

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Análise numérica de escoamentos viscoelásticos com singularidades

Irineu Lopes Palhares Junior

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Ciências de Computação e Matemática Computacional (PPG-CCMC)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Irineu Lopes Palhares Junior

Análise numérica de escoamentos viscoelásticos com singularidades

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Ciências de Computação e Matemática Computacional

Orientador: Prof. Dr. José Alberto Cuminato

Coorientador: Prof. Dr. Cassio Machiaveli Oishi

USP – São Carlos
Março de 2019

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

P161a Palhares Junior, Irineu Lopes
Análise numérica de escoamentos viscoelásticos
com singularidades / Irineu Lopes Palhares Junior;
orientador José Alberto Cuminato; coorientador
Cassio Machiaveli Oishi. -- São Carlos, 2019.
208 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Ciências de Computação e Matemática Computacional) --
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação,
Universidade de São Paulo, 2019.

1. Problema stick-slip. 2. Estudo numérico. 3.
Estudo assintótico. 4. Escoamento viscoelástico. 5.
Formulação natural do tensor. I. Cuminato, José
Alberto, orient. II. Oishi, Cassio Machiaveli,
coorient. III. Título.

Irineu Lopes Palhares Junior

Numerical analysis of viscoelastic flows with singularities

Doctoral dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Doctorate Program in Computer Science and Computational Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Computer Science and Computational Mathematics

Advisor: Prof. Dr. José Alberto Cuminato
Co-advisor: Prof. Dr. Cassio Machiaveli Oishi

USP – São Carlos
March 2019

*Dedico este trabalho as pessoas que mais amo na vida,
minha família.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Jeová Deus pela vida e por tudo que ele me proporcionou fazer nela. Também agradeço a minha família, os meus pais, minha irmã e minha sobrinha pelo amor e compreensão. Agradecimento especial à minha esposa, por todo suporte e paciência durante todos estes momentos, ao meu co-orientador Cassio Oishi pela paciência e suporte, ao meu orientador Poti por toda ajuda e compreensão e ao meu supervisor no exterior Jonathan Evans pela ajuda durante meu período em Bath.

Agradeço ao Papão pela parceria e pelo suporte durante todo o tempo que passei em Presidente Prudente. Agradeço aos amigos do LMACC pela amizade e apoio. I also would to thanks the lovely brothers that I met during my time in Bath specially Michael Jackson and Tweetch.

Por fim, agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) nº 2014/17348-2 e Bolsa Estágio de Pesquisa no Exterior (BEPE) nº 2016/20389-8 pelo suporte financeiro durante o doutorado.

*“O que for que fizerem, trabalhem nisso de toda a alma,
como para Jeová, e não para homens”*
(Colossenses 3:23)

RESUMO

PALHARES JUNIOR, I. L. **Análise numérica de escoamentos viscoelásticos com singularidades.** 2019. 208 p. Tese (Doutorado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

Neste trabalho apresentamos um estudo assintótico e numérico de escoamentos viscoelásticos com singularidades de tensão. Estas singularidades surgem como consequência de uma mudança abrupta nas condições de contorno, como no caso do *stick-slip*, ou devido a presença de quinas na geometria do problema, como no escoamento da contração. Para o problema *stick-slip* definimos o comportamento assintótico do fluido Oldroyd-B sobre um campo de velocidade Newtoniano. Esta análise foi feita com o método assintótico das expansões, que pode ser estendida para outros tipos de fluidos. O estudo assintótico do *stick-slip* com o modelo Oldroyd-B revelou que as equações deste modelo não estão bem definidas para este problema, pois este fluido estende o valor singular ao longo de toda a superfície livre, gerando resultados sem sentido físico. Além disso, os resultados assintóticos dos problemas *stick-slip* e da contração 4:1 foram verificados numericamente através da integração das equações constitutivas ao longo de linhas de corrente. Vale destacar que, além da tradicional formulação Cartesiana do tensor (CSF), também utilizamos a formulação natural do tensor (NSF), que tem a vantagem de capturar de modo mais acurado os resultados próximos às singularidades. Além do mais, desenvolvemos um método numérico para resolver as equações de Navier-Stokes combinadas com as equações constitutivas das formulações CSF e NSF para os modelos PTT e Giesekus nos dois problemas estudados. Vale ressaltar que, não há na literatura resultados numéricos, para o caso transiente, com a formulação NSF para os modelos PTT e Giesekus. Por fim, verificamos numericamente o comportamento assintótico das tensões próximo as singularidades, bem como a configuração das camadas limites para os problemas mencionados.

Palavras-chave: Problema *stick-slip*, estudo assintótico, estudo numérico, escoamento viscoelástico, formulação natural do tensor.

ABSTRACT

PALHARES JUNIOR, I. L. **Numerical analysis of viscoelastic flows with singularities.** 2019. 208 p. Tese (Doutorado em Ciências – Ciências de Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

In this work we present an asymptotic and numerical study of viscoelastic flows with stress singularities. These singularities arise as a consequence of an abrupt change in the boundary conditions, as in the case of the stick-slip flow, or due to the presence of corners in the geometry of the problem, as in the contraction flow. For the stick-slip problem, we define the asymptotic behavior of the Oldroyd-B fluid over a Newtonian velocity field. This analysis was done with the method of matched asymptotic expansions, which can be extended to other types of fluids. The asymptotic study of the stick-slip flow for the Oldroyd-B model revealed that the equations of this model are not well defined for this problem, because this fluid extends the singularity throughout the free surface, generating results with no physical meaning. Besides that, the asymptotic results of the stick-slip and 4:1 contraction problems were verified numerically by integrating the constitutive equations along streamlines. It is worth mentioning that we performed asymptotic and numerical studies with the natural stress formulation (NSF) in addition to the Cartesian stress formulation (CSF). The NSF can capture the numerical results in a more accurate manner near singularities. Furthermore, we developed a numerical method to solve the Navier-Stokes equations combined with the constitutive equations of the CSF and NSF formulations for the PTT and Giesekus in the two problems studied. It is worth noting that there is no numerical results, for the transient case, with the NSF formulation for the PTT and Giesekus. Finally, we verified numerically the asymptotic behavior of stresses close to the singularities, as well as the configuration of the boundary layers for the problems mentioned above.

Keywords: Stick-slip problem, asymptotic study, numerical study, viscoelastic flow, natural stress formulation.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Geometria do problema <i>stick-slip</i>	43
Figura 2 – Geometria do problema da contração 4:1.	44
Figura 3 – Ilustração das regiões externa e internas às camadas limites do problema <i>stick-slip</i>	59
Figura 4 – Espessuras das camadas limites em termos das funções δ_1 e δ_2	66
Figura 5 – Solução de similaridade para o problema <i>stick-slip</i> com o modelo Oldroyd-B: (a) perfis das componentes t_{11}^P , t_{12}^P e t_{22}^P e (b) estimativas do valor de C_1	72
Figura 6 – Problema <i>stick-slip</i> na base natural. Ilustração da solução numérica das equações (3.195) para o modelo Oldroyd-B com condição inicial (3.197) para $\xi_0 = 10^{-6}$. (a) apresenta os perfis de l , m e n , enquanto que (b) mostra a convergência de (3.198) para $\xi \rightarrow +\infty$	84
Figura 7 – Ilustração das espessuras das camadas limites com três linhas de correntes passando pelas três regiões do domínio.	92
Figura 8 – Componentes do tensor e da velocidade ao longo da linha de corrente $\psi = -10^{-6}$	93
Figura 9 – Perfil das variáveis naturais ao longo das linhas de corrente $\psi = -10^{-6}$ e $\psi = -10^{-12}$	94
Figura 10 – Verificação do comportamento assintótico (5.5) para os modelos Oldroyd-B, PTT e Giesekus ao longo da linha $\theta = \frac{\pi}{2}$	95
Figura 11 – Verificação dos expoentes (5.6) para as variáveis do tensor polimérico na base natural para os modelos Oldroyd-B, PTT e Giesekus. As variáveis naturais foram plotadas ao longo da linha $\theta = \frac{\pi}{2}$	96
Figura 12 – Comportamento de T_{rr}^P ao longo da linha de corrente $\psi = 10^{-6}$ com relação à distância radial r	98
Figura 13 – Comportamento de T_{rr}^P ao longo da linha de corrente $\psi = 10^{-12}$ com relação à distância radial r	99
Figura 14 – Visualização dos detalhes das malhas não uniformes para o problema <i>stick-slip</i>	100
Figura 15 – Geometria do problema <i>stick-slip</i>	100
Figura 16 – Comparação dos resultados ao longo da linha horizontal $y = 1$ para: (a) componente u da velocidade e (b) pressão p	102

Figura 17 – Comparação dos resultados ao longo da linha horizontal $y = 0$ para: (a) componente u da velocidade e (b) pressão p	103
Figura 18 – Comparação dos resultados para $\log(-p)$, com relação a $\log(x)$ ao longo da linha horizontal $y = 1$	104
Figura 19 – Variação temporal do resíduo local da formulação CSF próximo à singularidade para o modelo PTT com $\beta = 1/2$	105
Figura 20 – Variação temporal do resíduo local da formulação NSF próximo à singularidade para o modelo PTT com $\beta = 1/2$	106
Figura 21 – Perfis de u , p e N_1 ao longo da linha horizontal $y = 1$ para os modelos PTT (coluna à esquerda) e Giesekus (coluna à direita)	107
Figura 22 – Ilustração da seleção dos ângulos utilizados no estudo do comportamento assintótico próximo à singularidade	108
Figura 23 – Variação assintótica próximo à singularidade de u , v e p ao longo da linha $\theta = \pi/2$ para o modelo PTT (coluna à esquerda) e Giesekus (coluna à direita) com $\beta = 1/2$	109
Figura 24 – Variação assintótica próximo à singularidade de T_{11}^p , T_{12}^p , T_{22}^p , λ , μ e v ao longo da linha $\theta = \pi/2$ para o modelo PTT (coluna à esquerda) e Giesekus (coluna à direita) com $\beta = 1/2$	110
Figura 25 – Variação assintótica próximo à singularidade de u , v e p ao longo da linha $\theta = 3\pi/4$ para o modelo PTT (coluna à esquerda) e Giesekus (coluna à direita) com $\beta = 1/2$	111
Figura 26 – Variação assintótica próximo à singularidade de T_{11}^p , T_{12}^p , T_{22}^p , λ , μ e v ao longo da linha $\theta = 3\pi/4$ para o modelo PTT (coluna à esquerda) e Giesekus (coluna à direita) com $\beta = 1/2$	112
Figura 27 – Variação de $ p_{ij}/q_{ij} $ com relação à θ para o modelo PTT ($n_1 = -10/11$). As curvas para o modelo Giesekus ($n_1 = -7/8$) são similares	115
Figura 28 – Dominância do grupo de termos (4.21) dentro da equação constitutiva para os modelos PTT (coluna à esquerda) e Giesekus (coluna à direita) usando $\beta = 1/2$	116
Figura 29 – Variação assintótica próximo à singularidade de u , v e p ao longo da linha $\theta = \pi/2$ para o modelo PTT (coluna à esquerda) e Giesekus (coluna à direita), considerando metade do comprimento $L = 4$ e $\beta = 1/9$	118
Figura 30 – Variação assintótica próximo à singularidade de T_{11}^p , T_{12}^p , T_{22}^p , λ , μ e v ao longo da linha $\theta = \pi/2$ para o modelo PTT (coluna à esquerda) e Giesekus (coluna à direita), considerando metade do comprimento $L = 4$ e $\beta = 1/9$	119
Figura 31 – Variação assintótica próximo à singularidade de u , v e p ao longo da linha $\theta = 3\pi/4$ para o modelo PTT (coluna à esquerda) e Giesekus (coluna à direita), considerando metade do comprimento $L = 4$ e $\beta = 1/9$	120

Figura 32 – Variação assintótica próximo à singularidade de T_{11}^P , T_{12}^P , T_{22}^P , λ , μ e v ao longo da linha $\theta = 3\pi/4$ para o modelo PTT (coluna à esquerda) e Giesekus (coluna à direita), considerando metade do comprimento $L = 4$ e $\beta = 1/9$.	121
Figura 33 – Dominância do grupo de termos (4.21) dentro da equação constitutiva para os modelos PTT (coluna à esquerda) e Giesekus (coluna à direita) usando $\beta = 1/9$	122
Figura 34 – Ilustração das espessuras das camadas limites com três linhas de correntes passando pelas três regiões do domínio.	125
Figura 35 – Componentes do tensor e da velocidade ao longo da linha de corrente $\psi = -10^{-6}$.	126
Figura 36 – Verificação do comportamento assintótico (5.5) para os modelos PTT e Giesekus ao longo da linha $\theta = \frac{\pi}{2}$.	127
Figura 37 – Verificação dos expoentes (5.6) para as variáveis do tensor polimérico na base natural para os modelos PTT e Giesekus. As variáveis naturais foram plotadas ao longo da linha $\theta = \frac{\pi}{2}$.	128
Figura 38 – Visualização dos detalhes da malha não-uniforme.	129
Figura 39 – Variação assintótica próximo à singularidade de u , v e p ao longo da linha $\theta = \pi/2$ para o modelo PTT (coluna à esquerda) e Giesekus (coluna à direita) com $\beta = 1/2$.	129
Figura 40 – Variação assintótica próximo à singularidade de T_{11}^P , T_{12}^P , T_{22}^P , λ , μ e v ao longo da linha $\theta = \pi/2$ para o modelo PTT (coluna à esquerda) e Giesekus (coluna à direita) com $\beta = 1/2$.	130
Figura 41 – Dominância do grupo de termos (4.21) dentro da equação constitutiva para os modelos PTT (coluna à esquerda) e Giesekus (coluna à direita) usando $\beta = 1/2$.	131
Figura 42 – Solução de similaridade para o problema <i>stick-slip</i> com o modelo PTT: (a) perfis das componentes t_{11}^P , t_{12}^P e t_{22}^P e (b) estimativas do valor de C_1 .	164
Figura 43 – Solução de similaridade para o problema <i>stick-slip</i> com o modelo PTT: (a) perfis das componentes t_{11}^P , t_{12}^P e t_{22}^P e (b) estimativas do valor de C_1 .	167
Figura 44 – Problema <i>stick-slip</i> na base natural. Ilustração da solução numérica das equações (B.207) para o modelo PTT com condição inicial (B.208) para $\xi_0 = 10^{-6}$. (a) apresenta os perfis de l , m e n , enquanto que (b) mostra a convergência de (B.211) para $\xi \rightarrow +\infty$.	187
Figura 45 – Problema <i>stick-slip</i> na base natural. Ilustração da solução numérica das equações (B.225) para o modelo Giesekus com condição inicial (B.226) para $\xi_0 = 10^{-6}$. (a) apresenta os perfis de l , m e n , enquanto que (b) mostra a convergência de (B.211) para $\xi \rightarrow +\infty$.	190
Figura 46 – Células próximas à singularidade.	203

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Malhas usadas nas simulações numéricas.	97
Tabela 2 – Conjunto de valores para x e u usados no cálculo dos coeficientes $a_{\frac{1}{2}}$, $a_{\frac{3}{2}}$ e $a_{\frac{5}{2}}$.	101
Tabela 3 – Coeficientes da expansão (3.37) próximos a singularidade para um es- coamento Newtoniano do problema <i>stick-slip</i> .	101
Tabela 4 – Estimativa dos valores de C_0 , C_1 , C_2 e C_3 bem como das distâncias radiais (4.19) para os modelos PTT e Giesekus com $Wi=1$, $\kappa = 0.1$ e $\beta = 1/2$ e $\beta = 1/9$.	111
Tabela 5 – Malhas usadas nas simulações.	127

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CSF	formulação Cartesiana do tensor
EDO's	equações diferenciais ordinárias
EDP's	equações diferenciais parciais
HWNP	<i>High Weissenberg Number problem</i>
MAC	metodologia <i>Marker-And-Cell</i>
MUCM	modelo convectivo superior de Maxwell modificado
NSF	formulação natural do tensor
UCM	modelo convectivo superior de Maxwell

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	27
2	MODELAGEM MATEMÁTICA E MÉTODO NUMÉRICO	33
2.1	Equações Governantes	33
2.2	Formulação natural do tensor	37
2.3	Condições auxiliares	43
2.4	Método numérico	46
3	ANÁLISE ASSINTÓTICA DO <i>STICK-SLIP</i> PARA O FLUIDO OLDROYD-B	51
3.1	O problema <i>stick-slip</i>	51
3.2	Solução Newtoniana para o problema <i>stick-slip</i>	51
3.3	Análise assintótica das equações constitutivas na base Cartesiana	56
3.3.1	<i>Região externa à camada limite</i>	59
3.3.2	<i>Camada limite da superfície stick</i>	62
3.3.2.1	Comportamento próximo à superfície stick	63
3.3.2.2	Escalonamento das variáveis	65
3.3.2.3	Equações da camada limite stick	68
3.3.3	<i>Camada limite da superfície slip</i>	72
3.3.3.1	Comportamento próximo à superfície slip	72
3.3.3.2	Escalonamento das variáveis	73
3.3.3.3	Equações da camada limite slip	75
3.4	Análise assintótica das equações constitutivas na base natural	79
3.4.1	<i>Região externa à camada limite</i>	79
3.4.2	<i>Camada limite da superfície stick</i>	80
3.4.2.1	Escalonamento das variáveis	80
3.4.2.2	Equações da camada limite stick	81
3.4.3	<i>Camada limite da superfície slip</i>	84
3.4.3.1	Escalonamento das variáveis	84
3.4.3.2	Equações da camada limite slip	84
4	RESULTADOS NUMÉRICOS: <i>STICK-SLIP</i>	89
4.1	Integração numérica das equações constitutivas ao longo de linhas de corrente	90

4.2	<i>Verificação em um escoamento Newtoniano</i>	97
4.3	<i>Resultados da convergência numérica</i>	102
4.3.1	<i>Estudo numérico da convergência temporal</i>	103
4.3.2	<i>Investigação numérica dos perfis</i>	106
4.4	<i>Resultados das singularidades de tensão</i>	108
4.4.1	<i>Comparação numérica com os resultados assintóticos</i>	108
4.4.2	<i>Investigação numérica das camadas limites</i>	113
4.4.3	<i>Investigação numérica para baixos valores da viscosidade do solvente</i>	116
5	RESULTADOS NUMÉRICOS: CONTRAÇÃO 4:1	123
5.1	<i>Integração numérica das equações constitutivas ao longo de linhas de corrente</i>	123
5.2	<i>Resultados das singularidades de tensão</i>	126
5.2.1	<i>Comparação numérica com os resultados assintóticos</i>	127
5.2.2	<i>Investigação numérica das camadas limites</i>	128
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	133
	REFERÊNCIAS	137
	APÊNDICE A EQUAÇÕES EM COORDENADAS POLARES	145
	APÊNDICE B ANÁLISE ASSINTÓTICA DO STICK-SLIP PARA OS FLUIDOS PTT E GIESEKUS	151
B.1	<i>Análise assintótica das equações constitutivas na base Cartesiana</i>	151
B.1.1	<i>Região externa à camada limite</i>	152
B.1.2	<i>Camada limite da superfície stick</i>	153
B.1.2.1	<i>Comportamento próximo à superfície stick</i>	153
B.1.2.2	<i>Escalonamento das variáveis</i>	157
B.1.2.3	<i>Equações da camada limite stick</i>	161
B.1.3	<i>Camada limite da superfície slip</i>	166
B.1.3.1	<i>Comportamento próximo à superfície slip</i>	166
B.1.3.2	<i>Escalonamento das variáveis</i>	168
B.1.3.3	<i>Equações da camada limite slip</i>	170
B.2	<i>Análise assintótica das equações constitutivas na base natural</i>	180
B.2.1	<i>Região externa à camada limite</i>	181
B.2.2	<i>Camada limite da superfície stick</i>	181
B.2.2.1	<i>Escalonamento das variáveis</i>	183
B.2.2.2	<i>Equações da camada limite stick</i>	184
B.2.3	<i>Camada limite da superfície slip</i>	190

B.2.3.1	<i>Escalonamento das variáveis</i>	190
B.2.3.2	<i>Equações da camada limite slip</i>	191
APÊNDICE C	DISCRETIZAÇÕES POR DIFERENÇAS FINITAS PRÓ-XIMAS À SINGULARIDADE	203
APÊNDICE D	MÉTODO NUMÉRICO PARA A INTEGRAÇÃO AO LONGO DE LINHAS DE CORRENTE	207



INTRODUÇÃO

Escoamentos envolvendo singularidades representam um desafio na área de mecânica dos fluidos computacional, uma vez que este tipo de escoamento dificulta o cálculo das propriedades (velocidade, pressão, tensões, etc.) de maneira acurada, ou ainda prejudica o processo de simulação numérica introduzindo instabilidades, que eventualmente levam à descontinuidade da simulação. Estas singularidades podem surgir em consequência de uma mudança abrupta nas condições de contorno ou pelo fato de a geometria do problema apresentar um domínio não suave. Um exemplo da primeira situação é o problema da extrusão (*die extrusion*), no qual a superfície do escoamento passa da condição de não escorregamento (*no-slip*) para a condição de tensão de cisalhamento nula (*zero shear-stress*). Enquanto que, para a última situação, podemos citar o problema do canto reentrante, no qual a fronteira do escoamento sofre um estreitamento repentino. As dificuldades associadas à problemas com singularidades são ainda maiores para escoamentos viscoelásticos, que modificam o comportamento e a estrutura matemática do problema. Entretanto, processos envolvendo escoamentos viscoelásticos com singularidades são muito comuns na área industrial, como os, já mencionados, processos de extrusão (TANNER, 1985) e contração. Este fato levou a muitos estudos experimentais, teóricos e numéricos para tentar entender estes problemas. Para o problema da extrusão, por exemplo, os estudos são, em sua maioria, experimentais (KOOPMANS, 1999; HUANG *et al.*, 2010) e numéricos (CLERMONT; NORMANDIN, 1993; RUSSO; PHILLIPS, 2011; COMMINAL *et al.*, 2018). Sendo o estudo teórico para este problema um desafio (TANNER, 2005), uma vez que na região de superfície livre do escoamento ocorre o fenômeno de inchamento, implicando em uma mudança no formato do domínio. Este inchaço na região de superfície livre pode ser ainda maior em escoamentos viscoelásticos (TANNER, 1970; TANNER, 1985), dificultando ainda mais o estudo teórico do problema de extrusão. Além disso, uma variedade de deformações na superfície de extrusão pode ocorrer quando as tensões excedem valores críticos. Nestas circunstâncias, a superfície pode apresentar

pequenas oscilações (*sharkskin*) ou fraturas. Essas instabilidades atraíram a atenção de muitos pesquisadores da área, veja, por exemplo, os trabalhos de Petrie e Denn (1976), Denn (1990), Denn (2001), Larson (1992), Graham (1999) e mais recentemente Kwon (2018). Uma alternativa para esta dificuldade é o estudo de um modelo mais simples (*toy model*) deste escoamento. Essa simplificação é feita por meio da fixação da superfície livre, isto é, a superfície livre é mantida imóvel e suave. Note que, esta simplificação é um caso particular do problema de extrusão, no qual a tensão superficial tende para o infinito. Este escoamento é conhecido na literatura como o problema *stick-slip*. Devido a sua geometria simples, mas numericamente difícil devido à presença da singularidade, o problema *stick-slip* é conhecido na literatura como um problema *benchmark* para simulação de escoamentos viscoelásticos (HASSAGER, 1988). Desta forma, o entendimento dos mecanismos envolvendo o comportamento singular do problema *stick-slip* deve acarretar uma melhor compreensão do problema de extrusão (TANNER, 1985).

No que se refere ao estudo do problema *stick-slip* podemos destacar os trabalhos de Moffatt (1964), que desenvolveu uma expressão assintótica para a componente tangencial da velocidade ao longo da superfície *slip*, e Richardson (1970), que construiu a solução assintótica para um escoamento Newtoniano a baixos valores de Reynolds (*creeping flow*) (ver também (ELLIOTIS; GEORGIOU; XENOPHONTOS, 2005)). Para a construção da solução assintótica de um escoamento Newtoniano, Richardson (1970) utilizou a solução da equação de Stokes para o canto reentrante, na sua forma geral, desenvolvida por Michael (1958). Mais recentemente, estudos assintóticos para fluidos viscoelásticos foram desenvolvidos: destacamos os trabalhos de Evans (2013), para o modelo PTT, e Evans (2015), para o modelo Giesekus. Nestes trabalhos, os dois modelos foram resolvidos na região externa à camada limite (*outer region*) e nas regiões internas (*inner region*) às camadas limites (*boundary layers*), *stick* e *slip*. O campo de velocidade usado nestes estudos foi o Newtoniano.

No caso numérico, numa tentativa de contornar os problemas advindos da singularidade, Apelian, Armstrong e Brown (1988) aplicaram uma modificação no modelo convectivo superior de Maxwell (UCM), chamado de modelo convectivo superior de Maxwell modificado (MUCM). Esta modificação resultou em uma melhora na convergência do método com o refinamento de malha. Por outro lado, Owens e Phillips (1991a) criaram uma versão modificada do problema *stick-slip* para o modelo Oldroyd-B, no qual a singularidade é suavizada por meio de uma função auxiliar, evitando a mudança abrupta nas condições de contorno. Ngamaramvarangkul e Webster (2001) apresentaram um estudo numérico dos problema *stick-slip* e inchamento do extrudado para o modelo Oldroyd-B com e sem a modificação *drag*, que é uma mudança no campo de velocidade. Há na literatura poucos trabalhos numéricos para o problema *stick-slip* com o modelo PTT e, aparentemente, não existe estudos numéricos com o modelo Giesekus. O modelo PTT foi analisado numericamente nos trabalhos de Fortin, Zine e Agassant (1992), Baaijens (1994)

e Karapetsas e Tsamopoulos (2009). Fortin, Zine e Agassant (1992) apresentou resultados, com o método de elementos finitos, para a componente normal do tensor polimérico na direção do escoamento sem a contribuição da viscosidade do solvente. Convergência é obtida apenas para valores do número de Weissenberg Wi acima de um valor crítico Wi_{crit} , que aumenta à medida que o parâmetro ϵ do modelo PTT aumenta (os valores das tensões para $Wi_{crit} = 2,13$, com $\epsilon = 0.02, 0.25$, respectivamente, tornam-se ilimitados). Os autores afirmam que, resultados similares podem ser obtidos com a presença da viscosidade do solvente, porém eles não apresentam resultados numéricos que comprove a afirmação. Baaijens (1994), via método de elementos finitos *discontinuous Galerkin*, apresentou resultados para o modelo PTT sem viscosidade do solvente. Os resultados apresentados por Baaijens (1994) para o modelo PTT são com o número de Debora $De = 87$ e $\epsilon = 0.25$. Ao passo que os resultados para o modelo UCM são obtidos com $De = 25.5$ e $\epsilon = 0$. Karapetsas e Tsamopoulos (2009) apresentaram resultados para as duas formas do modelo PTT, linear e exponencial, e para os casos planar e cilíndrico. A formulação usada foi o método de elementos finitos *modified elastic-viscous split stress EVSS-G scheme*. Estimativas do comportamento assintótico são apresentadas, porém, em sua maioria para o caso em que $\beta = 0$. Há apenas um valor solitário para o caso $\beta = 1/9$ e com a versão exponencial do modelo PTT. Entretanto, a singularidade para o modelo PTT é conhecida apenas para o caso linear e na presença da viscosidade do solvente.

Para o problema da contração, podemos destacar os estudos experimentais de Boger e Walters (2012), que abordam os principais fenômenos físicos que ocorrem em escoamentos viscoelásticos. Também ressaltamos os trabalhos de McKinley *et al.* (1991) e Owens e Phillips (2002), que tratam principalmente dos vórtices gerados em escoamentos viscoelásticos. No âmbito teórico, Dean e Montagnon (1949a) (ver também (MOFFATT, 1964)) construíram a solução assintótica do canto reentrante para um escoamento Newto-niano a baixo número de Reynolds. Em particular, para o canto reentrante de 270° , esta solução nos dá o comportamento assintótico do campo de velocidade como $r^{0.5445}$ (r é a distância radial a partir da singularidade). Posteriormente, Renardy (1993) usou este campo de velocidade para determinar o comportamento assintótico do tensor polimérico como $r^{-0.74}$ para o fluido UCM. Além disso, Hinch (1993b) obteve o comportamento assintótico de $r^{\frac{5}{9}}$ para o campo de velocidade e $r^{-\frac{2}{3}}$ para o tensor polimérico, com o campo de velocidade viscoelástico para o modelo Oldroyd-B. Entretanto, Hinch (1993b) determinou a solução apenas na região externa à camada limite, desconsiderando a existência das camadas limites, *upstream* e *downstream*. Assim, posteriormente, a solução foi estendida pelos trabalhos de Renardy (1995) com a solução na região *upstream*, e Rallison e Hinch (1999), com a solução na região *downstream* (ver também os trabalhos de Evans (2005a), Evans (2005b)).

Um problema identificado previamente para o escoamento no canto reentrante, para o fluido Oldroyd-B/UCM, é o surgimento de instabilidades na região *downstream*.

Esta dificuldade foi eliminada no nível assintótico-numérico, com o uso da expansão do tensor polimérico na base natural (RENARDY, 1994). Esta formulação utiliza parte da solução desenvolvida por Hinch (1993b), no processo de expansão, visando alinhar as componentes do tensor polimérico com as linhas de corrente do escoamento. Esta formulação foi explorada posteriormente no estudo teórico das equações para alto número de Weissenberg (RENARDY, 1997a), para o modelo UCM. O uso numérico desta formulação foi apenas empregada recentemente no trabalho de Evans e Oishi (2017), para o problema da contração 4:1 e modelo constitutivo Oldroyd-B. Posteriormente aos estudos teóricos do modelo Oldroyd-B/UCM para o problema do canto reentrante, surgiram uma série de estudos para os modelos PTT, na base Cartesiana (RENARDY, 1997b; EVANS, 2008a) e natural (EVANS; SIBLEY, 2009) (ver também (EVANS, 2010c; EVANS, 2010d)), e Giesekus, na base Cartesiana e natural (EVANS, 2010a; EVANS, 2009). Verificações numéricas dos resultados assintóticos do problema do canto reentrante de 270° e modelo constitutivo Oldroyd-B, foram realizadas por Ferrás *et al.* (2014) e, mais recentemente, Evans e Oishi (2017). A verificação de alguns dos resultados assintóticos para o modelo PTT pode ser vista no trabalho de Alves, Pinho e Oliveira (2003), porém apenas com o tensor na base Cartesiana.

Conforme vimos, muitos esforços já foram feitos com o objetivo de entender e solucionar problemas envolvendo singularidades. Em especial, nos escoamentos viscoelásticos para os problemas *stick-slip* e da contração 4:1. Entretanto, muito ainda precisa ser melhor compreendido e aperfeiçoado. Por exemplo, não se sabe ao certo se as equações constitutivas dos tensores se comportam corretamente sob altos valores das tensões. Além disso, muitos dos resultados assintóticos mencionados ainda não foram verificados numericamente, como, a representação dos tensores por meio de potências de r e a configuração das regiões de camada limite. Também, pouco se sabe sobre o uso numérico da formulação do tensor polimérico na base natural. Vale lembrar que, nos estudos assintóticos esta formulação é destacada por representar o tensor polimérico de modo mais acurado em problemas envolvendo singularidades. Outro detalhe importante, não há na literatura resultados numéricos para o modelo Giesekus para o problema *stick-slip*.

Assim, neste trabalho pretendemos adicionar mais informações no campo teórico e numérico para os problemas *stick-slip* e da contração 4:1. Em particular, resolvemos assintoticamente o problema *stick-slip* para o modelo Oldroyd-B em um campo de velocidade Newtoniano. A solução foi construída nas três regiões diferentes do domínio, região externa à camada limite e as regiões internas às camadas limites, *stick* e *slip*. Para isto, usamos o método assintótico das expansões (*matched asymptotic expansions*), onde combinamos as soluções das diferentes regiões do domínio para determinar os valores das constantes que compõem estas soluções. A partir da solução do tensor polimérico na região externa às camadas limites, definimos o comportamento do tensor como uma potência de r , a saber $\mathbf{T} \sim r^{\frac{4}{5}}$ para $r \rightarrow 0$, além de definir as potências das variáveis naturais. O uso de um

campo de velocidade Newtoniano para o estudo do modelo Oldroyd-B é justificado pelo fato de, além de simplificar os cálculos, não se conhecer uma expressão para o campo de velocidade viscoelástico do problema *stick-slip*. Os resultados numéricos da literatura ([BA-AIJENS, 1994](#)) sugerem que o uso do campo de velocidade viscoelástico torna os cálculos para o Oldroyd-B mais fáceis. Entretanto, o uso da regularização no ponto singular em ([OWENS; PHILLIPS, 1991b](#)) sugere que o mal comportamento do modelo Oldroyd-B ao longo da superfície *slip* também seria esperado para o campo de velocidade viscoelástico. Além disso, reproduzimos, de modo detalhado, a construção da solução do *stick-slip* para os modelos PTT ([EVANS, 2013](#)) e Giesekus ([EVANS, 2015](#)). Vale ressaltar que, a solução do *stick-slip*, com os três modelos constitutivos mencionados, foi realizada com o auxílio do tensor polimérico nas bases Cartesiana e natural.

Um resultado importante obtido neste trabalho é a verificação assintótica do mal comportamento das equações do modelo Oldroyd-B para o problema *stick-slip*, que geram resultados sem sentido físico, isto é, verificamos que o modelo Oldroyd-B estende a singularidade ao longo de toda superfície livre. Estes resultados estão em concordância com os obtidos em ([ROSENBERG; KEUNINGS, 1991](#)) e ([FORTIN; ZINE; AGASSANT, 1992](#)), no qual tensões excessivamente altas foram identificadas ao longo da superfície livre. Em contrapartida, o termo quadrático dos modelos PTT e Giesekus consegue corrigir esta dificuldade. Também, verificamos numericamente os resultados assintóticos para os problemas *stick-slip* e da contração para alguns fluidos viscoelásticos. Estas verificações foram feitas mediante duas abordagens diferentes: integração sobre linhas de corrente, por meio de um campo de velocidade prescrito, e a integração do conjunto completo de equações que representam um escoamento viscoelástico. O uso da integração sobre linhas de corrente, baseado num campo de velocidade dado, é interessante pois os resultados evidenciam a presença de camadas limites, ver por exemplo o trabalho de [Wapperom e Renardy \(2005\)](#). Por outro lado, o uso da integração do conjunto completo de equações nos dá condições de analisar o quanto próximo os resultados com o campo correto de velocidade estão dos valores assintóticos, baseados num campo de velocidade Newtoniano. Por fim, apresentamos a verificação numérica das equações das camadas limites, *stick* e *slip*, para os modelos PTT e Giesekus.

Os artigos gerados dessa tese foram:

- Stresses of the Oldroyd-B, PTT and Giesekus fluids in a Newtonian velocity field near the stick-slip singularity, *Physics of Fluids*, 29, 2017. Publicado.
- Numerical study of the transient planar stick-slip flow for PTT and Giesekus fluids. Submetido.
- Numerical study of the transient planar 4:1 contraction flow for PTT and Giesekus fluids. Em preparação.

Os Capítulos deste trabalho estão organizados da seguinte forma: no Capítulo 2 apresentamos as equações que modelam um escoamento viscoelástico e o método numérico utilizado, no Capítulo 3 resolvemos assintoticamente o problema *stick-slip* para o modelo Oldroyd-B, nos Capítulos 4 e 5 são apresentados os resultados numéricos dos problemas *stick-slip* e contração 4:1, respectivamente, e por fim, no Capítulo 6 apresentamos as considerações finais.



MODELAGEM MATEMÁTICA E MÉTODO NUMÉRICO

2.1 Equações Governantes

Nesta Seção apresentamos o conjunto de equações que governam um escoamento viscoelástico, incompressível e isotérmico para os modelos constitutivos Oldroyd-B, PTT e Giesekus. Inicialmente, apresentamos as equações de Navier-Stokes, constituídas pelas equações do movimento e da continuidade, dadas na forma dimensional, respectivamente, por

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (2.1)$$

e

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.2)$$

onde \mathbf{v} é o campo de velocidade, p é a pressão, ρ é a densidade e $\boldsymbol{\tau}$ é o tensor das tensões, tal que este último pode ser decomposto como a soma entre o tensor do solvente $\boldsymbol{\tau}^s$, ou tensor Newtoniano, e o tensor do polímero $\boldsymbol{\tau}^p$, ou tensor polimérico, isto é,

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^s + \boldsymbol{\tau}^p. \quad (2.3)$$

O tensor do solvente é dado por

$$\boldsymbol{\tau}^s = 2\eta_s \mathbf{D}, \quad (2.4)$$

onde η_s é a viscosidade do solvente e

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \quad (2.5)$$

é o tensor taxa de deformação. O tensor polimérico $\boldsymbol{\tau}^p$ é determinado por equações constitutivas, que variam de acordo com o modelo constitutivo adotado. Assim, apresentamos

de maneira generalizada a equação constitutiva que descreve os modelos Oldroyd-B, PTT e Giesekus, dada por

$$\boldsymbol{\tau}^p + \lambda_p \left(\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}^p + f(\boldsymbol{\tau}^p) \right) = 2\eta_p \mathbf{D}, \quad (2.6)$$

onde λ_p é o tempo de relaxação e η_p é a viscosidade do polímero. A função $f(\boldsymbol{\tau}^p)$, que determina o modelo constitutivo, e a derivada convectiva superior de Maxwell (*upper convected Maxwell derivative*) $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}^p$ são dadas, respectivamente, por

$$f(\boldsymbol{\tau}^p) = \begin{cases} 0, & \text{Oldroyd-B,} \\ \frac{\epsilon}{\eta_p} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}^p) \boldsymbol{\tau}^p, & \text{PTT,} \\ \frac{\alpha}{\eta_p} (\boldsymbol{\tau}^p)^2, & \text{Giesekus} \end{cases} \quad (2.7)$$

e

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}^p = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}^p}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\tau}^p - \nabla \mathbf{v} \boldsymbol{\tau}^p - \boldsymbol{\tau}^p \nabla \mathbf{v}^T. \quad (2.8)$$

Os modelos PTT e Giesekus, introduzem parâmetros adicionais que controlam a influência do termo quadrático na equação (2.6), são eles ϵ para o modelo PTT e o fator de mobilidade α para o modelo Giesekus. O parâmetro ϵ é positivo e seus valores são tomados pequenos, em geral um pouco acima de 0.05 (THIEN; TANNER, 1977; KARAPETSAS; TSAMOPOULOS, 2009). O fator de mobilidade α varia entre 0 e 1, porém seu valor é usualmente restrito ao intervalo [0, 0.5], ver (BIRD; ARMSTRONG; HASSAGER, 1977) e (SCHLEINIGER; WEINACHT, 1991a). Ambos os modelos, PTT e Giesekus, reduzem ao Oldroyd-B quando estes parâmetros são tomados como zero.

Para a construção da formulação natural, apresentada na Seção seguinte, é interessante escrever as equações constitutivas em função do tensor conformação \mathbf{A} . O tensor conformação \mathbf{A} é uma medida do momento de segunda ordem do vetor distância de ponta a ponta do haltere de polímero (VAITHIANATHAN; COLLINS, 2003). Desta forma, segue da definição do tensor conformação que este é simétrico e definido positivo.

Assim, por meio da relação entre o tensor polimérico $\boldsymbol{\tau}^p$ e o tensor conformação \mathbf{A} , isto é,

$$\boldsymbol{\tau}^p = \frac{\eta_p}{\lambda_p} (\mathbf{A} - \mathbf{I}), \quad (2.9)$$

podemos escrever a equação constitutiva (2.6) em função do tensor conformação, como

$$\lambda_p \overset{\nabla}{\mathbf{A}} + (\mathbf{A} - \mathbf{I}) + g(\mathbf{A} - \mathbf{I}), \quad (2.10)$$

onde

$$g(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \begin{cases} 0, & \text{Oldroyd-B,} \\ \epsilon \text{tr}(\mathbf{A} - \mathbf{I})(\mathbf{A} - \mathbf{I}), & \text{PTT,} \\ \alpha(\mathbf{A} - \mathbf{I})^2, & \text{Giesekus.} \end{cases} \quad (2.11)$$

Usando os parâmetros L e U , que representam o comprimento característico e a velocidade média do escoamento, adimensionalizamos as variáveis como

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= L\bar{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{v} = V\bar{\mathbf{v}}, \quad p = \eta_0 \frac{V}{L} \bar{p}, \quad \boldsymbol{\tau} = \eta_0 \frac{V}{L} \bar{\mathbf{T}}, \\ \boldsymbol{\tau}^s &= \eta_0 \frac{V}{L} \bar{\mathbf{T}}^s, \quad \boldsymbol{\tau}^p = \eta_0 \frac{V}{L} \bar{\mathbf{T}}^p \quad \text{e} \quad \mathbf{A} = \eta_0 \frac{V}{L} \bar{\mathbf{A}},\end{aligned}\tag{2.12}$$

onde $\eta_0 = \eta_s + \eta_p$ é a viscosidade total. Eliminando as barras sobre as variáveis adimensionais em (2.12), podemos reescrever as equações governantes para um fluido viscoelástico, incompressível e isotérmico na sua forma adimensional como

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\text{Re}} \nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \mathbf{T},\tag{2.13}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,\tag{2.14}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^s + \mathbf{T}^p,\tag{2.15}$$

$$\mathbf{T}^s = 2\beta \mathbf{D}\tag{2.16}$$

e

$$\mathbf{T}^p + \text{Wi} \left[\overset{\triangledown}{\mathbf{T}}^p + \frac{\kappa}{(1-\beta)} f(\mathbf{T}^p) \right] = 2(1-\beta) \mathbf{D},\tag{2.17}$$

onde $\text{Re} = \frac{\rho VL}{\eta_0}$ é o número de Reynolds, $\beta = \frac{\eta_s}{\eta_0}$ é a razão entre a viscosidade do solvente e a viscosidade total, $\text{Wi} = \lambda_p \frac{V}{L}$ é o número de Weissenberg, a função $f(\mathbf{T}^p)$ é dada por

$$f(\mathbf{T}^p) = \begin{cases} 0, & \text{Oldroyd-B,} \\ \text{tr}(\mathbf{T}^p) \mathbf{T}^p, & \text{PTT,} \\ (\mathbf{T}^p)^2, & \text{Giesekus,} \end{cases}\tag{2.18}$$

e o parâmetro κ por

$$\kappa = \begin{cases} 0, & \text{Oldroyd-B,} \\ \epsilon, & \text{PTT,} \\ \alpha, & \text{Giesekus.} \end{cases}\tag{2.19}$$

Utilizando a expressão para o tensor Newtoniano \mathbf{T}^s (2.16), podemos reescrever a equação do movimento (2.13) como

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\text{Re}} \nabla p + \frac{\beta}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \mathbf{T}^p.\tag{2.20}$$

A equação constitutiva da contribuição polimérica escrita em função do tensor conformação \mathbf{A} , Eq. (2.10), na sua forma adimensional é dada por

$$\text{Wi} \nabla \mathbf{\tilde{A}} + (\mathbf{A} - \mathbf{I}) + \kappa g(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = 0, \quad (2.21)$$

onde

$$g(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \begin{cases} 0, & \text{Oldroyd-B,} \\ \text{tr}(\mathbf{A} - \mathbf{I})(\mathbf{A} - \mathbf{I}), & \text{PTT,} \\ (\mathbf{A} - \mathbf{I})^2, & \text{Giesekus.} \end{cases} \quad (2.22)$$

Agora, a relação entre o tensor conformação \mathbf{A} e o tensor polimérico \mathbf{T}^p , Eq. (2.9), é dada por

$$\mathbf{T}^p = \zeta(\mathbf{A} - \mathbf{I}), \quad (2.23)$$

onde $\zeta = \frac{(1-\beta)}{\text{Wi}}$.

Para posteriores consultas, vamos escrever as equações do movimento (2.20), da continuidade (2.14) e constitutiva, em função de \mathbf{T}^p (2.17) e \mathbf{A} (2.21), em coordenadas cartesianas bidimensionais. Iniciamos com as equações de Navier-Stokes, equações (2.20) e (2.14), dadas por

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\beta}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial T_{11}^p}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}^p}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\beta}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial T_{12}^p}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}^p}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (2.24)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2.25)$$

A equação constitutiva (2.17) em coordenadas cartesianas bidimensionais é dada por

$$\begin{cases} \frac{\partial T_{11}^p}{\partial t} + u \frac{\partial T_{11}^p}{\partial x} + v \frac{\partial T_{11}^p}{\partial y} - 2 \left(T_{11}^p \frac{\partial u}{\partial x} + T_{12}^p \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{\text{Wi}} T_{11}^p + \frac{\kappa}{(1-\beta)} f_{11} = 2 \frac{(1-\beta)}{\text{Wi}} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial T_{12}^p}{\partial t} + u \frac{\partial T_{12}^p}{\partial x} + v \frac{\partial T_{12}^p}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} T_{11}^p - T_{22}^p \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\text{Wi}} T_{12}^p + \frac{\kappa}{(1-\beta)} f_{12} = \frac{(1-\beta)}{\text{Wi}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial T_{22}^p}{\partial t} + u \frac{\partial T_{22}^p}{\partial x} + v \frac{\partial T_{22}^p}{\partial y} - 2 \left(T_{22}^p \frac{\partial v}{\partial y} + T_{12}^p \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{\text{Wi}} T_{22}^p + \frac{\kappa}{(1-\beta)} f_{22} = 2 \frac{(1-\beta)}{\text{Wi}} \frac{\partial v}{\partial y}, \end{cases} \quad (2.26)$$

onde

$$\begin{aligned} f_{11} &= \begin{cases} 0, & \text{Oldroyd-B,} \\ (T_{11}^p + T_{22}^p) T_{11}^p, & \text{PTT,} \\ (T_{11}^p)^2 + (T_{12}^p)^2, & \text{Giesekus,} \end{cases} \quad f_{12} = \begin{cases} 0, & \text{Oldroyd-B,} \\ (T_{11}^p + T_{22}^p) T_{12}^p, & \text{PTT,} \\ (T_{11}^p + T_{22}^p) T_{12}^p, & \text{Giesekus,} \end{cases} \\ f_{22} &= \begin{cases} 0, & \text{Oldroyd-B,} \\ (T_{11}^p + T_{22}^p) T_{22}^p, & \text{PTT,} \\ (T_{12}^p)^2 + (T_{22}^p)^2, & \text{Giesekus.} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Por fim, a equação constitutiva em função do tensor conformação (2.21) escrita em coordenadas cartesianas bidimensionais é dada por

$$\begin{cases} \frac{\partial A_{11}}{\partial t} + u \frac{\partial A_{11}}{\partial x} + v \frac{\partial A_{11}}{\partial y} - 2 \left(A_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{Wi} (A_{11} - 1) + \frac{\kappa}{Wi} g_{11} = 0 \\ \frac{\partial A_{12}}{\partial t} + u \frac{\partial A_{12}}{\partial x} + v \frac{\partial A_{12}}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} A_{11} - A_{22} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{Wi} A_{12} + \frac{\kappa}{Wi} g_{12} = 0 \\ \frac{\partial A_{22}}{\partial t} + u \frac{\partial A_{22}}{\partial x} + v \frac{\partial A_{22}}{\partial y} - 2 \left(A_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + A_{12} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{Wi} (A_{22} - 1) + \frac{\kappa}{Wi} g_{22} = 0, \end{cases} \quad (2.28)$$

onde

$$\begin{aligned} g_{11} &= \begin{cases} 0, & \text{Oldroyd-B,} \\ (A_{11} + A_{22} - 2)(A_{11} - 1), & \text{PTT,} \\ (A_{11} - 1)^2 + A_{12}^2, & \text{Giesekus,} \end{cases} \quad g_{12} = \begin{cases} 0, & \text{Oldroyd-B,} \\ (A_{11} + A_{22} - 2)A_{12}, & \text{PTT,} \\ (A_{11} + A_{22} - 2)A_{12}, & \text{Giesekus,} \end{cases} \\ g_{22} &= \begin{cases} 0, & \text{Oldroyd-B,} \\ (A_{11} + A_{22} - 2)(A_{22} - 1), & \text{PTT,} \\ (A_{22} - 1)^2 + A_{12}^2, & \text{Giesekus.} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.29)$$

2.2 Formulação natural do tensor

Nesta Seção, apresentamos uma forma alternativa de expandir o tensor polimérico \mathbf{T}^p . Esta expansão, denominada de expansão na base natural, foi primeiramente apresentada por Renardy (1994), que, baseado na solução *stretching* do tensor polimérico (3.51) (ver Capítulo 3), propôs uma expansão tal que os vetores da base ficam alinhados às linhas de corrente. Segundo Renardy (1994) está formulação trouxe benefícios numéricos em termos de estabilidade, precisão e convergência. Assim, o objetivo desta Seção é apresentar a construção do sistema de equações constitutivas em termos das variáveis da base natural, que chamaremos de variáveis naturais. Desta forma, a expansão do tensor polimérico \mathbf{T}^p na base natural é dada por

$$\mathbf{T}^p = \zeta [\lambda \mathbf{v} \mathbf{v}^T + \mu (\mathbf{v} \mathbf{w}^T + \mathbf{w} \mathbf{v}^T) + \nu \mathbf{w} \mathbf{w}^T - \mathbf{I}], \quad (2.30)$$

ou, em termos do tensor conformação \mathbf{A} , como

$$\mathbf{A} = \lambda \mathbf{v}\mathbf{v}^T + \mu (\mathbf{v}\mathbf{w}^T + \mathbf{w}\mathbf{v}^T) + \nu \mathbf{w}\mathbf{w}^T, \quad (2.31)$$

onde

$$\mathbf{w} = \left(-\frac{\nu}{|\mathbf{v}|^2}, \frac{u}{|\mathbf{v}|^2} \right). \quad (2.32)$$

O vetor \mathbf{w} é perpendicular à \mathbf{v} e o determinante formado por estes vetores é igual a um.

Escrevendo a equação (2.31) em coordenadas Cartesianas bidimensionais, produz

$$\begin{cases} T_{11}^p = \zeta \left[\lambda u^2 - 2\mu \frac{uv}{|\mathbf{v}|^2} + \nu \frac{v^2}{|\mathbf{v}|^4} - 1 \right], \\ T_{12}^p = \zeta \left[\lambda uv + \frac{\mu}{|\mathbf{v}|^2} (u^2 - v^2) - \nu \frac{uv}{|\mathbf{v}|^4} \right], \\ T_{22}^p = \zeta \left[\lambda v^2 + 2\mu \frac{uv}{|\mathbf{v}|^2} + \nu \frac{u^2}{|\mathbf{v}|^4} - 1 \right], \end{cases} \quad (2.33)$$

ou ainda

$$\begin{cases} A_{11} = \lambda u^2 - 2\mu \frac{uv}{|\mathbf{v}|^2} + \nu \frac{v^2}{|\mathbf{v}|^4}, \\ A_{12} = \lambda uv + \frac{\mu}{|\mathbf{v}|^2} (u^2 - v^2) - \nu \frac{uv}{|\mathbf{v}|^4}, \\ A_{22} = \lambda v^2 + 2\mu \frac{uv}{|\mathbf{v}|^2} + \nu \frac{u^2}{|\mathbf{v}|^4}. \end{cases} \quad (2.34)$$

A relação inversa entre as componentes do tensor conformação e as variáveis naturais (2.34) é dada por

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1}{|\mathbf{v}|^4} (A_{11}u^2 + v^2A_{22} + 2uvA_{12}), \\ \mu = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} [uv(A_{22} - A_{11}) + (u^2 - v^2)A_{12}], \\ \nu = A_{11}v^2 + u^2A_{22} - 2A_{12}vu. \end{cases} \quad (2.35)$$

Para a construção do sistema de equações envolvendo apenas as variáveis da expansão natural, isto é, λ , μ e ν , precisamos substituir a expansão (2.34) em (2.21) e aplicar algumas manipulações algébricas. Devido à extensão dos cálculos e de modo a apresentarmos esta construção de forma organizada, dividimos a equação (2.21) em três partes diferentes: derivada total, deformação afim e termo quadrático. Desta forma no que segue, apresentamos a construção destas equações.

- Derivada total:

$$\begin{cases} \frac{DA_{11}}{Dt} = u^2 \frac{D\lambda}{Dt} - 2 \frac{uv}{|\mathbf{v}|^2} \frac{D\mu}{Dt} + \frac{v^2}{|\mathbf{v}|^4} \frac{Dv}{Dt} + 2\lambda u \frac{Du}{Dt} + 2 \frac{\mu}{|\mathbf{v}|^4} (u^2 - v^2) \left(v \frac{Du}{Dt} - u \frac{Dv}{Dt} \right) + \\ 2v \frac{v}{|\mathbf{v}|^6} \left[-2uv \frac{Du}{Dt} + (u^2 - v^2) \frac{Dv}{Dt} \right], \\ \frac{DA_{12}}{Dt} = uv \frac{D\lambda}{Dt} + \frac{(u^2 - v^2)}{|\mathbf{v}|^2} \frac{D\mu}{Dt} - \frac{uv}{|\mathbf{v}|^4} \frac{Dv}{Dt} + \lambda \left(v \frac{Du}{Dt} + u \frac{Dv}{Dt} \right) + \mu \frac{4uv}{|\mathbf{v}|^4} \left(v \frac{Du}{Dt} - u \frac{Dv}{Dt} \right) + \\ \frac{v}{|\mathbf{v}|^6} \left[v \frac{Du}{Dt} (3u^2 - v^2) + u \frac{Dv}{Dt} (3v^2 - u^2) \right], \\ \frac{DA_{22}}{Dt} = v^2 \frac{D\lambda}{Dt} + 2 \frac{uv}{|\mathbf{v}|^2} \frac{D\mu}{Dt} + \frac{u^2}{|\mathbf{v}|^4} \frac{Dv}{Dt} + 2\lambda v \frac{Dv}{Dt} - 2 \frac{\mu}{|\mathbf{v}|^4} (u^2 - v^2) \left(v \frac{Du}{Dt} - u \frac{Dv}{Dt} \right) + \\ 2v \frac{u}{|\mathbf{v}|^6} \left[-2uv \frac{Dv}{Dt} - (u^2 - v^2) \frac{Du}{Dt} \right]. \end{cases} \quad (2.36)$$

- Deformação afim:

$$\begin{cases} 2 \left(A_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 2 \left[\left(\lambda u^2 - 2\mu \frac{uv}{|\mathbf{v}|^2} + v \frac{v^2}{|\mathbf{v}|^4} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\lambda uv + \frac{\mu}{|\mathbf{v}|^2} (u^2 - v^2) - v \frac{uv}{|\mathbf{v}|^4} \right) \frac{\partial u}{\partial y} \right], \\ \frac{\partial v}{\partial x} A_{11} + A_{22} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \left(\lambda u^2 - 2\mu \frac{uv}{|\mathbf{v}|^2} + v \frac{v^2}{|\mathbf{v}|^4} \right) + \left(\lambda v^2 + 2\mu \frac{uv}{|\mathbf{v}|^2} + v \frac{u^2}{|\mathbf{v}|^4} \right) \frac{\partial u}{\partial y}, \\ 2 \left(A_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + A_{12} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 2 \left[\left(\lambda v^2 + 2\mu \frac{uv}{|\mathbf{v}|^2} + v \frac{u^2}{|\mathbf{v}|^4} \right) \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\lambda uv + \frac{\mu}{|\mathbf{v}|^2} (u^2 - v^2) - v \frac{uv}{|\mathbf{v}|^4} \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right]. \end{cases} \quad (2.37)$$

- Termo quadrático:

$$\begin{cases} \frac{1}{Wi} (1 - A_{11}) + \frac{\kappa}{Wi} g_{11} = \frac{1}{Wi} \left[1 - \left(\lambda u^2 - 2\mu \frac{uv}{|\mathbf{v}|^2} + v \frac{v^2}{|\mathbf{v}|^4} \right) \right] + \frac{\kappa}{Wi} g_1, \\ \frac{1}{Wi} (-A_{12}) + \frac{\kappa}{Wi} g_{12} = \frac{1}{Wi} \left[- \left(\lambda uv + \frac{\mu}{|\mathbf{v}|^2} (u^2 - v^2) - v \frac{uv}{|\mathbf{v}|^4} \right) \right] + \frac{\kappa}{Wi} g_2, \\ \frac{1}{Wi} (1 - A_{22}) + \frac{\kappa}{Wi} g_{22} = \frac{1}{Wi} \left[1 - \left(\lambda v^2 + 2\mu \frac{uv}{|\mathbf{v}|^2} + v \frac{u^2}{|\mathbf{v}|^4} \right) \right] + \frac{\kappa}{Wi} g_3, \end{cases} \quad (2.38)$$

onde

$$\begin{cases} g_1 = \begin{cases} 0, & \text{Oldroyd-B,} \\ \left(\lambda |\mathbf{v}|^2 + \frac{v}{|\mathbf{v}|^2} - 2 \right) \left(\lambda u^2 - 2\mu \frac{uv}{|\mathbf{v}|^2} + v \frac{v^2}{|\mathbf{v}|^4} - 1 \right), & \text{PTT,} \\ \left(\lambda u^2 - 2\mu \frac{uv}{|\mathbf{v}|^2} + v \frac{v^2}{|\mathbf{v}|^4} - 1 \right)^2 + \left(\lambda uv + \frac{\mu}{|\mathbf{v}|^2} (u^2 - v^2) - v \frac{uv}{|\mathbf{v}|^4} \right)^2, & \text{Giesekus} \end{cases} \\ g_2 = \begin{cases} 0, & \text{Oldroyd-B,} \\ \left(\lambda |\mathbf{v}|^2 + \frac{v}{|\mathbf{v}|^2} - 2 \right) \left(\lambda uv + \mu \frac{u^2 - v^2}{|\mathbf{v}|^2} - v \frac{uv}{|\mathbf{v}|^4} \right), & \text{PTT,} \\ \left(\lambda |\mathbf{v}|^2 + \frac{v}{|\mathbf{v}|^2} - 2 \right) \left(\lambda uv + \mu \frac{u^2 - v^2}{|\mathbf{v}|^2} - v \frac{uv}{|\mathbf{v}|^4} \right), & \text{Giesekus} \end{cases} \\ g_3 = \begin{cases} 0, & \text{Oldroyd-B,} \\ \left(\lambda |\mathbf{v}|^2 + \frac{v}{|\mathbf{v}|^2} - 2 \right) \left(\lambda v^2 + 2\mu \frac{uv}{|\mathbf{v}|^2} + v \frac{u^2}{|\mathbf{v}|^4} - 1 \right), & \text{PTT,} \\ \left(\lambda v^2 + 2\mu \frac{uv}{|\mathbf{v}|^2} + v \frac{u^2}{|\mathbf{v}|^4} - 1 \right)^2 + \left(\lambda uv + \frac{\mu}{|\mathbf{v}|^2} (u^2 - v^2) - v \frac{uv}{|\mathbf{v}|^4} \right)^2, & \text{Giesekus} \end{cases} \end{cases} \quad (2.39)$$

Portanto, juntando as três partes detalhadas acima, o conjunto de equações (2.36), (2.37) e (2.38), pode ser resumido em

$$\left\{ \begin{array}{l} u^2 \frac{D\lambda}{Dt} - 2 \frac{uv}{|\mathbf{v}|^2} \frac{D\mu}{Dt} + \frac{v^2}{|\mathbf{v}|^4} \frac{Dv}{Dt} = -2 \left[\frac{\partial u}{\partial t} \left(\lambda u + \mu \frac{v}{|\mathbf{v}|^4} (u^2 - v^2) - 2v \frac{uv^2}{|\mathbf{v}|^6} \right) + \right. \\ \left. \frac{\partial v}{\partial t} \frac{(u^2 - v^2)}{|\mathbf{v}|^4} \left(-\mu u + v \frac{v}{|\mathbf{v}|^2} \right) \right] + \frac{2u}{|\mathbf{v}|^2} \left(\mu u - v \frac{v}{|\mathbf{v}|^2} \right) \left[(u^2 - v^2) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 4uv \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \\ \frac{1}{Wi} \left[1 - \left(\lambda u^2 - 2\mu \frac{uv}{|\mathbf{v}|^2} + v \frac{v^2}{|\mathbf{v}|^4} \right) \right], \\ uv \frac{D\lambda}{Dt} + \frac{(u^2 - v^2)}{|\mathbf{v}|^2} \frac{D\mu}{Dt} - \frac{uv}{|\mathbf{v}|^4} \frac{Dv}{Dt} = - \left[\frac{\partial u}{\partial t} \left(\lambda v + \mu \frac{4uv^2}{|\mathbf{v}|^4} + \frac{v}{|\mathbf{v}|^6} (3u^2v - v^3) \right) + \right. \\ \left. \frac{\partial v}{\partial t} \left(\lambda u - \mu \frac{4vu^2}{|\mathbf{v}|^4} + \frac{v}{|\mathbf{v}|^6} (3uv^2 - u^3) \right) \right] - \mu \frac{\partial u}{\partial x} - \left(2\mu \frac{uv}{|\mathbf{v}|^2} + \frac{v}{|\mathbf{v}|^4} (u^2 - v^2) \right) (v^2 - u^2) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \\ \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \frac{\partial u}{\partial x} \left[\mu (6u^2v^2 - v^4 - u^4) + v \frac{4uv}{|\mathbf{v}|^2} (u^2 - v^2) \right] - \frac{1}{Wi} \left(\lambda uv + \frac{\mu}{|\mathbf{v}|^2} (u^2 - v^2) - v \frac{uv}{|\mathbf{v}|^4} \right), \\ v^2 \frac{D\lambda}{Dt} + 2 \frac{uv}{|\mathbf{v}|^2} \frac{D\mu}{Dt} + \frac{u^2}{|\mathbf{v}|^4} \frac{Dv}{Dt} = -2 \left[\frac{\partial u}{\partial t} \frac{(v^2 - u^2)}{|\mathbf{v}|^4} \left(\mu v + v \frac{u}{|\mathbf{v}|^2} \right) + \right. \\ \left. \frac{\partial v}{\partial t} \left(\lambda v + \mu \frac{u}{|\mathbf{v}|^4} (u^2 - v^2) - 2v \frac{vu^2}{|\mathbf{v}|^6} \right) \right] + \frac{2v}{|\mathbf{v}|^2} \left(\mu v + v \frac{u}{|\mathbf{v}|^2} \right) \left[(u^2 - v^2) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 4uv \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \\ \frac{1}{Wi} \left[1 - \left(\lambda v^2 + 2\mu \frac{uv}{|\mathbf{v}|^2} + v \frac{u^2}{|\mathbf{v}|^4} \right) \right] \end{array} \right. \quad (2.40)$$

Observe que, a partir do sistema de equações (2.40), derivamos o seguinte sistema linear para $\frac{D\lambda}{Dt}$, $\frac{D\mu}{Dt}$ e $\frac{Dv}{Dt}$,

$$\begin{pmatrix} u^2 & -2 \frac{uv}{|\mathbf{v}|^2} & \frac{v^2}{|\mathbf{v}|^4} \\ uv & \frac{(u^2 - v^2)}{|\mathbf{v}|^2} & -\frac{uv}{|\mathbf{v}|^4} \\ v^2 & 2 \frac{uv}{|\mathbf{v}|^2} & \frac{u^2}{|\mathbf{v}|^4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{D\lambda}{Dt} \\ \frac{D\mu}{Dt} \\ \frac{Dv}{Dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} A = -2 \left[\frac{\partial u}{\partial t} \left(\lambda u + \mu \frac{v}{|\mathbf{v}|^4} (u^2 - v^2) - 2v \frac{uv^2}{|\mathbf{v}|^6} \right) + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{(u^2 - v^2)}{|\mathbf{v}|^4} \left(-\mu u + v \frac{v}{|\mathbf{v}|^2} \right) \right] + \\ \frac{2u}{|\mathbf{v}|^2} \left(\mu u - v \frac{v}{|\mathbf{v}|^2} \right) \left[(u^2 - v^2) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 4uv \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{1}{Wi} \left[1 - \left(\lambda u^2 - 2\mu \frac{uv}{|\mathbf{v}|^2} + v \frac{v^2}{|\mathbf{v}|^4} \right) \right], \\ B = - \left[\frac{\partial u}{\partial t} \left(\lambda v + \mu \frac{4uv^2}{|\mathbf{v}|^4} + \frac{v}{|\mathbf{v}|^6} (3u^2v - v^3) \right) + \frac{\partial v}{\partial t} \left(\lambda u - \mu \frac{4vu^2}{|\mathbf{v}|^4} + \frac{v}{|\mathbf{v}|^6} (3uv^2 - u^3) \right) \right] - \\ \mu \frac{\partial u}{\partial x} - \left(2\mu \frac{uv}{|\mathbf{v}|^2} + \frac{v}{|\mathbf{v}|^4} (u^2 - v^2) \right) (v^2 - u^2) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \\ \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \frac{\partial u}{\partial x} \left[\mu (6u^2v^2 - v^4 - u^4) + v \frac{4uv}{|\mathbf{v}|^2} (u^2 - v^2) \right] - \frac{1}{Wi} \left(\lambda uv + \frac{\mu}{|\mathbf{v}|^2} (u^2 - v^2) - v \frac{uv}{|\mathbf{v}|^4} \right), \\ C = -2 \left[\frac{\partial u}{\partial t} \frac{(v^2 - u^2)}{|\mathbf{v}|^4} \left(\mu v + v \frac{u}{|\mathbf{v}|^2} \right) + \frac{\partial v}{\partial t} \left(\lambda v + \mu \frac{u}{|\mathbf{v}|^4} (u^2 - v^2) - 2v \frac{vu^2}{|\mathbf{v}|^6} \right) \right] + \\ \frac{2v}{|\mathbf{v}|^2} \left(\mu v + v \frac{u}{|\mathbf{v}|^2} \right) \left[(u^2 - v^2) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 4uv \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{1}{Wi} \left[1 - \left(\lambda v^2 + 2\mu \frac{uv}{|\mathbf{v}|^2} + v \frac{u^2}{|\mathbf{v}|^4} \right) \right] \end{array} \right. \quad (2.42)$$

A solução do sistema (2.41) é dada por

$$\begin{cases} \frac{D\lambda}{Dt} = \left(\frac{v}{u|\mathbf{v}|^2} \right)^2 (Cu^2 + v^2 A - 2uvB) + \frac{2v}{u|\mathbf{v}|^2} \frac{(Bu - vA)}{u} + \frac{A}{u^2}, \\ \frac{D\mu}{Dt} = \frac{v}{u|\mathbf{v}|^2} (Cu^2 + v^2 A - 2uvB) + \frac{Bu - vA}{u}, \\ \frac{Dv}{Dt} = Cu^2 + v^2 A - 2uvB, \end{cases} \quad (2.43)$$

que resulta em

$$\begin{cases} \frac{D\lambda}{Dt} = -\frac{2}{|\mathbf{v}|^2} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \left(\lambda u + \mu \frac{v}{|\mathbf{v}|^2} \right) + \frac{\partial v}{\partial t} \left(\lambda v - \mu \frac{u}{|\mathbf{v}|^2} \right) \right] + \frac{2\mu}{|\mathbf{v}|^4} \left[(u^2 - v^2) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 4uv \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{1}{Wi} \left(\frac{1}{|\mathbf{v}|^2} - \lambda \right) - \frac{\kappa}{Wi} g_\lambda, \\ \frac{D\mu}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} \left(\lambda v - \frac{vv}{|\mathbf{v}|^4} \right) + \frac{\partial v}{\partial t} \left(-u\lambda + \frac{uv}{|\mathbf{v}|^4} \right) + \frac{v}{|\mathbf{v}|^4} \left[(u^2 - v^2) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 4uv \frac{\partial u}{\partial x} \right] - \frac{\mu}{Wi} - \frac{\kappa}{Wi} g_\mu, \\ \frac{Dv}{Dt} = 2 \left[\frac{\partial u}{\partial t} \left(\mu v + \frac{vu}{|\mathbf{v}|^2} \right) + \frac{\partial v}{\partial t} \left(\frac{vv}{|\mathbf{v}|^2} - u\mu \right) \right] + \frac{1}{Wi} (|\mathbf{v}|^2 - v) - \frac{\kappa}{Wi} g_v, \end{cases} \quad (2.44)$$

onde

$$\begin{aligned} g_\lambda &= \begin{cases} 0, & \text{Oldroyd-B,} \\ \left(\lambda |\mathbf{v}|^2 - 2 + \frac{v}{|\mathbf{v}|^2} \right) \left(\lambda - \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \right), & \text{PTT,} \\ \left(\lambda - \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \right)^2 |\mathbf{v}|^2 + \frac{\mu^2}{|\mathbf{v}|^2}, & \text{Giesekus,} \end{cases} \\ g_\mu &= \begin{cases} 0, & \text{Oldroyd-B,} \\ \left(\lambda |\mathbf{v}|^2 - 2 + \frac{v}{|\mathbf{v}|^2} \right) \mu, & \text{PTT,} \\ \left(\lambda |\mathbf{v}|^2 - 2 + \frac{v}{|\mathbf{v}|^2} \right) \mu, & \text{Giesekus,} \end{cases} \\ g_v &= \begin{cases} 0, & \text{Oldroyd-B,} \\ \left(\lambda |\mathbf{v}|^2 - 2 + \frac{v}{|\mathbf{v}|^2} \right) (v - |\mathbf{v}|^2), & \text{PTT,} \\ \left(v - |\mathbf{v}|^2 \right)^2 \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} + \mu^2 |\mathbf{v}|^2, & \text{Giesekus.} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Além disso, note que

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = \frac{1}{|\mathbf{v}|^4} \left[(v^2 - u^2) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 4uv \frac{\partial u}{\partial x} \right]. \quad (2.46)$$

Desta forma, podemos reescrever a equação (2.44) como

$$\begin{cases} \frac{D\lambda}{Dt} = -\frac{2}{|\mathbf{v}|^2} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \left(\lambda u + \mu \frac{v}{|\mathbf{v}|^2} \right) + \frac{\partial v}{\partial t} \left(\lambda v - \mu \frac{u}{|\mathbf{v}|^2} \right) \right] - 2\mu \nabla \cdot \mathbf{w} + \frac{1}{Wi} \left(\frac{1}{|\mathbf{v}|^2} - \lambda \right) - \frac{\kappa}{Wi} g_\lambda, \\ \frac{D\mu}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} \left(\lambda v - \frac{vv}{|\mathbf{v}|^4} \right) + \frac{\partial v}{\partial t} \left(-u\lambda + \frac{uv}{|\mathbf{v}|^4} \right) - v \nabla \cdot \mathbf{w} - \frac{\mu}{Wi} - \frac{\kappa}{Wi} g_\mu, \\ \frac{Dv}{Dt} = 2 \left[\frac{\partial u}{\partial t} \left(\mu v + \frac{vu}{|\mathbf{v}|^2} \right) + \frac{\partial v}{\partial t} \left(\frac{vv}{|\mathbf{v}|^2} - u\mu \right) \right] + \frac{1}{Wi} (|\mathbf{v}|^2 - v) - \frac{\kappa}{Wi} g_v. \end{cases} \quad (2.47)$$

Para a simulação numérica das variáveis naturais é conveniente aplicar um escalonamento sobre elas, de modo a diminuir possíveis instabilidades decorrentes dos termos envolvendo divisões por potências da norma de \mathbf{v} , por exemplo $|\mathbf{v}|^4$. Assim, de modo a eliminarmos os termos envolvendo $|\mathbf{v}|^4$, aplicamos o seguintes escalonamentos

$$\lambda = \frac{\hat{\lambda}}{|\mathbf{v}|^2}, \quad \mu = \hat{\mu} \quad \text{e} \quad v = \hat{v}|\mathbf{v}|^2. \quad (2.48)$$

Desta forma, a relação (2.34) passa a ser dada por

$$\begin{cases} A_{11} = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} (\hat{\lambda} u^2 - 2\hat{\mu}uv + \hat{v}v^2), \\ A_{12} = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} [uv(\hat{\lambda} - \hat{v}) + \hat{\mu}(u^2 - v^2)], \\ A_{22} = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} (\hat{\lambda} v^2 + 2\hat{\mu}uv + \hat{v}u^2). \end{cases} \quad (2.49)$$

Substituindo (2.48) em (2.47), obtemos

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial t} = -|\mathbf{v}|^2 (\mathbf{v} \cdot \nabla) \left(\frac{\hat{\lambda}}{|\mathbf{v}|^2} \right) + \frac{2\hat{\mu}}{|\mathbf{v}|^2} \left\{ -\frac{\partial u}{\partial t} v + u \frac{\partial v}{\partial t} + [(u^2 - v^2) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 4uv \frac{\partial u}{\partial x}] \right\} + \frac{1}{Wi} (1 - \hat{\lambda}) - \frac{\kappa}{Wi} g_{\hat{\lambda}}, \\ \frac{\partial \hat{\mu}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \hat{\mu} + \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \left\{ \left(v \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial v}{\partial t} \right) (\hat{\lambda} - \hat{v}) + \hat{v} [(u^2 - v^2) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 4uv \frac{\partial u}{\partial x}] \right\} - \frac{\hat{\mu}}{Wi} - \frac{\kappa}{Wi} g_{\hat{\mu}}, \\ \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} = -\frac{1}{|\mathbf{v}|^2} (\mathbf{v} \cdot \nabla) (\hat{v}|\mathbf{v}|^2) + \frac{2\hat{\mu}}{u^2 + v^2} \left(v \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \frac{1}{Wi} (1 - \hat{v}) - \frac{\kappa}{Wi} g_{\hat{v}}, \end{cases} \quad (2.50)$$

onde

$$\begin{aligned} g_{\hat{\lambda}} &= \begin{cases} 0, & \text{Oldroyd-B,} \\ (\hat{\lambda} - 2 + \hat{v})(\hat{\lambda} - 1), & \text{PTT,} \\ (\hat{\lambda} - 1)^2 + \hat{\mu}^2, & \text{Giesekus} \end{cases} & g_{\hat{\mu}} &= \begin{cases} 0, & \text{Oldroyd-B,} \\ (\hat{\lambda} - 2 + \hat{v})\hat{\mu}, & \text{PTT,} \\ (\hat{\lambda} - 2 + \hat{v})\hat{\mu}, & \text{Giesekus} \end{cases} \\ g_{\hat{v}} &= \begin{cases} 0, & \text{Oldroyd-B,} \\ (\hat{\lambda} - 2 + \hat{v})(\hat{v} - 1), & \text{PTT,} \\ (\hat{v} - 1)^2 + \hat{\mu}^2, & \text{Giesekus} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.51)$$

Note que, mantivemos a norma de \mathbf{v} dentro do termo convectivo nas equações de $\hat{\lambda}$ e \hat{v} em (2.50). Isto foi feito de modo a contribuir para a estabilidade do método.

Por fim, apresentamos a relação inversa entre \mathbf{A} e as variáveis naturais escalonadas,

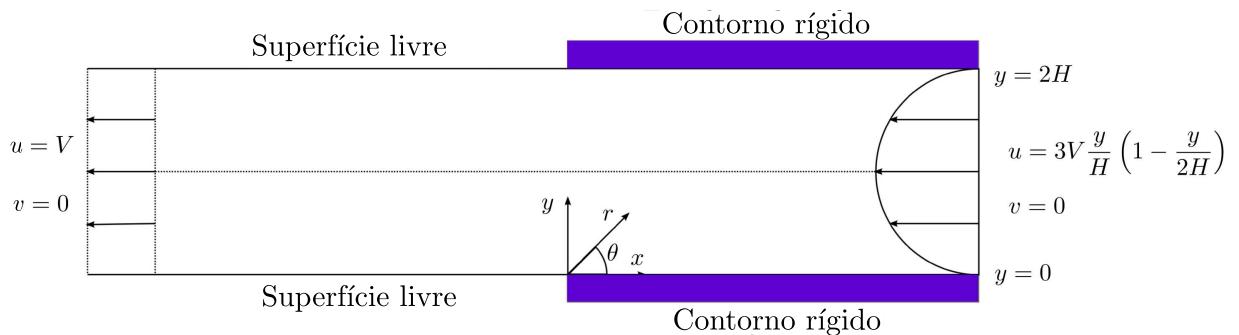
dada por

$$\begin{cases} \hat{\lambda} = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} (A_{11}u^2 + v^2 A_{22} + 2uvA_{12}), \\ \hat{\mu} = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} [uv(A_{22} - A_{11}) + (u^2 - v^2)A_{12}], \\ \hat{v} = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} (A_{11}v^2 + u^2 A_{22} - 2A_{12}vu). \end{cases} \quad (2.52)$$

2.3 Condições auxiliares

As condições auxiliares são divididas em dois grupos: condições de contorno e condições iniciais. As condições de contorno são valores ou condições impostas às propriedades do escoamento em algumas regiões do domínio e em todos os ciclos. Por outro lado, as condições iniciais são valores aplicados às propriedades do escoamento em todo domínio, porém apenas no ciclo inicial, tempo $t = 0$. Assim, nesta seção, apresentamos as condições auxiliares necessárias para a solução dos problemas *stick-slip* e da contração 4:1, Figuras 1 e 2, respectivamente. Note que, os problemas *stick-slip* e da contração 4:1 envolvem diferentes fenômenos no que diz respeito à presença de superfície livre. O problema da contração 4:1 não possui superfície livre, denominado escoamento confinado. Entretanto, o escoamento *stick-slip* possui superfície livre, exigindo condições auxiliares adicionais. Desta forma, além das condições auxiliares para um escoamento confinado, aplicadas a ambos os problemas, *stick-slip* e contração 4:1, também definimos as condições auxiliares para a região de superfície livre do *stick-slip*.

Figura 1 – Geometria do problema *stick-slip*.

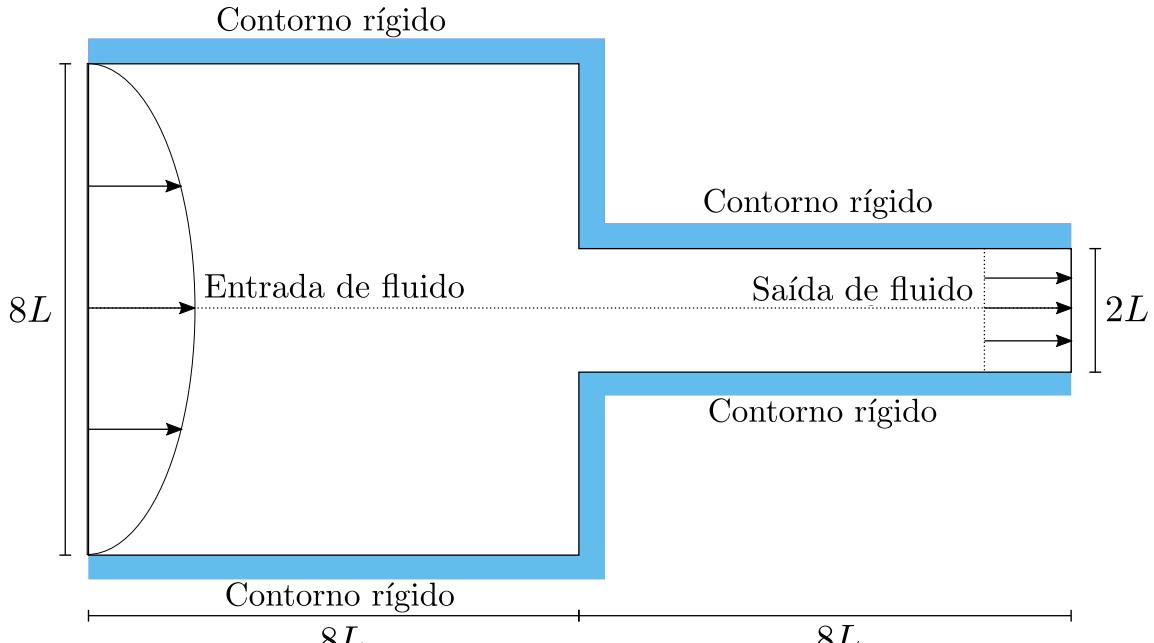


Fonte: Elaborada pelo autor.

