

Chapter 6

回授線性化 (Feedback Linearization)

從本章開始我們將從《非線性系統分析》進入《非線性系統控制》的範疇。《非線性系統分析》幫助我們了解系統的特性，而《非線性系統控制》則是要進一步透過人為控制力的介入，去改變非線性系統的行為，使之呈現我們所期望的特性。在眾多非線性控制的方法中，我們將先討論『回授線性化』(feedback linearization)，因為它是從線性控制過渡到非線性控制的橋樑。『回授線性化』顧名思義即是透過狀態的回授，而將非線性系統加以線性化。也就是說，我們將『線性化』視為控制的目標，然後尋求一種特殊的控制法則，希望在其控制之下，閉迴路非線性系統的行為變成和線性系統一樣。我們以前所學的線性化稱為展開型的線性化，與本章所要介紹的回授型線性化不一樣：

- (1) **展開型線性化**: 依據某一操作點(平衡點)，將系統在其附近展開，而得到一階的線性近似，例如泰勒級數展開。此種線性化是近似的，且和控制無關。
- (2) **回授型線性化**: 採用訊號回授和補償的方式將原非線性系統化成「等義」的線性系統。控制的目的是有很多，如命令追蹤、雜訊排除等等，但這裡回授控制的目的則是為了線性化。亦即透過控制的手段，將一非線性系統控制成等義的線性系統。

一旦非線性系統被控制成等義的線性系統後，即可加入線性控制理論中既有的各種控制方法，使非線性系統呈現所期望的動態行為。所以回授線性化實際上是線性與非線性系統間之橋樑，經由這個橋樑，非線性系統的分析與控制可用線性系統的方法來加以處理。本章係針對回授線性化做討論，此主題又分成兩大部分：(A) 輸入-狀態(input-state)回授線性化；(B) 輸入-輸出(input-output)回授線性化。

6.1 輸入-狀態(input-state)回授線性化

考慮一非線性系統

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (6.1.1a)$$

$$y = h(x) \quad (6.1.1b)$$

其中 x 稱為系統狀態， u 為控制輸入， y 為系統輸出。回授線性化的手段是控制輸入 u ，對象則可以是狀態 x 或輸出 y 。若藉由控制輸入 u 而將狀態 x 加以線性化，此稱為輸入與狀態之間的回授線性化；在另一方面，若藉由控制輸入 u 而將輸出 y 加以線性化，則稱為輸入與輸出之間的回授線性化。本節將透過幾個範例，先介紹輸入-狀態回授線性化的一些基本觀念，下一節再討論輸入-輸出回授線性化。

輸入-狀態回授線性化是討論(6.1.1a)式中，控制輸入 u 與狀態 x 之間的線性化問題，與(6.1.1b)式中的輸出 y 無關。線性化的過程主要包含2個步驟：

- (1) 尋求狀態轉換 $z = \phi(x)$ 與控制轉換 $u = u(x, v)$ ，使得在新的狀態變數 z 與新的控制 v 的作用下，(6.1.1a)式可轉換成線性方程式

$$\dot{z} = Az + Bu \quad (6.1.2)$$

- (2) 針對 $\dot{z} = Az + bv$ 設計線性控制律 v 。

在討論一般性的定理前，我們先看一個例題以瞭解其背後的意義。

例題 6.1.1

考慮二階非線性方程式

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1 + ax_2 + \sin x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \cos x_1 + u \cos(2x_1)\end{aligned}\quad (6.1.3)$$

我們將尋求狀態轉換 $z = \phi(x)$ 與控制轉換 $u = u(x, v)$ ，而將(6.1.3)式化成(6.1.2)式的形式。先選取如下的座標轉換：

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = ax_2 + \sin x_1 \quad (6.1.4)$$

則在新的座標 (z_1, z_2) 下，(6.1.3)式轉換成

$$\dot{z}_1 = -2z_1 + z_2 \quad (6.1.5a)$$

$$\dot{z}_2 = -2z_1 \cos z_1 + \cos z_1 \sin z_1 + au \cos(2z_1) \quad (6.1.5b)$$

可以看到(6.1.5a)式已是線性方程式，而所有的非線性項現在全被移轉到(6.1.5b)式，且原點 $(0,0)$ 仍為平衡點。(6.1.5b)式的線性化則是透過控制轉換 $u = u(z, v)$ 來完成，最簡單的方法是令(6.1.5b)式的右邊等於一個新的控制變數 v ，而求解出 u 與 v 的關係為

$$u = \frac{1}{a \cos(2z_1)} (v - \cos z_1 \sin z_1 + 2z_1 \cos z_1) \quad (6.1.6)$$

