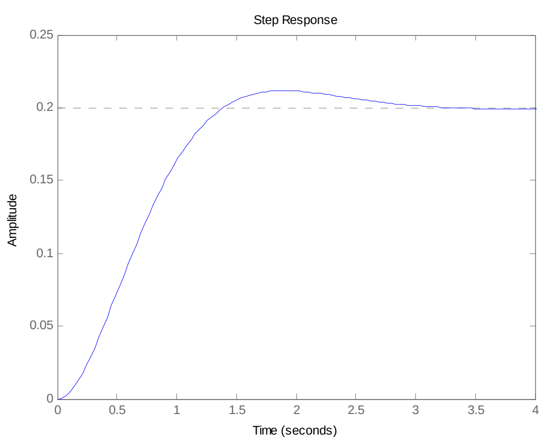
E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung

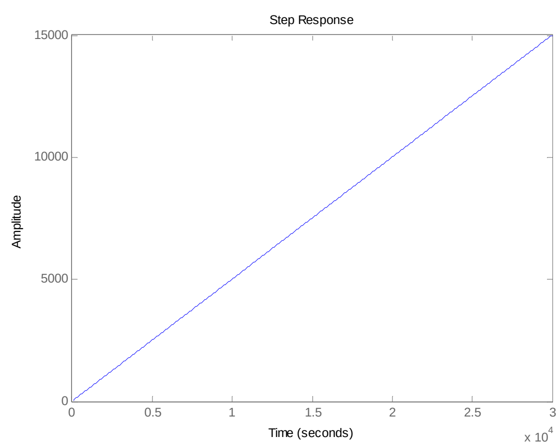
5.5. 형 번호(Type Number)와 시간응답

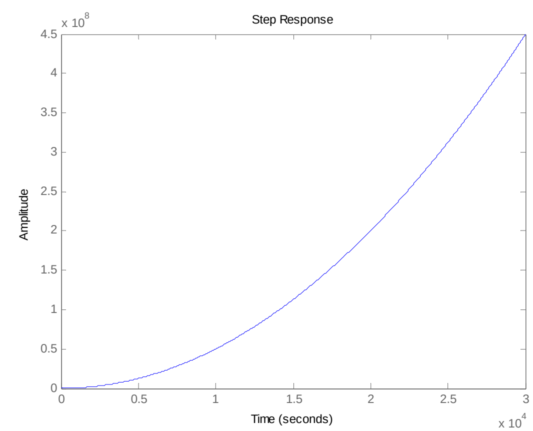
```
>> num=[1];
>> den=[1 3 5];
>> step(num,den)
```

```
>> num=[-1 1];
>> den=[1 2 0];
>> step(num,den)
```

```
>> num=[2];
>> den=[1 2 0 0];
>> step(num,den)
```







E-mail: hogijung@hanyang.ac.kr
http://web.yonsei.ac.kr/hgjung