非線性控制
Nonlinear Control

第一章作業

學　　號：P46071204

研 究 生：蔡 旻 哲

授課教授：楊 憲 東

Department of Aeronautics and Astronautics

National Cheng Kung University

Tainan, Taiwan, R.O.C.

中 華 民 國 109 年 9 月 25 日

目錄

第1題.

Question:

渾沌(chaos)的測試。試用 Matlab 求解非線性 ODE

$$\ddot{x}+0.1\dot{x}+x^3=5\cos t \tag{1.1}$$

測試兩組很接近的初始條件

(a) $x(0)=3,\ \dot{x}(0)=4$

(b) $x(0)=3.01,\ \dot{x}(0)=4.01$

比對兩組 $x(t)$ 對時間的響應圖，是否很接近?若把非線性項 x^3 改成線性項 x，情況又如何?

Answer:

考慮(1.1)，我們令 $x_1=x,\ x_2=\dot{x}$，則(1.1)可以被轉為以下狀態空間方程表示式

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -0.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}5\cos t+\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}x_1^3 \tag{1.2}$$

其中 2 組初始條件個別為:

Case 1:

$$x_1(0)=3,\ x_2(0)=4 \tag{1.3}$$

Case 2:

$$x_1(0)=3.01,\ x_2(0)=4.01 \tag{1.4}$$

將(1.3)、(1.4)個別代入(1.2)，並且透過 Matlab 中的 ODE45 數值積分求解 x_1，其結果如圖 1.1、圖 1.2

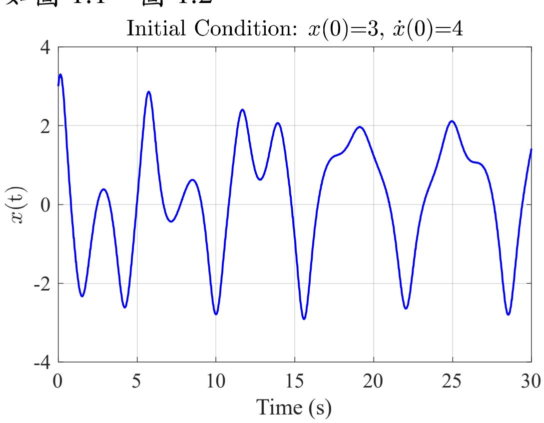

圖 1.1、Case 1 之非線性系統響應

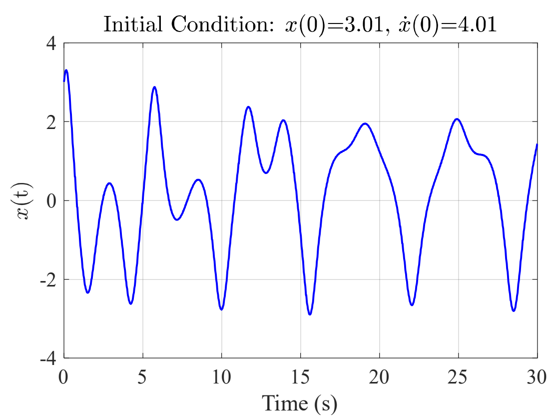

圖 1.2、Case 2 之非線性系統響應

並且比較兩種不同初始值的非線性系統響應如圖 1.3，從圖中可以看出初始值的差異，導致在時間 $t=9$ 秒、$t=27$ 秒時系統響應有所不同，但由於系統的初始值的差異非常的小，且非線性項對於整個系統的權重不高，因此大部分的響應皆還是重疊的。

然而若將(1.1)中的非線性項 x^3 改成線性項 x，則(1.1)被改寫為

$$\ddot{x}+0.1\dot{x}+x=5\cos t \tag{1.5}$$

利用同樣的方法令 $x_1=x,\ x_2=\dot{x}$，則(1.5)可以推導為以下線性狀態空間方程式

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -0.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}5\cos t \tag{1.6}$$

將(1.3)、(1.4)個別代入(1.6)，並且透過 Matlab 中的 ODE45 數值積分求解，其響應結果比較如圖 1.4 所示，從圖中可以看出由於(1.6)為線性系統，因此微小的初始值差異幾乎不會影響到系統完整的響應。