As condições iniciais para o campo de velocidade \mathbf{v} , pressão p e tensor polimérico \mathbf{T}^p são dadas, respectivamente, por

$$\mathbf{v} = 0, \quad p = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{T}^p = 0. \quad (2.53)$$

Figura 2 – Geometria do problema da contração 4:1.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que, como consequência de (2.53), o tensor conformação é iniciado como $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ e as variáveis naturais como

$$\lambda = 1, \quad \mu = 0, \quad \nu = 1. \quad (2.54)$$

Para a imposição das condições de contorno, separamos as regiões do domínio em: região de entrada de fluido (*inflow*), região de saída de fluido (*outflow*), contorno rígido e superfície livre. Desta forma, definimos

- Região de entrada de fluido: nesta região definimos os valores do campo de velocidade \mathbf{v} e do tensor polimérico \mathbf{T}^p como sendo a solução analítica de um escoamento num canal totalmente desenvolvido *Poiseuille flow* para o modelo viscoelástico Oldroyd-B, isto é,

$$u = 3y \frac{V}{L} \left(1 - \frac{y}{2L}\right), \quad v = 0, \quad (2.55)$$

e

$$T_{11}^p = 2Wi(1 - \beta) \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \quad T_{12}^p = (1 - \beta) \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{e} \quad T_{22}^p = 0. \quad (2.56)$$

Das relações entre \mathbf{A} e \mathbf{T}^p (2.23), bem como entre \mathbf{T}^p e as variáveis naturais λ , μ e ν (2.30), obtemos as seguintes condições para \mathbf{A} e as variáveis naturais

$$A_{11} = \lambda = 2Wi^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 1, \quad A_{12} = \mu = Wi \frac{\partial u}{\partial y}, \quad A_{22} = \nu = 1. \quad (2.57)$$

- Região de saída de fluido: nesta região aplicamos a condição de Neumann homogênea para o campo de velocidade e o tensor polimérico, isto é,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathbf{T}^p}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad (2.58)$$

onde \mathbf{n} é o vetor normal à região de saída de fluido.

Como \mathbf{A} e \mathbf{T}^p possuem uma relação linear (2.23), temos que

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{n}} = 0. \quad (2.59)$$

Para as variáveis naturais, embora não tenham uma relação linear com \mathbf{T}^p ou \mathbf{A} , também aplicamos a condição de Neumann homogêneo em λ , μ e ν , uma vez que o objetivo dessa condição é poder limitar o tamanho do domínio sem afetar significativamente as demais partes do escoamento. Uma outra alternativa é calcular \mathbf{T}^p na saída e depois construir λ , μ e ν pelo inverso de (2.30).

- Contorno rígido: nesta região aplicamos as condições de impermeabilidade para a componente normal v_n da velocidade e a condição de não escorregamento para a componente tangencial v_t da velocidade, ou seja,

$$v_n = 0 \quad \text{e} \quad v_t = 0. \quad (2.60)$$

Para o tensor polimérico \mathbf{T}^p , tensor conformação \mathbf{A} e as variáveis naturais λ , μ e ν aplicamos uma extrapolação de primeira ordem.

- Superfície livre: para este caso consideramos as seguintes condições, normal e tangencial, respectivamente

$$\begin{cases} \mathbf{n}^T (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) = 0, \\ \mathbf{t}^T (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) = 0, \end{cases} \quad (2.61)$$

ou na forma cartesiana bidimensional

$$\begin{cases} \sigma_{11} n_1^2 + \sigma_{22} n_2^2 + 2n_1 n_2 \sigma_{12} = 0, \\ \sigma_{11} t_1 n_1 + t_2 n_2 \sigma_{22} + (t_1 n_2 + t_2 n_1) \sigma_{12} = 0, \end{cases} \quad (2.62)$$

onde \mathbf{t} é o vetor tangente à superfície e $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor tensão total, dado por

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + 2\beta \mathbf{D} + \mathbf{T}^p, \quad (2.63)$$

ou em coordenadas cartesianas bidimensionais

$$\begin{cases} \sigma_{11} = -p + 2\beta \frac{\partial u}{\partial x} + T_{11}^p, \\ \sigma_{12} = \beta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + T_{12}^p, \\ \sigma_{22} = -p + 2\beta \frac{\partial v}{\partial y} + T_{22}^p. \end{cases} \quad (2.64)$$

Desta forma, podemos reescrever a equação (2.62) como

$$\begin{cases} -p + 2\beta \left[\frac{\partial u}{\partial x} n_1^2 + \frac{\partial v}{\partial y} n_2^2 + n_1 n_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + T_{11}^p n_1^2 + T_{22}^p n_2^2 + 2n_1 n_2 T_{12}^p = 0, \\ \beta \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} t_1 n_1 + 2 \frac{\partial v}{\partial y} t_2 n_2 + (t_1 n_2 + t_2 n_1) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + T_{11}^p t_1 n_1 + t_2 n_2 T_{22}^p + (t_1 n_2 + t_2 n_1) T_{12}^p = 0. \end{cases} \quad (2.65)$$

Além disso, usando a decomposição da velocidade (2.72), a equação para a pressão (2.77) e a relação entre o tensor normal e tangencial à superfície livre ($t_1, t_2 = (-n_2, n_1)$), podemos reescrever a condição (2.65) como

$$\begin{cases} \frac{\text{Re}}{\Delta t} \phi + 2\beta \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} n_1^2 + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} n_2^2 + 2n_1 n_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right] = -\tilde{p} + \\ + 2\beta \left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} n_1^2 + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} n_2^2 + n_1 n_2 \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) \right] + T_{11}^p n_1^2 + T_{22}^p n_2^2 \\ + 2n_1 n_2 T_{12}^p, \\ n_1 n_2 2\beta \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) (n_1^2 - n_2^2) + (T_{22}^p - T_{11}^p) n_2 n_1 + T_{12}^p (n_1^2 - n_2^2) = 0. \end{cases} \quad (2.66)$$

A primeira equação em (2.66) é usada como condição de contorno na superfície livre para o potencial auxiliar ϕ , ao passo que a segunda equação em (2.66) é usada para a atualização do campo de velocidade na superfície livre.

Particularizando as condições (2.66) para o problema *stick-slip*, temos que

$$\begin{cases} \frac{\text{Re}}{\Delta t} \phi + 2\beta \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\tilde{p} + 2\beta \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + T_{22}^p, \\ \beta \frac{\partial u}{\partial y} + T_{12}^p = 0. \end{cases} \quad (2.67)$$

A segunda equação em (2.67) é denominada condição de tensão de cisalhamento nula. Em adição a estas condições, também tomamos a velocidade normal à superfície livre como $v = 0$.

2.4 Método numérico

Nesta Seção, apresentamos o método usado para o cálculo das equações governantes apresentadas na Seção 2.1, juntamente com as condições auxiliares da Seção 2.3. Neste método as equações da continuidade (2.14) e equação do movimento (2.13) são desacopladas via método de projeção, ver (OISHI *et al.*, 2011). Para isto, decomponemos o campo de velocidade \mathbf{v} , baseado na decomposição de Helmholtz-Hodge (CHORIN; MARSDEN, 1990), como

$$\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}} - \nabla \phi, \quad (2.68)$$

onde $\tilde{\mathbf{v}}$ é um campo de velocidade tentativa e ϕ é um potencial auxiliar usado para a correção da velocidade \mathbf{v} . Desta forma, usamos a equação do movimento (2.13) aplicada ao campo de velocidade tentativa $\tilde{\mathbf{v}}$, isto é,

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}} = -\frac{1}{Re} \nabla p + \frac{\beta}{Re} \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}} + \frac{1}{Re} \nabla \cdot \mathbf{T}^p \quad (2.69)$$

Para a solução da equação (2.69), aplicamos um método semi-implícito, no qual resolvemos o laplaciano implicitamente, porém, a convecção, o gradiente de pressão e o divergente do tensor polimérico são dados explicitamente, ou seja,

$$\frac{\tilde{\mathbf{v}}^{n+1} - \tilde{\mathbf{v}}^n}{\Delta t} + (\tilde{\mathbf{v}}^n \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}}^n = -\frac{1}{Re} \nabla p^n + \frac{\beta}{Re} \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}^{n+1} + \frac{1}{Re} (\nabla \cdot \mathbf{T}^p)^n, \quad (2.70)$$

onde Δt é o passo temporal. Os índices n e $n+1$ representam os valores das propriedades nos ciclos n e $n+1$, respectivamente.

Como condições auxiliares de $\tilde{\mathbf{v}}$, nas regiões descritas na Seção (2.3), utilizamos as mesmas condições de \mathbf{v} , isto é, equação (2.53) para a condição inicial, condição de não escorregamento nas regiões de superfície rígida (2.60), equações (2.55) na região de entrada de fluido, Neumann homogêneo (2.58) na região de saída de fluido e a condição de cisalhamento nula (2.67) para o cálculo da velocidade tangencial na superfície livre. Esta última é dada por

$$\beta \frac{\partial u^{n+1}}{\partial y} + (T_{12}^p)^{n+1} = 0. \quad (2.71)$$

Note que, esta condição é um caso particular da condição tangencial, segunda equação em (2.61), apresentada na Seção 2.3. Além disso, a velocidade normal v à superfície livre é tomada como zero, isto é, $v^{n+1} = 0$.

O próximo passo é a solução do potencial auxiliar ϕ , que será utilizado posteriormente para a correção do campo de velocidade. Para isto, discretizamos a equação (2.68) no tempo, dada por

$$\mathbf{v}^{n+1} = \tilde{\mathbf{v}}^{n+1} - \nabla \phi^{n+1}, \quad (2.72)$$

que, aplicando o divergente $\nabla \cdot$ e fazendo uso da equação da continuidade (2.14), resulta na seguinte equação de Poisson para o potencial auxiliar ϕ

$$\nabla^2 \phi^{n+1} = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}^{n+1}. \quad (2.73)$$

As condições de contorno de ϕ são, em fronteiras rígidas e na região de entrada de fluido,

$$\frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad (2.74)$$

e, na região de saída de fluido,

$$\phi^{n+1} = 0. \quad (2.75)$$

Como condição de superfície livre para ϕ , utilizamos a primeira equação em (2.67), isto é,

$$\frac{Re}{\Delta t} \phi^{n+1} + 2\beta \frac{\partial^2 \phi^{n+1}}{\partial y^2} = -\tilde{p}^{n+1} + 2\beta \frac{\partial \tilde{v}^{n+1}}{\partial y} + T_{22}^{p,n+1} \quad (2.76)$$

Esta condição de contorno, equação (2.76), é adicionada à solução do problema *stick-slip* pois as tradicionais condições de contorno para este problema, velocidade normal nula $v = 0$ e tensão de cisalhamento nula $\sigma_{12} = 0$, são insuficientes para completar o conjunto de condições de contorno necessárias para a solução do potencial auxiliar ϕ . Vale destacar também que, a primeira equação em (2.67) é usada como condição de contorno na versão mais complexa do processo de extrusão, o problema inchamento do extrudado.

Além disso, precisamos atualizar a pressão p^{n+1} . Para isto, construímos a equação da pressão por substituir a decomposição (2.72) na equação do movimento (2.20) e comparar com (2.70). Assim, a equação para pressão é dada por

$$p^{n+1} = p^n + \frac{Re}{\Delta t} \phi^{n+1}. \quad (2.77)$$

Por fim, resolvemos a equação constitutiva, para o tensor polimérico \mathbf{T}^p ou para as variáveis naturais λ , μ e ν , usando o método de Euler explícito com o termo convectivo sendo discretizado pelo método CUBISTA (ALVES; OLIVEIRA; PINHO, 2003). A inicialização destas variáveis é dada pelas equações (2.53) e (2.54). Mesmo as variáveis escalonadas da formulação natural, $\hat{\lambda}$, $\hat{\mu}$ e $\hat{\nu}$, utilizam a mesma inicialização em (2.54).

A discretização temporal da equação constitutiva (2.17) é dada por

$$\frac{(\mathbf{T}^p)^{n+1} - (\mathbf{T}^p)^n}{\Delta t} = \frac{1}{Wi} \left[-(\mathbf{T}^p)^n + (1-\beta) \left(\nabla \mathbf{v}^{n+1} + (\nabla \mathbf{v}^{n+1})^T \right) \right] - (\mathbf{v}^{n+1} \cdot \nabla) (\mathbf{T}^p)^n + \nabla \mathbf{v}^{n+1} (\mathbf{T}^p)^n + (\mathbf{T}^p)^n (\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1})^T - \frac{\kappa}{(1-\beta)} f((\mathbf{T}^p)^n), \quad (2.78)$$

onde a função f é selecionada de acordo com o modelo constitutivo, conforme descrito em (2.27). Por outro lado, caso a formulação natural do tensor seja utilizada, a discretização

temporal das equações das variáveis naturais na forma escalonada (2.50) é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\lambda}^{n+1} - \hat{\lambda}^n}{\Delta t} &= -|\mathbf{v}^{n+1}|^2 (\mathbf{v}^{n+1} \cdot \nabla) \left(\frac{\hat{\lambda}^n}{|\mathbf{v}^{n+1}|^2} \right) + \frac{2\hat{\mu}}{|\mathbf{v}^{n+1}|^2} \left(-\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} v^{n+1} + u^{n+1} \frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} \right) - \\ &\quad 2\hat{\mu}^n |\mathbf{v}^{n+1}| \nabla \cdot \mathbf{w}^{n+1} + \frac{1}{Wi} (1 - \hat{\lambda}^{n+1}) - \frac{\kappa}{Wi} g_{\hat{\lambda}}^n, \\ \frac{\hat{\mu}^{n+1} - \hat{\mu}^n}{\Delta t} &= -(\mathbf{v}^{n+1} \cdot \nabla) \hat{\mu}^n + \frac{\hat{\lambda} - \hat{v}}{|\mathbf{v}^{n+1}|^2} \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} v^{n+1} - u^{n+1} \frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} \right) - \\ &\quad \hat{v} |\mathbf{v}^{n+1}|^4 \nabla \cdot \mathbf{w}^{n+1} - \frac{\hat{\mu}^n}{Wi} - \frac{\kappa}{Wi} g_{\hat{\mu}}^n, \\ \frac{\hat{v}^{n+1} - \hat{v}^n}{\Delta t} &= -\frac{1}{|\mathbf{v}^{n+1}|^2} (\mathbf{v}^{n+1} \cdot \nabla) (\hat{v}^n |\mathbf{v}^{n+1}|^2) + \frac{2\hat{\mu}^n}{|\mathbf{v}^{n+1}|^2} \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} v^{n+1} - u^{n+1} \frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} \right) + \\ &\quad \frac{1}{Wi} (1 - \hat{v}^n) - \frac{\kappa}{Wi} g_{\hat{v}}^n, \end{aligned} \tag{2.79}$$

onde os valores de $g_{\hat{\lambda}}$, $g_{\hat{\mu}}$ e $g_{\hat{v}}$ são dados por (2.51). O uso da formulação natural do tensor exige que as componentes de \mathbf{T}^p sejam construídas a cada ciclo, uma vez que estas precisam ser incorporadas à equação do movimento, no ciclo seguinte, por meio do divergente de \mathbf{T}^p . Assim, a relação entre as componentes de \mathbf{T}^p e as variáveis naturais escalonadas são dadas por

$$\begin{cases} (T_{11}^p)^{n+1} = \frac{1-\beta}{Wi} \frac{1}{|\mathbf{v}^{n+1}|^2} \left(\hat{\lambda}^{n+1} (u^{n+1})^2 - 2\hat{\mu} u^{n+1} v^{n+1} + \hat{v}^{n+1} (v^{n+1})^2 - 1 \right), \\ (T_{12}^p)^{n+1} = \frac{1-\beta}{Wi} \frac{1}{|\mathbf{v}^{n+1}|^2} \left[u^{n+1} v^{n+1} \left(\hat{\lambda}^{n+1} - \hat{v}^{n+1} \right) + \hat{\mu}^{n+1} \left((u^{n+1})^2 - (v^{n+1})^2 \right) \right], \\ (T_{22}^p)^{n+1} = \frac{1-\beta}{Wi} \frac{1}{|\mathbf{v}^{n+1}|^2} \left(\hat{\lambda}^{n+1} (v^{n+1})^2 + 2\hat{\mu} u^{n+1} v^{n+1} + \hat{v}^{n+1} (u^{n+1})^2 - 1 \right). \end{cases} \tag{2.80}$$

Por outro lado, a relação inversa é dada por

$$\begin{cases} \hat{\lambda}^{n+1} = \frac{1}{|\mathbf{v}^{n+1}|^2} \left((T_{11}^p)^{n+1} (u^{n+1})^2 + (v^{n+1})^2 (T_{22}^p)^{n+1} + 2u^{n+1} v^{n+1} (T_{12}^p)^{n+1} \right), \\ \hat{\mu}^{n+1} = \frac{1}{|\mathbf{v}^{n+1}|^2} \left[u^{n+1} v^{n+1} \left((T_{22}^p)^{n+1} - (T_{11}^p)^{n+1} \right) + \left((u^{n+1})^2 - (v^{n+1})^2 \right) (T_{12}^p)^{n+1} \right], \\ \hat{v}^{n+1} = \frac{1}{|\mathbf{v}^{n+1}|^2} \left((T_{11}^p)^{n+1} (v^{n+1})^2 + (u^{n+1})^2 (T_{22}^p)^{n+1} - 2(T_{12}^p)^{n+1} v^{n+1} u^{n+1} \right). \end{cases} \tag{2.81}$$

Em resumo o ciclo computacional segue os seguintes passos:

- Passo 1. Resolvemos $\tilde{\mathbf{v}}^{n+1}$ pela equação do movimento (2.70), com as condições de contorno (2.55), (2.58) (2.60) e (2.71).
- Passo 2. Calculamos a equação de Poisson para ϕ^{n+1} (2.73), juntamente com as condições de contorno (2.74), (2.75) e (2.76).
- Passo 3. Atualizamos a velocidade \mathbf{v}^{n+1} por meio da equação (2.72).

- Passo 4. Calculamos a pressão p^{n+1} pela equação (2.77).
- Passo 5. Resolvemos a equação constitutiva para $(\mathbf{T}^p)^{n+1}$ (2.78), caso a formulação CSF seja escolhida, ou as variáveis naturais $\hat{\lambda}^{n+1}$, $\hat{\mu}^{n+1}$ e $\hat{\mathbf{v}}^{n+1}$ (2.79), caso a formulação NSF seja escolhida.
- Passo 6. Este passo é realizado apenas se a formulação natural do tensor for escolhida. Assim, construímos $(\mathbf{T}^p)^{n+1}$ a partir das variáveis naturais $\hat{\lambda}^{n+1}$, $\hat{\mu}^{n+1}$ e $\hat{\mathbf{v}}^{n+1}$ pela equação (2.80).

Para detalhes relacionados à discretização espacial, ver Apêndice C.



ANÁLISE ASSINTÓTICA DO *STICK-SLIP* PARA O FLUIDO OLDROYD-B

3.1 O problema *stick-slip*

O problema *stick-slip* é formado por um escoamento entre placas paralelas, seguido de um escoamento com uma superfície livre imóvel. Desta forma, semelhante ao escoamento inchamento do extrudado, o problema *stick-slip* é um processo de extrusão, porém sem o efeito de inchamento da superfície livre. Além disso, o escoamento *stick-slip* pode ser visto como um caso particular do problema inchamento do extrudado, quando a tensão superficial aplicada à superfície livre é infinita.

Por outro lado, assim como no escoamento inchamento do extrudado, o problema *stick-slip* também apresenta uma singularidade, gerada pela mudança abrupta das condições de contorno, que variam da condição de não escorregamento para tensão de císalhamento nula. A Figura 1 apresenta a geometria do *stick-slip*, com a superfície *stick* (contorno rígido) em $\theta = 0$ e a superfície *slip* (superfície livre) em $\theta = \pi$.

3.2 Solução Newtoniana para o problema *stick-slip*

Nesta seção, apresentamos a solução para o problema *stick-slip* em um escoamento Newtoniano. Esta solução é válida para $r \rightarrow 0$, ou seja, numa região próxima à singularidade. Além disso, esta solução será usada nas próximas Seções, para a análise assintótica e a integração das equações constitutivas sobre linhas de corrente.

Para a construção da solução Newtoniana do problema *stick-slip*, consideramos um escoamento com baixo número de Reynolds, isto é, $Re \ll 1$. Desta forma, os termos viscosos e o gradiente de pressão dominam sobre a inércia. Além disso, tomamos o esco-

amento em seu estado estacionário. Assim, aplicando estas simplificações, eliminando os termos iniciais, transiente e a contribuição não Newtoniana, a equação do movimento (2.20) pode ser escrita como

$$0 = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (3.1)$$

A equação (3.1) é chamada de equação de Stokes.

Aplicando o operador rotacional $\nabla \times$ (*curl*) em (3.1), obtemos

$$0 = -\nabla \times (\nabla p) + \nabla \times (\nabla^2 \mathbf{v}) \quad (3.2)$$

onde

$$\begin{cases} \nabla \times (\nabla^2 \mathbf{v}) = -\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \\ \nabla \times (\nabla p) = \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Desta forma, aplicando a equação (3.3) em (3.2), obtemos

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} = 0. \quad (3.4)$$

As componentes u e v do campo de velocidade \mathbf{v} podem ser escritas em termos da função de corrente ψ como

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Assim, substituindo (3.5) em (3.4), obtemos

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = 0, \quad (3.6)$$

ou ainda, em coordenadas polares

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial r^4} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4 \psi}{\partial r^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 \psi}{\partial \theta^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \theta^2 \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad (3.7)$$

que é o operador biharmônico aplicado em ψ , isto é,

$$\nabla^4 \psi = 0. \quad (3.8)$$

Usando o método das variáveis separáveis, podemos escrever a solução da equação (3.8) como

$$\psi(r, \theta) = p(r) q(\theta). \quad (3.9)$$

A fim de obtermos uma expressão para $p(r)$, substituímos (3.9) em (3.7) que resulta em

$$p(r) q'''(\theta) + 2P_1(r) q''(\theta) + P_2(r) q(\theta) = 0, \quad (3.10)$$

onde

$$\begin{cases} P_1 = r^2 p''(r) - rp'(r) + 2p(r), \\ P_2 = r^4 p'''(r) + 2r^3 p''(r) - r^2 p''(r) + rp'(r). \end{cases} \quad (3.11)$$

Assim, dividindo a equação (3.10) por $p(r)$ e derivando em relação à r , obtemos

$$2 \left[\frac{P_1(r)}{p(r)} \right]' q''(\theta) + \left[\frac{P_2(r)}{p(r)} \right]' q(\theta) = 0, \quad (3.12)$$

que pode ser reescrita como

$$2 \frac{\left[\frac{P_2(r)}{p(r)} \right]'}{\left[\frac{P_1(r)}{p(r)} \right]'} = -\frac{q''(\theta)}{q(\theta)}. \quad (3.13)$$

A única maneira da igualdade (3.13) acontecer, uma vez que r e θ são independentes, é ambas serem uma constante, isto é,

$$2 \left[\frac{P_2(r)}{p(r)} \right]' = c \left[\frac{P_1(r)}{p(r)} \right]' \quad (3.14)$$

e

$$q''(\theta) = -cq(\theta). \quad (3.15)$$

Desta forma, obtemos duas equações diferenciais ordinárias, (3.14) e (3.15). Entretanto, faremos uso apenas da equação (3.15), que será usada para simplificar a equação (3.10). Pela equação (3.15), podemos escrever $q'''(\theta)$ como

$$q'''(\theta) = c^2 g(\theta). \quad (3.16)$$

Assim, substituindo as equações (3.15) e (3.16) em (3.10), obtemos

$$p(r) c^2 q(\theta) - 2c P_1(r) q(\theta) + P_2(r) q(\theta) = 0, \quad (3.17)$$

que, substituindo os valores de $P_1(r)$ e $P_2(r)$, equação (3.11), e dividindo por $q(\theta)$ resulta em

$$r^4 p'''(r) + 2r^3 p''(r) + (-2c - 1)r^2 p''(r) + (2c + 1)rp'(r) + (c^2 - 4c)p(r) = 0. \quad (3.18)$$

A equação (3.18) é uma equação de Euler-Cauchy (também chamada de equação do tipo Cauchy (RABENSTEIN, 1966)), cuja solução base é da forma

$$p(r) = r^n. \quad (3.19)$$

Portanto, podemos escrever a função de corrente ψ como

$$\psi(r, \theta) = r^n q(\theta). \quad (3.20)$$

Para mais detalhes sobre a construção da solução do biharmônico de $\psi(r, \theta)$, equação (3.8), ver (SADEH, 1968).

Substituindo a equação (3.20) em (3.7), resulta em

$$(n^4 - rn^3 + 4n^2)q + (2n^2 - 4n + 4)\frac{d^2q}{d\theta^2} + \frac{d^4q}{d\theta^4} = 0, \quad (3.21)$$

ou de maneira compacta (RENARDY, 2000a)

$$\left((n-2)^2 + \frac{d^2}{d\theta^2}\right) \left(n^2 + \frac{d^2}{d\theta^2}\right) q = 0. \quad (3.22)$$

Tomando $q(\theta) = \exp(t\theta)$, obtemos a equação característica de (3.22):

$$\left((n-2)^2 + t^2\right) \left(n^2 + t^2\right) = 0, \quad (3.23)$$

cujas raízes, complexas conjugadas, são $(n-2)i$, $-(n-2)i$, ni e $-ni$. Portanto, a solução geral de $q(\theta)$, dada pela combinação linear das partes reais de $\exp((n-2)i)$ e $\exp(ni)$, é dada por (BOYCE; DIPRIMA, 2002)

$$q(\theta) = A_0 \cos(n\theta) + B_0 \sin(n\theta) + C_0 \cos((n-2)\theta) + D_0 \sin((n-2)\theta), \quad (3.24)$$

ou ainda, por simplicidade, considerando

$$\psi(r, \theta) = r^{n+1}q(\theta), \quad (3.25)$$

podemos escrever (3.24) como (DEAN; MONTAGNON, 1949b)

$$q(\theta) = A_0 \cos((n+1)\theta) + B_0 \sin((n+1)\theta) + C_0 \cos((n-1)\theta) + D_0 \sin((n-1)\theta), \quad (3.26)$$

onde A_0 , B_0 , C_0 e D_0 são constantes reais.

Por meio das condições de contorno aplicadas à \mathbf{v} , podemos obter condições de contorno para $q(\theta)$. Para isto, usamos as relações em (3.5), em coordenadas Cartesianas, bem como em polares

$$\begin{cases} v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \\ v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \end{cases} \quad (3.27)$$

Por exemplo, pelo fato de a velocidade normal v à superfície ser nula em ambas as regiões do domínio, $\theta = 0$ *stick* e $\theta = \pi$ *slip*, temos que $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$. Logo, o valor de ψ em $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ será constante, que por conveniência tomamos $\psi = 0$. Além disso, as condições de não escorregamento em $\theta = 0$ e tensão de cisalhamento nula em $\theta = \pi$, implicam, respectivamente, em $\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0$ para $\theta = 0$ e $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0$ para $\theta = \pi$. Portanto, obtemos as seguintes condições de contorno para q :

(a) $q = 0$ em $\theta = 0$

(b) $q = 0$ em $\theta = \pi$

(c) $q' = 0$ em $\theta = 0$

(d) $q'' = 0$ em $\theta = \pi$

Aplicando as condições de contorno (a) e (c) em (3.26), obtemos as seguintes expressões:

$$A_0 + B_0 = 0 \quad (3.28)$$

$$B_0(n+1) + D_0(n-1) = 0 \quad (3.29)$$

Substituindo as equações (3.28) e (3.29) na equação (3.26) e usando as formulas de Werner para a soma de funções trigonométricas, podemos simplificar a equação (3.26) como

$$q(\theta) = C_0 2 \sin(n\theta) \sin(\theta) + \frac{D_0}{(n+1)} [-n2 \cos(n\theta) \sin(\theta) + 2 \sin(n\theta) \cos(\theta)] \quad (3.30)$$

Aplicando a condição de contorno (b) em (3.30), obtemos

$$\frac{D_0}{(n+1)} (-2 \sin(n\pi)) = 0. \quad (3.31)$$

Desta forma, a equação (3.31) será nula se $D_0 = 0$ ou $n = 2, 3, 4, \dots$. Por outro lado, aplicando a condição de contorno (d) em (3.30), obtemos

$$C_0 \cos(n\pi) + D_0(n-1) \sin(n\pi) = 0. \quad (3.32)$$

Voltando à condição anterior (3.31), se $D_0 = 0$ teremos pela condição (3.32) que $n = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$. Porém, se $n = 2, 3, 4, \dots$ teremos que tomar $C_0 = 0$ em (3.32). Portanto, de forma resumida temos duas expressões para q :

$$\begin{cases} q(\theta) = 2C_0 \sin(n\theta) \sin(\theta), & \text{para } n = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots \\ q(\theta) = -2 \frac{D_0}{(n+1)} [n \cos(n\theta) \sin(\theta) - \sin(n\theta) \cos(\theta)], & \text{para } n = 2, 3, 4, \dots \end{cases} \quad (3.33)$$

Portanto, as expressões de ψ para $r \rightarrow 0$ são dadas por

$$\begin{cases} \psi \sim r^{n+1} 2C_0 \sin(n\theta) \sin(\theta), & \text{para } n = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots \\ \psi \sim r^{n+1} \left(-2 \frac{D_0}{(n+1)} \right) [n \cos(n\theta) \sin(\theta) - \sin(n\theta) \cos(\theta)], & \text{para } n = 2, 3, 4, \dots \end{cases} \quad (3.34)$$

Por fim, tendo em vista que a primeira equação em (3.34) com $n = \frac{1}{2}$ é a mais influente, pois $r \rightarrow 0$, tomamos a primeira expressão com $n = \frac{1}{2}$ como sendo a função de corrente. Assim, a função de corrente para $r \rightarrow 0$ é dada por

$$\psi \sim 2C_0 r^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta), \quad (3.35)$$

que implica em $\mathbf{v} = O\left(r^{\frac{1}{2}}\right)$ e $\nabla \mathbf{v} = O\left(r^{-\frac{1}{2}}\right)$. Algumas aproximações para a constante C_0 são

$$C_0 = \begin{cases} \frac{3}{2\pi(\Gamma(\frac{5}{4}))^2} = 0.58\dots & \text{Richardson (1970)} \\ \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = 0.69\dots & \text{Ingham e Kelmanson (1984)} \\ & \text{Tanner e Huang (1993)} \end{cases} \quad (3.36)$$

O sinal da constante C_0 determina o sentido do escoamento. Por exemplo, se C_0 for negativo o escoamento ocorrerá da direita para a esquerda. Por outro lado, se C_0 for positivo, o escoamento será da esquerda para a direita.

Além disso, a partir da primeira solução assintótica em (3.34) e fazendo $\theta \rightarrow \pi$, podemos obter uma expressão para a componente tangencial da velocidade, em coordenadas Cartesianas, sobre a superfície livre e próximo à singularidade (MOFFATT, 1964), dada por

$$u(x) \sim 2a_{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - 2a_{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} + 2a_{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{2}} + O\left(x^{\frac{7}{2}}\right), \quad (3.37)$$

onde os coeficientes $a_{\frac{1}{2}}$, $a_{\frac{3}{2}}$ e $a_{\frac{5}{2}}$ precisam ser determinados. A expressão (3.37) será usada no Capítulo 4 para a verificação do código numérico.

3.3 Análise assintótica das equações constitutivas na base Cartesiana

Nesta Seção, apresentamos um estudo assintótico do modelo viscoelástico Oldroyd-B para o problema *stick-slip* sobre um campo de velocidade Newtoniano, dado pela equação (3.35). Vale destacar que, um estudo similar deste problema para os modelos PTT e Giesekus foi desenvolvido e publicado por Evans (2013), Evans (2015). O estudo assintótico destes modelos é descrito no Apêndice B. Uma das contribuições deste trabalho é a extensão da análise feita em (EVANS, 2013; EVANS, 2015) para o modelo Oldroyd-B e a verificação numérica dos resultados assintóticos para os três modelos viscoelásticos mencionados. Os resultados aqui apresentados foram publicados em (J. D. Evans; I. L. Palhares Junior; C. M. Oishi, 2017).

Para iniciar este estudo iremos adimensionalizar novamente as equações de Navier-Stokes (2.13) e (2.14), a equação do tensor das tensões (2.15), a equação do tensor Newtoniano (2.16) e a equação constitutiva do tensor polimérico (2.17). Esta nova adimensionalização tem por objetivo simplificar o sistema de equações estudado e, consequentemente, a análise que será feita nesta Seção. Para isto, adimensionalizamos os tensores com suas

respectivas viscosidades, isto é,

$$\boldsymbol{\tau} = \eta_0 \frac{V}{L} \mathbf{T}, \quad \boldsymbol{\tau}^s = \eta_s \frac{V}{L} \mathbf{T}^s \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\tau}^p = \eta_p \frac{V}{L} \mathbf{T}^p. \quad (3.38)$$

Além disso, assim como fizemos na construção da solução Newtoniana do *stick-slip*, Seção 3.2, consideramos um escoamento estacionário com baixo número de Reynolds, de modo a desconsiderarmos os termos transiente e convectivo na equação do movimento (2.13). Também removemos o termo transiente da equação constitutiva do tensor polimérico (2.17). Desta forma, podemos reescrever o conjunto de equações (2.13), (2.14), (2.15), (2.16) e (2.17), respectivamente, como

$$0 = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T}, \quad (3.39)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (3.40)$$

$$\mathbf{T} = \beta \mathbf{T}^s + (1 - \beta) \mathbf{T}^p, \quad (3.41)$$

$$\mathbf{T}^s = 2\mathbf{D} \quad (3.42)$$

e

$$\mathbf{T}^p + \text{Wi} \overset{\nabla}{\mathbf{T}} = 2\mathbf{D}. \quad (3.43)$$

Note que, a função f da equação (2.17) foi tomado como zero, resultando na equação do modelo Oldroyd-B (3.43).

A existência e unicidade de soluções do sistema de equações (3.39)–(3.43) para o problema *stick-slip* não é conhecido na literatura devido às dificuldades geradas pela mudança nas condições de contorno. Por outro lado, o caso em que a condição de contorno é apenas de não escorregamento, ou Dirichlet com o campo de velocidade tangente à parede, podemos garantir a existência de soluções (ver os trabalhos de Renardy (RENARDY, 2000b) e Guillopé e Saut (GUILLOPÉ; SAUT, 1990)). Entretanto, vale destacar que, no caso em que o campo de velocidade \mathbf{v} é conhecido Guillopé e Saut (GUILLOPÉ; SAUT, 1990) mostram que a solução das equações constitutivas para o caso transiente existe e é única (GUILLOPÉ; SAUT, 1990). Embora não tenha sido mencionado pelos autores, acreditamos que o caso estacionário também seja válido. Vale destacar que, a situação em que \mathbf{v} é conhecida é justamente a que precisamos para desenvolver nosso estudo assintótico. Para informações sobre existência de soluções para as equações de Navier-Stokes e os casos viscoelásticos compressíveis ver os trabalhos de Valli (VALLI, 1983) e Salloum (SALLOUM, 2011), respectivamente.

Voltando ao sistema de equações (3.39)–(3.43), note que a principal diferença entre o novo sistema de equações, (3.39), (3.40), (3.41), (3.42) e (3.43), e o sistema anterior, equações (2.13), (2.14), (2.15), (2.16) e (2.17), além da remoção dos termos transitentes e do termo convectivo na equação do movimento, é a mudança na posição dos termos β e $(1 - \beta)$ que, ao invés de estarem dentro das equações constitutivas, (3.42) e (3.43), agora estão dentro do tensor das tensões, equação (3.41).

Como estamos trabalhando com escalas de espaço pequenas, podemos remover o número de Weissenberg da equação constitutiva (3.43) por meio do seguinte escalonamento

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \text{Wi}^2 \hat{\mathbf{x}}, & \text{coordenadas Cartesianas,} \\ r = \text{Wi}^2 \hat{r}, & \text{coordenadas polares,} \end{cases} \quad \mathbf{v} = \text{Wi} \hat{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{T}^p = \frac{\hat{\mathbf{T}}^p}{\text{Wi}}. \quad (3.44)$$

Assim, afim de incluir o efeito do escalonamento mencionado acima fazemos $\text{Wi} = 1$ e por conseguinte as equações constitutivas em coordenadas Cartesianas (2.26) e polares (A.23), para esta nova adimensionalização, com as simplificações descritas anteriormente, e em sua forma bidimensional, tomam a forma

$$\begin{cases} (\mathbf{v} \cdot \nabla) T_{11}^p - 2 \frac{\partial u}{\partial x} T_{11}^p - 2 \frac{\partial u}{\partial y} T_{12}^p + T_{11}^p = 2 \frac{\partial u}{\partial x}, \\ (\mathbf{v} \cdot \nabla) T_{12}^p - \frac{\partial v}{\partial x} T_{11}^p - \frac{\partial u}{\partial y} T_{22}^p + T_{12}^p = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ (\mathbf{v} \cdot \nabla) T_{22}^p - 2 \frac{\partial v}{\partial x} T_{12}^p - 2 \frac{\partial v}{\partial y} T_{22}^p + T_{22}^p = 2 \frac{\partial v}{\partial y}, \end{cases} \quad (3.45)$$

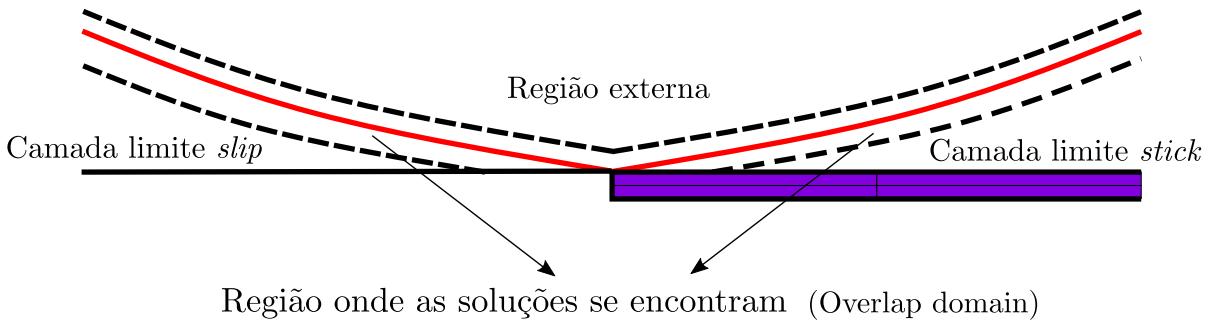
$$\begin{cases} (\mathbf{v} \cdot \nabla) T_{rr}^p - 2 T_{rr}^p \frac{\partial v_r}{\partial r} - 2 \frac{T_{r\theta}^p}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + T_{rr}^p = 2 \frac{\partial v_r}{\partial r}, \\ (\mathbf{v} \cdot \nabla) T_{r\theta}^p + T_{rr}^p \frac{v_\theta}{r} - T_{rr}^p \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{T_{\theta\theta}^p}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + T_{r\theta}^p = \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right), \\ (\mathbf{v} \cdot \nabla) T_{\theta\theta}^p + 2 T_{r\theta}^p \frac{v_\theta}{r} - 2 T_{r\theta}^p \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - 2 \frac{T_{\theta\theta}^p}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - 2 \frac{T_{\theta\theta}^p}{r} v_r + T_{\theta\theta}^p = \\ 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right). \end{cases} \quad (3.46)$$

Para a solução do problema *stick-slip* precisamos dividir o domínio em três regiões diferentes: região externa à camada limite (*outer region*) e as regiões internas (*inner region*) às camadas limites, *stick* e *slip*. Isso porque existem camadas limites próximas às superfícies *stick* e *slip*, fazendo com que a solução em uma região seja inadequada em outra. A designação região externa à camada limite segue a terminologia introduzida em (HINCH, 1993a) para a análise do canto reentrante. Ao passo que os termos *stick* e *slip* seguem do fato de termos condições de não escorregamento e escorregamento nestas regiões, respectivamente.

Desta forma, construímos uma solução para cada uma das três regiões. Esta construção é feita pelo método de expansões assintóticas (*matched asymptotic expansions*),

onde usamos o fato de existir uma região do domínio, uma pequena faixa do domínio chamada de *overlap domain* (delimitada pelas linhas pretas pontilhadas da Figura 3) que liga a região externa à camada limite com as regiões internas às camadas limites, em que a solução da região externa à camada limite pode ser aplicada. O mesmo é válido com as soluções das regiões internas às camadas limites, *stick* e *slip*, que são válidas numa pequena porção da região externa à camada limite. Este encontro das soluções é ilustrado na Figura 3.

Figura 3 – Ilustração das regiões externa e internas às camadas limites do problema *stick-slip*.



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.3.1 Região externa à camada limite

A região externa à camada limite é definida como sendo à região próxima a singularidade, mas longe das superfícies *stick* e *slip*, conforme Figura 3. Nesta região assumimos que o tensor dominante é o tensor Newtoniano, isto é,

$$\beta \mathbf{T}^s \gg (1 - \beta) \mathbf{T}^p, \quad \text{para } r \rightarrow 0. \quad (3.47)$$

Assim, o tensor das tensões (3.41) pode ser aproximado por

$$\mathbf{T} \sim \beta \mathbf{T}^s, \quad \text{para } r \rightarrow 0. \quad (3.48)$$

Veremos no decorrer deste estudo que a aproximação (3.48) é válida para os modelos PTT e Giesekus, porém é incorreta para o modelo Oldroyd-B, onde o tensor dominante na região externa à camada limite é o polimérico. Entretanto, assumimos, incorretamente, que (3.48) é válida para o Oldroyd-B, uma vez que não conhecemos uma expressão para o campo de velocidade verdadeiro para o problema *stick-slip*.

A partir da solução Newtoniana (3.35), obtemos as seguintes ordens de magnitude

$$\mathbf{v} = O(r^{\frac{1}{2}}), \quad \nabla \mathbf{v} = O(r^{-\frac{1}{2}}), \quad \mathbf{T}^s = O(r^{-\frac{1}{2}}) \quad \text{para } r \rightarrow 0, \quad (3.49)$$

que juntamente com (3.47) implica que a derivada convectiva superior de Maxwell \mathbf{T}^p é o termo dominante na equação constitutiva (3.43). Isto acontece pelo fato de a combinação

\mathbf{T}^p e $\nabla \mathbf{v}$ dominar sobre $2\mathbf{D}$, \mathbf{T}^p e $f(\mathbf{T}^p)$, uma vez que o expoente em módulo da potência do tensor polimérico é menor que 1/2 por hipótese (3.47). Assim, podemos escrever a equação (3.43) como

$$\overset{\nabla}{\mathbf{T}} = 0, \quad (3.50)$$

cuja solução, chamada de solução *stretching*, é dada por (RENARDY, 1993)

$$\mathbf{T}^p = \lambda(\psi) \mathbf{v} \mathbf{v}^T, \quad (3.51)$$

onde λ é uma função de ψ , dada por

$$\lambda(\psi) = \frac{C_1}{C_0^2} \left(\frac{\psi}{C_0} \right)^{n_1}, \quad (3.52)$$

e n_1 e C_1 são constantes a serem determinadas.

A solução (3.51) é facilmente verificada aplicando a derivada convectiva superior de Maxwell em $\lambda(\psi) \mathbf{v}^T \mathbf{v}$. De fato,

$$\overbrace{(\lambda(\psi) \mathbf{v}^T \mathbf{v})}^{\nabla} = \mathbf{v} \mathbf{v}^T [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \lambda(\psi)], \quad (3.53)$$

onde

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \lambda(\psi) = v_r \frac{\partial \lambda(\psi)}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \lambda(\psi)}{\partial \theta}. \quad (3.54)$$

Pela regra da cadeia e a relação entre o campo de velocidade e a função de corrente (3.27), podemos reescrever as derivadas em (3.54) como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda(\psi)}{\partial r} &= \left(-\frac{d\lambda}{d\psi} \right) \left(-\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = -v_\theta \frac{d\lambda}{d\psi} \\ \frac{\partial \lambda(\psi)}{\partial \theta} &= \left(r \frac{d\lambda}{d\psi} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = rv_r \frac{d\lambda}{d\psi}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Por fim, substituindo (3.55) em (3.54) resulta em

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \lambda(\psi) = v_r \left(-v_\theta \frac{d\lambda}{d\psi} \right) + \frac{v_\theta}{r} \left(rv_r \frac{d\lambda}{d\psi} \right) = 0. \quad (3.56)$$

Portanto, temos que

$$\overbrace{(\lambda(\psi) \mathbf{v}^T \mathbf{v})}^{\nabla} = 0. \quad (3.57)$$

A solução (3.51) pode ser escrita em coordenadas Cartesianas bidimensionais como

$$T_{11}^p = \lambda(\psi) u^2, \quad T_{12}^p = \lambda(\psi) uv, \quad T_{22}^p = \lambda(\psi) v^2. \quad (3.58)$$

Conforme já mencionado, existem regiões do domínio internas às camadas limites, *stick* e *slip*, onde a solução da região externa pode ser aplicada. Assim, usando a técnica

conhecida como combinação (*matching*) das regiões do domínio, tomamos a solução da região externa à camada limite e a estendemos para as regiões internas às camadas limites *stick* e *slip*. Para isto, fazemos $\theta \rightarrow 0$ e $\theta \rightarrow \pi$, de modo a obtermos as soluções na direção das regiões *stick* e *slip*, respectivamente.

- Combinação a partir da região externa à camada limite para a região interna *stick*

A medida que $\theta \rightarrow 0$ temos que $r \sim x$, $\sin(\theta) \sim \theta \sim \frac{y}{x}$. Assim, aplicando estas simplificações em (3.35), obtemos

$$\psi \sim 2C_0x^{\frac{3}{2}}\frac{(y/x)}{2}(y/x) = C_0x^{-\frac{1}{2}}y^2. \quad (3.59)$$

De modo similar, aplicando as simplificações às expressões de u e v (3.5), ao tensor Newtoniano (3.42), à função λ (3.52) e ao tensor polimérico (3.58), obtemos

$$\begin{aligned} u &\sim 2C_0x^{-\frac{1}{2}}y, \quad v \sim \frac{1}{2}C_0x^{-\frac{3}{2}}y^2, \\ T_{11}^s &\sim -2C_0x^{-\frac{3}{2}}y, \quad T_{12}^s \sim 2C_0x^{-\frac{1}{2}}, \quad T_{22}^s \sim 2C_0x^{-\frac{3}{2}}y, \\ \lambda(\psi) &\sim \frac{C_1}{C_0^2}x^{-\frac{n_1}{2}}y^{2n_1}, \\ T_{11}^p &\sim 4C_1x^{-\frac{n_1}{2}-1}y^{2n_1+2}, \quad T_{12}^p \sim C_1x^{-\frac{n_1}{2}-2}y^{2n_1+3}, \quad T_{22}^p \sim \frac{1}{4}C_1x^{-\frac{n_1}{2}-3}y^{2n_1+4}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

- Combinação a partir da região externa à camada limite para a região interna *slip*

De modo similar ao que fizemos para a região *stick*, fazendo $\theta \rightarrow \pi$, teremos que $r \sim -x$. Além disso, podemos escrever $\sin(\theta)$, para $\theta \rightarrow \pi$, como $\sin(\pi - \theta)$, para $\theta \rightarrow 0$. Expandindo em série de Taylor o valor de $\sin(\pi - \theta)$, para $\theta \rightarrow 0$, obtemos

$$\sin(\pi - \theta) \sim \theta - \frac{\theta^3}{6} \sim y/(-x) - \frac{(y/(-x))^3}{6}. \quad (3.61)$$

Assim, aplicando as simplificações descritas anteriormente para as equações para a função de corrente (3.35), para as componentes da velocidade (3.5), para o tensor

Newtoniano (3.42), para a função λ (3.52) e para o tensor polimérico (3.58), obtemos

$$\begin{aligned}\psi &\sim 2C_0y(-x)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}C_0y^3(-x)^{-\frac{3}{2}}, \\ u &\sim 2C_0(-x)^{\frac{1}{2}}, \quad v \sim -C_0(-x)^{-\frac{1}{2}}y, \\ T_{11}^s &\sim 2C_0(-x)^{-\frac{1}{2}}, \quad T_{12}^s \sim -C_0(-x)^{-\frac{3}{2}}y, \quad T_{22}^s \sim -2C_0(-x)^{-\frac{1}{2}}, \\ \lambda(\psi) &\sim \frac{C_1}{C_0}(-x)^{\frac{n_1}{2}}(2y)^{n_1}, \\ T_{11}^p &\sim 4C_1(-x)^{\frac{n_1}{2}+1}(2y)^{n_1}, \quad T_{12}^p \sim C_1(-x)^{\frac{n_1}{2}}(2y)^{n_1+1}, \quad T_{22}^p \sim \frac{1}{4}C_1(-x)^{\frac{n_1}{2}-1}(2y)^{n_1+2}.\end{aligned}\tag{3.62}$$

Conforme já mencionado, as soluções acima para as regiões *stick* (3.60) e *slip* (3.62) não representam o comportamento no total das regiões da camada limite, ou seja, nos fornece o comportamento em apenas uma pequena região das camadas limites. Em particular, na região *stick* sabemos que o tensor polimérico deve conter o comportamento viscométrico.

3.3.2 Camada limite da superfície stick

Para a discussão que se segue, precisamos definir duas importantes componentes do gradiente da velocidade, a saber a taxa de cisalhamento (*shear rate*) $\dot{\gamma}$ e a taxa de deformação radial (*radial strain rate*) $\dot{\epsilon}$, dadas, respectivamente, por

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r}, \quad \dot{\epsilon} = \frac{\partial v_r}{\partial r}.\tag{3.63}$$

Além disso, de modo a reduzirmos o sistema de equações diferenciais parciais (EDP's) (3.46) a um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO's), vamos considerar o sistema (3.46) sobre uma linha de corrente ψ . Note que, podemos escrever a solução Newtoniana (3.35) como

$$\psi = C_0 r^{\frac{3}{2}} f(\theta),\tag{3.64}$$

onde $f(\theta) = 2 \sin(\frac{\theta}{2}) \sin(\theta)$. Assim, para uma dada linha de corrente ψ (ψ constante), temos que

$$r = \left(\frac{\psi}{C_0 f(\theta)} \right)^{\frac{2}{3}}.\tag{3.65}$$

que derivando com relação a θ fica

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{2}{3} \left(\frac{\psi}{C_0 f(\theta)} \right)^{-\frac{1}{3}} \frac{\psi}{C_0} \left(-\frac{f'(\theta)}{(f(\theta))^2} \right) = \frac{v_r}{v_\theta} r,\tag{3.66}$$

onde $\frac{d}{d\theta}$ é a derivada total com relação a θ . Além disso, note que

$$\frac{v_\theta}{r} \frac{d}{d\theta} = \frac{v_\theta}{r} \frac{dr}{d\theta} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} = v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (3.67)$$

Portanto, para uma determinada linha de corrente ψ , podemos escrever

$$\frac{v_\theta}{r} \frac{d}{d\theta} = (\mathbf{v} \cdot \nabla). \quad (3.68)$$

3.3.2.1 Comportamento próximo à superfície stick

De modo a obtermos mais informações sobre o escoamento próximo à região *stick*, vamos analisar o comportamento da equação constitutiva (3.46) em coordenadas polares para baixos valores de θ . Esta análise tem por objetivo nos auxiliar no processo de escalonamento das variáveis próximo à região *stick*, bem como no cálculo de n_1 na solução *stretching* (3.51) e na construção das equações da camada limite. Desta forma, para baixos valores de θ temos que $\sin(\frac{\theta}{2}) \sim \frac{\theta}{2}$ e $\sin(\theta) \sim \theta$, que substituindo em (3.35) resulta em

$$\Psi \sim C_0 r^{\frac{3}{2}} \theta^2. \quad (3.69)$$

Além disso, pela relação (3.27) calculamos os valores de v_r e v_θ como

$$v_r \sim 2C_0 r^{\frac{1}{2}} \theta, \quad v_\theta \sim -\frac{3}{2} C_0 r^{\frac{1}{2}} \theta^2. \quad (3.70)$$

A taxa de cisalhamento $\dot{\gamma}$ e a taxa de deformação radial $\dot{\epsilon}$ são dadas, respectivamente, por

$$\dot{\gamma} \sim 2C_0 r^{-\frac{1}{2}}, \quad \dot{\epsilon} \sim C_0 r^{-\frac{1}{2}} \theta. \quad (3.71)$$

Uma vez que $\theta \ll 1$, o escoamento radial domina o escoamento angular e a taxa de cisalhamento domina a taxa de deformação radial. Substituindo os valores de (3.69) e (3.68) na equação constitutiva em coordenadas polares (3.46), obtemos

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2} C_0 r^{-\frac{1}{2}} \theta^2 \frac{dT_{rr}^p}{d\theta} - 2C_0 r^{-\frac{1}{2}} \theta T_{rr}^p - 4C_0 r^{-\frac{1}{2}} T_{r\theta} + T_{rr}^p &= 2C_0 r^{-\frac{1}{2}} \theta, \\ -\frac{3}{2} C_0 r^{-\frac{1}{2}} \theta^2 \frac{dT_{r\theta}^p}{d\theta} - \frac{3}{4} C_0 r^{-\frac{1}{2}} \theta^2 T_{rr}^p - 2C_0 r^{-\frac{1}{2}} T_{\theta\theta}^p + T_{r\theta}^p &= 2C_0 r^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{4} C_0 r^{-\frac{1}{2}} \theta^2, \\ -\frac{3}{2} C_0 r^{-\frac{1}{2}} \theta^2 \frac{dT_{\theta\theta}^p}{d\theta} - \frac{3}{2} C_0 r^{-\frac{1}{2}} \theta^2 T_{r\theta}^p + 2C_0 r^{-\frac{1}{2}} \theta T_{\theta\theta}^p + T_{\theta\theta}^p &= -2C_0 r^{-\frac{1}{2}} \theta, \end{aligned} \quad (3.72)$$

que multiplicando por $-\frac{r^{\frac{1}{2}}}{C_0}$ resulta em

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \theta^2 \frac{\partial T_{rr}^p}{\partial \theta} + 2\theta T_{rr}^p + 4T_{r\theta}^p - \frac{r^{\frac{1}{2}}}{C_0} T_{rr}^p &= -2\theta, \\ \frac{3}{2} \theta^2 \frac{\partial T_{r\theta}^p}{\partial \theta} + \frac{3}{4} \theta^2 T_{rr}^p + 2T_{\theta\theta}^p - \frac{r^{\frac{1}{2}}}{C_0} T_{r\theta}^p &= -2 + \frac{3}{4} \theta^2, \\ \frac{3}{2} \theta^2 \frac{\partial T_{\theta\theta}^p}{\partial \theta} + \frac{3}{2} \theta^2 T_{r\theta}^p - 2\theta T_{\theta\theta}^p - \frac{r^{\frac{1}{2}}}{C_0} T_{\theta\theta}^p &= 2\theta. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Seguindo o trabalho de [Renardy \(1993\)](#) para o modelo UCM, reescrevemos as componentes do tensor polimérico como

$$T_{rr}^p = Q_{rr}, \quad T_{r\theta}^p = \theta Q_{r\theta}, \quad T_{\theta\theta}^p = \theta^2 Q_{\theta\theta}. \quad (3.74)$$

Desta forma, substituindo (3.68) e (3.74) em (3.46), resulta em

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\theta^2 Q'_{rr} + 2\theta Q_{rr} + 4\theta Q_{r\theta} - \frac{r^{\frac{1}{2}}}{C_0} Q_{rr} &= -2\theta, \\ \frac{3}{2}\theta Q_{r\theta} + \frac{3}{2}\theta^2 Q'_{r\theta} + \frac{3}{4}\theta Q_{rr} + 2\theta Q_{\theta\theta} - \frac{r^{\frac{1}{2}}}{C_0} Q_{r\theta} &= -\frac{2}{\theta}, \\ 3\theta Q_{\theta\theta} + \frac{3}{2}\theta^2 Q'_{\theta\theta} + \frac{3}{2}\theta Q_{r\theta} - 2\theta Q_{\theta\theta} - \frac{r^{-\frac{1}{2}}}{C_0} Q_{\theta\theta} &= \frac{2}{\theta} \end{aligned} \quad (3.75)$$

ou ainda, na forma matricial,

$$\frac{3}{2}\theta^2 \begin{pmatrix} Q'_{rr} \\ Q_{r\theta} \\ Q_{\theta\theta} \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{rr} \\ Q_{r\theta} \\ Q_{\theta\theta} \end{pmatrix} - \frac{r^{\frac{1}{2}}}{C_0} \begin{pmatrix} Q_{rr} \\ Q_{r\theta} \\ Q_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\theta} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (3.76)$$

Assim, para baixos valores de θ , a saber $\theta \ll r^{\frac{1}{2}}$, teremos que os dois últimos termos em (3.76) dominam a equação. Por outro lado, para $\theta \gg r^{\frac{1}{2}}$ teremos que os dois primeiros termos em (3.76) serão os mais importantes. Para este último caso, teremos que a solução deve ser proporcional a $\theta^{\frac{2\varphi}{3}}$, onde $\varphi = 1, -\frac{3}{2}, -4$ são os autovalores da matriz do segundo termo. Consequentemente, a medida que θ cresce, a solução \mathbf{Q} vai crescer de acordo com o autovalor positivo ($\varphi = 1$).

Voltando à equação (3.73), note que para $\theta \ll r^{-\frac{1}{2}}$, considerando os termos de maior importância apenas, teremos o comportamento viscométrico que, usando a definição da taxa de cisalhamento $\dot{\gamma}$ em (3.71), pode ser escrito como

$$2\dot{\gamma}T_{r\theta}^p = T_{rr}^p, \quad T_{r\theta}^p = \dot{\gamma}(T_{\theta\theta}^p + 1), \quad \kappa T_{\theta\theta}^p = 0, \quad (3.77)$$

que implica em,

$$T_{\theta\theta}^p = 0, \quad T_{r\theta}^p = \dot{\gamma}, \quad T_{rr}^p = 2\dot{\gamma}^2. \quad (3.78)$$

Pela a equação (3.73), temos que o comportamento viscométrico deixa de ser válido quando $\theta \geq r^{\frac{1}{2}}$. Desta forma, como discutido para a variável \mathbf{Q} , o processo de descontinuidade do comportamento viscométrico acontece quando a segunda parcela em (3.76) começa a ter influência. Isto equivale a dizer que a derivada convectiva superior de Maxwell aplicada em \mathbf{T}^p , na equação (3.73), passa a ser influente. Assim, dado que as componentes T_{rr}^p e $T_{r\theta}^p$ do tensor polimérico são mais influentes em (3.73), a quebra do comportamento viscométrico acontecerá quando

$$\dot{\epsilon}T_{rr}^p \sim \dot{\gamma}T_{r\theta}^p. \quad (3.79)$$

De fato, como a solução \mathbf{Q} é proporcional à $\theta^{\frac{2\varphi}{3}}$, segue que T_{rr}^p é proporcional à $\theta^{\frac{2\varphi}{3}}$ e $T_{r\theta}^p$ é proporcional à $\theta^{\frac{2\varphi}{3}+1}$. Como estamos interessados em $r \ll 1$, então o autovalor de interesse será $\varphi = 1$. Assim, teremos que

$$T_{rr}^p \sim \theta^{\frac{2}{3}}, \quad T_{r\theta}^p \sim \theta^{\frac{5}{3}}. \quad (3.80)$$

Logo, em termos de θ , as parcelas $2\theta T_{rr}^p$ e $4T_{r\theta}^p$ na primeira equação em (3.73) tornam-se comparáveis, de modo que multiplicando a equação (3.73) por $\frac{1}{2}C_0r^{-\frac{1}{2}}$, teremos que

$$C_0r^{-\frac{1}{2}}\theta T_{rr}^p \sim 2C_0r^{-\frac{1}{2}}T_{r\theta}^p. \quad (3.81)$$

Portanto, mediante as expressões de $\dot{\gamma}$ e $\dot{\epsilon}$ (3.71), a equação (3.81) resulta em (3.79).

Por meio da expressão (3.79), juntamente com as equações do comportamento viscométrico (3.78), podemos determinar relações entre $\dot{\epsilon}$ e $\dot{\gamma}$, na região de descontinuidade do comportamento viscométrico. Além disso, por meio das expressões de $\dot{\gamma}$ e $\dot{\epsilon}$ (3.71) podemos determinar a espessura da camada limite da superfície *stick* (ou, simplesmente, camada limite *stick*). Desta forma, substituindo os valores de T_{rr}^p e $T_{r\theta}^p$ (3.78) em (3.79), obtemos

$$\dot{\epsilon}2\dot{\gamma}^2 \sim \dot{\gamma}^2 \rightarrow \dot{\epsilon} \sim \frac{1}{2}. \quad (3.82)$$

Além disso, substituindo as expressões de $\dot{\epsilon}$ (3.71) em (3.82), resulta em

$$C_0r^{-\frac{1}{2}}\theta \sim \frac{1}{2} \rightarrow \theta \sim r^{\frac{1}{2}}, \quad (3.83)$$

que representa a espessura da camada limite *stick* em coordenadas polares. Podemos escrever a relação (3.83) em coordenadas Cartesianas. Para isto, usamos as aproximações $\theta \sim \frac{y}{x}$ e $r \sim x$. Logo, a equação (3.83) pode ser reescrita como

$$y \sim x^{\frac{3}{2}}. \quad (3.84)$$

Os resultados obtidos nesta Subseção para o comportamento viscométrico dos tensores e a espessura da região da camada limite *stick*, serão importantes para a análise assintótica, via escalonamento, apresentada a seguir. Isso porque o comportamento viscométrico dos tensores irá nos guiar na escolha de um escalonamento adequado para cada variável. Assim, poderemos construir as equações da camada limite e determinar o valor de C_1 em (3.52). Além disso, os resultados da espessura da camada limite *stick* obtidos nesta Subseção poderão ser comparados com a espessura da camada limite obtida na Subseção a seguir pelo método das expansões assintóticas.

3.3.2.2 Escalonamento das variáveis

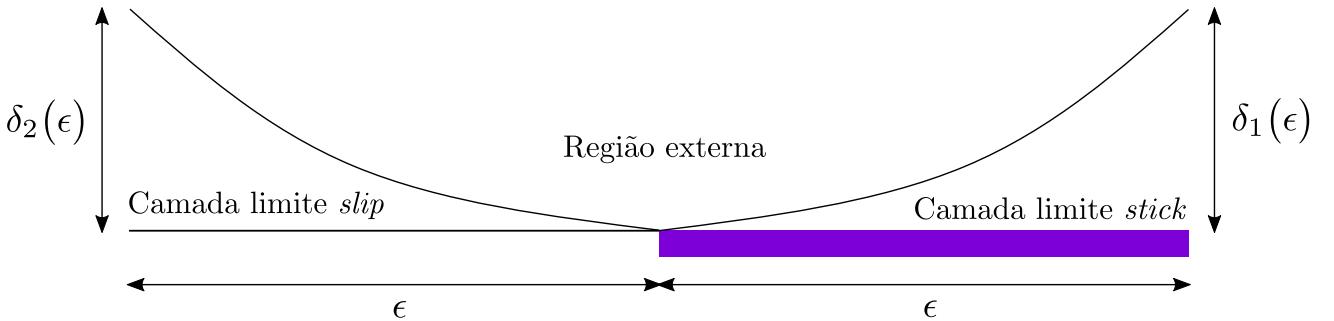
Nesta seção, vamos determinar algumas propriedades da camada limite *stick*, como a espessura da camada limite e o valor de n_1 na função $\lambda(\psi)$ em (3.52). Inicialmente,

aplicamos um processo de escalonamento sobre as variáveis x e y , baseado na espessura da camada limite *stick*, e depois, baseado nas relações de combinação (3.59) e (3.60) na região *stick*, obtemos o escalonamento para as demais variáveis. Desta forma, suponhamos que a curva da camada limite *stick* obedeça uma relação entre δ_1 e ϵ , da forma:

$$\delta_1 = \delta_1(\epsilon), \quad (3.85)$$

onde $\epsilon > 0$ é um parâmetro artificial bem pequeno e $\delta_1 > 0$ é uma função de ϵ . A relação (3.85) é ilustrada na Figura 4. Uma importante propriedade das camadas limites é que $\epsilon > \delta_1(\epsilon)$, de modo que $\frac{\epsilon}{\delta_1} > 1$ e $\frac{\delta_1}{\epsilon} < 1$. Esta observação será importante no processo de balanceamento das equações constitutivas.

Figura 4 – Espessuras das camadas limites em termos das funções δ_1 e δ_2 .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim, baseado na relação entre ϵ e δ_1 (3.85), escalonamos x e y como

$$x = \epsilon \bar{X}, \quad y = \delta_1(\epsilon) \bar{Y}. \quad (3.86)$$

Por outro lado, usando as relações de combinação obtidas na seção anterior (3.59) e (3.60), temos que

$$\psi \sim C_0 (\epsilon \bar{X})^{-1/2} (\delta_1 \bar{Y})^2 = C_0 \bar{X}^{-1/2} \bar{Y}^2 \epsilon^{-1/2} \delta_1^2, \quad (3.87)$$

que implica em

$$\psi = \epsilon^{-1/2} \delta_1^2 \bar{\Psi}. \quad (3.88)$$

Fazendo o mesmo para as demais variáveis em (3.60), obtemos

$$\begin{aligned} u &= \epsilon^{-\frac{1}{2}} \delta_1 \bar{U}, \quad v = \epsilon^{-\frac{3}{2}} \delta_1^2 \bar{V}, \\ T_{11}^s &= \epsilon^{-\frac{3}{2}} \delta_1 \bar{T}_{11}^s, \quad T_{12}^s = \epsilon^{-\frac{1}{2}} \bar{T}_{12}^s, \quad T_{22}^s = \epsilon^{-\frac{3}{2}} \delta_1 \bar{T}_{22}^s, \\ \lambda &= \epsilon^{-\frac{n_1}{2}} \delta_1^{2n_1} \bar{\lambda}, \\ T_{11}^p &= \epsilon^{-\frac{n_1}{2}-1} \delta_1^{2n_1+2} \bar{T}_{11}^p, \quad T_{12}^p = \epsilon^{-\frac{n_1}{2}-2} \delta_1^{2n_1+3} \bar{T}_{12}^p, \quad T_{22}^p = \epsilon^{-\frac{n_1}{2}-3} \delta_1^{2n_1+4} \bar{T}_{22}^p \end{aligned} \quad (3.89)$$

Por simplicidade, escrevemos o escalonamento das componentes de \mathbf{T}^P em (3.89) como

$$T_{11}^P = a\bar{T}_{11}^P, \quad T_{12}^P = a\varepsilon_1^{-1}\delta_1\bar{T}_{12}^P, \quad T_{22}^P = a\varepsilon_1^{-2}\delta_1^{-2}\bar{T}_{22}^P, \quad (3.90)$$

onde

$$a = \varepsilon^{\frac{-n_1}{2}-1}\delta_1^{2n_1+2}. \quad (3.91)$$

O próximo passo é usar as novas variáveis (3.89) no comportamento viscométrico do tensor polimérico. Antes, porém, vamos apresentar as equações que definem este tipo de escoamento.

Embora já apresentados, na subseção passada 3.3.2.1, as equações que definem o comportamento viscométrico em coordenadas polares (3.77), repetimos brevemente a discussão sobre o comportamento viscométrico, porém agora em coordenadas Cartesianas.

Um escoamento viscométrico, também chamado de *simple shear flow*, é definido como um escoamento unidirecional, no qual as variações das propriedades ocorrem apenas em uma direção, no nosso caso apenas na direção y . Assim, o campo de velocidade e o seu gradiente tomam a forma:

$$\mathbf{v} = (u, 0), \quad \nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.92)$$

Note que a taxa de cisalhamento $\dot{\gamma}$ (3.63), agora é dada por:

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3.93)$$

Assim, aplicando as simplificações (3.92), juntamente com a definição de $\dot{\gamma}$ (3.93), equação (3.45), obtemos o comportamento viscométrico do tensor polimérico

$$2\dot{\gamma}T_{12}^P = T_{11}^P = 0, \quad T_{12}^P = \dot{\gamma}(T_{22}^P + 1), \quad T_{22}^P = 0, \quad (3.94)$$

que implica em

$$T_{22}^P = 0, \quad T_{12}^P = \dot{\gamma}, \quad T_{11}^P = 2\dot{\gamma}^2 \quad (3.95)$$

Note que a equação (3.94) é exatamente a mesma de (3.77) a menos dos índices. Assim, uma maneira simples de transformar a equação (3.77) em (3.94) é substituir os índices r e θ por 1 e 2, respectivamente.

Assim, para obter a espessura da camada limite *stick*, bem como o valor de n_1 na definição da função $\lambda(\psi)$ em (3.52), vamos substituir os valores escalonados da velocidade \mathbf{v} e do tensor polimérico \mathbf{T}^P , equações (3.89) e (3.90), nas equações que definem o com-

portamento viscométrico (3.95). Desta forma, substituindo os valores das componentes escalonadas de \mathbf{v} e de \mathbf{T}^p , equações (3.89) e (3.90), em (3.95) obtemos

$$\begin{aligned}(a\epsilon^{-2}\delta_1^2)\bar{T}_{22}^p &= 0 \\ (a\epsilon^{-1}\delta_1)\bar{T}_{12}^p &= \epsilon^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{Y}} \\ a\bar{T}_{11}^p &= \epsilon^{-1}2\left(\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{Y}}\right)^2\end{aligned}\tag{3.96}$$

Assim, a partir da equação (3.96), obtemos as seguintes igualdades

$$a = \epsilon^{-1} \quad \text{e} \quad a\epsilon^{-1}\delta_1 = \epsilon^{-\frac{1}{2}},\tag{3.97}$$

que resultam na seguinte relação entre δ_1 e ϵ

$$\delta_1 = \epsilon^{\frac{3}{2}}.\tag{3.98}$$

Note que descartamos o termo envolvendo $(a\epsilon^{-2}\delta_1^2)$ na equação (3.96), pois, além de T_{22}^p ser zero, o termo $\left(\frac{\delta_1}{\epsilon}\right)^2$ é o menos influente (lembrando que $\frac{\delta_1}{\epsilon} < 1$).

Além disso, tomando os valores de δ_1 e a , equações (3.97) e (3.98), e comparando com o valor de a dado pela equação (3.91), obtemos

$$\epsilon^{-\frac{n_1}{2}-1}\delta_1^{2n_1+2} = \epsilon^{-1} \Rightarrow \epsilon^{-\frac{n_1}{2}-1}\epsilon^{3n_1+6} = \epsilon^{-1},\tag{3.99}$$

que implica em

$$-\frac{n_1}{2} - 1 + 3n_1 + 6 = -1 \Rightarrow n_1 = -\frac{6}{5}.\tag{3.100}$$

Vale destacar que, as relações obtidas entre ϵ e δ_1 calculadas pelo escalonamento para o modelo Oldroyd-B, equação (3.98), também estão em concordância com os valores calculados na Subseção anterior, equação (3.84).

3.3.2.3 Equações da camada limite stick

Uma vez que conhecemos as relações entre ϵ e δ_1 , equação (3.98), podemos atualizar o escalonamento das variáveis, equações (3.88) e (3.89), como

$$\begin{aligned}x &= \epsilon\bar{X}, \quad y = \epsilon^{\frac{3}{2}}\bar{Y}, \\ \psi &= \epsilon^{\frac{5}{2}}\bar{\Psi}, \quad u = \epsilon\bar{U}, \quad v = \epsilon^{\frac{3}{2}}\bar{V}, \\ T_{11}^s &= \bar{T}_{11}^s, \quad T_{12}^s = \bar{T}_{12}^s, \quad T_{22}^s = \bar{T}_{22}^s, \\ \lambda &= \epsilon^{-3}\bar{\lambda}, \\ T_{11}^p &= \epsilon^{-1}\bar{T}_{11}^p, \quad T_{12}^p = \epsilon^{-\frac{1}{2}}\bar{T}_{12}^p, \quad T_{22}^p = \bar{T}_{22}^p.\end{aligned}\tag{3.101}$$

Para a construção e solução das equações da camada limite, vamos escrever a relação (3.5) em termos das variáveis escalonadas, isto é,

$$\bar{U} = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}}, \quad \bar{V} = -\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}}. \quad (3.102)$$

Assim, ao invés de usarmos \bar{U} e \bar{V} , usaremos (3.102). Isto é feito de modo a reduzirmos o número de variáveis das equações e facilitar a aplicação do método de similaridades para a solução das EPD's. Assim, no que segue apresentamos as equações da camada limite e sua solução. Desta forma, substituindo as variáveis escalonadas (3.101) em (3.45), obtemos

$$\begin{aligned} & (\varepsilon^{-1}) \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}} \frac{\partial \bar{T}_{11}^p}{\partial \bar{X}} - (\varepsilon^{-1}) \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}} \frac{\partial \bar{T}_{11}^p}{\partial \bar{Y}} - 2(\varepsilon^{-1}) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X} \partial \bar{Y}} \bar{T}_{11}^p - 2(\varepsilon^{-1}) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}^2} \bar{T}_{12}^p + \\ & (\varepsilon^{-1}) \bar{T}_{11}^p = 2 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X} \partial \bar{Y}}, \\ & \left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \right) \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}} \frac{\partial \bar{T}_{12}}{\partial \bar{X}} - \left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \right) \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}} \frac{\partial \bar{T}_{12}}{\partial \bar{Y}} + \left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \right) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}^2} \bar{T}_{11} - \left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \right) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}^2} \bar{T}_{22} + \\ & \left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \right) \bar{T}_{12}^p = \left(\left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \right) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}^2} - \left(\varepsilon^{\frac{1}{2}} \right) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}^2} \right), \\ & \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}} \frac{\partial \bar{T}_{22}^p}{\partial \bar{X}} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}} \frac{\partial \bar{T}_{22}^p}{\partial \bar{Y}} + 2 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}^2} \bar{T}_{12}^p + 2 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y} \partial \bar{X}} \bar{T}_{22}^p + \bar{T}_{22}^p = -2 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y} \partial \bar{X}}. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Portanto, a equação da camada limite *stick* é dada por

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}} \frac{\partial \bar{T}_{11}^p}{\partial \bar{X}} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}} \frac{\partial \bar{T}_{11}^p}{\partial \bar{Y}} - 2 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X} \partial \bar{Y}} \bar{T}_{11}^p - 2 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}^2} \bar{T}_{12}^p + \bar{T}_{11}^p = 0, \\ & \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}} \frac{\partial \bar{T}_{12}}{\partial \bar{X}} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}} \frac{\partial \bar{T}_{12}}{\partial \bar{Y}} + \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}^2} \bar{T}_{11} - \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}^2} \bar{T}_{22} + \bar{T}_{12}^p = \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}^2}, \\ & \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}} \frac{\partial \bar{T}_{22}^p}{\partial \bar{X}} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}} \frac{\partial \bar{T}_{22}^p}{\partial \bar{Y}} + 2 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}^2} \bar{T}_{12}^p + 2 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y} \partial \bar{X}} \bar{T}_{22}^p + \bar{T}_{22}^p = -2 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y} \partial \bar{X}}, \end{aligned} \quad (3.104)$$

sujeito às condições de combinação entre a região externa à camada limite e a região interna *stick* e ao comportamento viscométrico. A condição de combinação é obtida mediante a substituição dos valores de n_1 (3.100) e dos valores escalonados das propriedades (3.101) em (3.60). Desta forma, a condição de combinação é dada por

$$\bar{T}_{11} \sim 4C_1 \bar{X}^{-\frac{2}{5}} \bar{Y}^{-\frac{2}{5}}, \quad \bar{T}_{12} \sim C_1 \bar{X}^{-\frac{7}{5}} \bar{Y}^{\frac{3}{5}}, \quad \bar{T}_{22} \sim \frac{1}{4} C_1 \bar{X}^{-\frac{12}{5}} \bar{Y}^{\frac{8}{5}} \quad \text{para } \bar{Y} \rightarrow +\infty. \quad (3.105)$$

Por outro lado, a condição do comportamento viscométrico é obtido da equação (3.95), para as componentes \bar{T}_{11}^p e \bar{T}_{12}^p do tensor $\bar{\mathbf{T}}^p$. Substituindo os valores escalonados (3.101) em (3.95), resulta em

$$\bar{T}_{11}^p = 2 \left(\frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}^2} \right)^2, \quad \bar{T}_{12}^p = \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}^2}. \quad (3.106)$$

Para a componente \bar{T}_{22}^p , usamos os dois últimos termos da terceira equação em (3.104), ou seja,

$$\bar{T}_{22}^p = -2 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y} \partial \bar{X}}. \quad (3.107)$$

Pela equação de ψ (3.59), obtida pelo processo de combinação entre as soluções da região externa e interna à camada limite *stick*, teremos que $\bar{\Psi}$ será dada por

$$\bar{\Psi} = C_0 \bar{X}^{-\frac{1}{2}} \bar{Y}^2. \quad (3.108)$$

Desta forma, aplicando o valor de $\bar{\Psi}$ (3.108) nas equações (3.106) e (3.107), obtemos a condição viscométrica para o tensor polimérico como

$$\bar{T}_{11}^p = 8C_0^2 \bar{X}^{-1}, \quad \bar{T}_{12}^p = 2C_0 \bar{X}^{-\frac{1}{2}}, \quad \bar{T}_{22}^p = 2C_0 \bar{X}^{-\frac{3}{2}} \bar{Y} \quad \text{para } \bar{Y} \rightarrow 0^+. \quad (3.109)$$

A fim de obtermos a solução de similaridade da equação (3.104), fazemos

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \alpha x, & \bar{Y} &= \beta y, & \bar{\Psi} &= \gamma \psi, \\ \bar{T}_{11}^p &= \theta_1 t_{11}^p(\xi), & \bar{T}_{12}^p &= \theta_2 t_{12}^p(\xi), & \bar{T}_{22}^p &= \theta_3 t_{22}^p(\xi). \end{aligned} \quad (3.110)$$

Substituindo (3.110) em (3.104), obtemos as seguintes relações

$$\theta_1 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}, \quad \theta_2 = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \theta_3 = 1. \quad (3.111)$$

Além disso, pela equação de $\bar{\Psi}$ (3.108), teremos que

$$\gamma = \alpha^{-\frac{1}{2}} \beta^2. \quad (3.112)$$

Por fim, tomando algum valor das condições de contorno, por exemplo, a equação de \bar{T}_{22}^p em (3.109), e substituindo o valor de θ_3 em (3.111), obtemos

$$\beta = \alpha^{\frac{3}{2}}. \quad (3.113)$$

Por outro lado, substituindo (3.113) em (3.112), obtemos o valor de γ como

$$\gamma = \alpha^{\frac{5}{2}}. \quad (3.114)$$

De modo geral, teremos que as relações (3.110) passam a ser escritas como

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \alpha x, & \bar{Y} &= \alpha^{\frac{3}{2}} y, & \bar{\Psi} &= \alpha^{\frac{5}{2}} \psi, \\ \bar{T}_{11}^p &= \alpha^{-1} t_{11}^p(\xi), & \bar{T}_{12}^p &= \alpha^{-\frac{1}{2}} t_{12}^p(\xi), & \bar{T}_{22}^p &= t_{22}^p(\xi). \end{aligned} \quad (3.115)$$

Note que a equação de $\bar{\Psi}$ em (3.115) pode ser reescrita como

$$\bar{\Psi} = \alpha^{\frac{5}{2}} \psi(x, y) = \alpha^{\frac{5}{2}} \psi\left(\frac{\bar{X}}{\alpha}, \frac{\bar{Y}}{\alpha^{\frac{3}{2}}}\right). \quad (3.116)$$

Fazendo $\alpha = \bar{X}$, teremos que

$$\bar{\Psi} = \bar{X}^{\frac{5}{2}} \psi \left(1, \frac{\bar{Y}}{\bar{X}^{\frac{3}{2}}} \right) = \bar{X}^{\frac{5}{2}} s(\xi), \quad (3.117)$$

onde

$$\xi = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.118)$$

Desta forma, a solução de similaridade para o tensor polimérico é dada por

$$\bar{T}_{11}^p = \bar{X}^{-1} t_{11}^p(\xi), \quad \bar{T}_{12}^p = \bar{X}^{-\frac{1}{2}} t_{12}^p(\xi), \quad \bar{T}_{22}^p = t_{22}^p(\xi). \quad (3.119)$$

Para a construção das equações de similaridade, substituímos os valores de (3.117) e (3.119) em (3.104), que resultam em

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} \xi^2 t_{11}^{p'} + 4t_{12}^p - \frac{t_{11}^p}{C_0} &= 0, \\ \frac{5}{2} \xi^2 t_{12}^{p'} + \xi t_{12}^p - \frac{3}{4} \xi^2 t_{12}^p + 2t_{22}^p - \frac{t_{12}^p}{C_0} &= -2, \\ \frac{5}{2} \xi^2 t_{22}^{p'} - \frac{3}{2} \xi^2 t_{12}^p + t_{22} \left(2\xi - \frac{1}{C_0} \right) &= -2\xi. \end{aligned} \quad (3.120)$$

sujeito às condições do comportamento viscométrico (3.109) e de combinação (3.105), que em termos da variável ξ são dadas, respectivamente, por

$$t_{11}^p \sim 8C_0^2, \quad t_{12}^p \sim 2C_0, \quad t_{22}^p \sim 2C_0\xi, \quad \text{para } \xi \rightarrow 0^+, \quad (3.121)$$

$$t_{11}^p \sim 4C_1 \xi^{-\frac{2}{5}}, \quad t_{12}^p \sim C_1 \xi^{\frac{3}{5}}, \quad t_{22}^p \sim \frac{1}{4} C_1 \xi^{\frac{8}{5}}, \quad \text{para } \xi \rightarrow +\infty. \quad (3.122)$$

A solução numérica do sistema (3.120) é obtida utilizando a função `ode15s` do MATLAB. Os parâmetros usados na solução foram: domínio $[10^{-6}, 10^{10}]$ e tolerâncias $Tol = AbsTol = 10^{-13}$. Para mais detalhes sobre o processo de solução numérica, ver o Apêndice D. Podemos estimar o valor de C_1 pelas seguintes relações

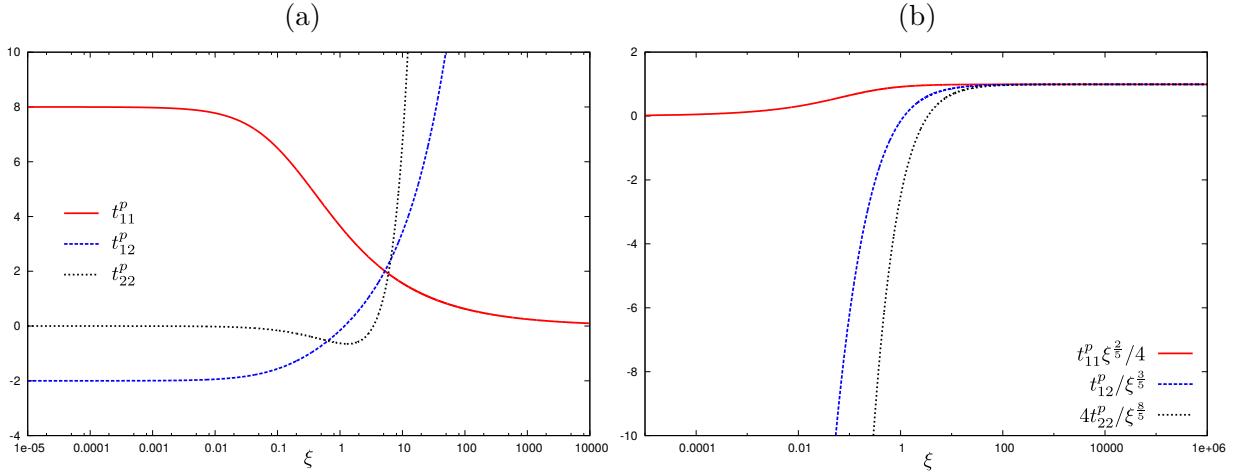
$$C_1 \sim \frac{t_{11}^p}{4\xi^{-\frac{2}{5}}}, \quad C_1 \sim \frac{t_{12}^p}{\xi^{\frac{3}{5}}}, \quad C_1 \sim \frac{4t_{22}^p}{\xi^{\frac{8}{5}}}. \quad (3.123)$$

Estas relações foram obtidas em (3.122). A estimativa do valor de C_1 é

$$C_1 = 0.99093. \quad (3.124)$$

Os perfis de t_{11}^p , t_{12}^p e t_{22}^p , bem como a estimativa de C_1 , podem ser vistos na Figura 5.

