Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade Estadual Paulista
Campus de Presidente Prudente

Lista de Cálculo 1: Derivada

Prof. Dr. Irineu Lopes Palhares Junior

Lista de exercícios

Presidente Prudente

Junho de 2023

Sumário

1 Derivada de uma função

Exercícios 7.2

1. Seja $f(x) = x^2 + 1$. Calcule

   a) $f'(1)$
   b) $f'(0)$
   c) $f'(x)$

2. Seja $f(x) = 2x$. Pensando geometricamente, qual o valor que você espera para $f'(p)$? Calcule $f'(p)$.

3. Seja $f(x) = 3x + 2$. Calcule

   a) $f'(2)$
   b) $f'(0)$
   c) $f'(x)$

4. Calcule $f'(p)$, pela definição, sendo dados

   a) $f(x) = x^2 + x$ e $p = 1$
   b) $f(x) = \sqrt{x}$ e $p = 4$
   c) $f(x) = 5x - 3$ e $p = -3$
   d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $p = 1$
   e) $f(x) = \sqrt{x}$ e $p = 3$
   f) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ e $p = 2$
   g) $f(x) = 2x^3 - x^2$ e $p = 1$
   h) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $p = 2$

5. Determine a equação da reta tangente em $(p, f(p))$ sendo dados

   a) $f(x) = x^2$ e $p = 2$
   b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $p = 2$
   c) $f(x) = \sqrt{x}$ e $p = 9$
   d) $f(x) = x^2 - x$ e $p = 1$

6. Calcule $f'(x)$, pela definição.

   a) $f(x) = x^2 + x$
   b) $f(x) = 3x - 1$
   c) $f(x) = x^3$
   d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$
   e) $f(x) = 5x$
   f) $f(x) = 10$
   g) $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$
   h) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

7. Dê exemplo (por meio de um gráfico) de uma função f, definida e derivável em $\mathbb{R}$, tal que $f'(1) = 0$.

8. Dê exemplo (por meio de um gráfico) de uma função f, definida e derivável em $\mathbb{R}$, tal que $f'(x) > 0$ para todo x.

9. Dê exemplo (por meio de um gráfico) de uma função f, definida e derivável em $\mathbb{R}$, tal que $f'(0) < f'(1)$.

10. Dê exemplo (por meio de um gráfico) de uma função f, definida e contínua em $\mathbb{R}$, tal que $f'(1)$ não exista.

11. Dê exemplo (por meio de um gráfico) de uma função f, definida e derivável em $\mathbb{R}$, tal que $f'(x) > 0$ para $x < 1$ e $f'(x) < 0$ para $x > 1$.

12. Dê exemplo (por meio de um gráfico) de uma função f, definida e derivável em $\mathbb{R}$, tal que $f'(x) > 0$ para $x < 0$, $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$ e $f'(x) > 0$ para $x > 2$.

13. Dê exemplo (por meio de um gráfico) de uma função f, definida e derivável em $\mathbb{R}$, tal que $f'(0) = 0$ e $f'(1) = 0$.

14. Mostre que a função

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x < 1 \\ -x + 4 & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

não é derivável em $p = 1$. Esboce o gráfico de g.

15. Seja $g(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{se } x < 1 \\ 2x + 1 & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$

a) Mostre que g é derivável em $p = 1$ e calcule $g'(1)$.
b) Esboce o gráfico de g.

16. Seja $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \geqslant 0 \\ x^2 + 2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

a) Esboce o gráfico de f.
b) f é derivável em $p = 0$? Em caso afirmativo, calcule $f'(0)$.

2 Derivadas de x^n e $\sqrt[n]{x}$

Exercícios 7.2

1. Seja $f(x) = x^2 + 1$. Calcule

   a) $f'(1)$
   b) $f'(0)$
   c) $f'(x)$

2. Seja $f(x) = 2x$. Pensando geometricamente, qual o valor que você espera para $f'(p)$? Calcule $f'(p)$.

3. Seja $f(x) = 3x + 2$. Calcule

   a) $f'(2)$
   b) $f'(0)$
   c) $f'(x)$

4. Calcule $f'(p)$, pela definição, sendo dados

   a) $f(x) = x^2 + x$ e $p = 1$
   b) $f(x) = \sqrt{x}$ e $p = 4$
   c) $f(x) = 5x - 3$ e $p = -3$
   d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $p = 1$
   e) $f(x) = \sqrt{x}$ e $p = 3$
   f) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ e $p = 2$
   g) $f(x) = 2x^3 - x^2$ e $p = 1$
   h) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $p = 2$

5. Determine a equação da reta tangente em $(p, f(p))$ sendo dados

   a) $f(x) = x^2$ e $p = 2$
   b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $p = 2$
   c) $f(x) = \sqrt{x}$ e $p = 9$
   d) $f(x) = x^2 - x$ e $p = 1$

6. Calcule $f'(x)$, pela definição.

   a) $f(x) = x^2 + x$
   b) $f(x) = 3x - 1$
   c) $f(x) = x^3$
   d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$
   e) $f(x) = 5x$
   f) $f(x) = 10$
   g) $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$
   h) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

3 Derivadas de e^x e $\ln x$

a) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} e^x \cdot \dfrac{e^h - 1}{h} = e^x$ pois, $\lim_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$ (Exemplo 3-6.3).

b) $g'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{1}{h} \ln\left(1 + \dfrac{h}{x}\right)$

$\left(u = \dfrac{h}{x}\right)$

$$= \lim_{u \to 0} \ln(1+u)^{\frac{1}{xu}} = \lim_{u \to 0} \frac{1}{x} \ln(1+u)^{\frac{1}{u}} = \frac{1}{x}$$

pois, $\lim_{u \to 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = e$ (Exemplo 2-6.3).

$$\boxed{\begin{array}{c} (e^x)' = e^x \\[2ex] (\ln x)' = \dfrac{1}{x},\ x > 0 \end{array}}$$

■

Exercícios 7.4

1. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = e^x$ no ponto de abscissa 0.

2. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \ln x$ no ponto de abscissa 1. Esboce os gráficos de f e da reta tangente.

3. Seja $f(x) = a^x$, em que $a > 0$ e $a \neq 1$ é um real dado. Mostre que $f'(x) = a^x \ln a$.

4. Calcule $f'(x)$.

   a) $f(x) = 2^x$
   b) $f(x) = 5^x$
   c) $f(x) = \pi^x$
   d) $f(x) = e^x$

5. Seja $g(x) = \log_a x$, em que $a > 0$ e $a \neq 1$ é constante. Mostre que $g'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$.

6. Calcule $g'(x)$

a) $g(x) = \log_3 x$
b) $g(x) = \log_5 x$
c) $g(x) = \log_\pi x$
d) $g(x) = \ln x$

7.5. DERIVADAS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Teorema. São válidas as fórmulas de derivação.

a) $\text{sen}'x = \cos x$.
b) $\cos' x = -\text{sen}\, x$.
c) $\text{tg}' x = \sec^2 x$.
d) $\sec' x = \sec x \,\text{tg}\, x$.
e) $\text{cotg}' x = -\text{cosec}^2 x$.
f) $\text{cosec}' x = -\text{cosec}\, x \,\text{cotg}\, x$.

Demonstração

4 Derivadas de funções trigonométricas

Exercícios 7.5

1. Seja $f(x) = \text{sen}\, x$. Calcule.

   a) $f'(x)$

   $b)\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

2. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \text{sen}\, x$ no ponto de abscissa 0.

3. Seja $f(x) = \cos x$. Calcule.

   a) $f'(x)$

   b) $f'(0)$

   $c)\ f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$

   $d)\ f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

4. Calcule $f'(x)$ sendo

   a) $f(x) = \text{tg}\, x$

   b) $f(x) = \sec x$

5. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \text{tg}\, x$ no ponto de abscissa 0.

6. Seja $f(x) = \text{cotg}\, x$. Calcule.

   a) $f'(x)$

   $b)\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

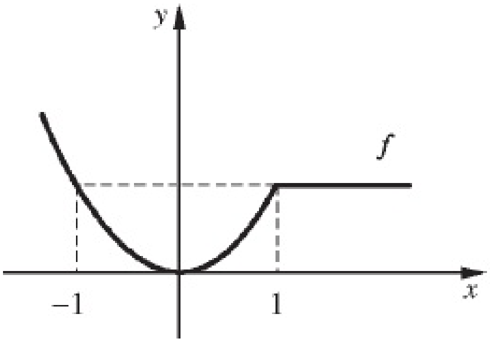
7. Seja $g(x) = \text{cosec}\, x$. Calcule.

   a) $g'(x)$

   $b)\ g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

7.6. DERIVABILIDADE E CONTINUIDADE

5 Derivabilidade e continuidade



f é contínua em 1, mas não é derivável neste ponto; o gráfico de f apresenta um "bico" no ponto $(1, f(1))$. ■

EXEMPLO 3. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leqslant 1 \\ 2x - 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

a) f é derivável em 1?
b) f é contínua em 1?

