

# Plano de Trabalho: Análise numérica de escoamentos em uma contração 4:1 por meio da formulação corrente-vorticidade

## 1 Introdução

A simulação computacional de escoamentos com singularidades é um desafio na área de dinâmica de fluidos computacional, uma vez que os esquemas numéricos apresentam dificuldades em aproximar as altas tensões de maneira estável e acurada. As singularidades podem surgir de duas formas: por meio de uma mudança abrupta nas condições de contorno ou em geometrias não suaves. Exemplos do primeiro caso são os escoamentos do tipo extrusão e o escoamento *stick-slip* [1]. Exemplos de escoamentos em geometrias não suaves são os escoamentos em contrações e expansões. Devido às dificuldades associadas à escoamentos com singularidades, muitos estudos assintóticos foram empregues na tentativa de determinar o comportamento de diversos fluidos ao redor do canto reentrante [2, 3, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20]. Em particular, destacamos os trabalhos de Dean e Montagnon [2] que determinaram a solução da equação de Stokes (que modela um escoamento Newtoniano a baixos Reynolds) ao redor de cantos reentrantes e Moffat [3] que identificou a dominância do comportamento antisimétrico na região da singularidade. Desta forma, neste trabalho será verificado o comportamento singular de  $r^{0.5445}$  para o campo de velocidade e  $r^{-0.4555}$  para as tensões em um escoamento Newtoniano em uma contração 4:1. Além disso, será ilustrado a dominância do comportamento antisimétrico ao redor da singularidade, por meio do gráfico de linhas de corrente, confirmando os resultados apresentados em [3]. Portanto, a aluna irá resolver o escoamento mediante a formulação corrente-vorticidade e, por fim, irá comparar as aproximações numéricas com o esperado assintoticamente.

## 2 Objetivos

Os objetivos deste plano podem ser divididos em gerais e específicos.

- objetivos gerais
  - Resolver numericamente um escoamento confinado por meio da formulação corrente-vorticidade;
  - Comparar os resultados numéricos com o esperado assintoticamente;
- Objetivos específicos:
  - Estudar e resolver alguns exemplos clássicos de equações diferenciais parciais, tais como a equação do calor, Poisson e advecção;
  - Estudar e resolver alguns sistemas lineares por meio de métodos iterativos, tais como Jacobi-Richardson, Gauss-Seidel, entre outros;
  - Construir e resolver o sistema linear resultante da discretização das equações de Navier-Stokes a partir da formulação corrente-vorticidade.

### 3 Metodologia

Para o desenvolvimento deste plano e o cumprimento dos objetivos elencados na seção anterior, serão realizados seminários quinzenais com a aluna, que apresentará os avanços obtidos, bem como discutir o andamento da pesquisa. Além disso, a aluna terá acesso a um laboratório com computadores, onde poderá desenvolver a pesquisa, e acesso ao software Matlab, que será a principal ferramenta para a implementação dos códigos numéricos. Entretanto, vale destacar que as implementações poderão ser feitas em outras linguagens, a depender de eventuais necessidades computacionais. As principais referências a serem seguidas para o desenvolvimento deste plano são: Franco [21], Cuminato et al. [22], LeVeque [23] e de Oliveira Fortuna [24]. Mais especificamente, a aluna seguirá o livro de Franco [21] para o estudo e implementação de métodos para sistemas lineares, Cuminato et al. [22] e LeVeque [23] para a resolução de algumas equações diferenciais parciais clássicas e, por fim, de Oliveira Fortuna [24] para a discretização das equações de Navier-Stokes por meio do método corrente-vorticidade.

### 4 Cronograma de execução

O cronograma proposto para o trabalho está apresentado na Tabela 1.

Tabela 1: Cronograma das atividades a serem desenvolvidas por bimestre.

| Atividades   | Bimestre       |                |                |                |                |                |
|--|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
|  | 1 <sup>o</sup> | 2 <sup>o</sup> | 3 <sup>o</sup> | 4 <sup>o</sup> | 5 <sup>o</sup> | 6 <sup>o</sup> |
| Estudo e implementação de métodos para sistemas lineares         | ✓              |                |                |                |                |                |
| Solução numérica da equação do calor                             |                | ✓              |                |                |                |                |
| Solução numérica da equação de Poisson                           |                |                | ✓              |                |                |                |
| Solução numérica da equação de advecção                          |                |                |                | ✓              |                |                |
| Discretização e implementação da formulação corrente-vorticidade |                |                |                |                | ✓              | ✓              |
| Solução da equação de Navier-Stokes em uma contração 4:1         |                |                |                |                | ✓              | ✓              |

