Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Campus de Presidente Prudente

Lista de Cálculo 1: Limite e Continuidade

Prof. Dr. Irineu Lopes Palhares Junior

Lista de exercícios

Presidente Prudente

Abril de 2023

Sumário

1 Introdução ao conceito de limite

Solução

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

Temos

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{x^3 - 2^3}{x - 2} = x^2 + 2x + 4,\ x \neq 2.$$

(Lembre-se: $a^3 - b^3 = (a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$.)

Assim

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} (x^2 + 2x + 4) = 12.$$

■

A *derivada* é um limite. Então, para podermos estudar suas propriedades, precisamos antes estudar as propriedades do limite. É o que faremos a seguir.

Antes de passar à próxima seção, queremos destacar as funções de uma variável real que vão interessar ao curso; tais funções são aquelas que têm por domínio um *intervalo* ou uma *reunião de intervalos.* Portanto, de agora em diante, sempre que nos referirmos a uma função de uma variável real e nada mencionarmos sobre seu domínio, ficará implícito que o mesmo ou é um *intervalo* ou *uma reunião de intervalos.*

Exercícios 3.1

1. Esboce o gráfico da função dada e, utilizando a ideia intuitiva de função contínua, determine os pontos em que a função deverá ser contínua.

   a) $f(x) = 2$

   b) $f(x) = x + 1$

   c) $f(x) = x^2$

   d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leqslant 1 \\ 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

   e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{se } |x| \geqslant 1 \\ 2 & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$

   f) $f(x) = x^2 + 2$

2. Utilizando a ideia intuitiva de limite, calcule

$a)\ \lim_{x \to 1} (x + 2)$

$b)\ \lim_{x \to 1} (2x + 1)$

$c)\ \lim_{x \to 0} (3x + 1)$

$d)\ \lim_{x \to 2} (x^2 + 1)$

$e)\ \lim_{x \to 1} \sqrt{x}$

$f)\ \lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x}{x + 3}$

$g)\ \lim_{x \to 2} \sqrt[3]{x}$

$h)\ \lim_{x \to 0} (\sqrt{x} + x)$

3. Esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{2x - 1}$. Utilizando a ideia intuitiva de limite, calcule $\lim_{x \to ½} \dfrac{4x^2 - 1}{2x - 1}$

4. Utilizando a ideia intuitiva de limite, calcule

$a)\ \lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

$b)\ \lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 + x}{x}$

$c)\ \lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

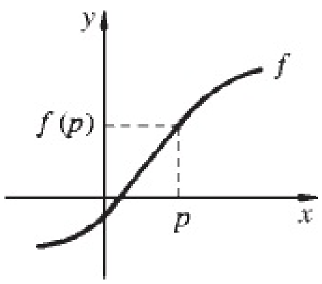
$d)\ \lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$

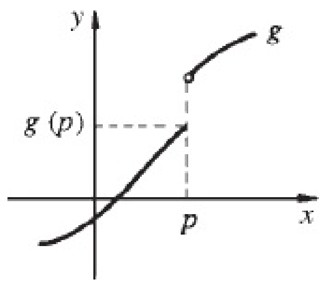
$e)\ \lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

$f)\ \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x$

3.2. DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO CONTÍNUA

Sejam *f* e *g* funções de gráficos





Observe que *f* e *g* se comportam de modo diferente em *p*; o gráfico de *f* não apresenta "salto" em *p*, ao passo que o de *g*, sim. Queremos destacar uma propriedade que nos permita distinguir tais comportamentos.

Veja as situações apresentadas a seguir.

2 Função contínua

Na seção 3.2 fazer apenas o exercício 1.

Solução

Como, por hipótese, f é contínua em p, dado $\epsilon > 0$, existirá $\delta > 0$ tal que $\forall x \in D_f$

① $$p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon.$$

Como *para todo* $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que ① ocorre, tomando-se, em particular, $\epsilon = f(p)$ (por hipótese $f(p) > 0$), existirá um $\delta > 0$ tal que, $\forall x \in D_f$,

$$p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow f(p) - f(p) < f(x) < f(p) + f(p)$$

e, portanto,

$$p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow f(x) > 0.$$

De modo análogo, prova-se que se f for contínua em p e $f(p) < 0$, então (neste caso basta tomar $\epsilon = -f(p)$) existirá $\delta > 0$ tal que

$$p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow f(x) < 0. \quad \blacksquare$$

Exercícios 3.2

1. Prove, pela definição, que a função dada é contínua no ponto dado.

   a) $f(x) = 4x - 3$ em $p = 2$
   b) $f(x) = x + 1$ em $p = 2$
   c) $f(x) = -3x$ em $p = 1$
   d) $f(x) = x^3$ em $p = 2$
   e) $f(x) = x^4$ em $p = -1$
   f) $f(x) = \sqrt{x}$ em $p = 4$
   g) $f(x) = \sqrt{x}$ em $p = 0$
   h) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ em $p = 1$

2. Prove que $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é contínua em todo $p \neq 0$.

3. Seja $n > 0$ um natural. Prove que $f(x) = x^n$ é contínua.

4. Prove que $f(x) = \sqrt[n]{x}$ é contínua.

5. $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leqslant 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ é contínua em 1? Justifique.

6. Dê exemplo de uma função definida em $\mathbb{R}$ e que seja contínua em todos os pontos, exceto em -1, 0, 1.

7. Dê exemplo de uma função definida em $\mathbb{R}$ e que seja contínua em todos os pontos exceto nos inteiros.

8. Seja f dada por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Mostre que f é descontínua em todo p real.

9. Determine o conjunto dos pontos em que a função dada é contínua.

   a) $f(x) = [\![x]\!]$ em que $[\![x]\!] = \text{máx}\ \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\}$ (*Função maior inteiro.*)

   $b)\ f(x) = x - [\![x]\!]$

   $c)\ f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

   $d)\ f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -x^2 + 1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

10. Dê exemplo de uma função definida em $\mathbb{R}$ e que seja contínua apenas em -1, 0,1.

11. Determine L para que a função dada seja contínua no ponto dado. Justifique.

   $a)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ L & \text{se } x = 2 \end{cases} \quad \text{em } p = 2$

   $b)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ L & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \text{em } p = 0$

12. Dê o valor (caso exista) que a função dada deveria ter no ponto dado para ser contínua neste ponto. Justifique.

a) $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ em $p = 2$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x}$ em $p = 0$

c) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ em $p = 0$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{se } x \neq 3 \\ 4 & \text{se } x = 3 \end{cases}$ em $p = 3$

e) $g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$ em $p = 1$

f) $f(x) = \dfrac{|x - 2|}{x - 2}$ em $p = 2$

13. Sabe-se que f é contínua em 2 e que $f(2) = 8$. Mostre que existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D_f$

$$2 - \delta < x < 2 + \delta \Rightarrow f(x) > 7.$$

14. Sabe-se que f é contínua em 1 e que $f(1) = 2$. Prove que existe $r > 0$ tal que para todo $x \in D_f$

$$1 - r < x < 1 + r \Rightarrow \frac{3}{2} < f(x) < \frac{5}{2}.$$

15. Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ e suponha que existe $M > 0$ tal que $|f(x) - f(p)| \geq M\,|x - p|$ para todo x. Prove que f é contínua em p.

