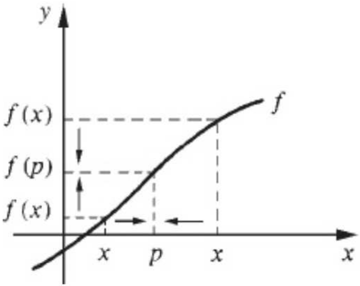
Limite e Continuidade

Irineu Lopes Palhares Junior

FCT/UNESP,
irineu.palhares@unesp.br

Conteúdos

Intuitivamente, uma função contínua em um ponto p de seu domínio é uma função cujo gráfico não apresenta "salto"em p.



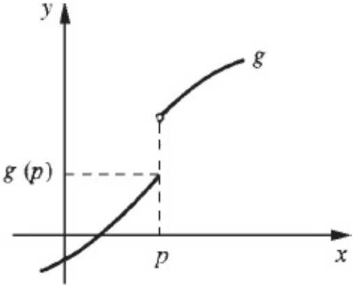


Figura 1: Noção intuitiva de continuidade.

Exemplo

Consdieremos as funções f e g dadas por

$$f(x) = x \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \leq 1, \\ 2 \text{ se } x > 1. \end{cases} \tag{1}$$

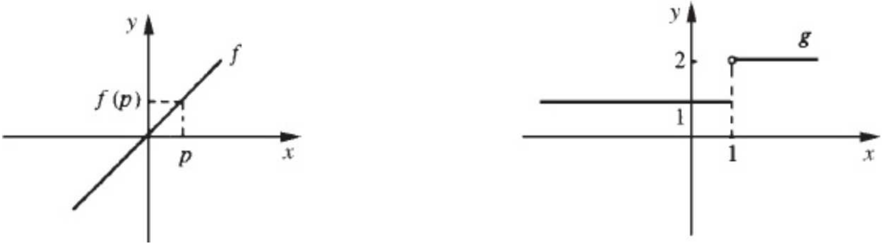


Figura 2: Exemplo 1.

Intuitivamente, dizer que o limite de $f(x)$, quando x tende a p, é igual a L que, simbolicamente, se escreve

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \tag{2}$$

significa que quando x tende a p, $f(x)$ tende a L.

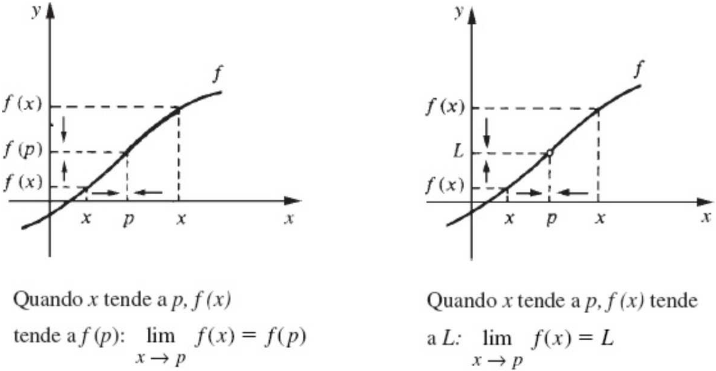


Figura 3: Noção intuitiva de limite.

Exemplos

Example

Utilizando a ideia intuitiva de limite, calcule $\lim_{x\to 1}(x+1)$.

Example

Utilizando a ideia intuitiva de limite, calcule $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$.

Continuidade definida por limite

Intuitivamente, é razoável esperar que se f estiver definida em p e for contínua em p, então $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$, e reciprocamente.

$$f \text{ contínua em } p \Longleftrightarrow \lim_{x \to p} f(x) = f(p). \tag{3}$$

O limite em p pode existir, mas f não ser contínua

Veremos, ainda, que se $\lim_{x\to p} f(x) = L$ e se f não for contínua em p, então L será aquele valor que f deveria ter em p para ser contínua neste ponto.

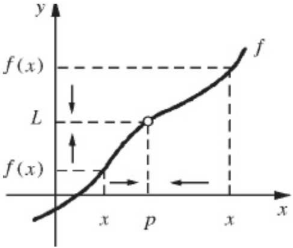


Figura 4: L é o valor que f deveria ter em p para ser contínua em p.

f não está definida em p.

