Funções Logaritmicas e Exponenciais

Irineu Lopes Palhares Junior

FCT/UNESP,
irineu.palhares@unesp.br

Conteúdos

Informações sobre os conteúdos de limite e continuidade

1. Potência com exponente real
2. Logaritmo
3. O limite $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Potência com exponente real

Em estudos passados definimos potência com expoente racional, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, e estudamos suas principais propriedades. Nesta seção, vamos definir potência com expoente real.

Observamos, inicialmente, que se f e g são duas funções definidas e contínuas em $\mathbb{R}$ tais que $f(r) = g(r)$ para todo racional r, então $f(x) = g(x)$ para todo real x, isto é, se duas funções contínuas em $\mathbb{R}$ coincidem nos racionais, então elas são iguais.

Seja, agora, $a > 0$ e $a \neq 1$ um real qualquer. Se existirem funções f e g definidas e contínuas em $\mathbb{R}$ e tais que para todo racional r

$$f(r) = a^r \text{ e } g(r) = a^r \tag{1}$$

então $f(x) = g(x)$ para todo x real. Isto significa que poderá existir no máximo uma função definida e contínua em $\mathbb{R}$ e que coincide com a^r em todo racional r. O próximo teorema, garante-nos a existência de uma tal função.

Teorema

Theorem

Seja $a > 0$ *e* $a \neq 1$ *um real qualquer. Existe uma única função* f, *definida e contínua em* $\mathbb{R}$, *tal que* $f(r) = a^r$ *para todo racional* r.

Definition

Sejam $a > 0$ e $a \neq 1$, e f como no teorema anterior. Definimos a potência de base a e expoente real x por

$$a^x = f(x). \tag{2}$$

A função f, definida em $\mathbb{R}$, e dada por $f(x) = a^x$, $a > 0$ e $a \neq 1$, denomina-se função exponencial de base a.

Propriedades da função exponencial

Sejam $a > 0$, $b > 0$, x e y reais quaisquer; provaremos as seguintes propriedades:

1. $a^x a^y = a^{x+y}$.
2. $(a^x)^y = a^{xy}$.
3. $(ab)^x = a^x b^x$.
4. Se $a > 1$ e $x < y$, então $a^x < a^y$.
5. Se $0 < a < 1$ e $x < y$, então $a^x > a^y$.

Propriedades

A propriedade (4) conta-nos que a função exponencial $f(x) = a^x$, $a > 1$, é estritamente crescente em $\mathbb{R}$. A (5) conta-nos que $f(x) = a^x$, $0 < a < 1$, é estritamente decrescente em $\mathbb{R}$.

O gráfico de $f(x) = a^x$ tem o seguinte aspecto:

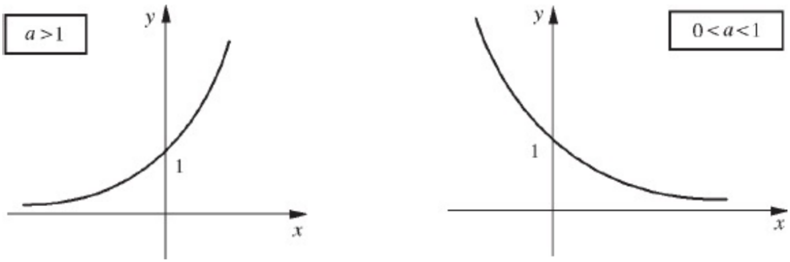

Figura 1: Comportamento da função exponencial

Exemplos

Example

Avalie $2^{\sqrt{2}}$

Example

Esboce o gráfico de

a) $f(x) = 2^x$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Example

Suponha $a > 1$. Verifique que

a) $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$

b) $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$

Theorem

Sejam $a > 0$, $a \neq 1$, e $\beta > 0$ dois reais quaisquer. Então existe um única γ real tal que

$$a^{\gamma} = \beta \tag{3}$$

Sejam $a > 0$, $a \neq 1$, e $\beta > 0$ dois reais quaisquer. O único número real γ tal que

$$a^{\gamma} = \beta \tag{4}$$

denomina-se logaritmo de β na base a e indica-se por $\gamma = \log_a \beta$. Assim

$$\gamma = \log_a \beta \Leftrightarrow a^{\gamma} = \beta \tag{5}$$

Observe: $\log_a \beta$ somente está definido para $\beta > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Exemplo

Example

Calcule.

a) $\log_2 4$

b) $\log_2 \frac{1}{2}$

c) $\log_5 1$

Observação

Observação importante

$$a^{\gamma} = \beta \Leftrightarrow \gamma = \log_a \beta \tag{6}$$

assim

$$a^{\log_a \beta} = \beta \tag{7}$$

O logaritmo de β na base a é o expoente que se deve atribuir à base a para reproduzir β.
O logaritmo na base e é indicado por ln, assim, $\ln = \log_e$. Temos então

$$y = \ln x \Leftrightarrow e^{y} = x. \tag{8}$$

Da observação acima, segue que, para todo $x > 0$

$$e^{\ln x} = x. \tag{9}$$

Sejam $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ reais quaisquer. São válidas as seguintes propriedades:

1. $\log_a \alpha\beta = \log_a \alpha + \log_a \beta$.
2. $\log_a \alpha^\beta = \beta \log_a \alpha$.
3. $\log_a \frac{\alpha}{\beta} = \log_a \alpha - \log_a \beta$.
4. (Mudança de base)
$$\log_a \alpha = \frac{\log_b \alpha}{\log_b a}. \tag{10}$$
5. Se $a > 1$ e $\alpha < \beta$, então $\log_a \alpha < \log_a \beta$.
6. Se $0 < a < 1$ e $\alpha < \beta$, então $\log_a \alpha > \log_a \beta$.

Observação

Seja $a > 0$, $a \neq 1$. A função f dada por $f(x) = \log_a x$, $x > 0$, denomina-se função logarítmica de base a.
A propriedade (5) conta-nos que se $a > 1$, a função logarítmica $f(x) = \log_a x$, $x > 0$, é estritamente crescente. Da propriedade (6) segue que se $0 < a < 1$, a função logarítmica $f(x) = \log_a x$, $x > 0$, é estritamente decrescente.

Exemplos

Example

Esboce o gráfico

a) $f(x) = \log_2 x$.

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Example

Suponha $a > 1$. Calcule e justifique.

a) $\lim_{x \to +\infty} \log_a x$.

b) $\lim_{x \to 0^+} \log_a x$.

Já provamos que a sequência de termo geral $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ converge para o número e, isto é,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{11}$$

Vamos provar, agora, que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{12}$$

Sejam $n > 0$ um natural qualquer e $x > 0$ um real qualquer.

$$n \leq x < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow 1+\frac{1}{n} \geq 1+\frac{1}{x} > 1+\frac{1}{n+1} \tag{13}$$

Continuação dos cálculos

daí

$$n \leq x < n+1 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}, \qquad (14)$$

ou seja,

$$n \leq x < n+1 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \frac{n+1}{n} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n+2}. \qquad (15)$$

Como $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n+2} = e$, segue de (15) que

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e. \qquad (16)$$

Exemplos

Example

Verifique que $\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Example

Verifique que

a) $\lim_{h \to 0^+} (1 + h)^{\frac{1}{h}} = e$

b) $\lim_{h \to 0^-} (1 + h)^{\frac{1}{h}} = e$.

Example

Mostre que $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.