16. Suponha que $|f(x) - f(1)| \leq (x - 1)^2$ para todo x. Prove que f é contínua em 1.

17. Suponha que $|f(x)| \geq x^2$ para todo x. Prove que f é contínua em 0.

18. Prove que a função $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ é contínua em 0.

19. Sejam f e g definidas em $\mathbb{R}$ e suponha que existe $M > 0$ tal que $|f(x) - f(p)| \leq M\,|g(x) - g(p)|$ para todo x. Prove que se g for contínua em p, então f também será contínua em p.

20. Suponha f definida e contínua em $\mathbb{R}$ e que $f(x) = 0$ para todo x racional.

Prove que $f(x) = 0$ para todo x real.

21. Sejam f e g contínuas em $\mathbb{R}$ e tais que $f(x) = g(x)$ para todo x racional. Prove que $f(x) = g(x)$ para todo x real.

22. Suponha que f e g são contínuas em $\mathbb{R}$ e que exista $a > 0$, $a \neq 1$, tal que para todo r racional, $f(r) = a^r$ e $g(r) = a^r$. Prove que $f(x) = g(x)$ em $\mathbb{R}$.

23. Seja $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$. Prove

$a)$ $|f(x) - f(1)| \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) |x - 1|$ para $x > 0$

$b)$ $|f(x) - f(1)| \leqslant 3|x - 1|$ para $x > \dfrac{1}{2}$

$c)$ f é contínua em $p = 1$

24. Seja $f(x) = x^3 + x$. Prove que

$a)$ $|f(x) - f(2)| \leq 20|x - 2|$ para $0 \leq x \leq 3$
$b)$ f é contínua em 2

25. Prove que $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$ é contínua em 1.

26. Prove que $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ é contínua em todo $p > 0$.

27. Sejam $f(x) = x^3$ e $p \neq 0$.

$a)$ Verifique que $|x^3 - p^3| \leq 7p^2 |x - p|$ para $|x| \leq 2|p|$
$b)$ Conclua de (a) que f é contínua em p

3.3. DEFINIÇÃO DE LIMITE

Sejam f uma função e p um ponto do domínio de f ou extremidade de um dos intervalos que compõem o domínio de f (veja o final da Seção 3.1). Consideremos as situações a seguir:

3 Definição de limite

Não fazer os exercícios 6 e 7.

$$p - \delta < x < p + \delta,\ x \neq p \Rightarrow f(x) > 0.$$

Solução

Sendo $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L$, para todo $\epsilon > 0$ dado existe $\delta > 0$ tal que, $\forall\, x \in D_f$,

$$p - \delta < x < p + \delta,\ x \neq p \Rightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon.$$

Para $\epsilon = L$, existe $\delta > 0$ tal que, $\forall\, x \in D_f$,

$$p - \delta < x < p + \delta,\ x \neq p \Rightarrow L - L < f(x) < L + L,$$

ou seja,

$$p - \delta < x < p + \delta,\ x \neq p \Rightarrow f(x) > 0.$$

■

Exercícios 3.3

1. Calcule e justifique.

$a)\ \lim_{x \to 2} x^2$

$b)\ \lim_{x \to 1} (3x+1)$

$c)\ \lim_{x \to -2} (4x+1)$

$d)\ \lim_{x \to 10} 5$

$e)\ \lim_{x \to -9} 50$

$f)\ \lim_{x \to -1} (-x^2-2x+3)$

$g)\ \lim_{x \to 4} \sqrt{x}$

$h)\ \lim_{x \to -3} \sqrt[3]{x}$

$i)\ \lim_{x \to -8} \sqrt{5}$

$j)\ \lim_{x \to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$

$l)\ \lim_{x \to 3} \dfrac{x^2-9}{x+3}$

$m)\ \lim_{x \to -1} \dfrac{x^2-9}{x-3}$

$n)\ \lim_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{4x^2-1}{2x-1}$

$o)\ \lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

$p)\ \lim_{x \to -\frac{1}{3}} \dfrac{9x^2-1}{3x+1}$

$q)\ \lim_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$

$r)\ \lim_{x \to 3} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}}{x-3}$

$s)\ \lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{2}}{x-2}$

$t)\ \lim_{x \to 0} \dfrac{x^2+3x-1}{x^2+2}$

$u)\ \lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{5}}$

2. Determine L para que a função dada seja contínua no ponto dado. Justifique.

$$a)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x-2} & \text{se } x \neq 2 \\ L & \text{se } x = 2 \end{cases} \quad \text{em } p = 2$$

$$b)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} & \text{se } x \neq 3 \\ L & \text{se } x = 3 \end{cases} \quad \text{em } p = 3$$

$$c)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{10}} & \text{se } x \neq 5 \\ L & \text{se } x = 5 \end{cases} \quad \text{em } p = 5$$

3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x}{x+1} & \text{se } x \neq -1 \\ 2 & \text{se } x = -1 \end{cases}$ é contínua em -1? E em 0? Por quê?

4. Calcule $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ sendo f dada por

a) $f(x) = x^2$
b) $f(x) = 2x^2 + x$
c) $f(x) = 5$
d) $f(x) = -x^3 + 2x$
e) $f(x) = \dfrac{1}{x}$
f) $f(x) = 3x + 1$

5. Calcule.

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 + x^2}{3x^3 + x^4 + x}$

c) $\lim\limits_{h \to 0} (x^2 + 3xh)$

d) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^3 - x^3}{h}$

e) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 9}$

f) $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{p}}{x - p}$ $(p \neq 0)$

g) $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{p}}{x - p}$ $(p \neq 0)$

h) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^4 - 5x - 6}$

i) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^4 + 3x - 4}$

j) $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{7}}{\sqrt{x+7} - \sqrt{14}}$

l) $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{x^3 - p^3}{x - p}$

m) $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{x^4 - p^4}{x - p}$

n) $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{x^n - p^n}{x - p}$ $(n > 0$ natural$)$

o) $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{p}}{x - p}$

p) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2}$

q) $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{f(x) - f(p)}{x - p}$ onde $f(x) = \dfrac{1}{x}$

r) $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{g(x) - g(p)}{x - p}$ onde $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

s) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ onde $f(x) = x^2 - 3x$

6. Prove que existe $\delta > 0$ tal que

$$1 - \delta < x < 1 + \delta \Rightarrow 2 - \frac{1}{3} < x^2 + x < 2 + \frac{1}{3}.$$

7. Prove que existe $\delta > 0$ tal que

$$1 - \delta < x < 1 + \delta \Rightarrow 2 - \frac{1}{2} < \frac{x^5 + 3x}{x^2 + 1} < 2 + \frac{1}{2}$$

8. Sejam f e g definidas em $\mathbb{R}$ com $g(x) \neq 0$ para todo x. Suponha que $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Prove que existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x)| < |g(x)|.$$

9. Suponha que $\lim_{x \to p} f(x) = L$. Prove que existem $r > 0$, α e β tais que, para todo $x \in D_f$,

$$0 < |x - p| < r \Rightarrow \alpha < f(x) < \beta.$$

   Interprete graficamente.