Derivada como um limite

Com toda certeza

$$\lim_{h \to 0} \frac{f\,(p+h) - f(p)}{h} \tag{4}$$

é o limite mais importante que ocorre na matemática, e seu valor, quando existe, é indicado por $f'(p)$ (leia: f linha de p) e é denominado derivada de f em p:

$$f'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f\,(p+h) - f(p)}{h}. \tag{5}$$

Este limite aparece de forma natural quando se procura definir reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$. O quociente $\frac{f(p+h)-f(p)}{h}$, chamado às vezes de razão incremental, nada mais é do que o coeficiente angular da reta s que passa pelos pnotos $M = (p, f(p))$ e $N = (p+h, f(p+h))$ do gráfico de $y = f(x)$

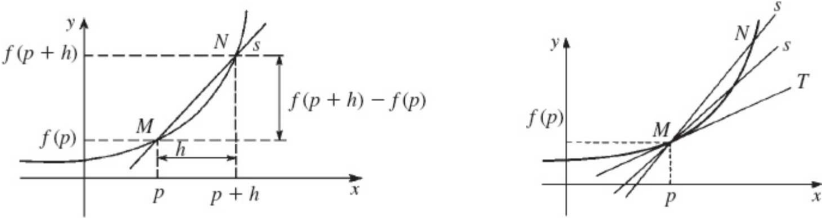


Figura 5: Reta secante e tangente ao gráfico de f.

Exemplos

Example

Seja $f(x) = x^2$. Utilizando a ideia intuitiva de limite, calcule $f'(1)$.

Example

Seja $f(x) = x^2$. Utilizando a ideia intuitiva de limite, calcule $f'(x)$.

Example

Seja $f(x) = x^3$. Utilizando a ideia intuitiva de limite, calcule $f'(2)$.

Sejam f e g funções de gráficos

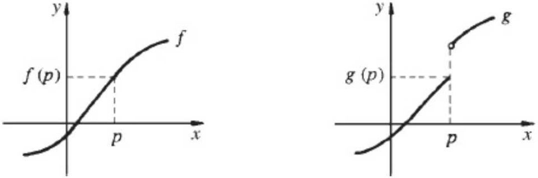


Figura 6: Exemplo de função contínua e descontínua em p.

Observe que f e g se comportam de modo diferente em p; o gráfico de f não apresenta "salto" em p, ao passo que o de g, sim. Queremos destacar uma propriedade que nos permita distringuir tais comportamentos.

Veja as situações apresentadas a seguir.

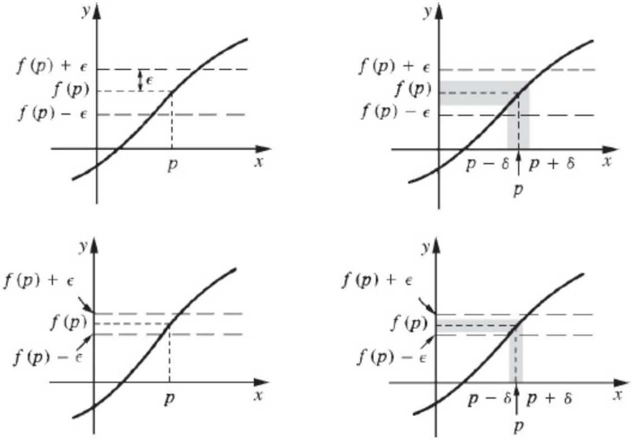


Figura 7: Exemplo de função contínua em p.

Assim, para que a função f seja contínua em p, tem-se:

Definition

para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ (δ dependendo de ϵ), tal que $f(x)$ permanece entre $f(p) - \epsilon$ e $f(p) + \epsilon$ quando x percorre o intervalo $]p - \delta, p + \delta[$, com x no domínio de f.

ou de forma equivalente

Definition

para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ (δ depdendo de ϵ). tal que, para todo $x \in D_f$,

$$p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon. \tag{6}$$

Intervalor por meio de módulo

Remark

Sabemos que

$$|x - p| < \delta \longleftrightarrow p - \delta < x < p + \delta \tag{7}$$

e

$$|f(x) - f(p)| < \epsilon \Longleftrightarrow f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon. \tag{8}$$

Definição de função contínua em um ponto p

Definition

Sejam f uma função e p um ponto de seu domínio. Definimos:

$$f \text{ contínua em } p \iff \begin{cases} \text{Para todo } \epsilon > 0 \text{ dado, existe } \delta > 0, \\ \text{tal que, para todo } x \in D_f, \\ p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow \\ f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon. \end{cases} \tag{9}$$

Dizemos que f é contínua em $A \subset D_f$ se f for contínua em todo $p \in A$. Dizemos simplesmente, que f é uma função contínua se f for contínua em todo p de seu domínio.

Exemplos

Example

Prove que $f(x) = 2x + 1$ é contínua em $p = 1$.