Figura 5 – Solução de similaridade para o problema *stick-slip* com o modelo Oldroyd-B: (a) perfis das componentes t_{11}^p , t_{12}^p e t_{22}^p e (b) estimativas do valor de C_1 .



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.3.3 Camada limite da superfície slip

3.3.3.1 Comportamento próximo à superfície slip

Estar próximo à superfície *slip* significa que $\theta \approx \pi$, ou ainda, $\pi - \theta \approx 0$. Assim, a função de corrente (3.35) e as componentes da velocidade (3.27) são aproximadas como

$$\psi \sim 2C_0 r^{\frac{3}{2}} (\pi - \theta), \quad v_r \sim -2C_0 r^{\frac{1}{2}}, \quad v_\theta \sim -3C_0 r^{\frac{1}{2}} (\pi - \theta). \quad (3.125)$$

Além disso, a taxa de cisalhamento e a taxa de deformação radial (3.63) são dadas, respectivamente, por

$$\dot{\gamma} \sim 3C_0 r^{-\frac{1}{2}} (\pi - \theta), \quad \dot{\epsilon} \sim -C_0 r^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.126)$$

Podemos notar que, a taxa de deformação radial $\dot{\epsilon}$ é significativamente maior que a taxa de cisalhamento $\dot{\gamma}$. Substituindo as expressões de $\dot{\gamma}$ e $\dot{\epsilon}$ (3.126) em (3.46), obtemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} v_r \frac{\partial T_{rr}^p}{\partial r} - \dot{\gamma} \frac{\partial T_{rr}^p}{\partial \theta} - 2T_{rr}^p \dot{\epsilon} + T_{rr}^p &= 2\dot{\epsilon}, \\ v_r \frac{\partial T_{r\theta}^p}{\partial r} - \dot{\gamma} \frac{\partial T_{r\theta}^p}{\partial \theta} - \dot{\gamma} T_{rr}^p - \frac{3}{2} T_{rr}^p \dot{\epsilon} (\pi - \theta) + T_{r\theta}^p &= \frac{3}{2} \dot{\epsilon} (\pi - \theta) + \dot{\gamma}, \\ v_r \frac{\partial T_{\theta\theta}^p}{\partial r} - \dot{\gamma} \frac{\partial T_{\theta\theta}^p}{\partial \theta} - 2\dot{\gamma} T_{r\theta}^p - 3T_{r\theta}^p \dot{\epsilon} (\pi - \theta) + 2T_{\theta\theta}^p \dot{\epsilon} + T_{\theta\theta}^p &= -2\dot{\epsilon}. \end{aligned} \quad (3.127)$$

Eliminando os termos envolvendo $\dot{\gamma}$ e substituindo o valor de v_r (3.125), juntamente com

algumas manipulações algébricas, obtemos

$$\begin{aligned} 2r \frac{\partial T_{rr}^p}{\partial r} - 2T_{rr}^p - \frac{r^{\frac{1}{2}}}{C_0} T_{rr}^p &= 2, \\ 2r \frac{\partial T_{r\theta}^p}{\partial r} + \frac{3}{2} T_{rr}^p (\pi - \theta) - \frac{r^{\frac{1}{2}}}{C_0} T_{r\theta}^p &= -\frac{3}{2} (\pi - \theta), \\ 2r \frac{\partial T_{\theta\theta}^p}{\partial r} + 3T_{r\theta}^p (\pi - \theta) + 2T_{\theta\theta}^p - \frac{r^{\frac{1}{2}}}{C_0} T_{\theta\theta}^p &= -2. \end{aligned} \quad (3.128)$$

Esse conjunto de equações recebe os valores das tensões vindas da região externa à camada limite (3.51), que entram na região interna *slip* da camada limite como

$$\begin{aligned} T_{rr}^p = \lambda v_r^2 &= 4C_1 \left(\frac{\psi}{C_0} \right)^{n_1} r, & T_{r\theta}^p = \lambda v_r v_\theta &= 3C_1 \left(\frac{\psi}{C_0} \right)^{n_1+1} r^{-\frac{1}{2}}, \\ T_{\theta\theta}^p = \lambda v_\theta^2 &= \frac{9}{4} C_1 \left(\frac{\psi}{C_0} \right)^{n_1+2} r^{-2}, \end{aligned} \quad (3.129)$$

onde o valor de n_1 é dada por (3.100). Assim, conforme calculamos as tensões ao longo de uma linha de corrente, ψ fixo, partindo da região externa à camada limite para a região interna *slip*, os valores da distância radial r começam a ficar altos, fazendo com que T_{rr}^p creça linearmente com r (3.129). Por outro lado, os valor de $\dot{\varepsilon}$ (3.126) começam a decrescer. Assim, na região *overlap* os valores de T_{rr}^p passam a ficar comparáveis com $\dot{\varepsilon}$. Porém, não é possível um balanceamento para o modelo Oldroyd-B, uma vez que este modelo não possui um termo quadrático como os modelos PTT e Giesekus, ver Apêndice B. Além disso, os demais termos da primeira equação em (3.128) permanecem subdominantes. Como consequência, o crescimento de T_{rr}^p ao longo da superfície *slip* não é controlado, fazendo com que T_{rr}^p tenda para o infinito. Este efeito pode ser visto nos valores numéricos da Seção 4.1 do Capítulo 4.

3.3.3.2 Escalonamento das variáveis

Semelhante ao que fizemos para a região *stick*, vamos escalar as variáveis na região *slip* e, a partir deste escalonamento, determinar as espessuras da camada limite próximo à região *slip*. Para isto, definimos a variável δ_2 como sendo uma função de ε , isto é,

$$\delta_2 = \delta_2(\varepsilon). \quad (3.130)$$

A relação (3.130) é ilustrada na Figura 4. Para o processo de escalonamento, recorremos às aproximações obtidas pela técnica de combinação da região externa à camada limite para a região interna *slip* (3.62). Primeiramente, aplicamos um escalonamento nas variáveis independentes x e y como

$$x = \varepsilon \bar{X} \quad y = \delta_2 \bar{Y}. \quad (3.131)$$

Assim, a partir de (3.131) e (3.62), escalonamos a variável ψ da seguinte forma

$$\psi \sim 2C_0(\bar{Y}\delta_2)(-\bar{X}\epsilon)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \psi = \epsilon^{\frac{1}{2}}\delta_2\bar{\Psi}. \quad (3.132)$$

Desta forma, aplicando o mesmo princípio para as demais variáveis, obtemos

$$\begin{aligned} u &= \epsilon^{\frac{1}{2}}\bar{U}, \quad v = \epsilon^{-\frac{1}{2}}\delta_2\bar{V}, \\ T_{11}^s &= \epsilon^{-\frac{1}{2}}\bar{T}_{11}^s, \quad T_{12}^s = \epsilon^{-\frac{3}{2}}\delta_2\bar{T}_{12}^s, \quad T_{22}^s = \epsilon^{-\frac{1}{2}}\bar{T}_{22}^s, \\ \lambda &= \epsilon^{\frac{n_1}{2}}\delta_1^{n_1}\bar{\lambda}, \\ T_{11}^p &= \epsilon^{\frac{n_1}{2}+1}\delta_2^{n_1}\bar{T}_{11}^p, \quad T_{12}^p = \epsilon^{\frac{n_1}{2}}\delta_2^{n_1+1}\bar{T}_{12}^p, \quad T_{22}^p = \epsilon^{\frac{n_1}{2}-1}\delta_2^{n_1+2}\bar{T}_{22}^p. \end{aligned} \quad (3.133)$$

Diferentemente da região *stick*, no qual tínhamos o comportamento viscométrico para nos guiar no processo de balanceamento das equações, não temos informações sobre os tensores na região *slip*. Porém, podemos obter o balanceamento das equações (3.46) apenas com informações de n_1 e da desigualdade $\epsilon > \delta_2$. Desta forma, fazendo uso do valor de n_1 , podemos reescrever o escalonamento do tensor polimérico (3.133), como

$$T_{11}^p = \epsilon^{\frac{2}{5}}\delta_2^{-\frac{6}{5}}\bar{T}_{11}^p, \quad T_{12}^p = \epsilon^{-\frac{3}{5}}\delta_2^{-\frac{1}{5}}\bar{T}_{12}^p, \quad T_{22}^p = \epsilon^{-\frac{8}{5}}\delta_2^{\frac{4}{5}}\bar{T}_{22}^p. \quad (3.134)$$

Assim, substituindo as variáveis escalonadas (3.133) e (3.134) em (3.46), obtemos

$$\begin{aligned} &\left(\epsilon^{-\frac{1}{10}}\delta_2^{-\frac{6}{5}}\right)\bar{U}\frac{\partial\bar{T}_{11}^p}{\partial\bar{X}} + \left(\epsilon^{-\frac{1}{10}}\delta_2^{-\frac{6}{5}}\right)\bar{V}\frac{\partial\bar{T}_{11}^p}{\partial\bar{Y}} - 2\left(\epsilon^{-\frac{1}{10}}\delta_2^{-\frac{6}{5}}\right)\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{X}}\bar{T}_{11}^p - \\ &2\left(\epsilon^{-\frac{1}{10}}\delta_2^{-\frac{6}{5}}\right)\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{Y}}\bar{T}_{12}^p + \left(\epsilon^{\frac{2}{5}}\delta_2^{-\frac{6}{5}}\right)\bar{T}_{11}^p = 2\left(\epsilon^{-\frac{1}{2}}\right)\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{X}}, \\ &\left(\epsilon^{-\frac{11}{10}}\delta_2^{-\frac{1}{5}}\right)\bar{U}\frac{\partial\bar{T}_{12}}{\partial\bar{X}} + \left(\epsilon^{-\frac{11}{10}}\delta_2^{-\frac{1}{5}}\right)\bar{V}\frac{\partial\bar{T}_{12}}{\partial\bar{Y}} - \left(\epsilon^{-\frac{11}{10}}\delta_2^{-\frac{1}{5}}\right)\frac{\partial\bar{V}}{\partial\bar{X}}\bar{T}_{11}^p - \\ &\left(\epsilon^{-\frac{11}{10}}\delta_2^{-\frac{1}{5}}\right)\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{Y}}\bar{T}_{22}^p + \left(\epsilon^{-\frac{3}{5}}\delta_2^{-\frac{1}{5}}\right)\bar{T}_{12}^p = \left[\left(\epsilon^{\frac{1}{2}}\delta_2^{-1}\right)\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{Y}} + \left(\epsilon^{-\frac{3}{2}}\delta_2\right)\frac{\partial\bar{V}}{\partial\bar{X}}\right], \\ &\left(\epsilon^{-\frac{21}{10}}\delta_2^{\frac{4}{5}}\right)\bar{U}\frac{\partial\bar{T}_{22}^p}{\partial\bar{X}} + \left(\epsilon^{-\frac{21}{10}}\delta_2^{\frac{4}{5}}\right)\bar{V}\frac{\partial\bar{T}_{22}^p}{\partial\bar{Y}} - 2\left(\epsilon^{-\frac{21}{10}}\delta_2^{\frac{4}{5}}\right)\frac{\partial\bar{V}}{\partial\bar{X}}\bar{T}_{12}^p - \\ &2\left(\epsilon^{-\frac{21}{10}}\delta_2^{\frac{4}{5}}\right)\frac{\partial\bar{V}}{\partial\bar{Y}}\bar{T}_{22}^p + \left(\epsilon^{-\frac{8}{5}}\delta_2^{\frac{4}{5}}\right)\bar{T}_{22}^p = 2\left(\epsilon^{-\frac{1}{2}}\right)\frac{\partial\bar{V}}{\partial\bar{Y}}. \end{aligned} \quad (3.135)$$

Analizando os produtos das potências de ϵ e δ_2 , para cada parcela, na primeira equação em (3.139), obtemos a seguinte ordem de magnitude $\epsilon^{-\frac{1}{10}}\delta_2^{-\frac{6}{5}} > \epsilon^{\frac{2}{5}}\delta_2^{-\frac{6}{5}} > \epsilon^{-\frac{1}{2}}$, tal que $\epsilon^{-\frac{1}{10}}\delta_2^{-\frac{6}{5}}$ representa a derivada convectiva superior de Maxwell, $\epsilon^{\frac{2}{5}}\delta_2^{-\frac{6}{5}}$ o tensor polimérico e $\epsilon^{-\frac{1}{2}}$ a taxa de deformação. Como a ordem de magnitude está bem estabelecida, não há como usarmos estes valores para o cálculo de $\delta_2(\epsilon)$. Para a segunda equação em (3.139), temos que a derivada convectiva domina sobre o tensor polimérico

$\varepsilon^{-\frac{11}{10}}\delta_2^{-\frac{1}{5}} > \varepsilon^{-\frac{3}{5}}\delta_2^{\frac{1}{5}}$ e entre as componentes da taxa de deformação temos a desigualdade $\varepsilon^{\frac{1}{2}}\delta_2^{-1} > \varepsilon^{-\frac{3}{2}}\delta_2$. Desta forma, a única forma de balanceamento na segunda equação é entre os termos envolvendo $\varepsilon^{-\frac{11}{10}}\delta_2^{-\frac{1}{5}}$ e $\varepsilon^{\frac{1}{2}}\delta_2^{-1}$, isto é,

$$\varepsilon^{-\frac{11}{10}}\delta_2^{-\frac{1}{5}} = \varepsilon^{\frac{1}{2}}\delta_2^{-1} \Rightarrow \delta_2 = \varepsilon^2. \quad (3.136)$$

Usando o mesmo raciocínio na terceira equação em (3.139), chegamos que os termos a serem comparados são $\varepsilon^{-\frac{21}{10}}\varepsilon^{\frac{4}{5}}$ e $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$, resultando na mesma relação (3.136) entre ε e δ_2 .

3.3.3.3 Equações da camada limite slip

Baseado na espessura da camada limite da superfície *slip* (ou, simplesmente, camada limite *slip*), isto é, na relação entre δ_2 e ε , vamos construir as equações da camada limite. Para isto, escrevemos, primeiramente, o escalonamento das variáveis apenas em função do parâmetro artificial $\varepsilon > 0$. O escalonamento adequado, para esta camada limite, é obtido mediante a substituição dos valores de δ_2 e n_1 em (3.132) e (3.133). Assim, o escalonamento das variáveis é dado por

$$\begin{aligned} x &= \varepsilon \bar{X}, & y &= \varepsilon^2 \bar{Y}, \\ \psi &= \varepsilon^{\frac{5}{2}} \bar{\Psi}, & u &= \varepsilon^{\frac{1}{2}} \bar{U}, & v &= \varepsilon^{\frac{3}{2}} \bar{V}, \\ T_{11}^s &= \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \bar{T}_{11}^s, & T_{12}^s &= \varepsilon^{-\frac{3}{2}} \bar{T}_{12}^s, & T_{22}^s &= \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \bar{T}_{22}^s, \\ \lambda &= \varepsilon^{-3} \bar{\lambda}, \\ T_{11}^p &= \varepsilon^{-2} \bar{T}_{11}^p, & T_{12}^p &= \varepsilon^{-1} \bar{T}_{12}^p, & T_{22}^p &= \bar{T}_{22}^p. \end{aligned} \quad (3.137)$$

A partir de agora vamos substituir os valores de \bar{U} e \bar{V} , das equações constitutivas, pelas respectivas relações com $\bar{\Psi}$, equação (3.102). Isto é feito com o objetivo de diminuir o número de variáveis nas equações constitutivas, facilitando o uso do método das similaridades para a solução das equações. Assim, substituindo as variáveis escalonadas (3.137) em (3.45), obtemos

$$\begin{aligned} &(\varepsilon^{-\frac{5}{2}}) \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}} \frac{\partial \bar{T}_{11}^p}{\partial \bar{X}} - (\varepsilon^{-\frac{5}{2}}) \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}} \frac{\partial \bar{T}_{11}^p}{\partial \bar{Y}} - 2(\varepsilon^{-\frac{5}{2}}) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X} \partial \bar{Y}} \bar{T}_{11}^p - 2(\varepsilon^{-\frac{5}{2}}) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}^2} \bar{T}_{12}^p + \\ &(\varepsilon^{-2}) \bar{T}_{11}^p = 2(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X} \partial \bar{Y}}, \\ &(\varepsilon^{-\frac{3}{2}}) \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}} \frac{\partial \bar{T}_{12}^p}{\partial \bar{X}} - (\varepsilon^{-\frac{3}{2}}) \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}} \frac{\partial \bar{T}_{12}^p}{\partial \bar{Y}} + (\varepsilon^{-\frac{3}{2}}) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}^2} \bar{T}_{11}^p - (\varepsilon^{-\frac{3}{2}}) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}^2} \bar{T}_{22}^p + \\ &(\varepsilon^{-1}) \bar{T}_{12}^p = \left[(\varepsilon^{-\frac{3}{2}}) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}^2} - (\varepsilon^{\frac{1}{2}}) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}^2} \right], \\ &(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}) \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}} \frac{\partial \bar{T}_{22}^p}{\partial \bar{X}} - (\varepsilon^{-\frac{1}{2}}) \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}} \frac{\partial \bar{T}_{22}^p}{\partial \bar{Y}} + 2(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}^2} \bar{T}_{12}^p + 2(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y} \partial \bar{X}} \bar{T}_{22}^p + \\ &\bar{T}_{22}^p = -2(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y} \partial \bar{X}}. \end{aligned} \quad (3.138)$$

Mantendo apenas os termos de mais alta ordem em ϵ , obtemos a equação da camada limite

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}} \frac{\partial \bar{T}_{11}^p}{\partial \bar{X}} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}} \frac{\partial \bar{T}_{11}^p}{\partial \bar{Y}} - 2 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X} \partial \bar{Y}} \bar{T}_{11}^p - 2 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}^2} \bar{T}_{12}^p &= 0, \\ \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}} \frac{\partial \bar{T}_{12}^p}{\partial \bar{X}} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}} \frac{\partial \bar{T}_{12}^p}{\partial \bar{Y}} + \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}^2} \bar{T}_{11}^p - \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}^2} \bar{T}_{22}^p &= \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}^2}, \\ \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}} \frac{\partial \bar{T}_{22}^p}{\partial \bar{X}} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}} \frac{\partial \bar{T}_{22}^p}{\partial \bar{Y}} + 2 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}^2} \bar{T}_{12}^p + 2 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y} \partial \bar{X}} \bar{T}_{22}^p &= -2 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y} \partial \bar{X}}, \end{aligned} \quad (3.139)$$

sujeito às condições de combinação, dadas por

$$\begin{aligned} \bar{T}_{11}^p &\sim 4C_1(-\bar{X})^{\frac{2}{5}}(2\bar{Y})^{-\frac{6}{5}}, & \bar{T}_{12}^p &\sim C_1(-\bar{X})^{-\frac{3}{5}}(2\bar{Y})^{-\frac{1}{5}}, \\ \bar{T}_{22}^p &\sim \frac{1}{4}C_1(-\bar{X})^{-\frac{8}{5}}(2\bar{Y})^{\frac{4}{5}}, & \text{para } \bar{Y} &\rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (3.140)$$

Estas condições são obtidas substituindo as componentes do tensor polimérico \mathbf{T}^p escalonadas, equação (3.133), e o valor de $n_1 = -\frac{6}{5}$, correspondente ao modelo Oldroyd-B, nas expressões obtidas pela técnica de combinação da região externa à camada limite para a região *slip*, expressão em (3.62). Além disso, a equação para $\bar{\Psi}$ na região *slip* é determinada substituindo o valor escalonado de Ψ , equação (3.132), na expressão de Ψ na região *slip*, equação (3.62), que resulta em

$$\bar{\Psi} = 2C_0(-\bar{X})^{\frac{1}{2}}\bar{Y}. \quad (3.141)$$

A fim de obtermos a solução de similaridade do sistema de equações (3.139), aplicamos (3.110) em (3.139). Desta forma, obtemos as seguintes relações

$$\theta_1 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}, \quad \theta_2 = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \theta_3 = 1. \quad (3.142)$$

Em adição a estas relações, temos a relação obtida da equação de $\bar{\Psi}$ (3.141), dada por

$$\gamma = \alpha^{\frac{1}{2}}\beta. \quad (3.143)$$

Assim, de modo a deixarmos estas relações em função apenas da variável α , escolhemos, por simplicidade, a terceira expressão da condição combinação em (3.140), que, substituindo o valor de θ_1 e incluindo as variáveis α e β , obtemos a seguinte expressão para β

$$\beta = \alpha^2. \quad (3.144)$$

Além disso, por (3.143), obtemos

$$\gamma = \alpha^{\frac{5}{2}}. \quad (3.145)$$

Portanto, temos que os valores de θ_1 , θ_2 e θ_3 em função de α são dados por

$$\theta_1 = \frac{1}{\alpha^2}, \quad \theta_2 = \frac{1}{\alpha}, \quad \theta_3 = 1. \quad (3.146)$$

Desta forma, temos que

$$\bar{\Psi} = \gamma \psi \left(\frac{(-\bar{X})}{\alpha}, \frac{\bar{Y}}{\beta} \right) = \alpha^{\frac{5}{2}} \psi \left(\frac{(-\bar{X})}{\alpha}, \frac{\bar{Y}}{\alpha^2} \right), \quad (3.147)$$

que, fazendo $\alpha = (-\bar{X})$, resulta em

$$\bar{\Psi} = (-\bar{X})^{\frac{5}{2}} \psi \left(1, \frac{\bar{Y}}{(-\bar{X})^2} \right), \quad (3.148)$$

ou ainda

$$\bar{\Psi} = (-\bar{X})^{\frac{5}{2}} h(\xi), \quad (3.149)$$

onde

$$\xi = \frac{\bar{Y}}{(-\bar{X})^2}. \quad (3.150)$$

Por outro lado, as componentes do tensor polimérico são dadas por

$$\bar{T}_{11}^p = (-\bar{X})^{-2} t_{11}^p(\xi), \quad \bar{T}_{12}^p = (-\bar{X})^{-1} t_{12}^p(\xi), \quad \bar{T}_{22}^p = t_{22}^p(\xi). \quad (3.151)$$

Portanto, substituindo (3.149) e (3.151) em (3.139) obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{aligned} 5\xi(t_{11}^p)' + 6t_{11}^p &= 0, \\ 5\xi(t_{12}^p)' + 2t_{12}^p - \frac{1}{2}\xi t_{11}^p &= 0, \\ 5\xi(t_{22}^p)' - \xi t_{12}^p - 2t_{22}^p &= 2, \end{aligned} \quad (3.152)$$

sujeita as seguintes condições de contorno (obtidas pela condição de combinação)

$$t_{11}^p = 2^{\frac{4}{5}} C_1 \xi^{-\frac{6}{5}}, \quad t_{12}^p = 2^{-\frac{1}{5}} C_1 \xi^{-\frac{1}{5}}, \quad t_{22}^p = 2^{-\frac{6}{5}} C_1 \xi^{\frac{4}{5}}, \quad \text{para } \xi \rightarrow +\infty. \quad (3.153)$$

O cálculo de t_{11}^p é obtido por integração direta da primeira equação em (3.152), que resulta em

$$t_{11}^p = K_1 \xi^{-\frac{6}{5}}, \quad (3.154)$$

onde K_1 é uma constante arbitrária.

Para a solução de t_{12}^p , reescrevemos a segunda equação de (3.152) como

$$(t_{12}^p)' + \frac{2}{5}\xi^{-1}t_{12}^p = \frac{1}{10}t_{11}^p, \quad (3.155)$$

tal que, aplicando o método do fator integrante ϑ , obtemos

$$\vartheta(\xi) = \xi^{\frac{2}{5}}. \quad (3.156)$$

Por fim, para o cálculo de t_{12}^p , fazemos

$$t_{12}^p = \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int \vartheta(\xi) \frac{t_{11}^p}{10} d\xi, \quad (3.157)$$

que resulta em

$$t_{12}^p = \frac{K_1}{2} \xi^{-\frac{1}{5}} + K_2 \xi^{-\frac{2}{5}}, \quad (3.158)$$

onde K_2 é uma constante arbitrária.

Ainda pelo método do fator integrante, reescrevemos a terceira equação em (3.152) como

$$(t_{22}^p)' - \frac{2}{5} \xi^{-1} t_{22}^p = \frac{2}{5} \xi^{-1} + \frac{1}{5} t_{12}^p, \quad (3.159)$$

de modo que o valor do fator integrante $\vartheta(\xi)$ é dado por

$$\vartheta(\xi) = \xi^{-\frac{2}{5}}, \quad (3.160)$$

resultando em

$$t_{22}^p = \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int \left(\frac{2}{5} \xi^{-1} \vartheta(\xi) + \frac{1}{5} t_{12}^p \right), \quad (3.161)$$

que implica em

$$t_{22}^p = \frac{K_1}{4} \xi^{\frac{4}{5}} + K_2 \xi^{\frac{3}{5}} + K_3 \xi^{\frac{2}{5}} - 1, \quad (3.162)$$

onde K_3 é uma constante arbitrária.

Assim, substituindo as expressões de t_{11}^p , t_{12}^p e t_{22}^p , equações (3.154), (3.158) e (3.162), respectivamente, em (3.151), obtemos

$$\begin{aligned} \bar{T}_{11}^p &= K_1 (-\bar{X})^{\frac{2}{5}} \bar{Y}^{-\frac{6}{5}}, \\ \bar{T}_{12}^p &= \frac{K_1}{2} (-\bar{X})^{-\frac{3}{5}} \bar{Y}^{-\frac{1}{5}} + K_2 (-\bar{X})^{-\frac{1}{5}} \bar{Y}^{-\frac{2}{5}}, \\ \bar{T}_{22}^p &= \frac{K_1}{4} (-\bar{X})^{-\frac{8}{5}} \bar{Y}^{\frac{4}{5}} + K_2 (-\bar{X})^{-\frac{6}{5}} \bar{Y}^{\frac{3}{5}} + K_3 (-\bar{X})^{-\frac{4}{5}} \bar{Y}^{\frac{2}{5}} - 1. \end{aligned} \quad (3.163)$$

Por fim, pelas condições de combinação (3.153), chegamos que

$$K_1 = 2^{\frac{4}{5}} C_1. \quad (3.164)$$

As outras duas constantes são tomadas como $K_2 = K_3 = 0$, conforme sugerido pelo estudo do problema *stick-slip* pela formulação natural apresentado na Seção 3.4.

Desta forma, a medida que nos aproximamos da superfície livre, obtemos

$$\bar{T}_{11}^p \sim 2^{\frac{4}{5}} C_1 (-\bar{X})^{\frac{2}{5}} \bar{Y}^{-\frac{6}{5}}, \quad \bar{T}_{12}^p \sim 2^{-\frac{1}{5}} C_1 (-\bar{X})^{-\frac{3}{5}} \bar{Y}^{-\frac{1}{5}}, \quad \bar{T}_{22}^p \sim -1. \quad (3.165)$$

Vale destacar que, sobre a superfície livre $\bar{Y} = 0$, ambas as componentes \bar{T}_{11}^p e \bar{T}_{12}^p do tensor polimérico vão para infinito. Este comportamento está em contraste com as soluções para

os modelos PTT e Giesekus (EVANS, 2013; EVANS, 2015), onde as componentes do tensor tem valor finito. Para o modelo Oldroyd-B, podemos interpretar este resultado como se a singularidade na junção entre o contorno rígido e a superfície livre fosse estendida ao longo da superfície livre. Desta forma, o modelo Oldroyd-B nos dá resultados não físicos para o tensor polimérico. Este resultado justifica o fato de não realizarmos simulações numéricas para este modelo constitutivo com todo o conjunto de equações.

3.4 Análise assintótica das equações constitutivas na base natural

Nesta Seção, apresentamos a análise assintótica do problema *stick-slip* com o tensor polimérico na base natural. Assim, considerando as equações da formulação natural no estado estacionário e, sem perda de generalidade, tomando $Wi = 1$, temos que

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \lambda + 2\mu \nabla \cdot \mathbf{w} + \lambda &= \frac{1}{|\mathbf{v}|^2}, \\ (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mu + v \nabla \cdot \mathbf{w} + \mu &= 0, \\ (\mathbf{v} \cdot \nabla) v + v &= |\mathbf{v}|^2, \end{aligned} \quad (3.166)$$

onde

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = \frac{1}{|\mathbf{v}|^4} \left[(v^2 - u^2) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 4uv \frac{\partial u}{\partial x} \right]. \quad (3.167)$$

3.4.1 Região externa à camada limite

Na região externa à camada limite os termos dominantes nas equações constitutivas da formulação natural (3.166) são

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \lambda = 0, \quad (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mu = 0, \quad (\mathbf{v} \cdot \nabla) v = 0, \quad (3.168)$$

cuja solução *stretching* é dada por

$$\lambda = \frac{C_1}{C_0^2} \left(\frac{\psi}{C_0} \right)^{n_1}, \quad \mu = C_2 \left(\frac{\psi}{C_0} \right)^{n_2}, \quad v = C_3 C_0^2 \left(\frac{\psi}{C_0} \right)^{n_3}, \quad (3.169)$$

onde C_1 , C_2 , C_3 , n_1 , n_2 e n_3 são constantes a serem determinadas. Note que, para a variável λ os valores de C_1 e n_1 já foram determinados para cada um dos modelos. Assim, precisamos apenas determinar as constantes relacionadas às variáveis μ e v . Como parte da metodologia usada neste trabalho, usamos a técnica combinação para ligar a região externa à camada limite com as camadas limites, *stick* e *slip*. Portanto, no que segue, completamos as soluções de combinação (3.60) e (3.62) com a inclusão das variáveis μ e v .

- Combinação a partir da região externa à camada limite para a região interna *stick*

$$\mu = C_2 x^{-\frac{n_2}{2}} y^{2n_2}, \quad v = C_3 C_0^2 x^{-\frac{n_3}{2}} y^{2n_3}. \quad (3.170)$$

- Combinação a partir da região externa à camada limite para a região interna *slip*

$$\mu = C_2 (-x)^{\frac{n_2}{2}} (2y)^{n_2}, \quad v = C_3 C_0^2 (-x)^{\frac{n_3}{2}} (2y)^{n_3}. \quad (3.171)$$

3.4.2 Camada limite da superfície stick

Pelo estudo desta região com a formulação Cartesiana, sabemos que o comportamento predominante nesta região é o viscométrico. Desta forma, iremos construir expressões para as variáveis λ , μ e v de modo a representarmos este comportamento com estas novas variáveis. Assim, aplicando as simplificações (3.92) nas equações da formulação natural (3.166), obtemos

$$\begin{aligned} -2 \frac{\mu}{u^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \lambda &= \frac{1}{u^2}, \\ -\frac{v}{u^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \mu &= 0, \\ v &= u^2. \end{aligned} \quad (3.172)$$

Por meio de algumas manipulações algébricas, podemos reescrever o comportamento viscométrico para cada um dos modelos constitutivos como

$$v = u^2, \quad \mu = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \lambda = \frac{1}{u^2} \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 1 \right] \quad (3.173)$$

3.4.2.1 Escalonamento das variáveis

Apenas completando as equações das variáveis escalonadas (3.101), escrevemos o escalonamento das variáveis μ e v como

$$\mu = \varepsilon^{\frac{5}{2}n_2} \bar{\mu}, \quad v = \varepsilon^{\frac{5}{2}n_3} \bar{v}. \quad (3.174)$$

Substituindo as variáveis escalonadas (3.101) nas equações que descrevem o comportamento viscométrico (3.173), obtemos

$$v = \varepsilon^2 \bar{U}^2 \rightarrow v = \varepsilon^2 \bar{v}. \quad (3.175)$$

e

$$\mu = 2 \frac{\partial(\varepsilon \bar{U})}{\partial(\varepsilon^{\frac{3}{2}} \bar{Y})} \rightarrow \mu = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \bar{\mu}, \quad (3.176)$$

que comparando com (3.174), resulta em

$$\frac{5}{2}n_2 = -\frac{1}{2} \rightarrow n_2 = -\frac{1}{5}, \quad \text{e} \quad \frac{5}{2}n_3 = 2 \rightarrow n_3 = \frac{4}{5}. \quad (3.177)$$

Portanto, de maneira resumida, os valores de n_1 , n_2 e n_3 são

$$n_1 = -\frac{6}{5}, \quad n_2 = -\frac{1}{5}, \quad n_3 = \frac{4}{5}. \quad (3.178)$$

3.4.2.2 Equações da camada limite stick

Para facilitar o processo de construção das equações da camada limite, reescrevemos as variáveis escalonadas incluindo apenas as variáveis usadas no processo de construção. Desta forma, no que segue, escrevemos um resumo das variáveis escalonadas, ou seja,

$$\begin{aligned} x &= \varepsilon \bar{X}, & y &= \varepsilon^{\frac{3}{2}} \bar{Y}, \\ \psi &= \varepsilon^{\frac{5}{2}} \bar{\Psi}, & u &= \varepsilon \bar{U}, \quad v = \varepsilon^{\frac{3}{2}} \bar{V}, \\ \lambda &= \varepsilon^{-3} \bar{\lambda}, & \mu &= \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \bar{\mu}, \quad v = \varepsilon^2 \bar{v}. \end{aligned} \quad (3.179)$$

O próximo passo é a construção das equações da camada limite, que descrevemos a seguir.

Substituindo as variáveis escalonadas (3.179) em (3.166), obtemos

$$\begin{aligned} (\varepsilon \bar{U}) \frac{\partial(\varepsilon^{-3} \bar{\lambda})}{\partial(\varepsilon \bar{X})} + (\varepsilon^{\frac{3}{2}} \bar{V}) \frac{\partial(\varepsilon^{-3} \bar{\lambda})}{\partial(\varepsilon^{\frac{3}{2}} \bar{Y})} + 2(\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \bar{\mu}) \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{w}} + (\varepsilon^{-3} \bar{\lambda}) &= \frac{1}{(\varepsilon^2 \bar{U}^2) + (\varepsilon^3 \bar{V}^2)}, \\ (\varepsilon \bar{U}) \frac{\partial(\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \bar{\mu})}{\partial(\varepsilon \bar{X})} + (\varepsilon^{\frac{3}{2}} \bar{V}) \frac{\partial(\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \bar{\mu})}{\partial(\varepsilon^{\frac{3}{2}} \bar{Y})} + (\varepsilon^2 \bar{v}) \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{w}} + (\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \bar{\mu}) &= 0, \\ (\varepsilon \bar{U}) \frac{\partial(\varepsilon^2 \bar{v})}{\partial(\varepsilon \bar{X})} + (\varepsilon^{\frac{3}{2}} \bar{V}) \frac{\partial(\varepsilon^2 \bar{v})}{\partial(\varepsilon^{\frac{3}{2}} \bar{Y})} + (\varepsilon^2 \bar{v}) &= \varepsilon^2 \bar{U}^2 + \varepsilon^3 \bar{V}^2, \end{aligned} \quad (3.180)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{w}} &= \frac{1}{\varepsilon^4 \bar{U}^4 + 2\varepsilon^2 \bar{U}^2 \varepsilon^3 \bar{V}^2 + \varepsilon^6 \bar{V}^4} \left[(\varepsilon^3 \bar{V}^2 - \varepsilon^2 \bar{U}^2) \left(\frac{\partial(\varepsilon^{\frac{3}{2}} \bar{V})}{\partial(\varepsilon \bar{X})} + \frac{\partial(\varepsilon \bar{U})}{\partial(\varepsilon^{\frac{3}{2}} \bar{Y})} \right) + \right. \\ &\quad \left. 4(\varepsilon \bar{U})(\varepsilon^{\frac{3}{2}} \bar{V}) \frac{\partial(\varepsilon \bar{U})}{\partial(\varepsilon \bar{X})} \right] \end{aligned} \quad (3.181)$$

Mantendo os termos de maior ordem em ε , obtemos

$$\begin{aligned} \bar{U} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{X}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{Y}} - 2 \frac{\bar{\mu}}{\bar{U}^2} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{Y}} + \bar{\lambda} &= 0, \\ \bar{U} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{X}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{Y}} - \frac{\bar{v}}{\bar{U}^2} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{Y}} + \bar{\mu} &= 0, \\ \bar{U} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{X}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{Y}} + \bar{v} &= \bar{U}^2. \end{aligned} \quad (3.182)$$

As condições de contorno são obtidas pelas condições de combinação (3.60) e (3.170), juntamente com os valores de n_1 , n_2 e n_3 (3.178), e do comportamento viscométrico (3.173), usando o valor de \mathbf{u} vindo de (3.60). Além disso, para que as condições de contorno fiquem consistentes com a forma escalonada das equações, também aplicamos o processo de escalonamento (3.179). Desta forma, as condições de contorno são dadas por

$$\bar{\lambda} \sim 2\bar{Y}^{-2}, \quad \bar{\mu} \sim 2C_0\bar{X}^{-\frac{1}{2}}, \quad \bar{v} \sim 4C_0^2\bar{X}^{-1}\bar{Y}^2, \quad \text{para } \bar{Y} \rightarrow 0^+, \quad (3.183)$$

$$\bar{\lambda} \sim \frac{C_1}{C_0^2}\bar{X}^{\frac{3}{5}}\bar{Y}^{-\frac{12}{5}}, \quad \bar{\mu} \sim C_2\bar{X}^{\frac{1}{10}}\bar{Y}^{-\frac{2}{5}}, \quad \bar{v} \sim C_3C_0^2\bar{X}^{-\frac{2}{5}}\bar{Y}^{\frac{8}{5}}, \quad \text{para } \bar{Y} \rightarrow +\infty. \quad (3.184)$$

Semelhante ao que fizemos para o caso Cartesiano, aplicamos um escalonamento da forma

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \alpha x, & \bar{Y} &= \beta y, & \bar{\Psi} &= \gamma \psi, \\ \bar{\lambda} &= \theta_1 \tilde{\lambda}(\xi), & \bar{\mu} &= \theta_2 \tilde{\mu}(\xi), & \bar{v} &= \theta_3 \tilde{v}(\xi). \end{aligned} \quad (3.185)$$

Vale notar que, como escrevemos as equações da camada limite envolvendo as componentes da velocidade, ao invés da função de corrente, temos que relacioná-las à função de corrente, isto é feito através das relações em (3.102).

Desta forma, substituindo (3.185) em (3.182), resulta nas seguintes relações envolvendo θ_1 , θ_2 e θ_3

$$\theta_1 = \frac{1}{\beta^2}, \quad \theta_2 = \frac{\gamma}{\beta^2}, \quad \theta_3 = \frac{\gamma^2}{\beta^2}. \quad (3.186)$$

Além disso, pelas condições de contorno (3.184) e equação da função de corrente (3.108), temos que

$$\beta = \alpha^{\frac{3}{2}}, \quad \gamma = \alpha^{\frac{5}{2}}, \quad (3.187)$$

que fazendo $\alpha = \bar{X}$, vai resultar em

$$\theta_1 = \bar{X}^{-3}, \quad \theta_2 = \bar{X}^{-\frac{1}{2}}, \quad \theta_3 = \bar{X}^2. \quad (3.188)$$

Desta forma, temos que as soluções de similaridades são dadas por

$$\tilde{\lambda} = \bar{X}^{-3}\tilde{\lambda}(\xi), \quad \tilde{\mu} = \bar{X}^{-\frac{1}{2}}\tilde{\mu}(\xi), \quad \tilde{v} = \bar{X}^2\tilde{v}(\xi), \quad (3.189)$$

onde

$$\xi = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.190)$$

Substituindo (3.189) em (3.182), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{5}{2}\xi^2\tilde{\lambda}' + 6\xi\tilde{\lambda} + \frac{\tilde{\mu}}{\xi^2C_0^2} - \frac{\tilde{\lambda}}{C_0} &= 0, \\ \frac{5}{2}\xi^2\tilde{\mu}' + \xi\tilde{\mu} + \frac{\tilde{v}}{2C_0^2\xi^2} - \frac{\tilde{\mu}}{C_0} &= 0, \\ \frac{5}{2}\xi^2\tilde{v}' - 4\xi\tilde{v} - \frac{\tilde{v}}{C_0} &= -4C_0\xi^2, \end{aligned} \quad (3.191)$$

sujeito as seguintes condições de contorno

$$\tilde{\lambda} \sim \frac{2}{\xi^2}, \quad \tilde{\mu} \sim 2C_0, \quad \tilde{v} \sim 4C_0^2\xi^2, \quad \text{para } \xi \rightarrow 0^+, \quad (3.192)$$

$$\tilde{\lambda} \sim \frac{C_1}{C_0^2}\xi^{-\frac{12}{5}}, \quad \tilde{\mu} \sim C_2\xi^{-\frac{2}{5}}, \quad \tilde{v} \sim C_3C_0^2\xi^{\frac{8}{5}}, \quad \text{para } \xi \rightarrow +\infty. \quad (3.193)$$

Do ponto de vista numérico, é conveniente escrever as variáveis $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$ e \tilde{v} como

$$l(\xi) = \xi^2\tilde{\lambda}, \quad m(\xi) = \tilde{\mu}, \quad n(\xi) = \frac{\tilde{v}}{\xi^2}. \quad (3.194)$$

Desta forma, a equação de similaridade em termos das novas variáveis são

$$\begin{aligned} \frac{5}{2}\xi^2l' + \xi l + \frac{m}{C_0^2} - \frac{l}{C_0} &= 0, \\ \frac{5}{2}\xi^2m' + \xi m + \frac{n}{2C_0^2} - \frac{m}{C_0} &= 0, \\ \frac{5}{2}\xi^2n' + \xi n - \frac{n}{C_0} &= -4C_0, \end{aligned} \quad (3.195)$$

sujeito as condições de contorno dadas por

$$l \sim 2, \quad m \sim 2C_0, \quad n \sim 4C_0^2, \quad \text{para } \xi \rightarrow 0^+, \quad (3.196)$$

$$l \sim \frac{C_1}{C_0^2}\xi^{-\frac{2}{5}}, \quad m \sim C_2\xi^{-\frac{2}{5}}, \quad n \sim C_3C_0^2\xi^{-\frac{2}{5}}, \quad \text{para } \xi \rightarrow +\infty. \quad (3.197)$$

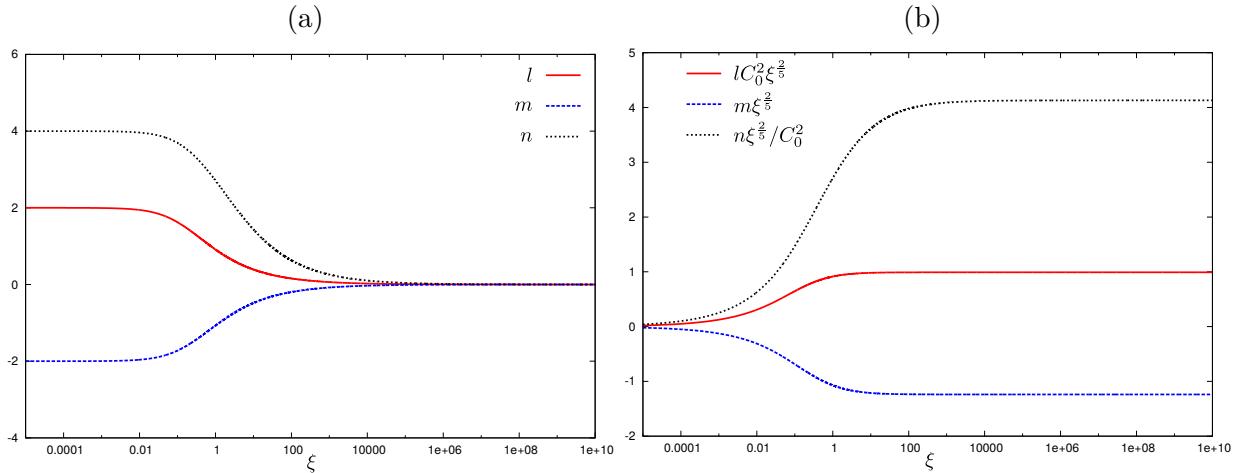
A solução numérica do sistema (3.195) é obtida por meio da função `ode15s` do MATLAB. Os parâmetros usados para a solução foram: domínio $[10^{-6}, 10^{10}]$ e tolerâncias $Tol = AbsTol = 10^{-13}$. Para mais detalhes deste método ver Apêndice D. As estimativas para as constantes C_1 , C_2 e C_3 são

$$C_1 = 0.99093, \quad C_2 = -1.23867, \quad C_3 = 4.12890. \quad (3.198)$$

Apresentamos na Figura 6 os perfis de l , m e n , bem como as estimativas de C_1 , C_2 e C_3 .

Assim, terminamos a solução do tensor polimérico na região *stick*. Note que, como nesta região resolvemos as equações numericamente, não conseguimos escrever uma solução geral para o tensor \mathbf{T}^P que represente as três regiões do domínio.

Figura 6 – Problema *stick-slip* na base natural. Ilustração da solução numérica das equações (3.195) para o modelo Oldroyd-B com condição inicial (3.197) para $\xi_0 = 10^{-6}$. (a) apresenta os perfis de l , m e n , enquanto que (b) mostra a convergência de (3.198) para $\xi \rightarrow +\infty$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.4.3 Camada limite da superfície slip

3.4.3.1 Escalonamento das variáveis

Para o escalonamento das variáveis μ e v na região *slip*, basta substituirmos os valores escalonados da variável ψ , juntamente com os valores de n_2 e n_3 , nas soluções *stretching* (3.169). Desta forma, temos

$$\mu = C_2 \left(\frac{\varepsilon^{5/2} \bar{\psi}}{C_0} \right)^{-1/5} \Rightarrow \mu = \varepsilon^{-1/2} \bar{\mu}, \quad v = C_3 C_0^2 \left(\frac{\varepsilon^{5/2} \bar{\psi}}{C_0} \right)^{4/5} \Rightarrow v = \varepsilon^2 \bar{v}. \quad (3.199)$$

Como veremos na Subseção seguinte, o escalonamento da variável v deverá ser alterado. Isto porque a variável v , para este modelo, não entra na região *slip* com a solução *stretching* como termo dominante, sendo necessário um escalonamento diferente para v .

3.4.3.2 Equações da camada limite slip

Para facilitar o processo de construção das equações da camada limite, reescrevemos as variáveis escalonadas, incluindo apenas as variáveis que usaremos no processo de construção. Desta forma, no que segue, escrevemos um resumo das variáveis escalonadas,

ou seja,

$$\begin{aligned} x &= \varepsilon \bar{X}, & y &= \varepsilon^2 \bar{Y}, \\ \psi &= \varepsilon^{\frac{5}{2}} \bar{\Psi}, & u &= \varepsilon^{\frac{1}{2}} \bar{U}, & v &= \varepsilon^{\frac{3}{2}} \bar{V}, \\ \lambda &= \varepsilon^{-3} \bar{\lambda}, & \mu &= \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \bar{\mu}, & \nu &= \varepsilon^{\frac{3}{2}} \bar{v}. \end{aligned} \quad (3.200)$$

Vale destacar que, o escalonamento da variável ν para os modelos Oldroyd-B foi alterado (compare (3.200) e com (3.199)). Isto foi feito pois, diferentemente das variáveis λ e μ , a variável ν não entra na região *slip* com a solução da região externa à camada limite como termo dominante. O novo escalonamento para ν foi obtido iniciando os cálculos com $\nu = \varepsilon^\alpha \bar{v}$, ou seja, através de um escalonamento na forma geral, onde calculamos a constante α mediante o correto balanceamento entre os termos da equação (3.166).

Assim, no que segue, apresentamos a construção das equações da camada limite.

Substituindo as variáveis escalonadas (3.200) em (3.166), obtemos

$$\begin{aligned} (\varepsilon^{\frac{1}{2}} \bar{U}) \frac{\partial(\varepsilon^{-3} \bar{\lambda})}{\partial(\varepsilon \bar{X})} + (\varepsilon^{\frac{3}{2}} \bar{V}) \frac{\partial(\varepsilon^{-3} \bar{\lambda})}{\partial(\varepsilon^2 \bar{Y})} + 2(\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \bar{\mu}) (\varepsilon^{-\frac{5}{2}} \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{w}}) + (\varepsilon^{-3} \bar{\lambda}) = \\ \frac{1}{\varepsilon \bar{U}^2 + \varepsilon^3 \bar{V}^2}, \\ (\varepsilon^{\frac{1}{2}} \bar{U}) \frac{\partial(\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \bar{\mu})}{\partial(\varepsilon \bar{X})} + (\varepsilon^{\frac{3}{2}} \bar{V}) \frac{\partial(\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \bar{\mu})}{\partial(\varepsilon^2 \bar{Y})} + (\varepsilon^{\frac{3}{2}} \bar{v}) (\varepsilon^{-\frac{5}{2}} \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{w}}) + (\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \bar{\mu}) = 0, \\ (\varepsilon^{\frac{1}{2}} \bar{U}) \frac{\partial(\varepsilon^{\frac{3}{2}} \bar{v})}{\partial(\varepsilon \bar{X})} + (\varepsilon^{\frac{3}{2}} \bar{V}) \frac{\partial(\varepsilon^{\frac{3}{2}} \bar{v})}{\partial(\varepsilon^2 \bar{Y})} + (\varepsilon^{\frac{3}{2}} \bar{v}) = \varepsilon \bar{U}^2 + \varepsilon^3 \bar{V}^2, \end{aligned} \quad (3.201)$$

onde

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{w}} = \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \bar{X}} \left(\frac{-\bar{V}}{\bar{U}^2 + \varepsilon^2 \bar{V}^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{Y}} \left(\frac{\bar{U}}{\bar{U}^2 + \varepsilon^2 \bar{V}^2} \right). \quad (3.202)$$

Assim, mediante algumas manipulações algébricas sobre as potências de ε , obtemos

$$\begin{aligned} \bar{U} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{X}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{Y}} + 2\bar{\mu} \varepsilon^{\frac{1}{2}} \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{w}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \bar{\lambda} = \frac{\varepsilon^{\frac{5}{2}}}{\bar{U}^2 + \varepsilon^2 \bar{V}^2}, \\ \bar{U} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{X}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{Y}} + \bar{v} \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{w}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \bar{\mu} = 0, \\ \bar{U} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{X}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{Y}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \bar{v} = \bar{U}^2 + \varepsilon^2 \bar{V}^2. \end{aligned} \quad (3.203)$$

Sujeito as seguintes condições de combinação

$$\bar{\lambda} \sim \frac{C_1}{C_0^2} (-\bar{X})^{-\frac{3}{5}} (2\bar{Y})^{-\frac{6}{5}}, \quad \bar{\mu} \sim C_2 (-\bar{X})^{-\frac{1}{10}} (2\bar{Y})^{-\frac{1}{5}}, \quad \bar{v} \sim C_3 C_0^2 (-\bar{X})^{\frac{2}{5}} (2\bar{Y})^{\frac{4}{5}} \quad (3.204)$$

para $\bar{Y} \rightarrow +\infty$.

Note que, pela expressão de $\bar{\Psi}$ (3.141), as componentes da velocidade são dadas por

$$\bar{U} = 2C_0(-\bar{X})^{\frac{1}{2}}, \quad \bar{V} = C_0(-\bar{X})^{-\frac{1}{2}}\bar{Y}. \quad (3.205)$$

Como a velocidade \bar{U} não depende de \bar{Y} e $\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{w}} \sim \frac{\partial}{\partial \bar{Y}} \left(\frac{1}{\bar{U}} \right)$, então podemos tomar $\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{w}}$ como sendo zero. Assim, as equações da camada limite são dadas por

$$\begin{aligned} \bar{U} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{X}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{Y}} &= 0, \\ \bar{U} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{X}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{Y}} &= 0, \\ \bar{U} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{X}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{Y}} &= \bar{U}^2. \end{aligned} \quad (3.206)$$

Note que, as duas primeiras equações são exatamente as mesmas da região externa à camada limite (3.168). Logo, as soluções de $\bar{\lambda}$ e \bar{v} são dadas por

$$\bar{\lambda} = \frac{C_1}{C_0^2} \left(\frac{\bar{\Psi}}{C_0} \right)^{-\frac{6}{5}}, \quad \bar{\mu} = C_2 \left(\frac{\bar{\Psi}}{C_0} \right)^{-\frac{1}{5}}, \quad (3.207)$$

onde $\bar{\Psi}$ é dada por (3.141). Já para a solução da equação de \bar{v} , escrevemos \bar{v} como

$$\bar{v} = (-\bar{X})^{\frac{3}{2}} \tilde{v}(\xi), \quad (3.208)$$

onde ξ é a mesma variável usada para o caso Cartesiano com o modelo Oldroyd-B, equação (3.150). Desta forma, a equação de similaridade é dada por

$$5\xi \tilde{v} - 3\tilde{v} = 4C_0. \quad (3.209)$$

Usando o método do fator integrante, obtemos a solução de \tilde{v} como

$$\tilde{v} = -\frac{4}{3}C_0 + A\xi^{\frac{3}{5}}. \quad (3.210)$$

Substituindo (3.210) em (3.208), bem como a expressão para ξ (3.150), obtemos

$$\bar{v} = -\frac{4}{3}C_0(-\bar{X})^{\frac{3}{2}} + A\bar{Y}^{\frac{3}{5}}(-\bar{X})^{\frac{3}{10}}, \quad (3.211)$$

onde A é uma constante arbitrária.

Note que, a solução obtida para \bar{v} não concorda com a condição de combinação (3.204). Este desacordo sugere que devemos expandir \bar{v} em termos de $\boldsymbol{\varepsilon}$ para a correta ligação da região externa à camada limite com a região interna *slip*. Apesar disso, podemos, pela condição de combinação, determinar o valor de A , que é zero. Por fim, fazemos a seguinte expansão

$$\bar{v} \sim v_0 + \varepsilon^\omega v_1, \quad (3.212)$$

onde ω é um valor a ser determinado.

Para as demais variáveis não aplicamos nenhuma expansão, mantendo apenas os termos de ordem $O(1)$. Desta forma, não é necessário alterar a notação das demais variáveis.

Assim, substituindo (3.212) em (3.203), apenas para a equação de \bar{v} , obtemos

$$\bar{U} \frac{\partial v_0}{\partial \bar{X}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \bar{Y}} + \varepsilon^\omega \left(\bar{U} \frac{\partial v_1}{\partial \bar{X}} + \bar{V} \frac{\partial v_1}{\partial \bar{Y}} \right) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} v_0 + \varepsilon^{\frac{1}{2}+\omega} v_1 = \bar{U}^2 + \varepsilon^2 \bar{V}^2. \quad (3.213)$$

O correto balanceamento para determinarmos ω é entre os termos convectivos em v_1 e o termo $\varepsilon^{\frac{1}{2}} v_0$, que implica $\omega = \frac{1}{2}$. Assim, a expansão (3.212) pode ser escrita como

$$\bar{v} \sim v_0 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} v_1, \quad (3.214)$$

resultando nas seguintes equações para v_0 e v_1

$$\begin{aligned} \bar{U} \frac{\partial v_0}{\partial \bar{X}} + \bar{V} \frac{\partial v_0}{\partial \bar{Y}} &= \bar{U}^2, \\ \bar{U} \frac{\partial v_1}{\partial \bar{X}} + \bar{V} \frac{\partial v_1}{\partial \bar{Y}} &= -v_0. \end{aligned} \quad (3.215)$$

Note que, a primeira equação em (3.215) para os termos de ordem $O(1)$ é a mesma obtida anteriormente para \bar{v} , de modo que a solução será a mesma obtida em (3.211). Por outro lado, para a variável v_1 , escrevemos

$$v_1 = (-\bar{X})^2 \tilde{v}_1, \quad (3.216)$$

cuja equação de similaridade é dada por

$$5\xi \tilde{v}'_1 - 4\tilde{v}_1 = \frac{4}{3}. \quad (3.217)$$

Usando o método do fator integrante, obtemos

$$\tilde{v}_1 = -\frac{1}{3} + A_1 \xi^{\frac{4}{5}}, \quad (3.218)$$

onde A_1 é uma constante arbitrária. Por meio da solução de \tilde{v}_1 , podemos construir a solução de v_1 (3.216), ou seja,

$$v_1 = -\frac{1}{3}(-\bar{X})^2 + A_1 (-\bar{X})^{\frac{2}{5}} \bar{Y}^{\frac{4}{5}}, \quad (3.219)$$

que comparando com a condição de combinação (3.204) para a componente \bar{v} , resulta em

$$A_1 = C_3 C_0^2. \quad (3.220)$$

Portanto, juntando a solução de v_0 (3.211) e v_1 (3.219) na expressão em (3.214), obtemos

$$\bar{v} = -\frac{4}{3} C_0 (-\bar{X})^{\frac{3}{2}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left[-\frac{1}{3} (-\bar{X})^2 + C_3 C_0^2 \left(\frac{\Psi}{C_0} \right)^{\frac{4}{5}} \right]. \quad (3.221)$$

Aplicando um escalonamento na expansão em base natural de $\bar{\mathbf{T}}^p$, resulta em

$$\bar{T}_{11}^p \sim \bar{\lambda} \bar{U}^2 - \varepsilon^2, \quad \bar{T}_{12}^p \sim \bar{\lambda} \bar{U} \bar{V} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \bar{\mu}, \quad \bar{T}_{22}^p \sim -1 + \bar{\lambda} \bar{V}^2 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(2\bar{\mu} \frac{\bar{V}}{\bar{U}} + \frac{\bar{v}}{\bar{U}^2} \right), \quad (3.222)$$

que, mantendo somente os termos de maior ordem, resulta em

$$\bar{T}_{11}^p = \bar{\lambda} \bar{U}^2, \quad \bar{T}_{12}^p = \bar{\lambda} \bar{U} \bar{V}, \quad \bar{T}_{22}^p = -1 + \bar{\lambda} \bar{V}^2, \quad (3.223)$$

que recupera a solução obtida pelo caso Cartesiano (3.151) tomando $K_2 = K_3 = 0$. A expressão (3.222) mostra o quanto devemos avançar na ordem dos termos em ε para capturar as informações carregadas por $\bar{\mu}$ e \bar{v} .

CAPÍTULO
4

RESULTADOS NUMÉRICOS: *STICK-SLIP*

Neste Capítulo, apresentamos os resultados da integração numérica das equações constitutivas, para as formulações Cartesiana (CSF) e natural (NSF), para o problema *stick-slip*. Para este estudo, utilizamos dois tipos de abordagens: integração das equações constitutivas ao longo de linhas de corrente e a integração das equações com o campo de velocidade viscoelástico, isto é, usando o conjunto completo de equações que definem um escoamento viscoelástico. Os modelos constitutivos estudados foram o Oldroyd-B, PTT e Giesekus, para a integração das equações constitutivas ao longo de linhas de corrente, e PTT e Giesekus para a integração das equações com o campo de velocidade viscoelástico. Abaixo, apresentamos brevemente algumas considerações importantes no processo de integração das equações constitutivas ao longo de linhas de corrente. Estas informações também serão usadas na Seção 5.1 do Capítulo 5 para o problema da contração 4:1.

Para a integração das equações constitutivas ao longo de linhas de corrente, reduzimos os sistemas de equações diferenciais parciais (3.46) e (3.166) a sistemas de equações diferenciais ordinárias. Este processo é feito por meio da equação (3.68), onde modificamos o termo convectivo ($\mathbf{v} \cdot \nabla$), que passa a depender apenas da variável θ . Desta forma, o conjunto de equações (3.46) e (3.166) passa a ser escrito como

$$\begin{aligned} \frac{v_\theta}{r} \frac{dT_{rr}}{d\theta} - 2 \frac{\partial v_r}{\partial r} T_{rr} - \frac{2}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} T_{r\theta} + \kappa g_{rr} + T_{rr} &= 2 \frac{\partial v_r}{\partial r}, \\ \frac{v_\theta}{r} \frac{dT_{r\theta}}{d\theta} + \frac{v_\theta}{r} T_{rr} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} T_{\theta\theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial r} T_{rr} + \kappa g_{r\theta} + T_{r\theta} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right), \\ \frac{v_\theta}{r} \frac{dT_{\theta\theta}}{d\theta} + 2 \frac{v_\theta}{r} T_{r\theta} - 2 \frac{\partial v_\theta}{\partial r} T_{r\theta} - \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} T_{\theta\theta} - 2 \frac{v_r}{r} T_{\theta\theta} + \kappa g_{\theta\theta} + T_{\theta\theta} &= 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right), \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde f_{rr} , $f_{r\theta}$ e $f_{\theta\theta}$ são dados por (A.24). O conjunto de equações para as variáveis

naturais é dado por

$$\begin{aligned} \frac{v_\theta}{r} \frac{d\lambda}{d\theta} + 2\mu \nabla \cdot \mathbf{w} + \kappa g_\lambda &= \left(\frac{1}{|\mathbf{v}|^2} - \lambda \right), \\ \frac{v_\theta}{r} \frac{d\mu}{d\theta} + v \nabla \cdot \mathbf{w} + \kappa g_\mu &= -\mu, \\ \frac{v_\theta}{r} \frac{dv}{d\theta} + \kappa g_v &= (|\mathbf{v}|^2 - v), \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde g_λ , g_μ e g_v são dados, respectivamente, por (2.45) e $\nabla \cdot \mathbf{w}$ por (A.25).

Note que, por simplicidade, mantivemos a mesma adimensionalização utilizada no estudo assintótico do Capítulo 3, isto é, sem os números adimensionais W_i e β .

4.1 Integração numérica das equações constitutivas ao longo de linhas de corrente

Nesta seção, apresentamos os resultados numéricos ao longo de linhas de corrente para o problema *stick-slip* nas formulações Cartesiana e natural. Mas, antes, porém, vamos apresentar um resumo dos resultados assintóticos obtidos no Capítulo 3 e Apêndice B para os modelos constitutivos Oldroyd-B, PTT e Giesekus. Assim, apresentamos os seguintes resultados

$$\psi = C_0 r^{\frac{3}{2}} f_0(\theta), \quad (4.3)$$

que, por (3.27), resulta em

$$v_r = C_0 r^{\frac{1}{2}} f'_0(\theta), \quad v_\theta = -\frac{3}{2} C_0 r^{\frac{1}{2}} f_0(\theta), \quad (4.4)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial r} &= \frac{1}{2} C_0 r^{-\frac{1}{2}} f'_0(\theta), & \frac{\partial v_r}{\partial \theta} &= C_0 r^{\frac{1}{2}} f''_0(\theta), \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} &= -\frac{3}{4} C_0 r^{-\frac{1}{2}} f_0(\theta), & \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} &= -\frac{3}{2} C_0 r^{\frac{1}{2}} f'_0(\theta), \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde

$$\begin{aligned} f_0(\theta) &= 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta), \\ f'_0(\theta) &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) + 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta), \\ f''_0(\theta) &= -\frac{5}{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) + 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Estes valores das componentes da velocidade (4.4) e suas derivadas (4.5) são substituídos nas equações das tensões (4.1) e das variáveis naturais (4.2) no processo de solução.

Também, as potências em r para as propriedades são dadas por

$$\mathbf{v} = O(r^{\frac{1}{2}}), \quad \mathbf{T}^p = \begin{cases} O(r^{-\frac{4}{5}}), & \text{Oldroyd-B}, \\ O(r^{-\frac{4}{11}}), & \text{PTT}, \\ O(r^{-\frac{5}{16}}), & \text{Giesekus}, \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\lambda = \begin{cases} O(r^{-\frac{9}{5}}), & \text{Oldroyd-B}, \\ O(r^{-\frac{15}{11}}), & \text{PTT}, \\ O(r^{-\frac{21}{16}}), & \text{Giesekus}, \end{cases} \quad \mu = \begin{cases} O(r^{-\frac{3}{10}}), & \text{Oldroyd-B}, \\ O(r^{-\frac{3}{22}}), & \text{PTT}, \\ O(r^0), & \text{Giesekus}, \end{cases} \quad v = \begin{cases} O(r^{\frac{6}{5}}), & \text{Oldroyd-B}, \\ O(r^{\frac{12}{11}}), & \text{PTT}, \\ O(r^{\frac{21}{16}}), & \text{Giesekus}. \end{cases} \quad (4.8)$$

Por fim, as espessuras das camadas limites *stick* e *slip* são dadas, respectivamente, por

$$\text{Esp. stick} = \begin{cases} O(r^{\frac{3}{2}}), & \text{Oldroyd-B}, \\ O(r^{\frac{7}{6}}), & \text{PTT}, \\ O(r^{\frac{5}{4}}), & \text{Giesekus}, \end{cases} \quad \text{Esp. slip} = \begin{cases} O(r^2), & \text{Oldroyd-B}, \\ O(r^{\frac{23}{20}}), & \text{PTT}, \\ O(r^{\frac{17}{14}}), & \text{Giesekus}. \end{cases} \quad (4.9)$$

Também, podemos escrever r em função de θ como

$$r = \left(\frac{\psi}{C_0 f_0(\theta)} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (4.10)$$

Desta forma, todas as propriedades podem ser vistas como dependendo apenas da variável θ .

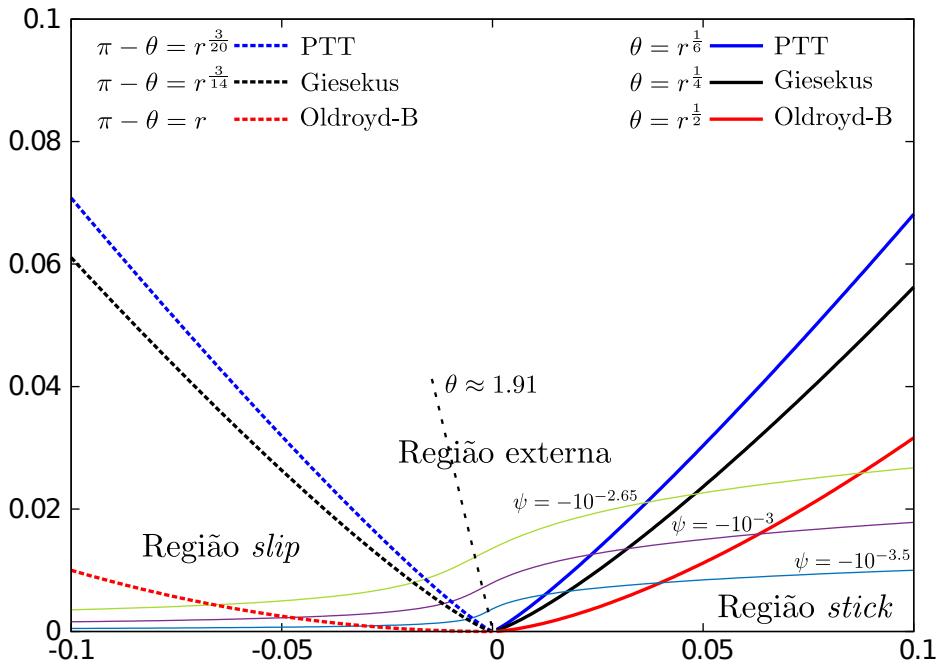
Para a solução numérica das equações (4.1) e (4.2), fixamos um valor para a linha de corrente ψ (4.3) e resolvemos os sistemas de EDO's resultantes. Iniciamos a solução dos sistemas pela superfície *stick*, impondo o comportamento viscométrico obtido pela solução de (3.77), para a formulação Cartesiana, e (3.172), para a formulação natural. Além disso, utilizamos o intervalo de integração para a variável θ como $[0 + tol, \pi - tol]$, com $tol = 10^{-6}$, e para a solução dos sistemas a função ode15s do MATLAB com tolerância 10^{-6} . Para mais detalhes sobre o processo de solução das equações ver Apêndice D.

Os parâmetros usados em todas as simulações foram $\kappa = 0.1$, para os modelos PTT e Giesekus, e $C_0 = -1$. Podemos notar pela função de corrente (4.3) que a distância radial mínima do ponto de singularidade a uma linha de corrente ocorre quando $f'_0(\theta) = 0$, que resulta em $\theta = 2\tan^{-1}\sqrt{2} \approx 1.9107$ ou 109.5° . Este é o mesmo local onde a velocidade radial é nula, conforme equação (4.4).

De modo a nos orientarmos, apresentamos na Figura 7 algumas linhas de corrente passando próximo à singularidade. Plotamos as curvas que definem as camadas limites *stick* e *slip*, equações em (4.9). Podemos notar que o modelo com a menor das camadas limites é o Oldroyd-B. Ao passo que, assim como para o problema da contração 4:1, o

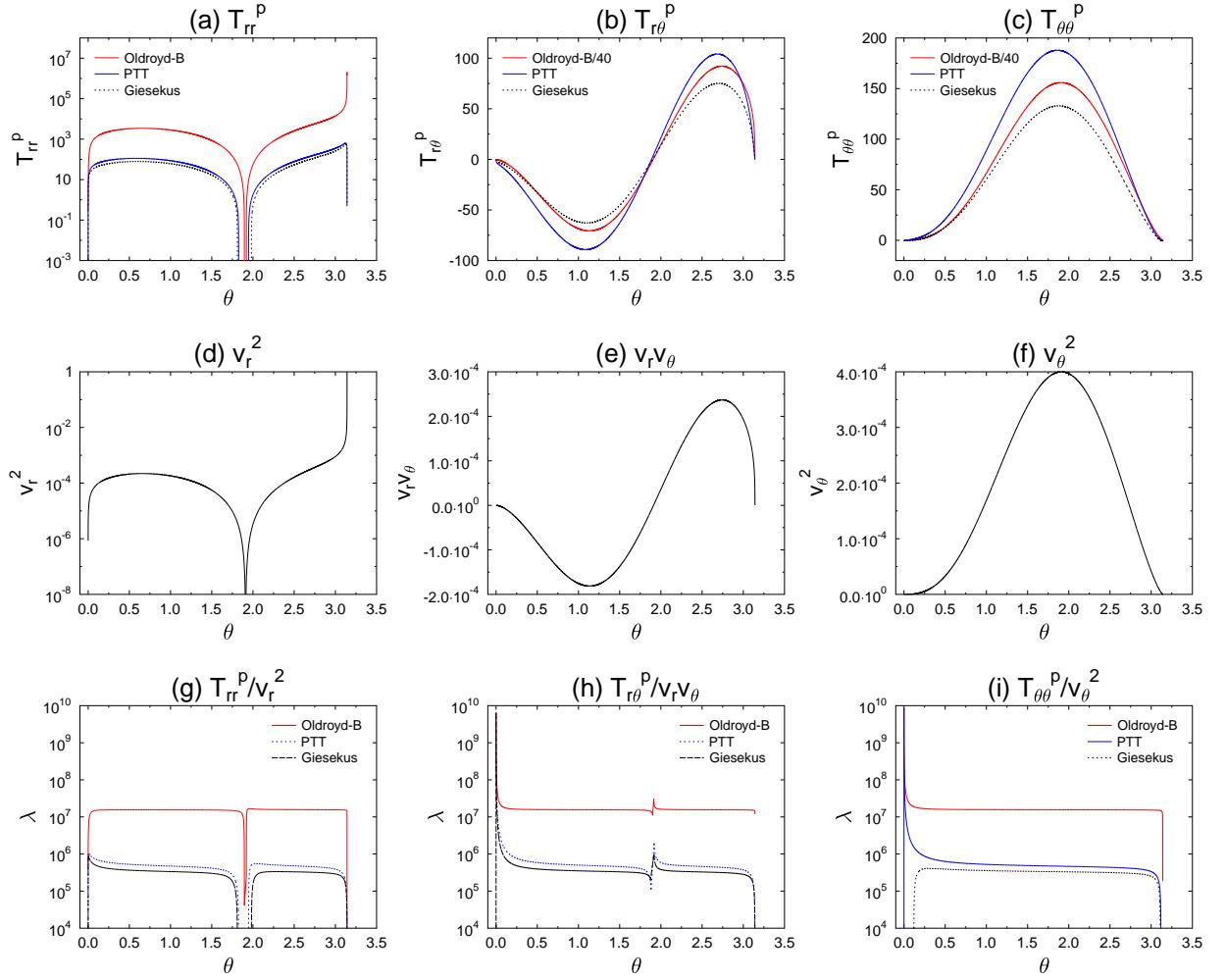
modelo PTT possui a maior camada limite, tanto para a região *stick* como *slip*. Outro detalhe é que o modelo PTT e Giesekus possuem a camada limite da superfície *slip* maior que a camada limite da superfície *stick*. Enquanto que, para o modelo Oldroyd-B ocorre o oposto, isto é, a camada limite da superfície *stick* é maior que a da superfície *slip*.

Figura 7 – Ilustração das espessuras das camadas limites com três linhas de correntes passando pelas três regiões do domínio.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 8 nos mostra os perfis das tensões para os três modelos constitutivos ao longo da linha de corrente $\psi = 10^{-6}$, juntamente com as componentes do produto diádico da velocidade $\mathbf{v}\mathbf{v}^T$ e as estimativas de λ , calculadas como a razão entre as tensões e os produtos das componentes das velocidades. Algo notável é a diferença do comportamento dos perfis de T_{rr}^p para os três modelos constitutivos à medida que a superfície *slip* é aproximada ($\theta \rightarrow \pi$): o modelo Oldroyd-B continua a crescer, seguindo o comportamento de v_r^2 a partir da solução *stretching*, enquanto que os modelos PTT e Giesekus limitam este crescimento. As outras componentes do tensor polimérico também nos mostram um crescimento maior dos seus valores para o modelo Oldroyd-B, de modo que tivemos que reduzir os valores destas tensões cerca de 40 vezes para ser possível colocá-las nos mesmos gráficos dos outros modelos, Figuras 8 (b) e (c). Isto ilustra o fato de o modelo Oldroyd-B nos dar resultados com valores muito altos para o tensor polimérico. Para confirmar os resultados da solução *stretching* (3.58), apresentamos nas Figuras 8 (g)-(i) estimativas de λ para as três componentes do tensor polimérico. Podemos ver que os resultados são praticamente constantes em quase toda parte do domínio, desviando apenas nas regiões *stick* e *slip*. Aparente desvios ocorrem próximos à $\theta \approx 109.5^\circ$, onde a velocidade radial é nula, fazendo com que as estimativas próximas à esta região não sejam confiáveis.