Solução

a) $$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{se } x < 1 \\ \\ 2 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2.$$

Logo, f é *derivável* em 1 e $f'(1) = 2$.

b) Como f é derivável em 1, segue que f é contínua em 1. ■

Exercícios 7.6

1. Seja $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x < 2 \\ \\ 1 & \text{se } x \geqslant 2 \end{cases}$.

   a) f é contínua em 2? Por quê?
   b) f é derivável em 2? Por quê?

2. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leqslant 0 \\ -x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}.$

a) *f* é derivável em 0? Justifique.
b) *f* é contínua em 0? Justifique.

3. Seja $f(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{se } x < 3 \\ x - 3 & \text{se } x \geqslant 3 \end{cases}.$

a) *f* é derivável em 3? Justifique.
b) *f* é contínua em 3? Justifique.

7.7. REGRAS DE DERIVAÇÃO

Teorema 1. Sejam f e g deriváveis em p e seja k uma constante. Então as funções $f + g$, kf e $f \cdot g$ são deriváveis em p e têm-se

(D1) $(f + g)'(p) = f'(p) + g'(p)$.
(D2) $(kf)'(p) = kf'(p)$.
(D3) $(f \cdot g)'(p) = f'(p)\, g(p) + f(p)\, g'(p)$.

Demonstração

$$\text{(D1) } (f+g)'(p) = \lim_{x \to p} \frac{[f(x) + g(x)] - [f(p) + g(p)]}{x - p}$$
$$= \lim_{x \to p} \left[\frac{f(x) - f(p)}{x - p} + \frac{g(x) - g(p)}{x - p} \right]$$

(Em palavras: *a derivada de uma soma é igual à soma das derivadas das parcelas*.)

$$\text{(D2) } (kf)'(p) = \lim_{x \to p} \frac{kf(x) - kf(p)}{x - p} = k \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = kf'(p),$$

$$(kf)'(p) = kf'(p).$$

6 Regras de derivação

Solução

i) Para $n = 2$ é verdadeira (D1).
ii) Seja $k \geq 2$. De

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_k + f_k + 1 = [f_1 + f_2 + \ldots + f_k] + f_{k+1}$$

segue que se a afirmação for verdadeira para $n = k$ também o será para $n = k + 1$. ■

EXEMPLO 8. Calcule a derivada

a) $f(x) = 3x^5 + \frac{1}{3}x^4 + x + 2.$ *b)* $g(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} + \sqrt{x}.$

Solução

$$a)\ f'(x) = \left[3x^5 + \frac{1}{3}x^4 + x + 2\right]' = (3x^5)' + \left(\frac{1}{3}x^4\right)' + (x)' + (2)' = 15x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 1.$$

Assim,

$$f'(x) = 15x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 1.$$

$$b)\ g'(x) = \left[x^2 + \frac{1}{x^2} + \sqrt{x}\right]' = (x^2)' + \left(\frac{1}{x^2}\right)' + (\sqrt{x})' = 2x - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

ou seja,

$$g'(x) = 2x - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$ ■

Exercícios 7.7

1. Calcule $f'(x)$.

$a)\ f(x) = 3x^2 + 5$

$b)\ f(x) = x^3 + x^2 + 1$

$c)\ f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4$

$d)\ f(x) = 3x + \sqrt{x}$

$e)\ f(x) = 5 + 3x^{-2}$

$f)\ f(x) = 2\sqrt[3]{x}$

$g)\ f(x) = 3x + \dfrac{1}{x}$

$h)\ f(x) = \dfrac{4}{x} + \dfrac{5}{x^2}$

$i)\ f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{1}{4}x^2$

$j)\ f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt{x}$

$l)\ f(x) = 2x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

$m)\ f(x) = 6x^3 + \sqrt[3]{x}$

$n)\ f(x) = 5x^4 + bx^3 + cx^2 + k$, em que b, c e k são constantes.

2. Seja $g(x) = x^3 + \dfrac{1}{x}$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto $(1, g(1))$.

3. Seja $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$.

   a) Determine o ponto do gráfico de f em que a reta tangente, neste ponto, seja paralela ao eixo x.
   b) Esboce o gráfico de f.

4. Seja $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$.

   a) Estude o sinal de $f'(x)$.
   b) Calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.
   c) Utilizando as informações acima, faça um esboço do gráfico de f.

5. Mesmo exercício que o anterior, considerando a função $f(x) = x^3 + x^2 - 5x$.

6. Seja $f(x) = x^3 + 3x$.

   a) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 0.
   b) Estude o sinal de $f'(x)$.
   c) Esboce o gráfico de f.

7. Calcule $F'(x)$ em que $f(x)$ é igual a

$a)\ \dfrac{x}{x^2+1}$

$b)\ \dfrac{x^2-1}{x+1}$

$c)\ \dfrac{3x^2+3}{5x-3}$

$d)\ \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

$e)\ 5x+\dfrac{x}{x-1}$

$f)\ \sqrt{x}+\dfrac{3}{x^3+2}$

$g)\ \dfrac{\sqrt[3]{x}+x}{\sqrt{x}}$

$h)\ \dfrac{x+\sqrt[4]{x}}{x^2+3}$

8. Seja $g(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

a) Determine os pontos do gráfico de *g* em que as retas tangentes, nestes pontos, sejam paralelas ao eixo *x*.

b) Estude o sinal de $g'(x)$.

c) Calcule $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} g(x)$.

d) Utilizando as informações acima, faça um esboço do gráfico de *g*.

9. Calcule $f'(x)$ em que $f(x)$ é igual a

$a)\ 3x^2+5\cos x$

$b)\ \dfrac{\cos x}{x^2+1}$

$c)\ x \operatorname{sen} x$

$d)\ x^2 \operatorname{tg} x$

$e)\ \dfrac{x+1}{\operatorname{tg} x}$

$f)\ \dfrac{3}{\operatorname{sen} x+\cos x}$

$g)\ \dfrac{\sec x}{3x+2}$

$h)\ \cos x+(x^2+1)\operatorname{sen} x$

$i)\ \sqrt{x}\ \sec x$

$j)\ 3\cos x+5\sec x$

$l)\ x \operatorname{cotg} x$

$m)\ 4\sec x+\operatorname{cotg} x$

$n)\ x^2+3x\operatorname{tg} x$

$o)\ \dfrac{x^2+1}{\sec x}$

$p)\ \dfrac{x+1}{x\operatorname{sen} x}$

$q)\ \dfrac{x}{\operatorname{cosec} x}$

$r)\ (x^3+\sqrt{x})\operatorname{cosec} x$

$s)\ \dfrac{x+\operatorname{sen} x}{x-\cos x}$

10. Seja $f(x)=x^2\operatorname{sen} x+\cos x$. Calcule:

a) $f'(x)$
b) $f'(0)$
c) $f'(3a)$
d) $f'(x^2)$

11. Seja $f(x) = \text{sen}\, x + \cos x$, $0 \le x \le 2\pi$.

a) Estude o sinal de $f'(x)$.
b) Faça um esboço do gráfico de *f*.

12. Calcule $f'(x)$.

a) $f(x) = x^2 e^x$

b) $f(x) = 3x + 5 \ln x$

c) $f(x) = e^x \cos x$

d) $f(x) = \dfrac{1 + e^x}{1 - e^x}$

e) $f(x) = x^2 \ln x + 2e^x$

f) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x \ln x}$

g) $f(x) = 4 + 5x^2 \ln x$

h) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$

i) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

j) $f(x) = \dfrac{e^x}{x + 1}$

13. Sejam *f*, *g* e *h* funções deriváveis. Verifique que

$$[f(x)\, g(x)\, h(x)]' = f'(x)\, g(x)\, h(x) + f(x)\, g'(x)\, h(x) + f(x)\, g(x)\, h'(x).$$

14. Calcule $F'(x)$ sendo $f(x)$ igual a

a) $x e^x \cos x$ *b*)
b) $x_2 (\cos x)(1 + \ln x)$
c) $e^x \,\text{sen}\, x \cos x$
d) $(1 + \sqrt{x})\, e^x \,\text{tg}\, x$

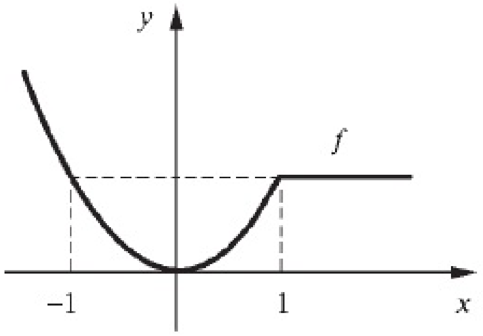
7.8. FUNÇÃO DERIVADA E DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR

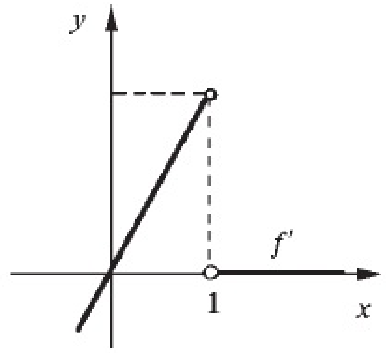
Sejam *f* uma função e *A* o conjunto dos *x* para os quais $f'(x)$ existe. A função $f' : A \to \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto f'(x)$, denomina-se *função derivada* ou, simplesmente, *derivada*