10. Suponha que $\lim_{x \to p} f(x) = L$. Prove que existem $r > 0$ e $M > 0$ tais que, para todo $x \in D_f$,

$$0 < |x - p| < r \Rightarrow |f(x)| \leq M.$$

11. Prove: $\lim_{x \to p} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to p} [f(x) - L] = 0$.

12. Prove: $\lim_{x \to p} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to p} |f(x) - L| = 0$.

13. Prove: $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{x - p} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to p} \frac{f(x)}{|x - p|} = 0$.

14. Suponha que existe $r > 0$ tal que $f(x) \geq 0$ para $0 < |x - p| < r$ e que $\lim_{x \to p} f(x) = L$. Prove que $L \geq 0$.

    (*Sugestão*: Suponha $L < 0$ e use a conservação do sinal.)

15. Suponha f contínua em $\mathbb{R}$ e $f(x) \geq 0$ para todo x racional. Prove que $f(x) \geq 0$ para todo x.

3.4. LIMITES LATERAIS

4 Limites laterais

EXEMPLO 3. $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ existe? Por quê?

Solução

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0} 1 = 1 \text{ e } \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0} -1 = -1.$$

Como $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} \neq \lim_{x \to 0^-}$, segue que $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ não existe. ■

Exercícios 3.4

1. Calcule, caso exista. Se não existir, justifique.

$a)$ $\lim_{x \to 1^+} \frac{|x-1|}{x-1}$

$b)$ $\lim_{x \to 1^-} \frac{|x-1|}{x-1}$

$c)$ $\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ em que $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geqslant 1 \\ 2x & \text{se } x < 1 \end{cases}$

$d)$ $\lim_{x \to 0} \sqrt{x}$

$e)$ $\lim_{x \to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$

$f)$ $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ em que $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geqslant 1 \\ 2x & \text{se } x < 1 \end{cases}$

$g)$ $\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2-2x+1}{x-1}$

$h)$ $\lim_{x \to 3} \frac{|x-1|}{x-1}$

$i)$ $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ em que $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leqslant 1 \\ 2x-1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

$j)$ $\lim_{x \to 2^-} \frac{g(x)-g(2)}{x-2}$ em que $g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 2 \\ \frac{x^2}{2} & \text{se } x < 2 \end{cases}$

$l)$ $\lim_{x \to 2^+} \frac{g(x)-g(2)}{x-2}$ sendo g a função do item (j)

$m)$ $\lim_{x \to 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2}$ em que g é a função do item (j)

2. A afirmação

“$\lim_{x \to p^+} f(x) = \lim_{x \to p^-} f(x) \Rightarrow f$ conínua em p” é falsa ou verdadeira? Justifique.

3. Dada a função $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$, verifique que $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$. Pergunta-se: *f* é contínua em 1? Por quê?

4. Dê exemplo de uma função definida em $\mathbb{R}$, que não seja contínua em 2, mas que $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$.

5. Suponha que exista $r > 0$ tal que $f(x) \geq 0$ para $p < x < p + r$. Prove que $\lim\limits_{x \to p^+} f(x) \geqslant 0$ desde que o limite exista.

6. Sejam *f* uma função definida num intervalo aberto *I* e $p \in I$. Suponha que $f(x) \leq f(p)$ para todo $x \in I$. Prove que $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{f(x) - f(p)}{x - p} = 0$ desde que o limite exista.

(*Sugestão*: estude os sinais de $\lim\limits_{x \to p^+} \dfrac{f(x) - f(p)}{x - p}$ e de $\lim\limits_{x \to p^-} \dfrac{f(x) - f(p)}{x - p}$

3.5. LIMITE DE FUNÇÃO COMPOSTA

Sejam *f* e *g* duas funções tais que $\text{Im}f \subset D_g$, em que Im*f* é a *imagem de f*, ou seja, $\text{Im}f = \{ f(x) \mid x \in D_f \}$. Nosso objetivo é estudar o limite

$$\lim_{x \to p} g(f(x)).$$

Supondo que $\lim\limits_{x \to p} f(x) = a$ é razoável esperar que

① $$\lim_{x \to p} g\,(\overbrace{f(x)}^{u}) = \lim_{u \to a} g(u)$$

desde que $\lim\limits_{u \to a} g(u)$ exista (*observe*: $u = f(x)$; $u \mapsto a$ para $x \mapsto p$). Veremos que ① se verifica se *g* for contínua em *a* ou se *g* não estiver definida em *a*. Veremos, ainda, que se *g* estiver definida em *a*, mas não for contínua em *a* $(\lim\limits_{u \to a} g(u) \neq g(a))$ ① se verificará desde que ocorra $f(x) \neq a$ para *x* próximo de *p*. Os casos que interessarão ao curso são aqueles em que *g* ou é contínua em *a* ou não está definida em *a*. O quadro que apresentamos a seguir mostra como iremos trabalhar com o limite de função composta no cálculo de limites.

5 Propriedades

Não fazer o exercício 3 da Seção 3.5 (Limite de função composta). Também, não fazer os exercícios 7, 8 e 9 da Seção 3.6 (Teorema do confronto). Os exercícios que envolvam provas com ϵ e δ também podem ser descartados.

Como $\lim\limits_{x \to a} g(u) = L$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

① $$0 < |u - a| < \delta_1 \Rightarrow |g(u) - L| < \epsilon.$$

Como $\lim\limits_{x \to p} f(x) = a$, para o $\delta_1 > 0$ acima existe $\delta_2 > 0$ tal que

② $$0 < |x - p| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - a| < \delta_1.$$

Tomando-se $\delta = \text{mín}\ \{\delta_2, r\}$, segue de ② e da hipótese

③ $$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow 0 < |f(x) - a| < \delta_1.$$

De ① e ② resulta

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - L| < \epsilon.$$

Assim,

$$\lim_{x \to p} g(f(x)) = L = \lim_{u \to a} g(u). \qquad \blacksquare$$

Observação. Se g não estiver definida em a, segue-se da hipótese $\text{Im} f \subset D_g$, que $f(x) \neq a$ para todo $x \in D_f$. Assim, neste caso, a condição "existe $r > 0$ tal que $f(x) \neq a$ para $0 < |x - p| < r$" é dispensável. Entretanto, se g estiver definida em a, mas não for contínua em a, tal condição é indispensável como mostra o próximo exemplo.

