Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade Estadual Paulista
Campus de Presidente Prudente

Lista de Cálculo 1: Aplicações da derivada

Prof. Dr. Irineu Lopes Palhares Junior

Lista de exercícios

Presidente Prudente
Junho de 2023

Sumário

1 Intervalos de crescimento e de decrescimento

$$\beta\, g'(x) - f'(x) > 0.$$

Segue que, para todo $x \in\,]s, p[$, tem-se

$$\alpha\, g(x) - f(x) < \alpha\, g(s) - f(s)$$

e

$$\beta\, g(x) - f(x) > \beta\, g(s) - f(s)$$

Fazendo $M = f(s) - \alpha\, g(s)$, $N = f(s) - \beta\, g(s)$ e lembrando que $g(x) > 0$ em I, resulta, para todo $x \in\,]s, p[$,

$$\frac{M}{g(x)} + \alpha < \frac{f(x)}{g(x)} < \beta + \frac{N}{g(x)}. \qquad \blacksquare$$

Exercícios 9.2

1. Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento e esboce o gráfico (calcule para isto todos os limites necessários).

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

b) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$

c) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

d) $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$

e) $y = x + \dfrac{1}{x^2}$

f) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

g) $x = \dfrac{t}{1 + t^2}$

h) $x = \dfrac{t^2}{1 + t^2}$

i) $x = 2 - e^{-t}$

j) $y = e^{-x^2}$

l) $f(x) = e^{2x} - e^x$

m) $g(t) = e^{\frac{1}{t}}$

n) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{x}$

o) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x}{1 + x^2}$

p) $g(x) = x\, e^x$

q) $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 2$

r) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

s) $g(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{2(x - 1)}$

t) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

u) $g(x) = x - e^x$

2. Prove que a equação $x^3 - 3x^2 + 6 = 0$ admite uma única raiz real. Determine um intervalo de amplitude 1 que contenha tal raiz.

3. Prove que a equação $x^3 + x^2 - 5x + 1 = 0$ admite três raízes reais distintas. Localize tais raízes.

4. Determine a, para que a equação

$$x^3 + 3x^2 - 9x + a = 0$$

admita uma única raiz real.

5. Calcule.

$a)\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^3}$ $\qquad b)\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{e^x}$

$c)\ \lim\limits_{x \to 0^+} x\, e^{\frac{1}{x}}$ $\qquad d)\ \lim\limits_{x \to 0^-} x\, e^{\frac{1}{x}}$

$e)\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$ $\qquad f)\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\ln x}$

6. Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento e esboce o gráfico (para isto, calcule todos os limites necessários).

$a)\ f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$

$b)\ f(x) = x \ln x$

$c)\ g(x) = \dfrac{x}{2 \ln x}$

$d)\ g(x) = x^x,\ x > 0$

7. Seja

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

a) Calcule $f'(0)$, pela definição

b) Determine f'

c) Esboce o gráfico, calculando, para isto, todos os limites necessários

8. Seja $n \geq 2$ um natural dado. Prove que $x^n - 1 \geq n(x - 1)$ para todo $x \geq 1$.

(*Sugestão*: Verifique que $f(x) = [x^n - 1] - n(x - 1)$ é estritamente crescente em $[1, +\infty[$.)

9. Prove que, para todo $x > 0$, tem-se

a) $e^x > x + 1$

b) $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$

10. Mostre que, para todo $x > 0$, tem-se

a) $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$ *b*) $\operatorname{sen} x > x - \dfrac{x^3}{3!}$

11. Mostre que, para todo $x > 0$, tem-se

a) $\operatorname{sen} x < x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$

b) $0 < \operatorname{sen} x - \left[x - \dfrac{x^3}{3!}\right] < \dfrac{x^5}{5!}$

(*Sugestão*: Utilize o item (*b*) do Exercício 10 e o item (*a*) acima.)

12. *a*) Mostre que, para todo $x > 0$,

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} < \operatorname{sen} x$$

b) Mostre que, para todo $x \neq 0$,

$$\left|\operatorname{sen} x - \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right]\right| < \frac{|x|^7}{7!}.$$

Generalize tal resultado.

13. Suponha que f tenha derivada contínua no intervalo I e que f' nunca se anula em I. Prove que f é estritamente crescente em I ou estritamente decrescente em I.

14. Seja $f(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 3}$, $x \in \mathbb{R}$.

   a) Verifique que f' é contínua em $\mathbb{R}$
   b) Verifique que $f'(x) \neq 0$ em $\mathbb{R}$
   c) Tendo em vista que $f'(0) > 0$, conclua que f é estritamente crescente

   (*Sugestão*: Veja Exercício 13.)

15. Seja f uma função tal que $f'''(x) > 0$ para todo x em $]a, b[$. Suponha que existe c em $]a, b[$ tal que $f''(c) = f'(c) = 0$. Prove que f é estritamente crescente em $]a, b[$.

16. Suponha f derivável no intervalo aberto I. Prove que, se f for estritamente crescente em I, então $f'(x) \geq 0$ para todo x em I.

17. Suponha f derivável no intervalo I. A afirmação: "f é estritamente crescente em I se, e somente se, $f'(x) > 0$ em I" é falsa ou verdadeira? Justifique.

18. Suponha f derivável no intervalo I. Prove: f crescente em $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ em I.

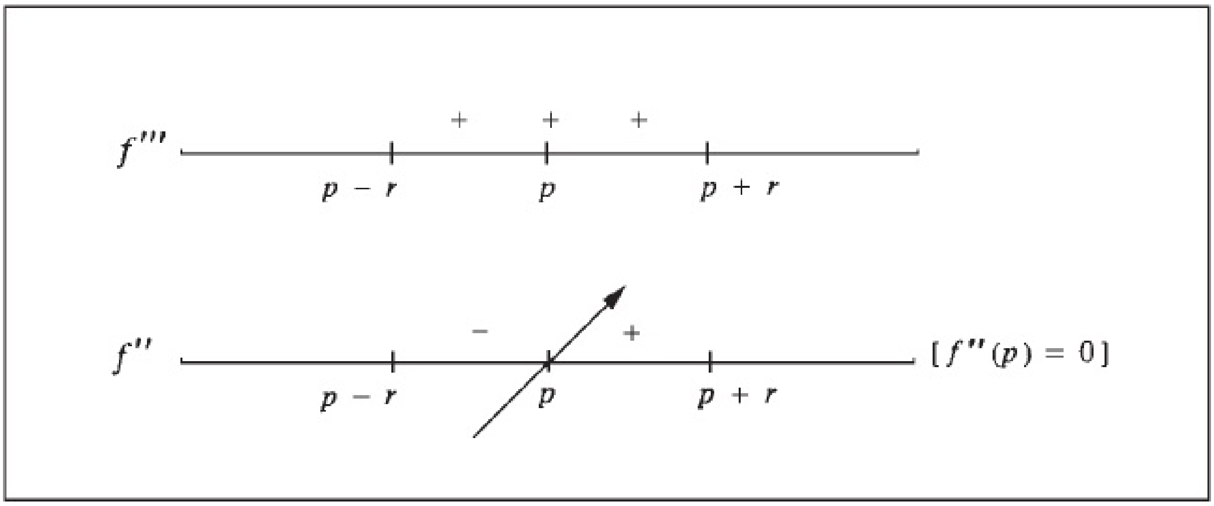
   (*Lembrete*: f se diz crescente em I se quaisquer que sejam s e t em I, $s < t \Rightarrow f(s) \leq f(t)$.)

19. Sejam f, g duas funções deriváveis em $]a, b[$, tais que $f'(x) < g'(x)$ $\forall$ x em $]a, b[$. Suponha que exista c em $]a, b[$, com $f(c) = g(c)$. Prove que $f(x) < g(x)$ para $x > c$ e $f(x) > g(x)$ para $x < c$.

9.3. CONCAVIDADE E PONTOS DE INFLEXÃO

Seja f derivável no intervalo aberto I e seja p um ponto de I. A reta tangente em $(p, f(p))$ ao gráfico de f é

2 Concavidade e pontos de inflexão



■

EXEMPLO 4. Seja f derivável até a 2.ª ordem no intervalo aberto I e seja $p \in I$. Suponha f'' contínua em p. Prove que $f''(p) = 0$ é *condição necessária* (mas não suficiente) para p ser ponto de inflexão de f.