Example

A função constante $f(x) = \kappa$ é contínua em todo p real.

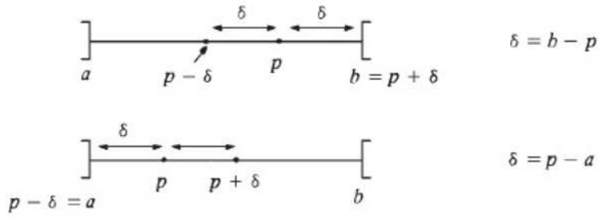
Example

A função afim $f(x) = ax + b$ (a e b constantes) é contínua.

Observação

Os dois próximos exemplos poderão facilitar as coisas em muitas ocasiões. Antes, porém, observamos que se $p \in]a, b[$, a e b reais, então existe $\delta > 0$, tal que $]p - \delta, p + \delta[\in]a, b[$; basta, por exemplo, tomarmos $\delta = min\,\{b - p, p - a\}$.

Veja



Em qualquer caso, $\delta = \text{mín}\,\{b - p, p - a\}$ resolve o problema.

Example

Prove que, se para todo $\epsilon > 0$ dado existir um intervalo aberto $I =]a, b[$ com $p \in I$, tal que para todo $x \in D_f$

$$x \in I \Rightarrow f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon \tag{10}$$

então f será contínua em p.

Example

Seja $r > 0$ um real dado. Suponha que, para todo $\epsilon < r$, $\epsilon > 0$, existe um intervalo aberto I, com $p \in I$, tal que para todo $x \in D_f$

$$x \in I \Rightarrow f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon \tag{11}$$

Prove que f é contínua em p.

Exemplos

Example

Mostre que $f(x) = x^3$ é contínua em 1.

Example

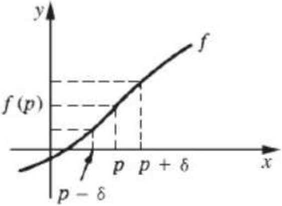
Prove que $f(x) = x^2$ é contínua.

Example

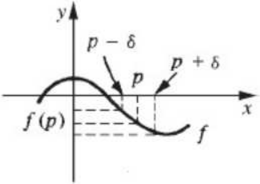
$f(x) = \begin{cases} 2 \text{ se } x \geq 1 \\ 1 \text{ se } x < 1 \end{cases}$ é contínua em $p = 1$? Justifique.

Exemplo - Conservação de sinal

O próximo exemplo destaca uma propriedade importante (*conservação do sinal*) das funções contínuas. Tal propriedade conta-nos que se f for contínua em p e $f(p) \neq 0$, então existirá um $\delta > 0$ tal que $f(x)$ *conservará o sinal* de $f(p)$ para $p - \delta < x < p + \delta$, $x \in D_f$.



f contínua em p e $f(p) > 0$,
existe $\delta > 0$ tal que
$p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow f(x) > 0$



f contínua em p e $f(p) < 0$,
existe $\delta > 0$ tal que
$p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow f(x) < 0$

Exemplo

Example

Seja f contínua em p e $f(p) > 0$. Prove que existe $\delta > 0$ tal que, $\forall x \in D_f$,

$$p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow f(x) > 0. \tag{12}$$

Definição de limite

Sejam f uma função e p um ponto do domínio de f ou extremidade de um dos intervalos que compõe o domínio de f. Consideremos as situações a seguir:

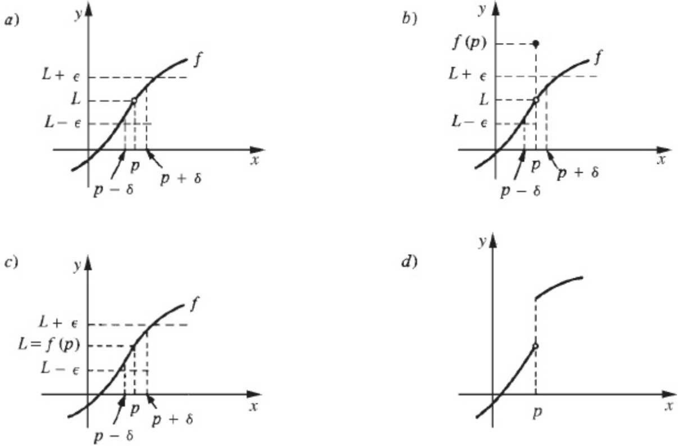


Figura 8: Diferentes situações para o cálculo do limite.

