Verificação numérica dos resultados assintóticos do escoamento viscoelástico Giesekus para o problema da contração 4:1

Irineu Lopes Palhares Junior

IMD/UFRN,
irineu.palhares@imd.ufrn.br

CNMAC 2022 XLI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional

metrópole DIGITAL

Sumário

CNMAC 2022 XLI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional

As equações que governam um escoamento incompressível e isotérmico, equações do movimento e da continuidade, são dadas, respectivamente por

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\right) = -\nabla p + \beta\nabla^2\mathbf{v} + \nabla\cdot\mathbf{T}^p, \qquad \nabla\cdot\mathbf{v} = 0, \tag{1}$$

onde $\mathbf{v}$ é o campo de velocidade, p a pressão, $\mathbf{T}^p$ o tensor da contribuição viscoelástica, Re o número de Reynolds e β a razão entre as viscosidades do solvente e total.

CNMAC 2022 XLI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional

Além disso, como estamos trabalhando com um escoamento viscoelástico, precisamos da equação constitutiva para o tensor $\mathbf{T}^p$.
Assim, a equação constitutiva para o escoamento viscoelástico Giesekus, na sua forma adimensional, é dada por

$$\mathbf{T}^p + \mathrm{Wi}\left(\overset{\triangledown}{\mathbf{T}}{}^p + \frac{\kappa}{(1-\beta)}\left(\mathbf{T}^p\right)^2\right) = 2\left(1-\beta\right)\mathbf{D}, \tag{2}$$

onde $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T)$ é o tensor taxa de deformação e $\overset{\triangledown}{\mathbf{T}}{}^p = \frac{\partial\mathbf{T}^p}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{T}^p - (\nabla\mathbf{v})\,\mathbf{T}^p - \mathbf{T}^p\,(\nabla\mathbf{v})^T$ a derivada convectada superior de $\mathbf{T}^p$.

CNMAC 2022 XLI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional

Expansão natural do tensor

Uma outra forma de se calcular a contribuição viscoelástica do escoamento é por meio da formulação natural do tensor [1]. Para isto, decompomos o tensor $\mathbf{T}^p$ da seguinte forma:

$$\mathbf{T}^p = \frac{(1-\beta)}{Wi}\left(\lambda \mathbf{v}\mathbf{v}^T + \mu(\mathbf{v}\mathbf{w}^T + \mathbf{w}\mathbf{v}^T) + \nu \mathbf{w}\mathbf{w}^T - \mathbf{I}\right), \tag{3}$$

com $\mathbf{v} = (u, v)^T$ e $\mathbf{w} = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2}(-v, u)^T$.

CNMAC 2022 XLI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional

Na sequência, substituímos a equação (3) em (2), resultando no seguinte sistema de equações:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Wi}\left[\frac{\partial\lambda}{\partial \mathrm{t}} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\lambda + \frac{2}{|\mathbf{v}|^2}\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}}\left(\lambda \mathrm{u} + \mu\frac{\mathrm{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right) + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{t}}\left(\lambda \mathrm{v} - \mu\frac{\mathrm{u}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\right) + 2\mu\nabla\cdot\mathbf{w}\right] + \\
&\left(\lambda - \frac{1}{|\mathbf{v}|^2}\right) + \kappa\left[\left(\lambda - \frac{1}{|\mathbf{v}|^2}\right)^2|\mathbf{v}|^2 + \frac{\mu^2}{|\mathbf{v}|^2}\right] = 0, \\
&\mathrm{Wi}\left[\frac{\partial\mu}{\partial \mathrm{t}} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mu + \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}}\left(-\lambda \mathrm{v} + \nu\frac{\mathrm{v}}{|\mathbf{v}|^4}\right) + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{t}}\left(\mathrm{u}\lambda - \nu\frac{\mathrm{u}}{|\mathbf{v}|^4}\right) + \nu\nabla\cdot\mathbf{w}\right] + \mu \\
&+\kappa\left(\lambda|\mathbf{v}|^2 - 2 + \frac{\nu}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mu = 0, \\
&\mathrm{Wi}\left[\frac{\partial\nu}{\partial \mathrm{t}} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\nu - 2\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}}\left(\nu\frac{\mathrm{u}}{|\mathbf{v}|^2} + \mu \mathrm{v}\right) + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{t}}\left(\nu\frac{\mathrm{v}}{|\mathbf{v}|^2} - \mu \mathrm{u}\right)\right)\right] + (\nu - |\mathbf{v}|^2) \\
&+\kappa\left[(\nu - |\mathbf{v}|^2)^2\frac{1}{|\mathbf{v}|^2} + \mu^2|\mathbf{v}|^2\right] = 0.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