則在座標轉換(6.1.4)與控制轉換(6.1.6)的同時作用下，(6.1.3)式變成一簡單的線性系統：

$$\dot{z}_1 = -2z_1 + z_2, \quad \dot{z}_2 = v \quad (6.1.7)$$

在(6.1.6)式中的控制 u 含有三個分量，其中的第二及第三分量屬於前授分量，用以抵銷(6.1.5b)式右邊的非線性動態，而第一分量 v 則用以控制剩下的線性動態，如(6.1.7)所示。

我們注意到(6.1.7)式已經是標準的線性系統，可以利用線性控制理論中的極點指定法來設計控制律 v ：

$$v = -k_1 z_1 - k_2 z_2 \quad (6.1.8)$$

其中增益 k_1 、 k_2 的值由極點的位置來決定。若取

$$v = -2z_2 \Rightarrow k_1 = 0, \quad k_2 = 2$$

則閉迴路系統為

$$\dot{z}_1 = -2z_1 + z_2, \quad \dot{z}_2 = -2z_2 \quad (6.1.9)$$

這時(6.1.9)式的兩個極點(即特徵值)均落在 -2 的地方。將 $v = -k_1 z_1 - k_2 z_2$ 代入(6.1.6)式，得到回授線性化所需要的整合控制律為

$$u(x) = \frac{1}{\cos(2x_1)} (-2ax_2 - 2\sin x_1 - \cos x_1 \sin x_2 + 2x_1 \cos x_1) \quad (6.1.10)$$

□

從以上例題，我們獲得下面幾點認識：

- (1) 回授線性化的成功與否決定於控制訊號 u 巧妙的選擇。
- (2) 狀態變數 x 必須精確地被量到，不能有任何誤差，否則由(6.1.10)式所決定的控制力矩即無法將系統的非線性動態完全抵消掉。
- (3) 系統參數如係數 a 必須確切已知，否則 u 中的前授分量將無法完全抵銷(6.1.5b)式右邊的非線性項。這一事實說明當系統具有不確定動態或未知參數時，回授線性化控制將無法發揮預期的功能。

同時以上例題展示了回授線性化過程中的三個主要步驟：

- 尋求座標轉換 $z = z(x)$ ，使得在新座標 z 之下，系統的非線性動態被集中到最後一個方程式上，如(6.1.5b)式所示。
- 尋求控制轉換 $u = u(z, v)$ ，使得在新座標 z 及新控制 v 的作用下，非線性系統轉換成一等義的線性系統，如(6.1.7)式所示。
- 針對線性化的系統設計狀態回授控制律 $v = -Kz$ 。