7 Função derivada e derivada de ordem superior

Logo, f não é derivável em 1, isto é, $f'(1)$ não existe. Portanto

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se} \quad x < 1 \\ 0 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}; \quad D_{f'} = \mathbb{R} - \{1\}.$$





■

Exercícios 7.8

1. Determine f', f'' e f'''.

$a)\ f(x) = 4x^4 + 2x$ $\qquad b)\ f(x) = \dfrac{1}{x}$

$c)\ f(x) = 5x^2 - \dfrac{1}{x^3}$ $\qquad d)\ f(x) = 3x^3 - 6x + 1$

$e)\ f(x) = x\,|x|$ $\qquad f)\ f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & \text{se} \quad x \leqslant 1 \\ 5x - 1 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$

2. Esboce os gráficos de f, f' e f''.

$a)\ f(x) = x^2\,|x|$ $\qquad b)\ f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & \text{se} \quad x \leqslant 1 \\ 5x - 1 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$

3. Determine a derivada de ordem n.

a) $f(x) = e^x$
b) $f(x) = \text{sen}\ x$
c) $f(x) = \cos x$
d) $f(x) = \ln x$

7.9. NOTAÇÕES PARA A DERIVADA

8 Notação para derivada

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3x) = \left[\frac{d}{dt}(t^3)\right]x + t^3\frac{dx}{dt}$$

ou seja,

$$\frac{dy}{dt} = 3t^2x + t^3\frac{dx}{dt}.$$

b) Temos:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}[3t^2x] + \frac{d}{dt}\left[t^3\frac{dx}{dt}\right] = 6tx + 3t^2\frac{dx}{dt} + 3t^2\frac{dx}{dt} + t^3\frac{d^2x}{dt^2},$$

ou seja,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 6tx + 6t^2\frac{dx}{dt} + t^3\frac{d^2x}{dt^2}.$$ ■

Exercícios 7.9

1. Calcule a derivada.

a) $y = 5x^3 + 6x - 1$

b) $s = \sqrt[5]{t} + \frac{3}{t}$

c) $x = \frac{t}{t+1}$

d) $y = t\cos t$

e) $y = \frac{u+1}{\ln u}$

f) $x = t^3e^t$

g) $s = e^t \operatorname{tg} t$

h) $y = \frac{x^3+1}{\operatorname{sen} x}$

i) $y = \sqrt[3]{u}\ \sec u$

j) $x = \frac{3}{t} + \frac{2}{t^2}$

l) $x = e^t\cos t$

m) $u = 5v^2 + \frac{3}{v^4}$

n) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

o) $E = \frac{1}{2}v^2$

p) $E = \frac{1}{2}mv^2$, m constante

q) $U = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6}$, a e b constantes

2. Seja $y = \dfrac{x^3}{x + \sqrt{x}}$. Calcule.

$a)\ \dfrac{dy}{dx}$ $\qquad\qquad$ $b)\ \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x = 1}$

3. Seja $y = t^2x$, em que $x = x(t)$ é uma função derivável. Calcule $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t = 1}$ supondo $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t = 1} = 2$ e $x = 3$ para $t = 1$ (isto é, $x(1) = 3$).

4. Considere a função $y = xt^3$, na qual $x = x(t)$ é uma função derivável. Calcule $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t = 2}$ sabendo que $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t = 2} = 3$ e que $x(2) = 1$ (isto é, $x = 1$ para $t = 2$).

5. Considere a função $y = \dfrac{t}{x + t}$, na qual $t = t(x)$ é uma função derivável. Calcule $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x = 1}$ sabendo que $\left.\dfrac{dt}{dx}\right|_{x = 1} = 4$ e que $t = 2$ para $x = 1$. (Observe que t está sendo olhado como função de x.)

6. Seja $y = \dfrac{1}{x^2}$. Verifique que $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$.

7. Seja $y = \dfrac{-2}{x^2 + k}$, k constante. Verifique que $\dfrac{dy}{dx} - xy^2 = 0$.

8. Calcule a derivada segunda.

a) $y = x^3 + 2x - 3$

b) $x = t \operatorname{sen} t$

c) $y = x^{10} + \dfrac{1}{x^3}$

d) $y = t \ln t$

e) $x = e^t \cos t$

f) $y = \dfrac{e^x}{x}$

9. Seja $y = x^2 - 3x$. Verifique que $x\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} = 3$.

10. Seja $y = \dfrac{1}{x}$. Verifique que $x^2\dfrac{d^3y}{dx^3} = 6\dfrac{dy}{dx}$.

11. Seja $x = \cos t$. Verifique que $\dfrac{d^2x}{dt^2} + x = 0$.

12. Seja $y = e^x \cos x$. Verifique que $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$.

13. Seja $y = te^t$. Verifique que $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = 0$.

14. Suponha que $y = y(r)$ seja derivável até a 2.ª ordem. Verifique que

$$\frac{d}{dr}\left[(r^2 + r)\frac{dy}{dr}\right] = (2r + 1)\frac{dy}{dr} + (r^2 + r)\frac{d^2y}{dr^2}.$$

15. Seja $y = x^2$, em que $x = x(t)$ é uma função derivável até a 2.ª ordem. Verifique que

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2x\frac{d^2x}{dt^2}.$$

16. Suponha que $x = x(t)$ seja derivável até a 2.ª ordem. Verifique que

$$a)\ \frac{d}{dt}\left(t^2\frac{dx}{dt}\right) = 2t\frac{dx}{dt} + t^2\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$b)\ \frac{d}{dt}\left(x\frac{dx}{dt}\right) = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x\frac{d^2x}{dt^2}$$

7.10. REGRA DA CADEIA PARA DERIVAÇÃO DE FUNÇÃO COMPOSTA

Sejam $y = f(x)$ e $x = g(t)$ duas funções deriváveis, com $\text{Im}\,g \subset D_f$. Nosso objetivo, a seguir, é provar que a composta $h(t) = f(g(t))$ é derivável e que vale a *regra da cadeia*

① $$\boxed{h'(t) = f'(g(t))\,g'(t),\ t \in D_g}$$

Antes de passarmos à demonstração de ①, vejamos como fica a regra da cadeia na notação de Leibniz. Temos

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \text{ e } \frac{dx}{dt} = g'(t).$$

Sendo a composta dada por $y = f(g(t))$, segue de ① que

9 Aplicação da regra da cadeia

ou seja,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 6x\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 3x^2\,\frac{d^2x}{dt^2}. \qquad \blacksquare$$

Exercícios 7.11

1. Determine a derivada.

   a) $y = \operatorname{sen} 4x$ *b)* $y = \cos 5x$
   c) $f(x) = e^{3x}$ *d)* $f(x) = \cos 8x$
   e) $y = \operatorname{sen} t^3$ *f)* $g(t) = \ln(2t + 1)$
   g) $x = e^{\operatorname{sen} t}$ *h)* $f(x) = \cos e^x$
   i) $y = (\operatorname{sen} x + \cos x)^3$ *j)* $y = \sqrt{3x + 1}$
   l) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$ *m)* $y = e^{-5x}$
   n) $x = \ln(t^2 + 3t + 9)$ *o)* $f(x) = e^{\operatorname{tg} x}$
   p) $y = \operatorname{sen}(\cos x)$ *q)* $g(t) = (t^2 + 3)^4$
   r) $f(x) = \cos(x^2 + 3)$ *s)* $y = \sqrt{x + e^x}$
   t) $y = \operatorname{tg} 3x$ *u)* $y = \sec 3x$

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável e seja $g(t) = f(t^2 + 1)$. Supondo $f'(2) = 5$, calcule $g'(1)$.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável e seja g dada por $g(x) = f(e^{2x})$. Supondo $f'(1) = 2$, calcule $g'(0)$.