CNMAC 2022 XLI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional

A metodologia usada para discretizar as equações (1)–(4), é o método de diferenças finitas para malhas deslocadas (*staggered grid*). Nesta, utiliza-se uma decomposição do campo de velocidade $\mathbf{v}$, afim de desacoplar velocidade e pressão, baseado na decomposição de Helmholtz-Hodge

$$\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}} + \nabla\phi, \tag{5}$$

resultando em uma passo adicional ao método numérico que é a solução de uma equação de Poisson para a correção da velocidade. Para mais informações sobre a metodologia numérica usada neste trabalho, veja o seguinte artigo de Evans et al. [2].

De maneira resumida, apresentamos abaixo a sequência dos passos:

1. Cálculo de $\tilde{\mathbf{v}}^{n+1}$ através da equação do movimento;
2. Resolve a equação de Poisson para ϕ^{n+1}

$$\nabla^2 \phi^{n+1} = \nabla . \tilde{\mathbf{v}}^{n+1}; \tag{6}$$

3. Atualiza o campo de velocidade $\mathbf{v}^{n+1}$

$$\mathbf{v}^{n+1} = \tilde{\mathbf{v}}^{n+1} - \nabla \phi^{n+1}; \tag{7}$$

4. Estimativa da pressão, através da equação

$$p^{n+1} = p^{n} + \frac{Re}{\Delta t} \phi^{n+1}; \tag{8}$$

5. Cálculo de $(\mathbf{T}^{p})^{n+1}$ através das formulações CSF ou NSF.

CNMAC 2022 XLI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional

Parâmetros

Os parâmetros usados nas simulações foram:

- $\mathrm{Wi} = 1$
- $\beta = \frac{1}{2}$
- $Re = 0.01$
- $\Delta x_{min} = \Delta y_{min} = 10^{-4}$
- $\kappa = 0.25$

CNMAC 2022 XLI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional

A Figura 1 apresenta a geometria do escoamento em uma contração 4:1.

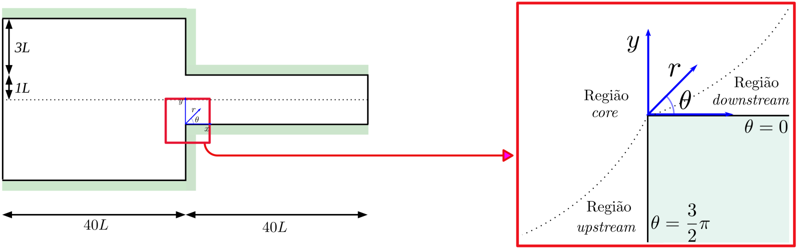


Figura 1: Geometria do escoamento.

A partir dos trabalhos de [3] e Moffatt [4], tem-se:

$$\psi = C_0 r^{n+1} f_0(\theta), \qquad p = C_0 \frac{\beta}{(n-1)} r^{n-1} \left((n+1)^2 f_0'(\theta) + f_0'''(\theta) \right), \tag{9}$$

onde $n = 0.54445$ e (r, θ) as coordenadas polares.

$$f_0(\theta) = \frac{A_0}{C_0} \cos((n+1)\theta) + \frac{B_0}{C_0} \sin((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) + \frac{D_0}{C_0} \sin((n-1)\theta), \tag{10}$$

com

$$\frac{A_0}{C_0} = 0.2030\cdots, \qquad \frac{B_0}{C_0} = 0.5430\cdots, \qquad \frac{D_0}{C_0} = -0.3738\cdots \tag{11}$$

CNMAC 2022 XLI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional

Resultados assintóticos: potências de r

Esse escoamento nos dá as seguintes estimativas, apresentadas na Tabela 1, para os campos de velocidade, pressão, gradiente de velocidade, tensor polimérico, variáveis naturais e espessura da camada limite [5, 6]:

Tabela 1: Resultados assintóticos para as propriedades do escoamento para quando $r \to 0$.