圖 6.1.1 展示回授線性化的內外層控制迴路。內層迴路透過座標轉換與控制轉換將非線性系統轉換成等義的線性系統，外層迴路則進行轉換後的線性系統的狀態回授控制。

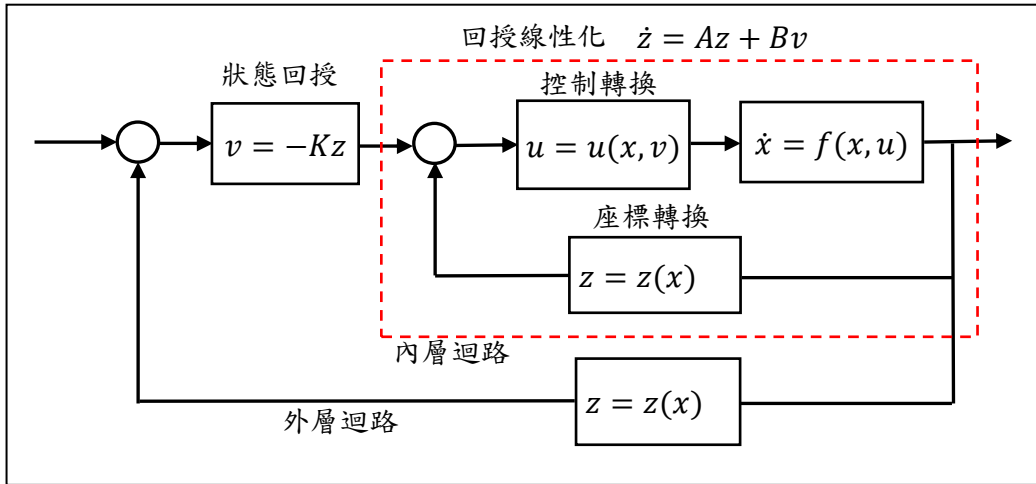


圖 6.1.1 回授線性化的內外層控制迴路。內層迴路透過座標轉換與控制轉換將非線性系統轉換成等義的線性系統，外層迴路則進行線性系統的狀態回授控制。

對於任意 n 階的非線性系統 $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ ，以上的三個步驟可用數學符號表示如下：

- 步驟 1: 尋求座標轉換 $z = z(x)$

$$z = \Phi(x) \Rightarrow \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} \quad (6.1.11)$$

使得在新座標 z 之下，系統的非線性動態被集中到最後一個方程式上

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a(z) + b(z)u \end{bmatrix} \quad (6.1.12)$$

可以看到前面的 $n - 1$ 個方程式已被線性化，非線性項僅出現在最後一個方程式之中。

- 步驟 2: 尋求控制轉換 $u = u(z, v)$

在(6.1.12)式中，令新的控制變數為

$$v = a(z) + b(z)u \Rightarrow u = (v - a(z))/b(z) \quad (6.1.13)$$

則在新控制 v 的作用下，(6.1.12)式化成線性方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v = A_c z + B_c v \quad (6.1.14)$$

- 步驟 3: 進行線性系統的狀態回授控制

$$v = -Kz = -(k_1 z_1 + k_2 z_2 + \cdots + k_n z_n) \quad (6.1.15)$$

代入(6.1.14)式，得到閉迴路系統的狀態方程式

$$\dot{z} = (A_c - B_c K)z \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & \cdots & -k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} \quad (6.1.16)$$

其中控制增益 k_i 的選擇是要使得閉迴路矩陣的特徵值落入指定的位置。

- 步驟 4: 決定回授線性化控制律

將(6.1.15)式代入(6.1.13)式，得到回授線性化控制的最後形式

$$u(z) = (-Kz - a(z))/b(z) \xrightarrow{z=\Phi(x)} u(x)$$

其中的 $-a(z)$ 屬於前授分量，用以抵銷非線性動態，而 $v = -Kz$ 是回授分量，則用以控制剩下的線性動態。

審視上述的幾個步驟，我們發現最關鍵的步驟在於決定座標轉換函數 $z = \Phi(x)$ ，一旦此函數可以被找到，代表原先的非線性系統可被回授線性化。然而是不是所有的非線性系統都可被回授線性化？本章後續的章節要繼續討論剩下的兩個問題：

- (1) 非線性系統要滿足怎樣的條件，才能透過狀態回授而加以線性化？
- (2) 如果一個非線性系統滿足可被回授線性化的條件，則其相對應的座標轉換式 $z = \Phi(x)$ 應如何決定？

6.2 輸入-輸出(input-output)回授線性化

當我們比較關心輸入與輸出間之關係時，此時內部狀態 x 的線性化不是重點，重要的是輸入與輸出間之線性化。考慮下列輸出訊號的追蹤問題：

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (6.2.1a)$$

$$y = h(x) \quad (6.2.1b)$$

控制的目的是要設計控制律 u 使得輸出 $y(t)$ 趨近於某一目標訊號 $y_d(t)$ ，而且保持狀態 x 為有界。這時候我們所考量的重點將不是狀態 x 的線性化，而是輸出 y 的線性化。所以輸入-輸出回授線性化的控制設計問題，一方面是要建立輸入 u 與輸出 y 之間的線性關係，另一方面是要在此線性關係上，使得輸出 y 追蹤某一目標訊號 y_d 。

首先透過下面的簡單範例，我們來說明輸入-輸出回授線性化的基本觀念。考慮三階非線性系統

$$\dot{x}_1 = \sin x_2 + (x_2 + 1)x_3, \dot{x}_2 = x_1^5 + x_3, \dot{x}_3 = x_1^2 + u \quad (6.2.2a)$$

$$y = x_1 \quad (6.2.2b)$$

為了找出 u 與 y 之間的關係，我們注意到輸出 y 出現在(6.2.2b)式中，但在此式中卻看不到輸入 u 。為了引出 u 的角色，取(6.2.2b)式對時間的一次微分，得到