Solução

Se $f''(p) \neq 0$, pela conservação do sinal, existe $r > 0$ tal que $f''(x)$ tem o mesmo sinal que $f''(p)$ em $]p - r, p + r[$, logo p não poderá ser ponto de inflexão. Fica provado, assim, que, se p for ponto de inflexão, deveremos ter necessariamente $f''(p) = 0$. Para verificar que a condição não é suficiente, basta olhar para a função $f(x) = x^4$: $f''(0) = 0$, mas 0 não é ponto de inflexão. ■

Exercícios 9.3

1. Estude a função dada com relação à concavidade e pontos de inflexão.

$a)\ f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

$b)\ f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 1$

$c)\ f(x) = x\ e^{-2x}$

$d)\ x(t) = t^2 + \dfrac{1}{t}$

$e)\ g(x) = e^{-x} - e^{-2x}$

$f)\ g(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 2}$

$g)\ y = \dfrac{x}{1 + x^2}$

$h)\ f(x) = 1 - e^{-x}$

$i)\ f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

$j)\ f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x$

$l)\ g(x) = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$

$m)\ y = \dfrac{x^3}{1 + x^2}$

$n)\ f(x) = x\ e^{\frac{1}{x}}$

$o)\ f(x) = x \ln x$

2. Esboce o gráfico de cada uma das funções do exercício anterior.

3. Seja $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$. Prove que f admite um único ponto de inflexão.

4. Se p for ponto de inflexão de f e se $f'(p) = 0$, então diremos que p é *ponto de inflexão horizontal* de f. Cite uma condição suficiente para que p seja ponto de inflexão horizontal de f.

5. Se p for ponto de inflexão de f e se $f'(p) \neq 0$, então diremos que p é *ponto de inflexão oblíquo* de f. Cite uma condição suficiente para que p seja ponto de inflexão oblíquo de f.

6. Sejam f uma função derivável até a 5.ª ordem no intervalo aberto I e $p \in I$. Suponha $f^{(5)}$ contínua em p. Prove que

$$f''(p) = f'''(p) = f^{(4)}(p) = 0 \text{ e } f^{(5)}(p) \neq 0$$

é uma *condição suficiente* para p ser ponto de inflexão de f. Generalize tal resultado.

7. Seja f derivável até a 2.ª ordem em $\mathbb{R}$ e tal que, para todo x, $x f''(x) + f'(x) = 4$.

a) Mostre que f'' é contínua em todo $x \neq 0$

b) Mostre que f não admite ponto de inflexão horizontal

8. Seja $f(x) = x^5 + bx^4 + cx^3 - 2x + 1$.

a) Que condições b e c devem satisfazer para que 1 seja ponto de inflexão de f? Justifique.

b) Existem b e c que tornam 1 ponto de inflexão horizontal? Em caso afirmativo, determine-os.

9. Suponha que $f''(x) > 0$ em $]a, +\infty[$ e que existe $x_0 > a$ tal que $f'(x_0) > 0$. Prove que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

10. Seja f definida e derivável no intervalo aberto I, com $1 \in I$, tal que

$$\begin{cases} f'(x) = x^2 + f^2(x) \text{ para todo } x \text{ em } I \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

a) Mostre que, para todo x em I, $f''(x)$ existe e que f'' é contínua em I

b) Mostre que existe $r > 0$ tal que $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$ em $]1 - r, 1 + r[$

c) Esboce o gráfico de $y = f(x)$, $x \in\ ]1 - r, 1 + r[$

11. Seja f definida e derivável no intervalo $]-r, r[$ $(r > 0)$. Suponha que

$$\begin{cases} f'(x) = x^2 + f^2(x) \quad \text{para todo } x \text{ em }]-r, r[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a) Mostre que 0 é ponto de inflexão horizontal

b) Mostre que $f'(x) > 0$ para $x \neq 0$

c) Estude f com relação à concavidade

d) Mostre que $f(x) > \dfrac{2}{3!}x^3$ para $0 < x < r$

e) Faça um esboço do gráfico de f

9.4. REGRAS DE L'HOSPITAL

As regras de L'Hospital, que vamos enunciar a seguir e cujas demonstrações são deixadas para o final da seção, aplicam-se a cálculos de limites que apresentam indeterminações dos tipos $\dfrac{0}{0}$ e $\dfrac{\infty}{\infty}$.

3 Máximos e mínimos

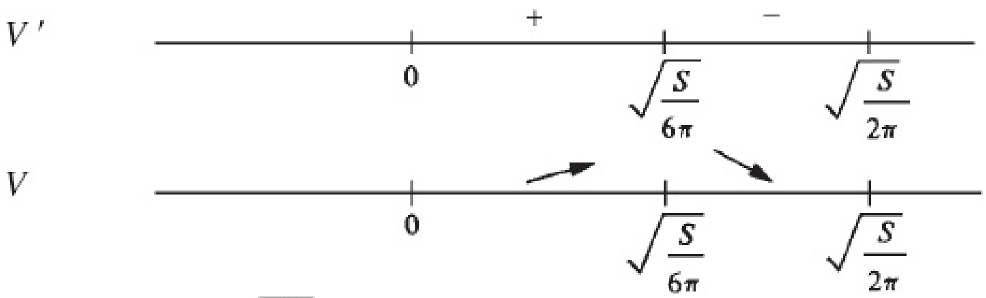
ou

$$V(r) = \frac{Sr}{2} - \pi r^3,\ 0 < r < \sqrt{\frac{S}{2\pi}}.$$

Devemos determinar *r* que torna *V* máximo.

$$V'(r) = \frac{S}{2} - 3\pi r^2;\ \frac{S}{2} - 3\pi r^2 = 0 \Leftrightarrow r = \pm\sqrt{\frac{S}{6\pi}}.$$ ■

$\left(\textbf{Observação.}\ \text{A condição}\ 0 < r < \sqrt{\frac{S}{2\pi}}\ \text{é para deixar}\ r > 0\ \text{e}\ h > 0.\right)$



Assim, $r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ torna *V* máximo.

Conclusão. $r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ e $h = 2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ são, respectivamente, o raio e a altura do cilindro de volume máximo.

Exercícios 9.6

1. Estude a função dada com relação a máximos e mínimos locais e globais.

   a) $f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$
   b) $f(x) = x\,e^{-2x}$
   c) $f(x) = e^x - e^{-3x}$
   d) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 3$
   e) $f(x) = x^2 + 3x + 2$
   f) $x(t) = t\,e^{-t}$
   g) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2$

$h)$ $f(x) = \text{sen } x + \cos x$, $x \in [0, \pi]$

$i)$ $y(t) = -t^3 + 3t^2 + 4$, $t \in [-1, 3]$

$j)$ $h(x) = \dfrac{x}{1 + x \text{ tg } x}$, $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

$l)$ $f(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{x^3}{3} + x^2$

$m)$ $y = e^{\frac{x-1}{x^2}}$

$n)$ $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$

$o)$ $y = \sqrt[3]{x^3 - x}$

2. Determine as dimensões do retângulo de área máxima e cujo perímetro $2p$ é dado.

3. Determine o número real positivo cuja diferença entre ele e seu quadrado seja máxima.

4. Determine o número real positivo cuja soma com o inverso de seu quadrado seja mínima.

5. Determine a altura do cilindro circular reto, de volume máximo, inscrito na esfera de raio R dado.

6. Determine a altura do cone circular reto, de volume máximo, inscrito na esfera de raio R dado.

7. Determine a altura do cone circular reto, de volume máximo, e com geratriz a dada.

8. Considere a curva $y = 1 - x^2$, $0 \leq x \leq 1$. Traçar uma tangente à curva tal que a área do triângulo que ela forma com os eixos coordenados seja mínima.

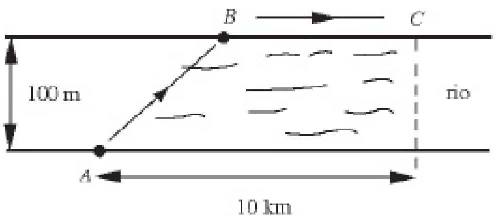
9. Determine o retângulo de área máxima e lados paralelos aos eixos coordenados, inscrito na elipse $4x^2 + y^2 = 1$.