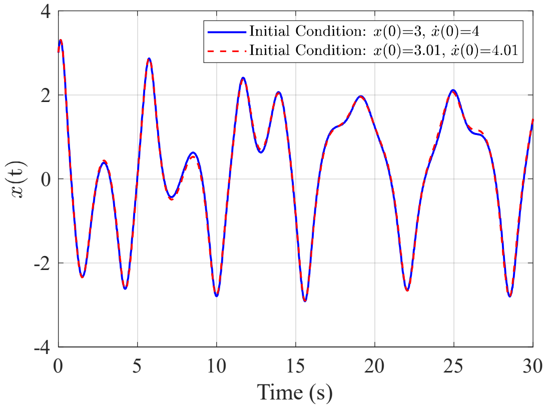

圖 1.3、非線性系統響應於不同初始值之比較

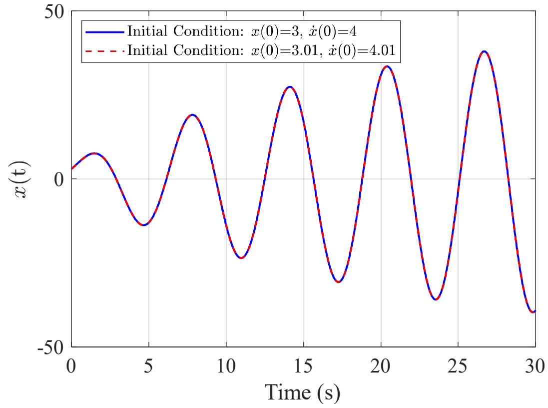

圖 1.4、線性系統響應於不同初始值之比較

第2題.

<u>Question</u>:

Lorentz 奇異吸子的測試:用 Matlab 求解下列非線性 ODE

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 10(y-x) \\ \dot{y} &= x(28-z)-y \\ \dot{z} &= xy-8z/3 \end{aligned} \tag{2.1}$$

選取初始位置$\left(x(0),y(0),z(0)\right)=(1,1,0)$,畫出軌跡點$\left(x(t),y(t),z(t)\right)$隨時間$t=0$連續變化到$t=T$所連成的曲線。比較三種終端時間:$T=100$, 1000, 10000 ,所得到的奇異吸子軌跡有何不同?如果將初始位置改成$\left(x(0),y(0),z(0)\right)=(10,1,0)$,其結果有何不同?

<u>Answer</u>:

考慮(2.1)之 Lorentz 系統,代入第一組初始值,並且針對不同的終端時間,透過 Matlab 中的 ODE45 數值積分求解其響應如圖 2.1,圖中終端時間$T=100$秒、$T=1000$秒、$T=10000$分別標示為綠線藍線、紅線、綠線,而由圖中看到可以儘管終端時間增加,系統的軌跡並不會重疊,而是持續的填滿特定的區域,這個即為奇異吸子的現象。

圖 2.2 為另一組初始值的系統軌跡響應,由圖中可以看到,儘管初始值有所差異,然而系統軌跡還是會隨著時間以類似的軌跡在纏繞,並且不會重疊,這樣的結果驗證了奇異吸子的特殊現象。