Model	$\mathbf{v}$	$\nabla\mathbf{v}$	$\mathbf{T}^p$	B.L. thickness	λ	μ	ν
PTT	$r^{0.5445}$	$r^{-0.4555}$	$r^{-0.3286}$	$r^{1.1518}$	$r^{-1.4176}$	$r^{-0.1268}$	$r^{1.1638}$
Giesekus			$r^{-0.2796}$	$r^{1.2278}$	$r^{-1.3686}$	$r^{0.0}$	$r^{1.3686}$

CNMAC 2022
XLI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional

Resultados assintóticos: equações na região *core*

Equação de camada limite para a formulação CSF:

$$u\frac{\partial T_{11}^p}{\partial x} + v\frac{\partial T_{11}^p}{\partial y} - 2\left(T_{11}^p\frac{\partial u}{\partial x} + T_{12}^p\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \tag{12}$$

$$u\frac{\partial T_{12}^p}{\partial x} + v\frac{\partial T_{12}^p}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}T_{11}^p - T_{22}^p\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{13}$$

$$u\frac{\partial T_{22}^p}{\partial x} + v\frac{\partial T_{22}^p}{\partial y} - 2\left(T_{22}^p\frac{\partial v}{\partial y} + T_{12}^p\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0. \tag{14}$$

Equação de camada limite para a formulação NSF:

$$(\mathbf{v}.\nabla)\,\lambda = 0, \tag{15}$$

$$(\mathbf{v}.\nabla)\,\mu = 0, \tag{16}$$

$$(\mathbf{v}.\nabla)\,\nu = 0. \tag{17}$$

CNMAC 2022 XLI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional

Equação de camada limite para a formulação CSF:

$$u\frac{\partial T_{11}^{p}}{\partial x}+v\frac{\partial T_{11}^{p}}{\partial y}-2\left(T_{11}^{p}\frac{\partial u}{\partial x}+T_{12}^{p}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\kappa}{(1-\beta)}\left(T_{11}^{p}\right)^{2}=0, \tag{18}$$

$$u\frac{\partial T_{12}^{p}}{\partial x}+v\frac{\partial T_{12}^{p}}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}T_{11}^{p}-T_{22}^{p}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\kappa}{(1-\beta)}T_{12}^{p}T_{11}^{p}=0, \tag{19}$$

$$u\frac{\partial T_{22}^{p}}{\partial x}+v\frac{\partial T_{22}^{p}}{\partial y}-2\left(T_{22}^{p}\frac{\partial v}{\partial y}+T_{12}^{p}\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\kappa}{(1-\beta)}\left(T_{12}^{p}\right)^{2}=\frac{(1-\beta)}{\mathrm{Wi}^{2}}(1-\kappa). \tag{20}$$

Equação de camada limite para a formulação NSF:

$$(\mathbf{v}.\nabla)\,\lambda+2\mu\frac{\partial\,(1/u)}{\partial y}+\frac{\kappa}{\mathrm{Wi}}\lambda^{2}u^{2}=0, \tag{21}$$

$$(\mathbf{v}.\nabla)\,\mu+\nu\frac{\partial\,(1/u)}{\partial y}+\frac{\kappa}{\mathrm{Wi}}\lambda\mu u^{2}, \tag{22}$$

$$(\mathbf{v}.\nabla)\,\nu+\frac{\kappa}{\mathrm{Wi}}\left(\mu^{2}-\frac{(1-\kappa)}{\kappa}\right)u^{2}=0. \tag{23}$$