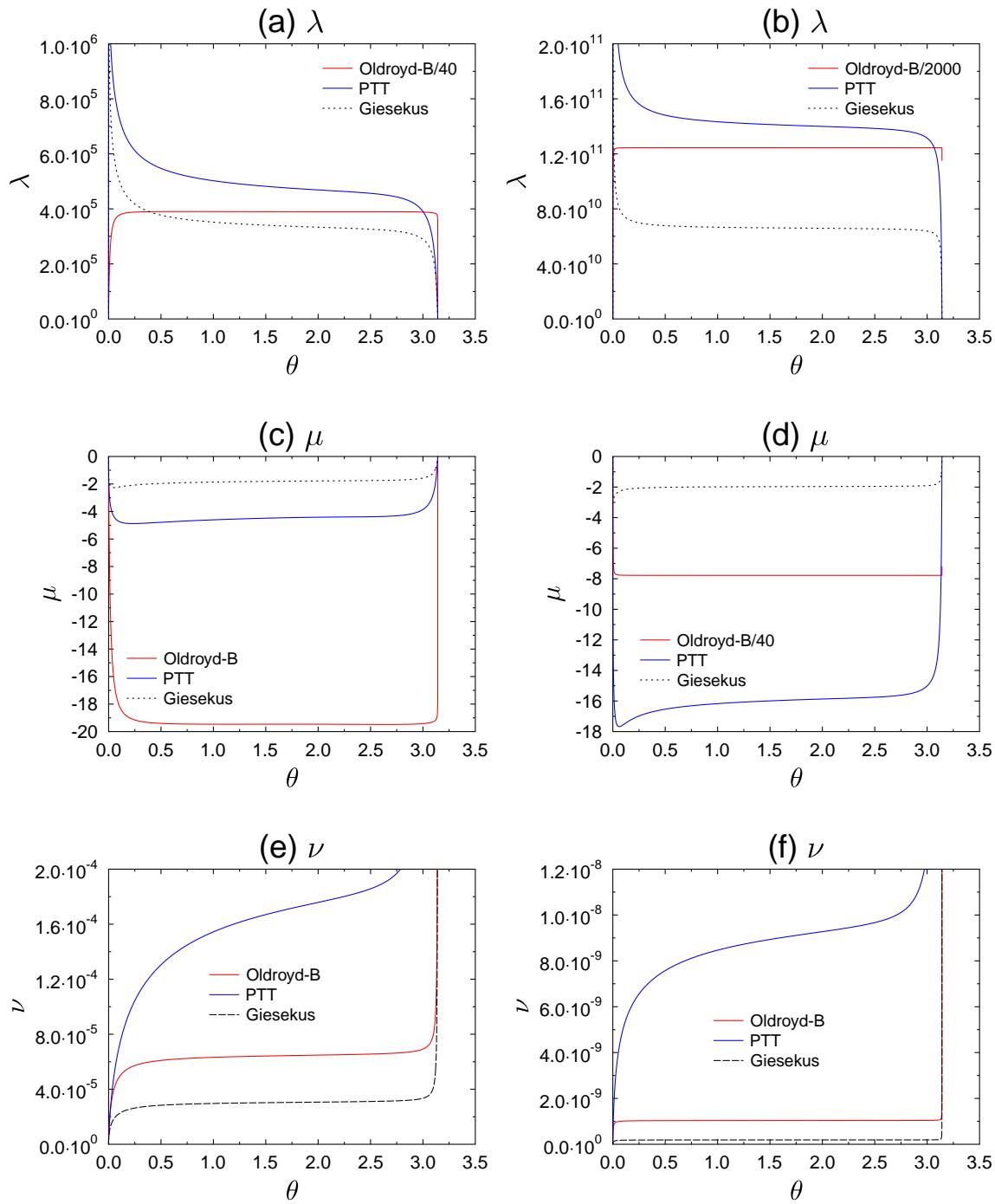
Figura 8 – Componentes do tensor e da velocidade ao longo da linha de corrente $\psi = -10^{-6}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Também apresentamos na Figura 9 a solução numérica para as três variáveis naturais ao longo das linhas de corrente 10^{-6} e 10^{-12} . Os perfis são relativamente constantes na maior parte do domínio e claramente sofrem um desvio ao se aproximar das regiões *stick* e *slip*. Há grande variação nos valores das três variáveis e para os três modelos constitutivos. Sendo λ com valores altos, μ com valores moderados e ν com valores bem baixos. O perfil de ν para o modelo PTT nas Figuras 9 (e) e (v) não é tão próximo de um valor constante como para os demais modelos, porém isto pode ser mais realístico com um valor de κ menor, por exemplo $\kappa = 0.01$ (não mostramos).

A Figura 10 confirma o comportamento assintótico das tensões em (4.7) para cada um dos modelos ao longo da linha $\theta = \frac{\pi}{2}$. Por outro lado, a Figura 11 confirma os expoentes das variáveis naturais (4.8) ao longo da linha $\theta = \frac{\pi}{2}$. A excelente concordância

Figura 9 – Perfil das variáveis naturais ao longo das linhas de corrente $\psi = -10^{-6}$ e $\psi = -10^{-12}$.

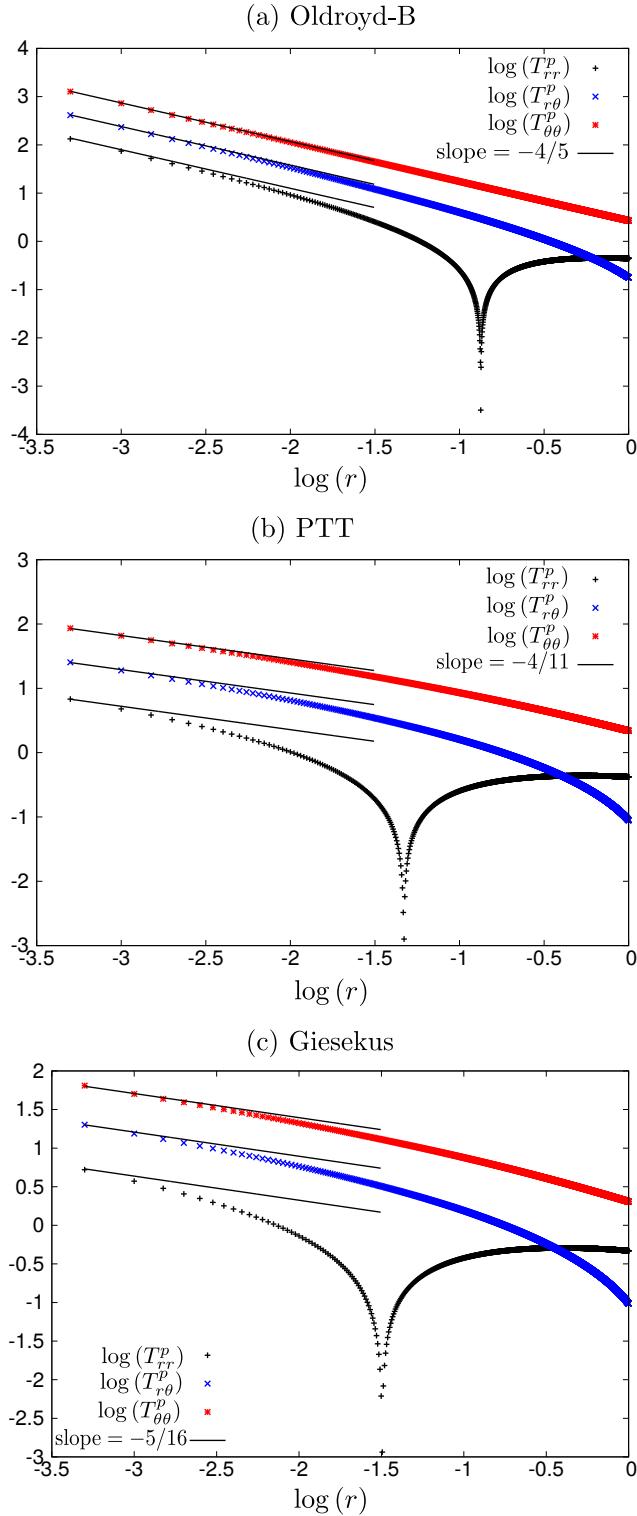


Fonte: Elaborada pelo autor.

com os resultados assintóticos é evidente.

Finalmente, nas Figuras 12 e 13 examinamos o comportamento da tensão normal

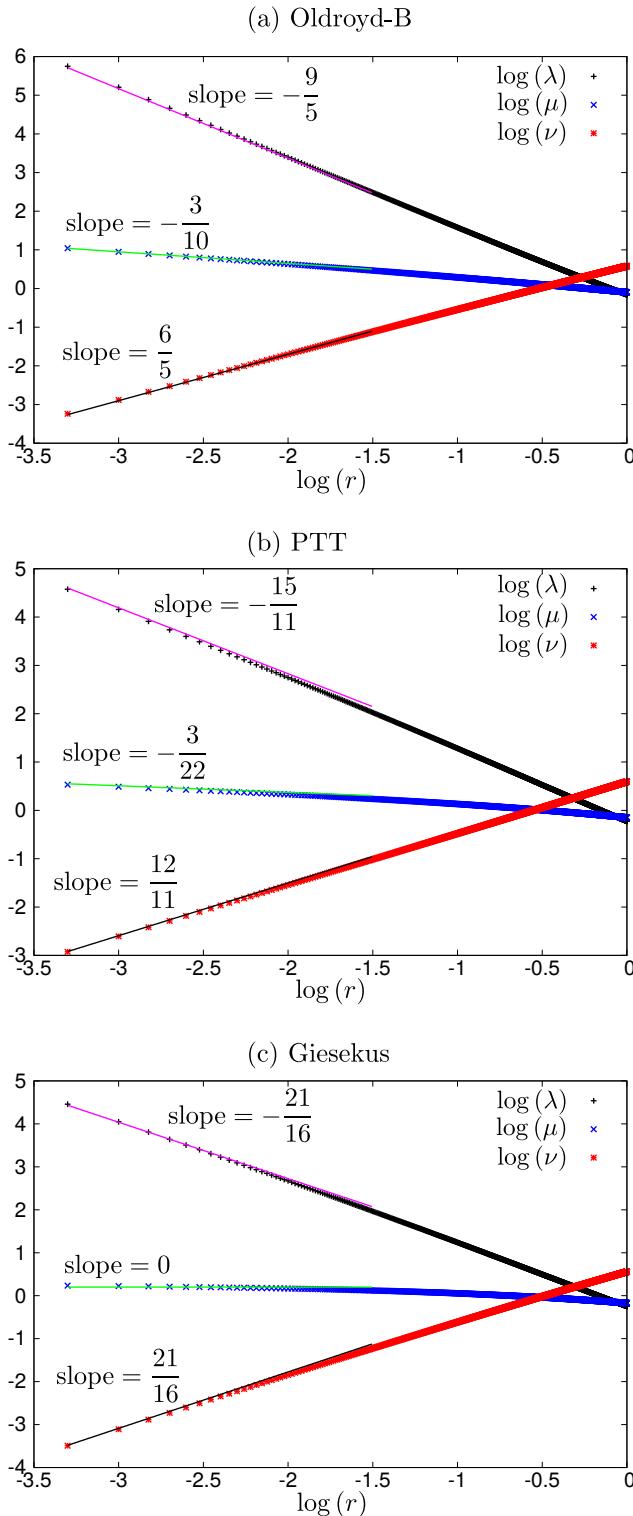
Figura 10 – Verificação do comportamento assintótico (5.5) para os modelos Oldroyd-B, PTT e Giesekus ao longo da linha $\theta = \frac{\pi}{2}$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

radial T_{rr}^p próximo às superfícies *stick* e *slip*. Na Figura 12 a tensão normal radial T_{rr}^p é plotada com a distância radial r ao longo da linha de corrente 10^{-6} . Em todas as Figuras a curva inferior corresponde aos valores da tensão antes da distância radial mínima, isto

Figura 11 – Verificação dos expoentes (5.6) para as variáveis do tensor polimérico na base natural para os modelos Oldroyd-B, PTT e Giesekus. As variáveis naturais foram plotadas ao longo da linha $\theta = \frac{\pi}{2}$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

é, $\theta \leq 1.907 \approx 109.5^\circ$ e próximo à região *stick*, enquanto que a curva superior corresponde aos valores da tensão depois da distância radial mínima, com $\theta \geq 1.907 \approx 109.5^\circ$

e corresponde à região próxima a superfície *slip*. Plotamos para cada modelo a solução *stretching*, juntamente com o comportamento viscométrico da camada limite *stick* e o comportamento da camada limite *slip*. As linhas verticais nos mostram onde iniciam e terminam as linhas que delimitam as camadas limites, equações em (4.9). Em todos os modelos constitutivos, obtivemos boas estimativas de onde a solução *stretching* começa seu domínio quando deixa a região da superfície *stick*, com a transição entre o comportamento viscométrico e *stretching* bem evidente. Também notamos a boa estimativa para quando o comportamento *stretching* já não se aplica mais, conforme a distância radial se aproxima da superfície *slip* para os modelos PTT e Giesekus. Notavelmente, o comportamento dos modelos PTT e Giesekus na região *slip* diferem bastante do comportamento produzido pelo modelo Oldroyd-B. Também, notamos um crescimento alto de T_{rr}^P para o modelo Oldroyd-B, Figura 12 (a), consistente com o crescimento da componente da solução *stretching*. Para os modelos PTT e Giesekus, a região *slip* nos mostra a transição do comportamento (B.87), a inclinação da linha verde sendo igual à $-1/2$. A Figura 13 nos mostra as mesmas informações já mencionadas, mas ao longo da linha de corrente 10^{-12} . Porém, com uma taxa de cisalhamento maior, o comportamento viscométrico tem uma melhor aproximação dentro da região *stick*. Novamente, vemos claramente o crescimento ilimitado da tensão para o modelo Oldroyd-B e limitado para os modelos PTT e Giesekus.

4.2 Verificação em um escoamento Newtoniano

Nesta Seção, verificamos a implementação do código para o problema *stick-slip*. Para isto simulamos um escoamento puramente Newtoniano, isto é, resolvemos as equações (2.20) e (2.14) de maneira que o efeito da contribuição não-Newtoniana é negligenciado, e comparamos os perfis da componente u da velocidade e pressão p com resultados da literatura.

Os principais efeitos do escoamento *stick-slip* ocorrem ao redor da singularidade (*stick-slip transition point*). Assim, adotamos refinamentos de malha nas regiões próximas à singularidade, como ilustrado na Figura 14.

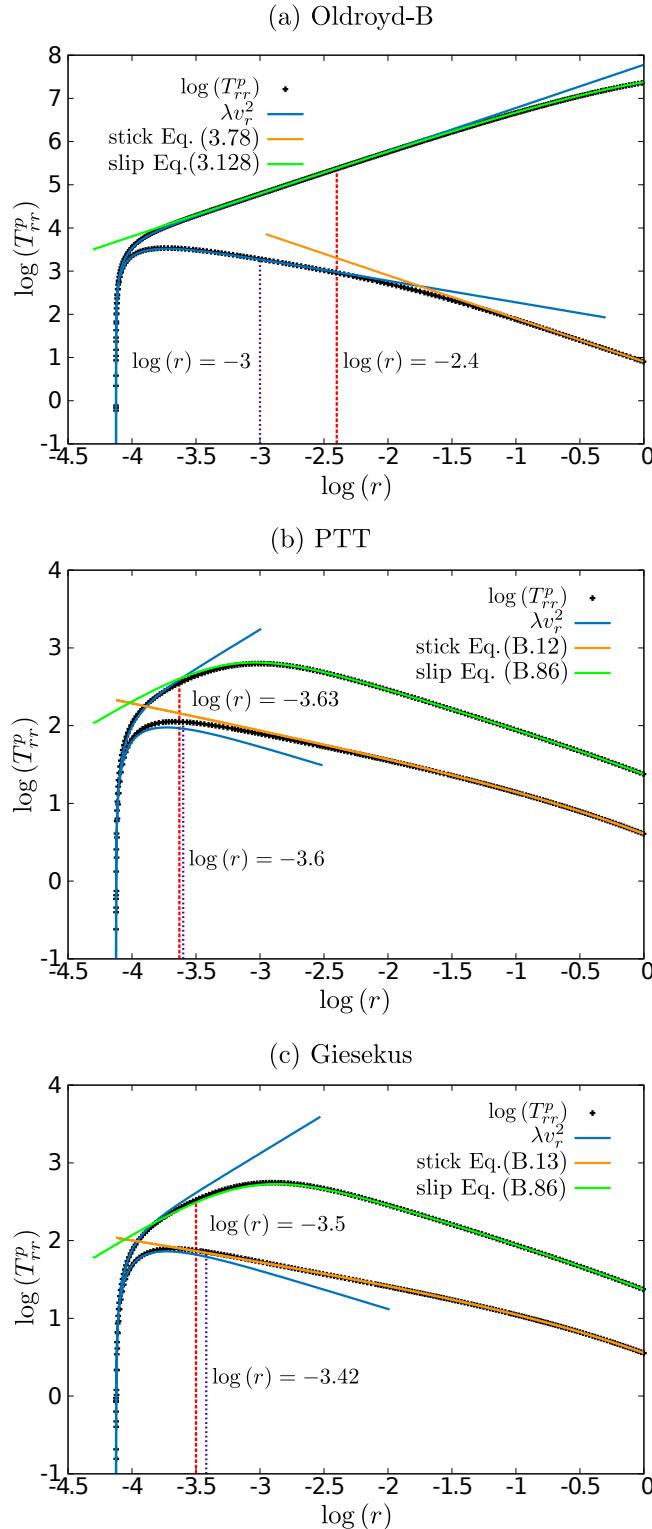
Os parâmetros usados nas simulações foram: $Re = 0.01$ e malha M3, conforme Tabela 1.

Tabela 1 – Malhas usadas nas simulações numéricas.

Malha	Δx_{min}	Δy_{min}
M1	5.0×10^{-3}	5.0×10^{-3}
M2	5.0×10^{-4}	5.0×10^{-4}
M3	5.0×10^{-5}	5.0×10^{-5}

Fonte: Elaborada pelo autor.

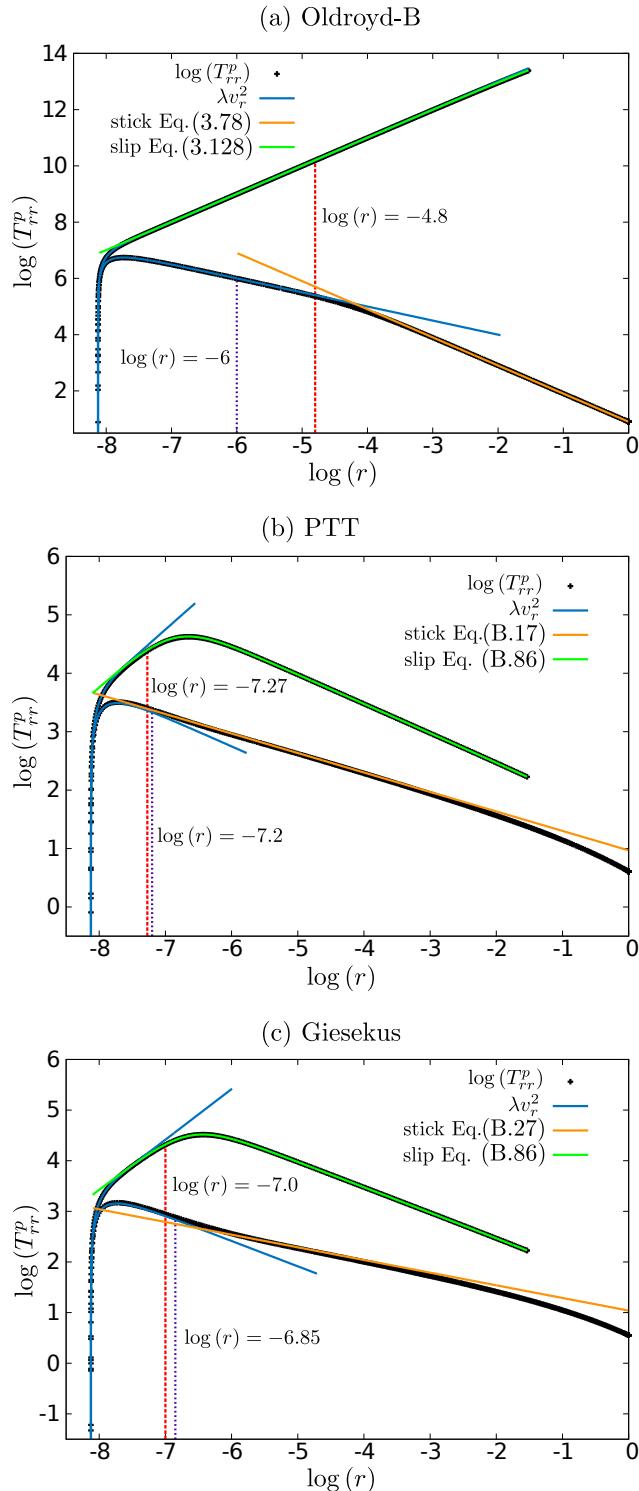
Figura 12 – Comportamento de T_{rr}^p ao longo da linha de corrente $\psi = 10^{-6}$ com relação à distância radial r .



Fonte: Elaborada pelo autor.

A componente u da velocidade ao longo da superfície *slip* para um escoamento Newtoniano, considerando a geometria ilustrada na Figura 15, é dada pela expansão

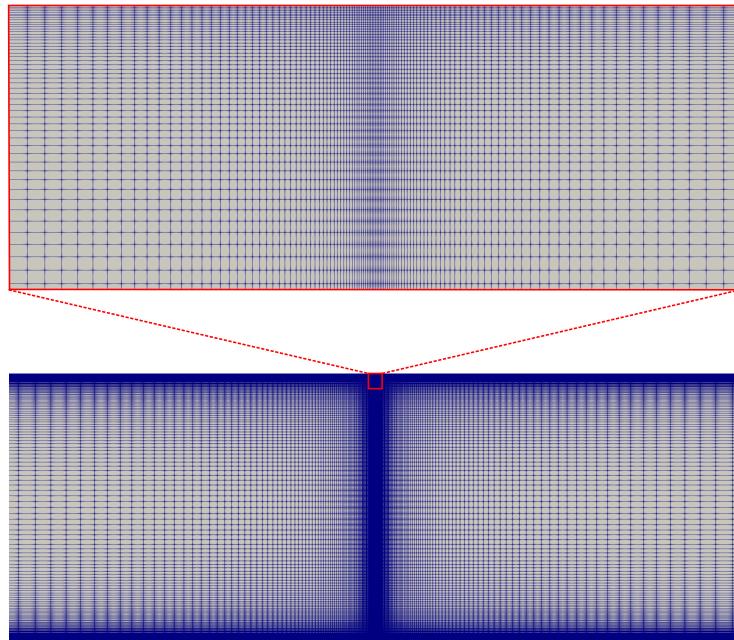
Figura 13 – Comportamento de T_{rr}^p ao longo da linha de corrente $\psi = 10^{-12}$ com relação à distância radial r .



Fonte: Elaborada pelo autor.

(3.37). Assim, o cálculo dos coeficientes a_1 , a_3 e a_5 , em (3.37), é dado por meio da solução de um sistema linear, construído a partir de valores numéricos de u calculados em diferentes valores de x sobre a superfície *slip* $y = 1$. Os valores de x escolhidos devem

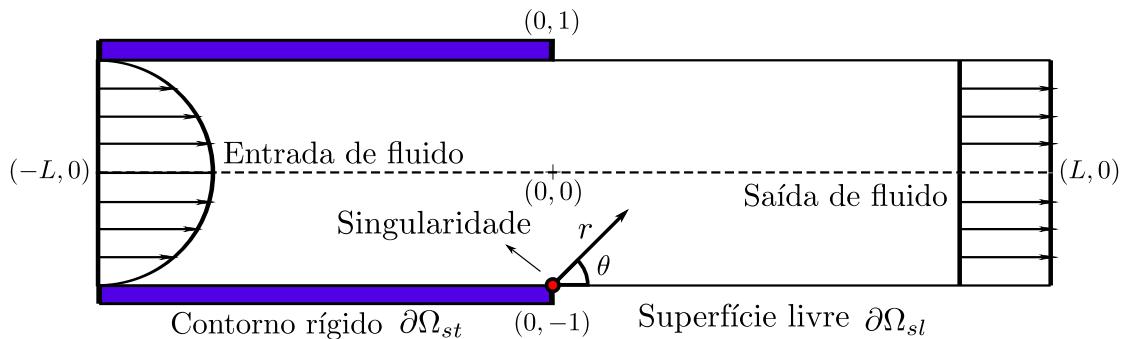
Figura 14 – Visualização dos detalhes das malhas não uniformes para o problema *stick-slip*.



Fonte: Elaborada pelo autor.

estar dentro do intervalo $[0, 1]$. Os valores selecionados para a construção do sistema linear são apresentados na Tabela 2. Conforme podemos observar, os valores de x foram selecionados de modo a termos uma distância considerável entre os pontos. Isto foi feito a fim de evitarmos problemas com a matriz dos coeficientes, como o de não ser invertível.

Figura 15 – Geometria do problema *stick-slip*.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Tabela 3, apresentamos os coeficientes calculados pelos valores da Tabela 2 e os comparamos com os resultados em (KARAPETSAS; TSAMOPOULOS, 2009; TANNER; HUANG, 1993; SALAMON *et al.*, 1995; ELLIOTIS; GEORGIOU; XENOPHONTOS, 2005). Podemos observar que os resultados obtidos neste trabalho estão bem próximos

Tabela 2 – Conjunto de valores para x e u usados no cálculo dos coeficientes $a_{\frac{1}{2}}$, $a_{\frac{3}{2}}$ e $a_{\frac{5}{2}}$.

	Valores		
x	0.102512	0.499067	0.888449
u	0.4251695	0.8036053	0.9261778

Fonte: Elaborada pelo autor.

dos resultados já publicados na literatura. Em particular, nossos resultados estão três casas decimais próximos aos resultados apresentados em (KARAPETSAS; TSAMOPOULOS, 2009). Vale destacar que, o único resultado analítico existente na literatura é para o coeficiente $a_{\frac{1}{2}}$, apresentado em (TANNER; HUANG, 1993), que também se encontra próximo ao obtido neste trabalho.

Tabela 3 – Coeficientes da expansão (3.37) próximos a singularidade para um escoamento Newtoniano do problema *stick-slip*.

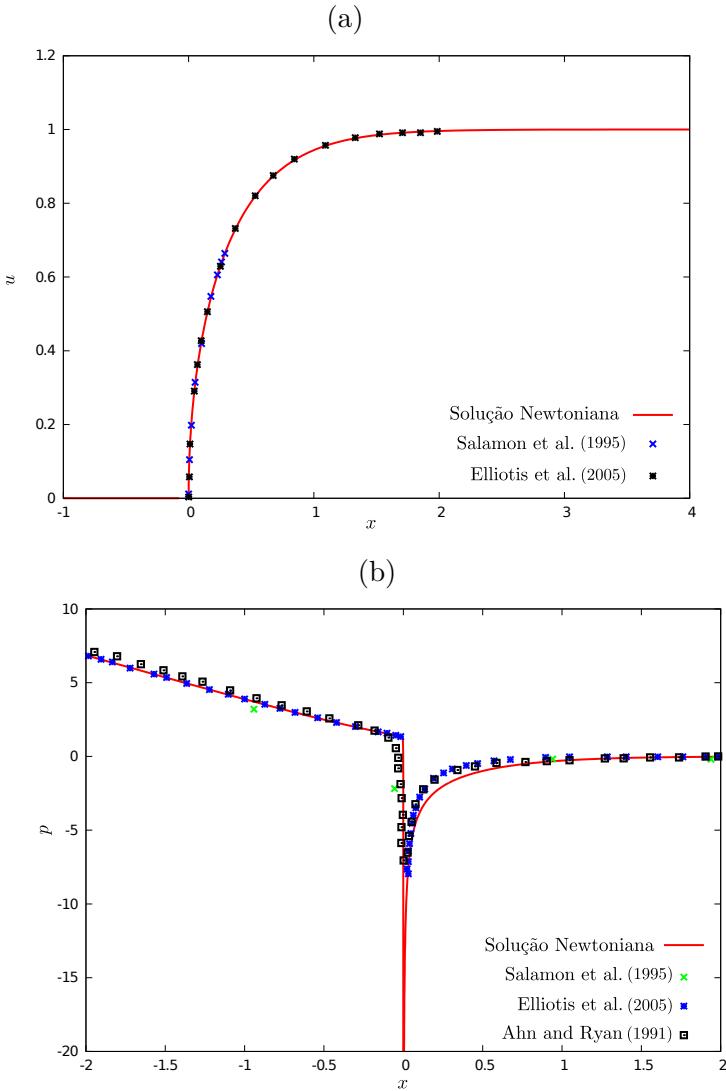
Publicações	$a_{1/2}$	$a_{3/2}$	$a_{5/2}$
Solução Newtoniana (M3, $h_{min} = 5.0e - 05$)	0.69125	0.27154	0.05232
Karapetsas e Tsamopoulos (2009)(M11, $h_{min} = 7.0e - 06$)	0.69157	0.27197	0.05247
Tanner e Huang (1993)(Sol. analítica)	0.69099	–	–
Salamon <i>et al.</i> (1995)	0.69160	0.27183	0.05232
Elliottis, Georgiou e Xenophontos (2005)	0.69099	0.26450	0.03037

Fonte: Elaborada pelo autor.

Apresentamos nas Figuras 16 (a) e (b), respectivamente, os perfis de u e p ao longo da superfície livre $y = 1$. Em adição, também apresentamos os perfis de u e p ao longo de $y = 0$, Figuras 17 (a) e (b), respectivamente. Podemos notar que, nossos resultados concordam com os apresentados na literatura (SALAMON *et al.*, 1995; ELLIOTIS; GEORGIOU; XENOPHONTOS, 2005; NGAMARAMVARANGGUL; WEBSTER, 2000; AHN; RYAN, 1991; RICHARDSON, 1970). Em particular, notamos uma melhor concordância com os resultados em (ELLIOTIS; GEORGIOU; XENOPHONTOS, 2005). Esta observação fica evidente pela Figura 17 (a), para o perfil da velocidade u ao longo do centro do canal.

Por fim, apresentamos o perfil de $\log(-p)$ ao longo da superfície livre, Figura 18. Podemos notar que nossos resultados estão em concordância com os apresentados por Karapetsas e Tsamopoulos (2009) e Salamon *et al.* (1995). Como mencionado por Karapetsas e Tsamopoulos (2009), o comportamento de $\log(-p)$ com relação à x gera uma inclinação de aproximadamente -0.5 (ver também os trabalhos de Evans (EVANS, 2013; EVANS, 2015; J. D. Evans; I. L. Palhares Junior; C. M. Oishi, 2017)).

Figura 16 – Comparação dos resultados ao longo da linha horizontal $y = 1$ para: (a) componente u da velocidade e (b) pressão p .

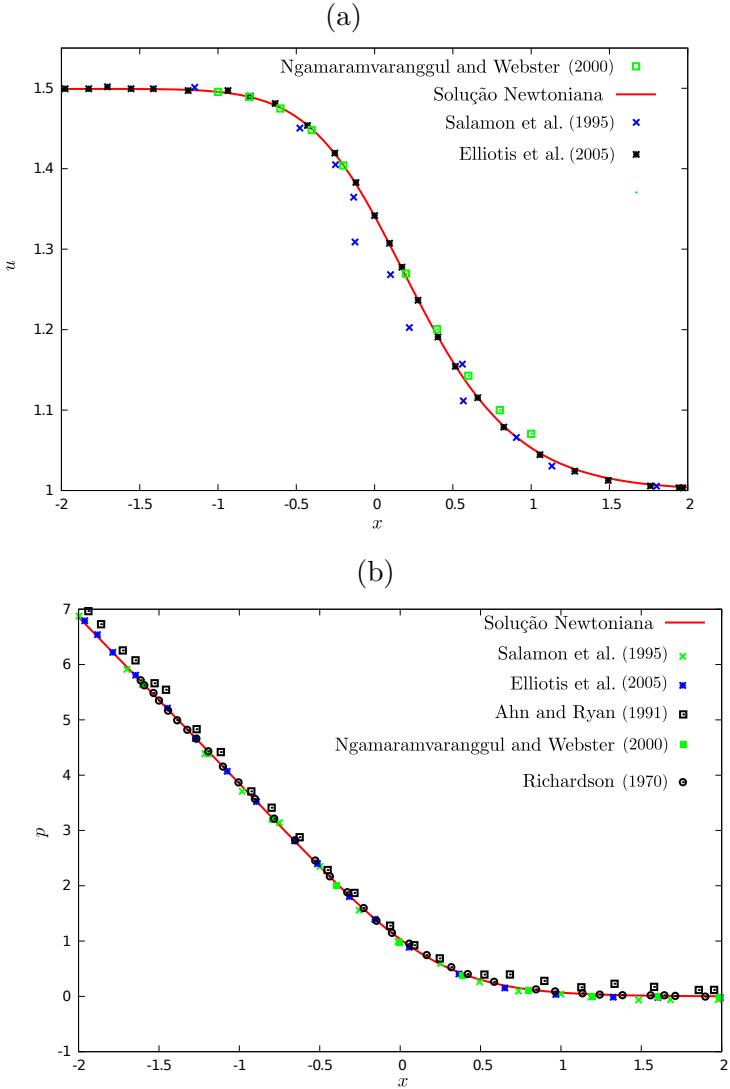


Fonte: Elaborada pelo autor.

4.3 Resultados da convergência numérica

Nesta Seção, demonstramos a capacidade do esquema numérico de resolver o problema *stick-slip* considerando o sistema completo de equações governantes para os modelos PTT e Giesekus usando as formulações CSF e NSF. Destacamos que, a simulação do problema *stick-slip* transiente para os modelos PTT e Giesekus não foi, até onde sabemos, apresentada na literatura. Desta forma, primeiramente, estudamos a convergência temporal do esquema numérico, mediante a análise do resíduo local em um ponto próximo à singularidade. Posteriormente, analisamos a convergência espacial através do estudo de refinamento de malhas considerando os perfis da componente u da velocidade, pressão p e da primeira diferença normal de tensões N_1 ao longo da linha horizontal $y = 1$. Em todas as simulações nesta Seção usamos $\text{Re} = 0.01$, $\text{Wi} = 1$, $\kappa = 0.1$ e $\epsilon = 1/2$.

Figura 17 – Comparação dos resultados ao longo da linha horizontal $y = 0$ para: (a) componente u da velocidade e (b) pressão p .



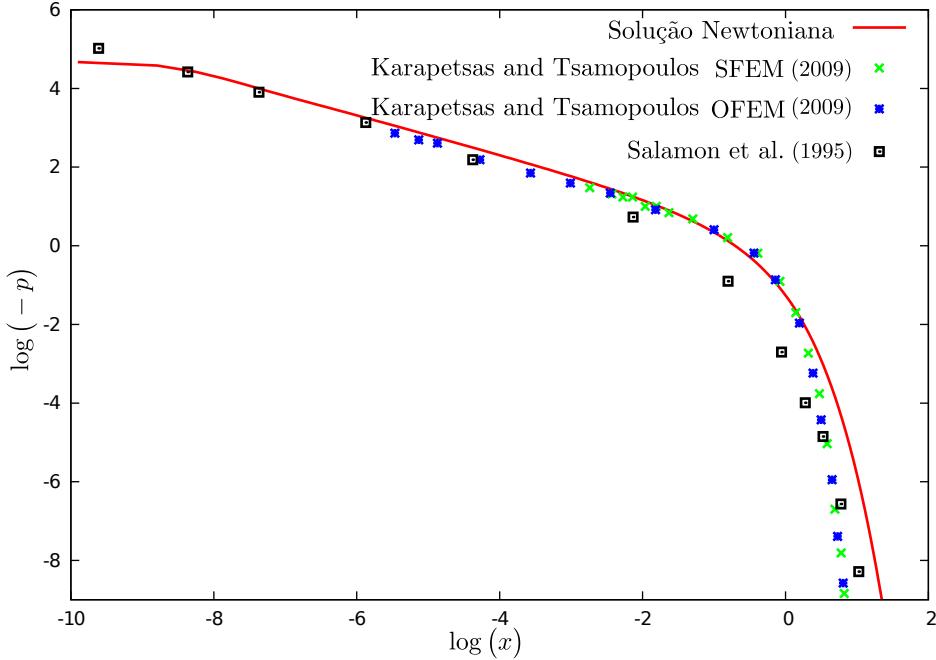
Fonte: Elaborada pelo autor.

4.3.1 Estudo numérico da convergência temporal

Nesta subseção confirmamos a convergência temporal do esquema numérico à medida que reduzimos o passo temporal Δt . Uma vez que um dos principais objetivos deste trabalho está relacionado ao comportamento das variáveis ao redor da singularidade, o estudo da convergência temporal é feito pela análise do resíduo local em função do tempo. Em particular, os resíduos locais são tomados em um ponto de controle P localizado na célula mais próxima à singularidade (veja célula A na Figura 46 a)).

Os resíduos locais para a velocidade na direção x , componente 11 do tensor poli-

Figura 18 – Comparação dos resultados para $\log(-p)$, com relação a $\log(x)$ ao longo da linha horizontal $y = 1$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

mérico e componente $\hat{\lambda}$ das variáveis naturais são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} res(u)|_P &= \frac{u^{(n+1)} - u^{(n)}}{\delta t} \Big|_P + \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_P^{(n+1)} + \frac{1}{Re} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_P^{(n+1)} - \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \Big|_P^{(n+1)} \\ &- \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial T_{11}}{\partial x} - \frac{\partial T_{12}}{\partial y} \right) \Big|_P^{(n+1)} \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} res(T_{11})|_P &= \frac{T_{11}^{(n+1)} - T_{11}^{(n)}}{\delta t} \Big|_P + \left(u \frac{\partial T_{11}}{\partial x} + v \frac{\partial T_{11}}{\partial y} \right) \Big|_P^{(n+1)} - \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} T_{11} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} T_{12} \right) \Big|_P^{(n+1)} \\ &+ \frac{\kappa}{(1-\beta)} f_{11} \Big|_P^{(n+1)} - \frac{2}{Wi} (1-\beta) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_P^{(n+1)}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

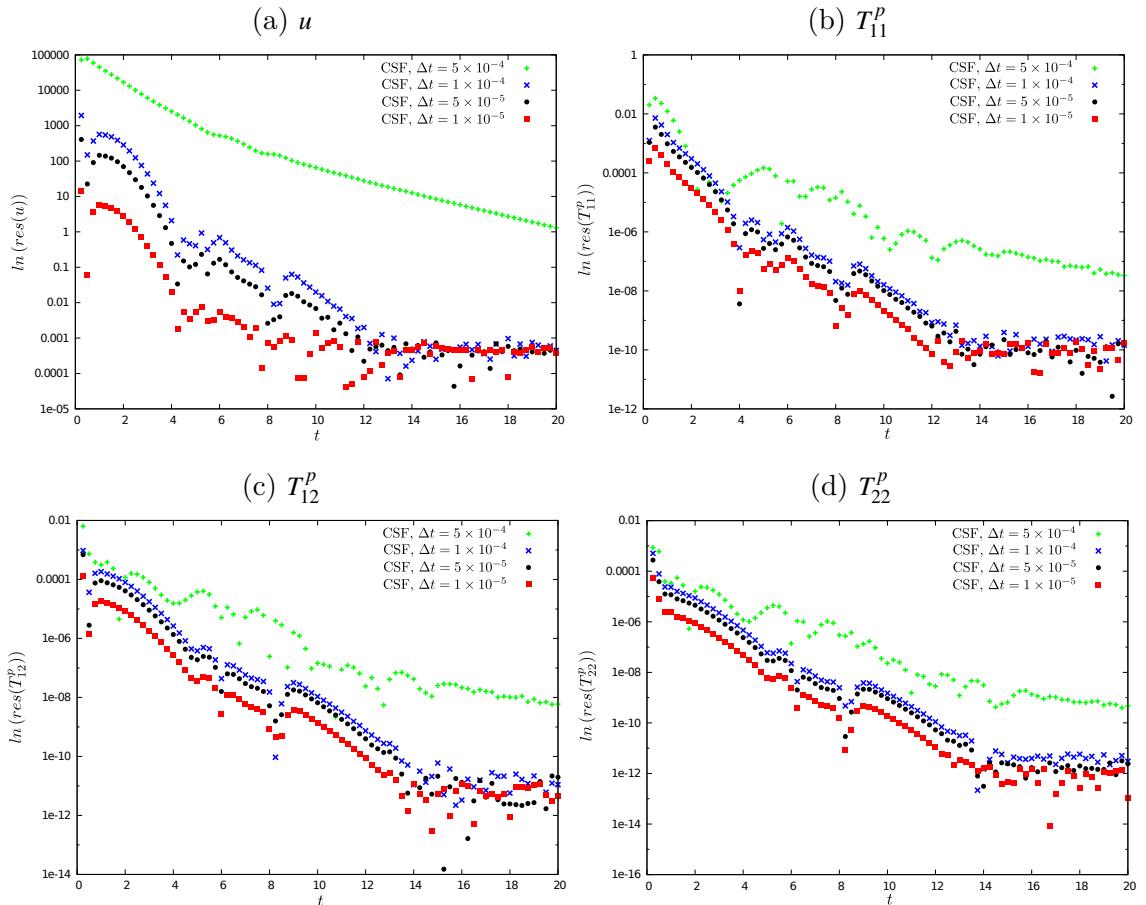
e

$$\begin{aligned} res(\hat{\lambda})|_P &= \frac{\hat{\lambda}^{(n+1)} - \hat{\lambda}^{(n)}}{\delta t} \Big|_P + \left(\frac{2\hat{\mu}}{|\mathbf{v}|^2} \left(v \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial v}{\partial t} \right) \right) \Big|_P^{(n+1)} + \left(|\mathbf{v}|^2 (\mathbf{v} \cdot \nabla) \left(\frac{\hat{\lambda}}{|\mathbf{v}|^2} \right) \right) \Big|_P^{(n+1)} \\ &+ (2\hat{\mu} |\mathbf{v}|^2 \nabla \cdot \mathbf{w}) \Big|_P^{(n+1)} + \left(\frac{1}{Wi} (\hat{\lambda} - 1) + \frac{\kappa}{Wi} g_{\hat{\lambda}} \right) \Big|_P^{(n+1)}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde f_{11} é calculado a partir da equação (2.27), enquanto que $g_{\hat{\lambda}}$ é dado por (2.51). Os resíduos locais para as outras componentes do tensor polimérico e das variáveis naturais são construídos de maneira similar. Em particular, a análise do resíduo local é feita apenas para o modelo PTT (os resultados para o modelo Giesekus são similares) na malha grossa M1 variando o passo temporal como $\Delta t = 5 \times 10^{-4}, 10^{-4}, 5 \times 10^{-5}, 10^{-5}$.

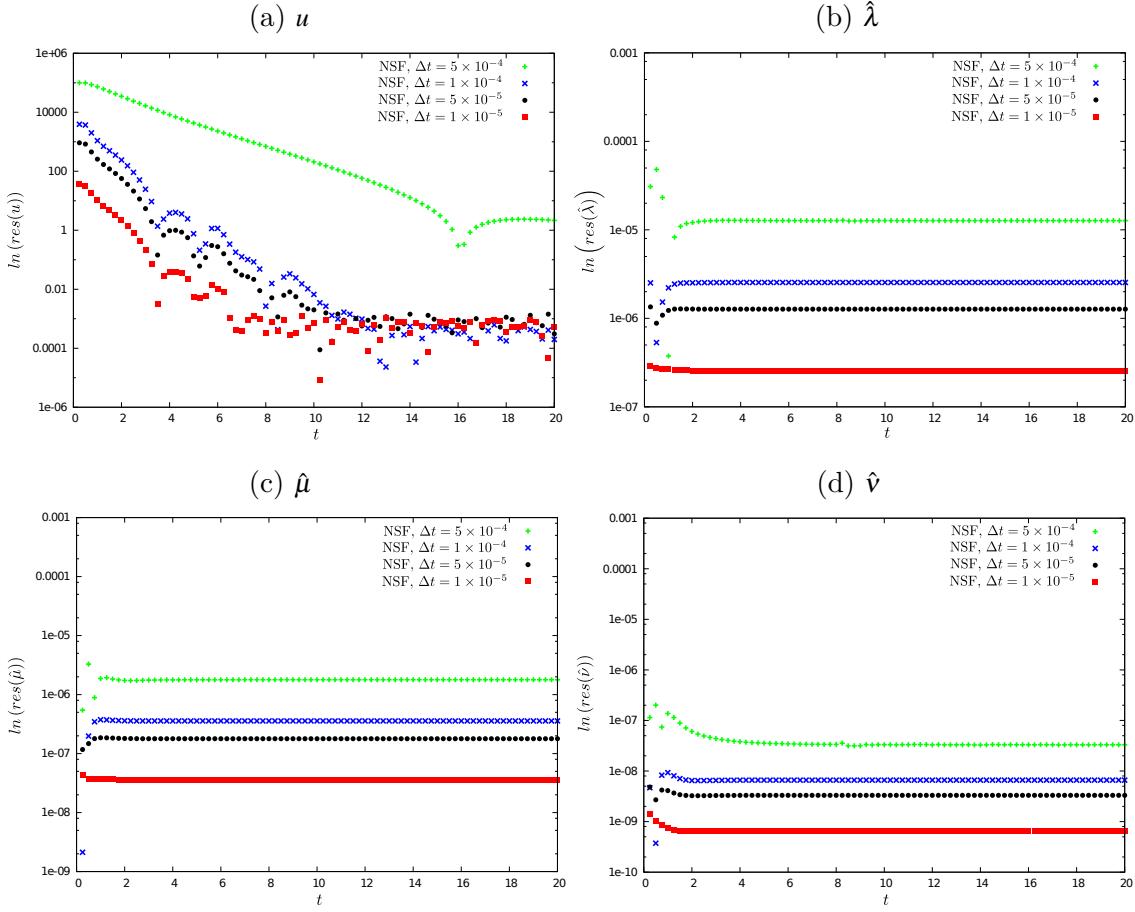
As Figuras 19 e 20 apresentam a variação temporal dos resíduos locais na escala logarítmica para as formulações CSF e NSF, respectivamente. Os resultados confirmam a convergência temporal, para ambas as formulações, para valores de $\Delta t = 10^{-4}$ ou menores. Em contrapartida, os valores dos resíduos para a componente u da velocidade com passo temporal $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$ são altos, quando comparados com os demais passos temporais. De fato, o uso de passos temporais maiores que $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$ leva à descontinuidade da simulação numérica, independente da formulação adotada. Portanto, de modo a capturar corretamente o comportamento singular das tensões, neste trabalho adotamos passos temporais pequenos: $\Delta t = 10^{-5}$ para a malha M2 e $\Delta t = 5 \times 10^{-6}$ para a M3. Como consequência da restrição CFL, o tempo de CPU pode aumentar consideravelmente para o uso de malhas muito finas, como as usadas em (KARAPETSAS; TSAMOPOULOS, 2009) para o caso estacionário. Notavelmente, os gráficos dos resíduos ilustram melhorias na taxa de convergência das variáveis naturais, quando comparadas com as variáveis Cartesianas, enfatizando que as formulações CSF e NSF, embora relacionadas por (2.33), se comportam de maneiras diferentes.

Figura 19 – Variação temporal do resíduo local da formulação CSF próximo à singularidade para o modelo PTT com $\beta = 1/2$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 20 – Variação temporal do resíduo local da formulação NSF próximo à singularidade para o modelo PTT com $\beta = 1/2$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.3.2 Investigaçāo numérica dos perfis

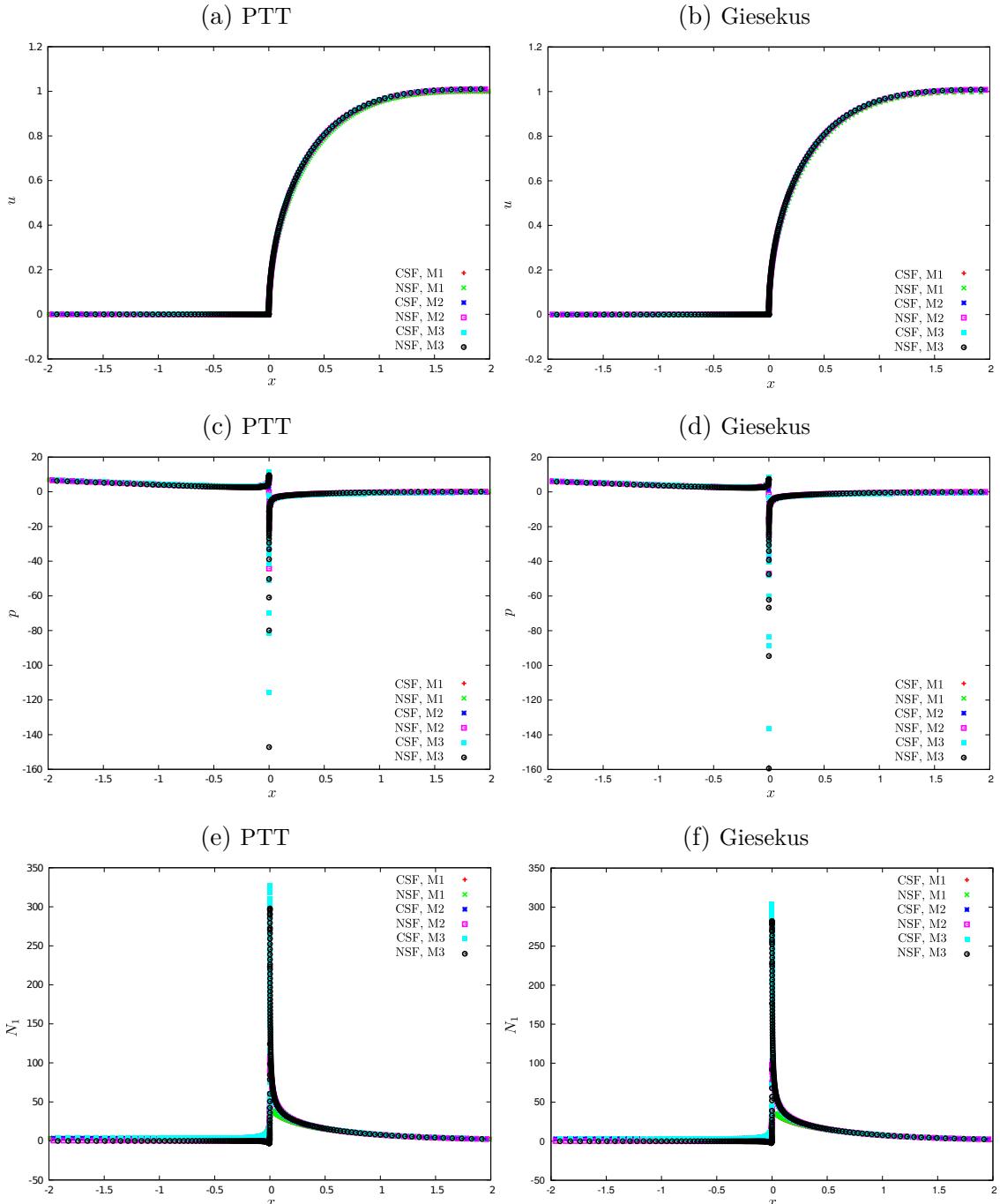
Para este estudo, analisamos os perfis das propriedades ao longo da linha horizontal $y = 1$, sobre as superfícies *stick* e *slip*, contendo o ponto singular. As malhas utilizadas neste estudo estão descritas na Tabela 1.

Os resultados para a componente u da velocidade ao longo da linha horizontal $y = 1$ são apresentados nas Figuras 21 (a) e (b) para modelos PTT e Giesekus, respectivamente. Essas Figuras ilustram a convergência numérica da solução com ambas as formulações e modelos constitutivos. Em particular, para a componente u da velocidade em $y = 1$, não observamos diferenças significativas entre os resultados das formulações CSF e NSF.

A presença do ponto singular em $y = 1$ é mais evidente para o perfil da pressão p e da primeira diferença de tensões normais $N_1 = T_{11}^p - T_{22}^p$, como pode ser observado nas Figuras 21 (c) e (d) e Figuras 21 (e) e (f), respectivamente. A respeito dos perfis do campo de pressão em $y = 1$, podemos observar que próximo ao ponto singular a pressão mínima da formulação NSF é significativamente menor que para a CSF. As Figuras 21 (e) e (f) nos dão

a distribuição de N_1 ao longo de $y = 1$. Longe do ponto singular, os resultados confirmam a convergência numérica para ambas as formulações e modelos constitutivos. Entretanto, notamos que próximo ao ponto singular a primeira diferença de tensões normais N_1 não atinge a convergência numérica devido ao alto crescimento das tensões nesta região com o refinamento de malha. Resultados similares também foram observados em (BAAIJENS, 1994; KARAPETSAS; TSAMOPOULOS, 2009) para o modelo PTT com $\beta = 0$.

Figura 21 – Perfis de u , p e N_1 ao longo da linha horizontal $y = 1$ para os modelos PTT (coluna à esquerda) e Giesekus (coluna à direita).



Fonte: Elaborada pelo autor.

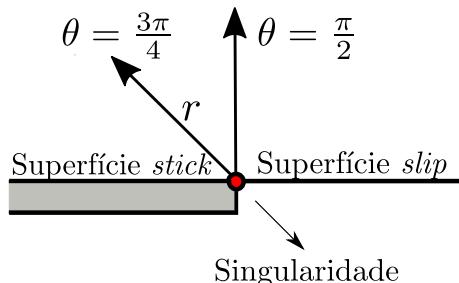
4.4 Resultados das singularidades de tensão

Nesta Seção, inicialmente verificamos as formulações para $\beta = 1/2$ comparando os resultados numéricos com os assintóticos e, posteriormente, fazemos uma investigação numérica das camadas limites para o problema *stick-slip*. Finalmente, exploramos os resultados para baixos valores da viscosidade do solvente.

4.4.1 Comparação numérica com os resultados assintóticos

A partir de agora, comparamos os resultados numéricos com os assintóticos apresentados em (J. D. Evans; I. L. Palhares Junior; C. M. Oishi, 2017). Os resultados assintóticos mostram que o tensor do solvente deve dominar sobre o tensor do polímero próximo à singularidade, o que sugere um campo de velocidade predominantemente Newtoniano. Os resultados assintóticos em (4.7) e (4.8) são válidos para todo ângulo θ , com exceção de valores muito próximos à 0 ou π , onde temos a presença das camadas limites *slip* e *stick*, respectivamente.

Figura 22 – Ilustração da seleção dos ângulos utilizados no estudo do comportamento assintótico próximo à singularidade.

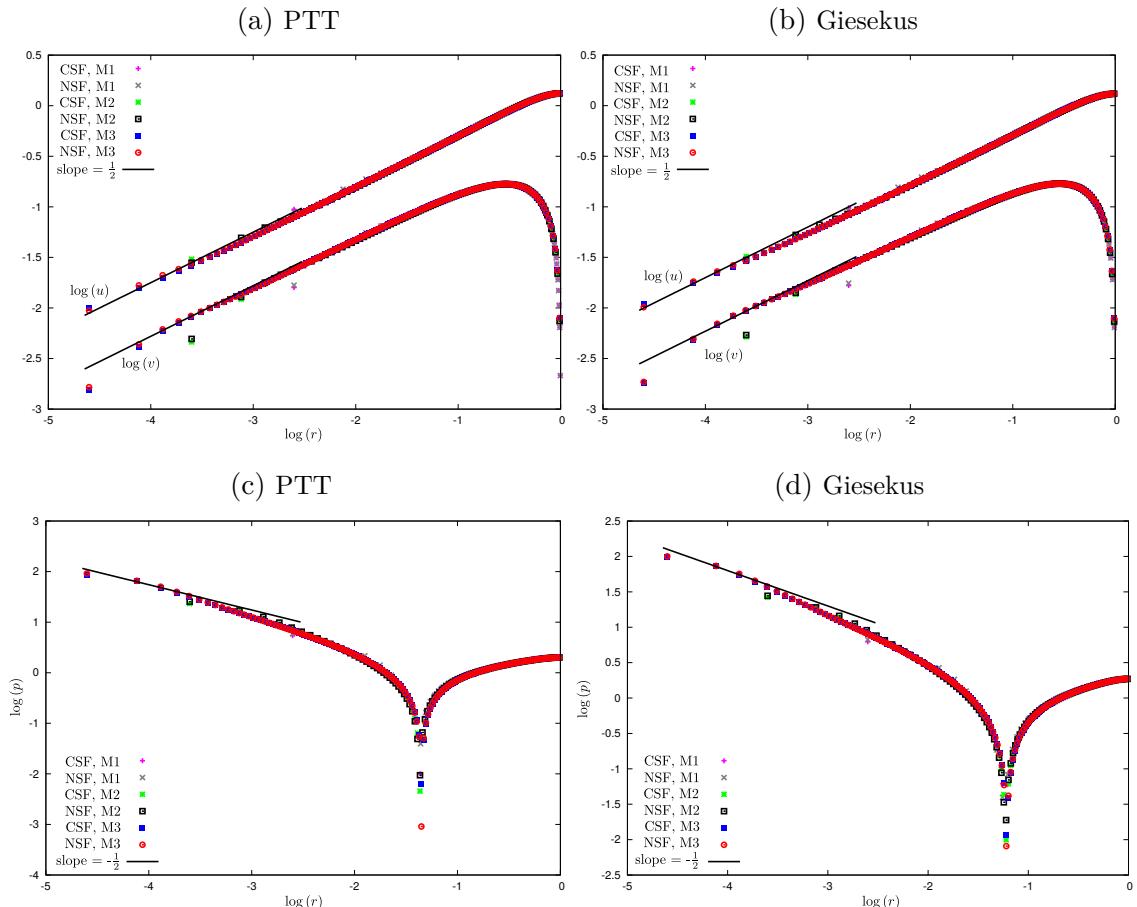


Fonte: Elaborada pelo autor.

Analisamos os resultados numéricos das variáveis ao longo dos raios $\theta = \pi/2$, Figuras 23–24, e $\theta = 3\pi/4$, Figuras 25–26, a partir do ponto singular. Estes ângulos estão ilustrados na Figura 22. A Figura 23 apresenta a verificação do comportamento singular das componentes da velocidade e pressão, enquanto que as Figuras 24 (a) e (b) mostram o comportamento das componentes do tensor polimérico na base Cartesiana. Também incluímos os resultados das variáveis naturais nas Figuras 24 (c) e (d). De acordo com a Figura 23, confirmamos que as formulações CSF e NSF produzem resultados similares, capturando o comportamento assintótico esperado para os campos de velocidade e pressão. Entretanto, para as componentes do tensor polimérico apresentadas nas Figuras 24 (a) e (b) é evidente que as malhas M1 e M2 são muito grossas para capturar corretamente o comportamento assintótico, para ambos os fluidos. Em particular, a formulação CSF tem dificuldades para capturar o comportamento assintótico da componente T_{22}^p , que claramente precisa de uma malha ainda mais fina e aparentemente converge mais lentamente

para o seu comportamento assintótico do que as outras duas componentes do tensor. Em contraste com a formulação CSF, como apresentado nas Figuras 24 (c) e (d), a formulação NSF produz resultados em concordância com (4.8), capturando de modo acurado o comportamento teórico. Portanto, ambas as formulações capturam o comportamento requerido nas malhas M2 e M3, mas claramente com taxas diferentes de convergência para cada uma das componentes. Vale destacar que, a formulação NSF consegue capturar o comportamento assintótico mesmo na malha mais grossa M1. Os resultados observados para o raio $\theta = 3\pi/4$ são semelhantes aos resultados com $\theta = \pi/2$, conforme Figuras 25–26. Os resultados enfatizam a necessidade de malhas ainda mais finas para que a formulação CSF capture o comportamento assintótico correto, contrastando com a formulação NSF. Vale ressaltar que, os resultados das componentes do tensor polimérico calculadas via formulação NSF, mediante equações em (2.33), não apresentam melhorias significativas, contrastando com o problema da contração (veja, por exemplo Evans e Oishi (EVANS; OISHI, 2017)).

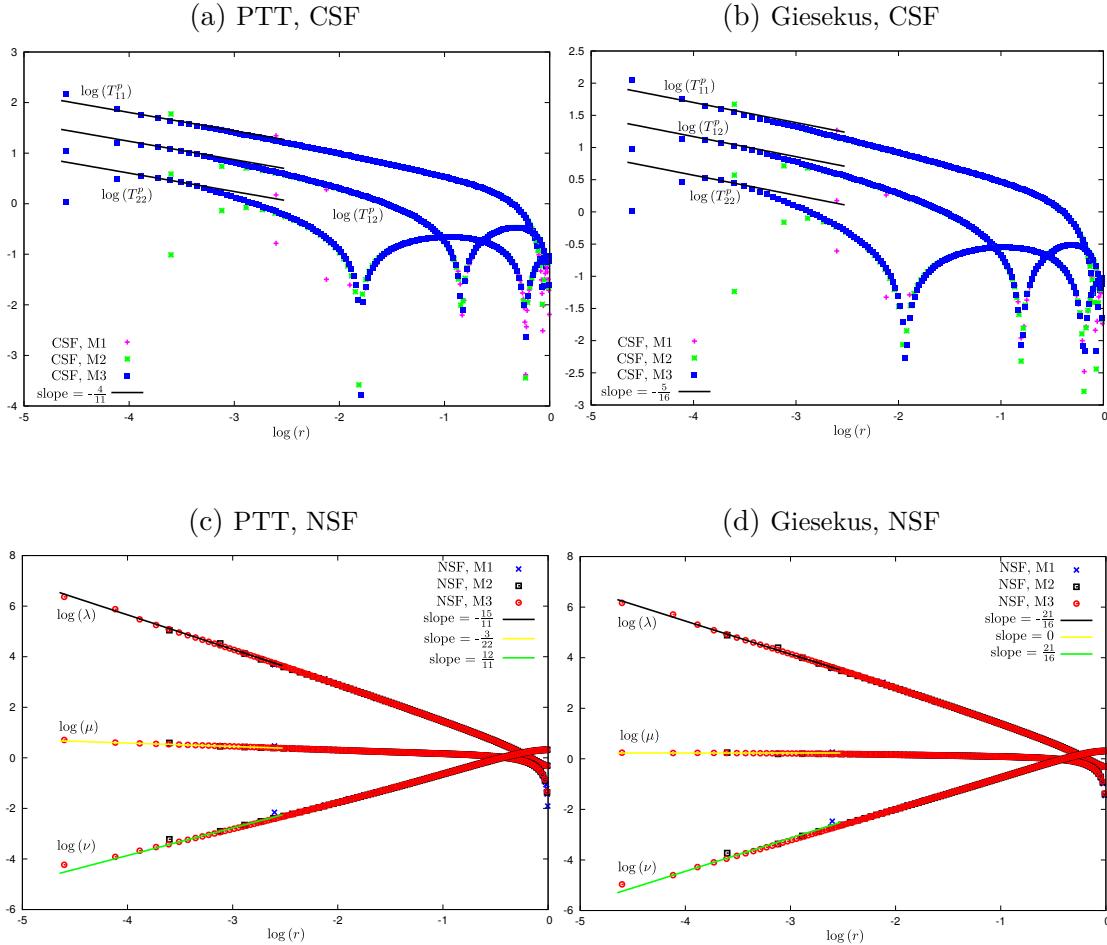
Figura 23 – Variação assintótica próximo à singularidade de u , v e p ao longo da linha $\theta = \pi/2$ para o modelo PTT (coluna à esquerda) e Giesekus (coluna à direita) com $\beta = 1/2$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A solução assintótica da função de corrente próxima à singularidade (3.35), ajust-

Figura 24 – Variação assintótica próximo à singularidade de T_{11}^P , T_{12}^P , T_{22}^P , λ , μ e ν ao longo da linha $\theta = \pi/2$ para o modelo PTT (coluna à esquerda) e Giesekus (coluna à direita) com $\beta = 1/2$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

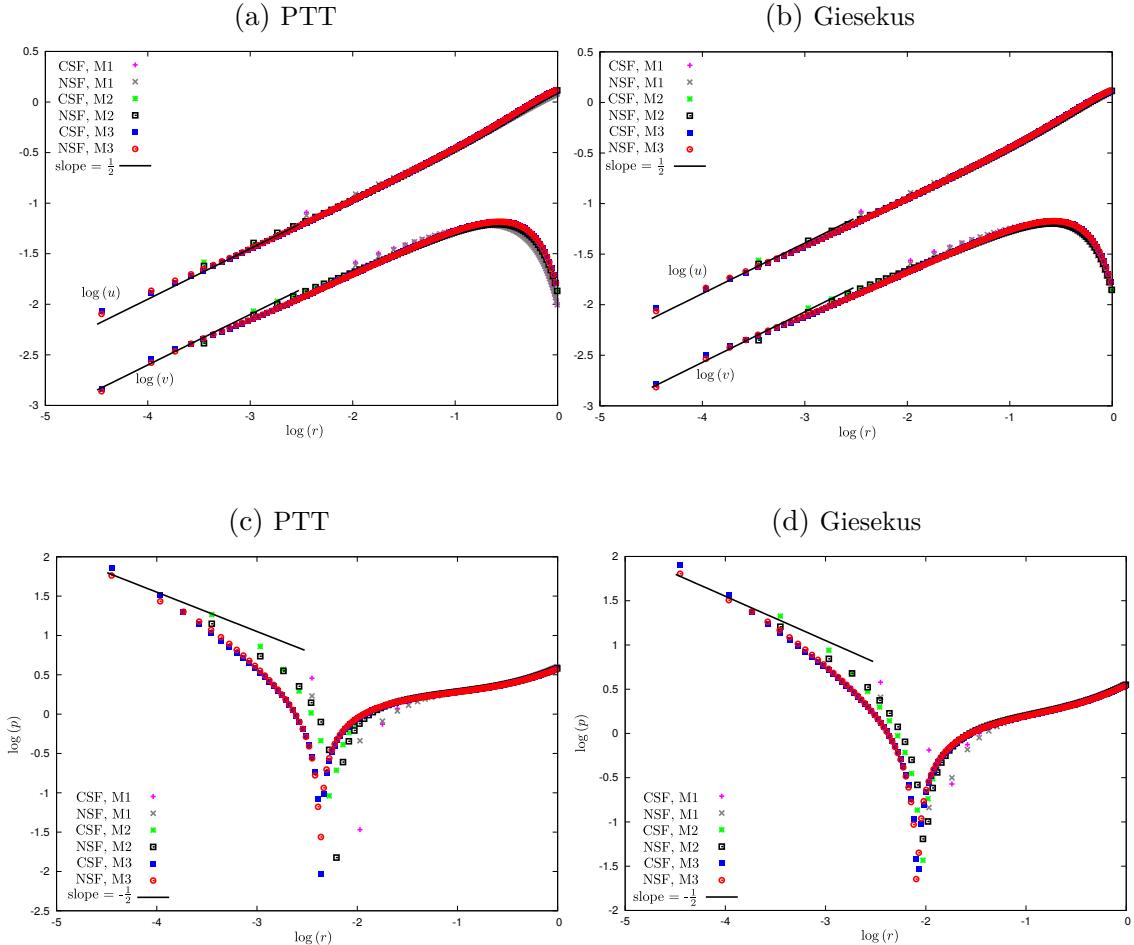
tada à orientação do escoamento, é dada por

$$\psi \sim 2C_0 r^{\frac{3}{2}} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2}. \quad (4.14)$$

Utilizando a expressão da função de corrente (4.14), juntamente com as soluções das variáveis naturais (3.169), podemos estimar os valores das quatro constantes C_0 , C_1 , C_2 e C_3 em (3.169) (ao longo do raio $\theta = \pi/2$). Os valores estimados destas constantes são apresentados na Tabela 4. Para comparação, também adicionamos o valor da constante C_0 para o caso Newtoniano, que concorda de modo acurado com o valor analítico de $(3/2\pi)^{1/2} \approx 0.691$, conforme reportado em (TANNER; HUANG, 1993). Vale destacar que, os valores das constantes calculados ao longo do raio $\theta = 3\pi/4$ nos dão resultados similares aos obtidos para $\theta = \pi/2$.

Em adição, utilizamos os valores das constantes para obter as distâncias radiais mínimas, necessárias para que as tensões capturem o comportamento assintótico esperado.

Figura 25 – Variação assintótica próximo à singularidade de u , v e p ao longo da linha $\theta = 3\pi/4$ para o modelo PTT (coluna à esquerda) e Giesekus (coluna à direita) com $\beta = 1/2$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 4 – Estimativa dos valores de C_0 , C_1 , C_2 e C_3 bem como das distâncias radiais (4.19) para os modelos PTT e Giesekus com $Wi=1$, $\kappa=0.1$ e $\beta=1/2$ e $\beta=1/9$.

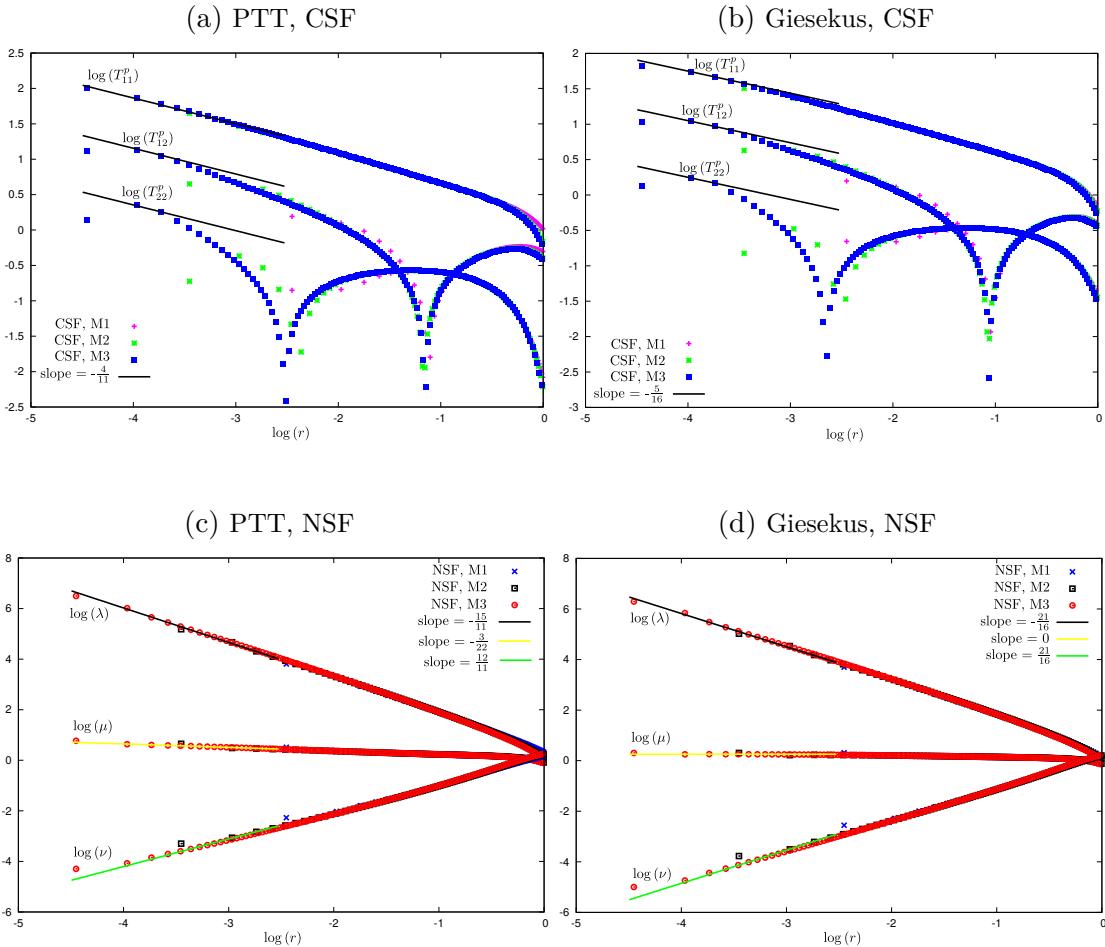
Modelo	C_0	C_1	C_2	C_3	r_{11}	r_{12}	r_{22}
Newtoniano	0.692	–	–	–	–	–	–
$\beta = 1/2$							
PTT	0.745	1.18	1.17	3.86	9×10^{-7}	3×10^{-3}	4.8
Giesekus	0.780	1.30	1.53	5.45	4×10^{-5}	1×10^{-2}	2.8
$\beta = 1/9$							
PTT	0.712	1.13	1.26	4.35	9×10^{-16}	3×10^{-12}	5×10^{-9}
Giesekus	0.817	1.30	1.62	5.83	7×10^{-13}	3×10^{-10}	6×10^{-8}

Fonte: Elaborada pelo autor.

O comportamento assintótico (4.14) é suposto para quando o tensor do solvente $\mathbf{T}^s = 2\beta\mathbf{D}$ domina o tensor polimérico \mathbf{T} , conforme equação (3.47).

Utilizando os resultados em (EVANS, 2013; EVANS, 2015; J. D. Evans; I. L. Pa-

Figura 26 – Variação assintótica próximo à singularidade de T_{11}^p , T_{12}^p , T_{22}^p , λ , μ e ν ao longo da linha $\theta = 3\pi/4$ para o modelo PTT (coluna à esquerda) e Giesekus (coluna à direita) com $\beta = 1/2$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

lhares Junior; C. M. Oishi, 2017) temos que o tensor polimérico se comporta como

$$\mathbf{T}^p \sim (1 - \beta)\lambda \mathbf{v} \mathbf{v}^T \quad \text{para } r \rightarrow 0, \quad (4.15)$$

onde λ é dado por (3.169). Reescrevendo a função de corrente (4.14) em coordenadas Cartesianas, temos que

$$\boldsymbol{\psi} = \sqrt{2}C_0(y+1) \left((x^2 + (y+1)^2)^{\frac{1}{2}} + x \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.16)$$

Assim, mediante a equação (4.16) podemos obter expressões para as componentes da velocidade e componentes dos tensores do solvente e polimérico, dadas por

$$u = C_0 r^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) (3 - \cos\theta), \quad v = -C_0 r^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\theta,$$

$$T_{ij}^s = \beta C_0 r^{-\frac{1}{2}} p_{ij}(\theta), \quad T_{ij}^p = (1 - \beta) C_1 r^{1+\frac{3}{2}n_1} q_{ij}(\theta),$$

onde

$$\begin{aligned} p_{11}(\theta) &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)(2\cos^2\theta - \cos\theta + 1), & p_{12}(\theta) &= \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(2\cos^2\theta + \cos\theta + 1), \\ p_{22}(\theta) &= -p_{11}(\theta) \end{aligned} \quad (4.17)$$

e

$$\begin{aligned} q_{11}(\theta) &= \left(2\sin\theta\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{n_1} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(3-\cos\theta)^2, & q_{12}(\theta) &= h_{11}(\theta) \frac{\sin\theta}{(3-\cos\theta)}, \\ q_{22}(\theta) &= q_{12}(\theta) \frac{\sin\theta}{(3-\cos\theta)} \end{aligned} \quad (4.18)$$

com n_1 selecionado de acordo com o modelo constitutivo, conforme descrito no Capítulo 3 e Apêndice B. Podemos comparar o valor absoluto das componentes do tensor do solvente e poliméricos para obter as estimativas das distâncias radiais como

$$r_{ij} = \left| \frac{\beta}{(1-\beta)} \frac{C_0}{C_1} \frac{p_{ij}(\theta)}{q_{ij}(\theta)} \right|^{\frac{2}{3(n_1+1)}}. \quad (4.19)$$

Os perfis das funções $|p_{ij}(\theta)/q_{ij}(\theta)|$ com relação à θ são apresentados na Figura 27. Também, adicionamos à Figura 27 o valor mínimo de $|p_{ij}(\theta)/q_{ij}(\theta)|$ (linhas pontilhadas), para isto desconsideramos os valores dentro das camadas limites, isto é, os valores para θ próximo à 0 e π . Estes valores mínimos de $|p_{ij}(\theta)/q_{ij}(\theta)|$ são

$$\left| \frac{p_{11}}{q_{11}} \right| = 0.21, \quad \left| \frac{p_{12}}{q_{12}} \right| = \begin{cases} 0.64, & \text{PTT}, \\ 0.63, & \text{Giesekus}, \end{cases} \quad \left| \frac{p_{22}}{q_{22}} \right| = \begin{cases} 1.73, & \text{PTT}, \\ 1.71, & \text{Giesekus}, \end{cases} \quad (4.20)$$

que, utilizando a equação (4.19), nos dão as estimativas das distâncias radiais reportadas na terceira coluna da Tabela 4. É evidente que as distâncias radiais das componentes 11 e 12 mostram que malhas muito finas precisam ser utilizadas para que as componentes do tensor do solvente domine as componentes do tensor polimérico.

4.4.2 Investigação numérica das camadas limites

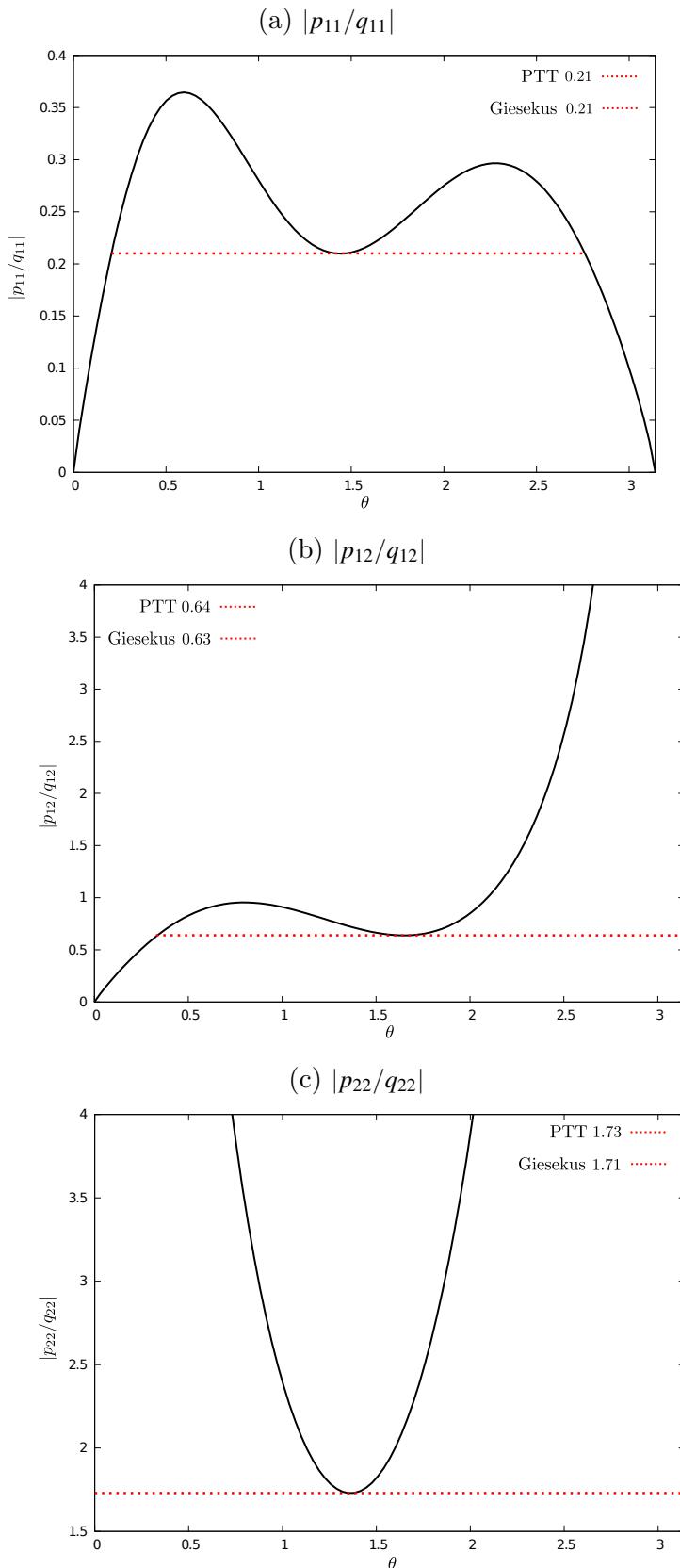
Informações adicionais do comportamento singular das tensões podem ser obtidas mediante a análise da configuração das camadas limites. Desta forma, comparamos o valor absoluto dos termos da equação constitutiva da formulação CSF, equação (2.17). O valor máximo dos termos é calculado como

$$\max \left(|\mathbf{T}_{ij}^p|, |\mathbf{T}_{ij}^P|, |\kappa \mathbf{g}_{ij}|, |2(1-\beta) \mathbf{D}_{ij}| \right), \quad (4.21)$$

para cada uma das três componentes $ij = 11, 12$ e 22 separadamente como na Figura 28. Nesta Figura utilizamos um mapa de cores e rótulos, considerando uma pequena região do domínio ao redor da singularidade, a fim de identificar os termos dominantes de cada região: externa e internas às camadas limites. As equações em (2.26) nos dão

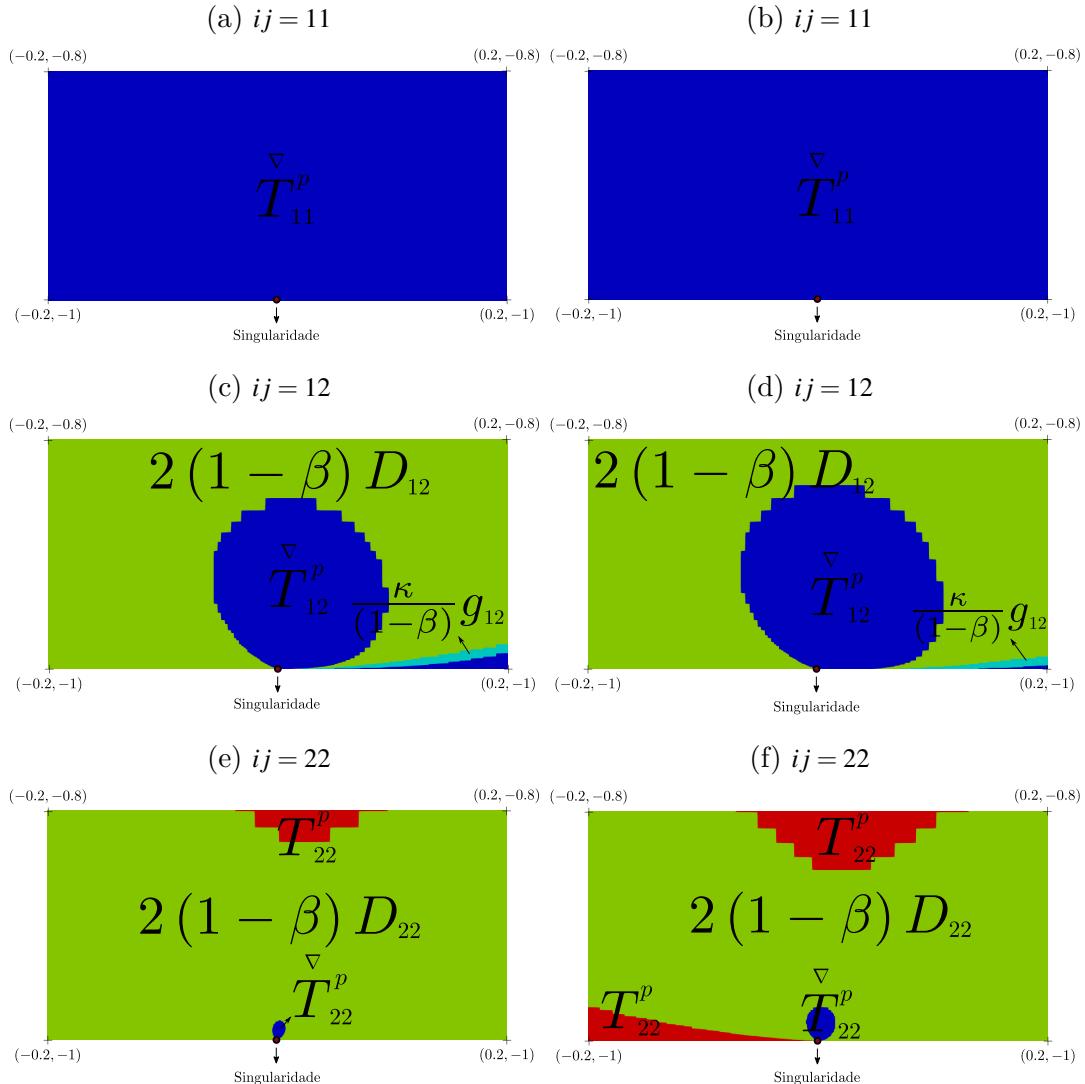
uma representação explícita dos termos analisados . As Figuras indicam uma dominância da derivada convectada do tensor polimérico (cor azul) próximo à singularidade mas longe das superfícies *stick* e *slip*. De acordo com as Figuras 28 (a) e (b), a dominância da derivada convectada da componente 11 do tensor polimérico é uniforme. Os demais plots da Figura 28 indicam a dominância da taxa de deformação (cor verde) próximo à superfície *stick*, que juntamente com a derivada convectada das tensões demarcam a linha de separação das regiões externa e interna *stick*. Esses resultados sustentam a ideia da existência de uma região de camada limite, onde a taxa de deformação deve dominar, recuperando o comportamento viscométrico. De modo similar, na superfície *slip* podemos ver, das Figuras 28 (c) e (d), a dominância dos termos quadráticos das tensões, como predito assintoticamente nesta região de camada limite. Essa estrutura é perceptível para ambos os fluidos.