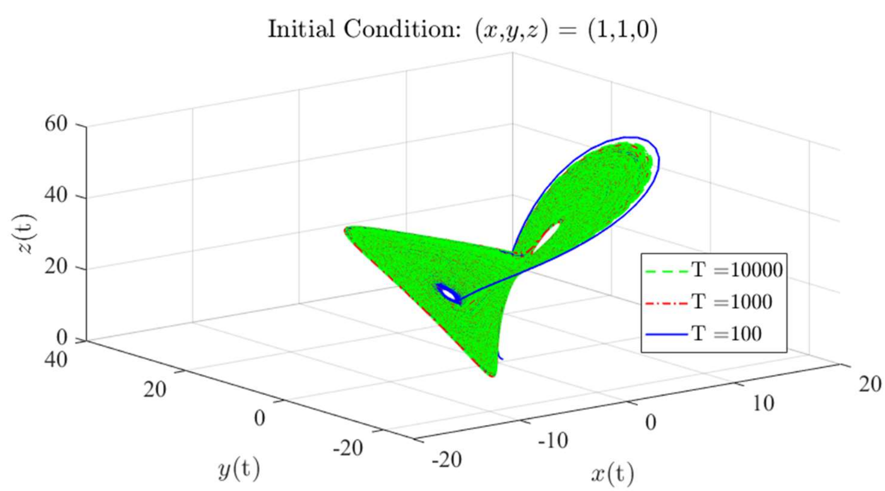

圖 2.1、Lorentz 系統於第一組初始值之奇異吸子軌跡

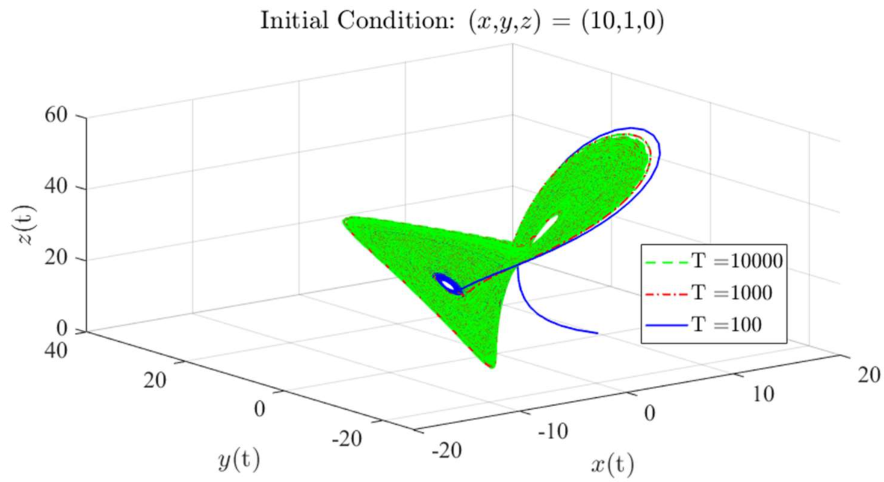

圖 2.2、Lorentz 系統於第二組初始值之奇異吸子軌跡

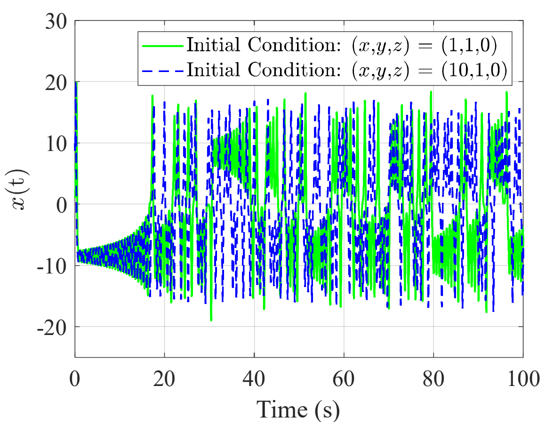

圖 2.3、Lorentz 系統之不同初始狀態響應比較

圖 2.3 針對 Lorentz 系統(2.1)中的狀態 $x(t)$，以不同初始值帶入系統做比較，從圖中結果可以看出，非線性系統的初始值差異會大大的影響系統隨時間之後的響應。

第3題.

<u>Question</u>:

霍普夫分岔(Hopf bifurcation)的測試: 考慮下列非線性 ODE

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - y + 2x\left(x^2+y^2\right)^2 \\ \dot{y} &= x + \mu y + 2y\left(x^2+y^2\right)^2\end{aligned} \tag{3.1}$$

其中μ是常數

(a) 將直角坐標(x,y)轉成極座標(r,θ)，並將上式用r，θ表示之。

(b) 任選三個不同的μ值: $\mu_1>0,\ \mu_2=0,\ \mu_3<0$，用 Matlab 畫出其相對應的軌跡圖$\left(x(t),y(t)\right)$。參考 1.6 節中第一個例題及圖 1.6.3 的討論。

(c) 根據極座標方程式及上述之軌跡變化，推論出分岔現象發生時之μ_c值。

(d) 比較$\mu>\mu_c$及$\mu<\mu_c$二種情形下，平衡點數目是否有改變，軌跡的幾何結構是否有改變?

<u>Answer</u>:

(a):

參考非線性系統(3.1)，為了將系統以極座標表示，令

$$r=\left(x^2+y^2\right)^{1/2} \tag{3.2}$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{3.3}$$

將(3.2)、(3.3)對時間做一次偏導數並且透過$r,\ \theta$代換如下

$$\begin{aligned}\dot{r} &= 1/2\left(x^2+y^2\right)^{-1/2}\left(2x\dot{x}+2y\dot{y}\right) \\ &= \left(x^2+y^2\right)^{-1/2}\left[x\left(\mu x-y+2x\left(x^2+y^2\right)^2\right)+y\left(x+\mu y+2y\left(x^2+y^2\right)^2\right)\right] \\ &= \left(x^2+y^2\right)^{-1/2}\left[\mu\left(x^2+y^2\right)+2\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2\right)^2\right] \\ &= r\left(\mu+2r^4\right)\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \left[1+\left(y/x\right)^2\right]^{-1}\left[\left(\dot{y}x-y\dot{x}\right)/x^2\right] \\ &= \left(x^2+y^2\right)^{-1}\left[x\left(x+\mu y+2y\left(x^2+y^2\right)^2\right)-y\left(\mu x-y+2x\left(x^2+y^2\right)^2\right)\right] \\ &= \left(x^2+y^2\right)^{-1}\left(x^2+y^2\right) \\ &= 1\end{aligned} \tag{3.5}$$