EXEMPLO 7. Sejam f e g definidas em $\mathbb{R}$ e dadas por $f(x) = 1$ e $g(u) = \begin{cases} u+1 & \text{se } u \neq 1 \\ 3 & \text{se } u = 1 \end{cases}$

Temos

$$\lim_{x \to p} f(x) = 1 \text{ e } \lim_{u \to 1} g(u) = 2.$$

Como $g(f(x)) = 3$ para todo x, segue que

$$\lim_{x \to p} g(f(x)) \neq \lim_{u \to 1} g(u).$$

Este fato ocorre em virtude de não estar satisfeita a condição "existe $r > 0$ tal que $f \neq (x)\ 1$ para $0 < |x - p| < r$". $\blacksquare$

Exercícios 3.5

1. Calcule

$a)\ \lim_{x\to -1} \sqrt[3]{\dfrac{x^3+1}{x+1}}$ $b)\ \lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1}$

$c)\ \lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1}$ $d)\ \lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{x^2-1}$

2. Seja f definida $\mathbb{R}$. Suponha que $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$. Calcule

$a)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{f(3x)}{x}$ $b)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{f(x^2)}{x}$

$c)\ \lim_{x\to 1} \dfrac{f(x^2-1)}{x-1}$ $d)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{f(7x)}{3x}$

3. Seja f definida em $\mathbb{R}$ e seja p um real dado. Suponha que $\lim_{x\to p} \dfrac{f(x)-f(p)}{x-p} = L$. Calcule

$a)\ \lim_{h\to 0} \dfrac{f(p+h)-f(p)}{h}$ $b)\ \lim_{h\to 0} \dfrac{f(p+3h)-f(p)}{h}$

$c)\ \lim_{h\to 0} \dfrac{f(p+h)-f(p-h)}{h}$ $d)\ \lim_{h\to 0} \dfrac{f(p-h)-f(p)}{h}$

3.6. TEOREMA DO CONFRONTO

Teorema (*do confronto*). Sejam *f, g, h* três funções e suponhamos que exista $r > 0$ tal que

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$

para $0 < |x - p| < r$. Nestas condições, se

$$\lim_{x\to p} f(x) = L = \lim_{x\to p} h(x)$$

então

$$|f(x)\,g(x)| = |f(x)|\,|g(x)| \le M\,|f(x)|$$

para todo x em A. Daí, para todo x em A

$$-M\,|f(x)| \le f(x)\,g(x) \le M\,|f(x)|.$$

De $\lim_{x \to p} f(x) = 0$ segue que $\lim_{x \to p} M|f(x)| = 0$ e $\lim_{x \to p} -M|f(x)| = 0.$ Pelo teorema do confronto

$$\lim_{x \to p} f(x)\,g(x) = 0. \qquad \blacksquare$$

EXEMPLO 3. Calcule $\lim_{x \to 0} x^2 \cdot g(x)$ em que $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Solução

$\lim_{x \to 0} x^2 = 0$; como $\lim_{x \to 0} g(x)$ não existe (verifique) não podemos aplicar a propriedade relativa a limite de um produto de funções. Entretanto, como g é limitada, ($|g(x)| \le 1$ para todo x) e $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$, pelo exemplo anterior

$$\lim_{x \to 0} \underbrace{x^2}_{0}\,\overbrace{g(x)}^{\text{limitada}} = 0.$$

$\blacksquare$

Exercícios 3.6

1. Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ tal que para todo $x \neq 1$, $-x^2 + 3x \leqslant f(x) < \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$. Calcule $\lim_{x \to 1} f(x)$ e justifique.

2. Seja f definida em $\mathbb{R}$ e tal que, para todo x, $|f(x) - 3| \le 2\,|x - 1|$. Calcule $\lim_{x \to 1} f(x)$ e justifique.

3. Suponha que, para todo x, $|g(x)| \le x^4$. Calcule $\lim_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{x}$.

4. *a*) Verifique que $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ não existe.

b) Calcule, caso exista, $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$. (Justifique.)

5. Calcule, caso exista, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ em que *f* é dada por

$a)\ f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ $\qquad$ $b)\ f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

6. Sejam *f* e *g* duas funções definidas em $\mathbb{R}$ e tais que, para todo *x*, $[g(x)]^4 + [f(x)]^4 = 4$. Calcule e justifique.

$a)\ \lim\limits_{x \to 0} x^3\, g(x)$ $\qquad$ $b)\ \lim\limits_{x \to 3} f(x) \sqrt[3]{x^2 - 9}$

7. Seja *f* definida em $\mathbb{R}$ e suponha que existe $M > 0$ tal que, para todo *x*, $|f(x) - f(p)| \leq M\,|x - p|^2$.

a) Mostre que *f* é contínua em *p*.

b) Calcule, caso exista, $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{f(x) - f(p)}{x - p}$.

8. Sejam *a, b, c* reais fixos e suponha que, para todo *x*, $|a + bx + cx^2| \leq |x|^3$. Prove que $a = b = c = 0$.

9. Prove: $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L \Rightarrow \lim\limits_{x \to p} |f(x)| = |L|$.

(*Sugestão*: verifique que $||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L|$ e aplique o teorema do confronto.)

10. A afirmação

"$\lim\limits_{x \to p} |f(x)| = |L| \Rightarrow \lim\limits_{x \to p} f(x) = L$" é falsa ou verdadeira? Por quê?

11. Dê exemplo de uma função *f* tal que $\lim\limits_{x \to p} |f(x)|$ existe, mas $\lim\limits_{x \to p} f(x)$ não exista.

12. Prove: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h)}{h} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h)}{|h|} = 0$.

3.7. CONTINUIDADE DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

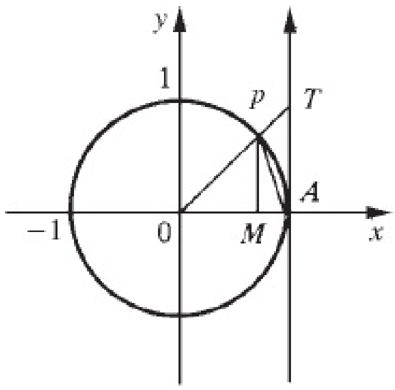
6 Limites fundamentais

área $\Delta OAP = \frac{\text{sen } x}{2}$ e área $\Delta OAT = \frac{\text{tg } x}{2}$. (Veja figura na página seguinte.)