### Referências

- [1] Richardson, S. "A 'stick-slip' problem related to the motion of a free jet at low Reynolds numbers." *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. Vol. 67. No. 2. Cambridge University Press, 1970.
- [2] Dean, W. R., and P. E. Montagnon. "On the steady motion of viscous liquid in a corner." *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. Vol. 45. No. 3. Cambridge University Press, 1949.
- [3] Moffatt, H. Keith. "Viscous and resistive eddies near a sharp corner." *Journal of Fluid Mechanics* 18.1 (1964): 1-18.
- [4] Renardy, Michael. "The stresses of an upper convected Maxwell fluid in a Newtonian velocity field near a re-entrant corner." *Journal of non-newtonian fluid mechanics* 50.2-3 (1993): 127-134.
- [5] Renardy, Michael. "How to integrate the upper convected Maxwell (UCM) stresses near a singularity (and maybe elsewhere, too)." *Journal of non-newtonian fluid mechanics* 52.1 (1994): 91-95.
- [6] Renardy, Michael. "A matched solution for corner flow of the upper convected Maxwell fluid." *Journal of non-newtonian fluid mechanics* 58.1 (1995): 83-89.
- [7] Renardy, Michael. "Re-entrant corner behavior of the PTT fluid." *Journal of non-newtonian fluid mechanics* 69.1 (1997): 99-104.
- [8] Renardy, Michael. "High Weissenberg number boundary layers for the upper convected Maxwell fluid." *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 68.1 (1997): 125-132.
- [9] Koplik, Joel, and Jayanth R. Banavar. "Reentrant corner flows of Newtonian and non-Newtonian fluids." *Journal of Rheology* 41.3 (1997): 787-805.
- [10] Renardy, M. "High Weissenberg number asymptotics and corner singularities in viscoelastic flows." *IUTAM Symposium on Non-linear Singularities in Deformation and Flow: Proceedings of the IUTAM Symposium held in Haifa, Israel, 17-21 March 1997*. Springer Netherlands, 1999.
- [11] Rallison, J. M., and E. J. Hinch. "The flow of an Oldroyd fluid past a reentrant corner: the downstream boundary layer." *Journal of non-newtonian fluid mechanics* 116.2-3 (2004): 141-162.
- [12] Evans, J. D. "Re-entrant corner flows of Oldroyd-B fluids." *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 461.2060 (2005): 2573-2603.

- [13] Evans, Jonathan D. "Re-entrant corner flows of the upper convected Maxwell fluid." *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 461.2053 (2005): 117-142.
- [14] Evans, J. D., and D. N. Sibley. "Re-entrant corner flows of PTT fluids in the Cartesian stress basis." *Journal of non-newtonian fluid mechanics* 153.1 (2008): 12-24.
- [15] Evans, J. D. "Re-entrant corner flows of UCM fluids: The natural stress basis." *Journal of non-newtonian fluid mechanics* 150.2-3 (2008): 139-153.
- [16] Evans, J. D. "Re-entrant corner flows of UCM fluids: The Cartesian stress basis." *Journal of non-newtonian fluid mechanics* 150.2-3 (2008): 116-138.
- [17] Evans, Jonathan D. "Re-Entrant Corner Singularity of the PTT Fluid." *AIP Conference Proceedings*. Vol. 1281. No. 1. American Institute of Physics, 2010.
- [18] Evans, Jonathan D. "Re-entrant corner behaviour of the Giesekus fluid with a solvent viscosity." *Journal of non-newtonian fluid mechanics* 165.9-10 (2010): 538-543.
- [19] Evans, Jonathan D. "Re-entrant corner behaviour of the PTT fluid with a solvent viscosity." *Journal of non-newtonian fluid mechanics* 165.9-10 (2010): 527-537.
- [20] Evans, Jonathan D., and David N. Sibley. "The UCM limit of the PTT equations at a re-entrant corner." *Journal of non-newtonian fluid mechanics* 165.21-22 (2010): 1543-1549.
- [21] Franco, Neide Bertoldi. *Cálculo numérico*. Pearson, 2006.
- [22] Cuminato, José Alberto, and Messias Meneguette. *Discretização de equações diferenciais parciais: técnicas de diferenças finitas*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.
- [23] LeVeque, Randall J. *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007.
- [24] de Oliveira Fortuna, Armando. *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Flúidos* Vol. 30. Edusp, 2000.