因此原始系統(3.1)可以重新以新的座標軸$r,\ \theta$表示為以下等效系統

$$\dot{r} = r\left(\mu + 2r^4\right) \\ \dot{\theta} = 1 \tag{3.6}$$

(b):

針對等效系統(3.6)，固定r的初始值$r_0 = 0.5$，並且選擇不同的μ值做系統測試，針對以下三種情形

Case 1: $\mu > 0$

參考(3.6)式，若$\mu > 0$則

$$\dot{r} > 0 \tag{3.7}$$

由此可知r會發散，如圖 3.1，其中$\mu = 0.1$。

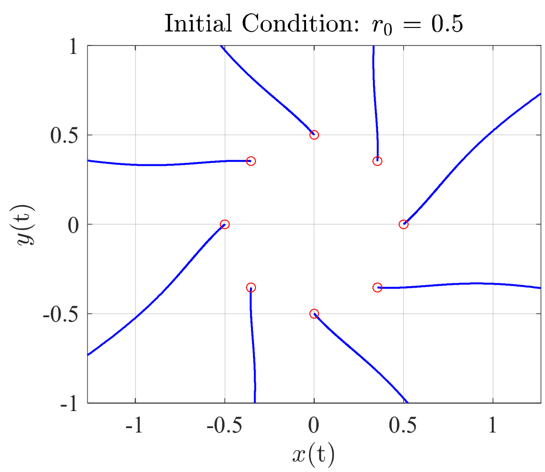

圖 3.1、$\mu > 0$之系統相平面軌跡

Case 2: $\mu = 0$

參考(3.6)式，若$\mu > 0$則

$$\dot{r} > 0 \tag{3.8}$$

由此可知r會發散，如圖 3.1，其中$\mu = 0$。

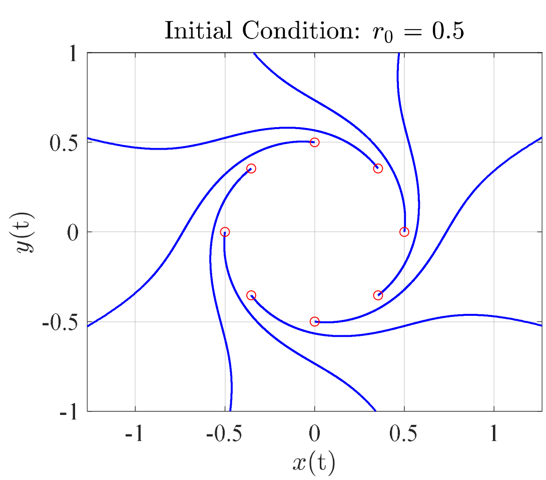

圖 3.2、$\mu = 0$之系統相平面軌跡

Case 3: $\mu < 0$

參考(3.6)式，若

$$\mu + 2r^4 = 0 \tag{3.9}$$

則

$$2r^4 = -\mu \tag{3.10}$$

因此

$$r = \sqrt[4]{-\mu/2} = r_c \tag{3.11}$$

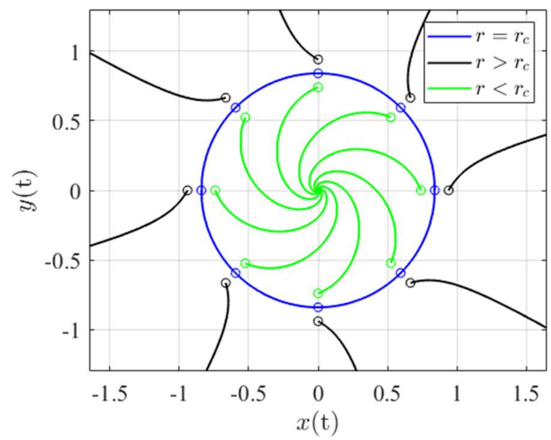

圖 3.3、$\mu < 0$ 之系統相平面軌跡

(c)、(d):