Por uma regra de três simples calculamos a área α do setor circular OAP:

2π rad − área π

$$\alpha = \frac{\pi x}{2\pi} = \frac{x}{2}.$$



x rad − área α

Portanto, área do setor circular $OAP = \frac{x}{2}$.

Assim, para $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (x é a medida em rad do arco AP),

$$\frac{\text{sen } x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\text{tg } x}{2}$$

ou

$$\text{sen } x < x < \text{tg } x.$$

■

Exercícios 3.8

1. Calcule.

$a)$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } x}{x}$

$b)$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\text{sen } x}$

$c)$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 3x}{x}$

$d)$ $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\text{sen } x}{x - \pi}$

$e)$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{\text{sen } x}$

$f)$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2}{\text{tg } x \text{ sen } x}$

$g)$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } 3x}{\text{sen } 4x}$

$h)$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x}$

$i)$ $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \text{sen } x}{2x - \pi}$

$j)$ $\lim\limits_{x \to 0} x \text{ sen } \dfrac{1}{x}$

$l)$ $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{\text{tg } (x - p)}{x^2 - p^2}, \ p \neq 0$

$m)$ $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{\text{sen } (x^2 - p^2)}{x - p}$

$n)$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } (x^2 + \frac{1}{x}) - \text{sen } \frac{1}{x}}{x}$

$o)$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + \text{sen } x}{x^2 - \text{sen } x}$

$p)$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \text{tg } x}{x + \text{tg } x}$

$q)$ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\text{sen } \pi x}{x - 1}$

2. *a*) Prove que existe $r > 0$ tal que

$$\cos x - 1 < \frac{\text{sen } x}{x} - 1 < 0$$

para $0 < |x| < r$.

b) Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \text{sen } x}{x^2}$

3. Calcule.

$a)$ $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{\text{sen } x - \text{sen } p}{x - p}$

$b)$ $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{\cos x - \cos p}{x - p}$

$c)$ $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{\text{tg } x - \text{tg } p}{x - p}$

$d)$ $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{\sec x - \sec p}{x - p}$

3.9. PROPRIEDADES OPERATÓRIAS. DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DO CONFRONTO

7 Limites envolvendo o infinito

Solução

Vamos colocar em evidência a mais alta potência de x que ocorre no numerador e proceder da mesma forma no denominador. Deste modo, irão aparecer no denominador e numerador expressões do tipo $\frac{1}{x^n}$ que tendem a zero para $x \to +\infty$, o que poderá facilitar o cálculo do limite.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^5 + x^4 + 1}{2x^5 + x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^5 \left[1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^5}\right]}{x^5 \left[2 + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}\right]} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^5}}{2 + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}} = \frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$

Exercícios 4.1

1. Calcule.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} [5 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}]$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} [2 - \frac{1}{x}]$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x + 1}{x + 3}$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x + 1}{x + 3}$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{3x^2 + x + 1}$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5x^4 - 2x + 1}{4x^4 + 3x + 2}$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 + 3x + 1}$

j) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^3 + 1}{x^4 + 2x + 3}$

l) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{5 + \frac{2}{x}}$

m) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{\frac{x}{x^2 + 3}}$

n) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{3x + 2}$

o) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x - 1}}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

p) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x^2 + 3}$

q) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{\sqrt{x}}$

r) $\lim\limits_{x \to +\infty} [x - \sqrt{x^2 + 1}]$

s) $\lim\limits_{x \to +\infty} [\sqrt{x + 1} - \sqrt{x + 3}]$

2. Sejam f e g definidas em $[a, +\infty[$ e tais que

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0,\ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ e $g(x) \neq 0$ para *todo* $x \geq a$. Calcule, caso exista, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3. *a*) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + 3x - 1}{2x^3 - 6x + 1}$

   b) Mostre que existe $r > 0$ tal que

$$x > r \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{x^3 + 3x - 1}{2x^3 - 6x + 1} < \frac{3}{4}$$

4. *a*) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 3}{x^3 + 2x - 1}$

   b) Mostre que existe $r > 0$ tal que

$$x > r \Rightarrow 0 < \frac{x + 3}{x^3 + 2x - 1} < \frac{1}{2}.$$

5. Sejam f e g definidas em $[a, +\infty[$ e tais que $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$ para todo $x \geq a$. Suponha que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L,\ L > 0.$ Prove que existe $r > 0$, $r > a$, tal que para todo $x > r$

$$\frac{L}{2} g(x) < f(x) < \frac{3L}{2} g(x).$$

   Conclua daí que se $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0,$ então $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0.$

4.2. LIMITES INFINITOS

Definição 1. Suponhamos que exista a tal que $]a, +\infty[\subset D_f$. Definimos

$$(a)\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \begin{cases} \forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \text{ com } \delta > a, \text{ tal que} \\ x > \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon. \end{cases}$$

$$(b)\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \iff \begin{cases} \forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \text{ com } \delta > a, \text{ tal que} \\ x > \delta \Rightarrow f(x) < -\epsilon. \end{cases}$$

Logo,

$$x > \delta \Rightarrow f(x)\, g(x) < -\epsilon.$$

■

Exercícios 4.2

1. Calcule.

a) $\lim_{x \to +\infty} (x^4 - 3x + 2)$

b) $\lim_{x \to +\infty} (5 - 4x + x^2 - x^5)$

c) $\lim_{x \to -\infty} (3x^3 + 2x + 1)$

d) $\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 2x + 3)$

e) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{5x^3 - 6x + 1}{6x^3 + 2}$

f) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{5x^3 - 6x + 1}{6x^2 + x + 3}$

g) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{5x^3 + 7x - 3}{x^4 - 2x + 3}$

h) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{2x + 3}{x + 1}$

i) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^4 - 2x + 3}{3x^4 + 7x - 1}$

j) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{5 - x}{3 + 2x}$

l) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x + 1}{x^2 - 2}$

m) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2 + x}{3 + x^2}$

2. Prove que $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$, no qual $n > 0$ é um natural.

3. Calcule.

a) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x} + 1}{x + 3}$

b) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x + \sqrt{x + 3}}{2x - 1}$