4. Derive.

$a)\ y = xe^{3x}$

$b)\ y = e^x \cos 2x$

$c)\ y = e^{-x} \operatorname{sen} x$

$d)\ y = e^{-2t} \operatorname{sen} 3t$

$e)\ f(x) = e^{-x^2} + \ln(2x+1)$

$f)\ g(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$

$g)\ y = \dfrac{\cos 5x}{\operatorname{sen} 2x}$

$h)\ f(x) = (e^{-x} + e^{x^2})^3$

$i)\ y = t^3 e^{-3t}$

$j)\ g(x) = e^{x^2} \ln(1 + \sqrt{x})$

$l)\ y = (\operatorname{sen} 3x + \cos 2x)^3$

$m)\ y = \sqrt{e^x + e^{-x}}$

$n)\ y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

$o)\ y = \sqrt{x^2 + e^{\sqrt{x}}}$

$p)\ y = x \ln(2x+1)$

$q)\ y = [\ln(x^2+1)]^3$

$r)\ y = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$

$s)\ y = \cos^3 x^3$

$t)\ f(x) = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$

$u)\ f(t) = \dfrac{te^{2t}}{\ln(3t+1)}$

5. Calcule a derivada segunda.

$a)\ y = \operatorname{sen} 5t$

$b)\ y = \cos 4t$

$c)\ x = \operatorname{sen} \omega t$, ω constante

$d)\ y = e^{-3x}$

$e)\ y = e^{-x^2}$

$f)\ y = \dfrac{e^x}{x+1}$

$g)\ y = \ln(x^2+1)$

$h)\ y = \dfrac{x^2}{x-1}$

$i)\ y = e^{-x} - e^{-2x}$

$j)\ y = e^{-x} \cos 2x$

$l)\ y = \dfrac{x}{x^2+1}$

$m)\ y = \dfrac{3x+1}{x^2+x}$

$n)\ y = \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{e^x}$

$o)\ y = xe^{-2x}$

$p)\ y = \operatorname{sen}(\cos x)$

$q)\ f(x) = \dfrac{4x+5}{x^2-1}$

$r)\ y = xe^{\frac{1}{x}}$

$s)\ y = \dfrac{x^2}{x^2+x+1}$

$t)\ g(t) = \sqrt{t^2+3}$

$u)\ y = x\sqrt[3]{x+2}$

6. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e seja f dada por $f(x) = x\, g(x^2)$. Verifique que

$$f'(x) = g(x^2) + 2x^2\, g'(x^2).$$

7. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e seja f dada por $f(x) = x\,g(x^2)$. Calcule $f'(1)$ supondo $g(1) = 4$ e $g'(1) = 2$.

8. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável tal que $g(1) = 2$ e $g'(1) = 3$. Calcule $f'(0)$, sendo f dada por $f(x) = e^x\,g(3x + 1)$.

9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável até a 2.ª ordem e seja g dada por $g(x) = f(e^{2x})$. Verifique que

$$g''(x) = 4e^{2x}\,[f'(e^{2x}) + e^{2x}f''(e^{2x})].$$

10. Seja $y = e^{2x}$. Verifique que $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4y = 0.$

11. Seja $y = xe^{2x}$. Verifique que $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0.$

12. Determine α de modo que $y = e^{\alpha x}$ verifique a equação $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4y = 0.$

13. Determine α de modo que $y = e^{\alpha x}$ verifique a equação $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0.$

14. Seja $y = e^{\alpha x}$, em que α é uma raiz da equação $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$, com a e b constantes. Verifique que

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0.$$

15. Seja g uma função derivável. Verifique que

a) $[\text{tg } g(x)]' = \sec^2 g(x) \cdot g'(x)$
b) $[\sec g(x)]' = \sec g(x)\ \text{tg } g(x) \cdot g'(x)$
c) $[\text{cotg } g(x)]' = -\text{cosec}^2\, g(x) \cdot g'(x)$
d) $[\text{cosec } g(x)]' = -\text{cosec } g(x)\ \text{cotg } g(x) \cdot g'(x)$

16. Derive.

a) $y = \text{tg } 3x$
b) $y = \sec 4x$
c) $y = \text{cotg } x^2$
d) $y = \sec(\text{tg } x)$

e) $y = \sec x^3$

f) $y = e^{\text{tg}}\, x^2$

g) $y = \text{cosec}\, 2x$

h) $y = x^3\, \text{tg}\, 4x$

i) $y = \ln(\sec 3x + \text{tg}\, 3x)$

j) $y = e{-}x \sec x^2$

l) $y = (x^2 + \text{cotg}\, x^2)^3$

m) $y = x^2\, \text{tg}\, 2x$

17. Seja $y = \cos \omega t$, ω constante. Verifique que

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0.$$

18. Seja $y = e^{-t} \cos 2t$. Verifique que

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 5y = 0.$$

19. Seja $y = \frac{x+1}{x-1}$. Verifique que

$$(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx}.$$

20. Seja $y = f(x)$ derivável até a 2.ª ordem. Verifique que

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 \frac{dy}{dx}\right) = 2x\frac{dy}{dx} + x^2\frac{d^2y}{dx^2}.$$

21. Seja $y = \sqrt{x^2+1}$. Verifique que

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2} = 1.$$

22. Seja $y = y(x)$ definida no intervalo aberto I e tal que, para todo x em I,

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2.$$

Verifique que, para todo x em I,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x + 2x^2y + 2y^3.$$

23. Seja $y = f(x)$ uma função derivável num intervalo aberto I, com $1 \in I$. Suponha $f(1) = 1$ e que, para todo x em I, $f'(x) = x + [f(x)]^3$.

a) Mostre que $f''(x)$ existe para todo x em I.
b) Calcule $f''(1)$.
c) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.

24. Seja $y = y(r)$ derivável até a 2.ª ordem. Verifique que

$$\frac{d}{dr}\left(y^2 \frac{dy}{dr}\right) = 2y\left(\frac{dy}{dr}\right)^2 + y^2 \frac{d^2y}{dr^2}.$$

25. Seja $y = \frac{1}{x^2+1}$, em que $x = x(t)$ é uma função definida e derivável em $\mathbb{R}$. Verifique que, para todo t real,

$$\frac{dy}{dt} = -2xy^2 \frac{dx}{dt}.$$

26. Seja $y = \frac{4}{x}$, em que $x = x(t)$ é uma função derivável num intervalo aberto I. Suponha que, para todo t em I, $x(t) \neq 0$ e $\frac{dx}{dt} = \beta$, β constante. Verifique que $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{8\beta^2}{x^3}$.

27. Seja f uma função diferenciável e suponha que, para todo $x \in D_f$, $3x^2 + x \operatorname{sen} f(x) = 2$. Mostre que $f'(x) = -\frac{6x + \operatorname{sen} f(x)}{x \cos f(x)}$, para todo $x \in D_f$, com $x \cos f(x) \neq 0$.

28. A função diferenciável $y = f(x)$ é tal que, para todo $x \in D_f$, o ponto $(x, f(x))$ é solução da equação $xy^3 + 2xy^2 + x = 4$. Sabe-se que $f(1) = 1$. Calcule $f'(1)$.

29. Seja $f :]-r, r[\to \mathbb{R}$ uma função derivável. Prove

a) Se f for uma função ímpar, então f' será par.
b) Se f for função par, então f' será ímpar.

30. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $g(2) = 2$ e $g'(2) = 2$. Calcule $H'(2)$, sendo H dada por $H(x) = g(g(g(x)))$.

7.12. DERIVADA DE $f(x)^{g(x)}$

Sejam f e g duas funções deriváveis num mesmo conjunto A, com $f(x) > 0$ para todo $x \in A$. Consideremos a função definida em A e dada por

$$y = f(x)^{g(x)}.$$

Aplicando ln aos dois membros obtemos

$$\ln y = g(x) \ln f(x)$$

e, assim,

$$y = e^{g(x) \ln f(x)},$$

ou seja,

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}.$$

Então,

$$\left[f(x)^{g(x)}\right]' = e^{g(x) \ln f(x)} \left[g(x) \ln f(x)\right]'$$

e, portanto,

$$\boxed{\left[f(x)^{g(x)}\right]' = f(x)^{g(x)} \left[g(x) \ln f(x)\right]'}$$

EXEMPLO 1. Calcule a derivada.

a) $y = x^x$.
b) $y = 3^x$.

Solução

10 Derivada de $f(x)^{g(x)}$

$$(x^{\alpha})' = e^{\alpha \ln x}\,(\alpha \ln x)'.$$

Sendo α constante $(\alpha \ln x)' = \alpha\,(\ln x)' = \dfrac{\alpha}{x}$. Assim,

$$(x^{\alpha})' = x^{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha\, x^{\alpha - 1}$$ ■

EXEMPLO 4. Calcule a derivada.

$a)$ $f(x) = x^{\sqrt{2}}$
$b)$ $y = 8^x + \log_2 x$.

Solução

$a)$ $f'(x) = \sqrt{2}\, x^{\sqrt{2} - 1}$, $x > 0$.
$b)$ Pela fórmula de mudança de base,

$$\log_2 x = \frac{1}{\ln 2} \ln x.$$

Então,

$$(8^x + \log_2 x)' = 8^x \ln 8 + \frac{1}{x \ln 2}.$$ ■

Exercícios 7.12

1. Calcule a derivada.

$a)$ $f(x) = 5^x + \log_3 x$
$b)$ $y = 2^{x^2} + 3^{2x}$
$c)$ $g(x) = 3^{2x+1} + \log_2(x^2 + 1)$
$d)$ $y = (2x + 1)^x$
$e)$ $f(x) = x^{\operatorname{sen} 3x}$
$f)$ $g(x) = (3 + \cos x)^x$
$g)$ $y = x^x \operatorname{sen} x$
$h)$ $y = x^{x^2 + 1}$
$i)$ $y = (1 + i)^{-t}$, i constante
$j)$ $y = 10^x - 10^{-x}$
$l)$ $y = (2 + \operatorname{sen} x)^{\cos 3x}$
$m)$ $y = \ln(1 + x^x)$
$n)$ $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$
$o)$ $y = x^{x^x}$
$p)$ $y = x^{\pi} + \pi^x$
$q)$ $y = (1 + x)^{e^{-x}}$

2. Sejam f e g deriváveis em A, com $f(x) > 0$ em A. Verifique que, para todo x

em A,

$$[f(x)^{g(x)}]' = \underbrace{f(x)^{g(x)}\, g'(x) \ln f(x)}_{①} + \underbrace{g(x)\, f(x)^{g(x)-1}\, f'(x)}_{②}.$$

Observe: ① é a derivada de $f(x)^{g(x)}$, supondo f constante; ② é a derivada de $f(x)^{g(x)}$, supondo g constante.