Definição de limite

Definition

Sejam f uma função e p um ponto do domínio de f ou extremidade de um dos intervalores que compõe o domínio de f. Dizemos que f tem limite L, em p, se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ tal que , para todo $x \in D_f$,

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon \tag{13}$$

Tal número L, que quando existe é único, será indicado por $\lim_{x \to p} f(x)$. Assim

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \iff \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que, para todo } x \in D_f \\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon. \end{cases} \tag{14}$$

Observações importantes

- Suponhamos f definida em p. Comparando as definições de limite e continuidade, resulta

$$f \text{ contínua em } p \Longleftrightarrow \lim_{x \to p} f(x) = f(p). \tag{15}$$

- O limite de f em p não depende do valor (caso f esteja definida em p) que f assume em p, mas sim dos valores que f assume nos pontos próximos de p. Quando estivermos interessados no limite de f em p, basta olharmos para os valores que f assume num "pequeno" intervalor aberto contendo p; o conceito de limite é um conceito local.
- Sejam f e g duas funções. Se existir $r > 0$ tal que $f(x) = g(x)$ para $p - r < x < p + r$, $x \neq p$, e se $\lim_{x \to p} g(x)$ existir, então $\lim_{x \to p} f(x)$ também existirá e

$$\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} g(x). \tag{16}$$

Exemplos

Example

Calcule $\lim_{x \to p} k$ (k constante).

Example

Calcule $\lim_{x \to 2} (3x - 2)$.

Example

Calcule $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Example

Calcule $\lim_{x \to 1} f(x)$ em que $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{se } x \neq 1, \\ 3 & \text{se } x = 1. \end{cases}$

Example

As funções dadas por $f(x) = x^n$ e $g(x) = \sqrt[n]{x}$ ($n \geq 1$ natural) são contínuas (verifique). Assim

$$\lim_{x \to p} x^n = p^n, \tag{17}$$

para todo p real, e

$$\lim_{x \to p} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{p}, \tag{18}$$

para todo p no domínio de $g(x) = \sqrt[n]{x}$.

Propriedades dos limites

Sejam $\lim_{x\to p} f(x) = L_1$ e $\lim_{x\to p} g(x) = L_2$, então

- $\lim_{x\to p} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$.
  (O limite de uma soma é igual à soma dos limites das parcelas.)
- $\lim_{x\to p} kf(x) = kL_1$ (k constante).
- $\lim_{x\to p} f(x)g(x) = L_1.L_2$.
  (O limite de um produto é igual ao produto dos limites dos fatores.)
- $\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$, desde que $L_2 \neq 0$.

Exemplos

Example

Calcule $\lim_{x\to 2} \left(5x^3 - 8\right)$.

Example

Calcule $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$.

Example

Calcule $\lim_{x\to 1} \frac{x^4-2x+1}{x^3+3x^2+1}$.

Example

Calcule $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2+4x+3}$

Exemplos

Example

Calcule $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x - 2}$.

Example

Sejam f, g contínuas em p e k uma constante. Então $f + g$, $k.f$ e $f.g$ são contínuas em p; $\frac{f}{g}$ também será contínua em p, desde que $g(p) \neq 0$.

Example

Toda função polinomial é contínua.

Example

Toda função racional é contínua.

Exemplos

Example

$f(x) = \frac{3x^5+6x+1}{x^2-3}$ é contínua em todo $p \neq \pm\sqrt{3}$.

Example

Prove que

$$\lim_{x \to p} f(x) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{x \to p} |f(x)| = 0. \tag{19}$$

Example

Prove que

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{h \to 0} f(p+h) = L. \tag{20}$$

Conservação do sinal

Suponha que $\lim_{x \to p} f(x) = L$. Prove que existe $\delta > 0$ tal que, $\forall x \in D_f$

$$p - \delta < x < p + \delta, \; x \neq p \Rightarrow f(x) > 0. \tag{21}$$

Sejam f uma função, p um número real e suponhamos que existe b tal que $]p, b[\subset D_f$. Definimos:

$$\lim_{x \to p^+} = L \iff \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que} \\ p < x < p + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon. \end{cases} \tag{22}$$

O número L, quando existe, denomina-se limite lateral à direita de f, em p.

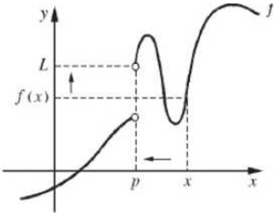


Figura 9: Limite lateral à direita.

Limites laterais à esquerda

Suponhamos, agora, que exista um real a tal que $]a, p[\subset D_f$. Definimos:

$$\lim_{x \to p^-} = L \iff \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que} \\ p - \delta < x < p \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon. \end{cases} \tag{23}$$

O número L, quando existe, denomina-se limite lateral à esquerda de f, em p.