Figura 27 – Variação de $|p_{ij}/q_{ij}|$ com relação à θ para o modelo PTT ($n_1 = -10/11$). As curvas para o modelo Giesekus ($n_1 = -7/8$) são similares.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 28 – Dominância do grupo de termos (4.21) dentro da equação constitutiva para os modelos PTT (coluna à esquerda) e Giesekus (coluna à direita) usando $\beta = 1/2$



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.4.3 Investigação numérica para baixos valores da viscosidade do solvente

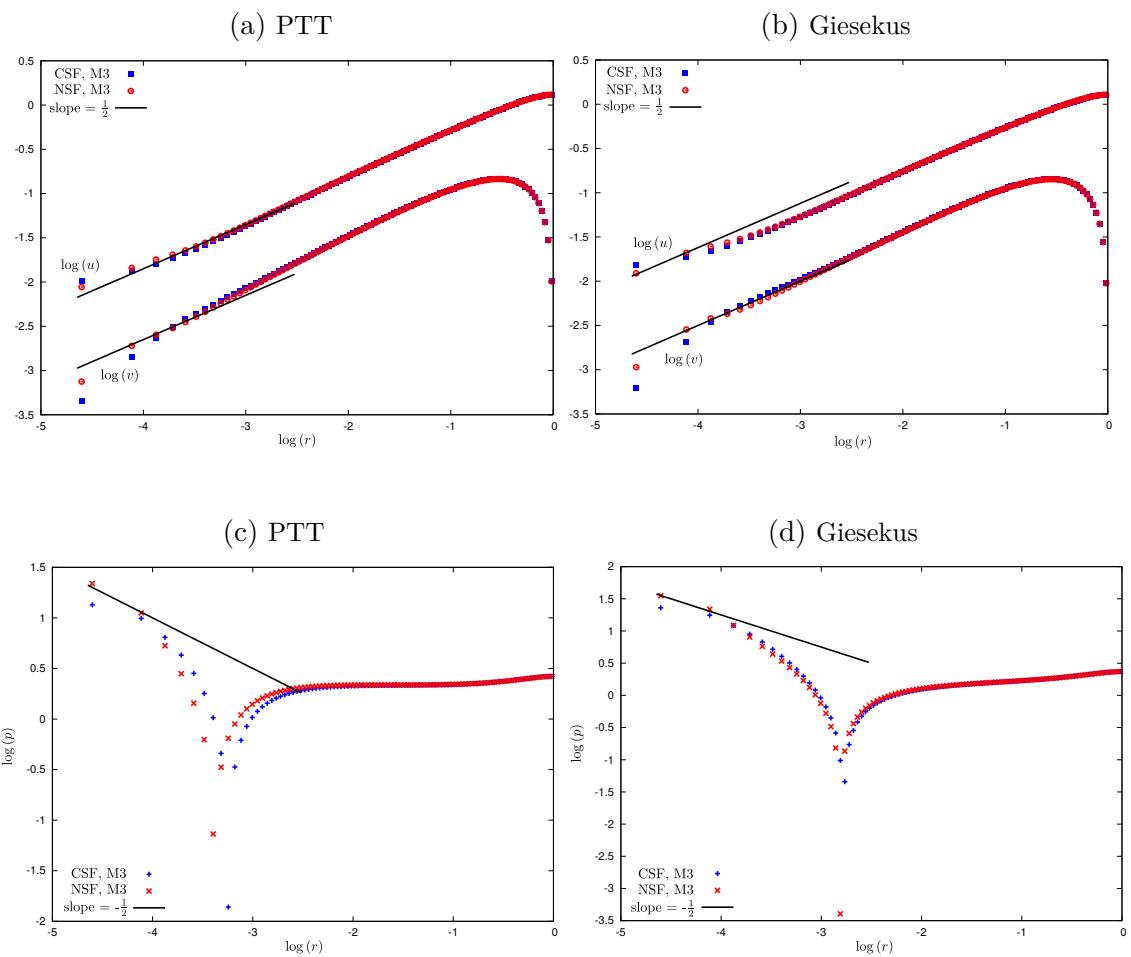
Nesta Subseção, examinamos os resultados para baixos valores da viscosidade do solvente. Para as simulações tomamos $\beta = 1/9$. Devido à restrição de estabilidade CFL com relação ao passo temporal e a fim de obter resultados com a malha mais fina M3, limitamos o comprimento do canal à $L = 4$, isto é, o domínio adimensional foi reduzido pela metade. Apesar de os resultados globais não serem acurados, é digno de nota que esse truncamento no comprimento do canal não muda a estrutura do comportamento singular das tensões próximo à singularidade, incluindo as estimativas das constantes apresentadas na Tabela 4.

As Figuras 29–30 reproduzem os resultados das Figuras 23–24, mas agora com $\beta = 1/9$. Enquanto a velocidade e as tensões (ambas Cartesiana e natural) mostram convergência para o comportamento teórico, a pressão não captura o comportamento assintótico esperado, sugerindo a necessidade de uma malha ainda mais fina para esta variável. Além disso, a queda no perfil das componentes T_{12}^p e T_{22}^p para os pontos mais próximos à singularidade é evidente para ambos os modelos, semelhante aos resultados da contração 4:1 próximos à singularidade (veja, por exemplo, (ALVES; PINHO; OLIVEIRA, 2003)). A distância radial estimada (4.19) teve uma redução significativa devido ao valor reduzido de β , conforme pode ser visto na Tabela 4. Essa observação ilustra a dificuldade que o esquema numérico enfrenta ao tentar capturar o comportamento assintótico para baixos valores da viscosidade do solvente (outra singularidade, ainda desconhecida, surge à medida que a viscosidade do solvente vai para zero, isto é, $\beta \rightarrow 0$).

Os gráficos das componentes da velocidade e das tensões confirmam que não há variações significativas nas inclinações teóricas, confirmando a insensibilidade das potências em r (4.14) com relação à β . Resultados para $\beta = 1/9$ e ao longo do raio $\theta = 3\pi/4$ são apresentados nas Figuras 31–32.

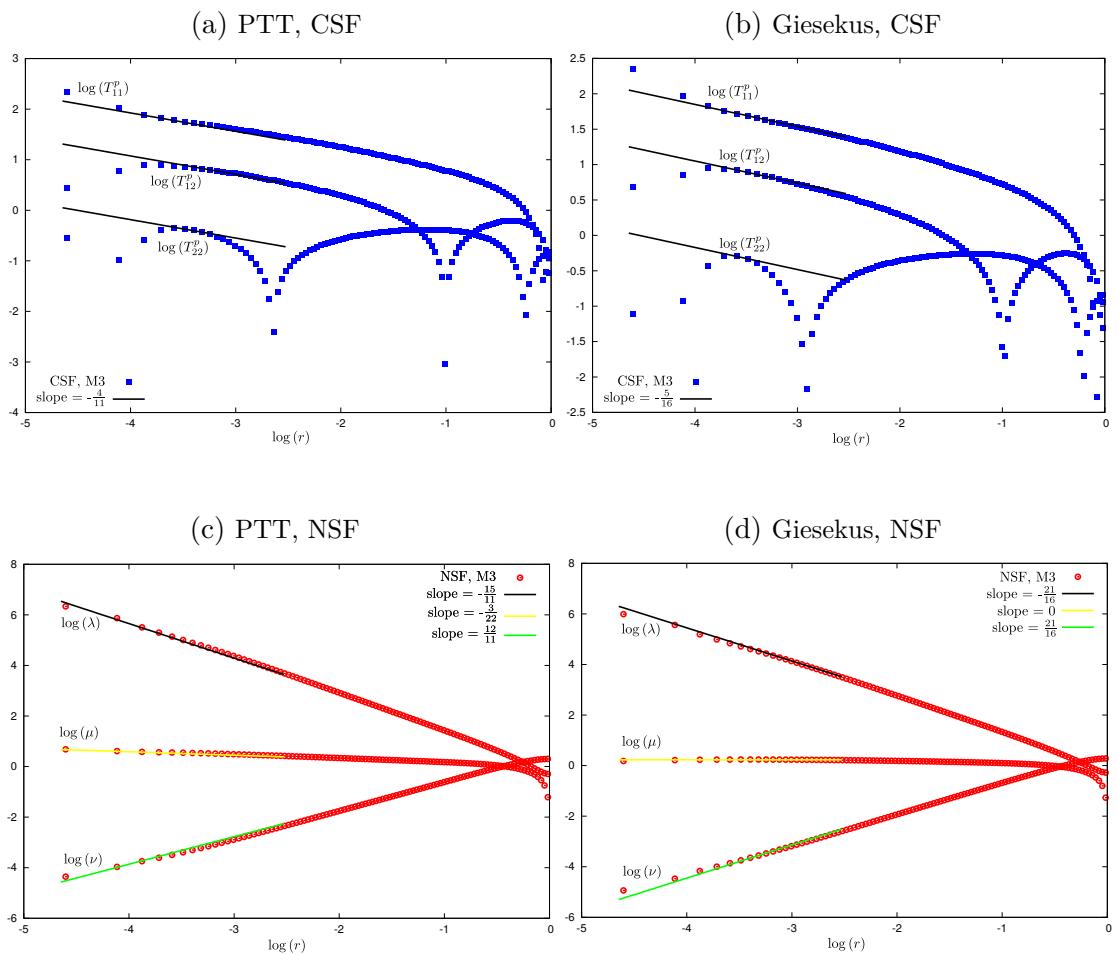
Os gráficos das camadas limites são apresentados na Figura 41, que mostram uma redução na região de dominância da derivada convectada das tensões próximo à singularidade e consequentemente a relevância da solução *stretching*. Para o modelo PTT e a componente $ij = 22$, essa dominância não é mais visível. Evidência das linhas que separam as regiões externa e internas às camadas limites ainda são visíveis para a componente $ij = 12$.

Figura 29 – Variação assintótica próximo à singularidade de u , v e p ao longo da linha $\theta = \pi/2$ para o modelo PTT (coluna à esquerda) e Giesekus (coluna à direita), considerando metade do comprimento $L = 4$ e $\beta = 1/9$.



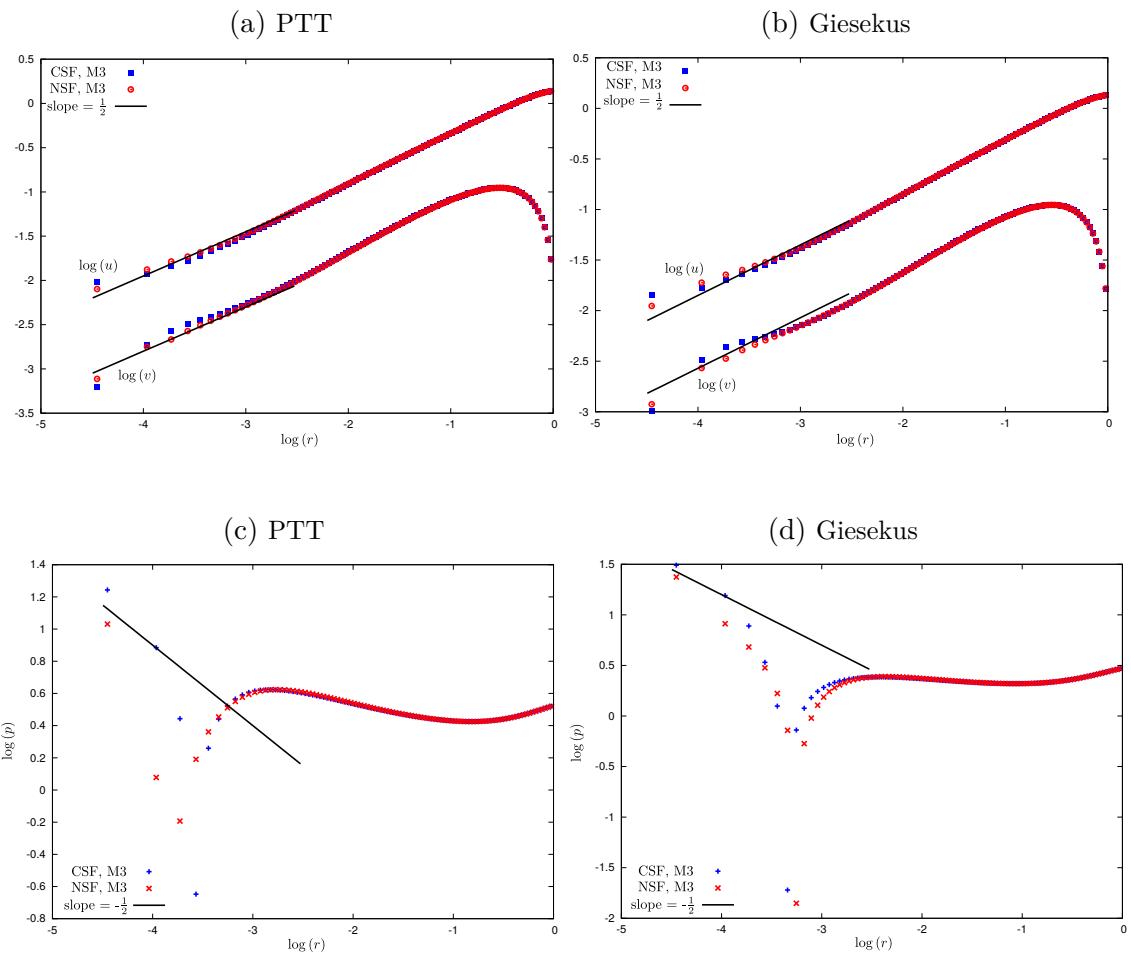
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 30 – Variação assintótica próximo à singularidade de T_{11}^p , T_{12}^p , T_{22}^p , λ , μ e ν ao longo da linha $\theta = \pi/2$ para o modelo PTT (coluna à esquerda) e Giesekus (coluna à direita), considerando metade do comprimento $L = 4$ e $\beta = 1/9$.



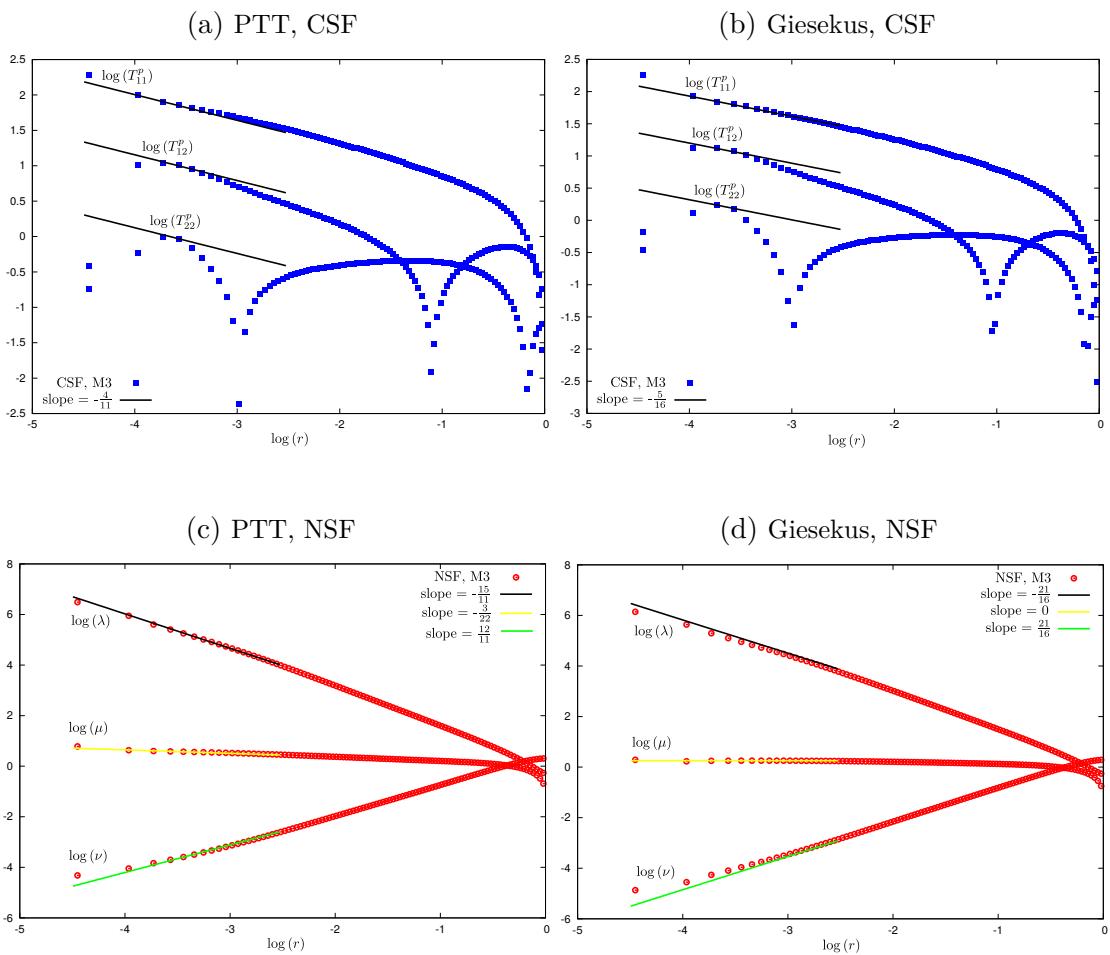
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 31 – Variação assintótica próximo à singularidade de u , v e p ao longo da linha $\theta = 3\pi/4$ para o modelo PTT (coluna à esquerda) e Giesekus (coluna à direita), considerando metade do comprimento $L = 4$ e $\beta = 1/9$.



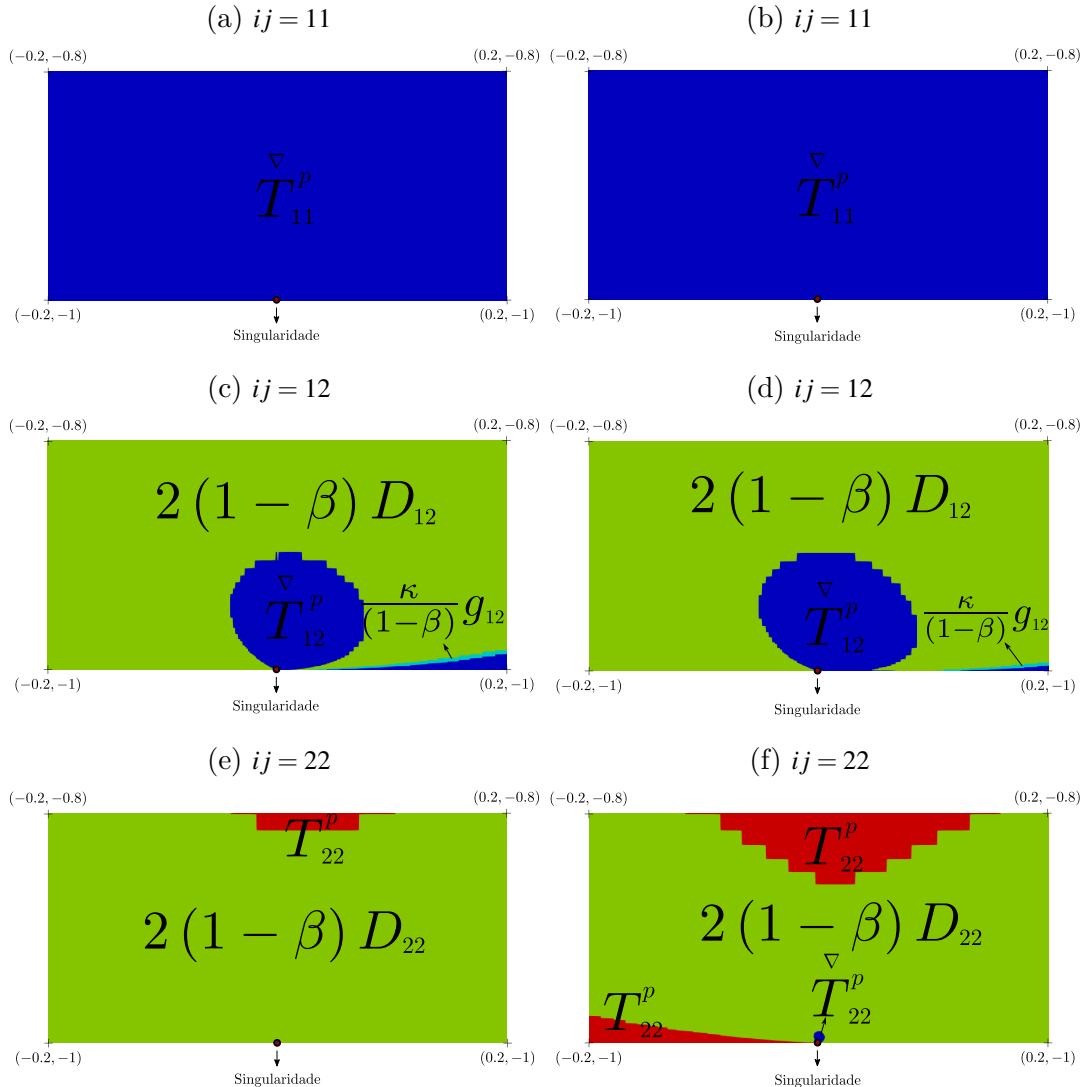
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 32 – Variação assintótica próximo à singularidade de T_{11}^P , T_{12}^P , T_{22}^P , λ , μ e ν ao longo da linha $\theta = 3\pi/4$ para o modelo PTT (coluna à esquerda) e Giesekus (coluna à direita), considerando metade do comprimento $L = 4$ e $\beta = 1/9$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 33 – Dominância do grupo de termos (4.21) dentro da equação constitutiva para os modelos PTT (coluna à esquerda) e Giesekus (coluna à direita) usando $\beta = 1/9$



Fonte: Elaborada pelo autor.



RESULTADOS NUMÉRICOS: CONTRAÇÃO

4:1

5.1 Integração numérica das equações constitutivas ao longo de linhas de corrente

Antes de realizarmos a integração numérica dos modelos PTT e Giesekus para o problema da contração 4:1, apresentamos os principais resultados deste problema desenvolvidos por [Evans \(2010c\)](#), [Evans \(2010b\)](#). Particularizamos a análise feita em ([EVANS, 2010c](#); [EVANS, 2010b](#)) para o problema da contração 4:1, isto é, o problema do canto re-entrante com uma abertura de 270° . Assim, apresentamos as seguintes expressões

$$\psi = C_0 r^{1.5445} f_0(\theta), \quad (5.1)$$

que, por (3.27), resulta em

$$v_r = C_0 r^{0.5445} f'_0(\theta), \quad v_\theta = -1.5445 C_0 r^{0.5445} f_0(\theta), \quad (5.2)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial r} &= 0.5445 C_0 r^{-0.4555} f'_0(\theta), & \frac{\partial v_r}{\partial \theta} &= C_0 r^{0.5445} f''_0(\theta) \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} &= -0.84098 C_0 r^{-0.4555} f_0(\theta), & \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} &= -1.5445 C_0 r^{0.5445} f'_0(\theta) \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde

$$\begin{aligned} f_0(\theta) &= 1.9240 \cos(0.4555\theta - 1.0732) + 1.0450 \cos(1.5445\theta - 3.6392), \\ f'_0(\theta) &= -0.87639 \sin(0.4555\theta - 1.0732) - 1.6140 \sin(1.5445\theta - 3.6392), \\ f''_0(\theta) &= -0.39919 \cos(0.4555\theta - 1.0732) - 2.4928 \cos(1.5445\theta - 3.6392). \end{aligned} \quad (5.4)$$

As potências em r das variáveis são dadas por

$$\mathbf{v} = O(r^{0.5445}), \quad \mathbf{T}^p = \begin{cases} O(r^{6911/6000}), & \text{PTT}, \\ O(r^{4911/4000}), & \text{Giesekus}, \end{cases} \quad (5.5)$$

$$\lambda = \begin{cases} O(r^{-1.4176}), & \text{PTT}, \\ O(r^{-1.3686}), & \text{Giesekus}, \end{cases} \quad \mu = \begin{cases} O(r^{-0.12689}), & \text{PTT}, \\ O(r^{0.0}), & \text{Giesekus}, \end{cases} \quad v = \begin{cases} O(r^{1.1638}), & \text{PTT}, \\ O(r^{1.3686}), & \text{Giesekus}. \end{cases} \quad (5.6)$$

As espessuras das camadas limites são dadas por

$$\text{Esp. da camada limite} = \begin{cases} O(r^{1.1518}), & \text{PTT}, \\ O(r^{1.2278}), & \text{Giesekus} \end{cases} \quad (5.7)$$

Além disso, apresentamos a configuração, ou balanceamento, das equações constitutivas nas três regiões do domínio, externa à camada limite e camadas limites *upstream* e *downstream*.

- Região externa à camada limite

$$\nabla \mathbf{T}^p = 0, \quad (5.8)$$

- Regiões *upstream* e *downstream*

$$\nabla \mathbf{T}^p + \frac{\kappa}{1-\beta} \mathbf{f}(\mathbf{T}^p) \mathbf{T}^p \sim 2(1-\beta) \mathbf{D}, \quad (5.9)$$

onde $\mathbf{f}(\mathbf{T}^p)$ é dada por (2.18).

Desta forma, fixando uma linha de corrente ψ , conseguimos determinar r apenas em função de θ como

$$r = \left(\frac{\psi}{C_0 f_0(\theta)} \right)^{1/1.5445}. \quad (5.10)$$

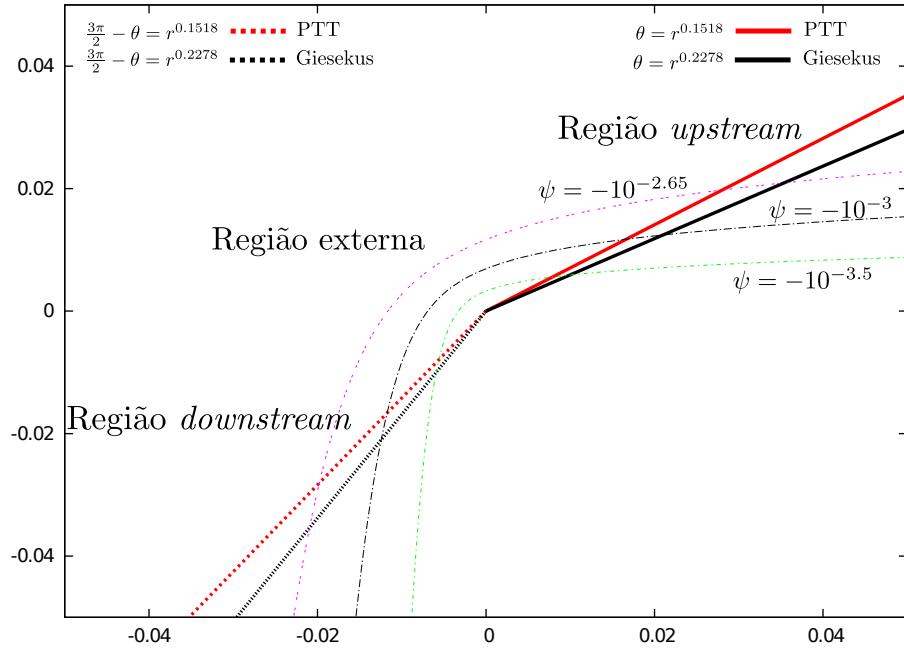
Portanto, todas as propriedades podem ser vistas como que dependendo apenas da variável θ .

Para o cálculo do conjunto de equações (4.1) e (4.2) utilizamos a função `ode15s` do MATLAB com tolerância 10^{-6} . Como condição de contorno em $\theta = 0$, utilizamos a solução do sistema de equações (4.1) e (4.2) sem os termos convectivos, resultando em um sistema algébrico não linear. Para mais detalhes do método numérico utilizado ver Apêndice D.

Na Figura 34 apresentamos três linhas de corrente, tomadas como $\psi = -10^{-2.65}$, -10^{-3} e $-10^{3.5}$, passando próximo do ponto singular e cruzando as três regiões do domínio.

Nesta Figura, podemos ver que a camada limite para o modelo PTT é maior que para o Giesekus. Outro detalhe é que, devido à simetria do domínio, as espessuras das duas camadas limites, *upstream* e *downstream*, são iguais.

Figura 34 – Ilustração das espessuras das camadas limites com três linhas de correntes passando pelas três regiões do domínio.

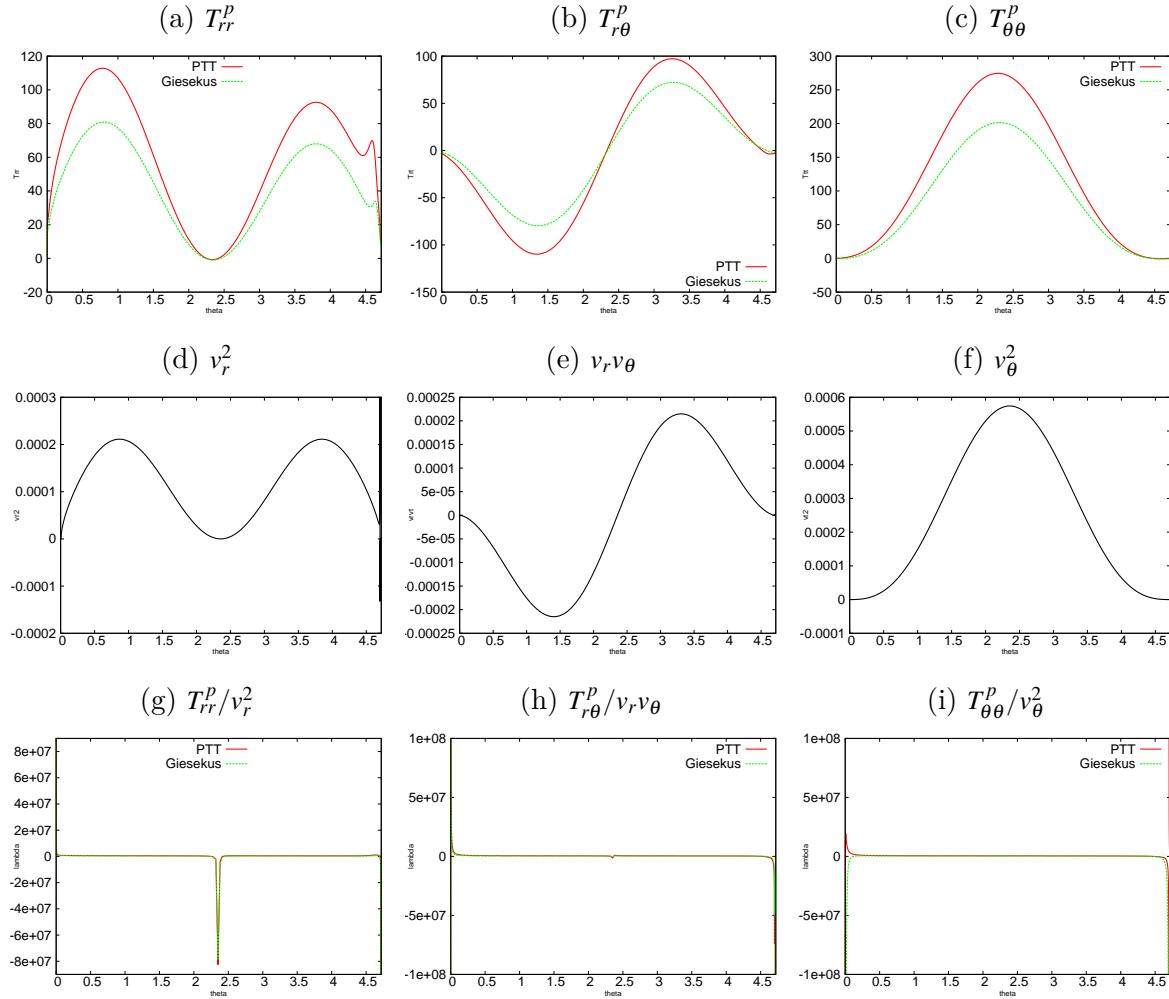


Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 35 nos mostra os perfis das tensões dos dois modelos constitutivos ao longo da linha de corrente 10^{-6} , juntamente com os perfis do produto $\mathbf{v}\mathbf{v}^T$ e os valores estimados para λ , calculados através da razão entre as tensões e os respectivos produtos das componentes da velocidade conforme equação (3.58). Podemos notar que o comportamento das tensões T_{rr}^P , $T_{r\theta}^P$ e $T_{\theta\theta}^P$, nas Figuras 35 (a)-(c), segue o mesmo comportamento dos produtos das componentes da velocidade v_r^2 , $v_r v_\theta$ e $v_\theta v_\theta$, nas Figuras 35 (d)-(f), respectivamente. Além disso, podemos observar na componente radial do tensor T_{rr}^P e no produto v_r^2 , uma pequena oscilação nos perfis para $\theta \approx 3\pi/2$, indicando a presença da camada limite *downstream*. Para confirmar a solução *stretching* (3.58), apresentamos nas Figuras 35 (g)-(i) as estimativas de λ . Observamos que os valores de λ são parcialmente constantes como esperado, mudando o comportamento nas camadas limites.

Por fim, nas Figuras 36 e 37 apresentamos a verificação do comportamento assintótico das tensões e das variáveis naturais, equações (5.5) e (5.6), respectivamente, para os modelos PTT e Giesekus. Para ambas as formulações, vemos uma boa concordância entre os resultados numéricos e assintóticos.

Figura 35 – Componentes do tensor e da velocidade ao longo da linha de corrente $\psi = -10^{-6}$.



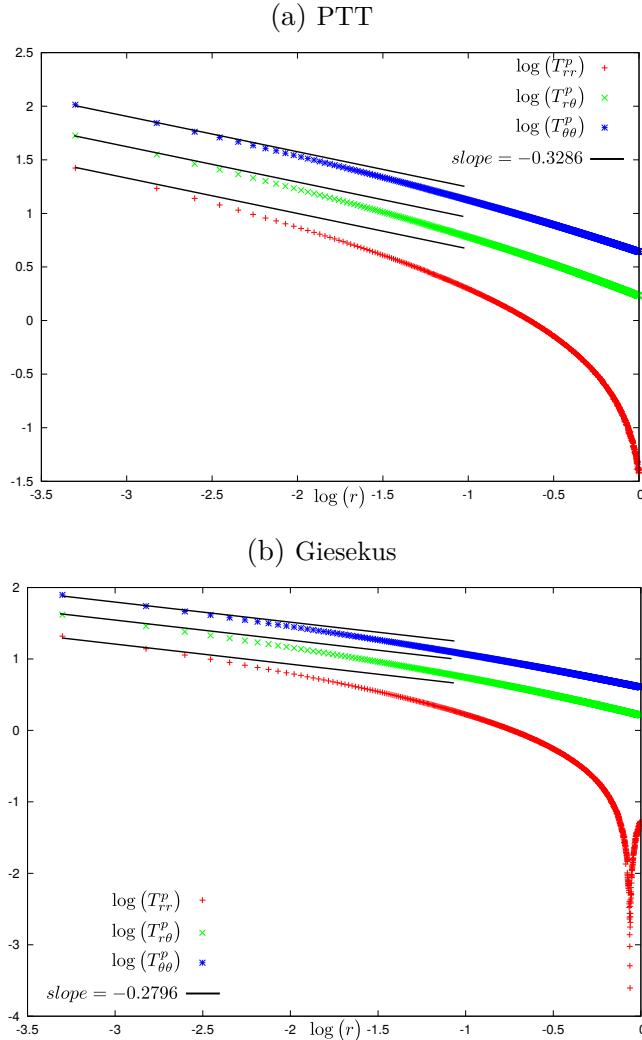
Fonte: Elaborada pelo autor.

5.2 Resultados das singularidades de tensão

Nesta seção, ampliamos a verificação dos resultados assintóticos feita na seção 5.1, bem como das camadas limites *upstream* e *downstream*, para o problema da contração 4:1. Para o cálculo das propriedades utilizamos o conjunto completo de equações que definem um escoamento viscoelástico para os modelos PTT e Giesekus. Assim, trabalhamos com o campo correto de velocidade e, consequentemente, adicionamos mais entendimento à estes escoamentos.

Para as simulações utilizamos três malhas não uniformes M1, M2 e M3, com a aplicação de refinamento ao redor das singularidades e nos cantos superior e inferior, conforme Figura 38. Os detalhes das malhas utilizadas são apresentados na Tabela 5. Além disso, as dimensões da geometria são: $8L \times 8L$ de comprimento e $8L$ de largura para o canal maior, sendo que o canal menor possui $2L$ de largura.

Figura 36 – Verificação do comportamento assintótico (5.5) para os modelos PTT e Giesekus ao longo da linha $\theta = \frac{\pi}{2}$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 5 – Malhas usadas nas simulações.

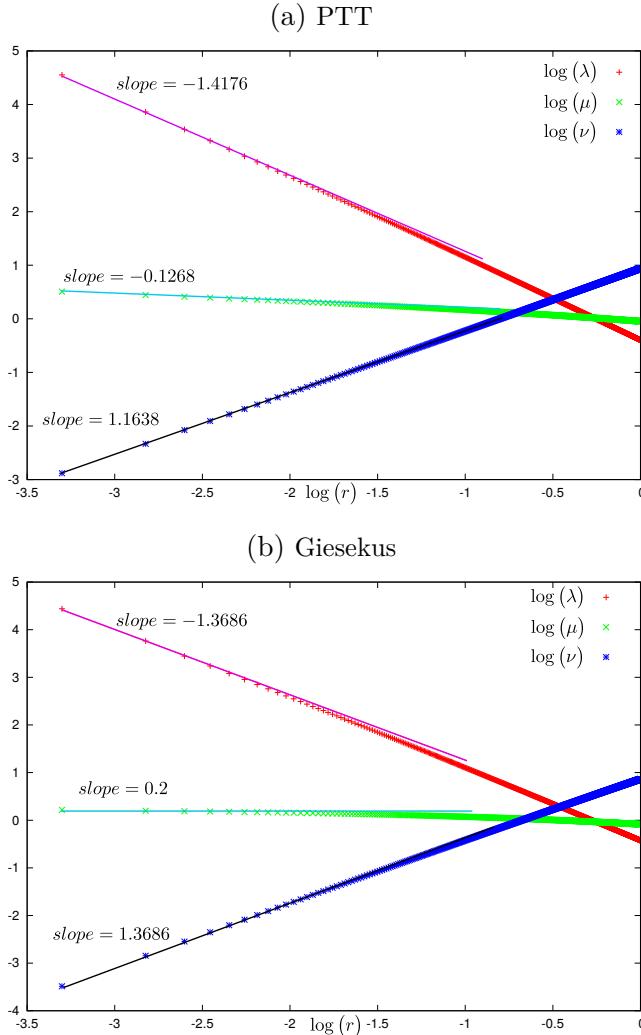
Malha	Número de células	Δx_{min}	Δy_{min}
M1	(200 × 380)	4×10^{-3}	4×10^{-3}
M2	(220 × 440)	10^{-3}	10^{-3}
M3	(240 × 500)	5×10^{-4}	5×10^{-4}

Fonte: Elaborada pelo autor.

5.2.1 Comparação numérica com os resultados assintóticos

Nesta Subseção, apresentamos a verificação dos resultados assintóticos com o campo correto de velocidade. Todos os valores foram tomados ao longo da linha vertical $\theta = \pi/2$. Na Figura 39 temos o comportamento assintótico de u , v e p . Os valores das componentes das velocidades entre as formulações, CSF e NSF, e modelos são semelhan-

Figura 37 – Verificação dos expoentes (5.6) para as variáveis do tensor polimérico na base natural para os modelos PTT e Giesekus. As variáveis naturais foram plotadas ao longo da linha $\theta = \frac{\pi}{2}$.



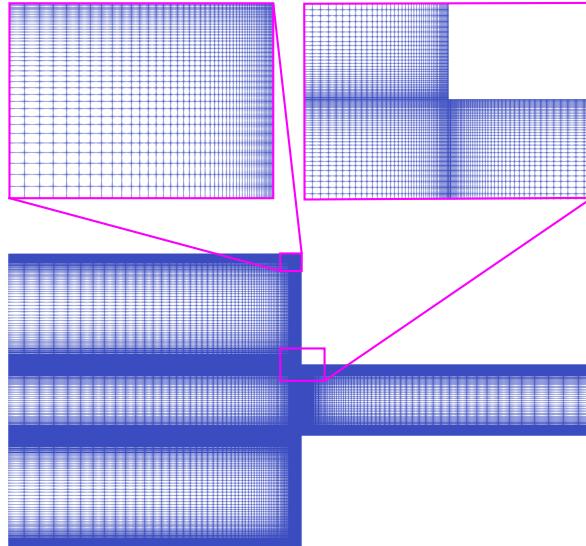
Fonte: Elaborada pelo autor.

tes, concordando com o valor assintótico de 0.5. Em particular, destacamos a melhoria nos valores da pressão na Figuras 39 (e) e (f) para a formulação NSF à medida que $r \rightarrow 0$. No caso das tensões, Figura 40, vemos que as variáveis naturais conseguem capturar o comportamento assintótico de modo mais acurado que as tensões Cartesianas, semelhante ao observado no problema *stick-slip* no Capítulo 4.

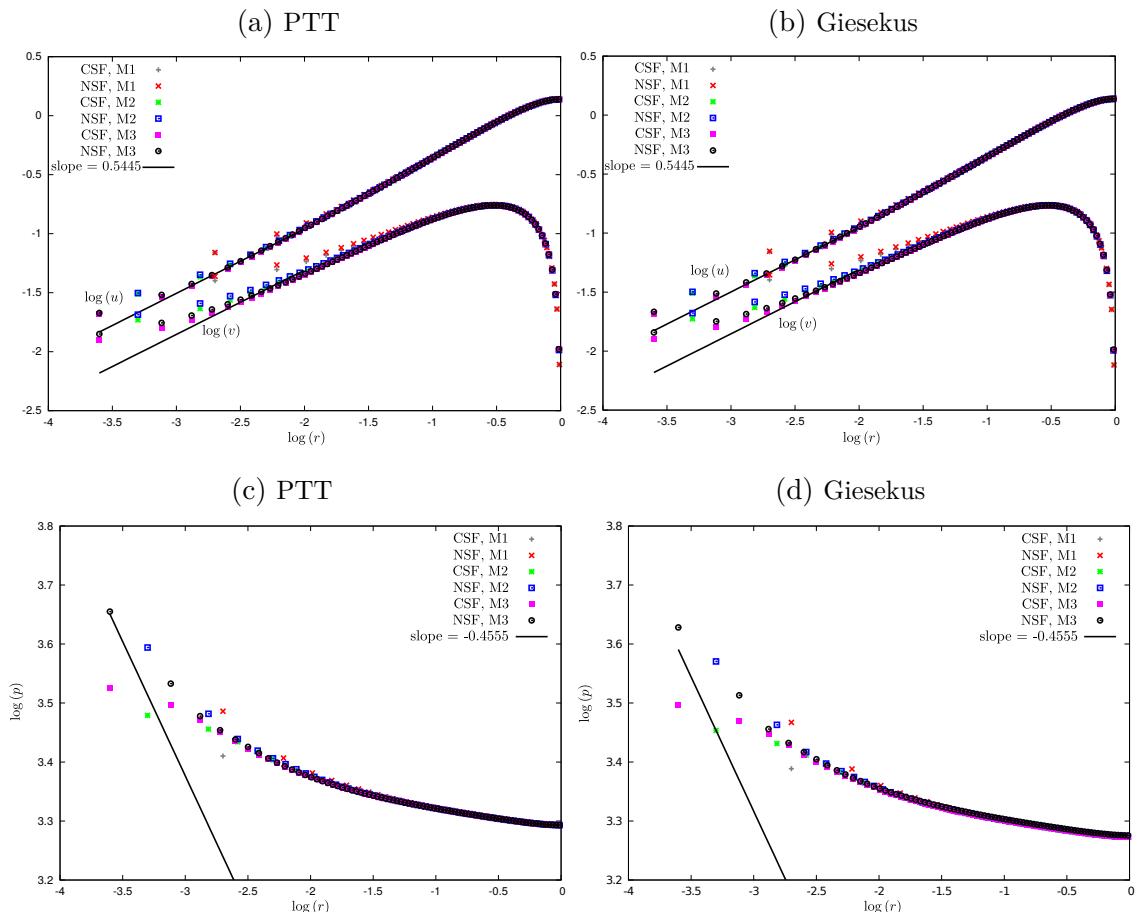
5.2.2 Investigaçāo numérica das camadas limites

Semelhante ao que foi feito para o problema *stick-slip*, no Capítulo 4, investigamos os termos dominantes da equação constitutiva nas vizinhanças da singularidade. Para isto, comparamos os principais termos da equação constitutiva da formulação CSF. Estes termos são tomados da equação (4.21), para as três componentes $ij = 11, 12$ e 22 . Desta

Figura 38 – Visualização dos detalhes da malha não-uniforme.

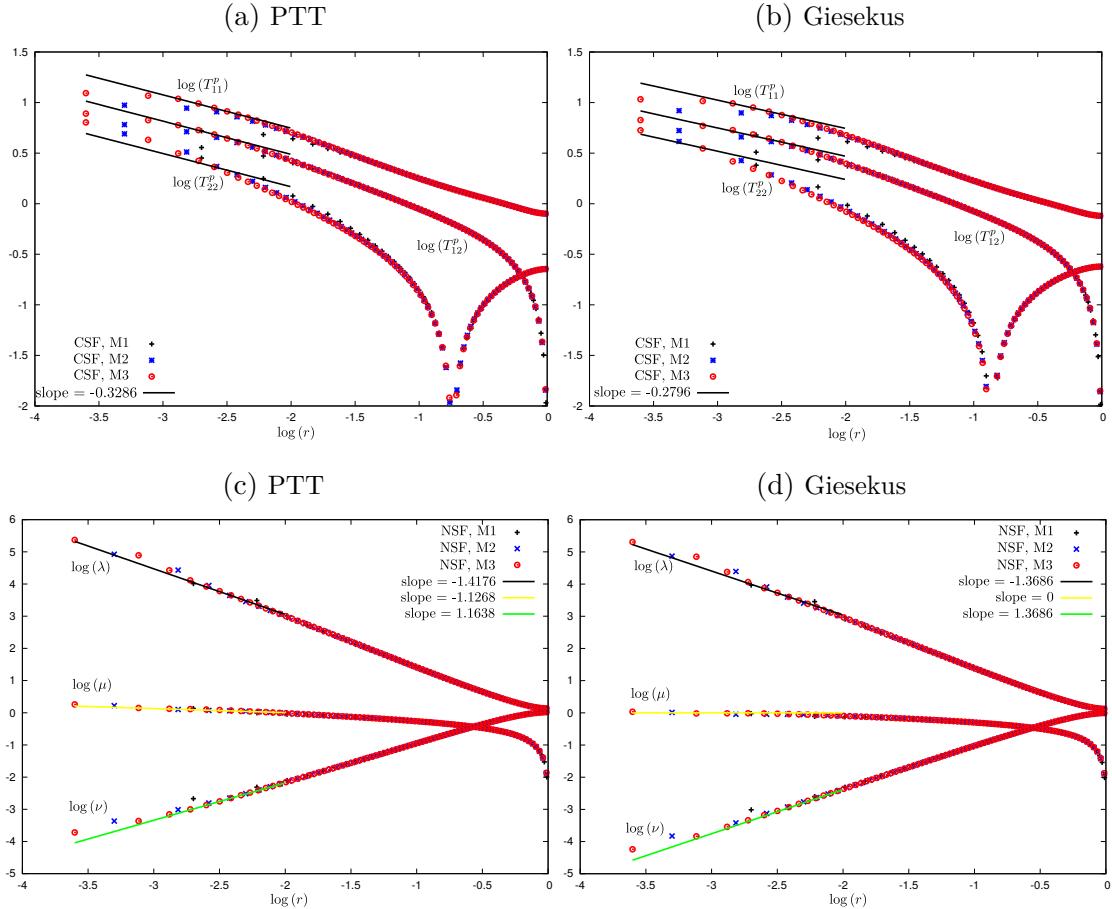


Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 39 – Variação assintótica próximo à singularidade de u , v e p ao longo da linha $\theta = \pi/2$ para o modelo PTT (coluna à esquerda) e Giesekus (coluna à direita) com $\beta = 1/2$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

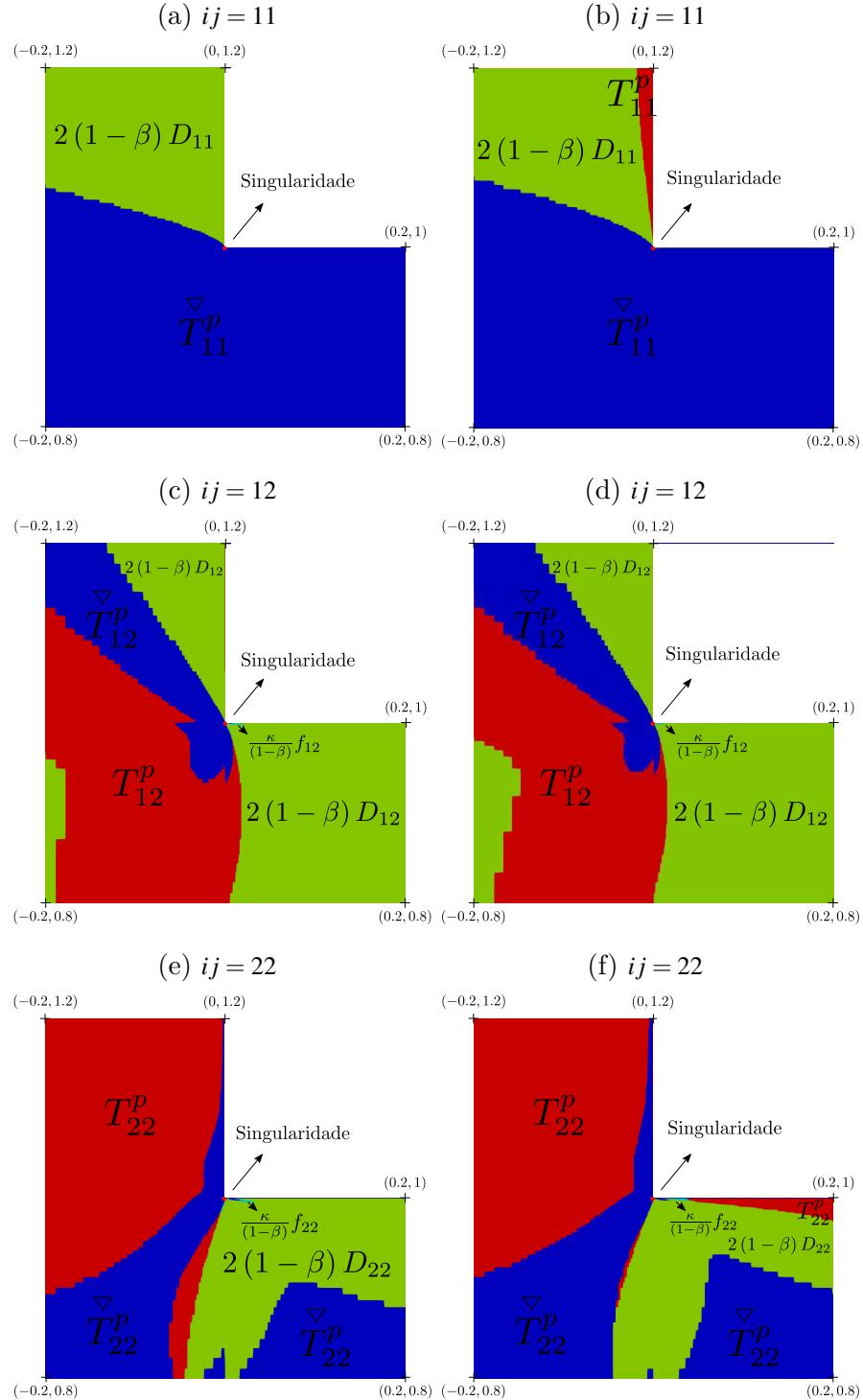
Figura 40 – Variação assintótica próximo à singularidade de T_{11}^p , T_{12}^p , T_{22}^p , λ , μ e ν ao longo da linha $\theta = \pi/2$ para o modelo PTT (coluna à esquerda) e Giesekus (coluna à direita) com $\beta = 1/2$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

forma, apresentamos na Figura 41 os resultados dos termos dominantes próximos à singularidade para as três componentes, 11, 12 e 22, respectivamente. Em todas as Figuras, vemos a dominância do termo $\overset{\triangledown}{\mathbf{T}}^p$ (na cor azul) na região externa à camada limite, que é o valor assintótico esperado nesta região. Também vemos o aparecimento dos termos $2(1-\beta)\mathbf{D}$ (na cor verde) e, novamente, $\overset{\triangledown}{\mathbf{T}}^p$ nas regiões de camada limite *upstream* e *downstream*. Além disso, nas Figuras 41 (e) e (f) vemos o surgimento da influência do termo quadrático (na cor azul claro) na região *downstream*. Assim, concluímos que os resultados numéricos estão de acordo com os valores assintóticos esperados.

Figura 41 – Dominância do grupo de termos (4.21) dentro da equação constitutiva para os modelos PTT (coluna à esquerda) e Giesekus (coluna à direita) usando $\beta = 1/2$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

CAPÍTULO
6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Escoamentos viscoelásticos com número de Weissenberg elevados são conhecidos na literatura por representar um desafio para os métodos numéricos projetados para este tipo de simulação. Tanto é assim que esse problema ganhou uma alcunha *High Weissenberg Number problem* (HWNP), em publicações recentes que tratam do assunto, por exemplo, os trabalhos de Vaithianathan e Collins (2003), Fattal e Kupferman (2004), Fattal e Kupferman (2005), Balci *et al.* (2011), Afonso, Pinho e Alves (2012) e Palhares Junior *et al.* (2016). Estes trabalhos, em sua maioria, desenvolveram métodos que atenuam o crescimento das tensões, resultando na sua estabilização. Entretanto, muitos destes métodos não consideram o quesito precisão que acaba sendo comprometido, especialmente em problemas com singularidades, onde as tensões, em teoria, são infinitas. A fim de superar essa dificuldade e propor métodos mais robustos trabalhos recentes foram publicados objetivando entender como as tensões se comportam próximo às singularidades e, assim, utilizar estas informações para melhorar os métodos numéricos em termos de convergência e precisão. Destacamos, por exemplo, os trabalhos teóricos de Hinch (1993b), Renardy (1993), Renardy (1995), Renardy (1994) e, mais recentemente, Evans (2005a), Evans (2005b), Evans (2008a), Evans (2008b), Evans (2008c), Evans (2009), Evans (2010b), Evans (2010e), Evans (2010a), Evans (2010c), Evans (2010d), que investigaram o comportamento singular do problema da contração 4:1 para os fluidos Oldroyd-B, PTT e Giesekus. Para o problema *stick-slip*, destacamos principalmente os trabalhos de Evans (2013), Evans (2015) para os modelos PTT e Giesekus e J. D. Evans, I. L. Palhares Junior e C. M. Oishi (2017) para o modelo Oldroyd-B. Todas os estudos mencionados, a menos do caso Oldroyd-B para o problema da contração 4:1, utilizaram um campo de velocidade Newtoniano, simplificando o estudo assintótico. Entretanto, pouco avanço foi obtido no estudo destes problemas utilizando a solução do sistema completo de equações que modelam um escoamento viscoelástico, em especial para o problema *stick-slip*.

Desta forma, neste trabalho, apresentamos a solução assintótica do problema *stick-*

slip para o fluido Oldroyd-B sobre um campo de velocidade Newtoniano. A metodologia adotada neste estudo foi o método assintótico das expansões, também utilizado nos trabalhos anteriores de [Evans \(2013\)](#), [Evans \(2015\)](#) para os modelos PTT e Giesekus. Esta metodologia pode ser facilmente estendida para outros modelos constitutivos, bastando apenas seguir os passos descritos no Capítulo 3. Vale destacar que, além da definição do comportamento assintótico do modelo Oldroyd-B para o problema *stick-slip*, também verificamos que as equações constitutivas deste modelo não possuem um dispositivo capaz de limitar o crescimento das tensões próximo à singularidade, fazendo com que as tensões tendam a infinito ao longo da superfície livre. Isto justifica as modificações no *stick-slip* propostas por [Apelian, Armstrong e Brown \(1988\)](#) e [Owens e Phillips \(1991a\)](#), numa tentativa de superar as dificuldades advindas de utilizar o modelo Oldroyd-B para este problema. Note que, mesmo tendo, neste trabalho, utilizado um campo de velocidade Newtoniano, que não é o campo correto, é esperado que o comportamento da solução com o campo de velocidade viscoelástico seja similar ao apresentado. Esta afirmação é fundamentada na observação de que os resultados da contração 4:1 com os dois campos de velocidade, Newtoniano ([RENARDY, 1993](#)) e viscoelástico ([HINCH, 1993b](#)), não difirem significativamente.

Os resultados assintóticos do *stick-slip* para o modelo Oldroyd-B, bem como para os modelos PTT e Giesekus, foram verificados mediante a integração das equações constitutivas ao longo de linhas de corrente, considerando um campo de velocidade Newtoniano dado. A mesma metodologia foi utilizado no problema da contração 4:1 para a verificação dos resultados assintóticos dos fluidos PTT e Giesekus. Embora a construção das soluções assintóticas de ambos os problemas tenham sido feitas sobre um campo de velocidade Newtoniano, estas ainda não haviam sido verificadas com este campo. Vale destacar que, além do uso da formulação CSF, também utilizamos a formulação NSF na verificação destes resultados. Verificamos também o comportamento assintótico das variáveis naturais.

Adicionalmente por completude, também verificamos os resultados assintóticos por meio da solução numérica das equações de Navier-Stokes combinadas com as equações constitutivas. Assim, desenvolvemos um método numérico para resolver o conjunto completo de equações para os fluidos PTT e Giesekus em ambos os problemas, *stick-slip* e contração 4:1. Vale destacar que, não há na literatura resultados numéricos do problema *stick-slip* com o modelo Giesekus e existem poucos resultados para o modelo PTT. Sendo que, os resultados na literatura para este último são para os casos em que $\beta = 0$ (β é a razão entre a viscosidade do solvente e a viscosidade total), caso em que a singularidade não é conhecida. Além disso, utilizamos, novamente, nas simulações do *stick-slip* a formulação natural do tensor. Ressaltamos que, o uso desta formulação trouxe vantagens numéricas no que diz respeito à precisão, além de ser uma das principais originalidades deste trabalho. Embora [Renardy \(1994\)](#) tenha proposto esta formulação, ele nunca a investigou para o caso da simulação do conjunto completo de equações transientes para

um escoamento viscoelástico, sendo este trabalho o primeiro nesta direção. Além disso, vimos que, numericamente, o valor de β tem grande influência no espaçamento da malha. Para o problema *stick-slip*, por exemplo, para $\beta = 1/2$ os resultados numéricos ficaram razoavelmente próximos dos assintóticos, já para $\beta = 1/9$ exige uma malha ainda mais refinada, não sendo viável a simulação deste tipo de problema. Por fim, mencionamos a verificação da configuração das camadas limites, para os modelos PTT e Giesekus para ambos os problemas, que demonstraram boa concordância com os resultados assintóticos esperados.

Em resumo este trabalho resultou em um artigo publicado, Capítulo 3, um artigo submetido, Capítulo 4, e um artigo em preparação, Capítulo 5. Como possíveis trabalhos futuros, podemos estender a solução assintótica do modelo Oldroyd-B, apresentada no Capítulo 3, para outros modelos constitutivos, como o Single-equation eXtended Pom-Pom (SXPP) e o FENE-CR. Consequentemente, todas as outras etapas de verificação apresentadas neste trabalho, como a integração das equações constitutivas ao longo de linhas de corrente e a solução do conjunto completo de equações que representam um escoamento viscoelástico, também podem ser realizadas. Outra possibilidade é o uso do método NSF para o caso axissimétrico, cujas equações foram apresentadas no Apêndice A. Por fim, podemos combinar os métodos estabilizadores para o HWNP, como log-conformação (FATTAL; KUPFERMAN, 2004; FATTAL; KUPFERMAN, 2005), raiz quadrada conformação (BALCI *et al.*, 2011; Palhares Junior *et al.*, 2016) e núcleo conformação (AFONSO; PINHO; ALVES, 2012), com a formulação natural do tensor, a fim de melhorar a precisão e estabilidade dos métodos.

REFERÊNCIAS

- AFONSO, A. M.; PINHO, F. T.; ALVES, M. A. The kernel-conformation constitutive laws. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 167-168, p. 30–37, 2012. Citado nas páginas [133](#) e [135](#).
- AHN, Y. C.; RYAN, M. E. A finite difference analysis of the extrudate swell problem. **International journal for numerical methods in fluids**, Wiley Online Library, v. 13, n. 10, p. 1289–1310, 1991. Citado na página [101](#).
- ALVES, M.; OLIVEIRA, P.; PINHO, F. A convergent and universally bounded interpolation scheme for the treatment of advection. **International journal for numerical methods in fluids**, Wiley Online Library, v. 41, n. 1, p. 47–75, 2003. Citado na página [48](#).
- ALVES, M. A.; PINHO, F. T.; OLIVEIRA, P. J. Benchmark solutions for the flow of oldroyd-b and ptt fluids in planar contractions. **Journal Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 110, p. 45–75, 2003. Citado nas páginas [30](#) e [117](#).
- APELIAN, M.; ARMSTRONG, R.; BROWN, R. Impact of the constitutive equation and singularity on the calculation of stick-slip flow: the modified upper-convected maxwell model (mucm). **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, Elsevier, v. 27, n. 3, p. 299–321, 1988. Citado nas páginas [28](#) e [134](#).
- BAAIJENS, F. P. T. Application of low-order discontinuous galerkin methods to the analysis of viscoelastic flows. **Journal Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 52, p. 37–57, 1994. Citado nas páginas [28](#), [29](#), [31](#) e [107](#).
- BALCI, N.; THOMASES, B.; RENARDY, M.; DOERING, C. R. Symmetric factorization of the conformation tensor in viscoelastic fluid models. **Journal Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 166, p. 546–553, 2011. Citado nas páginas [133](#) e [135](#).
- BIRD, R.; ARMSTRONG, R. C.; HASSAGER, O. Dynamics of polymeric liquids. vol. 1: Fluid mechanics. John Wiley and Sons Inc., New York, NY, 1977. Citado na página [34](#).
- BOGER, D. V.; WALTERS, K. **Rheological phenomena in focus**. [S.l.]: Elsevier, 2012. v. 4. Citado na página [29](#).
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, LTC, S.A., 2002. Citado na página [54](#).
- CHORIN, A. J.; MARSDEN, J. E. **A mathematical introduction to fluid mechanics**. [S.l.]: Springer, 1990. v. 3. Citado na página [46](#).
- CLERMONT, J.-R.; NORMANDIN, M. Numerical simulation of extrudate swell for oldroyd-b fluids using the stream-tube analysis and a streamline approximation. **Journal of non-newtonian fluid mechanics**, Elsevier, v. 50, n. 2-3, p. 193–215, 1993. Citado na página [27](#).

COMMINAL, R.; PIMENTA, F.; HATTEL, J. H.; ALVES, M. A.; SPANGENBERG, J. Numerical simulation of the planar extrudate swell of pseudoplastic and viscoelastic fluids with the streamfunction and the vof methods. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, Elsevier, v. 252, p. 1–18, 2018. Citado na página [27](#).

DEAN, W.; MONTAGNON, P. On the steady motion of viscous liquid in a corner. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. **Proc. Camb. Philos. Soc.** [S.l.], 1949. v. 45, n. 3, p. 389–394. Citado na página [29](#).

DEAN, W. R.; MONTAGNON, P. E. On the steady motion of viscous liquid in a corner. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, v. 45, p. 389–394, 1949. Citado na página [54](#).

DENN, M. M. Issues in viscoelastic fluid mechanics. **Annual Review of Fluid Mechanics**, v. 22, n. 1, p. 13–32, 1990. Citado na página [28](#).

_____. Extrusion instabilities and wall slip. **Annual Review of Fluid Mechanics**, v. 33, n. 1, p. 265–287, 2001. Citado na página [28](#).

ELLIOTIS, M.; GEORGIOU, G.; XENOPHONTOS, C. Solution of the planar newtonian stick-slip problem with the singular function boundary integral method. **International journal for numerical methods in fluids**, Wiley Online Library, v. 48, n. 9, p. 1001–1021, 2005. Citado nas páginas [28](#), [100](#) e [101](#).

EVANS, J. D. Re-entrant corner flows of the upper convected maxwell fluid. In: THE ROYAL SOCIETY. **Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**. [S.l.], 2005. v. 461, n. 2053, p. 117–142. Citado nas páginas [29](#) e [133](#).

_____. Re-entrant corner flows of oldroyd-b fluids. In: THE ROYAL SOCIETY. **Proc. Royal Soc.** [S.l.], 2005. A 461, n. 2060, p. 2573–2603. Citado nas páginas [29](#) e [133](#).

_____. Re-entrant corner flows of ptt fluids in the cartesian stress basis. **Journal Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 153, p. 12–24, 2008. Citado nas páginas [30](#) e [133](#).

_____. Re-entrant corner flows of ucm fluids: The cartesian stress basis. **Journal Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 150, p. 116–138, 2008. Citado na página [133](#).

_____. Re-entrant corner flows of ucm fluids: the natural stress basis. **Journal Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 150, p. 139–153, 2008. Citado na página [133](#).

_____. Re-entrant corner singularity of the giesekus fluid. In: AIP. **AIP Conference Proceedings**. [S.l.], 2009. v. 1168, n. 1, p. 1263–1266. Citado nas páginas [30](#) e [133](#).

_____. Re-entrant corner behaviour of the giesekus fluid with a solvent viscosity. **Journal Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 165(9-10), p. 538–543, 2010. Citado nas páginas [30](#), [133](#) e [152](#).

_____. Re-entrant corner behaviour of the giesekus fluid with a solvent viscosity. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, Elsevier, v. 165, n. 9-10, p. 538–543, 2010. Citado nas páginas [123](#) e [133](#).

- _____. Re-entrant corner behaviour of the ptt fluid with a solvent viscosity. **Journal Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 165(9-10), p. 527–537, 2010. Citado nas páginas [30](#), [123](#) e [133](#).
- _____. Re-entrant corner singularity of the ptt fluid. **American Institute of Physics**, v. 1281, p. 1676–1676, 2010. Citado nas páginas [30](#) e [133](#).
- _____. The ucm limit of the ptt equations at a re-entrant corner. **Journal Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 165, p. 1543–1549, 2010. Citado na página [133](#).
- _____. Stick-slip and slip-stick singularities of the phan-thien-tanner fluid. **Journal Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 199, p. 12–19, 2013. Citado nas páginas [28](#), [31](#), [56](#), [79](#), [101](#), [111](#), [112](#), [133](#), [134](#), [151](#), [157](#), [163](#), [164](#), [168](#), [186](#) e [195](#).
- _____. Stick-slip singularity of the giesekus fluid. **Journal Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 222, p. 24–33, 2015. Citado nas páginas [28](#), [31](#), [56](#), [79](#), [101](#), [111](#), [112](#), [133](#), [134](#), [151](#), [152](#), [157](#), [166](#), [168](#) e [189](#).
- EVANS, J. D.; OISHI, C. M. Transient computations using the natural stress formulation for solving sharp corner flows. **Journal Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 249, p. 48–52, 2017. Citado nas páginas [30](#) e [109](#).
- EVANS, J. D.; SIBLEY, D. N. Re-entrant corner flows for ptt fluids in the natural stress basis. **Journal Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 157, p. 79–91, 2009. Citado na página [30](#).
- FATTAL, R.; KUPFERMAN, R. Constitutive laws for the matrix-logarithm of the conformation tensor. **Journal Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 123, p. 281–285, 2004. Citado nas páginas [133](#) e [135](#).
- _____. Time-dependent simulation of viscoelastic flows at high weissenberg number using the log-conformation representation. **Journal Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 126, p. 23–37, 2005. Citado nas páginas [133](#) e [135](#).
- FERRÁS, L.; AFONSO, A.; ALVES, M.; NÓBREGA, J.; CARNEIRO, O.; PINHO, F. Slip flows of newtonian and viscoelastic fluids in a 4: 1 contraction. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, Elsevier, v. 214, p. 28–37, 2014. Citado na página [30](#).
- FORTIN, A.; ZINE, A.; AGASSANT, J. F. Computing viscoelastic fluid flow problems at low cost. **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, Elsevier, v. 45, n. 2, p. 209–229, 1992. Citado nas páginas [28](#), [29](#) e [31](#).
- GRAHAM, M. D. The sharkskin instability of polymer melt flows. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, v. 9, n. 1, p. 154–163, 1999. Citado na página [28](#).
- GUILLOPÉ, C.; SAUT, J. C. Existence results for the flow of viscoelastic fluids with a differential constitutive law. **NonLinear Analysis Methods and Applications**, v. 15, n. 9, p. 849–869, 1990. Citado na página [57](#).
- HASSAGER, O. Working group on numerical techniques. In: **Proceedings of the Vth Workshop on Numerical Methods in Non-Newtonian Flow**, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.** [S.l.: s.n.], 1988. v. 29, p. 2–5. Citado na página [28](#).

HINCH, E. The flow of an oldroyd fluid around a sharp corner. **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, Elsevier, v. 50, n. 2-3, p. 161–171, 1993. Citado na página [58](#).

HINCH, E. J. The flow of an oldroyd fluid around a sharp corner. **Journal Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 50, p. 161–171, 1993. Citado nas páginas [29](#), [30](#), [133](#) e [134](#).

HUANG, S.-x.; CHEN, X.; LU, C.-j.; PENG, Z.-l.; WAN, C.-r.; HE, X.; SUN, M.-x. Rheological characterizations and extrudate swell predictions of an ldpe melt by two kbkz-type constitutive equations. **Journal of Hydrodynamics, Ser. B**, Elsevier, v. 22, n. 5, p. 915–919, 2010. Citado na página [27](#).

INGHAM, D.; KELMANSON, M. **Boundary integral equation analyses of singular, potential, and biharmonic problems**. [S.l.]: Springer-Verlag, Berlin, 1984. Citado na página [56](#).

J. D. Evans; I. L. Palhares Junior; C. M. Oishi. Stresses of the oldroyd-b, ptt and giesekus fluids in a newtonian velocity field near the stick-slip singularity. **Physics of Fluids**, v. 29, p. 1–33, 2017. Citado nas páginas [56](#), [101](#), [108](#), [111](#), [112](#) e [133](#).

KARAPETSAS, G.; TSAMOPOULOS, J. On the stick-slip flow from slit and cylindrical dies of a phan-thien and tanner fluid model. i. steady state. **Physics of Fluids**, AIP, v. 21, n. 12, p. 123101, 2009. Citado nas páginas [29](#), [34](#), [100](#), [101](#), [105](#) e [107](#).

KOOPMANS, R. Die swell or extrudate swell. In: **Polypropylene**. [S.l.]: Springer, 1999. p. 158–162. Citado na página [27](#).

KWON, Y. Numerical modelling of two-dimensional melt fracture instability in viscoelastic flow. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 855, p. 595–615, 2018. Citado na página [28](#).

LARSON, R. G. Instabilities in viscoelastic flows. **Rheologica Acta**, v. 31, n. 3, p. 213–263, May 1992. Citado na página [28](#).

MCKINLEY, G. H.; RAIFORD, W. P.; BROWN, R. A.; ARMSTRONG, R. C. Nonlinear dynamics of viscoelastic flow in axisymmetric abrupt contractions. **Journal of fluid mechanics**, Cambridge University Press, v. 223, p. 411–456, 1991. Citado na página [29](#).

MICHAEL, D. The separation of a viscous liquid at a straight edge. **Mathematika**, London Mathematical Society, v. 5, n. 1, p. 82–84, 1958. Citado na página [28](#).

MOFFATT, H. Viscous and resistive eddies near a sharp corner. **J. Fluid Mech.**, Cambridge University Press, v. 18, n. 1, p. 1–18, 1964. Citado nas páginas [28](#), [29](#) e [56](#).

NGAMARAMVARANGGUL, V.; WEBSTER, M. Viscoelastic simulations of stick-slip and die-swell flows. **Int. J. Num. Meth. Fluids**, Wiley Online Library, v. 36, n. 5, p. 539–595, 2001. Citado na página [28](#).

NGAMARAMVARANGGUL, V.; WEBSTER, M. F. Computation of free surface flows with a taylor-galerkin/pressure-correction algorithm. **Int. J. Num. Meth. Fluids**, v. 33, p. 993–1026, 2000. Citado na página [101](#).

- OISHI, C. M.; MARTINS, F. P.; TOME, M. F.; CUMINATO, J. A.; MCKEE, S. Numerical solution of the extended pom-pom model for viscoelastic free surface flows. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, Elsevier, v. 166, n. 3, p. 165–179, 2011. Citado na página [46](#).
- OWENS, R.; PHILLIPS, T. A spectral domain decomposition method for the planar non-newtonian stick-slip problem. **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, Elsevier, v. 41, n. 1-2, p. 43–79, 1991. Citado nas páginas [28](#) e [134](#).
- OWENS, R. G.; PHILLIPS, T. N. A spectral domain decomposition method for the planar non newtonian stick-slip problem. **Journal Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 41, p. 43–79, 1991. Citado na página [31](#).
- _____. **Computational rheology**. [S.l.]: Imperial College Press, London, 2002. Citado na página [29](#).
- Palhares Junior, I. L.; OISHI, C. M.; AFONSO, A. M.; ALVES, M. A.; PINHO, F. T. Numerical study of the square root conformation tensor formulation for confined and free-surface viscoelastic fluid flows. **Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences**, v. 3:2, p. 1–23, 2016. Citado nas páginas [133](#) e [135](#).
- PETRIE, C. J. S.; DENN, M. M. Instabilities in polymer processing. **AICHE Journal**, v. 22, n. 2, p. 209–236, 1976. Citado na página [28](#).
- RABENSTEIN, A. L. **Introduction to ordinary differential equation**. New York: Academic Press International Edition, 1966. Citado na página [53](#).
- RALLISON, J. M.; HINCH, E. J. The flow of an oldroyd-b fluid past a reentrant corner: the downstream boundary layer. **Journal Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 116, p. 141–162, 1999. Citado na página [29](#).
- RENARDY, M. The stresses of an upper convected maxwell fluid in a newtonian velocity field near a re-entrant corner. **J. Non-Newtonian fluid Mech.**, Elsevier, v. 50, n. 2-3, p. 127–134, 1993. Citado nas páginas [29](#), [60](#), [64](#), [133](#) e [134](#).
- _____. How to integrate the upper convected maxwell (ucm) stresses near a singularity (and maybe elsewhere, too). **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, Elsevier, v. 52, n. 1, p. 91–95, 1994. Citado nas páginas [30](#), [37](#), [133](#) e [134](#).
- _____. A matched solution for corner flow of the upper convected maxwell fluid. **Journal Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 58, p. 83–89, 1995. Citado nas páginas [29](#) e [133](#).
- _____. The high weissenberg number limit of the ucm model and the euler equations. **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, Elsevier, v. 69, n. 2, p. 293–301, 1997. Citado na página [30](#).
- _____. Re-entrant corner behavior of the ptt fluid. **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, Elsevier, v. 69, n. 1, p. 99–104, 1997. Citado na página [30](#).
- _____. **Mathematical analysis of viscoelastic flows**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, SIAM, 2000. Citado na página [54](#).
- _____. **Mathematical analysis of viscoelastic flows**. [S.l.]: Siam, 2000. v. 73. Citado na página [57](#).

RICHARDSON, S. A ‘stick-slip’ problem related to the motion of a free jet at low reynolds numbers. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**. [S.l.], 1970. v. 67, n. 2, p. 477–489. Citado nas páginas [28](#), [56](#) e [101](#).

ROSENBERG, J.; KEUNINGS, R. Numerical integration of differential viscoelastic models. **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, Elsevier, v. 39, n. 3, p. 269–290, 1991. Citado na página [31](#).

RUSSO, G.; PHILLIPS, T. N. Spectral element predictions of die-swell for oldroyd-b fluids. **Computers & Fluids**, Elsevier, v. 43, n. 1, p. 107–118, 2011. Citado na página [27](#).

SADEH, W. Z. A note on the general solution of the two-dimensional linear elasticity problem in polar coordinates. **Available Issues Articles in Advance**, v. 6, p. 568, 1968. Citado na página [53](#).

SALAMON, T. R.; BURNSIDE, D. E.; ARMSTRONG, R. C.; BROWN, R. A. The role of surface tension in the dominant balance in the die swell singularity. **Physics of Fluids**, AIP, v. 7, n. 10, p. 2328–2344, 1995. Citado nas páginas [100](#) e [101](#).

SALLOUM, Z. Local existence and uniqueness of solutions for non stationary compressible viscoelastic fluid of oldroyd type. **arXiv preprint arXiv:1111.5940**, 2011. Citado na página [57](#).

SCHLEINIGER, G.; WEINACHT, R. A remark on the giesekus viscoelastic fluid. **J. Rheol.**, SOR, v. 35, n. 6, p. 1157–1170, 1991. Citado na página [34](#).