3. Utilizando o resultado obtido no Exercício 2, calcule a derivada.

a) $y = (x + 2)^x$
b) $y = (1 + e^x)^{x^2}$
c) $y = (4 + \text{sen } 3x)^x$
d) $y = (x + 3)^{x^2}$
e) $y = (3 + \pi)^{x^2}$
f) $y = (x^2 + 1)^\pi$

7.13. DERIVAÇÃO DE FUNÇÃO DADA IMPLICITAMENTE

Consideremos uma equação nas variáveis x e y. Dizemos que uma função $y = f(x)$ é dada *implicitamente* por tal equação se, para todo x no domínio de f, o ponto $(x, f(x))$ for solução da equação.

EXEMPLO 1. Seja a equação $x^2 + y^2 = 1$. A função $y = \sqrt{1 - x^2}$ é dada implicitamente pela equação, pois, para todo x em $[-1, 1]$,

$$x^2 + (\sqrt{1 - x^2})^2 = 1.$$

Observe que a função $y = -\sqrt{1 - x^2}$ é, também, dada implicitamente por tal equação.

■

EXEMPLO 2. Determine uma função que seja dada implicitamente pela equação $y^2 + xy - 1 = 0$.

Solução

$$y^2 + xy - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + 4}}{2}.$$

11 Respostas dos exercícios

***g*)** $-\infty$

6.3

1. ***a*)** e^2

***b*)** e

***c*)** $e^{\frac{1}{2}}$

***d*)** e^2

***e*)** e

***f*)** 1

***g*)** e^2

***h*)** e^2

2. *Sugestão*: $a^h = e^{h \ln a}$

3. ***a*)** 2

***b*)** 0

***c*)** ln 5

***d*)** $+\infty$

CAPÍTULO 7

7.2

1. ***a*)** 2

***c*)** $2x$

2. 2

3. ***a*)** 3

***b*)** 3

***c*)** 3

4. ***a***) 3

b) $\frac{1}{4}$

c) 5

d) -1

e) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$

f) $-\frac{1}{4}$

g) 4

h) $\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$

5. ***a***) $y = 4x - 4$

b) $y = -\frac{1}{4}x + 1$

c) $x - 6y + 9 = 0$

d) $y = x - 1$

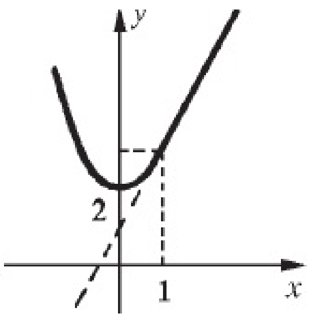
6. *a*) $2x + 1$ *b*) 3 *c*) $3x^2$ *d*) $-\frac{1}{x^2}$ *e*) 5 *f*) 0 *g*) $\frac{1}{(x+1)^2}$ *h*) $-\frac{2}{x^3}$

14. $$\frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \begin{cases} 2 \text{ se } x < 1 \\ -1 \text{ se } x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \to 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1}$$

15. ***a***) 2

b)



16. ***b***) 0

17. ***b***) Não

7.3

1. ***a***) $5x^4$

b) 0

c) 80

2. *a*) $6x^5$ *b*) $100x^{99}$ *c*) $-\dfrac{1}{x^2}$ *d*) $2x$ *e*) $-\dfrac{3}{x^4}$ *f*) $-\dfrac{7}{x^8}$

g) 1 *h*) $-3x^{-4}$

3. $y = -\dfrac{1}{4}x + 1$ **4.** $y = -2x + 3$

5. *a*) $\dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$ *b*) $\dfrac{1}{5}$ *c*) $\dfrac{1}{80}$

6. *a*) $\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$ *b*) $\dfrac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$ *c*) $\dfrac{1}{8\sqrt[8]{x^7}}$ *d*) $\dfrac{1}{9\sqrt[9]{x^8}}$

7. $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$

9. $y = 4x - 4$

7.4

1. $y = x + 1$

2. $y = x - 1$

4. ***a***) $2^x \ln 2$

b) $5^x \ln 5$

c) $\pi^x \ln \pi$

d) e^x

6. *a*) $\dfrac{1}{x \ln 3}$ *b*) $\dfrac{1}{x \ln 5}$ *c*) $\dfrac{1}{x \ln \pi}$ *d*) $\dfrac{1}{x}$

7.5

1. ***a*)** $\cos x$

***b*)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. $y = x$

3. ***a*)** $-\operatorname{sen} x$

***b*)** 0

***c*)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

***d*)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. ***a*)** $\sec^2 x$

***b*)** $\sec x \operatorname{tg} x$

5. $y = x$

6. ***a*)** $-\operatorname{cosec}^2 x$

***b*)** -2

7. ***a*)** $-\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$

***b*)** $-\sqrt{2}$

7.7

1. *a*) $6x$ *b*) $3x^2 + 2x$ *c*) $9x^2 - 4x$ *d*) $3 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

e) $-6x^{-3}$ *f*) $\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$ *g*) $3 - \dfrac{1}{x^2}$ *h*) $-\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{10}{x^3}$

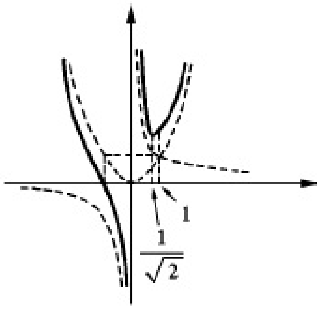
i) $2x^2 + \dfrac{1}{2}x$ *j*) $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ *l*) $2 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}$

m) $18x^2 + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ *n*) $20x^3 + 3bx^2 + 2cx$

2. $y = 2x$

3. *a*) $\left(\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}, \dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}\right)$

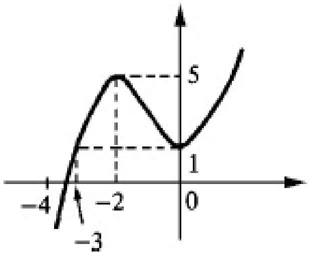
b)



4. *a*) $f'(x) > 0$ em $]-\infty, -2[$ e em $]0, +\infty[$; $f'(x) < 0$ em $]-2, 0[$

b) $+\infty$ e $-\infty$

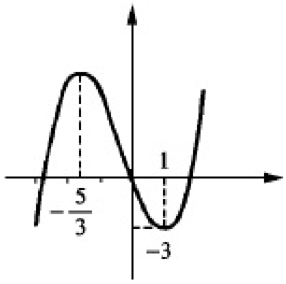
c)



5. *a*) $f'(x) > 0$ em $\left]-\infty, -\frac{5}{3}\right[$ e em $]1, +\infty[$; $f'(x) < 0$ em $\left]-\frac{5}{3}, 1\right[$

b) $+\infty$ e $-\infty$

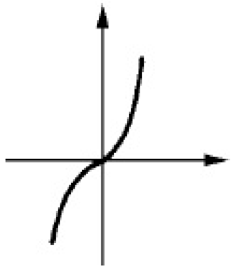
c)



6. *a*) $y = 3x$

b) $f'(x) > 0$ em $\mathbb{R}$

c)



7. *a*) $\dfrac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$ *b*) $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{(x + 1)^2}$ *c*) $\dfrac{15x^2 - 18x - 15}{(5x - 3)^2}$

d) $\dfrac{1 - x}{2\sqrt{x}\,(x + 1)^2}$ *e*) $5 - \dfrac{1}{(x - 1)^2}$ *f*) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{9x^2}{(x^3 + 2)^2}$

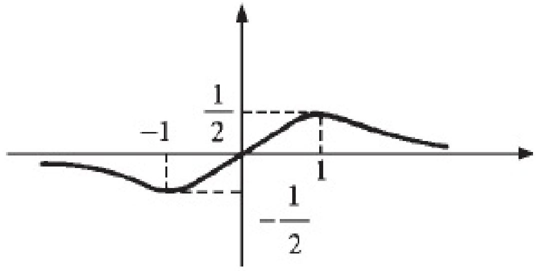
g) $\dfrac{3x - \sqrt[3]{x}}{6x\sqrt{x}}$ *h*) $\dfrac{4\sqrt[4]{x^3}\,(3 - x^2) - 7x^2 + 3}{4\sqrt[4]{x^3}\,(x^2 + 3)^2}$

8. *a*) $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ e $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

b) $g'(x) > 0$ em $]-1, 1[$
$g'(x) < 0$ em $]-\infty, -1[$
e em $]1, +\infty[$

c) 0

d)