10. Deseja-se construir uma caixa, de forma cilíndrica, de 1 m^3 de volume. Nas laterais e no fundo será utilizado material que custa R$ 10 o metro quadrado e na tampa material de R$ 20 o metro quadrado. Determine as dimensões da caixa que minimizem o custo do material empregado.

11. r é uma reta que passa pelo ponto (1, 2) e intercepta os eixos nos pontos $A = (a, 0)$ e $B = (0, b)$, com $a > 0$ e $b > 0$. Determine r de modo que a distância de A a B seja a menor possível.

12. Certa pessoa que se encontra em A, para atingir C, utilizará na travessia do rio (de 100 m de largura) um barco com velocidade máxima de 10 km/h;

de B a C utilizará uma bicicleta com velocidade máxima de 15 km/h. Determine B para que o tempo gasto no percurso seja o menor possível.



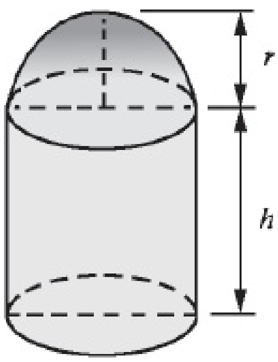
13. Qual o ponto P da curva $y = x^2$ que se encontra mais próximo de (3, 0)? Seja $P = (a, b)$ tal ponto; mostre que a reta que passa por (3, 0) e (a, b) é normal à curva em (a, b).

14. Encontre o ponto da curva $y = \frac{2}{x}$, $x > 0$, que está mais próximo da origem.

15. Duas partículas P e Q movem-se, respectivamente, sobre os eixos $0x$ e $0y$. A função de posição de P é $x = \sqrt{t}$ e a de Q, $y = t^2 - \frac{3}{4}$, $t \geq 0$. Determine o instante em que a distância entre P e Q seja a menor possível.

16. Seja g definida e positiva no intervalo I. Seja $p \in I$. Prove: p será ponto de máximo (ou de mínimo) de $h(x) = \sqrt{g(x)}$ em I, se, e somente se, p for ponto de máximo (ou de mínimo) de g em I.

17. Um sólido será construído acoplando-se a um cilindro circular reto, de altura h e raio r, uma semiesfera de raio r. Deseja-se que a área da superfície do sólido seja 5π. Determine r e h para que o volume seja máximo.

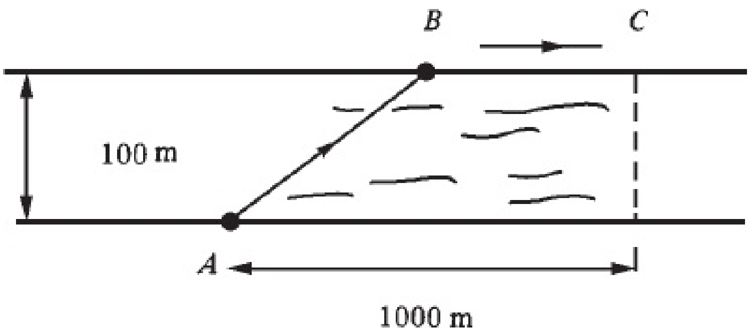


18. A Cia. α Ltda. produz determinado produto e vende-o a um preço unitário

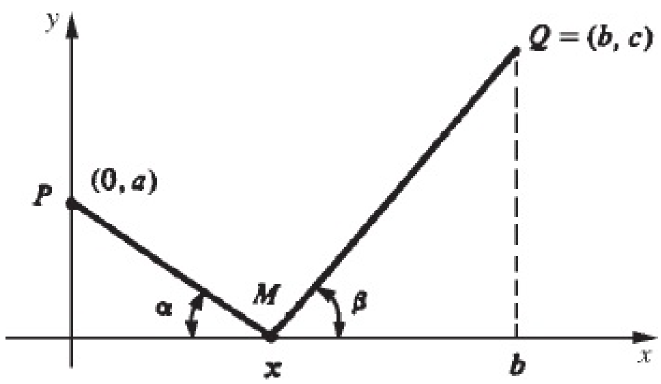
de R$ 13. Estimase que o custo total c para produzir e vender q unidades é dado por $c = q^3 - 3q^2 + 4q + 2$. Supondo que toda a produção seja absorvida pelo mercado consumidor, que quantidade deverá ser produzida para se ter lucro máximo?

19. Determinado produto é produzido e vendido a um preço unitário p. O preço de venda não é constante, mas varia em função da quantidade q demandada pelo mercado, de acordo com a equação $p = \sqrt{20 - q}$, $0 \leq q \leq 20$. Admita que, para produzir e vender uma unidade do produto, a empresa gasta em média R$ 3,50. Que quantidade deverá ser produzida para que o lucro seja máximo?

20. Do ponto A, situado numa das margens de um rio, de 100 m de largura, deve-se levar energia elétrica ao ponto C situado na outra margem do rio. O fio a ser utilizado na água custa R$ 5 o metro, e o que será utilizado fora, R$ 3 o metro. Como deverá ser feita a ligação para que o gasto com os fios seja o menor possível? (Suponha as margens retilíneas e paralelas.)



21. Sejam $P = (0, a)$ e $Q = (b, c)$, em que a, b e c são números reais dados e estritamente positivos. Seja $M = (x, 0)$, com $0 \leq x \leq b$.



a) Determine x para que o perímetro do triângulo PMQ seja mínimo.

b) Conclua que o perímetro será mínimo para $\alpha = \beta$.

22. Determine M no gráfico de $y = x^3$, $0 \leq x \leq 1$, de modo que a área do triângulo de vértices (0, 0), (1, 1) e M seja máxima.

23. A Cia. γ Ltda. produz um determinado produto e vende-o com um lucro total dado por $L(q) = -q^3 + 12q^2 + 60q - 4$, em que q representa a quantidade produzida. Determine o lucro máximo e a produção que maximiza o lucro. Esboce o gráfico desta função.

24. Determine uma reta tangente ao gráfico de $y = 1 - x^2$, de modo que a distância da origem a ela seja a menor possível.

25. Determine o ponto da parábola $y = 1 - x^2$ que se encontra mais próximo da origem.

26. Seja (x_0, y_0), $x_0 > 0$ e $y_0 > 0$, um ponto da elipse $x^2 + 4y^2 = 1$. Seja T a reta tangente à elipse no ponto (x_0, y_0).

a) Verifique que T tem por equação

$$x_0\, x + 4\, y_0\, y = 1.$$

b) Determine x_0 de modo que a área do triângulo determinado por T e pelos eixos coordenados seja mínima.

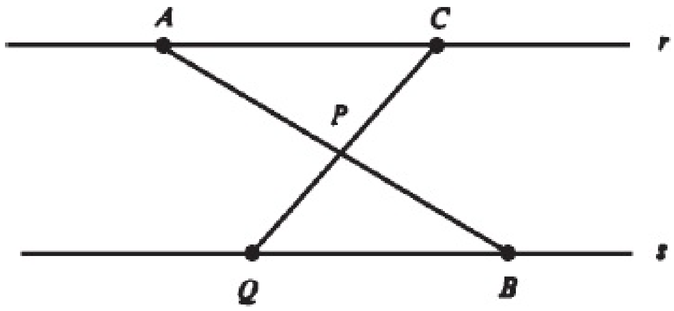
27. Uma partícula P desloca-se sobre o eixo x com velocidade constante e igual a 1. Outra partícula Q desloca-se sobre a parábola $y = 1 - x^2$ de modo que sua projeção sobre o eixo x descreve um movimento com velocidade constante e igual a 2. No instante $t = 0$, as partículas P e Q encontram-se, respectivamente, nas posições (0, 0) e (0, 1). Determine o instante em que as partículas encontram-se mais próximas.

28. Dado o triângulo retângulo de catetos 3 e 4, determine o retângulo de maior área nele inscrito, de modo que um dos lados esteja contido na hipotenusa.

29. Determine o ponto da parábola $y = x^2$ que se encontra mais próximo da reta $y = x - 2$.

30. Dois vértices de um retângulo R estão sobre o eixo x e os outros dois sobre o gráfico de $y = \dfrac{x}{1+x^2}$, $x > 0$. Considere o cilindro que se obtém girando o retângulo R em torno do eixo x. Determine o retângulo R de modo que o volume do cilindro seja o maior possível.