SCHLEINIGER, G.; WEINACHT, R. J. Steady poiseuille flows for a giesekus fluid. **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, Elsevier, v. 40, n. 1, p. 79–102, 1991. Citado na página [154](#).

TANNER, R. A theory of die-swell. **Journal of Polymer Science Part A-2: Polymer Physics**, Wiley Online Library, v. 8, n. 12, p. 2067–2078, 1970. Citado na página [27](#).

TANNER, R. I. **Engineering rheology**. [S.l.]: OUP Oxford, 1985. Citado nas páginas [27](#) e [28](#).

_____. A theory of die-swell revisited. **Journal of non-newtonian fluid mechanics**, Elsevier, v. 129, n. 2, p. 85–87, 2005. Citado na página [27](#).

TANNER, R. I.; HUANG, X. Stress singularities in non-newtonian stick-slip and edge flows. **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, Elsevier, v. 50, n. 2-3, p. 135–160, 1993. Citado nas páginas [56](#), [100](#), [101](#) e [110](#).

THIEN, N.; TANNER, R. A new constitutive equation derived from network theory. **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, Elsevier, v. 2, n. 4, p. 353–365, 1977. Citado na página [34](#).

VAITHIANATHAN, T.; COLLINS, L. R. Numerical approach to simulating turbulent flow of a viscoelastic polymer solution. **Journal of Computational Physics**, v. 187, p. 1–21, 2003. Citado nas páginas [34](#) e [133](#).

VALLI, A. Periodic and stationary solutions for compressible navier-stokes equations via a stability method. **Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze**, v. 10, n. 4, p. 607–647, 1983. Citado na página 57.

WAPPEROM, P.; RENARDY, M. Numerical prediction of the boundary layers in the flow around a cylinder using a fixed velocity field. **Journal of non-newtonian fluid mechanics**, Elsevier, v. 125, n. 1, p. 35–48, 2005. Citado na página 31.

EQUAÇÕES EM COORDENADAS POLARES

Neste Capítulo, reescrevemos em coordenadas polares algumas das equações apresentadas nas Seções 2.1 e 2.2. Estas equações serão usadas na Seção sobre análise assintótica e integração sobre linhas de corrente. Com esse objetivo, apresentamos os procedimentos para a conversão entre coordenadas Cartesianas e polares, bem como as equações em coordenadas polares.

As relações entre as bases canônicas cartesiana $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}\}$ e polar $\{\hat{\mathbf{r}}, \hat{\theta}\}$, são dadas por

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{r}} = \cos(\theta)\hat{\mathbf{i}} + \sin(\theta)\hat{\mathbf{j}}, \\ \hat{\theta} = -\sin(\theta)\hat{\mathbf{i}} + \cos(\theta)\hat{\mathbf{j}}, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

e a relação inversa por

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{i}} = \cos(\theta)\hat{\mathbf{r}} - \sin(\theta)\hat{\theta}, \\ \hat{\mathbf{j}} = \sin(\theta)\hat{\mathbf{r}} + \cos(\theta)\hat{\theta}. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Estas relações, equações (A.1) e (A.2), nos ajudam no processo de conversão de propriedades entre os sistemas Cartesiano e polar. Por exemplo, para transformarmos as componentes da velocidade u e v , do sistema Cartesiano, para v_r e v_θ , do sistema polar, precisamos das relações em (A.2). Por outro lado, para transformarmos v_r e v_θ em u e v , podemos usar a relação (A.1). De fato, escrevendo o campo de velocidade \mathbf{v} em ambos os sistemas coordenados como

$$\begin{cases} \mathbf{v} = u\hat{\mathbf{i}} + v\hat{\mathbf{j}}, \\ \mathbf{v} = v_r\hat{\mathbf{r}} + v_\theta\hat{\theta}, \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

e substituindo as equações (A.2) e (A.1) em (A.3), obtemos as seguintes expressões

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

De modo similar, podemos definir as relações entre o tensor polimérico no sistema Cartesiano e polar. Para isto, expandimos \mathbf{T}^p em ambos os sistemas coordenados, isto é,

$$\begin{cases} \mathbf{T}^p = T_{11}^p \hat{\mathbf{i}} \otimes \hat{\mathbf{i}} + T_{12}^p (\hat{\mathbf{i}} \otimes \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{j}} \otimes \hat{\mathbf{i}}) + T_{22}^p \hat{\mathbf{j}} \otimes \hat{\mathbf{j}}, \\ \mathbf{T}^p = T_{rr}^p \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + T_{r\theta}^p (\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\theta} + \hat{\theta} \otimes \hat{\mathbf{r}}) + T_{\theta\theta}^p \hat{\theta} \otimes \hat{\theta}. \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Assim, substituindo as relações (A.1) e (A.2) em (A.5), obtemos

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{12} & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{rr} & T_{r\theta} \\ T_{r\theta} & T_{\theta\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

e

$$\begin{pmatrix} T_{rr} & T_{r\theta} \\ T_{r\theta} & T_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{12} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Para a conversão entre operadores, como divergente, gradiente, entre outros, precisamos definir as relações de conversão entre as derivadas parciais no sistema Cartesiano e polar. Antes, porém, definimos as relações entre as coordenadas (x, y) e (r, θ) , isto é,

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta), \\ y = r \sin(\theta), \\ x^2 + y^2 = r^2, \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

que implica em

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x} = \cos(\theta), & \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin(\theta)}{r}, \\ \frac{\partial r}{\partial y} = \sin(\theta), & \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos(\theta)}{r}. \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Usando a regra da cadeia para derivadas, podemos reescrever as derivadas em x e y como

$$\begin{cases} \frac{\partial ()}{\partial x} = \frac{\partial ()}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial ()}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \\ \frac{\partial ()}{\partial y} = \frac{\partial ()}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial ()}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}. \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

Substituindo as equações de (A.9) em (A.10) resulta em

$$\begin{cases} \frac{\partial ()}{\partial x} = \frac{\partial ()}{\partial r} \cos(\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial ()}{\partial \theta} \sin(\theta), \\ \frac{\partial ()}{\partial y} = \frac{\partial ()}{\partial r} \sin(\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial ()}{\partial \theta} \cos(\theta). \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

Outra relação importante, usada no processo de transformação das equações em coordenadas Cartesianas para polar, é

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \theta} = \hat{\theta}, \\ \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} = -\hat{\mathbf{r}}. \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

A partir de agora, vamos construir os principais termos ou operadores necessários para expressar a equação constitutiva (2.17) e da continuidade (2.14) em coordenadas polares. Desta forma, iniciamos com o gradiente de velocidade:

- Gradiente de velocidade $\nabla \mathbf{v}$

Expandindo o operador ∇ e o campo de velocidade \mathbf{v} na base canônica $\{\hat{\mathbf{r}}, \hat{\theta}\}$, podemos determinar o gradiente de velocidade em coordenadas polares como

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v}^T = \nabla \otimes \mathbf{v} &= \left(\frac{\partial ()}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial ()}{\partial \theta} \hat{\theta} \right) \otimes (v_r \hat{\mathbf{r}} + u_\theta \hat{\theta}) = \hat{\mathbf{r}} \otimes \left(\frac{\partial (v_r \hat{\mathbf{r}})}{\partial r} + \frac{\partial (v_\theta \hat{\theta})}{\partial r} \right) + \\ &\frac{1}{r} \hat{\theta} \otimes \left(\frac{\partial (v_r \hat{\mathbf{r}})}{\partial \theta} + \frac{\partial (v_\theta \hat{\theta})}{\partial \theta} \right) = \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \hat{\theta} \otimes \hat{\mathbf{r}} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) + \\ &\frac{1}{r} \hat{\theta} \otimes \hat{\theta} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Portanto, o gradiente de velocidade em coordenadas polares é dado por

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

- Tensor taxa de deformação \mathbf{D}

Uma vez que conhecemos o gradiente de velocidade (A.14) e a definição do tensor taxa de deformação (2.5), podemos escrevê-lo como

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) \right) & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.15})$$

- Convecção do tensor polimérico $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{T}^p$

Primeiramente, determinamos o operador convecção como

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \cdot \nabla) &= (v_r \hat{\mathbf{r}} + v_\theta \hat{\theta}) \cdot \left(\frac{\partial ()}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial ()}{\partial \theta} \hat{\theta} \right) = v_r \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial ()}{\partial r} + \frac{1}{r} v_r \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\theta} \frac{\partial ()}{\partial \theta} + v_\theta \hat{\theta} \cdot \hat{r} \frac{\partial ()}{\partial r} + \\ &\frac{1}{r} v_\theta \hat{\theta} \cdot \hat{\theta} \frac{\partial ()}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Portanto,

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) = v_r \frac{\partial()}{\partial r} + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial()}{\partial \theta} \quad (\text{A.17})$$

e

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{T}^p = \left(v_r \frac{\partial()}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial()}{\partial \theta} \right) \cdot \left(T_{rr}^p \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + T_{r\theta}^p \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}} + T_{\theta r}^p \hat{\boldsymbol{\theta}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + T_{\theta\theta}^p \hat{\boldsymbol{\theta}} \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}} \right), \quad (\text{A.18})$$

que implica em

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{T}^p &= \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \left(v_r \frac{\partial T_{rr}^p}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T_{rr}^p}{\partial \theta} - 2 \frac{v_\theta}{r} T_{r\theta}^p \right) + \\ &\quad \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}} \left(v_r \frac{\partial T_{r\theta}^p}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T_{r\theta}^p}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{r} (T_{rr}^p - T_{\theta\theta}^p) \right) + \hat{\boldsymbol{\theta}} \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}} \left(v_r \frac{\partial T_{\theta\theta}^p}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}^p}{\partial \theta} + 2 \frac{v_\theta}{r} T_{\theta r}^p \right), \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

ou ainda, na forma matricial como

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{T}^p = \begin{pmatrix} (\mathbf{v} \cdot \nabla) T_{rr}^p - 2 \frac{v_\theta}{r} T_{r\theta}^p & (\mathbf{v} \cdot \nabla) T_{r\theta}^p + \frac{v_\theta}{r} (T_{rr}^p - T_{\theta\theta}^p) \\ (\mathbf{v} \cdot \nabla) T_{r\theta}^p + \frac{v_\theta}{r} (T_{rr}^p - T_{\theta\theta}^p) & (\mathbf{v} \cdot \nabla) T_{\theta\theta}^p + 2 \frac{v_\theta}{r} T_{\theta r}^p \end{pmatrix}. \quad (\text{A.20})$$

- Deformação afim do tensor polimérico $\nabla \mathbf{v} \mathbf{T}^p + \mathbf{T}^p \nabla \mathbf{v}^T$

Por meio da equação do gradiente de velocidade (A.14), podemos escrever a deformação afim do tensor polimérico como

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v} \mathbf{T}^p + \mathbf{T}^p \nabla \mathbf{v}^T &= \\ \begin{pmatrix} 2 T_{rr}^p \frac{\partial v_r}{\partial r} + 2 \frac{T_{r\theta}^p}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & T_{r\theta}^p \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) \right) + T_{rr}^p \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{T_{\theta\theta}^p}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) \\ T_{r\theta}^p \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) \right) + T_{rr}^p \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{T_{\theta\theta}^p}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & 2 T_{r\theta}^p \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + 2 \frac{T_{\theta\theta}^p}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

- Equação da continuidade

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \left(\frac{\partial()}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial()}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \right) \cdot \left(v_r \hat{\mathbf{r}} + v_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right) = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \quad (\text{A.22})$$

- Equação constitutiva

Por fim, substituindo as equações (A.15), (A.19) e (A.21) em (2.17), obtemos

$$\begin{cases} \frac{\partial T_{rr}^p}{\partial t} + v_r \frac{\partial T_{rr}^p}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T_{rr}^p}{\partial \theta} - 2 T_{rr}^p \frac{\partial v_r}{\partial r} - 2 \frac{T_{r\theta}^p}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{T_{rr}^p}{\text{Wi}} + \frac{\kappa}{(1-\beta)} f_{rr} = 2 \frac{(1-\beta)}{\text{Wi}} \frac{\partial v_r}{\partial r} \\ \frac{\partial T_{r\theta}^p}{\partial t} + v_r \frac{\partial T_{r\theta}^p}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T_{r\theta}^p}{\partial \theta} + T_{rr}^p \frac{v_\theta}{r} - T_{rr}^p \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{T_{\theta\theta}^p}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{T_{r\theta}^p}{\text{Wi}} + \frac{\kappa}{(1-\beta)} f_{r\theta} = \\ \frac{(1-\beta)}{\text{Wi}} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right) \\ \frac{\partial T_{\theta\theta}^p}{\partial t} + v_r \frac{\partial T_{\theta\theta}^p}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}^p}{\partial \theta} + 2 T_{r\theta}^p \frac{v_\theta}{r} - 2 T_{r\theta}^p \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - 2 \frac{T_{\theta\theta}^p}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - 2 \frac{T_{\theta\theta}^p}{r} v_r + \frac{T_{\theta\theta}^p}{\text{Wi}} + \\ \frac{\kappa}{(1-\beta)} f_{\theta\theta} = 2 \frac{(1-\beta)}{\text{Wi}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

onde

$$f_{rr} = \begin{cases} 0, & \text{Oldroyd-B,} \\ (T_{rr}^p + T_{\theta\theta}^p) T_{rr}^p, & \text{PTT,} \\ (T_{rr}^p)^2 + (T_{r\theta}^p)^2, & \text{Giesekus,} \end{cases} \quad f_{r\theta} = \begin{cases} 0, & \text{Oldroyd-B,} \\ (T_{rr}^p + T_{\theta\theta}^p) T_{r\theta}^p, & \text{PTT,} \\ (T_{rr}^p + T_{\theta\theta}^p) T_{r\theta}^p, & \text{Giesekus,} \end{cases} \quad (\text{A.24})$$

$$f_{\theta\theta} = \begin{cases} 0, & \text{Oldroyd-B,} \\ (T_{rr}^p + T_{\theta\theta}^p) T_{\theta\theta}^p, & \text{PTT,} \\ (T_{r\theta}^p)^2 + (T_{\theta\theta}^p)^2, & \text{Giesekus.} \end{cases}$$

Para as equações da formulação natural do tensor (2.47), modificamos apenas os termos convectivos, pela equação (A.17), e o divergente de \mathbf{w} , que passa a ser escrito como

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = \frac{1}{|\mathbf{v}|^4} \left[(v_\theta^2 - v_r^2) \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right) + 4v_r v_\theta \frac{\partial v_r}{\partial r} \right]. \quad (\text{A.25})$$

Em adição, apresentamos também as equações da formulação natural para o caso axissimétrico. Para isto, definimos a velocidade e o tensor polimérico como

$$\mathbf{v} = v_r(r, z) \hat{\mathbf{r}} + v_z(r, z) \mathbf{k}, \quad (\text{A.26})$$

$$\mathbf{T}^p = T_{rr}^p \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + T_{rz}^p (\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{k} + \mathbf{k} \otimes \hat{\mathbf{r}}) + T_{zz}^p \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + T_{\theta\theta}^p \hat{\boldsymbol{\theta}} \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} T_{rr}^p & 0 & T_{rz}^p \\ 0 & T_{\theta\theta}^p & 0 \\ T_{rz}^p & 0 & T_{zz}^p \end{pmatrix}, \quad (\text{A.27})$$

tal que as componentes do tensor não dependam da variável θ .

Para a construção das equações das variáveis naturais, escrevemos

$$\mathbf{T}^p = \frac{1-\beta}{\text{Wi}} (\mathbf{A} - \mathbf{I}) + T_{\theta\theta}^p \hat{\boldsymbol{\theta}} \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (\text{A.28})$$

onde \mathbf{A} é dado por (2.31) e

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{|\mathbf{v}|} (v_r \hat{\mathbf{r}} + v_z \mathbf{k}), \quad \hat{\mathbf{w}} = \frac{1}{|\mathbf{v}|} (-v_r \mathbf{k} + v_z \hat{\mathbf{r}}). \quad (\text{A.29})$$

A equação (A.28) pode ser escrita em coordenadas bidimensionais como

$$\begin{aligned} T_{rr}^p &= \frac{1-\beta}{\text{Wi}} \left(\lambda v_r^2 + 2\mu \frac{v_r v_z}{|\mathbf{v}|^2} + \nu \frac{v_z^2}{|\mathbf{v}|^4} - 1 \right), \\ T_{rz}^p &= \frac{1-\beta}{\text{Wi}} \left(\lambda v_r v_z + \mu \frac{(v_z^2 - v_r^2)}{|\mathbf{v}|^2} - \nu \frac{v_r v_z}{|\mathbf{v}|^4} \right), \\ T_{zz}^p &= \frac{1-\beta}{\text{Wi}} \left(\lambda v_z^2 - 2\mu \frac{v_r v_z}{|\mathbf{v}|^2} + \nu \frac{v_r^2}{|\mathbf{v}|^4} \right), \\ T_{\theta\theta}^p &= T_{\theta\theta}. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Assim, substituindo a relação (A.30) em (A.23) e aplicando algumas manipulações algébricas, semelhante ao que foi feito na Seção 2.2, obtemos o seguinte sistema de equações para as variáveis naturais escalonadas

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial t} + \frac{2\hat{\mu}}{|\mathbf{v}|^2} \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial t} - v_z \frac{\partial v_r}{\partial t} \right) + |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{\hat{\lambda}}{|\mathbf{v}|^2} \right) + 2\hat{\mu} |\mathbf{v}|^2 \nabla \cdot \mathbf{w} + \frac{1}{Wi} (\hat{\lambda} - 1) + \frac{\kappa}{Wi} g_{\hat{\lambda}} = 0, \\ \frac{\partial \hat{\mu}}{\partial t} + \frac{(\hat{\lambda} - \hat{v})}{|\mathbf{v}|^2} \left(v_z \frac{\partial v_r}{\partial t} - v_r \frac{\partial v_z}{\partial t} \right) + \mathbf{v} \cdot \nabla \hat{\mu} + \hat{v} |\mathbf{v}|^2 \nabla \cdot \mathbf{w} + \frac{1}{Wi} \hat{\mu} + \frac{\kappa}{Wi} g_{\hat{\mu}} = 0, \\ \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \frac{2\hat{\mu}}{|\mathbf{v}|^2} \left(v_z \frac{\partial v_r}{\partial t} - v_r \frac{\partial v_z}{\partial t} \right) + \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} \cdot \nabla (\hat{v} |\mathbf{v}|^2) + \frac{1}{Wi} (1 - \hat{v}) + \frac{\kappa}{Wi} g_{\hat{v}} = 0, \\ \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial t} + v_r \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial r} + v_z \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial z} - 2 \left(T_{\theta\theta} \frac{v_r}{r} \right) + \frac{T_{\theta\theta}}{Wi} + \frac{\kappa}{1-\beta} f_{\theta\theta} = 2 \frac{1-\beta}{Wi} \frac{v_r}{r}, \end{cases} \quad (A.31)$$

onde

$$\mathbf{w} = \frac{1}{|\mathbf{v}|} \hat{\mathbf{w}}, \quad \mathbf{v} \cdot \nabla = v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad \nabla \cdot \mathbf{w} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{rv_r}{|\mathbf{v}|^2} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v_r}{|\mathbf{v}|^2} \right),$$

$$g_{\hat{\lambda}} = \begin{cases} 0, & \text{Oldroyd-B,} \\ \left(\hat{\lambda} - 2 + \hat{v} + \frac{Wi}{1-\beta} T_{\theta\theta}^p \right) (\hat{\lambda} - 1), & \text{PTT,} \\ (\hat{\lambda} - 1)^2 + \hat{\mu}^2, & \text{Giesekus,} \end{cases}$$

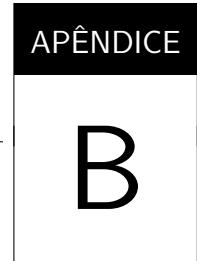
$$g_{\hat{\mu}} = \begin{cases} 0, & \text{Oldroyd-B,} \\ \left(\hat{\lambda} - 2 + \hat{v} + \frac{Wi}{1-\beta} T_{\theta\theta}^p \right) \hat{\mu}, & \text{PTT,} \\ (\hat{\lambda} - 2 + \hat{v}) \hat{\mu}, & \text{Giesekus,} \end{cases} \quad (A.32)$$

$$g_{\hat{v}} = \begin{cases} 0, & \text{Oldroyd-B,} \\ \left(\hat{\lambda} - 2 + \hat{v} + \frac{Wi}{1-\beta} T_{\theta\theta}^p \right) (\hat{v} - 1), & \text{PTT,} \\ (\hat{v} - 1)^2 + \hat{\mu}^2, & \text{Giesekus.} \end{cases}$$

Note que, a equação de $T_{\theta\theta}^p$ (A.31) precisa ser mantida, uma vez que a decomposição (A.28) gera relações entre as variáveis naturais e as componentes T_{rr}^p , T_{rz}^p e T_{zz}^p do tensor polimérico, excluindo a componente $T_{\theta\theta}^p$.

A relação entre (T_{rr}, T_{rz}, T_{zz}) e $(\hat{\lambda}, \hat{\mu}, \hat{v})$ é dada por

$$\begin{aligned} T_{rr} &= \frac{1}{Wi} \left(-1 + \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \left(\hat{\lambda} v_r^2 + 2\hat{\mu} v_r v_z + \hat{v} v_z^2 \right) \right), \\ T_{rz} &= \frac{1}{Wi} \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \left(\hat{\lambda} v_r v_z + \hat{\mu} (v_z^2 - v_r^2) - \hat{v} v_r v_z \right), \\ T_{zz} &= \frac{1}{Wi} \left(-1 + \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \left(\hat{\lambda} v_z^2 - 2\hat{\mu} v_r v_z + \hat{v} v_r^2 \right) \right). \end{aligned} \quad (A.33)$$



ANÁLISE ASSINTÓTICA DO *STICK-SLIP* PARA OS FLUIDOS PTT E GIESEKUS

Este Apêndice é uma extensão da análise assintótica do problema *stick-slip*, apresentada no Capítulo 3 para o modelo Oldroyd-B, mas agora para os modelos PTT e Giesekus. Esta análise segue o que foi feito nos trabalhos de Evans (2013), Evans (2015), porém com a adição de mais detalhes no processo de construção das soluções assintóticas.

B.1 Análise assintótica das equações constitutivas na base Cartesiana

Nesta Seção, apresentamos o estudo assintótico para o problema *stick-slip* com os modelos viscoelásticos PTT e Giesekus na base Cartesiana. Para isto, seguindo a mesma abordagem do Capítulo 3, utilizamos as equações (3.39), (3.40), (3.41) e (3.42), juntamente com as equações constitutivas dos modelos PTT e Giesekus, escritas na forma vetorial como

$$\mathbf{T}^p + \text{Wi} \left[\nabla \mathbf{T}^p + \boldsymbol{\kappa} f(\mathbf{T}^p) \right] = 2\mathbf{D}, \quad (\text{B.1})$$

onde a função f é dada pela equação (2.18). Lembrando que estamos utilizando a mesma adimensionalização do Capítulo 3 e a simplificação $\text{Wi} = 1$.

As equações constitutivas em coordenadas Cartesianas (2.26) e polares (A.23), com

as simplificações do Capítulo 3, e em sua forma bidimensional, são dadas por

$$\begin{cases} (\mathbf{v} \cdot \nabla) T_{11}^p - 2 \frac{\partial u}{\partial x} T_{11}^p - 2 \frac{\partial u}{\partial y} T_{12}^p + T_{11}^p + \kappa f_{11} = 2 \frac{\partial u}{\partial x}, \\ (\mathbf{v} \cdot \nabla) T_{12}^p - \frac{\partial v}{\partial x} T_{11}^p - \frac{\partial u}{\partial y} T_{22}^p + T_{12}^p + \kappa f_{12} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ (\mathbf{v} \cdot \nabla) T_{22}^p - 2 \frac{\partial v}{\partial x} T_{12}^p - 2 \frac{\partial v}{\partial y} T_{22}^p + T_{22}^p + \kappa f_{22} = 2 \frac{\partial v}{\partial y}, \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

onde f_{11} , f_{12} e f_{22} são dadas por (2.27) e

$$\begin{cases} (\mathbf{v} \cdot \nabla) T_{rr}^p - 2 T_{rr}^p \frac{\partial v_r}{\partial r} - 2 \frac{T_{r\theta}^p}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + T_{rr}^p + \kappa f_{rr} = 2 \frac{\partial v_r}{\partial r}, \\ (\mathbf{v} \cdot \nabla) T_{r\theta}^p + T_{rr}^p \frac{v_\theta}{r} - T_{rr}^p \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{T_{\theta\theta}^p}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + T_{r\theta}^p + \kappa f_{r\theta} = \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right), \\ (\mathbf{v} \cdot \nabla) T_{\theta\theta}^p + 2 T_{r\theta}^p \frac{v_\theta}{r} - 2 T_{r\theta}^p \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - 2 \frac{T_{\theta\theta}^p}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - 2 \frac{T_{\theta\theta}^p}{r} v_r + T_{\theta\theta}^p + \kappa f_{\theta\theta} = \\ 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right), \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

onde f_{rr} , $f_{r\theta}$ e $f_{\theta\theta}$ são dadas por (A.24).

Portanto, semelhante ao feito para o fluido Oldroyd-B no Capítulo 3, resolvemos as equações constitutivas (B.2) ou (B.3) em três regiões diferentes do domínio, região externa à camada limite e as regiões internas *stick* e *slip*.

B.1.1 Região externa à camada limite

Na região externa à camada limite temos a mesma desigualdade entre os tensores \mathbf{T}^s e \mathbf{T}^p mencionada no Capítulo 3, isto é, de que o tensor Newtoniano domina sobre o tensor polimérico, conforme equações (3.47) e (3.48). As ordens de magnitude de \mathbf{v} , $\nabla \mathbf{v}$ e \mathbf{T}^s para $r \rightarrow 0$ são dadas por (3.49). Assim, as equações constitutivas dos modelos PTT e Giesekus são reduzidas à (3.50), cuja solução é dada por (3.51) e (3.52), onde as constantes n_1 e C_1 precisam ser determinadas.

Seguindo os trabalhos de Evans (2010a), Evans (2015), para o modelo Giesekus a solução *stretching* do tensor polimérico (3.51) recebe a adição da constante \mathbf{I} ($\frac{\mathbf{I}}{W_i}$ com $W_i = 1$), isto é,

$$\mathbf{T}^p + \mathbf{I} \sim \lambda(\psi) \mathbf{v} \mathbf{v}^T. \quad (\text{B.4})$$

Isto acontece porque à medida que nos aproximamos da parede, na região *stick*, o termo dominante da componente T_{22}^p será a constante 1. Esta modificação na solução em (3.51) é uma característica apenas do modelo Giesekus. Podemos dizer que para este modelo, a aplicação correta da solução *stretching* deve ser sobre o tensor conformação \mathbf{A} , uma vez

que para esta adimensionalização a relação entre \mathbf{T}^p e \mathbf{A} (2.23) é dada por

$$\mathbf{T}^p + \mathbf{I} = \mathbf{A}. \quad (\text{B.5})$$

Desta forma, em determinados momentos da análise na região *stick* teremos que tratar o modelo Giesekus separadamente.

Aplicando a técnica combinação da região externa à camada limite para as regiões *stick* e *slip*, obtemos as mesmas aproximações dadas em (3.59), (3.60) e (3.62). Lembrando que na região *stick* o modelo Giesekus recebe a adição da constante 1 à expressão da componente T_{22}^p , isto é,

$$T_{22}^p + 1 \sim \frac{1}{4} C_1 x^{-\frac{n_1}{2}-3} y^{2n_1+4}. \quad (\text{B.6})$$

B.1.2 Camada limite da superfície stick

B.1.2.1 Comportamento próximo à superfície stick

Para o estudo do comportamento das propriedades próximo à superfície *stick* com os modelos viscoelásticos PTT e Giesekus, fazemos uso das equações de Ψ (3.69), v_r e v_θ (3.70) e $\dot{\gamma}$ e $\dot{\varepsilon}$ (3.71). Assim, substituindo os valores de (3.69) e (3.68) na equação constitutiva em coordenadas polares (B.3), obtemos

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2}C_0r^{-\frac{1}{2}}\theta^2\frac{dT_{rr}^p}{d\theta} - 2C_0r^{-\frac{1}{2}}\theta T_{rr}^p - 4C_0r^{-\frac{1}{2}}T_{r\theta} + \kappa f_{rr} + \frac{T_{rr}^p}{\text{Wi}} &= \frac{2}{\text{Wi}}C_0r^{-\frac{1}{2}}\theta, \\ -\frac{3}{2}C_0r^{-\frac{1}{2}}\theta^2\frac{dT_{r\theta}^p}{d\theta} - \frac{3}{4}C_0r^{-\frac{1}{2}}\theta^2T_{rr}^p - 2C_0r^{-\frac{1}{2}}T_{\theta\theta}^p + \kappa f_{r\theta} + \frac{T_{r\theta}^p}{\text{Wi}} &= \frac{1}{\text{Wi}}\left(2C_0r^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}C_0r^{-\frac{1}{2}}\theta^2\right), \\ -\frac{3}{2}C_0r^{-\frac{1}{2}}\theta^2\frac{dT_{\theta\theta}^p}{d\theta} - \frac{3}{2}C_0r^{-\frac{1}{2}}\theta^2T_{r\theta}^p + 2C_0r^{-\frac{1}{2}}\theta T_{\theta\theta}^p + \kappa f_{\theta\theta} + \frac{T_{\theta\theta}^p}{\text{Wi}} &= -\frac{2}{\text{Wi}}C_0r^{-\frac{1}{2}}\theta, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

que multiplicando por $-\frac{r^{\frac{1}{2}}}{C_0}$ resulta em

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\theta^2\frac{\partial T_{rr}^p}{\partial\theta} + 2\theta T_{rr}^p + 4T_{r\theta}^p - \frac{r^{\frac{1}{2}}}{C_0}\left(\kappa f_{rr} + \frac{T_{rr}^p}{\text{Wi}}\right) &= -\frac{2}{\text{Wi}}\theta, \\ \frac{3}{2}\theta^2\frac{\partial T_{r\theta}^p}{\partial\theta} + \frac{3}{4}\theta^2T_{rr}^p + 2T_{\theta\theta}^p - \frac{r^{\frac{1}{2}}}{C_0}\left(\kappa f_{r\theta} + \frac{T_{r\theta}^p}{\text{Wi}}\right) &= \frac{1}{\text{Wi}}\left(-2 + \frac{3}{4}\theta^2\right), \\ \frac{3}{2}\theta^2\frac{\partial T_{\theta\theta}^p}{\partial\theta} + \frac{3}{2}\theta^2T_{r\theta}^p - 2\theta T_{\theta\theta}^p - \frac{r^{\frac{1}{2}}}{C_0}\left(\kappa f_{\theta\theta} + \frac{T_{\theta\theta}^p}{\text{Wi}}\right) &= \frac{2}{\text{Wi}}\theta. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Semelhante ao feito no Capítulo 3, reescrevemos as componentes do tensor polimérico como (3.74). Desta forma, substituindo (3.68) e (3.74) em (3.46), resulta em

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\theta^2 Q'_{rr} + 2\theta Q_{rr} + 4\theta Q_{r\theta} - \frac{r^{\frac{1}{2}}}{C_0} \left(\kappa Q_{rr}^2 + \frac{Q_{rr}}{\text{Wi}} \right) &= -\frac{2}{\text{Wi}}\theta, \\ \frac{3}{2}\theta Q_{r\theta} + \frac{3}{2}\theta^2 Q'_{r\theta} + \frac{3}{4}\theta Q_{rr} + 2\theta Q_{\theta\theta} - \frac{r^{\frac{1}{2}}}{C_0} \left(\kappa Q_{rr} Q_{r\theta} + \frac{Q_{r\theta}}{\text{Wi}} \right) &= -\frac{1}{\text{Wi}}\frac{2}{\theta}, \\ 3\theta Q_{\theta\theta} + \frac{3}{2}\theta^2 Q'_{\theta\theta} + \frac{3}{2}\theta Q_{r\theta} - 2\theta Q_{\theta\theta} - \frac{r^{-\frac{1}{2}}}{C_0} \left(\kappa \left\{ \frac{Q_{rr} Q_{\theta\theta}}{Q_{r\theta}^2} + \frac{Q_{\theta\theta}}{\text{Wi}} \right\} \right) &= \frac{1}{\text{Wi}}\frac{2}{\theta} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

ou ainda, na forma matricial,

$$\frac{3}{2}\theta^2 \begin{pmatrix} Q'_{rr} \\ Q_{r\theta} \\ Q_{\theta\theta} \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{rr} \\ Q_{r\theta} \\ Q_{\theta\theta} \end{pmatrix} - \frac{r^{\frac{1}{2}}}{C_0} \begin{pmatrix} \kappa Q_{rr}^2 + \frac{Q_{rr}}{\text{Wi}} \\ \kappa Q_{rr} Q_{r\theta} + \frac{Q_{r\theta}}{\text{Wi}} \\ \kappa \left\{ \frac{Q_{rr} Q_{\theta\theta}}{Q_{r\theta}^2} + \frac{Q_{\theta\theta}}{\text{Wi}} \right\} \end{pmatrix} = \frac{1}{\theta} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{\text{Wi}} \\ \frac{2}{\text{Wi}} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.10})$$

Portanto, para baixos valores de θ , a saber $\theta \ll r^{\frac{1}{2}}$, teremos que os dois últimos termos em (B.10) dominam a equação. Por outro lado, para $\theta \gg r^{\frac{1}{2}}$ teremos que os dois primeiros termos em (B.10) passam a dominar.

Além disso, pela equação (3.73), para $\theta \ll r^{-\frac{1}{2}}$, considerando os termos de maior importância apenas, temos que as equações para o comportamento viscométrico das componentes do tensor polimérico são dadas por

$$2\dot{\gamma}T_{r\theta}^p = \kappa f_{rr} + T_{rr}^p, \quad \kappa f_{r\theta} + T_{r\theta}^p = \dot{\gamma}(T_{\theta\theta}^p + 1), \quad \kappa f_{\theta\theta} + T_{\theta\theta}^p = 0. \quad (\text{B.11})$$

Para cada um dos modelos, a equação (B.11) é dada por

- PTT

$$T_{\theta\theta}^p = 0, \quad T_{r\theta}^p + 2\kappa(T_{r\theta}^p)^3 = \dot{\gamma}, \quad T_{rr}^p = 2(T_{r\theta}^p) \quad (\text{B.12})$$

- Giesekus

$$\begin{aligned} \kappa((T_{rr}^p)^2 + (T_{r\theta}^p)^2) + T_{rr}^p &= 2\dot{\gamma}T_{r\theta}^p, \\ \kappa(T_{rr}^p + T_{\theta\theta}^p)T_{r\theta}^p + T_{r\theta}^p &= \dot{\gamma}(T_{\theta\theta}^p + 1), \\ \kappa((T_{r\theta}^p)^2 + (T_{\theta\theta}^p)^2) + T_{\theta\theta}^p &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

As equações do modelo Giesekus (B.13), embora com menos simplificações do que os modelos Oldroyd-B e PTT, podem ser escritas de forma mais compacta. Para isto, usamos algumas manipulações algébricas (SCHLEINIGER; WEINACHT, 1991b).

Assim, tomindo a terceira equação em (B.13) e aplicando a fórmula de Bhaskara na variável $T_{\theta\theta}^p$, obtemos

$$T_{\theta\theta}^p = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\kappa^2(T_{r\theta}^p)^2}}{2\kappa}, \quad (\text{B.14})$$

que pode ser escrita como

$$T_{\theta\theta}^p = \frac{1}{\kappa} (-1 + \phi(T_{r\theta}^p)), \quad (\text{B.15})$$

onde

$$\phi(T_{r\theta}^p) = \sqrt{1 - 4\kappa^2(T_{r\theta}^p)^2}. \quad (\text{B.16})$$

Note que escolhemos o sinal positivo em (B.14), pois, desta forma, podemos obter a expressão do modelo Oldroyd-B quando tomamos $\kappa \rightarrow 0$. Por outro lado, isolando T_{rr}^p na segunda equação em (B.13), obtemos

$$T_{rr}^p = \dot{\gamma} \frac{(T_{\theta\theta}^p + 1)}{\kappa T_{r\theta}^p} - \frac{(1 + T_{\theta\theta}^p)}{\kappa}. \quad (\text{B.17})$$

Por fim, pela primeira equação em (B.13) podemos escrever uma expressão para $\dot{\gamma}$. Para isto, substituímos o valor de $T_{\theta\theta}^p$ (B.15) em (B.17) e, em seguida, substituímos o valor de T_{rr}^p (B.17) na primeira equação em (B.13), obtendo

$$\dot{\gamma}^2 \frac{(2\kappa - 1 + \phi(T_{r\theta}^p))^2}{4\kappa^3 T_{r\theta}^2} + \gamma \left[-\frac{(2\kappa - 1 + \phi(T_{r\theta}^p)) \phi(T_{r\theta}^p)}{2\kappa^2 T_{r\theta}} - 2T_{r\theta}^p \right] + \frac{(\phi^2(T_{r\theta}^p) - 1)}{4\kappa} + \kappa T_{r\theta}^p = 0, \quad (\text{B.18})$$

que aplicando a fórmula de Bhaskara na variável $\dot{\gamma}$, resulta em

$$\dot{\gamma} = 2\kappa T_{r\theta}^p \frac{(1 + (2\kappa - 1)\phi(T_{r\theta}^p))}{(2\kappa - 1 + \phi(T_{r\theta}^p))^2}. \quad (\text{B.19})$$

Note que escolhemos o sinal positivo na fórmula de Bhaskara de modo a evitarmos a solução trivial.

As relações viscométricas para os modelos PTT e Giesekus podem ser simplificadas para baixos valores da distância radial r ($r \ll 1$), uma vez que a taxa de cisalhamento $\dot{\gamma}$ se torna grande, conforme expressão (3.71). Desta forma, simplificando as equações do comportamento viscométrico para o modelo PTT (B.12), obtemos

$$T_{\theta\theta}^p = 0, \quad T_{r\theta}^p = \left(\frac{\dot{\gamma}}{2\kappa} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad T_{rr}^p = 2 \left(\frac{\dot{\gamma}}{2\kappa} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (\text{B.20})$$

De fato, como o valor de $\dot{\gamma}$ cresce à medida que $r \rightarrow 0$, teremos pela segunda equação em (B.12) que $T_{r\theta}^p$ também irá crescer, porém o termo cúbico vai crescer bem mais rápido, de modo que os termos dominantes serão $\dot{\gamma}$ e $(T_{r\theta}^p)^3$, resultando em (B.20).

Para o modelo Giesekus temos primeiramente que obter uma expressão para $\phi(T_{r\theta}^P)$ em termos de κ . Por simplicidade, escrevemos $\phi(T_{r\theta}^P)$ apenas como ϕ . Assim, isolando o valor de $T_{r\theta}^P$ em (B.19) e substituindo em (B.16), resulta na seguinte equação do segundo grau para ϕ

$$\phi^2(2\kappa - 1 - \dot{\gamma}) + \phi(1 - 4\kappa\dot{\gamma} + 2\dot{\gamma}) + (-4\kappa^2\dot{\gamma} + 4\kappa\dot{\gamma} - \dot{\gamma}) = 0, \quad (\text{B.21})$$

que dividindo por $\dot{\gamma}$ e mantendo apenas os termos dominantes em $\dot{\gamma}$ resulta em

$$-\phi^2 + (2 - 4\kappa)\phi + 4\kappa - 4\kappa^2 - 1 = 0. \quad (\text{B.22})$$

Aplicando a formula de Bhaskara na variável ϕ em (B.22) obtemos

$$\phi \sim -2\kappa + 1. \quad (\text{B.23})$$

Para este caso, não foi necessário escolher um sinal para o cálculo de ϕ , pois a equação (B.22) possuí apenas uma raiz.

Substituindo o valor de ϕ (B.23) em (B.16), resulta na seguinte equação para $T_{r\theta}^P$

$$T_{r\theta}^P = \left(\frac{1-\kappa}{\kappa}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.24})$$

Para a equação de $T_{\theta\theta}^P$ temos, primeiramente, que fazer algumas manipulações algébricas em (B.15), isto é,

$$\begin{aligned} T_{\theta\theta}^P &= \frac{1}{2\kappa}(2\kappa - 1 + \phi - 2\kappa) = -1 + \frac{1}{2\kappa}(2\kappa - 1 + \phi) = \\ &-1 + \frac{(2\kappa - 1 + \phi)}{(2\kappa)^{\frac{1}{2}}(T_{r\theta}^P)^{\frac{1}{2}}(1 + (2\kappa - 1)\phi)^{\frac{1}{2}}} \frac{(T_{r\theta}^P)^{\frac{1}{2}}(1 + (2\kappa - 1)\phi)^{\frac{1}{2}}}{(2\kappa)^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

que substituindo as equações de $\dot{\gamma}$ (B.19) e $T_{r\theta}^P$ (B.24) em (B.25), resulta em

$$T_{\theta\theta}^P = -1 + \frac{1}{(\dot{\gamma})^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1-\kappa}{\kappa}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{-4\kappa^2 + 4\kappa}{2\kappa}\right)^{\frac{1}{2}} = -1 + \left(\frac{2\kappa}{\dot{\gamma}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1-\kappa}{\kappa}\right)^{\frac{3}{4}}. \quad (\text{B.26})$$

Por fim, para o cálculo da equação de T_{rr}^P substituímos os valores de $T_{r\theta}^P$ (B.24) e $T_{\theta\theta}^P$ (B.26) em (B.17), de modo a obtermos

$$T_{rr}^P = \left(\frac{2\dot{\gamma}}{\kappa}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1-\kappa}{\kappa}\right)^{\frac{1}{4}}. \quad (\text{B.27})$$

Voltando à equação (B.8), a mesma relação (3.79), obtida no Capítulo 3 para o modelo Oldroyd-B, se aplica aos modelos PTT e Giesekus. Desta forma, pela relação (3.79), podemos determinar a espessura das camadas limites dos modelos PTT e Giesekus. Assim, temos

- PTT

Substituindo os valores de T_{rr}^p e $T_{r\theta}^p$ (B.20) em (3.79), obtemos

$$\dot{\varepsilon}2\left(\frac{\dot{\gamma}}{2\kappa}\right)^{\frac{2}{3}} \sim \dot{\gamma}\left(\frac{\dot{\gamma}}{2\kappa}\right)^{\frac{1}{3}} \rightarrow \dot{\varepsilon} \sim \kappa^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\dot{\gamma}}{2}\right)^{\frac{2}{3}}. \quad (\text{B.28})$$

Além disso, substituindo as expressões de $\dot{\varepsilon}$ e $\dot{\gamma}$ (3.71) em (B.28), resulta em

$$C_0 r^{-\frac{1}{2}} \theta \sim \kappa^{\frac{1}{3}} \left(\frac{2C_0 r^{-\frac{1}{2}}}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \rightarrow \theta \sim r^{\frac{1}{6}}, \quad (\text{B.29})$$

ou ainda, em coordenadas Cartesianas

$$y \sim x^{\frac{7}{6}}. \quad (\text{B.30})$$

- Giesekus

Substituindo os valores de T_{rr}^p (B.27) e $T_{r\theta}^p$ (B.24) em (3.79), obtemos

$$\dot{\varepsilon} \left(\frac{2\dot{\gamma}}{\kappa}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1-\kappa}{\kappa}\right)^{\frac{1}{4}} \sim \dot{\gamma} \left(\frac{1-\kappa}{\kappa}\right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \dot{\varepsilon} \sim \kappa^{\frac{1}{4}}(1-\kappa)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{\dot{\gamma}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.31})$$

Além disso, substituindo as expressões de $\dot{\varepsilon}$ e $\dot{\gamma}$ (3.71) em (B.31), resulta em

$$C_0 r^{-\frac{1}{2}} \theta \sim \kappa^{\frac{1}{4}}(1-\kappa)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{\dot{\gamma}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \theta \sim r^{\frac{1}{4}}, \quad (\text{B.32})$$

ou em coordenadas Cartesianas

$$y \sim x^{\frac{5}{4}}. \quad (\text{B.33})$$

Note que os resultados das espessuras das camadas limites para os modelos PTT (B.30) e Giesekus (B.33) são os mesmos obtidos em (EVANS, 2013; EVANS, 2015) mediante o método das expansões assintóticas. Porém, aqui usamos uma maneira diferente de obtê-los.

B.1.2.2 Escalonamento das variáveis

Agora, com o objetivo de obter o balanceamento correto das equações constitutivas dos modelos PTT e Giesekus próximos à superfície *stick*, utilizamos o método de escalonamento empregue no Capítulo 3. Para isto, usamos a relação entre ε e δ_1 (3.85), as variáveis escalonadas em sua forma geral (3.88) e (3.89) e o comportamento viscométrico discutido na Subseção anterior. Lembrando que, para o modelo Giesekus, a componente T_{22}^p será escalonada como

$$T_{22}^p = -1 + a\varepsilon^{-2}\delta_1^2\bar{T}_{22}^p, \quad (\text{B.34})$$

isto é, adicionamos a constante 1 à T_{22}^p , conforme destacado anteriormente em (B.4) e (B.6).

Como feito para o modelo Oldroyd-B no Capítulo 3, apresentamos o comportamento viscométrico (B.11) em coordenadas Cartesianas, dado por

$$2\dot{\gamma}T_{12}^p = T_{11}^p + \kappa f_{11} = 0, \quad \kappa f_{12} + T_{12}^p = \dot{\gamma}(T_{22}^p + 1), \quad \kappa f_{22} + T_{22}^p = 0, \quad (\text{B.35})$$

onde f_{11} , f_{12} e f_{22} são dadas por (2.27). Note que a equação (B.35) é exatamente a mesma em (B.11) a menos dos índices. Assim, uma maneira simples de transformar a equação (B.11) em (B.35) é substituir os índices r e θ por 1 e 2, respectivamente.

Substituindo os valores de f_{11} , f_{12} e f_{22} (2.27) para cada modelo constitutivos, teremos

- PTT

$$T_{22}^p = 0, \quad \dot{\gamma} = T_{12}^p + 2\kappa(T_{12}^p)^3, \quad T_{11}^p = 2\text{Wi}(T_{12}^p)^2. \quad (\text{B.36})$$

- Giesekus

$$\begin{aligned} -2T_{12}^p\dot{\gamma} + T_{11}^p + \kappa((T_{11}^p)^2 + (T_{12}^p)^2) &= 0, & -T_{22}^p\dot{\gamma} + T_{12}^p + \kappa(T_{11}^p + T_{22}^p)T_{12}^p &= \dot{\gamma}, \\ T_{22}^p + \kappa((T_{12}^p)^2 + (T_{22}^p)^2) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

Assim, de modo a obtermos a espessura da camada limite *stick*, bem como o valor de n_1 na definição da função $\lambda(\psi)$ em (3.52), vamos substituir os valores escalonados da velocidade \mathbf{v} e do tensor polimérico \mathbf{T}^p , equações (3.89) e (3.90), nas equações que definem o comportamento viscométricos para os modelos PTT e Giesekus, equações (B.36) e (B.37), respectivamente. Desta forma, segue abaixo o cálculo dos valores de n_1 e da relação $\delta_1(\varepsilon)$ para cada um dos modelos constitutivos em estudo.

- PTT

Substituindo os valores escalonados de \mathbf{v} e \mathbf{T}^p , equações (3.89) e (3.90), em (B.36) obtemos

$$\begin{aligned} (a\varepsilon^{-2}\delta_1^2)\bar{T}_{22}^p &= 0, \\ \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{Y}} &= (a\varepsilon^{-1}\delta_1)\bar{T}_{12}^p + 2\kappa(\bar{T}_{12}^p)^3(a^3\varepsilon^{-3}\delta_1^3), \\ a\bar{T}_{11}^p &= 2(\bar{T}_{12}^p)^2(a^2\varepsilon^{-2}\delta_1^2). \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

Assim, a partir da terceira equação em (B.38), obtemos a seguinte igualdade

$$a = a^2\varepsilon^{-2}\delta_1^2 \Rightarrow a = \varepsilon^2\delta_1^{-2}. \quad (\text{B.39})$$

Desta forma, substituindo o valor de a na segunda equação em (B.38), obtemos

$$\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{Y}} = (\varepsilon \delta_1^{-1}) \bar{T}_{12}^p + 2\kappa (\bar{T}_{12}^p)^3 (\varepsilon^3 \delta_1^{-3}). \quad (\text{B.40})$$

Os termos mais influentes em (B.40) são $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ e $\varepsilon^3 \delta_1^{-3}$ (pois $\frac{\varepsilon}{\delta_1} > 1$). Assim, igualando os termos dominantes, obtemos

$$\varepsilon^{-\frac{1}{2}} = \varepsilon^3 \delta_1^{-3} \Rightarrow \delta_1 = \varepsilon^{\frac{7}{6}} \quad (\text{B.41})$$

Além disso, tomando os valores de δ_1 e a , equações (B.39) e (B.41), e comparando com o valor de a dado pela equação (3.91), obtemos

$$\varepsilon^{-\frac{n_1}{2}-1} \delta_1^{2n_1+2} = \varepsilon^2 \delta_1^{-2} \Rightarrow \varepsilon^{-\frac{n_1}{2}-1} \varepsilon^{\frac{7}{6}n_1+\frac{7}{6}} = \varepsilon^2 \varepsilon^{-\frac{7}{3}}, \quad (\text{B.42})$$

que implica em

$$-\frac{n_1}{2} - 1 + \frac{7}{6}n_1 + \frac{7}{6} = -\frac{1}{3} \Rightarrow n_1 = -\frac{10}{11}. \quad (\text{B.43})$$

- Giesekus

Para o modelo Giesekus, devemos ter o cuidado de acrescentar a constante 1 à componente T_{22}^p do tensor polimérico, conforme equação (B.34). Desta forma, a equação viscométrica do modelo Giesekus nas variáveis escalonadas é dada por

$$\begin{aligned} & - \left(a\varepsilon^{-\frac{3}{2}} \delta_1 \right) 2\bar{T}_{12}^p \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{Y}} + a\bar{T}_{11}^p + \kappa \left(a^2 (\bar{T}_{11}^p)^2 + (a^2 \varepsilon^{-2} \delta_1^2) (\bar{T}_{12}^p)^2 \right) = 0 \\ & \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{Y}} - \left(a\varepsilon^{-\frac{5}{2}} \delta_1^2 \right) \bar{T}_{22}^p \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{Y}} + (a\varepsilon^{-1} \delta_1) \bar{T}_{12}^p + \kappa \left[(a^2 \varepsilon^{-1} \delta_1) \bar{T}_{11}^p \bar{T}_{12}^p - \right. \\ & \left. (a\varepsilon^{-1} \delta_1) \bar{T}_{12}^p + (a^2 \varepsilon^{-3} \delta_1^3) \bar{T}_{22}^p \bar{T}_{12}^p \right] = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{Y}} \\ & - 1 + (a\varepsilon^{-2} \delta_1^2) \bar{T}_{22}^p + \kappa \left[(a^2 \varepsilon^{-2} \delta_1^2) (\bar{T}_{12}^p)^2 + 1 - (a\varepsilon^{-2} \delta_1^2) 2\bar{T}_{22}^p + \right. \\ & \left. (a^2 \varepsilon^{-4} \delta_1^4) (\bar{T}_{22}^p)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

Conforme já observado na subseção anterior, a equação viscométrica para o modelo Giesekus possui menos simplificações do que para os outros modelos, Oldroyd-B e PTT, tornando a análise deste modelo um pouco mais complicada. Por exemplo, considerando as duas primeiras equações em (B.44), não sabemos ao certo quais são os termos mais influentes e como devemos compará-los. Assumindo $a > 1$, temos que o termo mais influente da primeira equação é a^2 , porém não sabemos com qual termo devemos compará-lo, uma vez que desconhecemos o termo dominante entre $a\delta_1\varepsilon^{-\frac{3}{2}}$ e $a^2\delta_1^2\varepsilon^{-2}$. A mesma incerteza acontece quando analisamos a segunda equação em (B.44), na qual não sabemos distinguir os termos mais influentes entre $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$, $a\delta_1^2\varepsilon^{-\frac{5}{2}}$ e $a^2\delta_1\varepsilon^{-1}$. Por outro lado, os termos mais influentes na terceira equação em (B.44)

são claramente identificados como sendo 1 e $a^2\epsilon^{-2}\delta_1^2$. Desta forma, igualando estes termos, obtemos

$$1 = a^2\epsilon^{-2}\delta_1^2 \Rightarrow a = \epsilon\delta_1^{-1}. \quad (\text{B.45})$$

Substituindo o valor de a (B.45) na primeira equação em (B.44), obtemos

$$-\left(\epsilon^{-\frac{1}{2}}\right)2\bar{T}_{12}^p\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{Y}} + (\epsilon\delta_1^{-1})\bar{T}_{11}^p + \kappa\left((\epsilon^2\delta^{-2})(\bar{T}_{11}^p)^2 + (\epsilon^{-1}\delta_1)(\bar{T}_{12}^p)^2\right) = 0, \quad (\text{B.46})$$

tal que os termos mais influentes em (B.46) são $\epsilon^{-\frac{1}{2}}$ e $\epsilon^2\delta_1^{-2}$, que resultam em

$$\delta_1 = \epsilon^{\frac{5}{4}}. \quad (\text{B.47})$$

Além disso, tomando os valores de δ_1 e a , equações (B.45) e (B.47), e comparando com o valor de a dado pela equação (3.91), obtemos

$$\epsilon^{-\frac{n_1}{2}-1}\delta_1^{2n_1+2} = \epsilon\delta_1 \Rightarrow \epsilon^{-\frac{n_1}{2}-1}\epsilon^{\frac{5}{2}n_1+\frac{5}{2}} = \epsilon^{-\frac{1}{4}}, \quad (\text{B.48})$$

que implica em

$$-\frac{n_1}{2} - 1 + \frac{5}{2}n_1 + \frac{5}{2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow n_1 = -\frac{7}{8}. \quad (\text{B.49})$$

Uma maneira mais simples de obtermos os valores de δ_1 e n_1 para os modelos PTT e Giesekus é usarmos as relações simplificadas das equações que representam o comportamento viscométrico, equações (B.20), (B.24), (B.26) e (B.27). Por exemplo, para o modelo Giesekus, escrevendo as equação (B.24) e (B.27) em coordenadas Cartesianas resultam em

$$T_{12}^p = \left(\frac{1-\kappa}{\kappa}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad T_{11}^p = \left(\frac{2\dot{\gamma}}{\kappa}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1-\kappa}{\kappa}\right)^{\frac{1}{4}}. \quad (\text{B.50})$$

Assim, aplicando as variáveis escalonadas em (B.50), obtemos

$$(a\epsilon^{-1}\delta_1)\bar{T}_{12}^p = \left(\frac{1-\kappa}{\kappa}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{e} \quad a\bar{T}_{11}^p = \left(\frac{\epsilon^{-\frac{1}{2}}\delta_1}{\delta_1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\kappa}\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{Y}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1-\kappa}{\kappa}\right)^{\frac{1}{4}}. \quad (\text{B.51})$$

Por fim, as equações em (B.51) resultam em

$$a\epsilon^{-1}\delta_1 = 1, \quad a = \epsilon^{-\frac{1}{4}}, \quad (\text{B.52})$$

que implica em

$$a = \epsilon^{-\frac{1}{4}} \quad \delta_1 = \epsilon^{\frac{5}{4}}. \quad (\text{B.53})$$

Como já vimos anteriormente, a equação (B.53) resulta em $n_1 = -\frac{7}{8}$, confirmando os valores obtidos anteriormente pela equação (B.44).

Além disso, as relações entre ϵ e δ_1 calculadas pelo escalonamento para os modelos PTT e Giesekus, equações (B.41) e (B.47), respectivamente, também estão em concordância com os valores calculados na subseção anterior, equações (B.30) e (B.33).

B.1.2.3 Equações da camada limite stick

Uma vez que conhecemos as relações entre ε e δ_1 para os modelos PTT e Giesekus, equações (B.41) e (B.47), respectivamente, podemos atualizar o escalonamento das variáveis, equações (3.88) e (3.89), para cada um dos modelos constitutivo, como

- PTT

$$\begin{aligned} x &= \varepsilon \bar{X}, \quad y = \varepsilon^{\frac{7}{6}} \bar{Y}, \\ \psi &= \varepsilon^{\frac{11}{6}} \bar{\Psi}, \quad u = \varepsilon^{\frac{2}{3}} \bar{U}, \quad v = \varepsilon^{\frac{5}{6}} \bar{V}, \\ T_{11}^s &= \varepsilon^{-\frac{1}{3}} \bar{T}_{11}^s, \quad T_{12}^s = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \bar{T}_{12}^s, \quad T_{22}^s = \varepsilon^{-\frac{1}{3}} \bar{T}_{22}^s, \\ \lambda &= \varepsilon^{-\frac{5}{3}} \bar{\lambda}, \\ T_{11}^p &= \varepsilon^{-\frac{1}{3}} \bar{T}_{11}^p, \quad T_{12}^p = \varepsilon^{-\frac{1}{6}} \bar{T}_{12}^p, \quad T_{22}^p = \bar{T}_{22}^p. \end{aligned} \tag{B.54}$$

- Giesekus

$$\begin{aligned} x &= \varepsilon \bar{X}, \quad y = \varepsilon^{\frac{5}{4}} \bar{Y}, \\ \psi &= \varepsilon^2 \bar{\Psi}, \quad u = \varepsilon^{\frac{3}{4}} \bar{U}, \quad v = \varepsilon \bar{V}, \\ T_{11}^s &= \varepsilon^{-\frac{1}{4}} \bar{T}_{11}^s, \quad T_{12}^s = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \bar{T}_{12}^s, \quad T_{22}^s = \varepsilon^{-\frac{1}{4}} \bar{T}_{22}^s, \\ \lambda &= \varepsilon^{-\frac{7}{4}} \bar{\lambda}, \\ T_{11}^p &= \varepsilon^{-\frac{1}{4}} \bar{T}_{11}^p, \quad T_{12}^p = \bar{T}_{12}^p, \quad T_{22}^p + \frac{1}{\text{Wi}} = \varepsilon^{\frac{1}{4}} \bar{T}_{22}^p. \end{aligned} \tag{B.55}$$

Semelhante ao feito no Capítulo 3, utilizamos as relações entre \bar{U} , \bar{V} e $\bar{\Psi}$ (3.102) para o uso do método de similaridades para a solução das equações constitutivas. Assim, no que segue apresentamos as equações da camada limite e a solução para cada um dos modelos constitutivos.

- PTT

Substituindo as variáveis escalonas (B.54) em (B.2), obtemos

$$\begin{aligned}
 & \left(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\right) \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}} \frac{\partial \bar{T}_{11}^p}{\partial \bar{X}} - \left(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\right) \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}} \frac{\partial \bar{T}_{11}^p}{\partial \bar{Y}} - 2\left(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\right) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X} \partial \bar{Y}} \bar{T}_{11}^p - 2\left(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\right) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}^2} \bar{T}_{12}^p + \\
 & \left(\varepsilon^{-\frac{1}{3}}\right) \bar{T}_{11}^p + \kappa \left[\left(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\right) (\bar{T}_{11}^p)^2 + \left(\varepsilon^{-\frac{1}{3}}\right) \bar{T}_{22}^p \bar{T}_{11}^p \right] = 2\left(\varepsilon^{-\frac{1}{3}}\right) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X} \partial \bar{Y}}, \\
 & \left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right) \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}} \frac{\partial \bar{T}_{12}^p}{\partial \bar{X}} - \left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right) \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}} \frac{\partial \bar{T}_{12}^p}{\partial \bar{Y}} + \left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}^2} \bar{T}_{11}^p - \left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}^2} \bar{T}_{22}^p + \\
 & \left(\varepsilon^{-\frac{1}{6}}\right) \bar{T}_{12}^p + \kappa \left[\left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right) \bar{T}_{11}^p \bar{T}_{12}^p + \left(\varepsilon^{-\frac{1}{6}}\right) \bar{T}_{22}^p \bar{T}_{12}^p \right] = \left[\left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}^2} - \left(\varepsilon^{-\frac{1}{6}}\right) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}^2} \right], \\
 & \left(\varepsilon^{-\frac{1}{3}}\right) \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}} \frac{\partial \bar{T}_{22}^p}{\partial \bar{X}} - \left(\varepsilon^{-\frac{1}{3}}\right) \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}} \frac{\partial \bar{T}_{22}^p}{\partial \bar{Y}} + 2\left(\varepsilon^{-\frac{1}{3}}\right) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}^2} \bar{T}_{12}^p + 2\left(\varepsilon^{-\frac{1}{3}}\right) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y} \partial \bar{X}} \bar{T}_{22}^p + \\
 & \bar{T}_{22}^p + \kappa \left[\left(\varepsilon^{-\frac{1}{3}}\right) \bar{T}_{11}^p \bar{T}_{22}^p + (\bar{T}_{22}^p)^2 \right] = -2\left(\varepsilon^{-\frac{1}{3}}\right) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y} \partial \bar{X}}.
 \end{aligned} \tag{B.56}$$

Assim, mantendo os termos de mais alta ordem em ε , obtemos o seguinte sistema de equações na região *stick*

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}} \frac{\partial \bar{T}_{11}^p}{\partial \bar{X}} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}} \frac{\partial \bar{T}_{11}^p}{\partial \bar{Y}} - 2 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X} \partial \bar{Y}} \bar{T}_{11}^p - 2 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}^2} \bar{T}_{12}^p + \kappa (\bar{T}_{11}^p)^2 = 0, \\
 & \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}} \frac{\partial \bar{T}_{12}^p}{\partial \bar{X}} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}} \frac{\partial \bar{T}_{12}^p}{\partial \bar{Y}} + \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}^2} \bar{T}_{11}^p - \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}^2} \bar{T}_{22}^p + \kappa \bar{T}_{11}^p \bar{T}_{12}^p = \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}^2}, \\
 & \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}} \frac{\partial \bar{T}_{22}^p}{\partial \bar{X}} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}} \frac{\partial \bar{T}_{22}^p}{\partial \bar{Y}} + 2 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}^2} \bar{T}_{12}^p + 2 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y} \partial \bar{X}} \bar{T}_{22}^p + \kappa \bar{T}_{11}^p \bar{T}_{22}^p = -2 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y} \partial \bar{X}},
 \end{aligned} \tag{B.57}$$

sujeito às condições de combinação

$$\bar{T}_{11}^p \sim 4C_1 \bar{X}^{-\frac{6}{11}} \bar{Y}^{\frac{2}{11}}, \quad C_1 \bar{X}^{-\frac{17}{11}} \bar{Y}^{\frac{13}{11}}, \quad \bar{T}_{22}^p \sim \frac{1}{4} C_1 \bar{X}^{-\frac{28}{11}} \bar{Y}^{\frac{24}{11}}, \quad \text{para } \bar{Y} \rightarrow +\infty, \tag{B.58}$$

e as condições derivadas para o comportamento viscométrico próximo à parede

$$\bar{T}_{11}^p \sim 2 \frac{C_0^{\frac{2}{3}}}{\kappa^{\frac{2}{3}}} \bar{X}^{-\frac{1}{3}}, \quad \bar{T}_{12}^p \sim \frac{C_0^{\frac{1}{3}}}{\kappa^{\frac{1}{3}}} \bar{X}^{-\frac{1}{6}}, \quad \bar{T}_{22}^p \sim \frac{C_0^{\frac{1}{3}}}{\kappa^{\frac{1}{3}}} \bar{X}^{-\frac{7}{6}} \bar{Y}, \quad \text{para } \bar{Y} \rightarrow 0^+. \tag{B.59}$$

Estas condições de contorno foram obtidas de maneira semelhante ao que foi feito para o modelo Oldroyd-B.

Assim, substituindo a equação (3.110) em (B.57), resulta nas seguintes relações

$$\theta_1 = \frac{\gamma}{\alpha \beta}, \quad \theta_2 = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \theta_3 = 1. \tag{B.60}$$

Por outro lado, pela expressão de $\bar{\Psi}$, equação (3.108), temos a relação entre γ , α e β

$$\gamma = \alpha^{-\frac{1}{2}} \beta^2. \tag{B.61}$$

Desta forma, escolhendo uma expressão de algumas das condições de contorno, combinação (B.58) ou comportamento viscométrico (B.59), podemos determinar os valores de θ_1 , θ_2 e θ_3 como funções apenas de α . Antes porém, precisamos determinar as expressões de β e γ em função de α . Assim, tomando, por simplicidade, a equação de T_{22}^p da condição de combinação (B.58) e comparando com a expressão para θ_3 em (B.60), juntamente com a expressão para γ em (B.61), obtemos

$$\beta = \alpha^{\frac{7}{6}}, \quad \gamma = \alpha^{\frac{11}{6}}. \quad (\text{B.62})$$

Tomando $\alpha = \bar{X}$, temos por (3.110) que

$$\bar{\Psi} = \bar{X}^{\frac{11}{6}} \psi \left(\frac{\bar{X}}{\bar{Y}}, \frac{\bar{Y}}{\bar{X}^{\frac{7}{6}}} \right) = \bar{X}^{\frac{11}{6}} s(\xi), \quad (\text{B.63})$$

onde

$$\xi = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}^{\frac{7}{6}}}. \quad (\text{B.64})$$

Portanto, a solução de similaridade para as componentes do tensor polimérico é dada por

$$\bar{T}_{11} = \bar{X}^{-\frac{1}{3}} t_{11}^p, \quad \bar{T}_{12}^p = \bar{X}^{-\frac{1}{6}} t_{12}^p, \quad \bar{T}_{22}^p = t_{22}^p, \quad (\text{B.65})$$

que substituindo em (B.57), resulta em

$$\begin{aligned} \frac{11}{6} \xi^2 t_{11}^{p'} - \frac{4}{3} \xi t_{11}^p + 4t_{12}^p - \frac{\kappa}{C_0} t_{11}^{p2} &= 0, \\ \frac{11}{6} \xi^2 t_{12}^{p'} + \frac{1}{3} \xi t_{12}^p - \frac{3}{4} \xi^2 t_{11}^p + 2(1 + t_{22}^p) - \frac{\kappa}{C_0} t_{11}^p t_{12}^p &= 0, \\ \frac{11}{6} \xi^2 t_{22}^{p'} - \frac{3}{2} \xi^2 t_{12}^p + 2\xi(t_{22}^p + 1) - \frac{\kappa}{C_0} t_{11}^p t_{22}^p &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.66})$$

As condições de combinação e viscométrica, são dadas, respectivamente, por

$$t_{11}^p \sim 2 \frac{C_0^{\frac{2}{3}}}{\kappa^{\frac{2}{3}}}, \quad t_{12}^p \sim \frac{C_0^{\frac{1}{3}}}{\kappa^{\frac{1}{3}}}, \quad t_{22}^p \sim \frac{C_0^{\frac{1}{3}}}{\kappa^{\frac{1}{3}}} \xi, \quad \text{para } \xi \rightarrow 0 \quad (\text{B.67})$$

e

$$t_{11}^p \sim 4C_1 \xi^{\frac{2}{11}}, \quad t_{12}^p \sim C_1 \xi^{\frac{13}{11}}, \quad t_{22}^p \sim \frac{1}{4} C_1 \xi^{\frac{24}{11}}, \quad \text{para } \xi \rightarrow +\infty \quad (\text{B.68})$$

A solução numérica do sistema (B.66) é obtida por meio da função ode15s do MATLAB. Os parâmetros usados na solução foram domínio $[10^{-6}, 10^{10}]$ e tolerâncias $Tol = AbsTol = 10^{-13}$. A estimativa do valor de C_1 é dependente de κ , de modo que para $\kappa = 0.1$, obtemos

$$C_1 = 1.728247, \quad (\text{B.69})$$

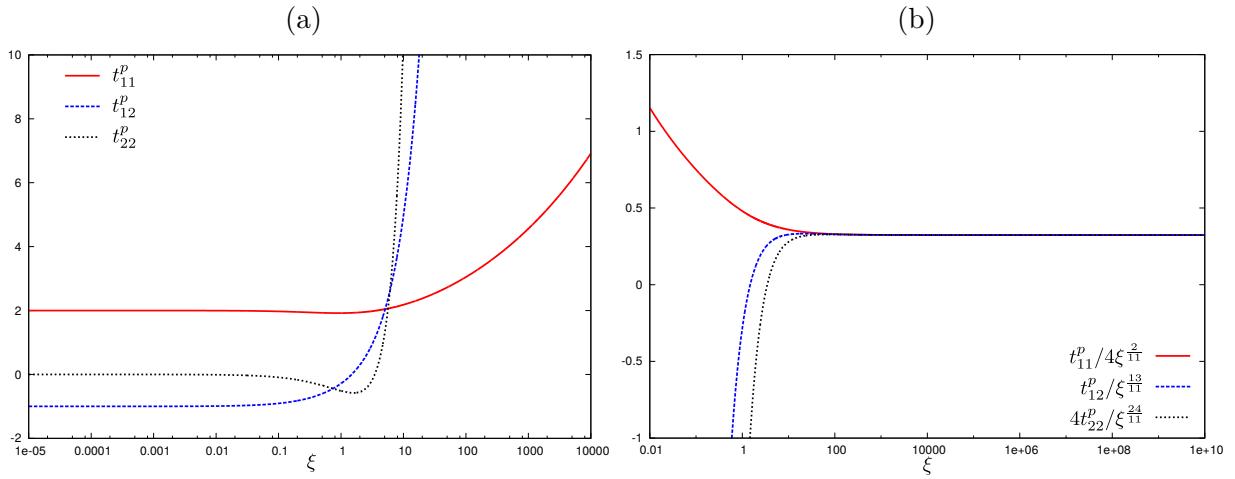
que é diferente do resultado obtido em (EVANS, 2013). Isto acontece pois em (EVANS, 2013) é adicionado o valor de κ à função de corrente, além da remoção de κ das equações constitutivas por meio de um escalonamento apropriado. Desta

forma, como optamos por manter a expressão da corrente num formato geral, sem o κ , e não removemos o valor de κ das equações constitutivas, obtemos um valor diferente para C_1 . Porém, conseguimos simular o escalonamento feito em (EVANS, 2013) por tomar $\kappa = 1$. Fazendo isto, obtemos

$$C_1 = 0.323842, \quad (\text{B.70})$$

que é o mesmo valor obtido em (EVANS, 2013). Os perfis de t_{11}^p , t_{12}^p e t_{22}^p e a estimativa para C_1 são apresentadas na Figura 42.

Figura 42 – Solução de similaridade para o problema *stick-slip* com o modelo PTT: (a) perfis das componentes t_{11}^p , t_{12}^p e t_{22}^p e (b) estimativas do valor de C_1 .



Fonte: Elaborada pelo autor.

- Giesekus

Substituindo as variáveis escalonas (B.55) em (B.2), obtemos

$$\begin{aligned} & \left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right) \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}} \frac{\partial \bar{T}_{11}^p}{\partial \bar{X}} - \left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right) \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}} \frac{\partial \bar{T}_{11}^p}{\partial \bar{Y}} - 2\left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X} \partial \bar{Y}} \bar{T}_{11}^p - 2\left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}^2} \bar{T}_{12}^p + \\ & \left(\varepsilon^{-\frac{1}{4}}\right) \bar{T}_{11}^p + \kappa \left[\left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right) (\bar{T}_{11}^p)^2 + (\bar{T}_{12}^p)^2 \right] = 2\left(\varepsilon^{-\frac{1}{4}}\right) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}^2}, \\ & \left(\varepsilon^{-\frac{1}{4}}\right) \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}} \frac{\partial \bar{T}_{12}^p}{\partial \bar{X}} - \left(\varepsilon^{-\frac{1}{4}}\right) \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}} \frac{\partial \bar{T}_{12}^p}{\partial \bar{Y}} + \left(\varepsilon^{-\frac{1}{4}}\right) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}^2} \bar{T}_{11}^p - \left(\varepsilon^{-\frac{1}{4}}\right) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}^2} \bar{T}_{22}^p + \\ & \left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}^2} + \bar{T}_{12}^p + \kappa \left[\left(\varepsilon^{-\frac{1}{4}}\right) \bar{T}_{11}^p \bar{T}_{12}^p - \bar{T}_{12}^p + \left(\varepsilon^{\frac{1}{4}}\right) \bar{T}_{22}^p \bar{T}_{12}^p \right] = \left[\left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}^2} - \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}^2} \right], \quad (\text{B.71}) \\ & \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}} \frac{\partial \bar{T}_{22}^p}{\partial \bar{X}} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}} \frac{\partial \bar{T}_{22}^p}{\partial \bar{Y}} + 2 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}^2} \bar{T}_{12}^p + 2 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y} \partial \bar{X}} \bar{T}_{22}^p - 2\left(\varepsilon^{-\frac{1}{4}}\right) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y} \partial \bar{X}} - 1 + \\ & \left(\varepsilon^{\frac{1}{4}}\right) \bar{T}_{22}^p + \kappa \left[(\bar{T}_{12}^p)^2 + \left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right) (\bar{T}_{22}^p)^2 - 2\left(\varepsilon^{\frac{1}{4}}\right) \bar{T}_{22}^p + 1 \right] = -2\left(\varepsilon^{-\frac{1}{4}}\right) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y} \partial \bar{X}}. \end{aligned}$$

Assim, mantendo os termos de mais alta ordem em $\boldsymbol{\varepsilon}$, obtemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}} \frac{\partial \bar{T}_{11}^p}{\partial \bar{X}} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}} \frac{\partial \bar{T}_{11}^p}{\partial \bar{Y}} - 2 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X} \partial \bar{Y}} \bar{T}_{11}^p - 2 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}^2} \bar{T}_{12}^p + \kappa (\bar{T}_{11}^p)^2 &= 0, \\ \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}} \frac{\partial \bar{T}_{12}^p}{\partial \bar{X}} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}} \frac{\partial \bar{T}_{12}^p}{\partial \bar{Y}} + \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}^2} \bar{T}_{11}^p - \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}^2} \bar{T}_{22}^p + \kappa \bar{T}_{11}^p \bar{T}_{12}^p &= 0, \\ \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}} \frac{\partial \bar{T}_{22}^p}{\partial \bar{X}} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}} \frac{\partial \bar{T}_{22}^p}{\partial \bar{Y}} + 2 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}^2} \bar{T}_{12}^p + 2 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y} \partial \bar{X}} \bar{T}_{22}^p + \kappa (\bar{T}_{12}^p)^2 &= 1 - \kappa, \end{aligned} \quad (\text{B.72})$$

sujeito às condições de combinação e do comportamento viscométrico. As condições do comportamento viscométrico são obtidas a partir das equações (B.24), (B.26) e (B.27). Assim, substituindo os índices r e θ por 1 e 2, respectivamente, e os valores escalonados de T_{11}^p , T_{12}^p e T_{22}^p (B.55) em (B.24), (B.26) e (B.27), obtemos

$$\bar{T}_{11}^p \sim 2 \frac{C_0^{\frac{1}{2}}}{\kappa^{\frac{1}{2}}} \bar{X}^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{1-\kappa}{\kappa} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad \bar{T}_{12}^p \sim \left(\frac{1-\kappa}{\kappa} \right), \quad \bar{T}_{22}^p \sim \kappa^{\frac{1}{2}} C_0^{-\frac{1}{2}} \bar{X}^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1-\kappa}{\kappa} \right)^{\frac{3}{4}} \quad \text{para } \xi \rightarrow 0^+. \quad (\text{B.73})$$

Por outro lado, as condições de combinação são dadas por

$$\begin{aligned} \bar{T}_{11}^p \sim 4 C_1 \bar{X}^{-\frac{9}{16}} \bar{Y}^{\frac{1}{4}}, \quad \bar{T}_{12}^p \sim C_1 \bar{X}^{-\frac{25}{16}} \bar{Y}^{\frac{5}{4}}, \quad \bar{T}_{22}^p \sim \frac{1}{4} C_1 \bar{X}^{-\frac{41}{16}} \bar{Y}^{\frac{9}{4}}, \\ \text{para } \xi \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (\text{B.74})$$

Semelhante ao que foi feito para os modelos Oldroyd-B e PTT, substituímos a equação (3.110) em (B.72), resultando nas seguintes relações

$$\theta_1 = \frac{\gamma}{\alpha\beta}, \quad \theta_2 = \frac{\gamma}{\alpha}, \quad \theta_3 = \frac{\gamma\beta}{\alpha^3}. \quad (\text{B.75})$$

Assim, tomando a primeira expressão em (B.74), juntamente com a equação de Ψ (3.108), e substituindo o valor de θ_1 em (B.75), obtemos

$$\beta = \alpha^{\frac{5}{4}}, \quad \gamma = \alpha^2. \quad (\text{B.76})$$

Portanto, fazendo $\alpha = \bar{X}$, escrevemos $\bar{\Psi}$ como

$$\bar{\Psi} = \bar{X}^2 s(\xi), \quad (\text{B.77})$$

onde

$$\xi = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}^{\frac{5}{4}}}. \quad (\text{B.78})$$

Desta forma, a solução de similaridade para as componentes do tensor $\bar{\mathbf{T}}^p$ são

$$\bar{T}_{11}^p = \bar{X}^{-\frac{1}{4}} t_{11}^p, \quad \bar{T}_{12}^p = t_{12}^p, \quad \bar{T}_{22}^p = \bar{X}^{\frac{1}{4}} t_{22}^p. \quad (\text{B.79})$$

Por fim, substituindo as soluções de similaridades (B.79) em (B.72), obtemos

$$\begin{aligned} 2\xi^2 t_{11}^{p'} - \frac{3}{2}\xi t_{11}^p + 4t_{12}^p - \frac{\kappa}{C_0} t_{11}^2 &= 0, \\ 2\xi^2 t_{12}^{p'} - \frac{3}{4}\xi^2 t_{11}^p + 2t_{22}^p - \frac{\kappa}{C_0} t_{12}^p t_{11}^p &, \\ 2\xi^2 t_{22}^{p'} + \frac{3}{2}\xi t_{22}^p - \frac{3}{2}\xi^2 t_{12}^p - \frac{\kappa}{C_0} (t_{12}^p)^2 &= \frac{\kappa-1}{C_0}, \end{aligned} \quad (\text{B.80})$$

sujeito as seguintes condições de contorno

$$t_{11}^p \sim 2\frac{C_0^{\frac{1}{2}}}{\kappa^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1-\kappa}{\kappa}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad t_{12}^p \sim \left(\frac{1-\kappa}{\kappa}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad t_{22}^p \sim \kappa^{\frac{1}{2}} C_0^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1-\kappa}{\kappa}\right)^{\frac{3}{4}}, \quad (\text{B.81})$$

para $\xi \rightarrow 0^+$,

$$t_{11}^p \sim 4C_1 \xi^{\frac{1}{4}}, \quad t_{12}^p \sim C_1 \xi^{\frac{5}{4}}, \quad t_{22}^p \sim \frac{1}{4}C_1 \xi^{\frac{9}{4}}, \quad \text{para } \xi \rightarrow +\infty. \quad (\text{B.82})$$

A solução numérica do sistema (B.80) é obtida por meio da função `ode15s` do MATLAB. Os parâmetros usados na solução foram: domínio $[10^{-6}, 10^{10}]$ e tolerância $Tol = AbsTol = 10^{-13}$. A estimativa do valor de C_1 é dependente de κ , de modo que para $\kappa = 0.1$, obtemos

$$C_1 = 2.124679. \quad (\text{B.83})$$

Semelhante ao que ocorreu com o modelo PTT, este valor é diferente do valor obtido em (EVANS, 2015). Isto acontece devido às diferenças no processo de escalonamento. Assim, para simularmos o escalonamento usado em (EVANS, 2015), substituímos $(\kappa-1) = -1$ e $\kappa = 1$ no sistema de equações (B.80). Desta forma, o valor obtido para C_1 é

$$C_1 = 0.333712. \quad (\text{B.84})$$

Apresentamos na Figura 43 os perfis de t_{11}^p , t_{12}^p e t_{22}^p e a estimativa de C_1 .