9. *a*) $6x - 5 \operatorname{sen} x$ *b*) $-\dfrac{(x^2+1)\operatorname{sen} x + 2x \cos x}{(x^2+1)^2}$ *c*) $\operatorname{sen} x + x \cos x$

d) $x\,[2 \operatorname{tg} x + x \sec^2 x]$ *e*) $\dfrac{\operatorname{tg} x - (x+1)\sec^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}$ *f*) $\dfrac{-3\,(\cos x - \operatorname{sen} x)}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}$

g) $\dfrac{\sec x\,[3x \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} x - 3]}{(3x+2)^2}$ *h*) $\operatorname{sen} x\,[2x - 1] + \cos x\,[x^2 + 1]$

i) $\dfrac{\sec x\,[1 + 2x \operatorname{tg} x]}{2\sqrt{x}}$ *j*) $-3 \operatorname{sen} x + 5 \sec x \operatorname{tg} x$ *l*) $\operatorname{cotg} x - x \operatorname{cosec}^2 x$

m) $4 \sec x \operatorname{tg} x - \operatorname{cosec}^2 x$ *n*) $2x + 3 \operatorname{tg} x + 3x \sec^2 x$ *o*) $\dfrac{2x - (x^2+1)\operatorname{tg} x}{\sec x}$

p) $-\dfrac{x(x+1)\cos x + \operatorname{sen} x}{x^2 \operatorname{sen}^2 x}$ *q*) $\dfrac{1 + x \operatorname{cotg} x}{\operatorname{cosec} x}$

r) $\operatorname{cosec} x \left[3x^2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - (x^3 + \sqrt{x})\operatorname{cotg} x\right]$ *s*) $\dfrac{(x-1)\cos x - (x+1)\operatorname{sen} x - 1}{(x - \cos x)^2}$

10. ***a*)** $(2x - 1) \operatorname{sen} x + x^2 \cos x$

***b*)** 0

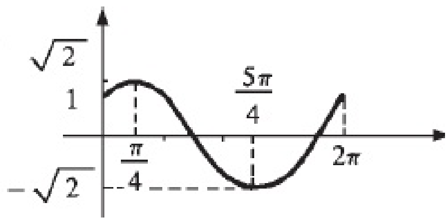
***c*)** $(6a - 1) \operatorname{sen}(3a) + 9a^2 \cos(3a)$

***d*)** $(2x^2 - 1) \operatorname{sen} x^2 + x^4 \cos x^2$

11. *a*) $f'(x) > 0$ em $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right[$ e em $\left]\dfrac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$

$f'(x) < 0$ em $\left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right[$

b)



12. *a*) $x\,e^x\,[2 + x]$ *b*) $3 + \dfrac{5}{x}$ *c*) $e^x\,[\cos x - \operatorname{sen} x]$ *d*) $\dfrac{2e^x}{[1 - e^x]^2}$

e) $2x \ln x + x + 2e^x$ *f*) $\dfrac{-x - \ln x - 1}{[x \ln x]^2}$ *g*) $5x\,[1 + 2 \ln x]$

h) $\dfrac{e^x[x-1]^2}{(x^2+1)^2}$ *i*) $\dfrac{1 - \ln x}{x^2}$ *j*) $\dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$

14. *a)* $e^x\,[\cos x + x\cos x - x\,\mathrm{sen}\,x]$ *b)* $x\,[(1+\ln x)\,(2\cos x - x\,\mathrm{sen}\,x) + \cos x]$

c) $e^x\,[\mathrm{sen}\,x\cos x + \cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x]$

d) $e^x\left[\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{2\sqrt{x}} + (1+\sqrt{x})\,(\mathrm{tg}\,x + \sec^2 x)\right]$

7.8

1. *a)* $f'(x) = 16x^3 + 2,\ f''(x) = 48x^2$ e $f'''(x) = 96x$

b) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2},\ f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$ e $f'''(x) = -\dfrac{6}{x^4}$

c) $f'(x) = 10x + \dfrac{3}{x^4},\ f''(x) = 10 - \dfrac{12}{x^5}$ e $f'''(x) = 60x^{-6}$

d) $f'(x) = 9x^2 - 6,\ f''(x) = 18x$ e $f'''(x) = 18$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases},\ f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -2x & \text{se } x < 0 \end{cases},\ f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x > 0 \\ -2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ e $f'''(x) = 0$ para $x \neq 0$

2. *a)* $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x^3 & \text{se } x < 0 \end{cases},\ f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } x \geqslant 0 \\ -3x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ e $f''(x) = \begin{cases} 6x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -6x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

b) $f'(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{se } x \leqslant 1 \\ 5 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ e $f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < 1 \\ 0 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

3. *a)* $f^{(n)}(x) = e^x$ *b)* $f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos x & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ (-1)^{\frac{n}{2}}\,\mathrm{sen}\,x & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}$

c) $f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n+1}{2}}\,\mathrm{sen}\,x & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ (-1)^{\frac{n}{2}}\cos x & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}$

d) $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\,(n-1)!\,x^{-n}$

7.9

1. *a*) $\dfrac{dy}{dx} = 15x^2 + 6$ *b*) $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{t^4}} - \dfrac{3}{t^2}$ *c*) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{(t+1)^2}$

d) $\dfrac{dy}{dt} = \cos t - t \operatorname{sen} t$ *e*) $\dfrac{dy}{du} = \dfrac{u \ln u - u - 1}{u (\ln u)^2}$ *f*) $\dfrac{dx}{dt} = t^2 e^t (3 + t)$

g) $\dfrac{ds}{dt} = e^t [\operatorname{tg} t + \sec^2 t]$ *h*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2 \operatorname{sen} x - (x^3+1)\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$

i) $\dfrac{dy}{du} = \dfrac{\sec u\,[1 + 3u \operatorname{tg} u]}{3\sqrt[3]{u^2}}$ *j*) $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{3}{t^2} - \dfrac{4}{t^3}$

l) $\dfrac{dx}{dt} = e^t [\cos t - \operatorname{sen} t]$ *m*) $\dfrac{du}{dv} = 10v - \dfrac{12}{v^5}$ *n*) $\dfrac{dV}{dr} = 4\pi r^2$

o) $\dfrac{dE}{dv} = v$ *p*) $\dfrac{dE}{dv} = mv$ *q*) $\dfrac{du}{dx} = -\dfrac{12a}{x^{13}} + \dfrac{6b}{x^7}$

2. *a*) $\dfrac{x^3 (4\sqrt{x} + 5)}{2\sqrt{x}\,(x + \sqrt{x})^2}$ *b*) $\dfrac{9}{8}$

3. 8

4. 36

5. $$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dt}{dx}(x+t) - t\left(1 + \dfrac{dt}{dx}\right)}{(x+t)^2};\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \frac{2}{9}$$

8. ***a*)** $6x$

***b*)** $2 \cos t - t \operatorname{sen} t$

***c*)** $90x^8 + \dfrac{12}{x^5}$

***d*)** $\dfrac{1}{t}$

***e*)** $-2e^t \operatorname{sen} t$

***f*)** $\dfrac{e^x (x^2 - 2x + 2)}{x^3}$

7.11

1. ***a*)** $4 \cos 4x$

***b*)** $-5 \operatorname{sen} 5x$

***c*)** $3e^{3x}$

***d*)** $-8 \operatorname{sen} 8x$

***e*)** $3t^2 \cos t^3$

***f*)** $\dfrac{2}{2t+1}$

***g*)** $e^{\operatorname{sen} t} \cos t$

***h*)** $-e^x \operatorname{sen} e^x$

***i*)** $3 (\operatorname{sen} x + \cos x)^2 (\cos x - \operatorname{sen} x)$

j) $\dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}$

l) $\dfrac{2}{3(x+1)^2} \sqrt[3]{\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2}$ *m*) $-5e^{-5x}$ *n*) $\dfrac{2t+3}{t^2+3t+9}$ *o*) $e^{\operatorname{tg} x} \sec^2 x$

p) $-\operatorname{sen} x \cos (\cos x)$ *q*) $8t\,(t^2+3)^3$ *r*) $-2x \operatorname{sen} (x^2+3)$

s) $\dfrac{1+e^x}{2\sqrt{x+e^x}}$ *t*) $3 \sec^2 3x$ *u*) $3 \sec 3x \operatorname{tg} 3x$

2. 10

3. 4

4. *a)* $e^{3x}(1+3x)$ *b)* $e^{x}(\cos 2x - 2\operatorname{sen} 2x)$ *c)* $e^{-x}(\cos x - \operatorname{sen} x)$

d) $e^{-2t}(3\cos 3t - 2\operatorname{sen} 3t)$ *e)* $-2xe^{-x^2} + \dfrac{2}{2x+1}$ *f)* $\dfrac{4}{(e^{t}+e^{-t})^2}$

g) $-\dfrac{5\operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 2x + 2\cos 5x \cos 2x}{\operatorname{sen}^2 2x}$ *h)* $3(e^{-x}+e^{x^2})^2(-e^{-x}+2xe^{x^2})$

i) $3t^2e^{-3t}(1-t)$ *j)* $e^{x^2}\left[2x\ln(1+\sqrt{x})+\dfrac{1}{2(\sqrt{x}+x)}\right]$

l) $3(\operatorname{sen} 3x + \cos 2x)^2(3\cos 3x - 2\operatorname{sen} 2x)$ *m)* $\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2\sqrt{e^{x}+e^{-x}}}$

n) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ *o)* $\dfrac{4x\sqrt{x}+e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{x^3+xe^{\sqrt{x}}}}$ *p)* $\ln(2x+1)+\dfrac{2x}{2x+1}$

q) $\dfrac{6x[\ln(x^2+1)]^2}{x^2+1}$ *r)* $\sec x$ *s)* $-9x^2\cos^2 x^3 \operatorname{sen} x^3$

t) $-\dfrac{\operatorname{sen}^2 x + 2\cos^2 x}{\operatorname{sen}^3 x}$ *u)* $e^{2t}\,\dfrac{(1+2t)\ln(3t+1)-\dfrac{3t}{3t+1}}{[\ln(3t+1)]^2}$