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = \sin x_2 + (x_2 + 1)x_3 \quad (6.2.3)$$

在上式中，仍未出現 u 。因此再對時間微分一次，得到

$$\ddot{y} = (x_2 + 1)u + f_1(x) \quad (6.2.4)$$

這時候控制訊號 u 出現了，其中 $f_1(x)$ 為狀態 x 的函數，定義為

$$f_1(x) = (x_1^5 + x_3)(x_3 + \cos x_2) + (x_2 + 1)x_1^2 \quad (6.2.5)$$

在(6.2.4)中，若定義新的控制變數 v 為

$$v = (x_2 + 1)u + f_1(x) \Rightarrow u = \frac{1}{x_2 + 1}(v - f_1) \quad (6.2.6)$$

則在新控制 v 的作用下，(6.2.4)式化成線性方程式

$$\ddot{y} = v \quad (6.2.7)$$

為了達到訊號追蹤的目標： $y \rightarrow y_d$ ，可以選取控制律 v 如下的形式

$$v = \ddot{y}_d - k_1 \dot{e} - k_2 e \quad (6.2.8)$$

其中 e 為訊號追蹤誤差：

$$e = y(t) - y_d(t) \quad (6.2.9)$$

(6.2.8)式中 \ddot{y}_d 為用以追蹤輸出命令的前授項，而 $-k_1 \dot{e} - k_2 e$ 為用以穩定追蹤誤差的回授項。將(6.2.8)式的 v 代入(6.2.7)式，化簡得

$$\ddot{e} + k_2 \dot{e} + k_1 e = 0 \quad (6.2.10)$$

適當選擇 k_1 、 k_2 增益值，使得二個特徵值均落在左半平面，如此即可保證追蹤誤差趨近於零： $e(t) \rightarrow 0$ 。

在進行上述輸入-輸出回授線性化的過程中，有幾項值得注意的事情：

- (1) 在形成(6.2.6)式的控制訊號 $u(t)$ 時，函數 $f_1(x)$ 需完全已知，即 x_1 、 x_2 均要能量到，故輸入與輸出間之線性化仍然需要所有狀態的回授(full-state feedback)。
- (2) 在得到(6.2.4)式的過程中，我們用到二次微分，故稱此系統的相對階數=2。由於此系統為3階的動態，故相對階數 r 最多為3。對於線性系統而言，相對階數則自動化成分子分母間的階數差。關於線性系統的相對階數，將在下面的例題中討論。
- (3) 原先之非線性系統為三階，但經過回授線性化後之線性系統為二階，故有一部份的系統動態為「不可觀察的」。故輸入-輸出回授線性化的成功，除了(6.2.10)式所表示的外部動態(external dynamics)必須穩定外，其不可觀察的內部動態(internal dynamics)也必須是穩定的。

線性系統也可以定義相對階數，運用與前面相同的方法，即對輸出訊號 y 持續微分，直到

控制訊號 u 出現為止，此時微分的次數即為線性系統的相對階數，我們可以證明依據這個操作所得到的相對階數剛好等於 Laplace 轉移函數的分子、分母的階數差。

例題 6.2.1

考慮某一線性系統，其 Laplace 轉移函數為

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \quad (6.2.11)$$

其中 $n > m$ ，且 $b_m \neq 0$ 。 $H(s)$ 轉移函數所對應的狀態空間實現(state-space realization)為

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (6.2.12)$$

其中滿足條件的 (A, B, C) 矩陣有無窮多種，其中有一種最簡單的形式，稱為伴隨表示式(companion form):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & a_m & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}_{n \times n}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad (6.2.13a)$$

$$C = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_m \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times n} \quad (6.2.13b)$$

可以看到 A 矩陣的最後一列是由 $H(s)$ 的分母係數所決定，而 C 矩陣則是由 $H(s)$ 的分子係數所決定。利用代入法可以證明在(6.2.12)式中，輸出 y 與輸入 u 之間的轉移函數恰好是由(6.2.11)式的 $H(s)$ 所給定，亦即

$$\frac{y(s)}{u(s)} = C(sI - A)^{-1}B = H(s) \quad (6.2.14)$$

為了獲得相對階數，我們對(6.2.12)式中的輸出 y 取對時間的微分，得到

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial x} \dot{x} = C(Ax + Bu) = CAx + CBu \quad (6.2.15)$$