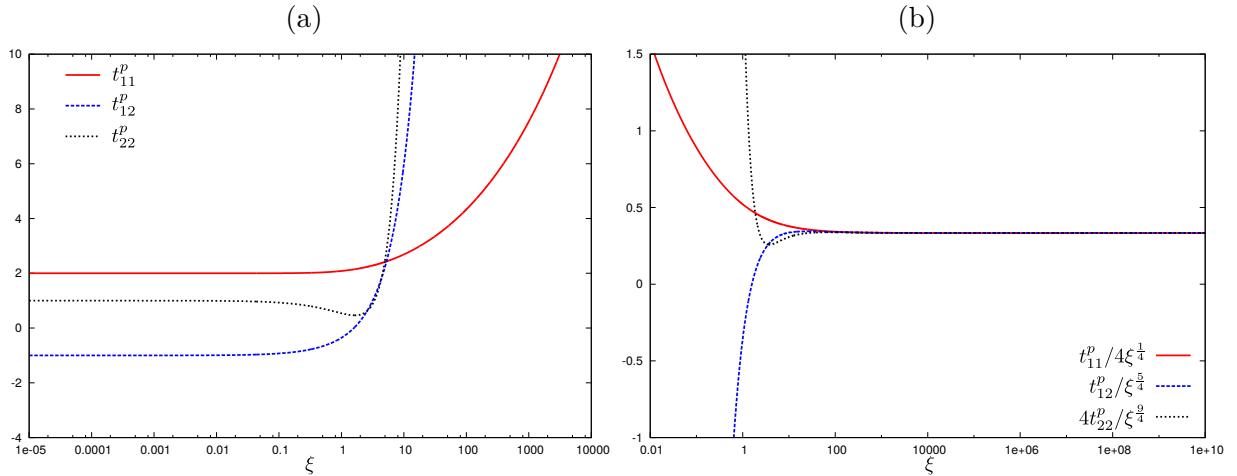
B.1.3 Camada limite da superfície slip

B.1.3.1 Comportamento próximo à superfície slip

Semelhante ao feito no Capítulo 3 para o modelo Oldroyd-B, aqui discutimos o comportamento das componentes do tensor polimérico próximo à superfície *slip*. As informações apresentadas a seguir auxiliarão no processo de escalonamento das propriedades.

Primeiramente, aproximamos a função de corrente (3.35) e as componentes da velocidade (3.27) como (3.125). Além disso, a taxa de cisalhamento e a taxa de deformação radial (3.63) são dadas por (3.126). Desta forma, substituindo as expressões de $\dot{\gamma}$ e $\dot{\varepsilon}$ (3.126)

Figura 43 – Solução de similaridade para o problema *stick-slip* com o modelo PTT: (a) perfis das componentes t_{11}^p , t_{12}^p e t_{22}^p e (b) estimativas do valor de C_1 .



Fonte: Elaborada pelo autor.

em (B.3), obtemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} v_r \frac{\partial T_{rr}^p}{\partial r} - \dot{\gamma} \frac{\partial T_{rr}^p}{\partial \theta} - 2T_{rr}^p \dot{\epsilon} + T_{rr}^p + \kappa f_{rr} &= 2\dot{\epsilon}, \\ v_r \frac{\partial T_{r\theta}^p}{\partial r} - \dot{\gamma} \frac{\partial T_{r\theta}^p}{\partial \theta} - \dot{\gamma} T_{rr}^p - \frac{3}{2} T_{rr}^p \dot{\epsilon} (\pi - \theta) + T_{r\theta}^p + \kappa f_{r\theta} &= \frac{3}{2} \dot{\epsilon} (\pi - \theta) + \dot{\gamma}, \\ v_r \frac{\partial T_{\theta\theta}^p}{\partial r} - \dot{\gamma} \frac{\partial T_{\theta\theta}^p}{\partial \theta} - 2\dot{\gamma} T_{r\theta}^p - 3T_{r\theta}^p \dot{\epsilon} (\pi - \theta) + 2T_{\theta\theta}^p \dot{\epsilon} + T_{\theta\theta}^p + \kappa f_{\theta\theta} &= -2\dot{\epsilon}. \end{aligned} \quad (\text{B.85})$$

Eliminando os termos envolvendo $\dot{\gamma}$ e substituindo o valor de v_r (3.125), juntamente com algumas manipulações algébricas, obtemos

$$\begin{aligned} 2r \frac{\partial T_{rr}^p}{\partial r} - 2T_{rr}^p - \frac{r^{1/2}}{C_0} (T_{rr}^p + \kappa f_{rr}) &= 2, \\ 2r \frac{\partial T_{r\theta}^p}{\partial r} + \frac{3}{2} T_{rr}^p (\pi - \theta) - \frac{r^{1/2}}{C_0} (T_{r\theta}^p + \kappa f_{r\theta}) &= -\frac{3}{2} (\pi - \theta), \\ 2r \frac{\partial T_{\theta\theta}^p}{\partial r} + 3T_{r\theta}^p (\pi - \theta) + 2T_{\theta\theta}^p - \frac{r^{1/2}}{C_0} (T_{\theta\theta}^p + \kappa f_{\theta\theta}) &= -2. \end{aligned} \quad (\text{B.86})$$

Esse conjunto de equações recebe os valores das tensões vindas da região externa à camada limite (3.51), que entram na região *slip* como (3.129), tal que valores de n_1 são dados por (B.43) e (B.49), para os modelos PTT e Giesekus, respectivamente. Assim, conforme calculamos as tensões ao longo de uma linha de corrente, ψ fixo, partindo da região externa à camada limite para a região *slip*, os valores da distância radial r começam a ficar altos, fazendo com que T_{rr}^p creça linearmente com r (3.129). Por outro lado, os valores de $\dot{\epsilon}$ (3.126) começam a decrescer. Assim, na região *overlap* os valores de T_{rr}^p passam a ficar comparáveis com $\dot{\epsilon}$. A primeira equação dos modelos PTT e Giesekus em (B.85) sugere que isto acontece primeiramente quando $\kappa(T_{rr}^p)^2 \sim \dot{\epsilon} T_{rr}^p$, isto é,

$$\kappa T_{rr}^p \sim \dot{\epsilon}, \quad (\text{B.87})$$

representando um balanceamento entre os termos quadrático e convectivo do tensor polimérico. Podemos usar a relação (B.87) para determinar a espessura da região da camada limite *slip* para os modelos PTT e Giesekus. Assim, substituindo os valores de ψ (3.125) e $\dot{\epsilon}$ (3.126) em (B.87), obtemos

$$\pi - \theta \sim r^{-\frac{3(1+n_1)}{2n_1}} = \begin{cases} r^{\frac{3}{20}}, & \text{PTT}, \\ r^{\frac{3}{14}}, & \text{Giesekus}, \end{cases} \quad (\text{B.88})$$

ou em coordenadas Cartesianas, com $\pi - \theta \sim y/(-x)$ e $r \sim (-x)$,

$$y \sim \begin{cases} (-x)^{\frac{23}{20}}, & \text{PTT}, \\ (-x)^{\frac{17}{14}}, & \text{Giesekus}. \end{cases} \quad (\text{B.89})$$

Estes valores estão em conformidade com os resultados obtidos em (EVANS, 2013) e (EVANS, 2015).

B.1.3.2 Escalonamento das variáveis

Da mesma forma que fizemos para a região *stick*, escalonamos as variáveis na região *slip* e, a partir deste escalonamento, determinamos a espessura da camada limite próximo a região *slip*. Para isto, utilizamos a relação (3.130) entre δ_2 e ϵ , bem como as variáveis escalonadas na sua forma geral, dadas por (3.131), (3.132) e (3.133).

Para o escalonamento de cada modelo constitutivos, substituímos os valores de n_1 em (3.133), para cada um dos modelos, como

- PTT

$$T_{11}^p = \epsilon^{\frac{6}{11}} \delta_2^{-\frac{10}{11}} \bar{T}_{11}^p, \quad T_{12}^p = \epsilon^{-\frac{5}{11}} \delta_2^{\frac{1}{11}} \bar{T}_{12}^p, \quad T_{22}^p = \epsilon^{-\frac{16}{11}} \delta_2^{\frac{12}{11}} \bar{T}_{22}^p. \quad (\text{B.90})$$

- Giesekus

$$T_{11}^p = \epsilon^{\frac{9}{16}} \delta_2^{-\frac{7}{8}} \bar{T}_{11}^p, \quad T_{12}^p = \epsilon^{-\frac{7}{16}} \delta_2^{\frac{1}{8}} \bar{T}_{12}^p, \quad T_{22}^p = \epsilon^{-\frac{23}{16}} \delta_2^{\frac{9}{8}} \bar{T}_{22}^p. \quad (\text{B.91})$$

A seguir apresentamos o balanceamento das equações constitutivas para os modelos PTT e Giesekus, respectivamente.

- PTT

Substituindo as variáveis escalonadas (3.133) e (3.134) em (B.3), considerando o modelo PTT ($\mathbf{f}(\mathbf{T}^P) = \text{tr}(\mathbf{T}^P)\mathbf{T}^P$), obtemos

$$\begin{aligned} & \left(\varepsilon^{\frac{1}{22}} \delta_2^{-\frac{10}{11}} \right) \bar{U} \frac{\partial \bar{T}_{11}^P}{\partial \bar{X}} + \left(\varepsilon^{\frac{1}{22}} \delta_2^{-\frac{10}{11}} \right) \bar{V} \frac{\partial \bar{T}_{11}^P}{\partial \bar{Y}} - 2 \left(\varepsilon^{\frac{1}{22}} \delta_2^{-\frac{10}{11}} \right) \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{X}} \bar{T}_{11}^P - 2 \left(\varepsilon^{\frac{1}{22}} \delta_2^{-\frac{10}{11}} \right) \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{Y}} \bar{T}_{12}^P + \\ & \left(\varepsilon^{\frac{6}{11}} \delta_2^{-\frac{10}{11}} \right) \bar{T}_{11}^P + \kappa \left[\left(\varepsilon^{\frac{12}{11}} \delta_2^{-\frac{20}{11}} \right) (\bar{T}_{11}^P)^2 + \left(\varepsilon^{-\frac{10}{11}} \delta_2^{\frac{2}{11}} \right) \bar{T}_{22}^P \bar{T}_{11}^P \right] = 2 \left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \right) \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{X}}, \\ & \left(\varepsilon^{-\frac{21}{22}} \delta_2^{\frac{1}{11}} \right) \bar{U} \frac{\partial \bar{T}_{12}^P}{\partial \bar{X}} + \left(\varepsilon^{-\frac{21}{22}} \delta_2^{\frac{1}{11}} \right) \bar{V} \frac{\partial \bar{T}_{12}^P}{\partial \bar{Y}} - \left(\varepsilon^{-\frac{21}{22}} \delta_2^{\frac{1}{11}} \right) \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{X}} \bar{T}_{11}^P - \left(\varepsilon^{-\frac{21}{22}} \delta_2^{\frac{1}{11}} \right) \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{Y}} \bar{T}_{22}^P + \\ & \left(\varepsilon^{-\frac{5}{11}} \delta_2^{\frac{1}{11}} \right) \bar{T}_{12}^P + \kappa \left[\left(\varepsilon^{\frac{1}{11}} \delta_2^{-\frac{9}{11}} \right) \bar{T}_{11}^P \bar{T}_{12}^P + \left(\varepsilon^{-\frac{21}{11}} \delta_2^{\frac{13}{11}} \right) \bar{T}_{22}^P \bar{T}_{12}^P \right] = \left[\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}} \delta_2^{-1} \right) \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{Y}} + \left(\varepsilon^{-\frac{3}{2}} \delta_2 \right) \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{X}} \right], \\ & \left(\varepsilon^{-\frac{43}{22}} \delta_2^{\frac{12}{11}} \right) \bar{U} \frac{\partial \bar{T}_{22}^P}{\partial \bar{X}} + \left(\varepsilon^{-\frac{43}{22}} \delta_2^{\frac{12}{11}} \right) \bar{V} \frac{\partial \bar{T}_{22}^P}{\partial \bar{Y}} - 2 \left(\varepsilon^{-\frac{43}{22}} \delta_2^{\frac{12}{11}} \right) \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{X}} \bar{T}_{12}^P - 2 \left(\varepsilon^{-\frac{43}{22}} \delta_2^{\frac{12}{11}} \right) \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{Y}} \bar{T}_{22}^P + \\ & \left(\varepsilon^{-\frac{16}{11}} \delta_2^{\frac{12}{11}} \right) \bar{T}_{22}^P + \kappa \left[\left(\varepsilon^{-\frac{10}{11}} \delta_2^{\frac{2}{11}} \right) \bar{T}_{11}^P \bar{T}_{22}^P + \left(\varepsilon^{-\frac{32}{11}} \delta_2^{\frac{24}{11}} \right) (\bar{T}_{22}^P)^2 \right] = 2 \left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \right) \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{Y}}. \end{aligned} \quad (\text{B.92})$$

Analizando a primeira equação de (B.99), temos que as parcelas de produtos de potências de ε e δ_2 que dominam esta equação são $\varepsilon^{\frac{1}{22}} \delta_2^{-\frac{10}{11}}$, representando a derivada convectiva superior de Maxwell, e $\varepsilon^{\frac{12}{11}} \delta_2^{-\frac{20}{11}}$, que representa o termo quadrático do modelo PTT. Desta forma, igualando as parcelas dominantes, obtemos

$$\varepsilon^{\frac{1}{22}} \delta_2^{-\frac{10}{11}} = \varepsilon^{\frac{12}{11}} \delta_2^{-\frac{20}{11}} \Rightarrow \delta_2 = \varepsilon^{\frac{23}{22}}. \quad (\text{B.93})$$

O balanceamento entre a derivada convectiva superior de Maxwell e o termo quadrático do modelo PTT também ocorre para as demais equações em (B.99). Assim, aplicando a mesma ideia nas outras equações em (B.99), isto é, igualando os termos $\varepsilon^{-\frac{21}{22}} \delta_2^{\frac{1}{11}}$ e $\varepsilon^{\frac{1}{11}} \delta_2^{-\frac{9}{11}}$, da segunda equação, e $\varepsilon^{-\frac{43}{22}} \delta_2^{\frac{12}{11}}$ e $\varepsilon^{-\frac{10}{11}} \delta_2^{\frac{2}{11}}$, da terceira equação, obtemos a mesma relação (B.93) entre ε e δ_2 .

- Giesekus

Substituindo as variáveis escalonadas (3.133) e (3.134) em (B.3), considerando o modelo Giesekus ($\mathbf{f}(\mathbf{T}^P) = (\mathbf{T}^P)^2$), obtemos

$$\begin{aligned} & \left(\varepsilon^{\frac{1}{16}} \delta_2^{-\frac{7}{8}} \right) \bar{U} \frac{\partial \bar{T}_{11}^P}{\partial \bar{X}} + \left(\varepsilon^{\frac{1}{16}} \delta_2^{-\frac{7}{8}} \right) \bar{V} \frac{\partial \bar{T}_{11}^P}{\partial \bar{Y}} - 2 \left(\varepsilon^{\frac{1}{16}} \delta_2^{-\frac{7}{8}} \right) \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{X}} \bar{T}_{11}^P - 2 \left(\varepsilon^{\frac{1}{16}} \delta_2^{-\frac{7}{8}} \right) \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{Y}} \bar{T}_{12}^P + \\ & \left(\varepsilon^{\frac{9}{16}} \delta_2^{-\frac{7}{8}} \right) \bar{T}_{11}^P + \kappa \left[\left(\varepsilon^{\frac{9}{8}} \delta_2^{-\frac{7}{4}} \right) (\bar{T}_{11}^P)^2 + \left(\varepsilon^{-\frac{7}{8}} \delta_2^{\frac{1}{4}} \right) (\bar{T}_{12}^P)^2 \right] = 2 \left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \right) \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{X}}, \\ & \left(\varepsilon^{-\frac{15}{16}} \delta_2^{\frac{1}{8}} \right) \bar{U} \frac{\partial \bar{T}_{12}^P}{\partial \bar{X}} + \left(\varepsilon^{-\frac{15}{16}} \delta_2^{\frac{1}{8}} \right) \bar{V} \frac{\partial \bar{T}_{12}^P}{\partial \bar{Y}} - \left(\varepsilon^{-\frac{15}{16}} \delta_2^{\frac{1}{8}} \right) \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{X}} \bar{T}_{11}^P - \left(\varepsilon^{-\frac{15}{16}} \delta_2^{\frac{1}{8}} \right) \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{Y}} \bar{T}_{22}^P + \\ & \left(\varepsilon^{-\frac{7}{16}} \delta_2^{\frac{1}{8}} \right) \bar{T}_{12}^P + \kappa \left[\left(\varepsilon^{\frac{1}{8}} \delta_2^{-\frac{3}{4}} \right) \bar{T}_{11}^P \bar{T}_{12}^P + \left(\varepsilon^{-\frac{30}{16}} \delta_2^{\frac{5}{4}} \right) \bar{T}_{22}^P \bar{T}_{12}^P \right] = \left[\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}} \delta_2^{-1} \right) \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{Y}} + \left(\varepsilon^{-\frac{3}{2}} \delta_2 \right) \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{X}} \right], \\ & \left(\varepsilon^{-\frac{31}{16}} \delta_2^{\frac{9}{8}} \right) \bar{U} \frac{\partial \bar{T}_{22}^P}{\partial \bar{X}} + \left(\varepsilon^{-\frac{31}{16}} \delta_2^{\frac{9}{8}} \right) \bar{V} \frac{\partial \bar{T}_{22}^P}{\partial \bar{Y}} - 2 \left(\varepsilon^{-\frac{31}{16}} \delta_2^{\frac{9}{8}} \right) \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{X}} \bar{T}_{12}^P - 2 \left(\varepsilon^{-\frac{31}{16}} \delta_2^{\frac{9}{8}} \right) \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{Y}} \bar{T}_{22}^P + \\ & \left(\varepsilon^{-\frac{23}{16}} \delta_2^{\frac{9}{8}} \right) \bar{T}_{22}^P + \kappa \left[\left(\varepsilon^{-\frac{7}{8}} \delta_2^{\frac{1}{4}} \right) (\bar{T}_{12}^P)^2 + \left(\varepsilon^{-\frac{23}{16}} \delta_2^{\frac{9}{4}} \right) (\bar{T}_{22}^P)^2 \right] = 2 \left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \right) \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{Y}}. \end{aligned} \quad (\text{B.94})$$

Semelhante ao modelo PTT, o balanceamento para o modelo Giesekus se dá entre a derivada convectiva superior de Maxwell e o termo quadrático. Desta forma, tomando os termos dominantes de cada uma das equações em (B.144), teremos as seguintes igualdades

$$\varepsilon^{\frac{1}{16}} \delta_2^{-\frac{7}{8}} = \varepsilon^{\frac{9}{8}} \delta_2^{-\frac{7}{4}}, \quad \varepsilon^{-\frac{15}{16}} \delta_2^{\frac{1}{8}} = \varepsilon^{\frac{1}{8}} \delta_2^{-\frac{3}{4}} \quad \text{e} \quad \varepsilon^{-\frac{31}{16}} \delta_2^{\frac{9}{8}} = \varepsilon^{-\frac{7}{8}} \delta_2^{\frac{1}{4}}, \quad (\text{B.95})$$

que resultam em

$$\delta_2 = \varepsilon^{\frac{17}{14}}. \quad (\text{B.96})$$

B.1.3.3 Equações da camada limite slip

Baseado na função da espessura da camada limite *slip*, isto é, na relação entre δ_2 e ε , vamos construir as equações da camada limite para os modelos viscoelásticos PTT e Giesekus. Para isto, escrevemos, primeiramente, o escalonamento das variáveis apenas em função do parâmetro artificial $\varepsilon > 0$. O escalonamento adequado para esta camada limite é obtido mediante a substituição dos valores de δ_2 e n_1 em (3.132) e (3.133). Assim, no que segue, apresentamos o escalonamento das variáveis para os modelos PTT e Giesekus, respectivamente.

- PTT

$$\begin{aligned} x &= \varepsilon \bar{X}, & y &= \varepsilon^{\frac{23}{20}} \bar{Y}, \\ \psi &= \varepsilon^{\frac{33}{20}} \bar{\Psi}, & u &= \varepsilon^{\frac{1}{2}} \bar{U}, & v &= \varepsilon^{\frac{13}{20}} \bar{V}, \\ T_{11}^s &= \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \bar{T}_{11}^s, & T_{12}^s &= \varepsilon^{-\frac{7}{20}} \bar{T}_{12}^s, & T_{22}^s &= \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \bar{T}_{22}^s, \\ \lambda &= \varepsilon^{-\frac{3}{2}} \bar{\lambda}, \\ T_{11}^p &= \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \bar{T}_{11}^p, & T_{12}^p &= \varepsilon^{-\frac{7}{20}} \bar{T}_{12}^p, & T_{22}^p &= \varepsilon^{-\frac{1}{5}} \bar{T}_{22}^p. \end{aligned} \quad (\text{B.97})$$

- Giesekus

$$\begin{aligned} x &= \varepsilon \bar{X}, & y &= \varepsilon^{\frac{17}{14}} \bar{Y}, \\ \psi &= \varepsilon^{\frac{12}{7}} \bar{\Psi}, & u &= \varepsilon^{\frac{1}{2}} \bar{U}, & v &= \varepsilon^{\frac{5}{7}} \bar{V}, \\ T_{11}^s &= \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \bar{T}_{11}^s, & T_{12}^s &= \varepsilon^{-\frac{2}{7}} \bar{T}_{12}^s, & T_{22}^s &= \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \bar{T}_{22}^s, \\ \lambda &= \varepsilon^{-\frac{3}{2}} \bar{\lambda}, \\ T_{11}^p &= \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \bar{T}_{11}^p, & T_{12}^p &= \varepsilon^{-\frac{2}{7}} \bar{T}_{12}^p, & T_{22}^p &= \varepsilon^{-\frac{1}{14}} \bar{T}_{22}^p. \end{aligned} \quad (\text{B.98})$$

A partir de agora vamos substituir os valores de \bar{U} e \bar{V} , das equações constitutivas, pelas respectivas relações com $\bar{\Psi}$, equação (3.102). Isto é feito com o objetivo de diminuir

o número de variáveis nas equações constitutivas, facilitando o uso do método das similaridades para a solução das equações. Assim, no que segue, vamos construir e resolver as equações da camada limite para cada um dos modelos constitutivos estudados.

- PTT

Substituindo as variáveis escalonadas (B.97) em (B.2), considerando o modelo PTT ($\mathbf{f}(\mathbf{T}^p) = \text{tr}(\mathbf{T}^p)\mathbf{T}^p$), obtemos

$$\begin{aligned} & (\varepsilon^{-1}) \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}} \frac{\partial \bar{T}_{11}^p}{\partial \bar{X}} - (\varepsilon^{-1}) \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}} \frac{\partial \bar{T}_{11}^p}{\partial \bar{Y}} - 2(\varepsilon^{-1}) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X} \partial \bar{Y}} \bar{T}_{11}^p - 2(\varepsilon^{-1}) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}^2} \bar{T}_{12}^p + (\varepsilon^{-\frac{1}{2}}) \bar{T}_{11}^p + \\ & \kappa \left[(\varepsilon^{-1}) (\bar{T}_{11}^p)^2 + (\varepsilon^{-\frac{7}{10}}) \bar{T}_{22}^p \bar{T}_{11}^p \right] = 2(\varepsilon^{-1}) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X} \partial \bar{Y}}, \\ & (\varepsilon^{-\frac{17}{20}}) \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}} \frac{\partial \bar{T}_{12}}{\partial \bar{X}} - (\varepsilon^{-\frac{17}{20}}) \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}} \frac{\partial \bar{T}_{12}}{\partial \bar{Y}} + (\varepsilon^{-\frac{17}{20}}) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}^2} \bar{T}_{11}^p - (\varepsilon^{-\frac{17}{20}}) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}^2} \bar{T}_{22}^p + (\varepsilon^{-\frac{7}{10}}) \bar{T}_{12}^p + \\ & \kappa \left[(\varepsilon^{-\frac{17}{20}}) \bar{T}_{11}^p \bar{T}_{12}^p + (\varepsilon^{-\frac{11}{20}}) \bar{T}_{22}^p \bar{T}_{12}^p \right] = \left[(\varepsilon^{-\frac{13}{20}}) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}^2} - (\varepsilon^{-\frac{7}{20}}) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}^2} \right], \\ & (\varepsilon^{-\frac{7}{10}}) \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}} \frac{\partial \bar{T}_{22}^p}{\partial \bar{X}} - (\varepsilon^{-\frac{7}{10}}) \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}} \frac{\partial \bar{T}_{22}^p}{\partial \bar{Y}} + 2(\varepsilon^{-\frac{7}{10}}) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}^2} \bar{T}_{12}^p + 2(\varepsilon^{-\frac{7}{10}}) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y} \partial \bar{X}} \bar{T}_{22}^p + (\varepsilon^{-\frac{1}{5}}) \bar{T}_{22}^p + \\ & \kappa \left[(\varepsilon^{-\frac{7}{10}}) \bar{T}_{11}^p \bar{T}_{22}^p + (\varepsilon^{-\frac{2}{5}}) (\bar{T}_{22}^p)^2 \right] = -2(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y} \partial \bar{X}}. \end{aligned} \quad (\text{B.99})$$

Mantendo apenas os termos de mais alta ordem em ε , obtemos a equação da camada limite para o modelo PTT, dada por

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}} \frac{\partial \bar{T}_{11}^p}{\partial \bar{X}} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}} \frac{\partial \bar{T}_{11}^p}{\partial \bar{Y}} - 2 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X} \partial \bar{Y}} \bar{T}_{11}^p - 2 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}^2} \bar{T}_{12}^p + \kappa \bar{T}_{11}^2 = 0, \\ & \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}} \frac{\partial \bar{T}_{12}^p}{\partial \bar{X}} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}} \frac{\partial \bar{T}_{12}^p}{\partial \bar{Y}} + \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}^2} \bar{T}_{11}^p - \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}^2} \bar{T}_{22}^p + \kappa \bar{T}_{12}^p \bar{T}_{11}^p = 0, \\ & \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}} \frac{\partial \bar{T}_{22}^p}{\partial \bar{X}} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}} \frac{\partial \bar{T}_{22}^p}{\partial \bar{Y}} + 2 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X} \partial \bar{Y}} \bar{T}_{22}^p + 2 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}^2} \bar{T}_{12}^p + \kappa \bar{T}_{11}^p \bar{T}_{22}^p = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.100})$$

sujeitas as condições de combinação, isto é,

$$\begin{aligned} \bar{T}_{11}^p & \sim 4C_1(-\bar{X})^{\frac{6}{11}} (2\bar{Y})^{-\frac{10}{11}}, \quad \bar{T}_{12}^p \sim C_1(-\bar{X})^{-\frac{5}{11}} (2\bar{Y})^{\frac{1}{11}}, \\ \bar{T}_{22}^p & \sim \frac{1}{4}C_1(\bar{X})^{-\frac{16}{11}} (2\bar{Y})^{\frac{12}{11}}, \quad \text{para } \bar{Y} \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (\text{B.101})$$

Estas condições são obtidas substituindo as componentes do tensor polimérico \mathbf{T}^p escalonadas, equação (3.133), e o valor de $n_1 = -\frac{10}{11}$, correspondente ao modelo PTT, nas expressões obtidas pela técnica combinação da região externa à camada limite para a região interna *slip*, expressão em (3.62). A equação para $\bar{\Psi}$ é dada por (3.141).

A fim de obtermos a solução por similaridade do sistema de equações (B.100), substituímos (3.110) em (B.100). Desta forma, obtemos as seguintes relações

$$\theta_1 = \frac{\gamma}{\beta\alpha}, \quad \theta_2 = \frac{\gamma}{\alpha^2}, \quad \theta_3 = \frac{\beta\gamma}{\alpha^3}. \quad (\text{B.102})$$

Além disso, pela expressão da função de corrente $\bar{\Psi}$ (3.141), obtemos as seguintes relações entre α , β e γ

$$\gamma = \alpha^{\frac{1}{2}}\beta. \quad (\text{B.103})$$

Por outro lado, usando alguma expressão das condições de combinação (B.101), podemos obter todas as variáveis auxiliares em função de α . De fato, tomando a primeira equação na condição de combinação (B.101), obtemos

$$\theta_1 = \alpha^{\frac{6}{11}}\beta^{-\frac{10}{11}}, \quad (\text{B.104})$$

que igualando à equação de θ_1 em (B.102) e usando a relação entre γ , α e β em (B.103), obtemos

$$\beta = \alpha^{\frac{23}{20}}, \quad \gamma = \alpha^{\frac{33}{20}}, \quad (\text{B.105})$$

que, substituindo em (B.102), resulta em

$$\theta_1 = \alpha^{-\frac{1}{2}}, \quad \theta_2 = \alpha^{-\frac{7}{20}}, \quad \theta_3 = \alpha^{-\frac{1}{5}}. \quad (\text{B.106})$$

Por fim, fazendo $\alpha = \bar{X}$, temos por (3.110) que

$$\bar{\Psi} = (-\bar{X})^{\frac{33}{20}}\psi\left(\frac{(-\bar{X})}{(-\bar{X})}, \frac{\bar{Y}}{\bar{X}^{\frac{23}{20}}}\right) \rightarrow \bar{\Psi} = (-\bar{X})^{\frac{33}{20}}h(\xi), \quad (\text{B.107})$$

onde

$$\xi = \frac{\bar{Y}}{(-\bar{X})^{\frac{23}{20}}}. \quad (\text{B.108})$$

Portanto, para a construção da solução por similaridade para o tensor polimérico, substituímos o valor de $\alpha = \bar{X}$ em (B.106) e, em seguida, substituímos os valores de θ_1 , θ_2 e θ_3 em (3.110), que resulta em

$$\bar{T}_{11} = (-\bar{X})^{-\frac{1}{2}}t_{11}^p(\xi), \quad \bar{T}_{12}^p = (-\bar{X})^{-\frac{7}{20}}t_{12}^p(\xi), \quad \bar{T}_{22}^p = (-\bar{X})^{-\frac{1}{5}}t_{22}^p(\xi). \quad (\text{B.109})$$

Substituindo os valores de \bar{T}_{11}^p , \bar{T}_{12}^p e \bar{T}_{22}^p (B.109) em (B.100), resulta em

$$\begin{aligned} \frac{33}{10}\xi t_{11}^{p'} + 3t_{11}^p + \frac{\kappa}{C_0}(t_{11}^p)^2 &= 0, \\ \frac{33}{10}\xi t_{12}^{p'} + \frac{7}{10}t_{12}^p - \frac{1}{2}\xi t_{11}^p + \frac{\kappa}{C_0}t_{11}^p t_{12}^p &= 0, \\ \frac{33}{10}\xi t_{22}^{p'} - \frac{8}{5}t_{22}^p - \xi t_{12}^p + \frac{\kappa}{C_0}t_{11}^p t_{22}^p &= 0, \end{aligned} \quad (\text{B.110})$$

sujeita as seguintes condições de contorno

$$t_{11}^p \sim 2^{\frac{12}{11}}C_1\xi^{-\frac{10}{11}}, \quad t_{12}^p \sim 2^{\frac{1}{11}}C_1\xi^{\frac{1}{11}}, \quad t_{22}^p \sim 2^{-\frac{10}{11}}C_1\xi^{\frac{60}{55}}, \quad \text{para } \xi \rightarrow +\infty. \quad (\text{B.111})$$

Diferentemente do que fizemos na região *stick*, onde tivemos de calcular a equação de similaridade numericamente, podemos calcular as soluções de (B.110) analiticamente. Isto acontece pois a primeira equação de (B.110) envolve apenas a variável

t_{11}^p , de modo que para o cálculo de t_{11}^p precisamos apenas resolver uma EDO. Além disso, podemos linearizar a equação de t_{11}^p em (B.110) fazendo

$$s_{11}^p = \frac{1}{t_{11}^p}, \quad (\text{B.112})$$

tal que

$$s_{11}^{p'} = -\frac{t_{11}^{p'}}{(t_{11}^p)^2} \rightarrow t_{11}^{p'} = -(s_{11}^p)^{-2} s_{11}^{p'}. \quad (\text{B.113})$$

Assim, substituindo os valores de (B.112) e (B.113) na equação de t_{11}^p em (B.110), obtemos

$$-\frac{33}{10}\xi s_{11}^{p'} + 3s_{11} + \frac{\kappa}{C_0} = 0, \quad (\text{B.114})$$

que pode ser escrita como

$$s_{11}' + p(\xi)s_{11}^p = q(\xi), \quad (\text{B.115})$$

onde

$$p(\xi) = -\frac{10}{11}\xi^{-1}, \quad q(\xi) = \frac{10\kappa}{33C_0}\xi^{-1}. \quad (\text{B.116})$$

Note que a equação (B.115) é uma EDO linear de primeira ordem. Assim, vamos usar o método do fator integrante para resolvê-la. Para isto, multiplicamos a equação (B.115) pelo fator integrante $\vartheta(\xi)$, isto é,

$$\vartheta(\xi)s_{11}^{p'} + \vartheta(\xi)p(\xi)s_{11}^p = \vartheta(\xi)q(\xi). \quad (\text{B.117})$$

Podemos considerar o primeiro membro da equação (B.117) como a regra do produto para derivadas entre ϑ e s_{11}^p , isto é,

$$(\vartheta(\xi)s_{11}^p)' = \vartheta'(\xi)s_{11}^p + \vartheta(\xi)s_{11}^{p'}, \quad (\text{B.118})$$

que, comparando (B.118) com (B.117), implica em

$$\vartheta'(\xi) = \vartheta(\xi)p(\xi) \rightarrow \frac{\vartheta'(\xi)}{\vartheta(\xi)} = p(\xi) \rightarrow \ln(\vartheta(\xi)) = \int p(\xi)dt + c. \quad (\text{B.119})$$

Escolhendo a constante arbitrária c como zero, obtemos a função mais simples possível para $\vartheta(\xi)$, a saber

$$\vartheta(\xi) = \exp\left(\int p(\xi)d\xi\right). \quad (\text{B.120})$$

Substituindo o valor de $p(\xi)$, equação (B.116), em (B.120), obtemos

$$\vartheta(\xi) = -\frac{10}{11} \int \xi^{-1}d\xi = \exp\left(-\frac{10}{11}\ln(\xi)\right) = \xi^{-\frac{10}{11}}. \quad (\text{B.121})$$

Voltando à equação (B.117), temos que

$$(\vartheta(\xi)s_{11}^p)' = \vartheta(\xi)q(\xi). \quad (\text{B.122})$$

Logo,

$$\vartheta(\xi)s_{11}^p = \int \vartheta(\xi)q(\xi)d\xi, \quad (\text{B.123})$$

que implica em

$$s_{11}^p = \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int \vartheta(\xi)q(\xi)d\xi. \quad (\text{B.124})$$

Portanto, substituindo os valores de $\vartheta(\xi)$, equação (B.121), e de $q(\xi)$, equação (B.116), em (B.124), obtemos

$$s_{11}^p = \xi^{\frac{10}{11}} \left(\frac{10\kappa}{33C_0} \int \xi^{-\frac{21}{11}} d\xi \right) = \xi^{\frac{10}{11}} \left(-\frac{\xi^{-\frac{10}{11}}\kappa}{3C_0} - K_1 \right) = -\frac{(\kappa + 3C_0\xi^{\frac{10}{11}}K_1)}{3C_0}, \quad (\text{B.125})$$

onde K_1 é uma constante arbitrária. Por fim, pela relação entre s_{11}^p e t_{11}^p , equação (B.112), temos

$$t_{11}^p = -\frac{3C_0}{(\kappa + 3C_0\xi^{\frac{10}{11}}K_1)}. \quad (\text{B.126})$$

Para a solução de t_{12}^p também aplicamos o método do fator integrante, mas agora sobre a equação de t_{12}^p , segunda equação em (B.110). Note que como já conhecemos o valor de t_{11}^p , podemos resolvê-la separadamente. Assim, reescrevemos a equação de t_{12}^p em (B.110) de maneira similar a equação (B.115), ou seja,

$$t_{12}' + p(\xi)t_{12}^p = q(\xi), \quad (\text{B.127})$$

onde

$$p(\xi) = \frac{7}{33}\xi^{-1} + \frac{10\kappa}{33C_0}\xi^{-1}t_{11}^p, \quad q(\xi) = \frac{5}{33}t_{11}^p. \quad (\text{B.128})$$

Assim, seguindo os mesmos procedimentos empregues em t_{11}^p , temos que

$$\vartheta(\xi) = \exp \left(\int \frac{7}{33}\xi^{-1}d\xi + \frac{10\kappa}{33C_0}\xi^{-1}t_{11}^p d\xi \right). \quad (\text{B.129})$$

O cálculo da integral da primeira parcela no segundo membro de (B.129) é direto

$$\int \frac{7}{33}\xi^{-1}d\xi = \ln(\xi^{\frac{7}{33}}). \quad (\text{B.130})$$

Por outro lado, o cálculo da segunda parcela exige um pouco mais de atenção, pois precisamos fazer algumas manipulações algébricas e uma mudança de variável, da forma

$$z = \xi^{\frac{10}{11}}, \quad (\text{B.131})$$

tal que

$$dz = \frac{10}{11} \xi^{-\frac{1}{11}} d\xi. \quad (\text{B.132})$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \frac{10\kappa}{33C_0} \int \xi^{-1} t_{11}^p d\xi &= -\frac{10}{11} \int \xi^{-\frac{10}{11}} \xi^{-\frac{1}{11}} \frac{\kappa}{(\kappa + 3C_0K_1\xi^{\frac{10}{11}})} d\xi = -\int z^{-1} \frac{\kappa}{(\kappa + 3C_0K_1z)} dz = \\ 3C_0K_1 \int \frac{1}{(-3C_0K_1z)} \frac{\kappa}{(\kappa + 3C_0K_1z)} dz &= 3C_0K_1 \int \frac{1}{-3C_0K_1z} + \frac{1}{\kappa + 3C_0K_1z} dz = \\ 3C_0K_1 \left[-\frac{1}{3C_0K_1} \ln(z) + \frac{1}{3C_0K_1} \ln(1 + 3C_0K_1z) \right] &= \ln\left(\frac{\kappa + 3C_0K_1z}{z\kappa}\right) = \ln\left(\frac{\kappa + 3C_0K_1\xi^{\frac{10}{11}}}{\xi^{\frac{10}{11}}\kappa}\right), \end{aligned} \quad (\text{B.133})$$

que resulta em

$$\vartheta(\xi) = \xi^{\frac{7}{33}} \left(\frac{\kappa + 3C_0K_1\xi^{\frac{10}{11}}}{\xi^{\frac{10}{11}}\kappa} \right) + c, \quad (\text{B.134})$$

onde c é uma constante qualquer, que por simplicidade tomamos como zero.

Portanto, o valor de t_{12}^p pode ser calculado como

$$t_{12}(\xi) = \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int \vartheta(\xi) q(\xi) d\xi, \quad (\text{B.135})$$

que substituindo os valores de $\vartheta(\xi)$ e $p(\xi)$, resulta em

$$t_{12}^p = t_{11}^p \left(\frac{\xi}{2} + K_2 \xi^{\frac{23}{33}} \right), \quad (\text{B.136})$$

onde K_2 é uma constante arbitrária.

Por fim, para a equação de t_{22}^p reescrivemos a terceira equação em (B.110) como

$$t_{22}^{p'} + t_{22}^p p(\xi) = q(\xi), \quad (\text{B.137})$$

onde

$$p(\xi) = -\xi^{-1} \frac{16}{33} + \frac{10\kappa}{33C_0} \xi^{-1} t_{11}^p, \quad q(\xi) = +\frac{10}{33} t_{12}^p. \quad (\text{B.138})$$

Ainda usando o método do fator integrante, temos

$$\vartheta(\xi) = \xi^{-\frac{46}{33}} \left(\kappa + 3C_0K_1\xi^{\frac{10}{11}\kappa} \right), \quad (\text{B.139})$$

que resulta em

$$t_{22}^p = t_{11}^p \left(\frac{\xi^2}{4} + K_2 \xi^{\frac{56}{33}} + \xi^{\frac{46}{33}} K_3 \right), \quad (\text{B.140})$$

onde K_3 é uma constante arbitrária. O valor da constante K_1 pode ser obtida pela condição de contorno combinação (B.111). Assim, fazendo $\xi \rightarrow \infty$ em (B.126) e comparando com a condição para t_{11}^p em (B.111), obtemos

$$K_1 = -\frac{1}{2^{\frac{12}{11}} C_1}. \quad (\text{B.141})$$

Por fim, escrevendo a solução em termos de \bar{T}_{11}^p , \bar{T}_{12}^p e \bar{T}_{22}^p , isto é, substituindo (B.126), (B.136) e (B.140), bem como (B.108) com a expressão de ξ , em (B.109), obtemos

$$\begin{aligned}\bar{T}_{11}^p &= \frac{-12C_1C_0(-\bar{X})^{\frac{6}{11}}}{4C_1(-\bar{X})^{\frac{23}{22}} - 3C_0(2\bar{Y})^{\frac{10}{11}}}, \\ \bar{T}_{12}^p &= \left(\frac{1}{2}(-\bar{X})^{-1}\bar{Y} + K_2(-\bar{X})^{-\frac{43}{66}}\bar{Y}^{\frac{23}{33}}\right)\bar{T}_{11}^p, \\ \bar{T}_{22}^p &= \left(\frac{1}{4}(-\bar{X})^{-2}\bar{Y}^2 + K_2(-\bar{X})^{\frac{312}{165}}\bar{Y}^{\frac{56}{33}} + K_3(-\bar{X})^{\frac{529}{330}}\bar{Y}^{\frac{46}{33}}\right)\bar{T}_{11}^p,\end{aligned}\quad (\text{B.142})$$

onde, pelo estudo com a base natural, $K_2 = K_3 = 0$. Sobre a superfície livre $\bar{Y} = 0$, temos que $\bar{T}_{11}^p = -3C_0(-\bar{X})^{-\frac{1}{2}}$ ao passo que $\bar{T}_{12}^p = \bar{T}_{22}^p = 0$. Note que isto está em contraste com os valores obtidos para o modelo Oldroyd-B, no qual as componentes \bar{T}_{11}^p e \bar{T}_{12}^p tem valor infinito sobre a superfície livre.

- Giesekus

Substituindo as variáveis escalonadas (B.98) em (B.2), considerando o modelo Giesekus ($\mathbf{f}(\mathbf{T}^p) = (\mathbf{T}^p)^2$), obtemos

$$\begin{aligned}&(\varepsilon^{-1})\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{Y}}\frac{\partial\bar{T}_{11}^p}{\partial\bar{X}} - (\varepsilon^{-1})\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{X}}\frac{\partial\bar{T}_{11}^p}{\partial\bar{Y}} - 2(\varepsilon^{-1})\frac{\partial^2\Psi}{\partial\bar{X}\partial\bar{Y}}\bar{T}_{11}^p - 2(\varepsilon^{-1})\frac{\partial^2\Psi}{\partial\bar{Y}^2}\bar{T}_{12}^p + (\varepsilon^{-\frac{1}{2}})\bar{T}_{11}^p + \\ &\kappa\left[(\varepsilon^{-1})(\bar{T}_{11}^p)^2 + (\varepsilon^{-\frac{4}{7}})(\bar{T}_{12}^p)^2\right] = 2\left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial\bar{X}\partial\bar{Y}} \\ &(\varepsilon^{-\frac{11}{14}})\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{Y}}\frac{\partial\bar{T}_{12}^p}{\partial\bar{X}} - (\varepsilon^{-\frac{11}{14}})\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{X}}\frac{\partial\bar{T}_{12}^p}{\partial\bar{Y}} + (\varepsilon^{-\frac{11}{14}})\frac{\partial^2\Psi}{\partial\bar{X}^2}\bar{T}_{11}^p - (\varepsilon^{-\frac{11}{14}})\frac{\partial^2\Psi}{\partial\bar{Y}^2}\bar{T}_{22}^p + (\varepsilon^{-\frac{2}{7}})\bar{T}_{12}^p + \\ &\kappa\left[(\varepsilon^{-\frac{11}{14}})\bar{T}_{11}^p\bar{T}_{12}^p + (\varepsilon^{-\frac{5}{14}})\bar{T}_{22}^p\bar{T}_{12}^p\right] = \left[(\varepsilon^{-\frac{5}{7}})\frac{\partial^2\Psi}{\partial\bar{Y}^2} - (\varepsilon^{-\frac{2}{7}})\frac{\partial^2\Psi}{\partial\bar{X}^2}\right], \\ &(\varepsilon^{-\frac{4}{7}})\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{Y}}\frac{\partial\bar{T}_{22}^p}{\partial\bar{X}} - (\varepsilon^{-\frac{4}{7}})\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{X}}\frac{\partial\bar{T}_{22}^p}{\partial\bar{Y}} + 2(\varepsilon^{-\frac{4}{7}})\frac{\partial^2\Psi}{\partial\bar{Y}\partial\bar{X}}\bar{T}_{22}^p + 2(\varepsilon^{-\frac{4}{7}})\frac{\partial^2\Psi}{\partial\bar{X}^2}\bar{T}_{12}^p + (\varepsilon^{-\frac{1}{14}})\bar{T}_{22}^p + \\ &\kappa\left[(\varepsilon^{-\frac{4}{7}})(\bar{T}_{12}^p)^2 + (\varepsilon^{-\frac{1}{7}})(\bar{T}_{22}^p)^2\right] = -2\left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial\bar{Y}\partial\bar{X}}.\end{aligned}\quad (\text{B.143})$$

Mantendo apenas os termos de mais alta ordem em ε , obtemos a equação da camada limite para o modelo Giesekus, dada por

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{Y}}\frac{\partial\bar{T}_{11}^p}{\partial\bar{X}} - \frac{\partial\Psi}{\partial\bar{X}}\frac{\partial\bar{T}_{11}^p}{\partial\bar{Y}} - 2\frac{\partial^2\Psi}{\partial\bar{X}\partial\bar{Y}}\bar{T}_{11}^p - 2\frac{\partial^2\Psi}{\partial\bar{Y}^2}\bar{T}_{12}^p + \kappa(\bar{T}_{11}^p)^2 = 0, \\ &\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{Y}}\frac{\partial\bar{T}_{12}^p}{\partial\bar{X}} - \frac{\partial\Psi}{\partial\bar{X}}\frac{\partial\bar{T}_{12}^p}{\partial\bar{Y}} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\bar{X}^2}\bar{T}_{11}^p - \frac{\partial^2\Psi}{\partial\bar{Y}^2}\bar{T}_{22}^p + \kappa\bar{T}_{11}^p\bar{T}_{12}^p = 0, \\ &\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{Y}}\frac{\partial\bar{T}_{22}^p}{\partial\bar{X}} - \frac{\partial\Psi}{\partial\bar{X}}\frac{\partial\bar{T}_{22}^p}{\partial\bar{Y}} + 2\frac{\partial^2\Psi}{\partial\bar{Y}\partial\bar{X}}\bar{T}_{22}^p + 2\frac{\partial^2\Psi}{\partial\bar{X}^2}\bar{T}_{12}^p + \kappa(\bar{T}_{12}^p)^2 = 0,\end{aligned}\quad (\text{B.144})$$

sujeito as condições de combinação

$$\begin{aligned}\bar{T}_{11}^p &\sim 4C_1(-\bar{X})^{\frac{9}{16}}(2\bar{Y})^{-\frac{7}{8}}, \quad \bar{T}_{12}^p \sim C_1(-\bar{X})^{-\frac{7}{16}}(2\bar{Y})^{\frac{1}{8}}, \\ \bar{T}_{22}^p &\sim \frac{1}{4}C_1(-\bar{X})^{-\frac{23}{16}}(2\bar{Y})^{\frac{9}{8}} \quad \text{para } \bar{Y} \rightarrow +\infty.\end{aligned}\quad (\text{B.145})$$

Estas condições são obtidas substituindo as componentes do tensor polimérico \mathbf{T}^p escalonadas, equação (3.133), e o valor de $n_1 = -\frac{7}{8}$, correspondente ao modelo Giesekus, nas expressões obtidas pela técnica combinação da região externa à camada limite para a região interna *slip*, expressão em (3.62). Além disso, a equação para $\bar{\Psi}$ é dada por (3.141).

A fim de obtermos a solução por similaridade do sistema de equações (B.144), aplicamos (3.110) em (B.144). Desta forma, obtemos as seguintes relações

$$\theta_1 = \frac{\gamma}{\beta\alpha}, \quad \theta_2 = \frac{\gamma}{\alpha^2}, \quad \theta_3 = \frac{\beta\gamma}{\alpha^3}. \quad (\text{B.146})$$

Além disso, pela expressão da função de corrente $\bar{\Psi}$ (3.141), obtemos as seguintes relações entre α , β e γ

$$\gamma = \alpha^{\frac{1}{2}}\beta. \quad (\text{B.147})$$

Desta forma, temos as seguintes relações, em função de α , para β e γ

$$\beta = \alpha^{\frac{17}{14}}, \quad \gamma = \alpha^{\frac{12}{7}}. \quad (\text{B.148})$$

Por outro lado, as relações para θ_1 , θ_2 e θ_3 são dadas por

$$\theta_1 = \alpha^{-\frac{1}{2}}, \quad \theta_2 = \alpha^{-\frac{2}{7}}, \quad \theta_3 = \alpha^{-\frac{1}{14}}. \quad (\text{B.149})$$

Por fim, fazendo $\alpha = (-\bar{X})$, obtemos, a partir de (3.110), a seguinte expressão para $\bar{\Psi}$

$$\bar{\Psi} = (-\bar{X})^{\frac{12}{7}} \psi \left(\frac{(-\bar{X})}{(-\bar{X})}, \frac{\bar{Y}}{\bar{X}^{\frac{17}{14}}} \right) \rightarrow \bar{\Psi} = (-\bar{X})^{\frac{12}{7}} h(\xi), \quad (\text{B.150})$$

onde

$$\xi = \frac{\bar{Y}}{(-\bar{X})^{\frac{17}{14}}}. \quad (\text{B.151})$$

Portanto, para a construção da solução por similaridade para o tensor polimérico, substituímos o valor de $\alpha = (-\bar{X})$ em (B.149) e, em seguida, substituímos os valores de θ_1 , θ_2 e θ_3 em (3.110), que resultam em

$$\bar{T}_{11} = (-\bar{X})^{-\frac{1}{2}} t_{11}^p(\xi), \quad \bar{T}_{12}^p = (-\bar{X})^{-\frac{2}{7}} t_{12}^p(\xi), \quad \bar{T}_{22}^p = (-\bar{X})^{-\frac{1}{14}} t_{22}^p(\xi). \quad (\text{B.152})$$

Substituindo os valores de \bar{T}_{11}^p , \bar{T}_{12}^p e \bar{T}_{22}^p (B.152) em (B.144), resulta em

$$\begin{aligned} \frac{24}{7} \xi t_{11}^{p'} + 3t_{11}^p + \frac{\kappa}{C_0} (t_{11}^p)^2 &= 0, \\ \frac{24}{7} \xi t_{12}^{p'} + \frac{4}{7} t_{12}^p - \frac{1}{2} \xi t_{11}^p + \frac{\kappa}{C_0} t_{11}^p t_{12}^p &= 0, \\ \frac{24}{7} \xi t_{22}^{p'} - \frac{13}{7} t_{22}^p - \xi t_{12}^p + \frac{\kappa}{C_0} (t_{12}^p)^2 &= 0, \end{aligned} \quad (\text{B.153})$$

sujeita as seguintes condições de contorno

$$t_{11}^p \sim 2^{\frac{9}{8}} C_1 \xi^{-\frac{7}{8}}, \quad t_{12}^p \sim 2^{\frac{1}{8}} C_1 \xi^{\frac{1}{8}}, \quad t_{22}^p \sim 2^{-\frac{7}{8}} C_1 \xi^{\frac{9}{8}}, \quad \text{para } \xi \rightarrow +\infty. \quad (\text{B.154})$$

Para o processo de construção da solução de (B.153), usaremos o mesmo artifício feito para o modelo PTT a fim de linearizar o sistema, isto é, reescrevemos t_{11}^p em função de s_{11}^p , Eq. (B.112). Desta forma, a primeira equação de (B.153) passa a ser escrita como

$$(s_{11}^p)' + \frac{7}{8} \xi^{-1} s_{11}^p = -\frac{\kappa}{C_0} \frac{7}{24} \xi^{-1}. \quad (\text{B.155})$$

Aplicando o método do fator integrante para a solução da equação (B.155), temos que o fator integrante $\vartheta(\xi)$ é dado por

$$\vartheta(\xi) = \xi^{-\frac{7}{8}}. \quad (\text{B.156})$$

Desta forma, a solução de s_{11}^p pode ser obtida por

$$s_{11}^p = \xi^{\frac{7}{8}} \int \left(\frac{7}{24} \xi^{-\frac{15}{8}} \frac{\kappa}{C_0} \right) d\xi = -\xi^{\frac{7}{8}} \left(\frac{1}{3} \frac{\kappa}{C_0} \xi^{-\frac{7}{8}} + K_1 \right), \quad (\text{B.157})$$

que por fim, usando (B.112), temos que

$$t_{11}^p = -\frac{3}{[(\kappa/C_0) + 3K_1 \xi^{\frac{7}{8}}]}, \quad (\text{B.158})$$

onde K_1 é uma constante arbitrária.

Para o cálculo de t_{12}^p , reescrevemos a segunda equação em (B.153) como

$$(t_{12}^p)' + t_{12}^p \left(\frac{\xi^{-1}}{6} + \xi^{-1} \frac{7}{24} \frac{\kappa}{C_0} t_{11}^p \right) = \frac{7}{48} t_{11}^p. \quad (\text{B.159})$$

Ainda, pelo método do fator integrante, temos que $\vartheta(\xi)$ é calculado por

$$\ln(\vartheta(\xi)) = \int \left[\frac{\xi^{-1}}{6} - \xi^{-1} \frac{7}{8} \frac{\kappa}{C_0} \frac{1}{((\kappa/C_0) + 3K_1 \xi^{\frac{7}{8}})} \right] d\xi. \quad (\text{B.160})$$

Para a primeira parcela, o cálculo é imediato

$$\int \frac{\xi^{-1}}{6} d\xi = \ln(\xi^{\frac{1}{6}}). \quad (\text{B.161})$$

Por outro lado, o cálculo da segunda parcela exige um pouco mais de trabalho. Primeiramente, reescrevemos a segunda parcela como

$$-\int \frac{\kappa}{C_0} \frac{7}{8} \xi^{-1} \frac{1}{((\kappa/C_0) + 3K_1 \xi^{\frac{7}{8}})} d\xi = -\int \frac{\kappa}{C_0} \frac{z^{-1}}{((\kappa/C_0) + 3K_1 z)} dz, \quad (\text{B.162})$$

onde $z = \xi^{\frac{7}{8}}$. Continuando as manipulações algébricas sobre (B.162), temos que

$$\begin{aligned} -\int \frac{\kappa}{C_0} \frac{z^{-1}}{((\kappa/C_0) + 3K_1 z)} dz &= 3K_1 \int \frac{(\kappa/C_0)}{(-3K_1 z)((\kappa/C_0) + 3K_1 z)} dz = \\ 3K_1 \int \frac{1}{(-3K_1 z)} + \frac{1}{((\kappa/C_0) + 3K_1 z)} dz &= -\ln(z) + \ln((\kappa/C_0) + 3K_1 z) = \quad (\text{B.163}) \\ -\ln\left(\xi^{\frac{7}{8}}\right) + \ln\left((\kappa/C_0) + 3K_1 \xi^{\frac{7}{8}}\right). \end{aligned}$$

Desta forma, o valor do fator integrante $\vartheta(\xi)$ é dado por

$$\vartheta(\xi) = \xi^{-\frac{17}{24}} \left((\kappa/C_0) + 3K_1 \xi^{\frac{7}{8}} \right). \quad (\text{B.164})$$

Por fim, o valor de t_{12}^P é obtido como

$$\begin{aligned} t_{12}^P &= \frac{1}{\xi^{-\frac{17}{24}} ((\kappa/C_0) + 3K_1 \xi^{\frac{7}{8}})} \int \left(-\frac{7}{48} \right) \frac{3}{((\kappa/C_0) + 3K_1 \xi^{\frac{7}{8}})} \xi^{-\frac{17}{24}} \left((\kappa/C_0) + 3K_1 \xi^{\frac{7}{8}} \right) d\xi = \\ t_{11}^P \xi^{\frac{17}{24}} \left(\frac{1}{2} \xi^{\frac{7}{24}} + K_2 \right) &= t_{11}^P \left(\frac{\xi}{2} + K_2 \xi^{\frac{17}{24}} \right), \quad (\text{B.165}) \end{aligned}$$

onde K_2 é uma constante arbitrária.

Para a construção da solução de t_{22}^P , reescrevemos a terceira equação de (B.153) como

$$(t_{22}^P)' - \frac{13}{24} \xi^{-1} t_{22}^P = \frac{7}{24} t_{12}^P - \frac{\kappa}{C_0} \frac{7}{24} \xi^{-1} (t_{12}^P)^2. \quad (\text{B.166})$$

Assim, aplicando o método do fator integrante, temos que o fator integrante $\vartheta(\xi)$ é dado por

$$\vartheta(\xi) = \xi^{-\frac{13}{24}}. \quad (\text{B.167})$$

Desta forma, podemos calcular t_{22}^P como

$$t_{22}^P = \xi^{\frac{13}{24}} \int \xi^{-\frac{13}{24}} \left[\frac{7}{24} t_{12}^P - \frac{\kappa}{C_0} \frac{7}{24} \xi^{-1} (t_{12}^P)^2 \right] d\xi. \quad (\text{B.168})$$

cuja solução é dada por

$$t_{22}^P = t_{11}^P \left(-\frac{K_2^2}{3K_1} (\kappa/C_0) \xi^{\frac{13}{24}} + \frac{\xi^2}{4} + K_2 \xi^{\frac{41}{24}} \right) + K_3 \xi^{\frac{13}{24}}, \quad (\text{B.169})$$

onde K_3 é uma constante arbitrária.

Fazendo $\xi \rightarrow +\infty$ na solução de t_{11}^P (B.158) e comparando com a condição de combinação (B.154) resulta em

$$K_1 = -\frac{1}{2^{\frac{9}{8}} C_1}. \quad (\text{B.170})$$

Portanto, a solução de \bar{T}_{11}^P , \bar{T}_{12}^P e \bar{T}_{22}^P é dada por

$$\begin{aligned}\bar{T}_{11}^P &= -\frac{12C_0C_1(-\bar{X})^{\frac{9}{16}}}{4\kappa C_1(-\bar{X})^{\frac{17}{16}} - 3C_0(2\bar{Y})^{\frac{7}{8}}}, \\ \bar{T}_{12}^P &= \left[\frac{1}{2}(-\bar{X})\bar{Y} + K_2(-\bar{X})^{\frac{361}{336}}\bar{Y} \right] \bar{T}_{11}^P, \\ \bar{T}_{22}^P &= \left[-\frac{K_2^2\kappa}{3K_1C_0}\bar{Y}^{\frac{13}{24}}(-\bar{X})^{-\frac{77}{336}} + \frac{1}{4}(-\bar{X})^{-2}\bar{Y}^2 + K_2(-\bar{X})^{-\frac{553}{336}}\bar{Y}^{\frac{41}{24}} \right] \bar{T}_{11}^P + K_3(-\bar{X})^{-\frac{305}{336}}\bar{Y}^{\frac{13}{24}}.\end{aligned}\quad (\text{B.171})$$

A análise feita pela base natural sugere que $K_2 = K_3 = 0$. Sobre a superfície livre $\bar{Y} = 0$ o comportamento das tensões são $\bar{T}_{11}^P = -3C_0(-\bar{X})^{-\frac{1}{2}}$ e $T_{12}^P = T_{22}^P = 0$.

B.2 Análise assintótica das equações constitutivas na base natural

Nesta Seção, refazemos o estudo assintótico do problema *stick-slip* viscoelástico, mas agora em termos da formulação natural do tensor polimérico. O uso desta formulação é importante no estudo assintótico de problemas com singularidades, uma vez que esta permite fazer a ligação entre as soluções das regiões internas às camadas limites e externa à camada limite de modo mais eficiente. Além disso, como visto no Capítulo 4, a formulação natural contribui na melhora da precisão numérica das propriedades próximas à singularidade.

Assim, considerando as equações da formulação natural no estado estacionário e, sem perda de generalidade, tomando $Wi = 1$, temos que

$$\begin{aligned}(\mathbf{v} \cdot \nabla) \lambda + 2\mu \nabla \cdot \mathbf{w} + \lambda + \kappa g_\lambda &= \frac{1}{|\mathbf{v}|^2}, \\ (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mu + v \nabla \cdot \mathbf{w} + \mu + \kappa g_\mu &= 0, \\ (\mathbf{v} \cdot \nabla) v + v + \kappa g_v &= |\mathbf{v}|^2,\end{aligned}\quad (\text{B.172})$$

onde

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = \frac{1}{|\mathbf{v}|^4} \left[(v^2 - u^2) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 4uv \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (\text{B.173})$$

e

$$\begin{aligned}g_\lambda &= \begin{cases} (\lambda|\mathbf{v}|^2 - 2 + \frac{v}{|\mathbf{v}|^2})(\lambda - \frac{1}{|\mathbf{v}|^2}), & \text{PTT}, \\ (\lambda - \frac{1}{|\mathbf{v}|^2})^2|\mathbf{v}|^2 + \frac{\mu^2}{|\mathbf{v}|^2}, & \text{Giesekus} \end{cases} \\ g_\mu &= \begin{cases} (\lambda|\mathbf{v}|^2 - 2 + \frac{v}{|\mathbf{v}|^2})\mu, & \text{PTT}, \\ (\lambda|\mathbf{v}|^2 - 2 + \frac{v}{|\mathbf{v}|^2})\mu, & \text{Giesekus} \end{cases} \\ g_v &= \begin{cases} (\lambda|\mathbf{v}|^2 - 2 + \frac{v}{|\mathbf{v}|^2})(v - |\mathbf{v}|^2), & \text{PTT}, \\ (v - |\mathbf{v}|^2)^2 \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} + \mu^2|\mathbf{v}|^2, & \text{Giesekus.} \end{cases}\end{aligned}\quad (\text{B.174})$$

B.2.1 Região externa à camada limite

Na região externa à camada limite os termos dominantes nas equações constitutivas da formulação natural (B.172) são

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \lambda = 0, \quad (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mu = 0, \quad (\mathbf{v} \cdot \nabla) \nu = 0, \quad (\text{B.175})$$

cuja solução *stretching* é dada por

$$\lambda = \frac{C_1}{C_0^2} \left(\frac{\psi}{C_0} \right)^{n_1}, \quad \mu = C_2 \left(\frac{\psi}{C_0} \right)^{n_2}, \quad \nu = C_3 C_0^2 \left(\frac{\psi}{C_0} \right)^{n_3}, \quad (\text{B.176})$$

onde C_1 , C_2 , C_3 , n_1 , n_2 e n_3 são constantes a serem determinadas. Note que, para a variável λ os valores de C_1 e n_1 já foram determinados para cada um dos modelos. Assim, precisamos apenas determinar as constantes relacionadas às variáveis μ e ν . Como parte da metodologia usada neste trabalho, usamos a técnica combinação para ligar a região externa à camada limite com as camadas limites, *stick* e *slip*. Portanto, no que segue, completamos as soluções de combinação (3.60) e (3.62) com a inclusão das variáveis μ e ν .

- Combinação a partir da região externa à camada limite para a região interna *stick*

$$\mu = C_2 x^{-\frac{n_2}{2}} y^{2n_2}, \quad \nu = C_3 C_0^2 x^{-\frac{n_3}{2}} y^{2n_3}. \quad (\text{B.177})$$

- Combinação a partir da região externa à camada limite para a região interna *slip*

$$\mu = C_2 (-x)^{\frac{n_2}{2}} (2y)^{n_2}, \quad \nu = C_3 C_0^2 (-x)^{\frac{n_3}{2}} (2y)^{n_3}. \quad (\text{B.178})$$

B.2.2 Camada limite da superfície *stick*

Pelo estudo desta região com a formulação Cartesiana, sabemos que o comportamento predominante nesta região é o viscométrico. Desta forma, iremos construir expressões para as variáveis λ , μ e ν de modo a representarmos este comportamento com estas novas variáveis. Assim, aplicando as simplificações (3.92) nas equações da formulação natural (B.172), obtemos

$$\begin{aligned} -2 \frac{\mu}{u^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \lambda + \kappa g \lambda &= \frac{1}{u^2}, \\ -\frac{\nu}{u^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \mu + \kappa g \mu &= 0, \\ \nu + \kappa g \nu &= u^2, \end{aligned} \quad (\text{B.179})$$

onde

$$\begin{aligned} g_\lambda &= \begin{cases} (\lambda u^2 - 2 + \frac{v}{u^2})(\lambda - \frac{1}{u^2}), & \text{PTT}, \\ (\lambda - \frac{1}{u^2})^2 u^2 + \frac{\mu^2}{u^2}, & \text{Giesekus} \end{cases} & g_\mu &= \begin{cases} (\lambda u^2 - 2 + \frac{v}{u^2})\mu, & \text{PTT}, \\ (\lambda u^2 - 2 + \frac{v}{u^2})\mu, & \text{Giesekus} \end{cases} \\ g_v &= \begin{cases} (\lambda u^2 - 2 + \frac{v}{u^2})(v - u^2), & \text{PTT}, \\ (v - u^2)^2 \frac{1}{u^2} + \mu^2 u^2, & \text{Giesekus.} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.180})$$

Por meio de algumas manipulações algébricas, podemos reescrever o comportamento viscométrico para cada um dos modelos constitutivos como

- PTT

$$\begin{aligned} v + \kappa \left(\lambda u^2 - 2 + \frac{v}{u^2} \right) (v - u^2) &= u^2, & -\frac{v}{u^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \mu + \left(\lambda u^2 - 2 + \frac{v}{u^2} \right) \mu &= 0, \\ -2 \frac{\mu}{u^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \lambda + \left(\lambda u^2 - 2 + \frac{v}{u^2} \right) \left(\lambda - \frac{1}{u^2} \right) &= \frac{1}{u^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.181})$$

Diferentemente do modelo Oldroyd-B, o modelo PTT tem uma expressão mais complexa para o comportamento viscométrico, dificultando a técnica do escalonamento que será aplicado a seguir. Assim, de modo a obtermos uma expressão mais simples das equações em (B.181), utilizamos as equações simplificadas do comportamento viscométrico em função de \mathbf{T}^p (B.20) juntamente com as relações (2.33) e (3.92), ou seja,

$$\lambda u^2 - 1 = 2 \left(\frac{\dot{\gamma}}{2\kappa} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad \mu = \left(\frac{\dot{\gamma}}{2\kappa} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad \frac{v}{u^2} - 1 = 0, \quad (\text{B.182})$$

que implica em

$$\lambda = \frac{1}{u^2} \left[2 \left(\frac{\dot{\gamma}}{2\kappa} \right)^{\frac{2}{3}} + 1 \right], \quad \mu = \left(\frac{\dot{\gamma}}{2\kappa} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad v = u^2, \quad \text{para } r \rightarrow 0 \quad (\text{B.183})$$

- Giesekus

$$\begin{aligned} v + \kappa \left[(v - u^2)^2 \frac{1}{u^2} + \mu^2 u^2 \right] &= u^2, & -\frac{v}{u^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \mu + \kappa \left(\lambda u^2 - 2 + \frac{v}{u^2} \right) \mu &= 0, \\ -2 \frac{\mu}{u^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \lambda + \kappa \left[\left(\lambda - \frac{1}{u^2} \right)^2 u^2 + \frac{\mu^2}{u^2} \right] &= \frac{1}{u^2} \end{aligned} \quad (\text{B.184})$$

Semelhante ao que fizemos para o modelo PTT, vamos obter expressões simplificadas para o comportamento viscométrico, de modo a facilitar a análise pela técnica do escalonamento. Assim, utilizamos as equações simplificadas do comportamento viscométrico em função de \mathbf{T}^p (B.27), (B.24), (B.26) juntamente com as relações (2.33) e (3.92), ou seja,

$$\lambda u^2 - 1 = \left(\frac{2\dot{\gamma}}{\kappa} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1-\kappa}{\kappa} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad \mu = \left(\frac{1-\kappa}{\kappa} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{v}{u^2} - 1 = -1 + \left(\frac{2\kappa}{\dot{\gamma}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1-\kappa}{\kappa} \right)^{\frac{3}{4}}, \quad (\text{B.185})$$

que implica em

$$\lambda = \frac{1}{u^2} \left[\left(\frac{2\dot{\gamma}}{\kappa} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1-\kappa}{\kappa} \right)^{\frac{1}{4}} + 1 \right], \quad \mu = \left(\frac{1-\kappa}{\kappa} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad v = u^2 \left(\frac{2\kappa}{\dot{\gamma}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1-\kappa}{\kappa} \right)^{\frac{3}{4}}, \quad (\text{B.186})$$

para $r \rightarrow 0$.

B.2.2.1 Escalonamento das variáveis

Apenas completando as equações das variáveis escalonadas para os modelos PTT (B.54) e Giesekus (B.55), escrevemos o escalonamento das variáveis μ e v como

$$\mu = \begin{cases} \varepsilon^{\frac{11}{6}n_2}\bar{\mu}, & \text{PTT}, \\ \varepsilon^{2n_2}\bar{\mu}, & \text{Giesekus} \end{cases} \quad v = \begin{cases} \varepsilon^{\frac{11}{6}n_3}\bar{v}, & \text{PTT}, \\ \varepsilon^{2n_3}\bar{v}, & \text{Giesekus} \end{cases} \quad (\text{B.187})$$

- PTT

Para o modelo PTT usamos a versão simplificada do comportamento viscométrico, equação (B.183), para o processo de escalonamento das variáveis μ e v . Desta forma, substituindo (B.54) em (B.183), apenas para as variáveis μ e v , obtemos

$$\mu = \left(\frac{\partial \bar{U} \varepsilon^{\frac{3}{4}}}{\partial \bar{Y} \varepsilon^{\frac{5}{4}}} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{2\kappa} \Rightarrow \mu = \varepsilon^{-\frac{1}{6}}\bar{\mu}, \quad v = \varepsilon^{\frac{4}{3}}\bar{U}^2 \Rightarrow v = \varepsilon^{\frac{4}{3}}\bar{v}. \quad (\text{B.188})$$

Por fim, comparando os expoentes de ε em (B.188) com (B.187), obtemos

$$\frac{11}{6}n_2 = -\frac{1}{6} \Rightarrow n_2 = -\frac{1}{11}, \quad \frac{11}{6}n_3 = \frac{4}{3} \Rightarrow n_3 = \frac{8}{11} \quad (\text{B.189})$$

- Giesekus

Substituindo as variáveis escalonadas (B.55) nas equações que descrevem o comportamento viscométrico (B.186), obtemos

$$\begin{aligned} \mu &= \left(\frac{1-\kappa}{\kappa} \right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon^0 \Rightarrow \mu = \bar{\mu}, \quad v = \bar{U}^2 \varepsilon^{\frac{3}{2}} \left(2\kappa \left(1 / \frac{\partial \bar{U} \varepsilon^{\frac{3}{4}}}{\partial \bar{Y} \varepsilon^{\frac{5}{4}}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1-\kappa}{\kappa} \right)^{\frac{3}{4}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow v = \varepsilon^{\frac{7}{4}}\bar{v}. \end{aligned} \quad (\text{B.190})$$

Por fim, comparando os exponentes de ε em (B.190) com (B.187), obtemos

$$2n_2 = 0 \Rightarrow n_2 = 0, \quad 2n_3 = \frac{7}{4} \Rightarrow n_3 = \frac{7}{8} \quad (\text{B.191})$$

Portanto, de maneira resumida, os valores de n_1 , n_2 e n_3 são

$$n_1 = \begin{cases} -\frac{10}{11}, & \text{PTT}, \\ -\frac{7}{8}, & \text{Giesekus}, \end{cases} \quad n_2 = \begin{cases} -\frac{1}{11}, & \text{PTT}, \\ 0, & \text{Giesekus}, \end{cases} \quad n_3 = \begin{cases} \frac{8}{11}, & \text{PTT}, \\ \frac{7}{8}, & \text{Giesekus}, \end{cases} \quad (\text{B.192})$$

B.2.2.2 Equações da camada limite stick

Para facilitar o processo de construção das equações da camada limite, reescrevemos as variáveis escalonadas para cada um dos modelos constitutivos aqui estudados, incluindo apenas as variáveis usadas no processo de construção. Desta forma, no que segue, escrevemos um resumo das variáveis escalonadas, ou seja,

- PTT

$$\begin{aligned} x &= \varepsilon \bar{X}, & y &= \varepsilon^{\frac{7}{6}} \bar{Y}, \\ \psi &= \varepsilon^{\frac{11}{6}} \bar{\Psi}, & u &= \varepsilon^{\frac{2}{3}} \bar{U}, & v &= \varepsilon^{\frac{5}{6}} \bar{V}, \\ \lambda &= \varepsilon^{-\frac{5}{3}} \bar{\lambda}, & \mu &= \varepsilon^{-\frac{1}{6}} \bar{\mu}, & \nu &= \varepsilon^{\frac{4}{3}} \bar{v}. \end{aligned} \quad (\text{B.193})$$

- Giesekus

$$\begin{aligned} x &= \varepsilon \bar{X}, & y &= \varepsilon^{\frac{5}{4}} \bar{Y}, \\ \psi &= \varepsilon^2 \bar{\Psi}, & u &= \varepsilon^{\frac{3}{4}} \bar{U}, & v &= \varepsilon \bar{V}, \\ \lambda &= \varepsilon^{-\frac{7}{4}} \bar{\lambda}, & \mu &= \bar{\mu}, & \nu &= \varepsilon^{\frac{7}{4}} \bar{v}. \end{aligned} \quad (\text{B.194})$$

O próximo passo é a construção das equações da camada limite, que descrevemos a seguir.