5. *a)* $-25\operatorname{sen} 5t$ *b)* $-16\cos 4t$ *c)* $-w^2\operatorname{sen} wt$ *d)* $9e^{-3x}$

e) $2e^{-x^2}(2x^2-1)$ *f)* $\dfrac{e^{x}(x^2+1)}{(x+1)^3}$ *g)* $\dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$ *h)* $\dfrac{2}{(x-1)^3}$

i) $e^{-x}-4e^{-2x}$ *j)* $e^{-x}(4\operatorname{sen} 2x - 3\cos 2x)$ *l)* $\dfrac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$

m) $\dfrac{2\,(3x^3 + 3x^2 + 3x + 1)}{(x^2 + x)^3}$ *n*) $\dfrac{-2\,[4 \text{ sen } 3x + 3 \cos 3x]}{e^x}$

o) $4e^{-2x}(x - 1)$ *p*) $-\cos x \cos(\cos x) - \text{sen}^2 x \,\text{sen}(\cos x)$

q) $\dfrac{8x^3 + 30x^2 + 24x + 10}{(x^2 - 1)^3}$ *r*) $\dfrac{e^{1/x}}{x^3}$ *s*) $\dfrac{2\,(-x^3 - 3x^2 + 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$

t) $\dfrac{3}{(t^2 + 3)\sqrt{t^2 + 3}}$ *u*) $\dfrac{4x + 12}{9\sqrt[3]{(x + 2)^5}}$

7. 8

8. 11

12. ±2

13. 1 ou 2

16. ***a*)** $3 \sec^2 3x$

***b*)** $4 \sec 4x \text{ tg } 4x$

***c*)** $-2x \text{ cosec}^2 x^2$

***d*)** $\sec^2 x \sec(\text{tg } x) \text{ tg}(\text{tg } x)$

***e*)** $3x^2 \sec x^3 \text{ tg } x^3$

***f*)** $2x \sec^2 x^2\, e^{\text{tg } x^2}$

***g*)** $-2 \text{ cosec } 2x \text{ cotg } 2x$

***h*)** $x^2\,[3 \text{ tg } 4x + 4x \sec^2 4x]$

***i*)** $3 \sec 3x$

***j*)** $-e^{-x} \sec x^2\,[1 - 2x \text{ tg } x^2]$

***l*)** $6x\,(x^2 + \text{cotg } x^2)^2\,(1 - \text{cosec}^2 x^2)$

***m*)** $2x\,[\text{tg } 2x + x \sec^2 2x]$

23. ***b*)** 7

***c*)** $y = 2x - 1$

28. $-\frac{4}{7}$

30. 8

7.12

1. *a*) $5^x \ln 5 + \dfrac{1}{x \ln 3}$

b) $2x\, 2^{x^2} \ln 2 + 2 \cdot 3^{2x} \ln 3$

c) $2 \cdot 3^{2x+1} \ln 3 + \dfrac{2x}{(x^2+1)\ln 2}$

d) $(2x+1)^x \left[\ln(2x+1) + \dfrac{2x}{2x+1}\right]$

e) $x^{\operatorname{sen} 3x} \left[3 \cos 3x \ln x + \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}\right]$

f) $(3+\cos x)^x \left[\ln(3+\cos x) - \dfrac{x \operatorname{sen} x}{3+\cos x}\right]$

g) $x^x\, [(1+\ln x)\operatorname{sen} x + \cos x]$

h) $x^{x^2+1}\left[2x \ln x + \dfrac{x^2+1}{x}\right]$

i) $-(1+i)^{-t} \ln(1+i)$

j) $(10^x + 10^{-x}) \ln 10$

l) $(2+\operatorname{sen} x)^{\cos 3x}\left[-3 \operatorname{sen} 3x \ln(2+\operatorname{sen} x) + \dfrac{\cos x \cos 3x}{2+\operatorname{sen} x}\right]$

m) $\dfrac{x^x(1+\ln x)}{1+x^x}$

n) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x \left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{1+x}\right]$

o) $x^{x^x} x^x \left[(1+\ln x)\ln x + \dfrac{1}{x}\right]$

p) $\pi x^{\pi-1} + \pi^x \ln \pi$

q) $(1+x)^{e^{-x}}\left[-e^{-x}\ln(1+x) + \dfrac{e^{-x}}{1+x}\right]$

3. *a*) $(x+2)^x \ln(x+2) + x(x+2)^{x-1}$

b) $2x\,(1+e^x)^{x^2} \ln(1+e^x) + x^2(1+e^x)^{x^2-1} e^x$

c) $(4+\operatorname{sen} 3x)^x \ln(4+\operatorname{sen} 3x) + x(4+\operatorname{sen} 3x)^{x-1}(3\cos 3x)$

d) $2x\,(x+3)^{x^2} \ln(x+3) + x^2\,(x+3)^{x^2-1}$

e) $2x\,(3+\pi)^{x^2} \ln(3+\pi)$ *f*) $2\pi x\,(x^2+1)^{\pi-1}$

7.13

2. $y = \dfrac{-1+\sqrt{-4x^2+4x+1}}{2x}$ 3. $\dfrac{3}{4}$

4. *a*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$ *b*) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2xy-1}{3y^2+x^2}$ *c*) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y^2}{2xy+2}$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+5y^4}$ *e*) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{4y}$ *f*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1-y}{x+3y^2}$

g) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y+1}$ *h*) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2xy^3+y}{3x^2y^2+x}$ *i*) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y+e^y}{xe^y+x}$

j) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x}{x^2+y^2+2y}$ *l*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{5-\operatorname{sen} y - x}$ *m*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2+\cos y}$

5. $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$ 6. $\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$

8. *a*) 1 *b*) $y - 1 = -\dfrac{3}{7}(x-1)$

11. $y = \dfrac{1}{5}(x+3)$

7.14

1. *a*) $dy = 3x^2\,dx$ *b*) $dy = (2x-2)\,dx$

c) $dy = \dfrac{1}{(x+1)^2}\,dx$ *d*) $dy = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

2. ***a*)** $dA = 2l\,dl$

3. ***a*)** $dV = 4\pi r^2\,dr$

4. ***a***) $dy = (2x + 3)\, dx$

   b) $(dx)^2$

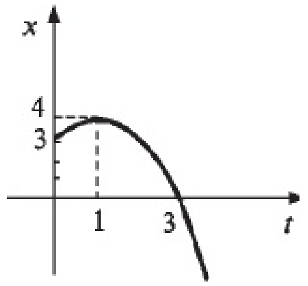
7.15

1. ***a***) $2 - 2t$

   b) -2

   c) $v(t) > 0$ em $[0, 1[$
   $v(t) < 0$ em $]1, +\infty[$

   d)



2. ***a***) $\dfrac{1}{2}$

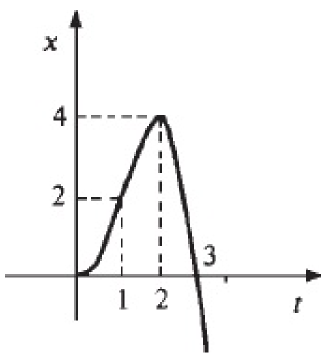
   b) 0

3. ***a***) $v(t) > 0$ em $]0, 2[$
   $v(t) < 0$ em $]2, +\infty[$

   b) $a(t) > 0$ em $[0, 1[$
   $a(t) < 0$ em $]1, +\infty[$

   c) $-\infty$

   d)

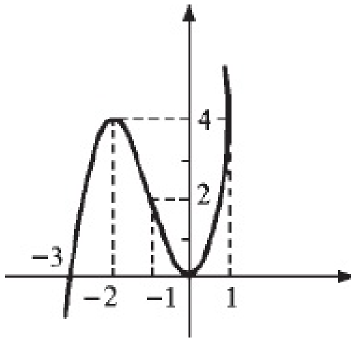


7. ***a***) $f'(t) > 0$ em $]-\infty, -2[$ e em $]0, +\infty[$
   $f'(t) < 0$ em $]-2, 0[$

b) $f''(t) < 0$ em $]-\infty, -1[$
$f''(t) > 0$ em $]-1, +\infty[$

c) $+\infty$ e $-\infty$

d)