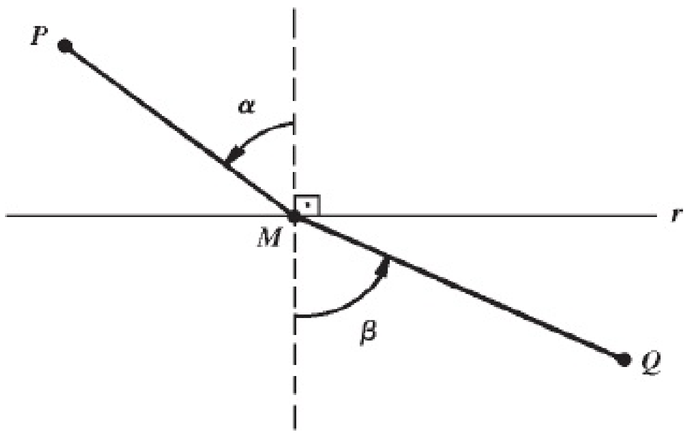
31. Considere duas retas paralelas r e s. Sejam A e C dois pontos distintos de r e B um ponto de s.



Determine Q na reta s de modo que a soma das áreas dos triângulos APC e QPB seja mínima.

32. Considere o triângulo isósceles ABC, com $AB = BC$. Seja H o ponto médio de AC. Determine P no segmento HB de modo que a soma das distâncias de P aos pontos A, B e C seja a menor possível.

33. (*Lei de refração de Snellius*). Considere uma reta r e dois pontos P e Q localizados em semiplanos opostos.

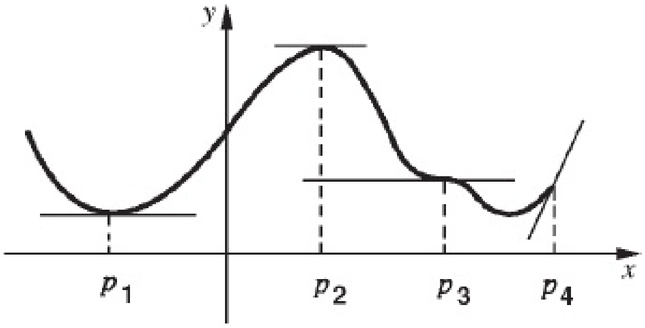


Uma partícula vai de P a M com velocidade constante u e movimento retilíneo; em seguida, vai de M a Q com velocidade constante v, também, com movimento retilíneo. Mostre que o tempo de percurso será mínimo se

$$\frac{\text{sen } \alpha}{u} = \frac{\text{sen } \beta}{v}.$$

9.7. CONDIÇÃO NECESSÁRIA E CONDIÇÕES SUFICIENTES PARA MÁXIMOS E MÍNIMOS LOCAIS

Sejam f uma função e p um *ponto interior* a D_f (p interior a $D_f \Leftrightarrow$ existe um intervalo aberto I, com $I \subset D_f$ e $p \in I$). Suponhamos f derivável em p. O nosso próximo teorema conta-nos que uma *condição necessária*, mas *não suficiente*, para que p seja ponto de máximo ou de mínimo local é que $f'(p) = 0$. A figura abaixo dá-nos uma ideia geométrica do que falamos acima.



p_1 é o ponto de mínimo local: $f'(p_1) = 0$
p_2 é o ponto de máximo local: $f'(p_2) = 0$
$f'(p_3) = 0$, mas p_3 nem é ponto de máximo, nem de mínimo; p_3 é ponto de inflexão horizontal
p_4 é ponto de máximo local, mas $f'(p_4) \neq 0$;
p_4 não é *ponto interior*.

> ***Teorema 1.*** Seja f uma função derivável em p, em que p é um ponto interior a D_f. Uma *condição necessária* para que p seja ponto de máximo ou de mínimo local é que $f'(p) = 0$.

Demonstração

4 Condição necessária e suficientes para máximos e mínimos locais

local de f é que p seja *ponto crítico* de f.

Vamos, agora, estabelecer uma *condição suficiente* para que um ponto p seja ponto de máximo ou de mínimo local.

Teorema 2. Sejam f uma função que admite derivada de 2.ª ordem contínua no intervalo aberto I e $p \in I$.

a) $f'(p) = 0$ e $f''(p) > 0 \Rightarrow p$ é ponto de mínimo local.

b) $f'(p) = 0$ e $f''(p) < 0 \Rightarrow p$ é ponto de máximo local.

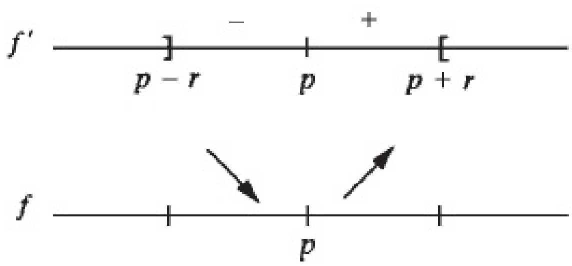
Demonstração

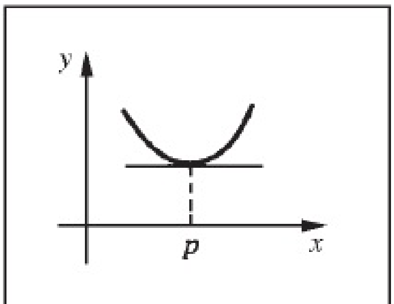
a) Como f'' é contínua em I e $f''(p) > 0$, pelo teorema da conservação do sinal, existe $r > 0$ (tal r pode ser tomado de modo que $]p - r, p + r[$ esteja contido em I, pois estamos supondo I intervalo aberto e $p \in I$) tal que

$$f''(x) > 0 \text{ em }]p - r, p + r[.$$

Segue que f' é estritamente crescente neste intervalo; como $f'(p) = 0$, resulta:

$$\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{em }]p - r, p[\quad \text{e} \\ f'(x) > 0 & \text{em }]p, p + r[. \end{cases}$$





$f'(p) = 0$ e $f''(p) > 0$

Logo, f é estritamente decrescente em $]p - r, p]$ e estritamente crescente em $[p, p + r[$. Portanto, p é ponto de mínimo local.

b) Faça você. ■

Exercícios 9.7

1. Determine os pontos críticos da função dada e classifique-os (a classificação refere-se a ponto de máximo local, ponto de mínimo local ou ponto de inflexão).

   a) $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 3$

   b) $x(t) = \sqrt[3]{t^3 - 2t + 1}$

   c) $h(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

   d) $f(x) = \dfrac{1}{x^4 + 2x^3 + x^2 + 1}$

   e) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$

   f) $g(x) = x^2 e^{-5x}$

2. Suponha que f admite derivada de 3.ª ordem contínua no intervalo aberto I e seja $p \in I$. Prove que se $f'(p) = f''(p) = 0$ e $f'''(p) \neq 0$ então p é ponto de inflexão horizontal.

3. Suponha que f admite derivada até a 4.ª ordem contínua no intervalo aberto I e seja $p \in I$. Prove que se $f'(p) = f''(p) = f'''(p) = 0$ e $f^{(4)}(p) \neq 0$, então p será ponto de máximo local se $f^{(4)}(p) < 0$ e será ponto de mínimo local se $f^{(4)}(p) > 0$.

4. Generalize os resultados obtidos nos Exercícios 2 e 3.

5. Seja f derivável em $\mathbb{R}$ e seja g dada por $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$. Suponha que p é ponto de máximo local de g.

   a) Prove que $p f'(p) - f(p) = 0$.

   b) Prove que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa p passa pela origem.

6. Suponha que f seja derivável até a 2.ª ordem em $\mathbb{R}$ e tal que para todo x

$$f''(x) + x f'(x) = 1.$$

   a) Prove que f não admite ponto de máximo local.

   b) Prove que, se f admitir um ponto crítico x_0, então x_0 será ponto de mínimo local.

c) Prove que f poderá admitir no máximo um ponto crítico.

7. Suponha que f seja derivável até a 2.ª ordem em $\mathbb{R}$ e tal que para todo x

$$x f''(x) + f'(x) = 2.$$

a) Prove que, se x_0 for ponto de máximo local, então $x_0 < 0$.

b) Prove que, se x_0 for ponto de mínimo local, então $x_0 > 0$.

c) Prove que $f'(x) > 0$ para todo x.