CNMAC 2022 XLI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional

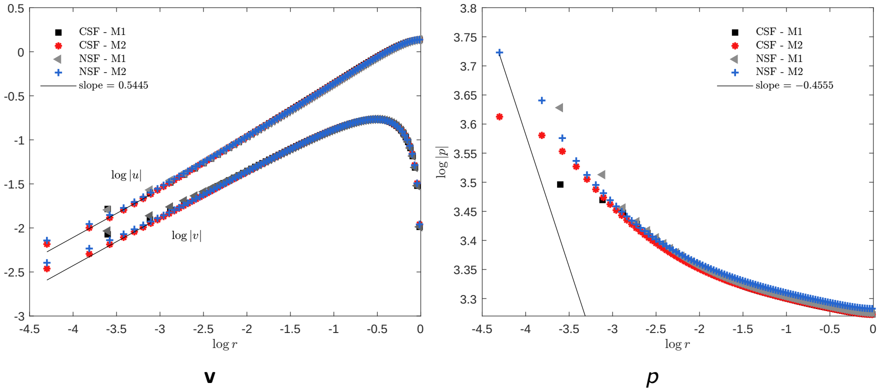
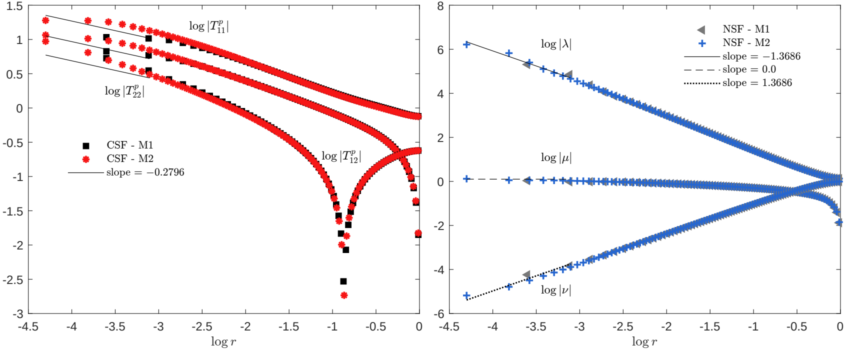


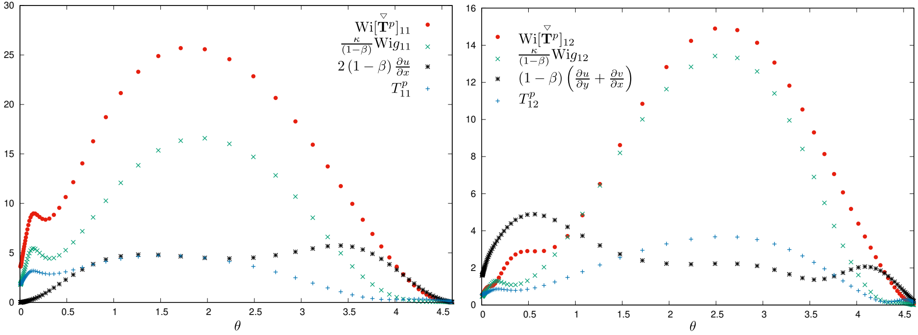
Figura 2: Verificação numérica do comportamento assintótico do campo de **v** e pressão *p*.



$\mathbf{T}^p$ $\qquad$ λ, μ e ν

Figura 3: Verificação numérica do comportamento assintótico para as formulações CSF e NSF.

CNMAC 2022
XLI Congresso Nacional
de Matemática Aplicada
e Computacional



T^p_{11} T^p_{12}

Figura 4: Estudo dos termos dominantes para a formulação CSF.