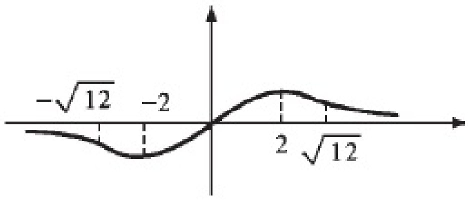


8. *a)* $f'(t) > 0$ em $]-2, 2[$
$f'(t) < 0$ em $]-\infty, -2[$ e em $]2, +\infty[$

b) $f''(t) > 0$ em $]-\sqrt{12}, 0[$
e em $]\sqrt{12}, +\infty[$

$f''(t) < 0$ em $]-\infty, -\sqrt{12}[$
e em $]0, \sqrt{12}[$

d)

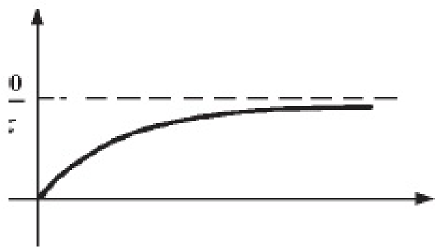


9. *a)* $v_0 e^{-kt}$

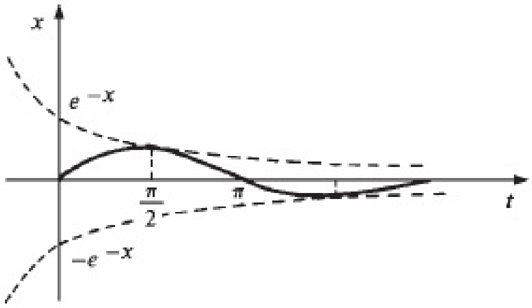
c) $-v_0 k e^{-kt}$

e) $\dfrac{v_0}{k}$

f)



10. *c*)



11. Ponto de abscissa $x = \dfrac{5}{6}$

12. $\dfrac{-100}{(101)^2}$

15. $(-2, 1)$

16. $-\dfrac{6}{\sqrt{55}}$

17. $-\dfrac{3}{2}$ (cm/s)

18. $\dfrac{0{,}9}{100\pi}$ (m/s)

19. $\dfrac{dx}{dt} = 1 - \cos\theta$ e $\dfrac{dy}{dt} = \operatorname{sen}\theta$

7.16

1. *a*) $y = -3x$ e $y = \dfrac{1}{3}x$

b) $y = \dfrac{1}{12}x + \dfrac{4}{3}$ e $y = -12x + 98$

c) $y = -2x + 3$ e $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

d) $y = 2$ e $x = 1$

2. $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{16}$

3. $y = 6x - 2$ ou $y = 6x + 2$

4. $y = 2x - \dfrac{25}{4}$

5. $y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{27}$ ou $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{27}$

6. *a*) $(1, 1)$

b) $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$

7. $y = -3x$ ou $y = -4x$

8. $(0, 12)$, $(-2, -12)$ e $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{253}{16}\right)$

9. Pontos de abscissas $\dfrac{1}{2}$ e $-\dfrac{2}{3}$

10. $y = 3x + 2$

11. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ **12.** (a, b) tal que $b < a^2$

13. ± 1 **14.** -1

15. $y = -x + \frac{1}{4}$ ou $y = x + \frac{1}{4}$.

7.17

1. *a*) $-\frac{1}{9}$ *b*) 1 *c*) $-\pi$ *d*) 0 *e*) 0 *f*) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ *g*) 0 *h*) $\frac{\sqrt{2}}{8}$ *i*) 1

2. *a*) $\frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$ *b*) $\frac{3}{\sqrt{1+9x^2}}$ *c*) $5^{x^2}[1 + 2x^2 \ln 5]$

d) $(2 + \operatorname{sen} x)^x \left[\ln (2 + \operatorname{sen} x) + \frac{x \cos x}{2 + \operatorname{sen} x} \right]$

e) $\sec x$ *f*) $e^{t^2}[2t \operatorname{sen} 3t + 3 \cos 3t]$ *g*) $\ln \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} + \frac{4t^2}{t^4 - 1}$

h) $\frac{3x^2 + 4x - 1}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$ *i*) $\frac{3t^2 - t^4}{(t^2+1)^3}$ *j*) $\frac{3x(4 + x^2)\sec^2 3x + (4 - x^2)\operatorname{tg} 3x}{(x^2+4)^2}$

l) $\sec x$ *m*) $\frac{e^{\sec\sqrt{x}}\,[\sqrt{x}\,\sec\sqrt{x}\,\operatorname{tg}\sqrt{x} - 2]}{2x^2}$ *n*) $e^{x^x} x^x (1 + \ln x)$

o) $\operatorname{tg}^3 x$ *p*) $\frac{1 - x}{x^2\sqrt{1 - x^2}}$ *q*) $-\frac{(2 - \sqrt[3]{x})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{x}}$ *r*) $\frac{12 \ln 2}{(2^{3t} + 2^{-3t})^2}$

s) $-\frac{1}{2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}}$ *t*) $-6\,e^{-3x}\cos 3x$ *u*) $-5 \operatorname{cotg}^3 5x$

3. *a*) $-\frac{y \cos xy}{3y^2 + x \cos xy}$ *b*) $\frac{1 - y}{x + e^y}$

c) $\frac{1 + y^x \ln y}{2y - xy^{x-1}}$ *d*) $\frac{y \operatorname{sen} x - \cos y}{\cos x - x \operatorname{sen} y}$

4. $y - 5 = -\frac{5}{38}(x - 1)$ e $y - 5 = \frac{38}{5}(x - 1)$

5. $x + y = 2$ ou $x + y = -2$

6. $x + 4y = 9$ ou $-x + 4y = 9$

8. $x + y = -1$

9. 0,5 m^2/s

10. $\dfrac{0{,}064\,\pi}{3}\ m^3/s$

11. $\dfrac{0{,}3 - 0{,}4\,rh}{r^2}$

13. $-\dfrac{0{,}1}{3}$ cm/s

14. 0,003 m/min

17. $a = \dfrac{1}{3}$

21. ***a)*** $2x^2 + 2$

b) $4x^3 + 4x$

22. ***a)*** $\cos(\text{sen}\, x)$

b) $-x^2$

c) $\dfrac{2\ln(x^2+1)}{1+[\ln(x^2+1)]^2}$

d) $2e^{x^2}e^{(e^{x^2})^2}$

23. ***a)*** $\cos(\text{sen}\, x)\cos x$

b) 1

25. *a)* $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -9x$ *b)* $-\dfrac{9}{2}$

27. ***a)*** $h''(t) = -9\cos 3t\, f'(\cos 3t) + 9\,\text{sen}^2\, 3t\, f''(\cos 3t)$

28. ***a)*** $y^2 + 2t^2 y^3$

b) 3

29. ***a)*** $\cos y + (x + \text{sen}\, y)(\cos 2y - x\,\text{sen}\, y)$

34. $P(x) = P(1) + P'(1)(x-1) + \dfrac{P''(1)}{2}(x-1)^2 + \dfrac{P'''(1)}{3!}(x-1)^3$, ou seja,
$P(x) = 6 + 5(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$

39. *a)* $\dfrac{101}{98}$ *b)* $\dfrac{1}{18}$ *c)* $-\dfrac{8}{17}$ *d)* $\dfrac{1}{2}$

41. *a)* 1 *b)* $-\dfrac{1}{3}$ *c)* $-\infty$ *d)* $+\infty$ *e)* $\dfrac{1}{4}$ *f)* $\dfrac{6\pi}{7}$

CAPÍTULO 8

8.1

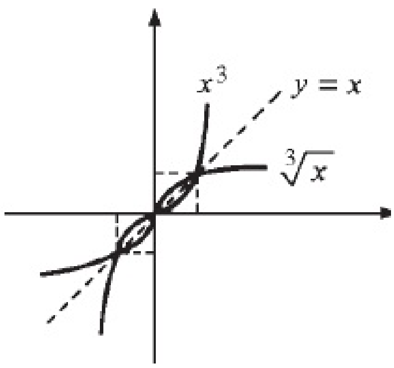
1. *a)* $\dfrac{\pi}{2}$ *b)* $\dfrac{\pi}{6}$ *c)* $\dfrac{\pi}{3}$ *d)* $\dfrac{\pi}{4}$ *e)* $-\dfrac{\pi}{4}$ *f)* $\dfrac{\pi}{3}$ *g)* $-\dfrac{\pi}{6}$

h) $-\dfrac{\pi}{2}$ *i)* $-\dfrac{\pi}{3}$ *j)* $-\dfrac{\pi}{3}$ *l)* $\dfrac{\pi}{6}$ *m)* $-\dfrac{\pi}{6}$

3. *a)* $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *b)* $\dfrac{1}{2}$ *c)* $\dfrac{1}{2}$ *d)* $\sqrt{2}$ *e)* x *f)* x *g)* $\dfrac{\pi}{3}$ *h)* 0

i) $-\dfrac{\pi}{3}$ *j)* $\overline{x}$

7. *a)* $g(x) = \sqrt[3]{x}$ *b)*



8. $g(x) = \dfrac{1}{x}$

9. $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$