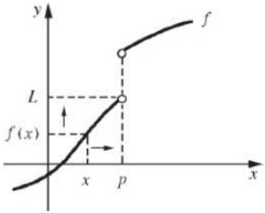


Figura 10: Limite lateral à esquerda.

Limites laterais - consequência imdediata

É uma consequência imediata das definições de limite e de limites laterais que se $\lim_{x\to p} g(x) = L$ e se, para algum $r > 0$, $f(x) = g(x)$ em $]p, p+r[$, então $\lim_{x\to p^-} = \lim_{x\to p} g(x) = L$.

Exemplos

Example

Calcule $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 1^{-1}} f(x)$, sendo $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ se } x < 1, \\ 2x \text{ se } x > 1. \end{cases}$

Example

Calcule $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$ e $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$.

Teorema dos limites laterais

Theorem

Sejam f uma função, p um número real e suponhamos que existam a e b tais que $]a, p[$ e $]p, b[$ estejam contidos em D_f. Então,

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \iff \begin{cases} f \text{ admite limites laterais à direita e à esquerda em } p \\ e \ \lim_{x \to p^+} f(x) = \lim_{x \to p^-} f(x) = L. \end{cases} \tag{24}$$

Limites laterais - Observações

1. Se $\lim_{x\to p^+} f(x)$ e $\lim_{x\to p^-} f(x)$ existirem e forem diferentes, então $\lim_{x\to p} f(x)$ não existirá.

2. Se existirem a e b tais que $]a, p[$ e $]p, b[$ estejam contidos em D_f e se, em p, um dos limites laterais não existir, então $\lim_{x\to p} f(x)$ não existirá.

3. Se existirem reais $r > 0$ e b tais que $]p, b[\subset D_f$ e $]p - r, p[\cap D_f = \phi$, então $\lim_{x\to p} f(x) = \lim_{x\to p^+} f(x)$ desde que o limite lateral à direita exista. Se ocorrer $]b, p[\subset D_f$ e $]p, p + r[\cap D_f = \phi$, então $\lim_{x\to p} f(x) = \lim_{x\to p^-} f(x)$, desde que o limite lateral à esquerda exista.

Exemplo

Example

$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ existe? Por quê?

Limite de função composta

Sejam f e g duas funções tais que $Im_f \subset D_g$, em que Im_f é a imagem de f, ou seja, $Im_f = \{f(x) | x \in D_f\}$. Nosso objetivo é estudar o limite

$$\lim_{x \to p} g(f(x)). \tag{25}$$

Supondo que $\lim_{x \to p} f(x) = a$ é razoável esperar que

$$\lim_{x \to p} g\left(f(x)\right) = \lim_{u \to a} g(u), \tag{26}$$

desde que $\lim_{u \to a} g(u)$ exista. Veremos que (26) se verifica se g for contínua em a ou se g não estiver definida em a.

Exemplos

Example

Calcule $\lim_{x\to 1} \sqrt{\frac{x^2-1}{x-1}}$.

Example

Calcule $\lim_{x\to 1} \frac{\left(3-x^3\right)^4-16}{x^3-1}$.

Example

Calcule $\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x+2}-1}{x+1}$.

Example

Se $\lim_{x\to p} f(x) = L$, então $\lim_{x\to p} [f(x)]^2 = L^2$.

Exemplo

Example

Suponha $g(x) \neq 0$, para todo $x \in D_g$, $L \neq 0$ e $\lim_{x\to p} g(x) = L$. Prove que

$$\lim_{x\to p} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L}. \tag{27}$$

Observação

Se $\lim_{x \to p} g(x) = L$, $L \neq 0$, pela conservação de sinal, existe $r > 0$ tal que

$$g(x) \neq 0 \text{ para } 0 < |x - p| < r, x \in D_g. \tag{28}$$

Como o conceito de limite é um conceito local, segue-se que a hipótese $g(x) \neq 0$ que aparece no exemplo anterior é dispensável. Assim,

$$\lim_{x \to p} g(x) = L, L \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \to p} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L}. \tag{29}$$

Teorema

Theorem

Sejam f e g duas funções tais que $Im_f \in D_g$. *Se* $\lim_{x\to p} f(x) = a$ *e g contínua em a, então,*

$$\lim_{x\to p} g\left(f(x)\right) = \lim_{u\to a} g(u). \tag{30}$$

Observação

O teorema anterior conta-nos que, se g for contínua em a e $\lim_{x \to p} f(x) = a$, então $\lim_{x \to p} g(f(x)) = g(a) = g(\lim_{x \to p} f(x))$, o que nos mostra que os símbolos $\lim_{x \to p}$ e g podem ser permutados em $\lim_{x \to p} g(f(x))$:

$$\lim_{x \to p} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to p} f(x)\right). \tag{31}$$

O próximo exemplo nos diz que composta de funções contínuas é contínua.