(*Sugestão*: Observe que $f'(0) = 2$.)

8. (Teorema de Darboux.) Suponha g derivável em $[a, b]$, com $g'(a) < 0$ e $g'(b) > 0$. Prove que existe c em $]a, b[$ tal que $g'(c) = 0$. Interprete geometricamente.

(*Sugestão*: Verifique que o valor mínimo $g(c)$ de g em $[a, b]$ é tal que $g(c) < g(a)$ e $g(c) < g(b)$.)

9. Suponha g derivável no intervalo I e tal que $g'(x) \neq 0$ em todo x de I. Prove que

$$g'(x) > 0 \text{ em todo } x \in I$$

ou

$$g'(x) < 0 \text{ em todo } x \in I.$$

10. Suponha g derivável em $[a, b]$ e seja m tal que $g'(a) < m < g'(b)$. Prove que existe c em $]a, b[$ tal $g'(c) = m$.

(*Sugestão*: Aplique o Exercício 8 à função $f(x) = g(x) - mx$.)

11. Seja $y = f(x)$ uma função derivável até a 2.ª ordem no intervalo aberto I, tal que para todo $x \in I$.

$$f''(x) + x f'(x) - [f(x)]^2 = 0$$

$$f(x) \neq 0.$$

a) Verifique que f'' é contínua em I.

b) Prove que f não admite ponto de máximo local em I.

12. Seja $y = f(x)$ derivável até a 2.ª ordem em $]-r, r[$, $r > 0$, tal que, para todo $x \in\,]-r, r[$,

$$f''(x) + f'(x) - x\,[f(x)]^2 = 0.$$

Suponha, ainda, que $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$.

a) Prove que f não admite ponto de máximo local em $]0, r]$.

b) Prove que f não admite ponto de mínimo local em $]-r, 0]$.

c) Prove que f é estritamente crescente em $]-r, r]$.

9.8. MÁXIMO E MÍNIMO DE FUNÇÃO CONTÍNUA EM INTERVALO FECHADO

Seja f uma função *contínua* no intervalo fechado $[a, b]$. O teorema de Weierstrass (veja Cap. 5) garante-nos que f assume em $[a, b]$ valor máximo e valor mínimo. Vamos descrever, a seguir, um processo bastante interessante para determinar os valores máximos e mínimos de f em $[a, b]$. Suponhamos f derivável em $]a, b[$. Seja $f(p)$ o valor máximo de f em $[a, b]$; deste modo, p ou é extremidade de $[a, b]$ ou $p \in\,]a, b[$; se $p \in\,]a, b[$, pelo teorema 1 da seção anterior, $f'(p) = 0$. Segue que, *para se obter o valor máximo de f em* $[a, b]$, *é suficiente comparar os valores que f assume nas extremidades de* $[a, b]$ *com os assumidos nos pontos críticos que pertencem a* $]a, b[$. *O valor máximo de f em* $[a, b]$ *será então o maior desses valores*. Evidentemente, *o valor mínimo de f em* $[a, b]$ *será o menor daqueles valores.*

Deixamos a seu cargo descrever um processo para se determinar os valores máximos e mínimos de f em $[a, b]$, no caso em que f é *contínua* no *intervalo fechado* $[a, b]$ e *não* derivável em apenas um número finito de pontos de $[a, b]$.

Exercícios 9.8

Determine os valores máximos e mínimos (caso existam) da função dada, no intervalo dado.

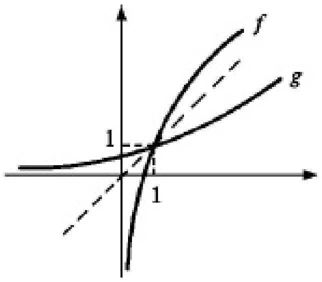
5 Respostas dos exercícios

l) $-3e^{-3x} \dfrac{1}{(1+x^2)\ \text{arc tg}\ x}$

m) $\dfrac{\left[-e^{-x}\ \text{arc tg}\ e^x + \dfrac{1}{1+e^{2x}}\right] \text{tg}\ x - e^{-x}\ \text{arc tg}\ e^x\ \sec^2\ x}{\text{tg}^2\ x}$

3. $g'(1) = \dfrac{1}{2}$ e $g''(1) = -\dfrac{1}{8}$

4. *b*)



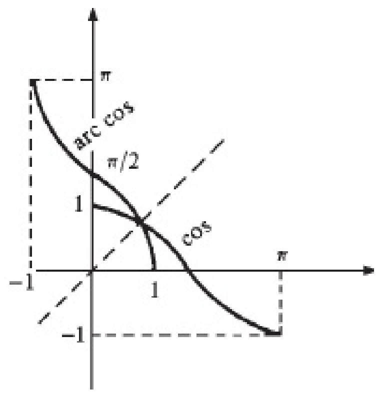
c) $g(1) = 1, g'(1) = \dfrac{1}{2}$ e $g''(1) = \dfrac{1}{8}$.

5. *b*) $g'(x) = \dfrac{1}{1+3\,(g\,(x))^2}$

c) $g'(0) = 1$

6. *a*) $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$

b)



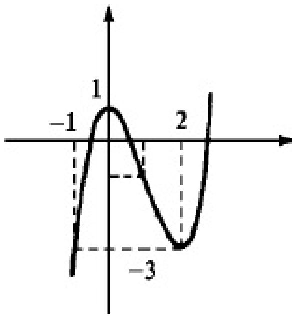
7. $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, $x > 1$.

CAPÍTULO 9

9.2

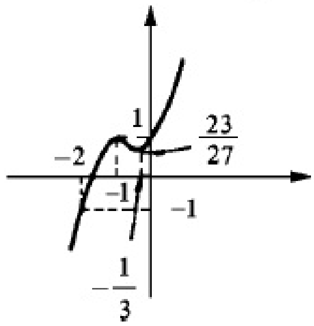
1. ***a*)** Est. cresc. em]−∞, 0] e [2, +∞[

Est. decresc. em [0, 2]



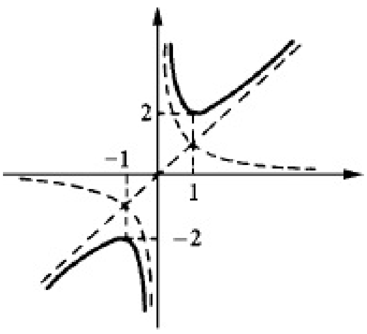
b) Est. cresc. em $]-\infty, -1]$ e $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[$

Est. decresc. em $\left[-1, -\frac{1}{3}\right]$



c) Est. cresc. em $]-\infty, -1]$ e $[1, +\infty[$

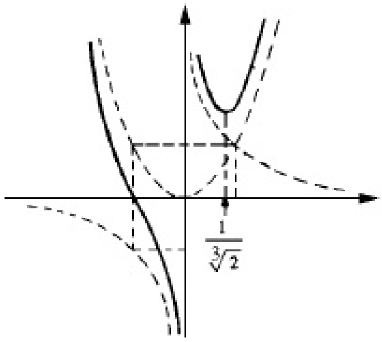
Est. decresc. em $[-1, 0[$ e $]0, 1]$



d) Est. cresc. em $\left[\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty\right[$

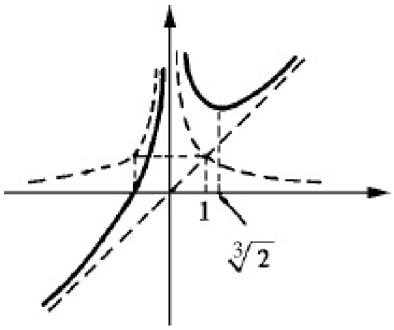
Est. decresc. em

$]-\infty, 0[$ e $\left]0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]$

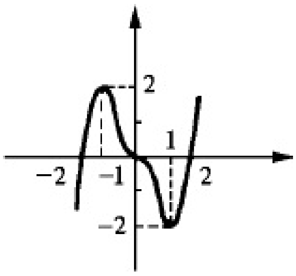


e) Est. cresc. em $]-\infty, 0[$ e $[\sqrt[3]{2}, +\infty[$

Est. decresc. em $]0, \sqrt[3]{2}]$

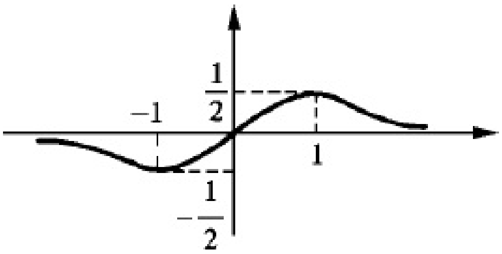


***f*)** Est. cresc. em $]-\infty, -1]$ e $[1, +\infty[$
Est. decresc. em $[-1, 1]$

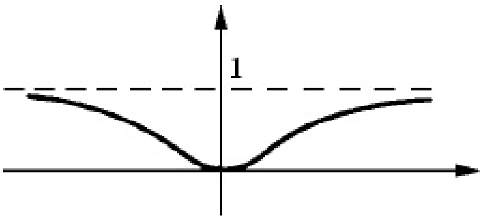


Observe que $f'(0) = 0$.