c) $\lim_{x \to +\infty} [2x - \sqrt{x^2 + 3}]$

d) $\lim_{x \to +\infty} (x - \sqrt{3x^3 + 2})$

e) $\lim_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 3})$

f) $\lim_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x + 3})$

g) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - 1})$

h) $\lim_{x \to +\infty} (x - \sqrt[3]{2 + 3x^3})$

4. Calcule.

a) $\lim_{x \to 3^+} \frac{5}{3 - x}$

b) $\lim_{x \to 3^-} \frac{4}{x - 3}$

c) $\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{4}{2x - 1}$

d) $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x}$

e) $\lim_{x \to 0^+} \frac{2x + 1}{x}$

f) $\lim_{x \to 0^-} \frac{x - 3}{x^2}$

g) $\lim_{x \to 0^+} \frac{3}{x^2 - x}$

h) $\lim_{x \to 0^-} \frac{3}{x^2 - x}$

i) $\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{3x + 1}{4x^2 - 1}$

j) $\lim_{x \to 1^-} \frac{2x + 3}{x^2 - 1}$

l) $\lim_{x \to 1^+} \frac{2x + 3}{x^2 - 1}$

m) $\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 6x + 9}$

n) $\lim_{x \to -1^+} \frac{2x + 1}{x^2 + x}$

o) $\lim_{x \to 0^+} \frac{2x + 1}{x^2 + x}$

p) $\lim_{x \to 1^+} \frac{3x - 5}{x^2 + 3x - 4}$

q) $\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4}$

r) $\lim_{x \to -1^+} \frac{3x^2 - 4}{1 - x^2}$

s) $\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x^3 - x^2}$

5. Dê exemplo de funções f e g tais que $\lim_{x \to p^+} f(x) = L, L \neq 0,$ $\lim_{x \to p^+} g(x) = 0,$ mas $\lim_{x \to p^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ não existe.

6. Dê exemplo de funções f e g tais que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$ $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)] \neq 0.$

7. Dê exemplo de funções f e g tais que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$ $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 1.$

8. Seja $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, em que $a > 0$, b, c, d são reais dados. Prove que existem números reais x_1 e x_2 tais que $f(x_1) < 0$ e $f(x_2) > 0$.

9. Sejam f e g duas funções definidas em $]a, +\infty[$ tais que $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ e $g(x) > 0$ para todo $x > a$. Prove que existe $r > 0$ tal que

para todo $x > r$, $f(x) > g(x)$.

4.3. SEQUÊNCIA E LIMITE DE SEQUÊNCIA

Uma *sequência* ou *sucessão* de números reais é uma função $n \mapsto a_n$, a valores reais, cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{N}$. As sequências que vão interessar ao curso são aquelas cujo domínio contém um subconjunto do tipo $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq q\}$ no qual q é um natural fixo; só consideraremos tais sequências.

A notação a_n (leia: a índice n) é usada para indicar o valor que a sequência assume no natural n. Diremos que a_n é o *termo geral* da sequência.

EXEMPLO 1. Seja a sequência de termo geral $a_n = 2^n$. Temos

$$a_0 = 2^0,\ a_1 = 2^1,\ a_2 = 2^2,\ \ldots$$

■

EXEMPLO 2. Seja a sequência de termo geral $s_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$. Temos

$$s_1 = 1,\ s_2 = 1 + 2,\ s_3 = 1 + 2 + 3 \text{ etc.}$$

Sejam $m \leq n$ dois naturais. O símbolo

$$\sum_{k=m}^{n} a_k$$

(leia: somatória de a_k, para k variando de m até n) é usado para indicar a soma dos termos a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, …, a_n:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n.$$

■

EXEMPLO 3.

8 O limite $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

b) Faça você.

Segue do Exemplo 2 que

$$\boxed{\lim_{h \to 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}} = e.}$$

■

EXEMPLO 3. Mostre que $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$

Solução

Fazendo $u = e^h - 1$ ou $h = \ln(1 + u)$ vem

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{u}{\ln(1 + u)} = \frac{1}{\ln(1 + u)^{\frac{1}{u}}}$$

($h \to 0 \Rightarrow u \to 0$); assim

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{u \to 0} \frac{1}{\ln(1 + u)^{\frac{1}{u}}} = \frac{1}{\ln e} = 1.$$ ■

Exercícios 6.3

1. Calcule.

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$

b) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+2}$

c) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$

d) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x+1}$

e) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x + 2}{x + 1}\right)^x$

f) $\lim_{x \to 0} (1 + 2x)^x$

g) $\lim_{x \to 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$

h) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}$

2. Seja $a > 0$, $a \neq 1$. Mostre que

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a.$$

3. Calcule.

$a)$ $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$

$b)$ $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x}$

$c)$ $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{5^x - 1}{x}$

$d)$ $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{3^x - 1}{x^2}$

---

9 Respostas dos exercícios

2. *a*) $h(x) = 3x + 7$ *b*) $h(x) = \sqrt{2 + x^2}$ *c*) $h(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 + 1}$

d) $h(x) = -4x^2 + 18x - 17$ *e*) $h(x) = \dfrac{2}{x - 1}$

f) $h(x) = -(2x + 1), x \neq -1$ *g*) $h(x) = \sqrt{x^2 - x}$ *h*) $h(x) = x, x \neq 1$

3. *a*) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -5\}$, $h(x) = \dfrac{2}{x + 5}$

b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 1\}$, $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -4 \text{ ou } x > 3\}$, $h(x) = \sqrt{\dfrac{x + 4}{x - 3}}$

d) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ e } x \neq 1\}$, $h(x) = \dfrac{1}{x^3 - x^2}$

e) $A =]-\infty, -\sqrt{3}] \cup [-1, 1] \cup [\sqrt{3}, +\infty[$, $h(x) = \sqrt{(x^2 - 2)^2 - 1}$

4. *a*) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *b*) $f(x) = \dfrac{x - 2}{1 - x}$ *c*) $f(x) = \sqrt{x}$ *d*) $f(x) = 1 + \sqrt{1 + x}$

e) $f(x) = -1 + \dfrac{3}{x - 2}$ *f*) $f(x) = 2 + \sqrt{1 + x}$

CAPÍTULO 3

3.1

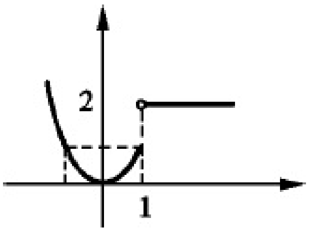
1. ***a*)** Em todo *p* real

***b*)** Em todo *p* real

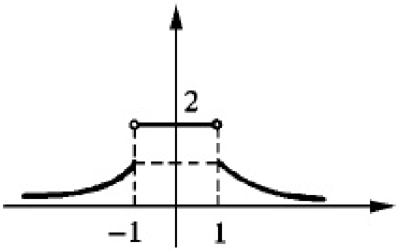
***c*)** Em todo *p* real

***d*)** Em todo $p \neq 1$

***e*)** Em todo $p \neq \pm 1$



***f*)** Em todo p real



2. ***a*)** 3

***b*)** 3

***c*)** 1

***d*)** 5

***e*)** 1

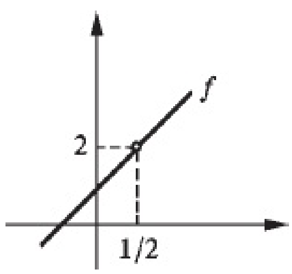
***f*)** $\frac{6}{5}$

***g*)** $\sqrt[3]{2}$

***h*)** 0

3. $f(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{2x - 1} = 2x + 1, x \neq 1/2$