若

$$\mu + 2r^4 = 0 \tag{3.12}$$

則

$$\mu = -2r^4 = \mu_c \tag{3.13}$$

平衡點數目沒改變，但是系統的軌跡幾何結構改變了。

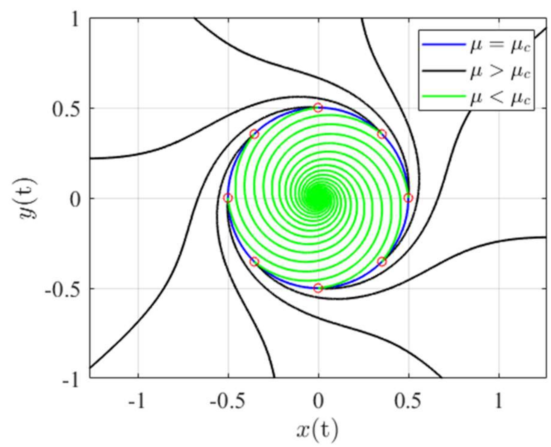

圖 3.4、固定 r 之系統相平面軌跡

Matlab Code

第一題

```
%%   Nonlinear Control HW1 - Q1
clc ; clear ; close all

A1 = [ 0 1 ; 0 -0.1 ] ;
A2 = [ 0 1 ; -1 -0.1 ] ;
B = [ 0 ; 1 ] ;
D = [ 0 ; -1 ] ;
dt = 0.001 ;
t_final = 30 ;
t = 0 : dt : t_final ;

%    =======    case 1 ============
x1_0_case1    = 3 ;
x2_0_case1 = 4 ;
X_0_case1 = [ x1_0_case1 ; x2_0_case1] ;
%    =======    case 2 ============
x1_0_case2    = 3.01 ;
x2_0_case2 = 4.01 ;
X_0_case2 = [ x1_0_case2 ; x2_0_case2] ;

func_nonlinear = @(t,X) Nonlinear_System_Function(t,X,A1,B,D) ;
[ t_1_n , X_1_n ] = ode45( func_nonlinear , t , X_0_case1) ;
[ t_2_n , X_2_n ] = ode45( func_nonlinear , t , X_0_case2) ;

func_linear = @(t,X) linear_System_Function(t,X,A2,B) ;
[ t_1_l , X_1_l ] = ode45( func_linear , t , X_0_case1) ;
[ t_2_l , X_2_l ] = ode45( func_linear , t , X_0_case2) ;

%% Plot
LW_1 = 1.4 ;
FS_ax = 16 ;
FS_leg = 12 ;

f(1) = figure() ;
```

```
plot(t,X_1_n(:,1),'b','LineWidth',LW_1) ;
xlabel('Time (s)')
ylabel('$x$(t)','Interpreter','latex')
title('Initial Condition: $x$(0)=3, $\dot x$(0)=4','Interpreter','latex')
ax(1) = gca ;
ax(1).YLim = [-4 4];
grid on

f(2) = figure() ;
plot(t,X_2_n(:,1),'b','LineWidth',LW_1) ;
xlabel('Time (s)')
ylabel('$x$(t)','Interpreter','latex')
title('Initial Condition: $x$(0)=3.01, $\dot x$(0)=4.01','Interpreter','latex')
ax(2) = gca ;
ax(2).YLim = [-4 4];
grid on

f(3) = figure() ;
plot(t,X_1_n(:,1),'b','LineWidth',LW_1) ; hold on ; plot(t,X_2_n(:,1),'r--','LineWidth',LW_1)
xlabel('Time (s)')
ylabel('$x$(t)','Interpreter','latex')
ax(3) = gca ;
hs(1)=legend({'Initial Condition: $x$(0)=3, $\dot x$(0)=4','Initial Condition: $x$(0)=3.01, $\dot
x$(0)=4.01'},'Interpreter','latex','Location','Northeast');
ax(3).YLim = [-4 4];
grid on

f(4) = figure() ;
plot(t,X_1_l(:,1),'b','LineWidth',LW_1) ; hold on ; plot(t,X_2_l(:,1),'r--','LineWidth',LW_1)
xlabel('Time (s)')
ylabel('$x$(t)','Interpreter','latex')
ax(4) = gca ;
hs(2)=legend({'Initial Condition: $x$(0)=3, $\dot x$(0)=4','Initial Condition: $x$(0)=3.01, $\dot
x$(0)=4.01'},'Interpreter','latex','Location','Northwest');
ax(4).YLim = [-50 50];
grid on

for i = 1:length(ax)
```

```
    set(ax(i),'FontSize',FS_ax,'FontName','Times New Roman')
    RemovePlotWhiteArea(ax(i)) ;
end

for i = 1:length(hs)
    set(hs(i),'FontSize',FS_leg)
end

function    dX = Nonlinear_System_Function(t,X,A1,B,D)
x1 = X(1) ;
dX = A1*X + B*5*cos(t) + D*(x1^3) ;
end

function    dX = linear_System_Function(t,X,A2,B)
dX = A2*X + B*5*cos(t)    ;
end
```