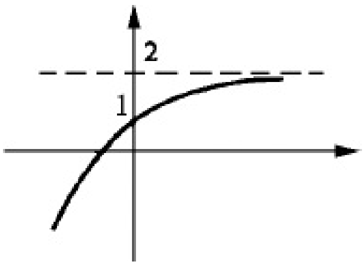
***g*)** Est. decresc. em $]-\infty, -1]$ e $[1, +\infty[$
Est. cresc. em $[-1, 1]$



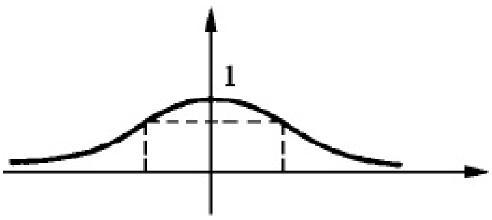
h) Est. decresc. em]−∞, 0]
Est. cresc. em [0, +∞[



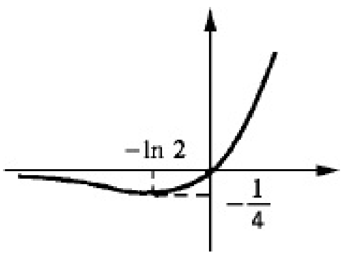
i) Est. cresc. em ℝ



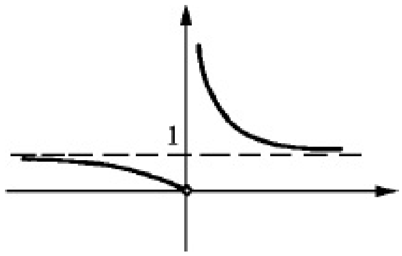
j) Est. cresc. em]−∞, 0]
Est. decresc. em [0, +∞[



l) Est. cresc. em [−ln 2, +∞[
Est. decresc. em]−∞, −ln 2]

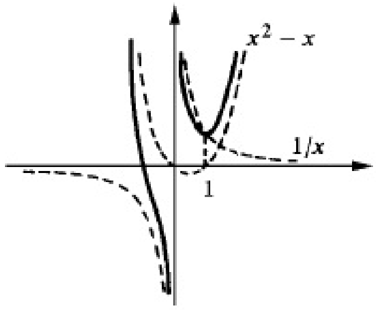


m) Est. decresc. em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$



n) Est. cresc. em $[1, +\infty[$

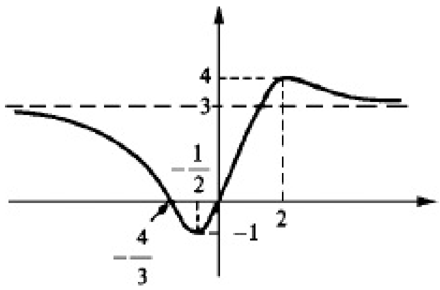
Est. decresc. em $]-\infty, 0[$ e $]0, 1]$



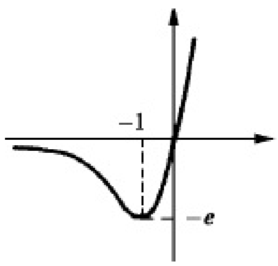
Observe: $\dfrac{x^3 - x^2 + 1}{x} = x^2 - x + \dfrac{1}{x}$

o) Est. cresc. em $\left[-\dfrac{1}{2}, 2\right]$

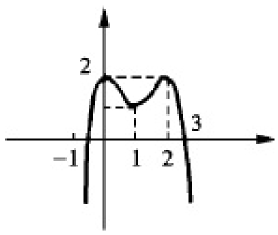
Est. decresc. em $\left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right]$ e $[2, +\infty[$



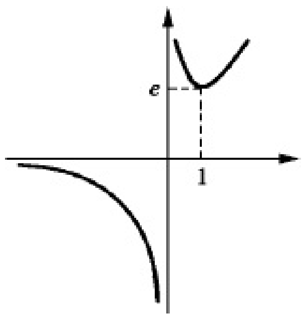
p) Est. cresc. em $[-1, +\infty[$
Est. decresc. em $]-\infty, -1]$



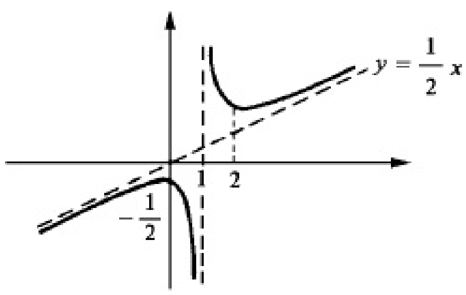
q) Est. cresc. em]−∞, 0] e [1, 2]
Est. decresc. em [0, 1] e [2, +∞[



r) Est. cresc. em [1, +∞[
Est. decresc. em]−∞, 0[e]0, 1]

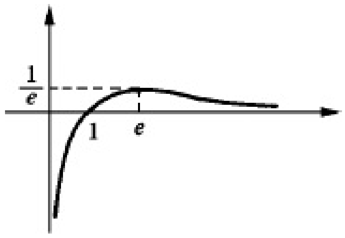


s) Est. cresc. em]−∞, 0] e [2, +∞[
Est. decresc. em [0, 1[e]1, 2]

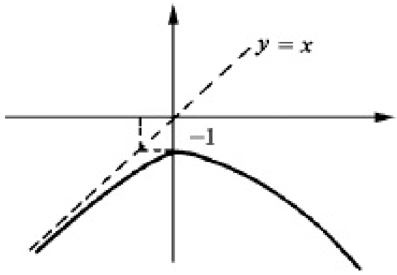


Observe: $g(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2(x-1)}$

t) Est. cresc. em]0, *e*]
Est. decresc. em [*e*, +∞[



u) Est. cresc. em $]-\infty, 0]$
Est. decresc. em $[0, +\infty[$



2. $[-2, -1]$

3. Cada um dos intervalos $[-3, -2]$, $[0, 1]$ e $[1, 2]$ contém uma raiz.

4. $a < -27$ ou $a > 5$

5. ***a***) $+\infty$

b) 0

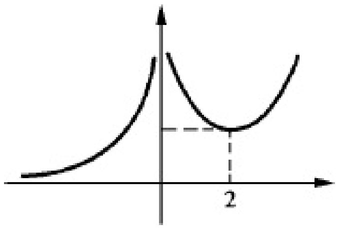
c) $+\infty$

d) 0

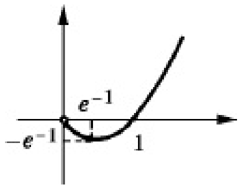
e) 0

f) $+\infty$

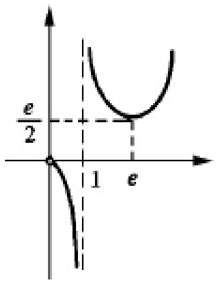
6. ***a***) Est. cresc. em $]-\infty, 0[$ e $[2, +\infty[$
Est. decresc. em $]0, 2]$



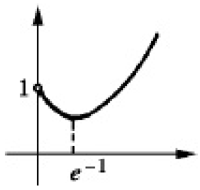
***b*)** Est. cresc. em $[e^{-1}, +\infty[$
Est. decresc. em $]0, e^{-1}]$



***c*)** Est. decresc. em $]0, 1[$ e $]1, e]$
Est. cresc. em $[e, +\infty[$



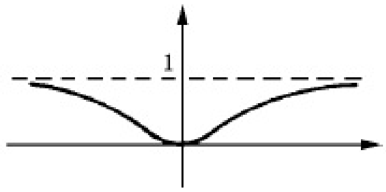
***d*)** Est. cresc. em $[e^{-1}, +\infty[$
Est. decresc. em $]0, e^{-1}]$.