$$\lim_{x \to 1/2} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} = 2$$



4. ***a*)** 4

***b*)** 1

c) $\frac{1}{2}$ $\left(\text{Observe}: \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}, x \neq 1\right)$

d) 0

e) −2

f) 0

3.2

1. *g)* $\forall\ \epsilon > 0, x \geqslant 0, |\sqrt{x} - \sqrt{0}| < \epsilon \Leftrightarrow |x| < \epsilon^2$. Então, dado $\epsilon > 0$ e tomando-se $\delta = \epsilon^2$, para todo $x \in D_f (x \geqslant 0)$

$$|x - 0| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{0}| < \epsilon;$$

logo, $f(x) = \sqrt{x}$ é contínua em $p = 0$

h) $\forall\ \epsilon > 0, 1 - \epsilon < \sqrt[3]{x} < 1 + \epsilon \Leftrightarrow (1-\epsilon)^3 < x < (1+\epsilon)^3$. Dado $\epsilon > 0$ e tomando-se $I =](1-\epsilon)^3, (1+\epsilon)^3[, 1 \in I$,

$$x \in I \Rightarrow 1 - \epsilon < \sqrt[3]{x} < 1 + \epsilon;$$

logo, $\sqrt[3]{x}$ é contínua em $p = 1$

2. Para todo $\epsilon > 0$, $x \neq 0$ e $p \neq 0$,

$$\frac{1}{p} - \epsilon < \frac{1}{x} < \frac{1}{p} + \epsilon \Leftrightarrow \frac{1-\epsilon p}{p} < \frac{1}{x} < \frac{1+\epsilon p}{p}.$$

Para $p > 0$ e $1 - \epsilon p > 0$ $\left(\epsilon < \frac{1}{p}\right)$

$$\frac{1}{p} - \epsilon < \frac{1}{x} < \frac{1}{p} + \epsilon \Leftrightarrow \frac{p}{1+\epsilon p} < x < \frac{p}{1-\epsilon p}.$$

Então, dado $\epsilon > 0$, $\epsilon < \frac{1}{p}$, $(p > 0)$, e tomando-se $I = \left]\frac{p}{1+\epsilon p}, \frac{p}{1-\epsilon p}\right[$,

$p \in I, x \in I \Rightarrow \frac{1}{p} - \epsilon < \frac{1}{x} < \frac{1}{p} + \epsilon$, logo, $f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua em $p > 0$. Analise o caso $p < 0$. (Veja como as coisas acontecem graficamente.)

5. Não. Para $\epsilon = \frac{1}{2}$ não existe $\delta > 0$ que torna verdadeira a afirmação "$\forall\, x \in D_f,\ 1 - \delta < x < 1 + \delta \Rightarrow f(1) - \frac{1}{2} < f(x) < f(1) + \frac{1}{2}$"

8. Seja p racional, então $f(p) = 1$; se f fosse contínua em p, pela conservação do sinal, existiria $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para $p - \delta < x < p + \delta$, que é impossível, pois em $]\, p - \delta, p + \delta\, [$ existem infinitos irracionais

9. ***a***) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Z}\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Z}\}$

c) $\{0\}$ (só é contínua em 0)

d) $\{-1, 1\}$

11. ***a***) $L = 4$; com $L = 4$, $f(x) = x + 2$ para todo x, que é contínua em $p = 2$

b) $L = -1$

12. ***a***) 4

b) -1

c) Não existe

d) 6

e) 1

f) Não existe

13. Como f é contínua em 2, para *todo* $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $\forall\, x \in D_f$

$$2 - \delta < x < 2 + \delta \Rightarrow 8 - \epsilon < f(x) < 8 + \epsilon.$$

Em particular, para $\epsilon = 1$ existirá $\delta > 0$ tal que $2 - \delta < x < 2 + \delta \Rightarrow 7 < f(x)$

15. Para se ter $|\, f(x) - f(p)\, | < \epsilon$ basta que se tenha $M\, |\, x - p\, | < \epsilon$. Tomando-se $\delta = \frac{\epsilon}{M}$, $|\, x - p\, | < \delta \Rightarrow |\, f(x) - f(p)\, | < \epsilon$

17. Para se ter $|\, f(x) - f(0)\, | < \epsilon$ (observe que $f(0) = 0$) basta que se tenha

$x^2 = |x - 0|^2 < \epsilon$ ou $|x - 0| < \sqrt{\epsilon}$. Tomando-se $\delta = \sqrt{\epsilon}$, $|x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \epsilon$

18. Observe que $|f(x)| \leq |x|$

20. Suponha que exista p, com $f(p) \neq 0$, e aplique a conservação do sinal

21. Aplique o Exercício 20 à função $h(x) = g(x) - f(x)$

23. ***a)*** $|f(x) - f(1)| = \left|x + \dfrac{1}{x} - 2\right| = \left|\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x}\right| = \left|\dfrac{x - 1}{x}\right| |x - 1|$

b) Observe que $\left|\dfrac{x - 1}{x}\right| \leqslant 1 + \dfrac{1}{|x|}$

c) Dado $\epsilon > 0$ e tomando-se $\delta = \text{mín}\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{\epsilon}{3}\right\}$

$$|x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(1)| < \epsilon$$

25. Verifique $|f(x) - f(1)| \leq 7|x - 1|$ para $x > \dfrac{1}{2}$ e proceda como no Exercício 23(*c*)

27. ***b)*** Dado $\epsilon > 0$ e tomando-se $\delta = \text{mín}\left\{|p|, \dfrac{\epsilon}{7p^2}\right\}$

$$|x - p| < \delta \Rightarrow |x^3 - p^3| < \epsilon$$

3.3

1. ***a)*** 4

b) 4

c) −7

d) 5

e) 50

f) 4

g) 2

h) $\sqrt[3]{-3}$

i) $\sqrt{5}$

j) 6

l) 0

m) 2

n) 2

o) $\frac{1}{2}$

p) −2

q) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$

r) $\frac{1}{3\sqrt[3]{9}}$

s) $\frac{1}{4\sqrt[4]{8}}$

t) $-\frac{1}{2}$

u) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

2. ***a)*** 12

b) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$

c) $\sqrt{2}$

3. Não é contínua em −1. Em 0 é.

4. ***a)*** $2x$

b) $4x + 1$

c) 0

d) $-3x^2 + 2$

e) $-\dfrac{1}{x^2}$

f) 3

5. $a)\ -\dfrac{3}{2}$ $\quad b)\ 0$ $\quad c)\ x^2$ $\quad d)\ 3x^2$ $\quad e)\ 0$ $\quad f)\ \dfrac{1}{3\sqrt[3]{p^2}}$ $\quad g)\ \dfrac{1}{4\sqrt[4]{p^3}}$ $\quad h)\ 0$