- PTT

Substituindo as variáveis escalonadas (B.193) em (B.172) (considerando a expressão de \mathbf{g} para o modelo PTT), obtemos

$$\begin{aligned} &(\varepsilon^{\frac{2}{3}} \bar{U}) \frac{\partial(\varepsilon^{-\frac{5}{3}} \bar{\lambda})}{\partial(\varepsilon \bar{X})} + (\varepsilon^{\frac{5}{6}} \bar{V}) \frac{\partial(\varepsilon^{-\frac{5}{3}} \bar{\lambda})}{\partial(\varepsilon^{\frac{7}{6}} \bar{Y})} + 2(\varepsilon^{-\frac{1}{6}} \bar{\mu}) \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{w}} + (\varepsilon^{-\frac{5}{3}} \bar{\lambda}) + \\ &\kappa \left[(\varepsilon^{-\frac{5}{3}} \bar{\lambda})(\varepsilon^{\frac{4}{3}} \bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{5}{3}} \bar{V}^2) - 2 + \frac{(\varepsilon^{\frac{4}{3}} \bar{v})}{\varepsilon^{\frac{4}{3}} \bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{5}{3}} \bar{V}^2} \right] ((\varepsilon^{-\frac{5}{3}} \bar{\lambda}) - \frac{1}{\varepsilon^{\frac{4}{3}} \bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{5}{3}} \bar{V}^2}) = \frac{1}{\varepsilon^{\frac{4}{3}} \bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{5}{3}} \bar{V}^2}, \\ &(\varepsilon^{\frac{2}{3}} \bar{U}) \frac{\partial(\varepsilon^{-\frac{1}{6}} \bar{\mu})}{\partial(\varepsilon \bar{X})} + (\varepsilon^{\frac{5}{6}} \bar{V}) \frac{\partial(\varepsilon^{-\frac{1}{6}} \bar{\mu})}{\partial(\varepsilon^{\frac{7}{6}} \bar{Y})} + (\varepsilon^{\frac{4}{3}} \bar{v}) \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{w}} + (\varepsilon^{-\frac{1}{6}} \bar{\mu}) + \\ &\kappa \left[(\varepsilon^{-\frac{5}{3}} \bar{\lambda})(\varepsilon^{\frac{4}{3}} \bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{5}{3}} \bar{V}^2) - 2 + \frac{(\varepsilon^{\frac{4}{3}} \bar{v})}{\varepsilon^{\frac{4}{3}} \bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{5}{3}} \bar{V}^2} \right] (\varepsilon^{-\frac{1}{6}} \bar{\mu}) = 0, \\ &(\varepsilon^{\frac{2}{3}} \bar{U}) \frac{\partial(\varepsilon^{\frac{4}{3}} \bar{v})}{\partial(\varepsilon \bar{X})} + (\varepsilon^{\frac{5}{6}} \bar{V}) \frac{\partial(\varepsilon^{\frac{4}{3}} \bar{v})}{\partial(\varepsilon^{\frac{7}{6}} \bar{Y})} + (\varepsilon^{\frac{4}{3}} \bar{v}) + \\ &\kappa \left[(\varepsilon^{-\frac{5}{3}} \bar{\lambda})(\varepsilon^{\frac{4}{3}} \bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{5}{3}} \bar{V}^2) - 2 + \frac{(\varepsilon^{\frac{4}{3}} \bar{v})}{\varepsilon^{\frac{4}{3}} \bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{5}{3}} \bar{V}^2} \right] \left[(\varepsilon^{\frac{4}{3}} \bar{v}) - (\varepsilon^{\frac{4}{3}} \bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{5}{3}} \bar{V}^2) \right] = \varepsilon^{\frac{4}{3}} \bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{5}{3}} \bar{V}^2, \end{aligned} \quad (\text{B.195})$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{w}} &= \frac{1}{\varepsilon^{\frac{8}{3}} \bar{U}^4 + 2\varepsilon^{\frac{4}{3}} \bar{U}^2 \varepsilon^{\frac{5}{3}} \bar{V}^2 + \varepsilon^{\frac{10}{3}} \bar{V}^4} \left[\left(\varepsilon^{\frac{5}{3}} \bar{V}^2 - \varepsilon^{\frac{4}{3}} \bar{U}^2 \right) \left(\frac{\partial(\varepsilon^{\frac{5}{3}} \bar{V})}{\partial(\varepsilon \bar{X})} + \frac{\partial(\varepsilon^{\frac{2}{3}} \bar{U})}{\partial(\varepsilon^{\frac{7}{6}} \bar{Y})} \right) + \right. \\ &\left. 4(\varepsilon^{\frac{2}{3}} \bar{U})(\varepsilon^{\frac{5}{6}} \bar{V}) \frac{\partial(\varepsilon^{\frac{2}{3}} \bar{U})}{\partial(\varepsilon \bar{X})} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.196})$$

Mantendo os termos de maior ordem em ε , obtemos

$$\begin{aligned}\bar{U} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{X}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{Y}} - 2 \frac{\bar{\mu}}{\bar{U}^2} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{Y}} + \kappa \bar{\lambda}^2 \bar{U}^2 &= 0, \\ \bar{U} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{X}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{Y}} - \frac{\bar{v}}{\bar{U}^2} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{Y}} + \kappa \bar{\lambda} \bar{\mu} \bar{U}^2 &= 0, \\ \bar{U} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{X}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{Y}} + \kappa \bar{\lambda} \bar{U}^2 (\bar{v} - \bar{U}^2) &= 0,\end{aligned}\quad (\text{B.197})$$

sujeito as condições de contorno, dadas por

$$\bar{\lambda} \sim \frac{\bar{X}^{\frac{2}{3}} \bar{Y}^{-2}}{2C_0^2} \left(\frac{C_0}{\kappa} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad \bar{\mu} \sim \bar{X}^{-\frac{1}{6}} \left(\frac{C_0}{\kappa} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad \bar{v} \sim 4C_0^2 \bar{X}^{-1} \bar{Y}^2 \quad \text{para } \bar{Y} \rightarrow 0^+, \quad (\text{B.198})$$

$$\bar{\lambda} \sim \frac{C_1}{C_0^2} \bar{X}^{\frac{5}{11}} \bar{Y}^{-\frac{20}{11}}, \quad \bar{\mu} \sim C_2 \bar{X}^{\frac{1}{22}} \bar{Y}^{-\frac{2}{11}}, \quad \bar{v} \sim C_3 C_0^2 \bar{X}^{-\frac{4}{11}} \bar{Y}^{\frac{16}{11}}, \quad \text{para } \bar{Y} \rightarrow +\infty. \quad (\text{B.199})$$

Substituindo (B.197) em (B.197), obtemos as seguintes relações envolvendo θ_1 , θ_2 e θ_3

$$\theta_1 = \frac{\beta}{\alpha\gamma}, \quad \theta_2 = \frac{\gamma}{\alpha^2}, \quad \theta_3 = \frac{\gamma^2}{\beta^2}. \quad (\text{B.200})$$

As relações entre β e γ em função de α são

$$\beta = \alpha^{\frac{7}{6}}, \quad \gamma = \alpha^{\frac{1}{6}}, \quad (\text{B.201})$$

que, fazendo $\alpha = \bar{X}$ implica em

$$\theta_1 = \bar{X}^{-\frac{5}{3}}, \quad \theta_2 = \bar{X}^{-\frac{1}{6}}, \quad \theta_3 = \bar{X}^{\frac{4}{3}}, \quad (\text{B.202})$$

resultando na seguinte solução por similaridade para as variáveis da base natural

$$\tilde{\lambda} = \bar{X}^{-\frac{5}{3}} \tilde{\lambda}(\xi), \quad \tilde{\mu} = \bar{X}^{-\frac{1}{6}} \tilde{\mu}(\xi), \quad \tilde{v} = \bar{X}^{\frac{4}{3}} \tilde{v}(\xi). \quad (\text{B.203})$$

As equações para a solução por similaridade (B.203) são dadas por

$$\begin{aligned}\frac{11}{6} \xi^2 \tilde{\lambda}' + \frac{10}{3} \xi \tilde{\lambda} + \frac{\tilde{\mu}}{\xi^2 C_0^2} - 4\kappa C_0 \xi^2 \tilde{\lambda}^2 &= 0, \\ \frac{11}{6} \xi^2 \tilde{\mu}' + \frac{1}{3} \xi \tilde{\mu} + \frac{\tilde{v}}{2\xi^2 C_0^2} - 4\kappa \xi^2 C_0 \tilde{\lambda} \tilde{\mu} &= 0, \\ \frac{11}{6} \xi^2 \tilde{v}' - \frac{8}{3} \xi \tilde{v} - 4\kappa C_0 \xi^2 \tilde{\lambda} (\tilde{v} - 4\xi^2 C_0^2) &= 0,\end{aligned}\quad (\text{B.204})$$

sujeito as seguintes condições de contorno

$$\tilde{\lambda} \sim \frac{1}{2C_0^2 \xi^2} \left(\frac{C_0}{\kappa} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad \tilde{\mu} \sim \left(\frac{C_0}{\kappa} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad \tilde{v} \sim 4C_0^2 \xi^2 \quad \text{para } \xi \rightarrow 0^+. \quad (\text{B.205})$$

$$\tilde{\lambda} \sim \frac{C_1}{C_0^2} \xi^{-\frac{20}{11}}, \quad \tilde{\mu} \sim C_2 \xi^{-\frac{2}{11}}, \quad \tilde{v} \sim C_3 C_0^2 \xi^{\frac{16}{11}}, \quad \text{para } \xi \rightarrow +\infty. \quad (\text{B.206})$$

Além disso, usando o escalonamento (3.194) para as variáveis naturais, resulta no seguinte conjunto de equações

$$\begin{aligned} \frac{11}{6} \xi^2 l' - \frac{1}{3} \xi l + \frac{m}{C_0^2} - 4 \kappa C_0 l^2 &= 0, \\ \frac{11}{6} \xi^2 m' + \frac{1}{3} \xi m + \frac{n}{2 C_0^2} - 4 \kappa C_0 l m &= 0, \\ \frac{11}{6} \xi^2 n' + \xi n - 4 \kappa C_0 l (n - 4 C_0^2) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{B.207})$$

sujeito as condições de contorno dadas por

$$l \sim \frac{1}{2 C_0^2} \left(\frac{C_0}{\kappa} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad m \sim \left(\frac{C_0}{\kappa} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad n \sim 4 C_0^2, \quad \text{para } \xi \rightarrow 0^+, \quad (\text{B.208})$$

$$l \sim \frac{C_1}{C_0^2} \xi^{\frac{2}{11}}, \quad m \sim C_2 \xi^{-\frac{2}{11}}, \quad n \sim C_3 C_0^2 \xi^{-\frac{6}{11}}, \quad \text{para } \xi \rightarrow +\infty. \quad (\text{B.209})$$

A solução numérica do sistema (B.207) é obtida por meio da função `ode15s` do MATLAB. Os parâmetros usados para a solução foram: domínio $[10^{-6}, 10^{10}]$ e tolerâncias $Tol = AbsTol = 10^{-13}$. As estimativas para as constantes C_1 , C_2 e C_3 são dependentes da constante κ , de modo que para $\kappa = 0.1$, obtemos

$$C_1 = 1.728247, \quad C_2 = -1.289357, \quad C_3 = 6.748757. \quad (\text{B.210})$$

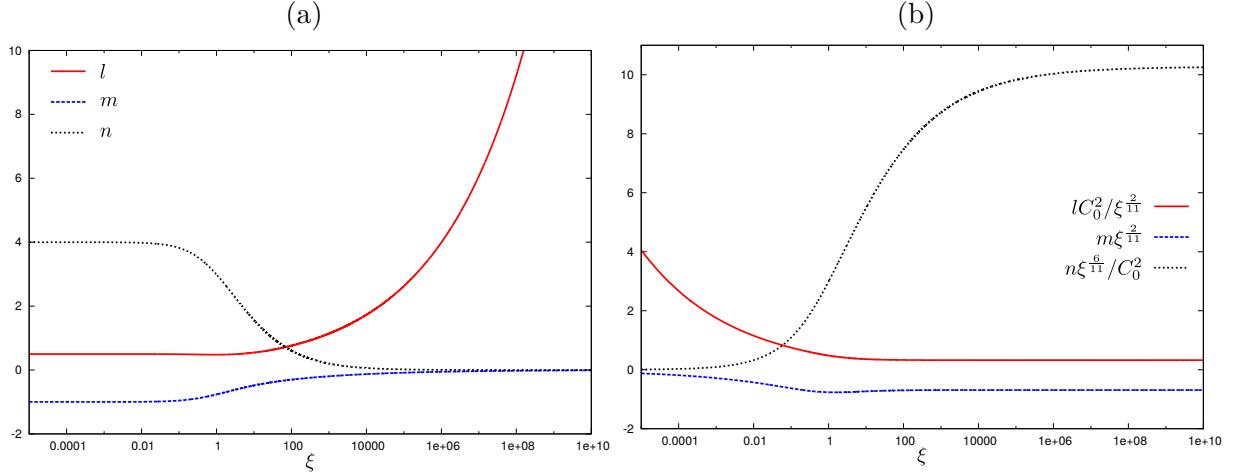
Note que estes valores não concordam com os obtidos em (EVANS, 2013). De modo que para simularmos o mesmo escalonamento feito em (EVANS, 2013), precisamos eliminar a constante κ , que fazemos isto por setar $\kappa = 1$. Fazendo isto, obtemos

$$C_1 = 0.323842, \quad C_2 = -0.688091, \quad C_3 = 10.253843. \quad (\text{B.211})$$

Apresentamos na Figura 44 os perfis de l , m e n , bem como as estimativas de C_1 , C_2 e C_3 .

- Giesekus

Figura 44 – Problema *stick-slip* na base natural. Ilustração da solução numérica das equações (B.207) para o modelo PTT com condição inicial (B.208) para $\xi_0 = 10^{-6}$. (a) apresenta os perfis de l , m e n , enquanto que (b) mostra a convergência de (B.211) para $\xi \rightarrow +\infty$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Substituindo as variáveis escalonadas (B.194) em (B.172) (considerando a expressão de \mathbf{g} para o modelo Giesekus), obtemos

$$\begin{aligned}
 & (\varepsilon^{\frac{3}{4}}\bar{U}) \frac{\partial(\varepsilon^{-\frac{7}{4}}\bar{\lambda})}{\partial(\varepsilon\bar{X})} + (\varepsilon\bar{V}) \frac{\partial(\varepsilon^{-\frac{7}{4}}\bar{\lambda})}{\partial(\varepsilon^{\frac{5}{4}}\bar{Y})} + 2\bar{\mu}\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{w}} + (\varepsilon^{-\frac{7}{4}}\bar{\lambda}) + \\
 & \kappa \left[\left((\varepsilon^{-\frac{7}{4}}\bar{\lambda}) - \frac{1}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}\bar{U}^2 + \varepsilon^2\bar{V}^2} \right)^2 (\varepsilon^{\frac{3}{2}}\bar{U}^2 + \varepsilon^2\bar{V}^2) + \frac{\bar{\mu}^2}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}\bar{U}^2 + \varepsilon^2\bar{V}^2} \right] = \frac{1}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}\bar{U}^2 + \varepsilon^2\bar{V}^2}, \\
 & (\varepsilon^{\frac{3}{4}}\bar{U}) \frac{\partial\bar{\mu}}{\partial(\varepsilon\bar{X})} + (\varepsilon\bar{V}) \frac{\partial\bar{\mu}}{\partial(\varepsilon^{\frac{5}{4}}\bar{Y})} + (\varepsilon^{\frac{7}{4}}\bar{v})\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{w}} + \bar{\mu} + \\
 & \kappa \left[(\varepsilon^{-\frac{7}{4}}\bar{\lambda})(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\bar{U}^2 + \varepsilon^2\bar{V}^2) - 2 + \frac{(\varepsilon^{\frac{7}{4}}\bar{v})}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}\bar{U}^2 + \varepsilon^2\bar{V}^2} \right] \bar{\mu} = 0, \\
 & (\varepsilon^{\frac{3}{4}}\bar{U}) \frac{\partial(\varepsilon^{\frac{7}{4}}\bar{v})}{\partial(\varepsilon\bar{X})} + (\varepsilon\bar{V}) \frac{\partial(\varepsilon^{\frac{7}{4}}\bar{v})}{\partial(\varepsilon^{\frac{5}{4}}\bar{Y})} + (\varepsilon^{\frac{7}{4}}\bar{v}) + \\
 & \kappa \left[((\varepsilon^{\frac{7}{4}}\bar{v}) - (\varepsilon^{\frac{3}{2}}\bar{U}^2 + \varepsilon^2\bar{V}^2))^2 \frac{1}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}\bar{U}^2 + \varepsilon^2\bar{V}^2} + \bar{\mu}^2(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\bar{U}^2 + \varepsilon^2\bar{V}^2) \right] = \varepsilon^{\frac{3}{2}}\bar{U}^2 + \varepsilon^2\bar{V}^2,
 \end{aligned} \tag{B.212}$$

onde

$$\begin{aligned}
 \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{w}} = & \frac{1}{\varepsilon^3\bar{U}^4 + 2\varepsilon^{\frac{3}{2}}\bar{U}^2\varepsilon^2\bar{V}^2 + \varepsilon^4\bar{V}^4} \left[(\varepsilon^2\bar{V}^2 - \varepsilon^{\frac{3}{2}}\bar{U}^2) \left(\frac{\partial(\varepsilon\bar{V})}{\partial(\varepsilon\bar{X})} + \frac{\partial(\varepsilon^{\frac{3}{4}}\bar{U})}{\partial(\varepsilon^{\frac{5}{4}}\bar{Y})} \right) + \right. \\
 & \left. 4\varepsilon^{\frac{3}{4}}\bar{U}\varepsilon\bar{V} \frac{\partial(\varepsilon^{\frac{3}{4}}\bar{U})}{\partial(\varepsilon\bar{X})} \right]
 \end{aligned} \tag{B.213}$$

Mantendo os termos de maior ordem em ε , obtemos

$$\begin{aligned}\bar{U} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{X}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{Y}} - 2 \frac{\bar{\mu}}{\bar{U}^2} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{Y}} + \kappa \bar{\lambda}^2 \bar{U}^2 &= 0, \\ \bar{U} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{X}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{Y}} - \frac{\bar{v}}{\bar{U}^2} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{Y}} + \kappa \bar{\lambda} \bar{\mu} \bar{U}^2 &= 0, \\ \bar{U} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{X}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{Y}} + \kappa \bar{U}^2 (1 + \bar{\mu}^2) &= \bar{U}^2.\end{aligned}\quad (\text{B.214})$$

$$\begin{aligned}\bar{\lambda} &\sim \frac{\bar{X}^{\frac{3}{4}} \bar{Y}^{-2}}{2C_0^2} \left(\frac{C_0}{\kappa} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1-\kappa}{\kappa} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad \bar{\mu} \sim \left(\frac{1-\kappa}{\kappa} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \bar{v} \sim 4C_0^2 \bar{X}^{-\frac{3}{4}} \bar{Y}^2 \left(\frac{\kappa}{C_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1-\kappa}{\kappa} \right)^{\frac{3}{4}}, \\ \text{para } \bar{Y} &\rightarrow 0^+,\end{aligned}\quad (\text{B.215})$$

$$\bar{\lambda} \sim \frac{C_1}{C_0^2} \bar{X}^{\frac{7}{16}} \bar{Y}^{-\frac{7}{4}}, \quad \bar{\mu} \sim C_2, \quad \bar{v} \sim C_3 C_0^2 \bar{X}^{-\frac{7}{16}} \bar{Y}^{\frac{7}{4}} \quad \text{para } \bar{Y} \rightarrow +\infty. \quad (\text{B.216})$$

Substituindo (3.185) em (B.214), obtemos as relações envolvendo θ_1 , θ_2 e θ_3 , isto é,

$$\theta_1 = \frac{\beta}{\gamma \alpha}, \quad \theta_2 = 1, \quad \theta_3 = \frac{\alpha \gamma}{\beta}. \quad (\text{B.217})$$

Além disso, pela expressão da função de corrente (3.108), obtemos a seguinte relação entre α , β e γ

$$\gamma = \alpha^{-\frac{1}{2}} \beta^2. \quad (\text{B.218})$$

Desta forma, tomando, por exemplo, a condição de combinação para $\bar{\lambda}$, juntamente com as relações de θ_1 e γ , equações (B.217) e (B.218), respectivamente, obtemos

$$\beta = \alpha^{\frac{5}{4}}, \quad (\text{B.219})$$

que implica

$$\gamma = \alpha^2, \quad \theta_1 = \alpha^{-\frac{7}{4}}, \quad \theta_3 = \alpha^{\frac{7}{4}}. \quad (\text{B.220})$$

Fazendo $\alpha = \bar{X}$, obtemos o seguinte conjunto de soluções por similaridades

$$\bar{\lambda} = \bar{X}^{-\frac{7}{4}} \tilde{\lambda}(\xi), \quad \bar{\mu} = \tilde{\mu}(\xi), \quad \bar{v} = \bar{X}^{\frac{7}{4}} \tilde{v}(\xi). \quad (\text{B.221})$$

A equação de similaridade é dada por

$$\begin{aligned}2\xi^2 \tilde{\lambda}' + \frac{7}{2} \xi \tilde{\lambda} + \frac{\tilde{\mu}}{C_0^2 \xi^2} - 4\kappa C_0 \tilde{\lambda}^2 \xi^2 &= 0, \\ 2\xi^2 \tilde{\mu}' + \frac{\tilde{v}}{2C_0^2 \xi^2} - 4\kappa C_0 \tilde{\lambda} \tilde{\mu} \xi^2 &= 0, \\ 2\xi^2 \tilde{v}' - \frac{7}{2} \xi \tilde{v} - 4C_0 \xi^2 [\kappa (1 + \tilde{\mu}^2) - 1] &= 0,\end{aligned}\quad (\text{B.222})$$

sujeito as seguintes condições de contorno

$$\tilde{\lambda} \sim \frac{1}{2C_0^2\xi^2} \left(\frac{C_0}{\kappa} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1-\kappa}{\kappa} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad \tilde{\mu} \sim \left(\frac{1-\kappa}{\kappa} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \tilde{v} \sim 4C_0^2\xi^2 \left(\frac{\kappa}{C_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1-\kappa}{\kappa} \right)^{\frac{3}{4}}, \quad (\text{B.223})$$

para $\xi \rightarrow 0^+$,

$$\tilde{\lambda} \sim \frac{C_1}{C_0^2} \xi^{-\frac{7}{4}}, \quad \tilde{\mu} \sim C_2, \quad \tilde{v} \sim C_3 C_0^2 \xi^{\frac{7}{4}}, \quad \text{para } \xi \rightarrow +\infty. \quad (\text{B.224})$$

Além disso, usando o escalonamento (3.194) para as variáveis naturais, resulta no seguinte conjunto de equações

$$\begin{aligned} 2\xi^2 l' - \frac{1}{2}\xi l + \frac{m}{C_0^2} - 4\kappa C_0 l^2 &= 0, \\ 2\xi^2 m' + \frac{n}{2C_0^2} - 4\kappa C_0 l m &= 0, \\ 2\xi^2 n' + \frac{1}{2}\xi n - 4C_0 [\kappa(1+m^2) - 1] &= 0, \end{aligned} \quad (\text{B.225})$$

sujeito as condições de contorno dadas por

$$\begin{aligned} l \sim \frac{1}{2C_0^2} \left(\frac{C_0}{\kappa} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1-\kappa}{\kappa} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad m \sim \left(\frac{1-\kappa}{\kappa} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad n \sim 4C_0^2 \left(\frac{\kappa}{C_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1-\kappa}{\kappa} \right)^{\frac{3}{4}}, \\ \text{para } \xi \rightarrow 0^+, \end{aligned} \quad (\text{B.226})$$

$$l \sim \frac{C_1}{C_0^2} \xi^{\frac{1}{4}}, \quad m \sim C_2, \quad n \sim C_3 C_0^2 \xi^{-\frac{1}{4}}, \quad \text{para } \xi \rightarrow +\infty. \quad (\text{B.227})$$

A solução numérica do sistema (B.225) é obtida por meio da função `ode15s` do MATLAB. Os parâmetros usados para a solução foram: domínio $[10^{-6}, 10^{10}]$ e tolerâncias $Tol = AbsTol = 10^{-13}$. As estimativas para as constantes C_1 , C_2 e C_3 são dependentes da constante κ , de modo que para $\kappa = 0.1$, obtemos

$$C_1 = 2.124679, \quad C_2 = -2.004535, \quad C_3 = 6.127120. \quad (\text{B.228})$$

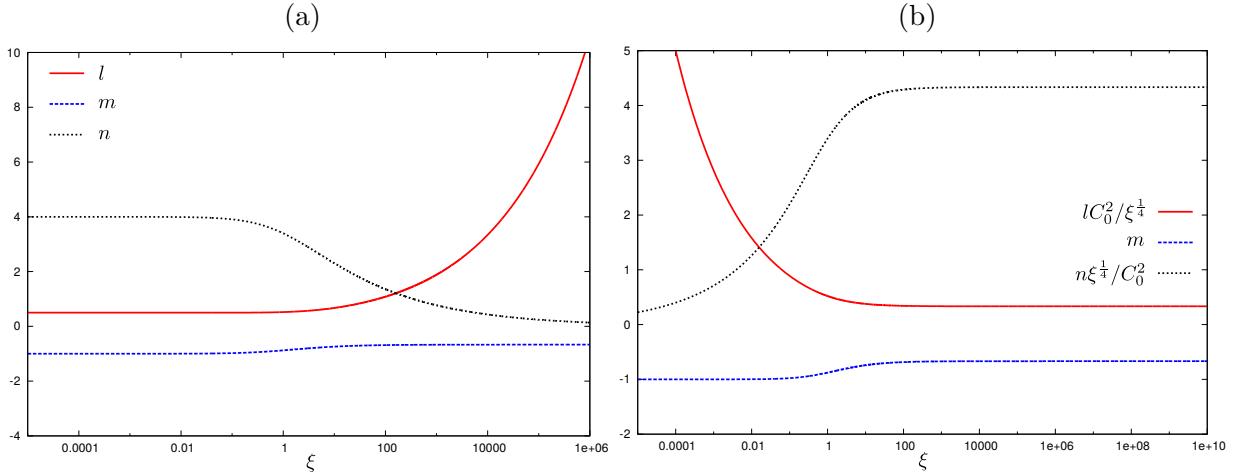
Note que estes valores não concordam com os obtidos em (EVANS, 2015). De modo que para simularmos o mesmo escalonamento feito em (EVANS, 2015), fazemos $(\kappa - 1) = -1$ e $\kappa = 1$. Fazendo isto, obtemos

$$C_1 = 0.333712, \quad C_2 = -0.668178, \quad C_3 = 4.334453. \quad (\text{B.229})$$

Apresentamos na Figura 45 os perfis de l , m e n , bem como as estimativas de C_1 , C_2 e C_3 .

Assim, terminamos a solução do tensor polimérico na região *stick*. Note que, como nesta região resolvemos as equações numericamente, não conseguimos escrever uma solução geral para o tensor \mathbf{T}^P que represente as três regiões do domínio.

Figura 45 – Problema *stick-slip* na base natural. Ilustração da solução numérica das equações (B.225) para o modelo Giesekus com condição inicial (B.226) para $\xi_0 = 10^{-6}$. (a) apresenta os perfis de l , m e n , enquanto que (b) mostra a convergência de (B.211) para $\xi \rightarrow +\infty$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

B.2.3 Camada limite da superfície slip

B.2.3.1 Escalonamento das variáveis

Para o escalonamento das variáveis μ e v na região *slip*, basta substituirmos os valores escalonados da variável ψ , juntamente com os valores de n_2 e n_3 , nas soluções *stretching* (B.176). Desta forma, para cada um dos modelos constitutivos, temos

- PTT

$$\mu = C_2 \left(\frac{\varepsilon^{33/20} \bar{\psi}}{C_0} \right)^{-1/11} \Rightarrow \mu = \varepsilon^{-3/20} \bar{\mu}, \quad v = C_3 C_0^2 \left(\frac{\varepsilon^{33/20} \bar{\psi}}{C_0} \right)^{8/11} \Rightarrow v = \varepsilon^{6/5} \bar{v}. \quad (\text{B.230})$$

- Giesekus

$$\mu = C_2 \left(\frac{\varepsilon^{12/7} \bar{\psi}}{C_0} \right)^0 \Rightarrow \mu = \bar{\mu}, \quad v = C_3 C_0^2 \left(\frac{\varepsilon^{12/7} \bar{\psi}}{C_0} \right)^{7/8} \Rightarrow v = \varepsilon^{3/2} \bar{v}. \quad (\text{B.231})$$

Como veremos na Subseção seguinte, o escalonamento da variável v para o modelo PTT deverá ser alterado. Isto porque a variável v não entra na região *slip* com a solução *stretching* como termo dominante, sendo necessário um escalonamento diferente para v .

B.2.3.2 Equações da camada limite slip

Para facilitar o processo de construção das equações da camada limite, reescrevemos as variáveis escalonadas para cada um dos modelos constitutivos aqui estudados, incluindo apenas as variáveis que usaremos no processo de construção. Desta forma, no que segue, escrevemos um resumo das variáveis escalonadas, ou seja,

- PTT

$$\begin{aligned} x &= \varepsilon \bar{X}, & y &= \varepsilon^{\frac{23}{20}} \bar{Y}, \\ \psi &= \varepsilon^{\frac{33}{20}} \bar{\Psi}, & u &= \varepsilon^{\frac{1}{2}} \bar{U}, \quad v = \varepsilon^{\frac{13}{20}} \bar{V}, \\ \lambda &= \varepsilon^{-\frac{3}{2}} \bar{\lambda}, & \mu &= \varepsilon^{-\frac{3}{20}} \bar{\mu}, \quad \nu = \varepsilon \bar{\nu}. \end{aligned} \quad (\text{B.232})$$

- Giesekus

$$\begin{aligned} x &= \varepsilon \bar{X}, & y &= \varepsilon^{\frac{17}{14}} \bar{Y}, \\ \psi &= \varepsilon^{\frac{12}{7}} \bar{\Psi}, & u &= \varepsilon^{\frac{1}{2}} \bar{U}, \quad v = \varepsilon^{\frac{5}{7}} \bar{V}, \\ \lambda &= \varepsilon^{-\frac{3}{2}} \bar{\lambda}, & \mu &= \bar{\mu}, \quad \nu = \varepsilon^{\frac{3}{2}} \bar{\nu}. \end{aligned} \quad (\text{B.233})$$

Vale destacar que, o escalonamento da variável ν para o modelo PTT foi alterado (compare (B.232) com (B.230)). Isto foi feito pois, diferentemente das variáveis λ e μ , a variável ν não entra na região *slip* com a solução da região externa à camada limite como termo dominante. Note que, isto não acontece com o modelo Giesekus, justificando o fato de não modificarmos o escalonamento de ν para este modelo. O novo escalonamento para ν foi obtido iniciando os cálculos com $\nu = \varepsilon^\alpha \bar{\nu}$, ou seja, através de um escalonamento na forma geral, onde calculamos a constante α mediante o correto balanceamento entre os termos da equação (B.172).

Assim, no que segue, apresentamos a construção das equações da camada limite.

- PTT

Substituindo as variáveis escalonadas (B.232) em (B.172) (considerando a expressão

de \mathbf{g} para o modelo PTT), obtemos

$$\begin{aligned}
 & (\varepsilon^{\frac{1}{2}}\bar{U}) \frac{\partial(\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\bar{\lambda})}{\partial(\varepsilon\bar{X})} + (\varepsilon^{\frac{13}{20}}\bar{V}) \frac{\partial(\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\bar{\lambda})}{\partial(\varepsilon^{\frac{23}{20}}\bar{Y})} + 2(\varepsilon^{-\frac{3}{20}}\bar{\mu})(\varepsilon^{-\frac{33}{20}}\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{w}}) + (\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\bar{\lambda}) + \\
 & \kappa \left[(\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\bar{\lambda})(\varepsilon\bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{13}{10}}\bar{V}^2) - 2 + \frac{(\varepsilon\bar{v})}{\varepsilon\bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{13}{10}}\bar{V}^2} \right] \left(\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\bar{\lambda} - \frac{1}{\varepsilon\bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{13}{10}}\bar{V}^2} \right) = \frac{1}{\varepsilon\bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{13}{10}}\bar{V}^2}, \\
 & (\varepsilon^{\frac{1}{2}}\bar{U}) \frac{\partial(\varepsilon^{-\frac{3}{20}}\bar{\mu})}{\partial(\varepsilon\bar{X})} + (\varepsilon^{\frac{13}{20}}\bar{V}) \frac{\partial(\varepsilon^{-\frac{3}{20}}\bar{\mu})}{\partial(\varepsilon^{\frac{23}{20}}\bar{Y})} + (\varepsilon\bar{v})(\varepsilon^{-\frac{33}{20}}\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{w}}) + (\varepsilon^{-\frac{3}{20}}\bar{\mu}) + \\
 & \kappa \left[(\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\bar{\lambda})(\varepsilon\bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{13}{10}}\bar{V}^2) - 2 + \frac{(\varepsilon\bar{v})}{\varepsilon\bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{13}{10}}\bar{V}^2} \right] (\varepsilon^{-\frac{3}{20}}\bar{\mu}) = 0, \\
 & (\varepsilon^{\frac{1}{2}}\bar{U}) \frac{\partial(\varepsilon\bar{v})}{\partial(\varepsilon\bar{X})} + (\varepsilon^{\frac{13}{20}}\bar{V}) \frac{\partial(\varepsilon\bar{v})}{\partial(\varepsilon^{\frac{23}{20}}\bar{Y})} + (\varepsilon\bar{v}) + \\
 & \kappa \left[(\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\bar{\lambda})(\varepsilon\bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{13}{10}}\bar{V}^2) - 2 + \frac{(\varepsilon\bar{v})}{\varepsilon\bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{13}{10}}\bar{V}^2} \right] [(\varepsilon\bar{v}) - (\varepsilon\bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{13}{10}}\bar{V}^2)] = \varepsilon\bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{13}{10}}\bar{V}^2,
 \end{aligned} \tag{B.234}$$

onde

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{w}} = \varepsilon^{\frac{6}{20}} \frac{\partial}{\partial \bar{X}} \left(-\frac{\bar{V}}{\bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{3}{10}}\bar{V}^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{Y}} \left(\frac{\bar{U}}{\bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{3}{10}}\bar{V}^2} \right). \tag{B.235}$$

Por meio de algumas manipulações algébricas em (B.234), obtemos

$$\begin{aligned}
 & \bar{U} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{X}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{Y}} + 2\varepsilon^{\frac{1}{5}}\bar{\mu}\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{w}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\bar{\lambda} + \kappa \left[\bar{\lambda}(\bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{3}{10}}\bar{V}^2) - 2\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}\bar{v}}{\bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{3}{10}}\bar{V}^2} \right] \left(\bar{\lambda} - \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{3}{10}}\bar{V}^2} \right) = \\
 & \frac{\varepsilon}{\bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{3}{10}}\bar{V}^2}, \\
 & \bar{U} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{X}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{Y}} + \bar{v}\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{w}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\bar{\mu} + \kappa \left[\bar{\lambda}(\bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{3}{10}}\bar{V}^2) - 2\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}\bar{v}}{\bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{3}{10}}\bar{V}^2} \right] \bar{\mu} = 0, \\
 & \bar{U} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{X}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{Y}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\bar{v} + \kappa \left[\bar{\lambda}(\bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{3}{10}}\bar{V}^2) - 2\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}\bar{v}}{\bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{3}{10}}\bar{V}^2} \right] (\bar{v} - (\bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{3}{10}}\bar{V}^2)) = \\
 & \varepsilon^{\frac{1}{2}}(\bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{3}{10}}\bar{V}^2),
 \end{aligned} \tag{B.236}$$

sujeito as condições de combinação dadas por

$$\begin{aligned}
 \bar{\lambda} & \sim \frac{C_1}{C_0^2} (-\bar{X})^{-\frac{5}{11}} (2\bar{Y})^{-\frac{10}{11}}, \quad \bar{\mu} \sim C_2 (-\bar{X})^{-\frac{1}{22}} (2\bar{Y})^{-\frac{1}{11}}, \quad \bar{v} \sim C_3 C_0^2 (-\bar{X})^{\frac{4}{11}} (2\bar{Y})^{\frac{8}{11}} \\
 \text{para } \bar{Y} & \rightarrow +\infty.
 \end{aligned} \tag{B.237}$$

Mantendo apenas os termos de mais alta ordem em ε na equação (B.236), obtemos as equações da camada limite, dadas por

$$\begin{aligned}
 & \bar{U} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{X}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{Y}} + \kappa \bar{\lambda}^2 \bar{U}^2 = 0, \\
 & \bar{U} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{X}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{Y}} + \kappa \bar{\lambda} \bar{\mu} \bar{U}^2 = 0, \\
 & \bar{U} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{X}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{Y}} + \kappa \bar{\lambda} \bar{U}^2 (\bar{v} - \bar{U}^2) = 0.
 \end{aligned} \tag{B.238}$$

A fim de obtermos a solução por similaridade, escrevemos

$$\bar{\lambda} = \theta_1 \tilde{\lambda}, \quad \bar{\mu} = \theta_2 \tilde{\mu}, \quad \bar{v} = \theta_3 \tilde{v}, \quad (\text{B.239})$$

onde os valores de θ_1 , θ_2 e θ_3 são determinados usando os valores de β e γ em (B.105). Substituindo os valores de (B.239), bem como $\bar{U} = \frac{\gamma}{\beta} u$ e $\bar{V} = \frac{\gamma}{\alpha} v$, em (B.238) obtemos as seguintes relações para θ_1 e θ_3

$$\theta_1 = \frac{\beta}{\alpha\gamma}, \quad \theta_3 = \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2. \quad (\text{B.240})$$

Como não conseguimos determinar o valor de θ_2 pelas equações, nós usamos a condição de combinação (B.237), que resulta em

$$\theta_2 = \alpha^{-\frac{1}{22}} \beta^{-\frac{1}{11}}. \quad (\text{B.241})$$

Por fim, substituindo $\alpha = (-\bar{X})$, bem como os valores de β e γ dados por (B.105), em (B.239) resulta em

$$\bar{\lambda} = (-\bar{X})^{-\frac{3}{2}} \tilde{\lambda}, \quad \bar{\mu} = (-\bar{X})^{-\frac{3}{20}} \tilde{\mu}, \quad \bar{v} = (-\bar{X}) \tilde{v}. \quad (\text{B.242})$$

Desta forma, as equações de similaridade são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{33}{10} \xi \tilde{\lambda}' + 3\tilde{\lambda} + 4\kappa C_0 \tilde{\lambda}^2 &= 0, \\ \frac{33}{10} \xi \tilde{\mu}' + \frac{3}{10} \tilde{\mu} + 4\kappa C_0 \tilde{\mu} \tilde{\lambda} &= 0, \\ \frac{33}{10} \xi \tilde{v}' - 2\tilde{v} + 4\kappa C_0 \tilde{\lambda} (\tilde{v} - 4C_0^2) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{B.243})$$

Para a solução de $\tilde{\lambda}$ fazemos

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{l} \rightarrow \tilde{\lambda}' = -\frac{l'}{l^2}. \quad (\text{B.244})$$

Desta forma, aplicando (B.244) na equação de $\tilde{\lambda}$ em (B.243), resulta em

$$-\frac{33}{11} \xi l' + 3l + 4\kappa C_0 = 0. \quad (\text{B.245})$$

Pelo método do fator integrante, temos que o fator integrante $\vartheta(\xi)$ é obtido como

$$\vartheta'(\xi) = -\frac{10}{11\xi} \vartheta(\xi) \rightarrow \ln(\vartheta(\xi)) = -\frac{10}{11} \ln(\xi), \quad (\text{B.246})$$

que por fim, implica em

$$\vartheta(\xi) = \xi^{-\frac{10}{11}}. \quad (\text{B.247})$$

Desta forma, o valor de l é calculado como

$$l = \frac{1}{\vartheta(\xi)} \int \vartheta \frac{40}{33} \xi \kappa C_0 d\xi = \xi^{\frac{10}{11}} \left(-\frac{4}{3} \kappa C_0 \xi^{-\frac{10}{11}} - 4K_1 C_0^2 \right) = \frac{-4\kappa C_0 - 12K_1 C_0^2 \xi^{\frac{10}{11}}}{3}. \quad (\text{B.248})$$

Portanto, o valor de $\tilde{\lambda}$ é dado por

$$\tilde{\lambda} = -\frac{3C_0}{4C_0^2(\kappa + 3C_0K_1\xi^{\frac{10}{11}})}. \quad (\text{B.249})$$

Para a solução de $\tilde{\mu}$, reescrevemos a equação de $\tilde{\mu}$ em (B.243) como

$$\frac{\tilde{\mu}'}{\tilde{\mu}} = -\frac{1}{11}\xi^{-1} + \frac{10}{11}\xi^{-1}\frac{\kappa}{\kappa + 3C_0K_1\xi^{\frac{10}{11}}}, \quad (\text{B.250})$$

que integrando, resulta em

$$\ln(\tilde{\mu}) = \ln(\xi)^{-\frac{1}{11}} - \ln\left(\frac{\kappa + 3C_0K_1\xi^{\frac{10}{11}}}{\xi^{\frac{10}{11}}}\right). \quad (\text{B.251})$$

Por fim, obtemos

$$\tilde{\mu} = \frac{3K_1C_2C_0\xi^{\frac{9}{11}}}{\kappa + 3C_0K_1\xi^{\frac{10}{11}}}. \quad (\text{B.252})$$

A adição da constante $3K_1C_2C_0$ ao numerador da solução (B.252) foi feita para que a solução (B.252) satisfaça a condição de combinação para $\xi \rightarrow \infty$

Para a solução de \tilde{v} , reescrevemos a equação de \tilde{v} em (B.243) como

$$\tilde{v} + \tilde{v} \left(-\frac{20}{33}\xi^{-1} + \frac{40}{33}\xi^{-1}\kappa C_0\tilde{\lambda} \right) = \frac{160}{33}\xi^{-1}\kappa C_0\tilde{\lambda} C_0^2. \quad (\text{B.253})$$

Assim, pelo método do fator integrante, temos que

$$\vartheta(\xi) = \frac{\kappa + 3C_0K_1\xi^{\frac{10}{11}}}{\xi^{\frac{50}{33}}}. \quad (\text{B.254})$$

Por fim, para o cálculo de \tilde{v} fazemos

$$\tilde{v} = \frac{\xi^{\frac{50}{33}}}{\kappa + 3C_0K_1\xi^{\frac{10}{11}}} \int \frac{\kappa + 3C_0K_1\xi^{\frac{10}{11}}}{\xi^{\frac{50}{33}}} \frac{160}{33}\xi^{-1}\kappa C_0C_0^2 \left(-\frac{3C_0}{4C_0^2(\kappa + 3C_0K_1\xi^{\frac{10}{11}})} \right), \quad (\text{B.255})$$

que resulta em

$$\tilde{v} = \frac{12}{5} \frac{C_0^2\kappa}{\kappa + 3C_0K_1\xi^{\frac{10}{11}}}. \quad (\text{B.256})$$

Reescrevendo a solução para as variáveis $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$ e \bar{v} , obtemos

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= -\frac{3C_0(-\bar{X})^{-\frac{5}{11}}}{4C_0^2(\kappa(-\bar{X})^{\frac{23}{22}} + 3C_0K_1\bar{Y}^{\frac{10}{11}})}, & \bar{\mu} &= \frac{3K_1C_2C_0\bar{Y}^{\frac{9}{11}}(-\bar{X})^{-\frac{1}{22}}}{\kappa(-\bar{X})^{\frac{23}{22}} + 3C_0K_1\bar{Y}^{\frac{10}{11}}}, \\ \bar{v} &= \frac{12C_0^2\kappa(-\bar{X})^{\frac{45}{22}}}{5(\kappa(-\bar{X})^{\frac{23}{22}} + 3C_0K_1\bar{Y}^{\frac{10}{11}})}. \end{aligned} \quad (\text{B.257})$$

Podemos notar que para $\bar{Y} \rightarrow +\infty$ as únicas variáveis que satisfazem as condições de combinação são $\bar{\lambda}$ e $\bar{\mu}$. Desta forma, assim como foi feito para o modelo Oldroyd-B, também precisamos expandir a variável \bar{v} . Além disso, para a correta ligação entre as regiões externa à camada limite e a região interna *slip* também devemos expandir a variável $\bar{\lambda}$. Assim, semelhante ao apresentado em (EVANS, 2013), fazemos

$$\bar{\lambda} \sim \bar{\lambda}_0 + \varepsilon^{\frac{1}{5}} \bar{\lambda}_1, \quad \bar{v} \sim \bar{v}_0 + \varepsilon^{\frac{1}{5}} \bar{v}_1. \quad (\text{B.258})$$

As equações de $\bar{\lambda}_0$ e \bar{v}_0 são as mesmas obtidas anteriormente para $\bar{\lambda}$ e \bar{v} , de modo que precisamos apenas construir e resolver as equações para $\bar{\lambda}_1$ e \bar{v}_1 . Desta forma, substituindo (B.258) em (B.236), obtemos as seguintes equações para $\bar{\lambda}_1$ e \bar{v}_1 , respectivamente,

$$\begin{aligned} \bar{U} \frac{\partial \bar{\lambda}_1}{\partial \bar{X}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{\lambda}_1}{\partial \bar{Y}} + 2\kappa \bar{\lambda}_0 \bar{\lambda}_1 \bar{U}^2 &= 0, \\ \bar{U} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{X}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{Y}} + \kappa \bar{\lambda}_0 \bar{v}_1 \bar{U}^2 + \kappa \bar{\lambda}_1 \bar{U}^2 (\bar{v}_0 - \bar{U}^2) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{B.259})$$

cuja solução de similaridade é dada por

$$\bar{\lambda}_1 = (-\bar{X})^{-\frac{13}{10}} \tilde{\lambda}_1, \quad \bar{v}_1 = (-\bar{X})^{\frac{6}{5}} \tilde{v}_1. \quad (\text{B.260})$$

O valor $(-\bar{X})^{-\frac{13}{10}}$ na equação de $\bar{\lambda}_1$ foi obtido através da equação (B.259), ao passo que o valor $(-\bar{X})^{\frac{6}{5}}$ de \bar{v}_1 foi obtido pela condição de combinação (B.237).

Desta forma, substituindo (B.260) em (B.259) resulta em

$$\begin{aligned} \frac{33}{10} \xi \tilde{\lambda}'_1 + \frac{13}{5} \tilde{\lambda}_1 + 8\kappa C_0 \tilde{\lambda}_0 \tilde{\lambda}_1 &= 0, \\ \frac{33}{10} \xi \tilde{v}'_1 - \frac{12}{5} \tilde{v}_1 + 4\kappa C_0 \tilde{\lambda}_0 \tilde{v}_1 + 4\kappa C_0 \tilde{\lambda}_1 (\tilde{v}_0 - 4C_0^2) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.261})$$

Para o cálculo de $\tilde{\lambda}_1$, reescrevemos a primeira equação de (B.261) como

$$\tilde{\lambda}'_1 + \left(\frac{26}{33} \xi^{-1} + \frac{80}{33} \xi^{-1} \kappa C_0 \tilde{\lambda}_0 \right) \tilde{\lambda}_1 = 0, \quad (\text{B.262})$$

que implica em

$$\ln(\tilde{\lambda}_1) = -\frac{26}{33} \ln(\xi) + \frac{20}{11} \int \xi^{-1} \frac{\kappa}{\kappa + 3C_0 K_1 \xi^{\frac{10}{11}}} d\xi, \quad (\text{B.263})$$

que resulta em

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{C_4 \xi^{\frac{34}{33}}}{\left(\kappa + 3C_0 K_1 \xi^{\frac{10}{11}} \right)^2}. \quad (\text{B.264})$$

Para o cálculo de \tilde{v}_1 , reescrevemos a segunda equação de (B.261) como

$$\tilde{v}'_1 + \tilde{v}_1 \left(-\frac{8}{11} \xi^{-1} + \frac{40}{33} \xi^{-1} \kappa C_0 \tilde{\lambda}_0 \right) = -\frac{40}{33} \xi^{-1} \kappa C_0 \tilde{\lambda} (\tilde{v}_0 - 4C_0^2). \quad (\text{B.265})$$

Assim, pelo método do fator integrante, temos que o fator integrante $\vartheta(\xi)$ é dado por

$$\vartheta(\xi) = \frac{(\kappa + 3C_0 K_1 \xi^{\frac{10}{11}})}{\xi^{\frac{18}{11}}}. \quad (\text{B.266})$$

Por fim, para o cálculo de \tilde{v}_1 , calculamos a seguinte integral

$$\begin{aligned} \tilde{v} &= \frac{\xi^{\frac{18}{11}}}{(\kappa + 3C_0 K_1 \xi^{\frac{10}{11}})} \int \frac{\kappa + 3C_0 K_1 \xi^{\frac{10}{11}}}{\xi^{\frac{18}{11}}} \left(-\frac{40}{33} \right) \xi^{-1} \kappa C_0 \left(\frac{C_4 \xi^{\frac{34}{33}}}{(\kappa + 3C_0 K_1 \xi^{\frac{10}{11}})} \right) \\ &\quad \left(\frac{12}{5} \frac{C_0^2 \kappa}{(\kappa + 3C_0 K_1 \xi^{\frac{10}{11}})} - 4C_0^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{B.267})$$

que implica em

$$\tilde{v}_1 = \frac{3K_1 C_0^2 C_3 \xi^{\frac{18}{11}}}{\kappa + 3C_0 K_1 \xi^{\frac{10}{11}}} - \frac{16C_0^3 C_4 \kappa \xi^{\frac{34}{33}}}{5(\kappa + 3C_0 K_1 \xi^{\frac{10}{11}})^2}. \quad (\text{B.268})$$

Escrevendo as soluções em termos de $\bar{\lambda}_1$ e \bar{v}_1 , temos

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_1 &= \frac{C_4 \bar{Y}^{\frac{34}{33}} (-\bar{X})^{-\frac{13}{33}}}{\left(\kappa (-\bar{X})^{\frac{23}{22}} + 3C_0 K_1 \bar{Y}^{\frac{10}{11}} \right)^2}, \\ \bar{v}_1 &= \frac{3K_1 C_0^2 C_3 \bar{Y}^{\frac{18}{11}} (-\bar{X})^{\frac{4}{11}}}{\left(\kappa (-\bar{X})^{\frac{23}{22}} + 3C_0 K_1 \bar{Y}^{\frac{10}{11}} \right)} - \frac{16C_0^3 C_4 \kappa \bar{Y}^{\frac{34}{33}} (-\bar{X})^{\frac{139}{66}}}{5 \left(\kappa (-\bar{X})^{\frac{23}{22}} + 3C_0 K_1 \bar{Y}^{\frac{10}{11}} \right)^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.269})$$

Portanto, a solução em termos das variáveis $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$ e \bar{v} é dada por

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= -\frac{3C_0 (-\bar{X})^{-\frac{1}{5}}}{4C_0^2 \left(\kappa (-\bar{X})^{\frac{23}{22}} + 3C_0 K_1 \bar{Y}^{\frac{10}{11}} \right)} + \varepsilon^{\frac{1}{5}} \frac{C_4 \bar{Y}^{\frac{34}{33}} (-\bar{X})^{-\frac{13}{33}}}{\left(\kappa (-\bar{X})^{\frac{23}{22}} + 3C_0 K_1 \bar{Y}^{\frac{10}{11}} \right)^2}, \\ \bar{\mu} &= \frac{3K_1 C_2 C_0 \bar{Y}^{\frac{9}{11}} (-\bar{X})^{-\frac{1}{22}}}{\kappa (-\bar{X})^{\frac{23}{22}} + 3C_0 K_1 \bar{Y}^{\frac{10}{11}}}, \\ \bar{v} &= \frac{12C_0^2 \kappa (-\bar{X})^{\frac{45}{22}}}{5 \left(\kappa (-\bar{X})^{\frac{23}{22}} + 3C_0 K_1 \bar{Y}^{\frac{10}{11}} \right)} + \varepsilon^{\frac{1}{5}} \left[\frac{3K_1 C_0^2 C_3 \bar{Y}^{\frac{18}{11}} (-\bar{X})^{\frac{4}{11}}}{\left(\kappa (-\bar{X})^{\frac{23}{22}} + 3C_0 K_1 \bar{Y}^{\frac{10}{11}} \right)} - \right. \\ &\quad \left. \frac{16C_0^3 C_4 \kappa \bar{Y}^{\frac{34}{33}} (-\bar{X})^{\frac{139}{66}}}{5 \left(\kappa (-\bar{X})^{\frac{23}{22}} + 3C_0 K_1 \bar{Y}^{\frac{10}{11}} \right)^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.270})$$

Em termos do tensor polimérico, a expansão na base natural pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\bar{T}_{11}^p &\sim \bar{\lambda}_0 \bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{1}{5}} \bar{\lambda}_1 \bar{U}^2, \\ \bar{T}_{12}^p &\sim \bar{\lambda}_0 \bar{U} \bar{V} + \varepsilon^{\frac{1}{5}} \left(\bar{\lambda}_1 \bar{U} \bar{V} + \bar{\mu} - \bar{v}_0 \frac{\bar{V}}{\bar{U}^3} \right), \\ \bar{T}_{22}^p &\sim \bar{\lambda}_0 \bar{V}^2 + \varepsilon^{\frac{1}{5}} \left(\bar{\lambda}_1 \bar{U}^2 + 2\bar{\mu} \frac{\bar{V}}{\bar{U}} + \frac{\bar{v}_0}{\bar{U}^2} - 1 \right),\end{aligned}\quad (\text{B.271})$$

que mantendo apenas os termos de ordem $O(1)$, resulta em

$$\bar{T}_{11}^p = \bar{\lambda}_0 \bar{U}^2, \quad \bar{T}_{12}^p = \bar{\lambda}_0 \bar{U} \bar{V}, \quad \bar{T}_{22}^p = \bar{\lambda}_0 \bar{V}^2, \quad (\text{B.272})$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\bar{T}_{11}^p &= -\frac{3C_0(-\bar{X})^{\frac{6}{11}}}{\kappa(-\bar{X})^{\frac{23}{22}} + 3C_0K_1\bar{Y}^{\frac{10}{11}}}, \\ \bar{T}_{12}^p &= \frac{1}{2}(-\bar{X})^{-1} \bar{Y} \bar{T}_{11}^p, \\ \bar{T}_{22}^p &= \frac{1}{4}(-\bar{X})^{-2} \bar{Y}^2.\end{aligned}\quad (\text{B.273})$$

Note que (B.273) resulta em (B.142) para $K_2 = 0$ e $K_3 = 0$.

- Giesekus

Substituindo as variáveis escalonadas (B.233) em (B.172) (considerando a expressão de \mathbf{g} para o modelo Giesekus), obtemos

$$\begin{aligned}&(\varepsilon^{\frac{1}{2}} \bar{U}) \frac{\partial(\varepsilon^{-\frac{3}{2}} \bar{\lambda})}{\partial(\varepsilon \bar{X})} + (\varepsilon^{\frac{5}{7}} \bar{V}) \frac{\partial(\varepsilon^{-\frac{3}{2}} \bar{\lambda})}{\partial(\varepsilon^{\frac{17}{14}} \bar{Y})} + 2\bar{\mu} \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{w}} + (\varepsilon^{-\frac{3}{2}} \bar{\lambda}) + \\ &\kappa \left[\left((\varepsilon^{-\frac{3}{2}} \bar{\lambda}) - \frac{1}{\varepsilon \bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{10}{7}} \bar{V}^2} \right)^2 (\varepsilon \bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{10}{7}} \bar{V}^2) + \frac{\bar{\mu}^2}{\varepsilon \bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{10}{7}} \bar{V}^2} \right] = \frac{1}{\varepsilon \bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{10}{7}} \bar{V}^2}, \\ &(\varepsilon^{\frac{1}{2}} \bar{U}) \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial(\varepsilon \bar{X})} + (\varepsilon^{\frac{5}{7}} \bar{V}) \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial(\varepsilon^{\frac{17}{14}} \bar{Y})} + (\varepsilon^{\frac{3}{2}} \bar{v}) \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{w}} + \bar{\mu} + \\ &\kappa \left[(\varepsilon^{-\frac{3}{2}} \bar{\lambda})(\varepsilon \bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{10}{7}} \bar{V}^2) - 2 + \frac{(\varepsilon^{\frac{3}{2}} \bar{v})}{\varepsilon \bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{10}{7}} \bar{V}^2} \right] \bar{\mu} = 0, \\ &(\varepsilon^{\frac{1}{2}} \bar{U}) \frac{\partial(\varepsilon^{\frac{3}{2}} \bar{v})}{\partial(\varepsilon \bar{X})} + (\varepsilon^{\frac{5}{7}} \bar{V}) \frac{\partial(\varepsilon^{\frac{3}{2}} \bar{v})}{\partial(\varepsilon^{\frac{17}{14}} \bar{Y})} + (\varepsilon^{\frac{3}{2}} \bar{v}) + \\ &\kappa \left[((\varepsilon^{\frac{3}{2}} \bar{v}) - (\varepsilon \bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{10}{7}} \bar{V}^2))^2 \frac{1}{\varepsilon \bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{10}{7}} \bar{V}^2} + \bar{\mu}^2 (\varepsilon \bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{10}{7}} \bar{V}^2) \right] = \varepsilon \bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{10}{7}} \bar{V}^2,\end{aligned}\quad (\text{B.274})$$

onde

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{w}} = \frac{\partial}{\partial \bar{Y}} \left(\frac{\bar{U}}{\bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{3}{7}} \bar{V}^2} \right) + \varepsilon^{\frac{3}{7}} \frac{\partial}{\partial \bar{X}} \left(\frac{-\bar{V}}{\bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{3}{7}} \bar{V}^2} \right). \quad (\text{B.275})$$

Mediante algumas manipulações algébricas em (B.274), obtemos

$$\begin{aligned} & \bar{U} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{X}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{Y}} + 2\bar{\mu} \varepsilon^{\frac{2}{7}} \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{w}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \bar{\lambda} + \\ & \kappa \left[\left(\bar{\lambda}^2 - 2 \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}} \bar{\lambda}}{\bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{3}{7}} \bar{V}^2} + \frac{\varepsilon}{\bar{U}^4 + 2\varepsilon^{\frac{3}{7}} \bar{U}^2 \bar{V}^2 + \varepsilon^{\frac{6}{7}} \bar{V}^4} \right) (\bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{3}{7}} \bar{V}^2) + \frac{\varepsilon \bar{\mu}^2}{\bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{3}{7}} \bar{V}^2} \right] = \frac{\varepsilon}{\bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{3}{7}} \bar{V}^2}, \\ & \bar{U} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{X}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{Y}} + \varepsilon^{\frac{1}{14}} \bar{v} \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{w}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \bar{\mu} + \kappa \left[\bar{\lambda} (\bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{3}{7}} \bar{V}^2) - 2\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon \bar{v}}{\bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{3}{7}} \bar{V}^2} \right] \bar{\mu} = 0, \\ & \bar{U} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{X}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{Y}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \bar{v} + \\ & \kappa \left[(\varepsilon \bar{v}^2 - 2\varepsilon^{\frac{1}{2}} \bar{v} (\bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{3}{7}} \bar{V}^2) + \bar{U}^4 + 2\varepsilon^{\frac{3}{7}} \bar{U}^2 \bar{V}^2 + \varepsilon^{\frac{6}{7}} \bar{V}^4) \frac{1}{\bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{3}{7}} \bar{V}^2} + \bar{\mu}^2 (\bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{3}{7}} \bar{V}^2) \right] = \bar{U}^2 + \varepsilon^{\frac{3}{7}} \bar{V}^2, \end{aligned} \quad (\text{B.276})$$

sujeita as condições de combinação, dadas por

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} & \sim \frac{C_1}{C_0^2} (-\bar{X})^{-\frac{7}{16}} (2\bar{Y})^{-\frac{7}{8}}, \quad \bar{\mu} \sim C_2, \quad \bar{v} \sim C_3 C_0^2 (-\bar{X})^{\frac{7}{16}} (2\bar{Y})^{\frac{7}{8}} \\ \text{para} \quad \bar{Y} & \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (\text{B.277})$$

Assim, as equações da camada limite são dadas por

$$\begin{aligned} & \bar{U} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{X}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{Y}} + \kappa \bar{\lambda}^2 \bar{U}^2 = 0, \\ & \bar{U} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{X}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{Y}} + \kappa \bar{\lambda} \bar{\mu} \bar{U}^2 = 0, \\ & \bar{U} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{v}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{Y}} + \kappa \bar{U}^2 (1 + \bar{\mu}^2) = \bar{U}^2. \end{aligned} \quad (\text{B.278})$$

Para a construção das equações de similaridade, fazemos

$$\bar{\lambda} = \theta_1 \tilde{\lambda}(\xi), \quad \bar{\mu} = \theta_2 \tilde{\mu}(\xi), \quad \bar{v} = \theta_3 \tilde{v}(\xi), \quad (\text{B.279})$$

onde ξ é o mesmo obtido no caso da base Cartesiana (B.151). Substituindo (B.279) em (B.278), juntamente com as relações de \bar{X} , \bar{Y} e $\bar{\Psi}$ em (3.110), resulta em

$$\theta_1 = \frac{\beta}{\alpha \gamma}, \quad \theta_2 = 1, \quad \theta_3 = \frac{\gamma \alpha}{\beta}, \quad (\text{B.280})$$

onde os valores de α , β e γ são os mesmos obtidos em (B.148) e (B.147). Portanto, usando os valores de α , β e γ , temos que

$$\bar{\lambda} = (-\bar{X})^{-\frac{3}{2}} \tilde{\lambda}(\xi), \quad \bar{\mu} = \tilde{\mu}(\xi), \quad \bar{v} = (-\bar{X})^{\frac{3}{2}} \tilde{v}(\xi), \quad (\text{B.281})$$

tal que o sistema de equações é dado por

$$\begin{aligned} & \frac{24}{7} \xi \tilde{\lambda}' + 3\tilde{\lambda} + 4\kappa C_0 \tilde{\lambda}^2 = 0, \\ & \frac{24}{7} \xi \tilde{\mu}' + 4\kappa C_0 \tilde{\lambda} \tilde{\mu} = 0, \\ & \frac{24}{7} \xi \tilde{v}' - 3\tilde{v} + 4\kappa C_0 (1 + \tilde{\mu}^2) = 4C_0, \end{aligned} \quad (\text{B.282})$$

sujeito às condição de combinação, dadas por

$$\tilde{\lambda} \sim \frac{C_1}{C_0^2} 2^{-\frac{7}{8}} \xi^{-\frac{7}{8}}, \quad \tilde{\mu} \sim C_2, \quad \tilde{v} \sim C_3 C_0^2 2^{\frac{7}{8}} \xi^{\frac{7}{8}}. \quad (\text{B.283})$$

Para a solução de $\tilde{\lambda}$, precisamos linearizar a primeira equação de (B.282). Desta forma, fazemos

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{l} \rightarrow \tilde{\lambda}' = -\frac{l'}{l^2}, \quad (\text{B.284})$$

que substituindo em (B.282) implica em

$$-\frac{24}{7} \xi l' + 3l = -4\kappa C_0. \quad (\text{B.285})$$

Resolvendo (B.285) pelo método do fator integrante, temos que o fator integrante é dado por

$$\vartheta(\xi) = \xi^{-\frac{21}{24}}. \quad (\text{B.286})$$

Assim, o valor de l é dado pela integral

$$l = \xi^{\frac{21}{24}} \int \xi^{-\frac{21}{24}} \frac{7}{6} \xi^{-1} C_0 \kappa d\xi, \quad (\text{B.287})$$

que implica em

$$l = -4C_0^2 \left(\frac{\kappa + 3K_1 C_0 \xi^{\frac{7}{8}}}{3C_0} \right). \quad (\text{B.288})$$

Reescrevendo a solução (B.288) em termos de $\tilde{\lambda}$, resulta em

$$\tilde{\lambda} = -\frac{3C_0}{4C_0^2 \left(\kappa + 3K_1 C_0 \xi^{\frac{7}{8}} \right)}. \quad (\text{B.289})$$

Para a solução de $\tilde{\mu}$ basta reescrevermos a segunda equação em (B.282) como

$$\tilde{\mu}' - \frac{7}{8} \xi^{-1} \frac{\tilde{\mu}}{\left(\kappa + 3K_1 C_0 \xi^{\frac{7}{8}} \right)} = 0, \quad (\text{B.290})$$

que implica em

$$\frac{\tilde{\mu}'}{\tilde{\mu}} = \frac{7}{8} \xi^{-1} \frac{\kappa}{\left(\kappa + 3K_1 C_0 \xi^{\frac{7}{8}} \right)} \rightarrow \tilde{\mu} = \frac{3C_0 C_2 K_1 \xi^{\frac{7}{8}}}{\kappa + 3C_0 K_1 \xi^{\frac{7}{8}}}. \quad (\text{B.291})$$

As constantes $3C_0 C_2 K_1$ foram adicionadas de modo que $\tilde{\mu}$ satisfaça a condição de combinação para $\xi \rightarrow +\infty$.

Por fim, para a solução da variável \tilde{v} , reescrevemos a terceira equação em (B.282) como

$$\tilde{v}' - \frac{7}{8} \xi^{-1} \tilde{v} = \frac{7}{6} \xi^{-1} C_0 (1 - \kappa - \kappa \tilde{\mu}^2). \quad (\text{B.292})$$

Pelo método do fator integrante, temos que o fator integrante é dado por

$$\vartheta(\xi) = \xi^{-\frac{7}{8}}. \quad (\text{B.293})$$

Assim, o valor de \tilde{v} é então dado por

$$\begin{aligned} \tilde{v} &= \xi^{\frac{7}{8}} \int \xi^{-\frac{15}{8}} \frac{7}{6} C_0 \left(1 - \kappa - \frac{9\kappa K_1^2 C_2^2 C_0^2 \xi^{\frac{7}{4}}}{(\kappa + 3C_0 K_1 \xi^{\frac{7}{8}})^2} \right) = \xi^{\frac{7}{8}} \left[-\frac{4}{3} C_0 (1 - \kappa) \xi^{-\frac{7}{8}} \right] - \\ &\quad \xi^{\frac{7}{8}} \int \frac{21}{2} \frac{\xi^{-\frac{1}{8}} C_0 \kappa K_1^2 C_0^2}{(\kappa + 3C_0 K_1 \xi^{\frac{7}{8}})} d\xi. \end{aligned} \quad (\text{B.294})$$

Para a solução da segunda parcela em (B.294), fazemos uma mudança de variável da forma

$$z = \kappa + 3C_0 K_1 \xi^{\frac{7}{8}} \rightarrow dz = \frac{21}{8} C_0 K_1 \xi^{-\frac{1}{8}} d\xi, \quad (\text{B.295})$$

que, substituindo na segunda parcela de (B.294), resulta em

$$\int \frac{4\kappa K_1 C_0^2 C_2^2}{z^2} dz = -4\kappa K_1 C_2^2 C_0^2 + C_3 C_0^2 2^{\frac{7}{8}}. \quad (\text{B.296})$$

Note que, a constante $C_3 C_0^2 2^{\frac{7}{8}}$ adicionada à solução, foi escolhida de modo a solução final satisfazer a condição de combinação. Desta forma, a solução completa de \tilde{v} é dada por

$$\tilde{v} = -\frac{4}{3} C_0 (1 - \kappa) + \frac{4\kappa K_1 C_2^2 \xi^{\frac{7}{8}} C_0^2}{\kappa + 3C_0 K_1 \xi^{\frac{7}{8}}} + C_3 C_0^2 2^{\frac{7}{8}} \xi^{\frac{7}{8}}. \quad (\text{B.297})$$

Pelas relações em (B.281), podemos reescrever as soluções em termos de $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$ e \bar{v} . De fato, substituindo (B.289), (B.291) e (B.297) em (B.281), obtemos

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= -\frac{3C_0(-\bar{X})^{-\frac{7}{16}}}{4C_0^2 (\kappa(-\bar{X})^{\frac{17}{16}} + 3K_1 C_0 \bar{Y}^{\frac{7}{8}})}, \\ \bar{\mu} &= \frac{3C_0 C_2 K_1 \bar{Y}^{\frac{7}{8}}}{\kappa(-\bar{X})^{\frac{17}{16}} + 3C_0 K_1 \bar{Y}^{\frac{7}{8}}}, \\ \bar{v} &= -\frac{4}{3} C_0 (1 - \kappa) (-\bar{X})^{\frac{3}{2}} + \frac{4\kappa K_1 C_2^2 C_0^2 \bar{Y}^{\frac{7}{8}} (-\bar{X})^{\frac{3}{2}}}{\kappa(-\bar{X})^{\frac{17}{16}} + 3C_0 K_1 \bar{Y}^{\frac{7}{8}}} + C_3 C_0^2 (2\bar{Y})^{\frac{7}{8}} (-\bar{X})^{\frac{7}{16}}. \end{aligned} \quad (\text{B.298})$$

Aplicando as variáveis escalonadas em (2.33), resulta em

$$\begin{aligned} \bar{T}_{11}^p &= \bar{\lambda} \bar{U}^2 - \frac{2\bar{\mu} \bar{U} \bar{V} \varepsilon^{\frac{5}{7}}}{\bar{U}^2 + \bar{V}^2 \varepsilon^{\frac{3}{7}}} + \frac{\bar{v} \bar{V}^2 \varepsilon^{\frac{10}{7}}}{\bar{U}^4 + 2\bar{U}^2 \bar{V}^2 \varepsilon^{\frac{2}{7}} + \bar{V}^4 \varepsilon^{\frac{6}{7}}} - \varepsilon^{-\frac{1}{2}}, \\ \bar{T}_{12}^p &= \bar{\lambda} \bar{U} \bar{V} + \bar{\mu} \varepsilon^{\frac{2}{7}} \frac{(\bar{U}^2 - \varepsilon^{\frac{3}{7}} \bar{V}^2)}{(\bar{U}^2 + \bar{V} \varepsilon^{\frac{3}{7}})} - \frac{\bar{v} \bar{U} \bar{V} \varepsilon}{\bar{U}^4 + 2\bar{U}^2 \bar{V}^2 \varepsilon^{\frac{2}{7}} \bar{V}^4 \varepsilon^{\frac{6}{7}}}, \\ \bar{T}_{22}^p &= \bar{\lambda} \bar{V}^2 + 2\bar{\mu} \frac{\bar{U} \bar{V}}{\bar{U}^2 + \bar{V}^2 \varepsilon^{\frac{3}{7}}} \varepsilon^{\frac{2}{7}} + \bar{v} \frac{\bar{U}^2}{\bar{U}^4 + 2\bar{U}^2 \bar{V}^2 \varepsilon^{\frac{2}{7}} + \bar{V}^4 \varepsilon^{\frac{6}{7}}} \varepsilon^{\frac{4}{7}}. \end{aligned} \quad (\text{B.299})$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\bar{T}_{11}^P &= \bar{\lambda} \bar{U}^2 - 2\bar{\mu} \frac{\bar{V}}{\bar{U}} \varepsilon^{\frac{5}{7}} - \varepsilon^{\frac{1}{2}}, \\ \bar{T}_{12}^P &= \bar{\lambda} \bar{U} \bar{V} + \bar{\mu} \varepsilon^{\frac{2}{7}}, \\ \bar{T}_{22}^P &= \bar{\lambda} \bar{V}^2 + 2\bar{\mu} \frac{\bar{V}}{\bar{U}} \varepsilon^{\frac{2}{7}} + \frac{\bar{V}}{\bar{U}^2} \varepsilon^{\frac{4}{7}} - \varepsilon^{\frac{1}{14}},\end{aligned}\quad (\text{B.300})$$

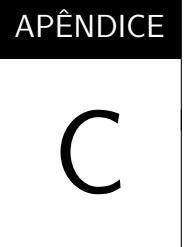
que mantendo apenas os termos de mais alta ordem, resulta em

$$\bar{T}_{11}^P = \bar{\lambda} \bar{U}^2, \quad \bar{T}_{12}^P = \bar{\lambda} \bar{U} \bar{V}, \quad \bar{T}_{22}^P = \bar{\lambda} \bar{V}^2, \quad (\text{B.301})$$

ou ainda,

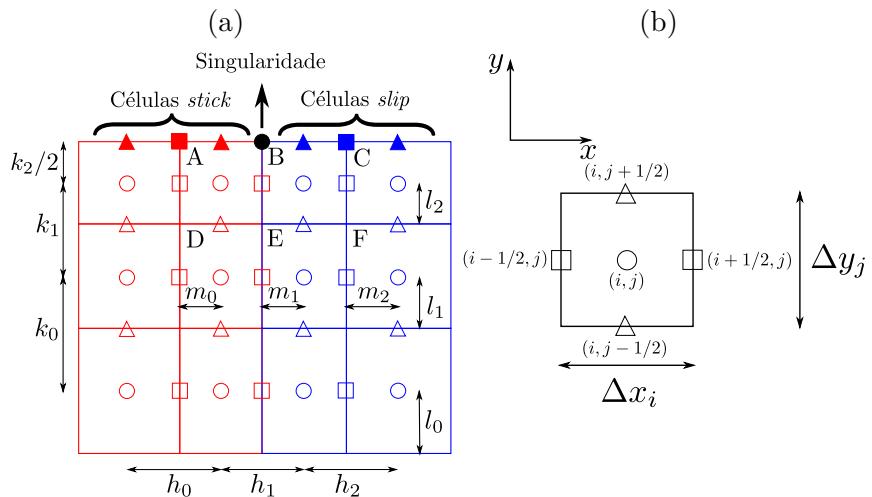
$$\begin{aligned}\bar{T}_{11}^P &= -\frac{3C_0(-\bar{X})^{-\frac{7}{16}}}{\kappa(-\bar{X})^{\frac{17}{16}} + 3K_1C_0\bar{Y}^{\frac{7}{8}}}, \\ \bar{T}_{12}^P &= \frac{1}{2}(-\bar{X})\bar{Y}\bar{T}_{11}^P, \\ \bar{T}_{22}^P &= \frac{1}{4}(-\bar{X})^{-2}\bar{Y}^2\bar{T}_{11}^P.\end{aligned}\quad (\text{B.302})$$

Note que, a solução (B.302) terá os mesmos valores que para o caso Cartesiano quando $K_2 = K_3 = 0$.



DISCRETIZAÇÕES POR DIFERENÇAS FINITAS PRÓXIMAS À SINGULARIDADE

Figura 46 – Células próximas à singularidade.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Nesta Seção, descrevemos alguns dos detalhes usados na discretização espacial das derivadas próximas ao ponto singular (ver Figura 46 (a)). Para isto, usamos aproximações por diferenças finitas em uma malha não uniforme com a metodologia *Marker-And-Cell* (MAC). É importante destacar que nas células MAC, ou células deslocadas, as componentes da velocidade são alocadas nas faces da célula ao passo que as demais propriedades são armazenadas no centro da célula, como ilustrado na Figura 46 (b). De acordo com a Figura 46 (b), a velocidade na direção x é representada por quadrados nas linhas verticais e a velocidade na direção y é representada por triângulos nas linhas horizontais.

A fim de descrever as aproximações por diferenças finitas, consideramos o ponto singular na superfície superior do domínio, como ilustrado na Figura 46 (a), separando

as células *stick* (em vermelho) e *slip* (em azul). Como descrito na Figura 46 (a), a face superior das células A, B e C coincidem com o contorno do escoamento de modo que as condições de contorno de não escorregamento e impermeabilidade $\mathbf{v} = 0$ e $v = 0$ são aplicadas nas superfícies *stick* e *slip*, respectivamente.

Em particular, nesta Seção, chamamos a atenção para a discretização de um termo específico que é afetado pela presença do ponto singular e da repentina mudança nas condições de contorno ao redor deste ponto (ver Figura 46 (a)).

- Termos da equação do movimento (2.24): Incluindo o efeito da condição de não escorregamento, a derivada segunda de u com relação a y na posição $(i - 1/2, j)$ da célula A é dada pela seguinte formula

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}|_{A,(i-1/2,j)} \approx \left(-\frac{2}{k_2(k_2+k_1)} - \frac{2}{k_1 k_2} \right) u_{i-1/2,j} + \frac{2}{k_1(k_2+k_1)} u_{i-1/2,j-1}, \quad (\text{C.1})$$

onde k_z , $z = 1, 2$, é a distância vertical entre o centro de duas células adjacentes. Similarmente, construímos a formula de $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ na posição $(i - 1/2, j)$ da célula B. Lembrando que a condição de não escorregamento é imposta no ponto singular. Desta forma, discretizações semelhantes são tomadas para todas as outras células da superfície *stick*.

A aproximação de $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ em células *slip* é construída pela condição tangencial em (2.61). Para ilustrar, discretizamos $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ na posição $(i - 1/2, j)$ da célula C, ou seja,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}|_{C,(i-1/2,j)} \approx \left(\frac{2}{k_2(k_2+k_1)} - \frac{2}{k_1 k_2} \right) u_{i-1/2,j} + \frac{2}{k_1(k_2+k_1)} u_{i-1/2,j-1} - \frac{2}{\beta k_2(k_2+k_1)} T_{12i-1/2,j+1/2}, \quad (\text{C.2})$$

onde $T_{12i-1/2,j+1/2}$ é dado por

$$T_{12i-1/2,j+1/2} \approx \frac{T_1 m_2 + T_2 m_1}{m_1 + m_2}, \quad (\text{C.3})$$

tal que

$$\begin{aligned} T_1 &\approx \frac{1}{2} \left[\frac{2k_1 + k_2}{k_1} T_{12i-1,j} - \frac{k_2}{k_1} T_{12i-1,j-1} \right], \\ T_2 &\approx \frac{1}{2} \left[\frac{2k_1 + k_2}{k_1} T_{12i,j} - \frac{k_2}{k_1} T_{12i,j-1} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

O termo $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ na posição $(i - 1/2, j)$ é discretizado de maneira similar nas demais células da superfície *slip*.

A discretização dos outros termos quadráticos em (2.24) não mudam conforme as condições de contorno variam. Assim, apresentamos as discretizações apenas para a

célula A:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{A(i-1/2,j)} &\approx \frac{2}{\Delta x_{i-1}(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} u_{i-3/2,j} - \frac{2}{\Delta x_i \Delta x_{i-1}} u_{i-1/2,j} + \frac{2}{\Delta x_i (\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} u_{i+1/2,j} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}|_{A(i,j-1/2)} &\approx \frac{2}{h_0(h_0 + h_1)} v_{i-1,j-1/2} - \frac{2}{h_0 h_1} v_{i,j-1/2} + \frac{2}{h_1(h_0 + h_1)} v_{i+1,j-1/2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}|_{A(i,j-1/2)} &\approx -\frac{2}{\Delta y_j \Delta y_{j-1}} v_{i,j-1/2} + \frac{2}{\Delta y_{j-1}(\Delta y_j + \Delta y_{j-1})} v_{i,j-3/2}.\end{aligned}\tag{C.5}$$

Para as derivadas de \mathbf{T} , discretizamos apenas na célula B, uma vez que as discretizações não variam com a mudança da condição *stick* para *slip*. Assim, as discretizações na célula B são dadas por

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_{11}}{\partial x}|_{B(i-1/2,j)} &\approx \frac{1}{h_1} (T_{11i,j} - T_{11i-1,j}) \\ \frac{\partial T_{12}}{\partial y}|_{B,i-1/2,j} &\approx \left(T_{12i-1,j} \frac{m_1}{h_1} + T_{12i,j} \frac{m_0}{h_1} - T_{12i-1,j-1} \frac{m_1}{h_1} - T_{12i,j-1} \frac{m_0}{h_1} \right) / k_1 \\ \frac{\partial T_{12}}{\partial x}|_{B,(i,j-1/2)} &\approx \frac{h_1}{h_2(h_1 + h_2)} \left(T_{12i+1,j} \frac{l_1}{k_1} + T_{12i+1,j-1} \frac{l_2}{k_1} \right) + \\ &\quad \frac{h_2 - h_1}{h_1 h_2} \left(T_{12i,j} \frac{l_1}{k_1} + T_{12i,j-1} \frac{l_2}{k_1} \right) - \frac{h_2}{h_1(h_1 + h_2)} \left(T_{12i-1,j} \frac{l_1}{k_1} + T_{12i-1,j-1} \frac{l_2}{k_1} \right) \\ \frac{\partial T_{22}}{\partial y}|_{B(i,j-1/2)} &\approx \frac{1}{k_1} (T_{22i,j} - T_{12i,j-1}).\end{aligned}\tag{C.6}$$

- Termos das equações constitutivas (2.26) :

Finalmente, apresentamos as derivadas da velocidade. A derivada de $\frac{\partial u}{\partial y}$ é dada por

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y}|_{(i,j)} &\approx \frac{k_1}{k_2(k_1 + k_2)} \frac{(u_{i+1/2,j+1} + u_{i-1/2,j+1})}{2} + \frac{(k_2 - k_1)}{k_1 k_2} \frac{(u_{i+1/2,j} + u_{i-1/2,j})}{2} - \\ &\quad \frac{k_2}{k_1(k_1 + k_2)} \frac{(u_{i+1/2,j-1} + u_{i-1/2,j-1})}{2}.\end{aligned}\tag{C.7}$$

Conforme mudamos da superfície *stick* para *slip*, alguns valores de u da equação (C.7) também mudam. Para ilustrar este fato, consideramos as discretizações nas células A e B. Para a célula A, os valores de $u_{i-1/2,j+1}$ e $u_{i+1/2,j}$ são

$$\begin{aligned}u_{i-1/2,j+1} &\approx -u_{i-1/2,j} \\ u_{i+1/2,j+1} &\approx -u_{i+1/2,j},\end{aligned}\tag{C.8}$$

devido a condição de não escorregamento.

Por outro lado, para a célula B, os valores de $u_{i-1/2,j+1}$ e $u_{i+1/2,j}$ são

$$\begin{aligned} u_{i-1/2,j+1} &\approx -u_{i-1/2,j} \\ u_{i+1/2,j+1} &\approx u_{i+1/2,j} - \frac{\Delta y_j}{\beta} T_{12i+1/2,j+1/2}, \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

onde

$$T_{12i+1/2,j+1/2} \approx \frac{T_1 m_2 + T_2 m_1}{m_1 + m_2}, \quad (\text{C.10})$$

tal que

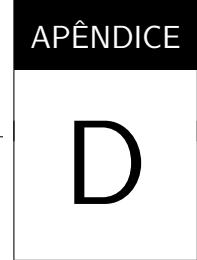
$$\begin{aligned} T_1 &\approx \frac{1}{2} \left[\frac{2k_1 + k_2}{k_1} T_{12i-1,j} - \frac{k_2}{k_1} T_{12i-1,j-1} \right], \\ T_2 &\approx \frac{1}{2} \left[\frac{2k_1 + k_2}{k_1} T_{12i,j} - \frac{k_2}{k_1} T_{12i,j-1} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Para as derivadas $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$, discretizamos sobre a célula A, sendo similar para as demais células. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}|_{A(i,j)} &\approx \frac{1}{\Delta x_i} (u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j}) \\ \frac{\partial v}{\partial y}|_{A,B,C,D,(i,j)} &\approx \frac{1}{\Delta y_j} (v_{i,j+1/2} - v_{i,j-1/2}). \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Por outro lado, a derivada $\frac{\partial v}{\partial x}$ difere entre as células adjacentes à superfície e as células dentro do domínio. Além disso, a derivada $\frac{\partial v}{\partial x}$ não muda quando passamos de uma superfície para outro. Desta forma, temos as seguintes discretizações

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x}|_{D,(i,j)} &\approx \frac{h_0}{h_1(h_0+h_1)} \frac{(v_{i+1,j+1/2} + v_{i+1,j-1/2})}{2} + \frac{h_1-h_0}{h_0 h_1} \frac{(v_{i,j+1/2} + v_{i,j-1/2})}{2} - \\ &\quad \frac{h_1}{h_0(h_0+h_1)} \frac{(v_{i-1,j+1/2} + v_{i-1,j-1/2})}{2} \\ \frac{\partial v}{\partial x}|_{A,(i,j)} &\approx \frac{h_0}{h_1(h_0+h_1)} \frac{(v_{i+1,j-1/2})}{2} + \frac{h_1-h_0}{h_0 h_1} \frac{(v_{i,j-1/2})}{2} - \\ &\quad \frac{h_1}{h_0(h_0+h_1)} \frac{(v_{i-1,j-1/2})}{2}. \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$



MÉTODO NUMÉRICO PARA A INTEGRAÇÃO AO LONGO DE LINHAS DE CORRENTE

Neste Capítulo, apresentamos o método numérico utilizado no processo de integração das equações constitutivas ao longo de linhas de corrente. Esta metodologia só é possível para problemas em que uma expressão analítica para o campo de velocidade é conhecida, como é o caso dos problemas *stick-slip* (4.3) e da contração 4:1 (5.1). Desta forma, o primeiro passo para a integração sobre linhas de corrente é definir a função linha de corrente e as funções a ela associadas, como o campo de velocidade e as derivadas da velocidade.

Todo o processo descrito aqui foi implementado em MATLAB. As funções $r(\theta)$, $v_r(\theta)$, $v_\theta(\theta)$, bem como as derivadas das componentes das velocidades com relação à r e θ , são definidas pelo comando @ do MATLAB, por exemplo, a função v_r do *stick-slip* (4.4) é definida como

$$v_r = @(s)[2*C0*(sqrt(r(s))))(((cos(s/2))/2)*sin(s)+sin(s/2)*cos(s))], \quad (D.1)$$

onde s representa a variável θ e a constante C_0 é tomada como -1 . Lembrando que, mediante a relação entre r e θ (3.65), todas as variáveis do sistema passam a depender apenas de θ . Assim, as equações constitutivas para as formulações CSF e NSF passam de sistemas de EDP's, equações (3.46) e (3.166), respectivamente, para sistemas de EDO's (4.1) e (4.2).

O domínio para solução dos sistemas de equações (4.1), para a formulação CSF, ou (4.2), para a formulação NSF, é definido como $[0 + tol, \frac{\pi}{2} - tol]$, tal que tol é uma tolerância utilizada para que o contorno seja desconsiderado no processo de solução das

equações. Além disso, usamos como condição de contorno em $\theta = 0$ a solução da equação constitutiva (3.46) sem os termos convectivos. Para a condição inicial das variáveis naturais, os valores de \mathbf{T}^p são transferidos para as variáveis naturais λ , μ e ν por meio de (2.35).

Finalmente, uma vez definido as funções das componentes da velocidade e suas derivadas, bem como o domínio e a condição de contorno em $\theta = 0$, resolvemos o sistema de equações diferenciais, para o caso CSF ou NSF, mediante a função odes15 do MATLAB, com tolerância igual a 10^{-6} para o processo de parada do método.