7. *a*) 0

b) $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

c)



9.3

1. ***a*)** Conc. para cima em $]1, +\infty[$

Conc. para baixo em $]-\infty, 1[$

Ponto de inflexão: 1

b) Conc. p/cima em $\left]\frac{1}{6}, +\infty\right[$

Conc. p/baixo em $]-\infty, \frac{1}{6}[$

Ponto de inflexão: $\frac{1}{6}$

c) Conc. p/cima em $]1, +\infty[$
Conc. p/baixo em $]-\infty, 1[$
Ponto de inflexão: 1

d) Conc. p/cima em $]-\infty, -1[$ e $]0, +\infty[$
Conc. p/baixo em $]-1, 0[$
Ponto de inflexão: -1

e) Conc. p/cima em $]\ln 4, +\infty[$
Conc. p/baixo em $]-\infty, \ln 4[$
Ponto de inflexão: $\ln 4$

f) Conc. para cima em $]-\infty, -\sqrt{2}[$ e $]\sqrt{2}, +\infty[$
Conc. p/baixo em $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$
Ponto de inflexão: não há

g) Conc. p/baixo em $]-\infty, -\sqrt{3}[$ e $]0, \sqrt{3}[$
Conc. p/cima em $]-\sqrt{3}, 0[$ e $]\sqrt{3}, +\infty[$
Pontos de inflexão: $\pm\sqrt{3}$ e 0

h) Conc. para baixo em $\mathbb{R}$. Não há ponto de inflexão

i) Conc. p/cima em $]e^2, +\infty[$
Conc. p/baixo em $]0, e^2[$
Ponto de inflexão: e^2

j) Conc. p/cima em $]-\infty, 0[$ e $]1, +\infty[$
Conc. p/baixo em $]0, 1[$
Pontos de inflexão: 0 e 1

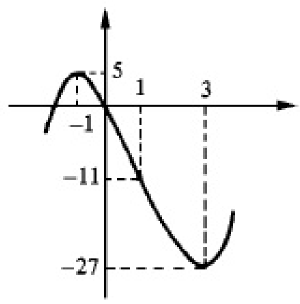
l) Conc. p/baixo em$]-\infty, 0[$ e em $]0, 1[$
Conc. p/cima em $]1, +\infty[$
Ponto de inflexão: 1

***m*)** Conc. p/cima em $]-\infty, -\sqrt{3}\,[$ e em $]0, 3\,[\,\sqrt{3}\,[$
Conc. p/baixo em $]-\sqrt{3}, 0[$ e em $]\,\sqrt{3}, +\infty[$
Pontos de inflexão: $\pm\sqrt{3}$ e 0

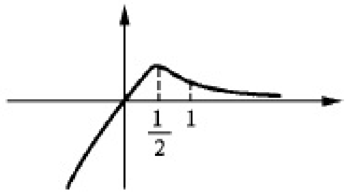
***n*)** Conc. p/baixo em $]-\infty, 0[$
Conc. p/cima em $]0, +\infty[$
Ponto de inflexão: não há

***o*)** Conc. p/cima em $]0, +\infty[$
Ponto de inflexão: não há

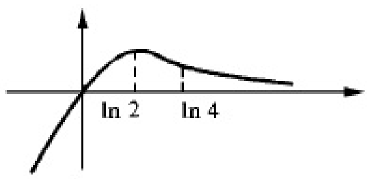
2. *a*)



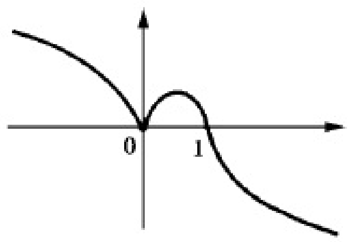
c)



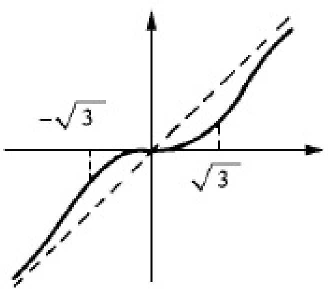
e)



l)



m)



Observe: $\dfrac{x^3}{1+x^2} = x - \dfrac{x}{1+x^2}$

8. ***a*)** $10 + 6b + 3c = 0$ e
$10 + 4b + c \neq 0$

b) $b = -\dfrac{7}{2}$ e $c = \dfrac{11}{3}$

9.4

1. ***a***) 2

b) $\frac{99}{10}$

c) $+\infty$

d) $+\infty$

e) 0

f) 0

g) 0

h) e^2

i) $+\infty$

j) $+\infty$

l) $+\infty$

m) $+\infty$

n) 0

o) 0

p) 0

q) 0

r) 1

s) 1

3. ***a***) 0

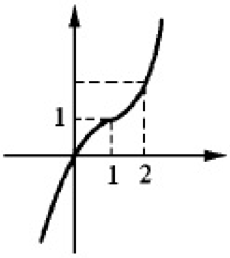
b) $+\infty$

c) $+\infty$

d) $-\frac{1}{3}$

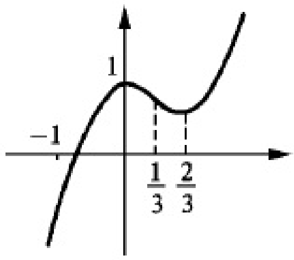
9.5

1.



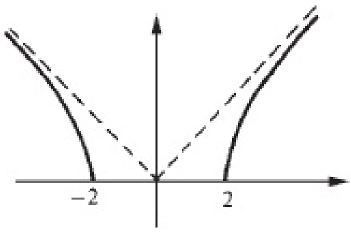
1
1 2

2.



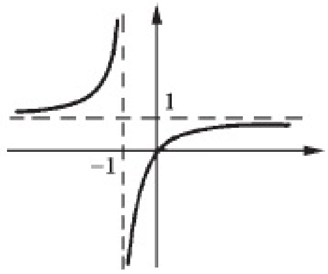
1
−1
$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$

3.



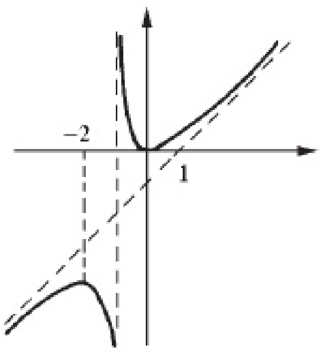
−2
2

4.



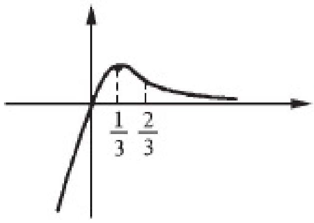
1
−1

5.



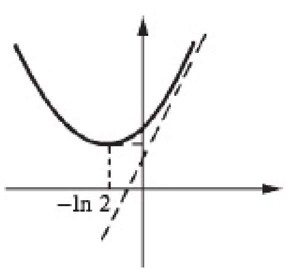
−2
1

6.



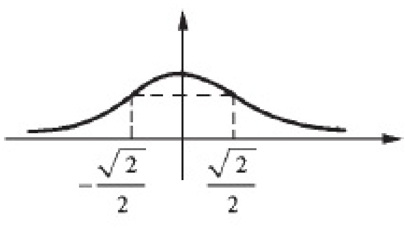
$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$

7.



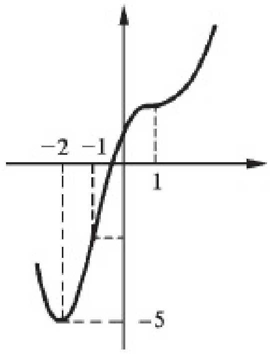
−ln 2

8.