$i)\ \dfrac{3}{7}$ $\quad j)\ \sqrt{2}$ $\quad l)\ 3p^2$ $\quad m)\ 4p^3$ $\quad n)\ np^{n-1}$ $\quad o)\ \dfrac{1}{n\sqrt[n]{p^{n-1}}}$ $\quad p)\ -\dfrac{1}{4}$

$q)\ -\dfrac{1}{p^2}$ $\quad r)\ -\dfrac{2}{p^3}$ $\quad s)\ 2x-3$

6. Como $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + x) = 2$, tomando-se $\epsilon = \dfrac{1}{3}$...

8. Tomando-se $\epsilon = 1$, existe $\delta > 0, 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow \left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - 0\right| < 1$, logo

...

10. *Sugestão*: $|f(x) - L| < 1 \Rightarrow |f(x)| - |L| < 1$ (Por quê?)

11.
$$\lim_{x \to p} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |(f(x) - L) - 0| < \epsilon \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x \to p} [f(x) - L] = 0.$$

3.4

1. ***a)*** 1

b) −1

c) 1

d) 0

e) Não existe

f) Não existe

g) 1

***h*)** 1

***i*)** 2

***j*)** 2

***l*)** 1

***m*)** Não existe

2. É falsa

3. Não, pois *f* não está definida em 1

3.5

1. ***a*)** $\sqrt[3]{3}$

***b*)** $\frac{1}{4}$

***c*)** $\frac{1}{12}$

***d*)** $\frac{1}{8}$

2. ***a*)** 3

***b*)** 0

***c*)** 2

***d*)** $\frac{7}{3}$

3. ***a*)** L

***b*)** $3L$

***c*)** $2L$

***d*)** $-L$

3.6

1. 2

2. 3

3. 0. $\left(\textit{Sugestão}\text{: Verifique que } -|x|^3 \leqslant \frac{g(x)}{x} \leqslant |x|^3,\ x \neq 0. \right)$

4. ***b*)** 0

5. ***a*)** 0

***b*)** Não existe

6. ***a*)** 0. (Observe que $|g(x)| \leqslant \sqrt[4]{4}$)

***b*)** 0

7. ***b*)** 0

12. *Sugestão*: Para ($\Rightarrow$): $\frac{f(h)}{|h|} = \frac{f(h)}{h} \cdot \frac{h}{|h|}$ e $\left| \frac{h}{|h|} \right| \leqslant 1$

3.8

1. ***a*)** 1

***b*)** 1

***c*)** 3

***d*)** -1

***e*)** 0

***f*)** 3

***g*)** $\frac{3}{4}$

***h*)** 0

***i*)** 0

***j*)** 0

***l*)** $\frac{1}{2p}$

***m*)** $2p$

***n*)** 0

***o*)** -2

***p*)** 0

***q*)** $-\pi$

2. ***b*)** 0

3. ***a*)** $\cos p$

***b*)** $-\text{sen } p$

***c*)** $\sec^2 p$

***d*)** $\sec p \text{ tg } p$

CAPÍTULO 4

4.1

1. ***a*)** 0

***b*)** 0

***c*)** 5

***d*)** 2

***e*)** 2

***f*)** 2

***g*)** $\frac{1}{3}$

***h*)** $\frac{5}{4}$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x\,(1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2})} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = 0 \cdot 1 = 0$

***j*)** 0

***l*)** $\sqrt[3]{5}$

***m*)**0

***n*)** $\frac{1}{3}$

***o*)** 1

***p*)** 0

***q*)** 0

***r*)** 0

***s*)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+3})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{-2}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{3}{x}}} = 0 \cdot (-1) = 0$

2. $0. \ (f(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x)).$

3. ***a*)** $\frac{1}{2}$

***b*)** Aplique a definição de limite com $\epsilon = \frac{1}{4}$

4. ***a*)** 0

4.2

1. ***a*)** $+\infty$

***b*)** $-\infty$

***c*)** $-\infty$

***d*)** $+\infty$

***e*)** $\frac{5}{6}$

***f*)** $+\infty$

***g*)** 0

***h*)** 2

***i*)** $\frac{1}{3}$

***j*)** $-\frac{1}{2}$

***l*)** 0

***m*)** 0

2. Dado $\epsilon > 0$ e tomando-se $\delta = \epsilon^n$, $x > \delta \Rightarrow \sqrt[n]{x} > \epsilon$

3. ***a*)** 0

***b*)** $\frac{1}{2}$

***c*)** $+\infty$

***d*)** $-\infty$

***e*)** 0

***f*)** $+\infty$

***g*)** $\frac{1}{2}$

***h*)** $-\infty$

4. ***a*)** $-\infty$

***b*)** $-\infty$

***c*)** $+\infty$

***d*)** $-\infty$

***e*)** $+\infty$

***f*)** $-\infty$

***g*)** $-\infty$

***h*)** $+\infty$

***i*)** $+\infty$

***j*)** $-\infty$

***l*)** $+\infty$

***m*)** $+\infty$

***n*)** $+\infty$

***o*)** $+\infty$

***p*)** $-\infty$

***q*)** $+\infty$

***r*)** $-\infty$

***s*)** $-\infty$

9. Aplique a definição com $\epsilon = 1$

4.3

1. ***a*)** 2

***b*)** $+\infty$

***c*)** 1

***d*)** 0

***e*)** 2

***f*)** 0

***g*)** $+\infty$

***h*)** $\frac{3}{2}$

***i*)** $\frac{1}{1-t}$

3. $+\infty$

4. ***a***) $\frac{2}{3}$

   b) $\frac{1}{2}$

5. $\frac{1}{3}$

6. ***a***) $\frac{1}{3}$

   b) $\frac{1}{3}$

7. ***a***) $\frac{aT^2}{2}$

4.4

1. ***a***) 0 (Observe: $-|x| \leq f(x) \leq |x|$.)

2. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

4. 2

5. 2

6. Seja $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ e considere as sequências $a_n = \frac{1}{n\pi}$ e $b_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}$. Verifique que $\lim_{n \to +\infty} f(a_n) \neq \lim_{n \to +\infty} f(b_n)$.

CAPÍTULO 5

1. $f(-1) = -1$, $f(0) = 1$ e f é contínua em $[-1, 0]$

2. Verifique que $f(x) = x^3 - 4x + 2$ tem uma raiz real em cada intervalo $[-3, -2]$, $[0, 1]$ e $[1, 2]$

3. $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ e $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right]$