第二題

```
%%    Nonlinear Control HW1 - Q2
clc ; clear ; close all
dT = 0.01 ;
t_final_1 = 100 ; t_final_2 = 1000 ; t_final_3 = 10000 ;
t_1 = 0 : dT : t_final_1 ;
t_2 = 0 : dT : t_final_2 ;
t_3 = 0 : dT : t_final_3 ;
% ===== case 1 ===========
x_0_case1 = 1 ;
y_0_case1 = 1 ;
z_0_case1 = 0 ;
X_0_case1 = [ x_0_case1 ; y_0_case1 ; z_0_case1 ] ;
% ===== case 2 ===========
x_0_case2 = 10 ;
y_0_case2 = 1 ;
z_0_case2 = 0 ;
X_0_case2 = [ x_0_case2 ; y_0_case2 ; z_0_case2 ] ;



[t_1_case1 , X1_case1] = ode45(@ Lorentz_System , t_1 , X_0_case1 ) ;
```

```
[t_2_case1 , X2_case1] = ode45(@ Lorentz_System , t_2 , X_0_case1 ) ;
[t_3_case1 , X3_case1] = ode45(@ Lorentz_System , t_3 , X_0_case1 ) ;

[t_1_case2 , X1_case2] = ode45(@ Lorentz_System , t_1 , X_0_case2 ) ;
[t_2_case2 , X2_case2] = ode45(@ Lorentz_System , t_2 , X_0_case2 ) ;
[t_3_case2 , X3_case2] = ode45(@ Lorentz_System , t_3 , X_0_case2 ) ;

LW_1 = 1.3 ;
LW_2 = 1.3 ;
FS_ax = 16.5 ;
FS_leg = 15 ;

f(1) = figure('Units','Normalized','Position',[0.29,0.29,0.477,0.415]) ;
plot3(X3_case1(:,1),X3_case1(:,2),X3_case1(:,3),'g--','LineWidth',LW_1) ;
hold on ;
plot3(X2_case1(:,1),X2_case1(:,2),X2_case1(:,3),'r-.','LineWidth',LW_1) ;
plot3(X1_case1(:,1),X1_case1(:,2),X1_case1(:,3),'b','LineWidth',LW_1) ;
xlabel('$x$(t)','Interpreter','latex')
ylabel('$y$(t)','Interpreter','latex')
zlabel('$z$(t)','Interpreter','latex')
title('Initial Condition: ($x$,$y$,$z$) = (1,1,0)','Interpreter','latex')
ax(1) = gca ;
hs(1) = legend(['T =',num2str(t_final_3)],['T =',num2str(t_final_2)],['T
=',num2str(t_final_1)],'Interpreter','latex') ;
grid on

f(2) = figure('Units','Normalized','Position',[0.29,0.29,0.477,0.415]) ;
plot3(X3_case2(:,1),X3_case2(:,2),X3_case2(:,3),'g--','LineWidth',LW_1) ;
hold on ;
plot3(X2_case2(:,1),X2_case2(:,2),X2_case2(:,3),'r-.','LineWidth',LW_1) ;
plot3(X1_case2(:,1),X1_case2(:,2),X1_case2(:,3),'b','LineWidth',LW_1) ;
xlabel('$x$(t)','Interpreter','latex')
ylabel('$y$(t)','Interpreter','latex')
zlabel('$z$(t)','Interpreter','latex')
title('Initial Condition: ($x$,$y$,$z$) = (10,1,0)','Interpreter','latex')
ax(2) = gca ;
hs(2) = legend(['T =',num2str(t_final_3)],['T =',num2str(t_final_2)],['T
=',num2str(t_final_1)],'Interpreter','latex') ;
```

```
grid on

f(3) = figure ;
plot(t_1_case1,X1_case1(:,1),'g','LineWidth',LW_2) ; hold on ;
plot(t_1_case2,X1_case2(:,1),'b--','LineWidth',LW_2)
xlabel('Time (s)')
ylabel('$x$(t)','Interpreter','latex')
ax(3) = gca ;
legend({'Initial Condition: ($x$,$y$,$z$) = (1,1,0)','Initial Condition: ($x$,$y$,$z$) =
(10,1,0)'},'Interpreter','latex','Location','Northeast');
ax(3).YLim = [-25 30];
grid on

for i = 1:length(ax)
    set(ax(i),'FontSize',FS_ax,'FontName','Times New Roman')
end

for i = 1:length(hs)
set(hs(i),'Position',[0.70,0.29,0.15,0.21],'Fontsize',FS_leg)
end

function dX = Lorentz_System(t,X)
x = X(1) ; y = X(2) ; z = X(3) ;
dx = 10*(y-x) ;
dy = x*(28-z)-y ;
dz = x*y - 8*z/3 ;
dX = [ dx ; dy ; dz ] ;
end
```