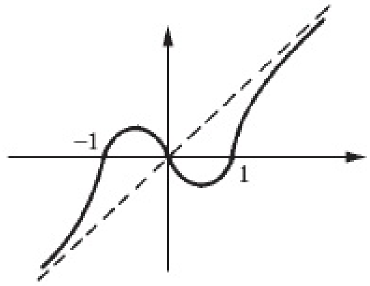


$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$

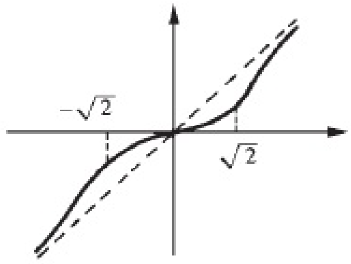
9.



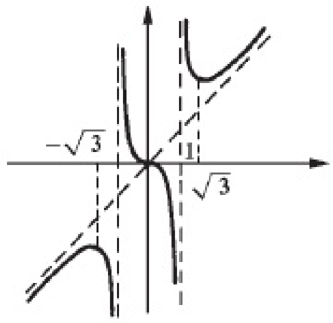
10.



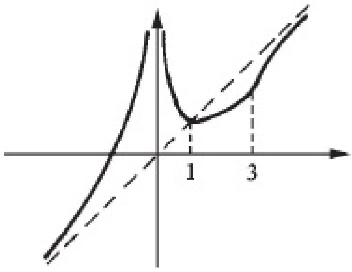
11.



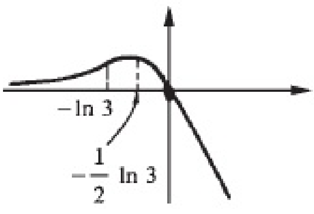
12.



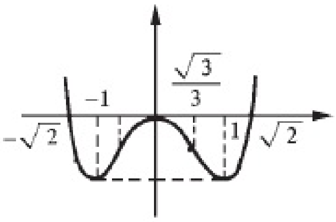
13.



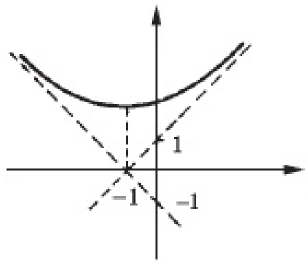
14.



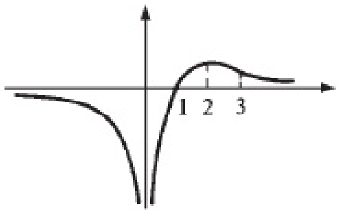
15.



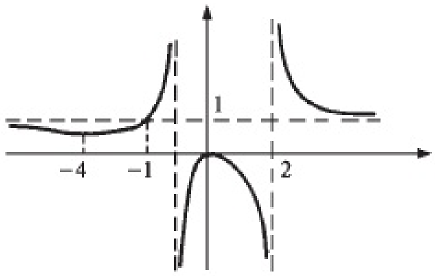
16.



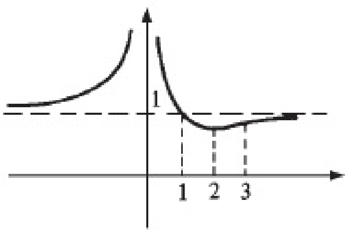
17.



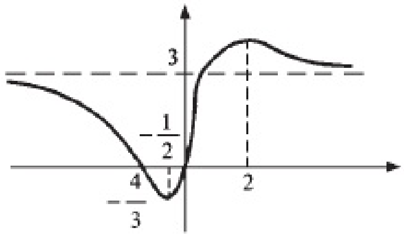
18.



19.



20.



Obs. Os pontos de inflexão estão localizados nos intervalos $\left[-2, -\frac{4}{3}\right]$, $\left[0, \frac{3}{4}\right]$ e $[2, 3]$

9.6

1. ***a*)** 1 é ponto máx. global

-1 é ponto de mín. global

***b*)** $\frac{1}{2}$ é ponto de máx. global

***c*)** Não há ponto de máx. local nem de mín. local

***d*)** 1 é ponto de máx. local
2 é ponto de mín. local

e) $-\frac{3}{2}$ é ponto de mín. global

f) 1 é ponto de máx. global

g) 0 e 2 ponto de mín. globais

1 ponto de máx. local

h) $\frac{\pi}{4}$ ponto de máx. global
π ponto de mín. global

i) −1 e 2 ponto de máx. globais
0 e 3 ponto de mín. globais

j) α é ponto de máx. global onde α é a raiz da equação $1 - x^2 \sec^2 x = 0$.

l) −1 e 1 ponto de máx. locais
0 e 2 ponto de mín. locais

m) 2 é ponto de máx. global

n) 0 é ponto de máx. local

$\frac{2}{3}$ é ponto de mín. local

o) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ é ponto de máx. local

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ é ponto de mín. local

2. Quadrado de lado $\frac{p}{2}$

3. $\frac{1}{2}$

4. $\sqrt[3]{2}$

5. $\frac{2R}{\sqrt{3}}$

6. $\frac{4R}{3}$

7. $\frac{a}{\sqrt{3}}$

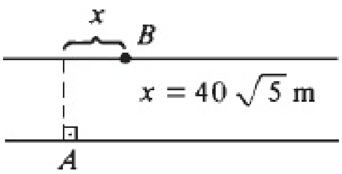
8. Tangente no ponto de abscissa $p = \frac{\sqrt{3}}{3}$

9. Base $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e altura $\sqrt{2}$

10. Raio da base $\sqrt[3]{\frac{1}{3\pi}}$ e altura $\sqrt[3]{\frac{9}{\pi}}$

11. $y - 2 = -\sqrt[3]{2}\ (x - 1)$

12.



13. (1, 1). O coef. angular da reta que passa por (1, 1) e (3, 0) é $-\frac{1}{2}$ e o da reta tangente em (1, 1) é 2.

14. $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

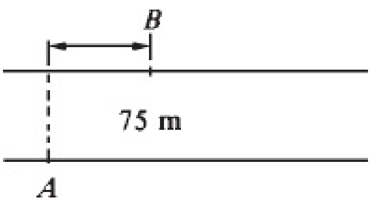
15. $t = 0$

17. $r = 1$ e $h = 1$

18. $q = 3$.

19. $q = 4$

20.



22. $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

23. $q = 10$ e $L_{máx} = L\ (10)$

24. $y = -2px + 1 + p^2$ em que $p = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $p = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

25. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ou $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

26. $b)$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

27. $t = \frac{\sqrt{14}}{8}$

28. É o retângulo em que $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ é um dos vértices.

29. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

30. É o retângulo de vértices $(p, 0)$, $\left(\frac{1}{p}, 0\right)$, $\left(p, \frac{p}{1+p^2}\right)$ e $\left(\frac{1}{p}, \frac{p}{1+p^2}\right)$ onde $p = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$.

9.7

1. ***a*)** −1 e 4 pontos de mín. local

0 ponto de máx. local

***b*)** $-\sqrt{\frac{2}{3}}$ ponto de máx. local

$\sqrt{\frac{2}{3}}$ ponto de mín. local

***c*)** 1 ponto de inflexão horizontal

***d*)** −1 e 0 ponto de máx. local

$-\frac{1}{2}$ ponto de mín. local

***e*)** 1 ponto de mín. local

***f*)** 0 ponto de mín. local

$\frac{2}{5}$ ponto de máx. local

9.8

1. $f(-2) = 7$ valor máx.

$f(3) = -\frac{87}{4}$ valor mín.

2. $f(-2) = -27$ valor mín.

$f(1) = 0$ valor máx.

3. $f(-3)$ valor mín.; $f(-2)$ valor máx

4. $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ valor máx.; $f(0)$ valor mín.

5. $f(-1)$ valor mín.; $f(0) = f(2)$ valor máx.

6. $f\left(\frac{4}{3}\right)$ valor máx.

Não possui valor mínimo.

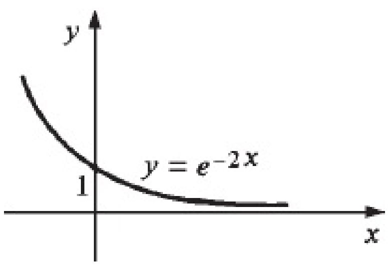
CAPÍTULO 10

10.1

2. $y = e^{2x}$

3. $x(t) = e^{2t}$

4.



9. ***a)*** $y = e^{2x}$

b) $y = -e^{-x}$

c) $y = 2\, e^{\frac{1}{2}x}$

d) $y = -\frac{1}{2}e^{\sqrt{2}x}$