CNMAC 2022 XLI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional

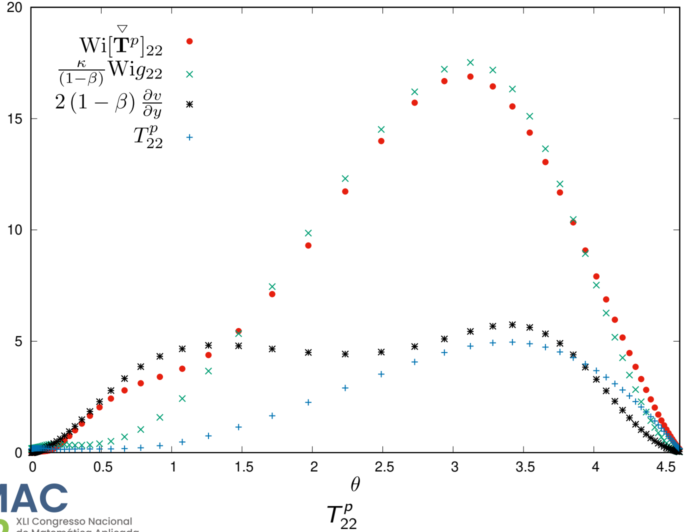


Figura 5: Estudo dos termos dominantes para a formulação CSF.

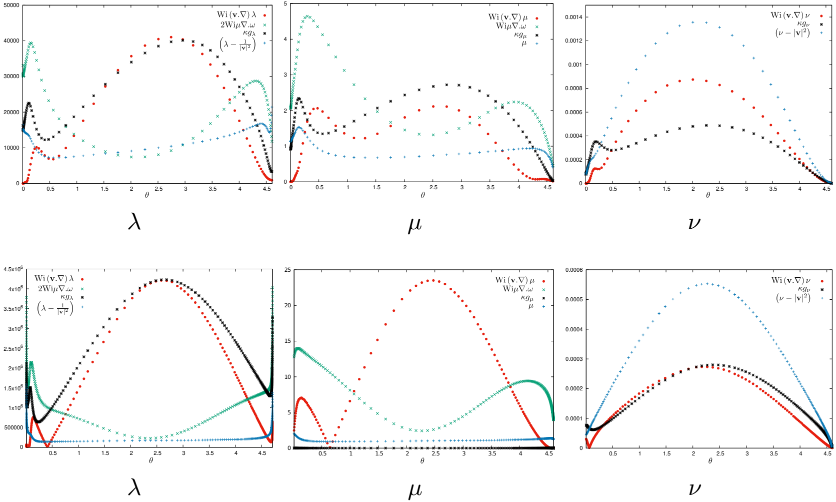


Figura 6: Comparação dos termos dominantes para a formulação NSF com dois métodos diferentes.

Considerações finais

Os resultados numéricos apresentados neste trabalho demonstraram boa concordância com os resultados assintóticos. Especialmente para as variáveis naturais e a pressão com o uso da formulação NSF.

Em adição, a verificação numérica realizada neste trabalho estabelece a conexão entre os resultados numéricos e assintóticos, viabilizando a combinação de metodologias. Portanto, o próximo passo deste trabalho será inserir o conhecimento assintóticas dentro do código numérico, visando a obtenção de resultados mais acurados.

CNMAC 2022 XLI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional

[1] M. Renardy, How to integrate the upper convected Maxwell (UCM) stresses near a singularity (and maybe elsewhere, too). J. Non-Newtonian Fluid Mech. 52(1) (1994) 91-95.

[2] J.D. Evans, H. L. França, C. M. Oishi, Application of the natural stress formulation for solving unsteady viscoelastic contraction flows, Journal of Computational Physics. 388 (2019) 462-489.

[3] W.R. Dean, P.E. Montagnon, On the steady motion of viscous liquid in a corner, Proc. Cambridge Philos. Soc. 45 (1949) 389-394.

[4] H.K. Moffatt, Viscous and resistive eddies near a sharp corner, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 18 (1964) 1-18.

[5] J. D. Evans. Re-entrant corner behaviour of the PTT fluid with a solvent viscosity. J. Non-Newtonian Fluid Mech., 165 (2010) 527-537.

[6] J. D. Evans. Re-entrant corner behaviour of the Giesekus fluid with a solvent viscosity. J. Non-Newtonian Fluid Mech., 165 (2010) 538-543.