第三題

```
%%    Nonlinear Control HW1 - Q3
clc ; clear ; close all
dt= 0.001 ;
t_final = 100 ;
t = 0 : dt : t_final ;
number = 8 ;
```

```
% ======= case 1 (u>0) =========
u_case1_1 = 1 ;
r0_case1_1 = 0.5 ;

LW_1 = 1.4 ;
FS_ax = 16 ;
FS_leg = 12 ;
f(1) = figure ;
for i = 1 : number
    theta0 = 2*pi/number*i ;
    X0 = [ r0_case1_1 ; theta0] ;
    [ t_1 , X ] = RK4(@ (t,X) Hopf_bifurcation_system(t , X , u_case1_1) , t , X0 ) ;
    x = X(:,1).*cos(X(:,2)) ;
    y = X(:,1).*sin(X(:,2)) ;

    plot(x,y,'b','LineWidth',LW_1) ;
    hold on ;
    plot(x(1),y(1),'ro') ;
end
xlabel('$x$(t)','Interpreter','latex')
ylabel('$y$(t)','Interpreter','latex')
title('Initial Condition: $r_0$ = 0.5','Interpreter','latex')
axis([-1 1 -1 1])
axis equal
grid on
ax(1) = gca ;
ax(1).YTick = [-1 -0.5 0 0.5 1] ;
set(ax(1),'FontSize',FS_ax,'FontName','Times New Roman')

% ======= case 2 (u=0) =========
u_case2_1 = 0 ;

f(2) = figure ;
for i = 1 : number
    theta0 = 2*pi/number*i ;
    X0 = [ r0_case1_1 ; theta0] ;
    [ t_1 , X ] = RK4(@ (t,X) Hopf_bifurcation_system(t , X , u_case2_1) , t , X0 ) ;
    x = X(:,1).*cos(X(:,2)) ;
```

```
    y = X(:,1).*sin(X(:,2)) ;

    plot(x,y,'b','LineWidth',LW_1) ;
    hold on ;
    plot(x(1),y(1),'ro') ;
end
xlabel('$x$(t)','Interpreter','latex')
ylabel('$y$(t)','Interpreter','latex')
title('Initial Condition: $r_0$ = 0.5','Interpreter','latex')
axis([-1 1 -1 1])
axis equal
grid on
ax(2) = gca ;
ax(2).YTick = [-1 -0.5 0 0.5 1] ;
set(ax(2),'FontSize',FS_ax,'FontName','Times New Roman')

% ======= case 3 (u<0) =========
u_case3_1 = -1 ;
r0_case3_1 = (-u_case3_1/2)^(1/4) ;
r0_case3_2 = (-u_case3_1/2)^(1/4)+0.1 ;
r0_case3_3 = (-u_case3_1/2)^(1/4) -0.1 ;

  f(3) = figure ;
for i = 1 : number
    theta0 = 2*pi/number*i ;
    X0 = [ r0_case3_1 ; theta0] ;
    [ t_1 , X ] = RK4(@ (t,X) Hopf_bifurcation_system(t , X , u_case3_1) , t , X0 ) ;
    x = X(:,1).*cos(X(:,2)) ;
    y = X(:,1).*sin(X(:,2)) ;

   p1 =    plot(x,y,'b','LineWidth',LW_1) ;
    hold on ;
    plot(x(1),y(1),'bo') ;
end

for i = 1 : number
    theta0 = 2*pi/number*i ;
    X0 = [ r0_case3_2 ; theta0] ;
```

```
        [ t_1 , X ] = RK4(@ (t,X) Hopf_bifurcation_system(t , X , u_case3_1) , t , X0 ) ;
        x = X(:,1).*cos(X(:,2)) ;
        y = X(:,1).*sin(X(:,2)) ;

        p2 = plot(x,y,'k','LineWidth',LW_1) ;
        hold on ;
        plot(x(1),y(1),'ko') ;
end

for i = 1 : number
        theta0 = 2*pi/number*i ;
        X0 = [ r0_case3_3 ; theta0] ;
        [ t_1 , X ] = RK4(@ (t,X) Hopf_bifurcation_system(t , X , u_case3_1) , t , X0 ) ;