Exemplo

Example

Sejam f e g tais que $Im_f \in D_g$. Se f for contínua em p e g contínua em $f(p)$, então a composta $h(x) = g(f(x))$ será contínua em p.

Teorema

Theorem

Sejam f e g duas funções tais que $Im_f \in D_g$, $\lim_{x\to p} f(x) = a$ e $\lim_{u\to a} g(u) = L$. Nestas condições, se existir um $r > 0$ tal que $f(x) \neq a$ para $0 < |x-p| < r$, então $\lim_{x\to p} g\left(f(x)\right)$ existirá e

$$\lim_{x\to p} g\left(f(x)\right) = \lim_{u\to a} g(u). \tag{32}$$

Observação

Se g não estiver definida em a, segue-se da hipótese $Im_f \in D_g$, que $f(x) \neq a$ para todo $x \in D_f$. Assim, neste caso, a condição "existe $r > 0$ tal que $f(x) \neq a$ para $0 < |x - p| < r$" é dispensável. Entretanto, se g estiver definida em a, mas não for contínua em a, tal condição é indispensável como mostra o próximo exemplo.

Exemplo

Sejam f e g definidas em $\mathbb{R}$ e dadas por $f(x) = 1$ e
$g(u) = \begin{cases} u+1 \text{ se } u \neq 1 \\ 3 \text{ se } u = 1 \end{cases}$ Temos

$$\lim_{x \to p} f(x) = 1 \text{ e } \lim_{u \to 1} g(u) = 2. \tag{33}$$

Como $g(f(x)) = 3$ para todo x, segue que

$$\lim_{x \to p} g(f(x)) \neq \lim_{u \to 1} g(u). \tag{34}$$

Este fato ocorre em virtude de não estar satisfeita a condição "existe $r > 0$ tal que $f(x) \neq 1$ para $0 < |x - p| < r$".

Theorem (do confronto)

Sejam f, g e h três funções e suponhamos que exista $r > 0$ tal que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \tag{35}$$

para $0 < |x - p| < r$. Nestas condições, se

$$\lim_{x \to p} f(x) = L = \lim_{x \to p} h(x) \tag{36}$$

então

$$\lim_{x \to p} g(x) = L. \tag{37}$$

Exemplos

Example

Seja f uma função e suponhamos que para todo x

$$|f(x)| \leq x^2. \tag{38}$$

(a) Calcule, caso exista, $\lim_{x \to 0} f(x)$.

(b) f é contínua em 0? Por quê?

Example

Sejam f e g duas funções com mesmo domínio A tais que $\lim_{x \to p} \mathrm{f}(\mathrm{x}) = 0$ e $|g(x)| \leq M$ para todo x em A, em que $M > 0$ é um número real fixo. Prove que

$$\lim_{x \to p} f(x)g(x) = 0. \tag{39}$$

Exemplo

Example

Calcule $\lim_{x\to 0} x^2.g(x)$ em que $g(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in \mathbb{Q}, \\ -1 \text{ se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

Lembrando que $\sin(-x) = -\sin x$, segue que existe $r > 0$, tal que, para todo x, com $|x| < r$,

$$|\sin x| \leq |x|. \tag{40}$$

(Interprete geometricamente esta desigualdade.)
Vamos, agora, utilizar (40) para mostrar que

$$|\sin x - \sin p| \leq |x - p| \tag{41}$$

para $|x - p| < 2r$. Temos

$$|\sin x - \sin p| = |2\sin\frac{x-p}{2}\cos\frac{x+p}{2}| = 2|\sin\frac{x-p}{2}||\cos\frac{x+p}{2}|. \tag{42}$$

De $|\cos \frac{x+p}{2}| \leq 1$, segue

$$|\sin x - \sin p| \leq 2|\sin \frac{x-p}{2}|. \tag{43}$$

De (40) segue que, para $|x-p| < 2r$.

$$|\sin \frac{x-p}{2}| \leq |\frac{x-p}{2}|. \tag{44}$$

De (43) e (44) resulta

$$|\sin x - \sin p| \leq |x-p| \tag{45}$$

para $|x-p| < 2r$. Fica a seu cargo mostrar que

$$|\cos x - \cos p| \leq |x-p| \tag{46}$$

para $|x-p| < 2r$.

Teorema

Theorem

As funções $\sin$ *e* $\cos$ *são contínuas.*

Theorem

A partir da propriedade

$$0 < \sin x < x < \tan x \tag{47}$$

temos o seguinte limite especial:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1. \tag{48}$$

Exemplos

Example

Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x}$.

Example

Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$.

Nosso objetivo é dar um significado para os símbolos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \tag{49}$$

(leia: limite de $f(x)$, para x tendendo a mais infinito, é igual a L) e

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \tag{50}$$

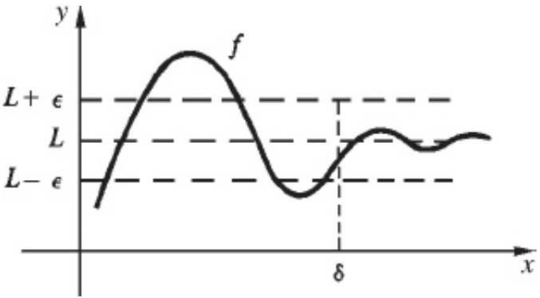


Figura 11: Limite de $f(x)$ para $x \to +\infty$.

Definição de limites no infinito

Definition (Limite para quando $x \to +\infty$)

Seja f uma função e suponhamos que exista a tal que $]a, +\infty[\subset D_f$. Definimos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \iff \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ com } \delta > a, \text{ tal que} \\ x > \delta \Rightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon. \end{cases} \tag{51}$$

Definition (Limite para quando $x \to -\infty$)

Seja f uma função e suponhamos que exista a tal que $] - \infty, a[\subset D_f$. Definimos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \iff \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ com } -\delta < a, \text{ tal que} \\ x < -\delta \Rightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon. \end{cases} \tag{52}$$

Exemplo

Example

Calcule $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}$ e justifique.

Teorema - Mudança de variável na função composta

Theorem

Sejam f e g duas funções tais que $Im_f \subset D_g$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$

- *Se g for contínua em a, então*

$$\lim_{x\to+\infty} g(f(x)) = \lim_{u\to a} g(u). \tag{53}$$

- *Se g não estiver definida em a e se $\lim_{u\to a} g(u)$ existir, então*

$$\lim_{x\to+\infty} g(f(x)) = \lim_{u\to a} g(u). \tag{54}$$

Teorema - Propriedades

Theorem

Seja k uma constante e suponhamos que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to+\infty} g(x) = L_1$. *Então*

- $\lim_{x\to+\infty} (f(x) + g(x)) = L + L_1$.
- $\lim_{x\to+\infty} kf(x) = k \lim_{x\to+\infty} f(x) = kL$.
- $\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) = LL_1$.
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{L_1}$, *desde que* $L_1 \neq 0$.

Observamos que os teoremas acima continuam válidos se substituirmos $x \to +\infty$ por $x \to -\infty$.

Exemplos

Example

Calcule $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n}$, no qual $n > 0$ é um número natural dado.

Example

Calcule $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^5+x^4+1}{2x^5+x+1}$.

Definition

Suponhamos que exista a tal que $]a, +\infty[\subset D_f$. Definimos

(a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \iff \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ com } \delta > a, \text{ tal que} \\ x > \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon. \end{cases}$

(b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \iff \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ com } \delta > a, \text{ tal que} \\ x > \delta \Rightarrow f(x) < -\epsilon. \end{cases}$

Limites laterais infinitos

Definition

Sejam f uma função, p um número real e suponhamos que exista b tal que $]p, b[\subset D_f$. Definimos

$$\lim_{x\to p^+} f(x) = +\infty \iff \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ com } p+\delta < b, \text{ tal que} \\ p < x < p+\delta \Rightarrow f(x) > \epsilon. \end{cases} \tag{55}$$

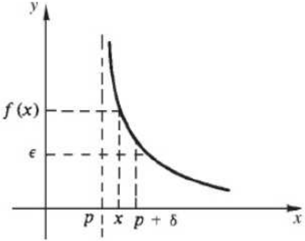


Figura 12: Limite lateral com resultado no infinito.

Exemplos

Example

Calcule $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$ e justifique.

Example

Calcule $\lim_{x\to +\infty} x$ e justifique.

Teorema - operações com o infinito

Theorem

(a)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)+g(x)] = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) = +\infty \end{cases} \tag{56}$$

(b)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L, \;\; L \; real, \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) = +\infty \; se \; L > 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) = -\infty \; se \; L < 0 \end{cases} \tag{57}$$

Para mais detalhes sobre as operações com o símbolo do infinito, veja o livro de Hamilton Luiz Guidorizzi - Um curso de Cálculo Vol. 1.