        x = X(:,1).*cos(X(:,2)) ;
        y = X(:,1).*sin(X(:,2)) ;

        p3 = plot(x,y,'g','LineWidth',LW_1) ;
        hold on ;
        plot(x(1),y(1),'go') ;
end
xlabel('$x$(t)','Interpreter','latex')
ylabel('$y$(t)','Interpreter','latex')
legend([p1 p2 p3 ],{'$r=r_c$','$r>r_c$','$r<r_c$'},'Interpreter','latex')
axis([-1.3 1.3 -1.3 1.3])
axis equal
grid on
ax(3) = gca ;
ax(3).YTick = [-1 -0.5 0 0.5 1] ;
set(ax(3),'FontSize',FS_ax,'FontName','Times New Roman')

% ======= case 4 (u<0) =========
r0_case4_1 = 0.5 ;
u_case4_1 = -2*(r0_case4_1)^4    ;
u_case4_2 = -2*(r0_case4_1)^4 + 0.1 ;
u_case4_3 = -2*(r0_case4_1)^4 - 0.1 ;

  f(4) = figure ;
for i = 1 : number
```

```
    theta0 = 2*pi/number*i ;
    X0 = [ r0_case4_1 ; theta0] ;
    [ t_1 , X ] = RK4(@ (t,X) Hopf_bifurcation_system(t , X , u_case4_1) , t , X0 ) ;
    x = X(:,1).*cos(X(:,2)) ;
    y = X(:,1).*sin(X(:,2)) ;

   p1 =   plot(x,y,'b','LineWidth',LW_1) ;
    hold on ;
    plot(x(1),y(1),'ro') ;
end

for i = 1 : number
    theta0 = 2*pi/number*i ;
    X0 = [ r0_case4_1 ; theta0] ;
    [ t_1 , X ] = RK4(@ (t,X) Hopf_bifurcation_system(t , X , u_case4_2) , t , X0 ) ;
    x = X(:,1).*cos(X(:,2)) ;
    y = X(:,1).*sin(X(:,2)) ;

    p2 = plot(x,y,'k','LineWidth',LW_1) ;
    hold on ;
    plot(x(1),y(1),'ro') ;
end

for i = 1 : number
    theta0 = 2*pi/number*i ;
    X0 = [ r0_case4_1 ; theta0] ;
    [ t_1 , X ] = RK4(@ (t,X) Hopf_bifurcation_system(t , X , u_case4_3) , t , X0 ) ;
    x = X(:,1).*cos(X(:,2)) ;
    y = X(:,1).*sin(X(:,2)) ;

    p3 = plot(x,y,'g','LineWidth',LW_1) ;
    hold on ;
    plot(x(1),y(1),'ro') ;
end
xlabel('$x$(t)','Interpreter','latex')
ylabel('$y$(t)','Interpreter','latex')
legend([p1 p2 p3 ],{'$\mu=\mu_c$','$\mu>\mu_c$','$\mu<\mu_c$'},'Interpreter','latex')
axis([-1 1 -1 1])
```

```
axis equal
grid on
ax(4) = gca ;
ax(4).YTick = [-1 -0.5 0 0.5 1] ;
set(ax(4),'FontSize',FS_ax,'FontName','Times New Roman')

function dX = Hopf_bifurcation_system(t , X , u_case1_1)
r = X(1) ;
dr = r*(u_case1_1 + 2*(r^4)) ;
dtheta = 1 ;
dX = [dr ; dtheta] ;
end

function [t,y] = RK4(ODESet,TimeSpan,InitialValue,varargin)
% 2019          V1
% 2020/08/25 V2
%... User Given
y0 = InitialValue;
h    = TimeSpan(2)-TimeSpan(1);
%... RK4
t = TimeSpan;
n = size(y0,1);
y = zeros(n,length(t));
y(:,1) = y0;
for i = 1:length(t)-1
    yi = y(:,i);
    ti = t(i);
    f1 = ODESet(ti,yi);
    f2 = ODESet(ti+0.5*h,yi+0.5*h*f1);
    f3 = ODESet(ti+0.5*h,yi+0.5*h*f2);
    f4 = ODESet(ti+h,yi+h*f3);
    y(:,i+1) = yi + h*( 1/6*f1 + 1/3*f2 + 1/3*f3 + 1/6*f4 );
end
y = y.';
end
```