Operações com o infinito e indeterminações

Os teoremas estudados nos sugere como operar com os símbolos $+\infty$ e $-\infty$: $+\infty + (+\infty) = +\infty$, $-\infty + (-\infty) = -\infty$, $L.(+\infty) = +\infty$ se $L > 0$, $L.(+\infty) = -\infty$ se $L < 0$, $L.(-\infty) = -\infty$ se $L > 0$, $L.(-\infty) = +\infty$ se $L < 0$, $L + (+\infty) = +\infty$ se $L \in \mathbb{R}$, $L + (-\infty) = -\infty$ se $L \in \mathbb{R}$, $+\infty.(+\infty) = +\infty$, $(-\infty).(-\infty) = +\infty$ e $+\infty.(-\infty) = -\infty$.
Indeterminações: $+\infty - (+\infty)$, $-\infty - (-\infty)$, $0.\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0}.

Exemplos

Example

Calcule $\lim_{x \to +\infty} x^2$.

Example

Calcule $\lim_{x \to +\infty} \left(3x^2 - 5x + 2\right)$.

Example

Calcule $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3+3x-1}{2x^2+x+1}$.

Example

Suponha que $\lim_{x \to p^+} f(x) = 0$ e que existe $r > 0$ tal que $f(x) > 0$ para $p < x < p + r$. Prove que

$$\lim_{x \to p^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty. \tag{58}$$

Example

Calcule $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1}$.

Example

Calcule $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1}$.

Example

Sejam f e g duas funções tais que $\lim_{x\to p^+} f(x) = L, L \neq 0$, $\lim_{x\to g(x)} = 0$ e que existe $r > 0$ tal que $g(x) \neq 0$ para $p < x < p + r$. Prove que, nestas condições, ou $\lim_{x\to p^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ ou $\lim_{x\to p^+} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ ou $\lim_{x\to p^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ não existe.

Exemplos

Example

Calcule $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+3x}{x^2-4}$.

Example

Calcule $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3-1}{x^2-2x+1}$.

Example

Calcule $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3-3x^2+1}{2x^2+1}$.

Example

Suponhamos que $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$. Prove

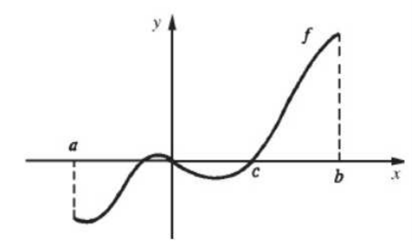
a) $\lim_{x\to +\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$.

b) $\lim_{x\to +\infty} f(x).g(x) = +\infty$.

Teorema do anulamento, do valor intermediário e de Weierstrass

Theorem (do anulamento ou de Bolzano)

Se f for contínua no intervalor fechado $[a, b]$ e se $f(a)$ e $f(b)$ tiverem sinais contrários, então existirá pelo menos um c em $[a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

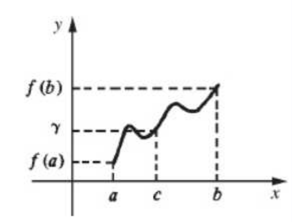


Exemplo

Mostre que a equação $x^3 - 4x + 8 = 0$ admite pelo menos uma razi real.

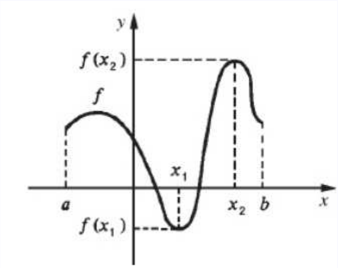
Theorem (do valor intermediário)

Se f for contínua em $[a, b]$ e se γ for um real compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, então existirá pelo menos um c em $[a, b]$ tal que $f(c) = \gamma$.



Theorem

Se f for contínua em $[a, b]$, então existirão x_1 e x_2 em $[a, b]$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo x em $[a, b]$.



Exemplo

Example

Prove que o conjunto $A = \left\{x^2 + \frac{1}{x}; \frac{1}{2} \leq x \leq 2\right\}$ admite máximo e mínimo.

Um limite muito importante no cálculo é o limite que resulta no número de Neper $(2,7182818285...)$, isto é,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x. \tag{59}$$

Exemplos

Example

Verifique que

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e. \tag{60}$$

Example

Verifique que

a)

$$\lim_{h\to0^{+}}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e \tag{61}$$

b)

$$\lim_{h\to0^{-}}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e \tag{62}$$

Exemplo

Example

Mostre que $\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.