代入(6.2.13)式中的 (A, B, C) 矩陣，得到 $CB = 0$ 。故知一次微分時，控制 u 尚未出現。再對(6.2.15)式微分一次，得到

$$\ddot{y} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} \dot{x} = CA(Ax + Bu) = CA^2x + CABu \quad (6.2.16)$$

在上式中控制 u 是否出現，決定於 CAB 的值是否為零。依據 (A, B, C) 矩陣在(6.2.13)式中的定義，我們可計算出如下的矩陣相乘結果：

$$CA^{i-1}B = 0, i = 1, 2, \dots, n - m - 1 \quad (6.2.17a)$$

$$CA^{n-m-1}B = b_m \neq 0 \quad (6.2.17b)$$

其中 $b_m \neq 0$ 是(6.2.11)式的條件所給定。因此在(6.2.16)式中， $CAB = 0$ ，故控制 u 仍然未出現。持續到第 $n - m$ 次微分時，

$$y^{(n-m)} = CA^{n-m}x + CA^{n-m-1}Bu = CA^{n-m}x + b_mu \quad (6.2.18)$$

因為 $b_m \neq 0$ ，故控制 u 首次出現在輸出訊號 y 的 $n - m$ 階微分，因此線性系統(6.2.11)的相對階數為 $n - m$ ，此值剛好是轉移函數的分子、分母的階數差。

□

關於非線性系統內部動態的穩定性，我們繼續透過以下的例題來了解。

例題 6.2.2

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2^3 + u \\ u \end{bmatrix} \quad (6.2.19a)$$

$$y = x_1 \quad (6.2.19b)$$

假設控制的目的是要使得輸出 $y(t)$ 能追蹤某一目標訊號 $y_d(t)$ 。為了建立 y 與 u 之間的線性關係，先對(6.2.19b)式微分一次，得到

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2^3 + u \quad (6.2.20)$$

由於控制變數 u 已經出現，故知此系統的相對階數為 1。進一步設計控制律 u 為

$$u = -x_2^3 + \dot{y}_d(t) - e(t) \quad (6.2.21)$$

其中 $e = y(t) - y_d(t)$ 為追蹤誤差。將(6.2.21)代回(6.2.20)，得到

$$\dot{y} - \dot{y}_d + e(t) = 0 \Rightarrow \dot{e} + e = 0 \quad (6.2.22)$$

因此(6.2.13)式的控制律不僅線性化了 y 與 u 之間的關係，並且可以確保追蹤誤差趨近於零。由於 $y = x_1$ ， \dot{y} 只包含了 \dot{x}_1 的動態，關於 \dot{x}_2 的動態並無法由(6.2.20)式得知；在此情形下， x_2 稱為不可觀察的狀態(unobservable state)，或稱為系統的內部動態。雖然 \dot{x}_2 的動態無法由輸出 y 觀察到，但是仍然可以用數學符號來加以表示。實際上 x_2 的動態可由(6.2.19a)式的第二式獲得如下：

$$\dot{x}_2 = u = -x_2^3 - e(t) + \dot{y}_d(t) \Rightarrow \dot{x}_2 + x_2^3 = \dot{y}_d - e \quad (6.2.23)$$

由(6.2.22)式知，誤差訊號 e 為有界的訊號，即 $e = e(0)e^{-t} \leq e(0)$ ，而 \dot{y}_d 為有界的目標訊號，故有

$$|\dot{y}_d(t) - e| \leq D \Rightarrow \dot{x}_2 + x_2^3 \leq D \quad (6.2.24)$$

再利用 Lyapunov 直接定理，證明 $x_2(t)$ 為 Lyapunov 穩定。當達到穩態時， $x_2 \leq D^{1/3}$ 。

上面的分析說明(6.2.19a)式的非線性系統，其內部動態雖然無法由輸出 y 觀察到，但它是穩定的。然而有些系統的內部動態卻是不穩定的，例如下列的系統

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2^3 + u \\ -u \end{bmatrix} \quad (6.2.25)$$

採用類似的分析步驟，該系統的內部動態(不可觀察的動態)可表為

$$\dot{x}_2 - x_2^3 = \dot{y}_d - e \quad (6.2.26)$$

與(6.2.23)式比較，上式由 Lyapunov 定理證明為不穩定。所以(6.2.25)式的非線性系統具有一個看不到，但振幅卻越來越大的內部動態。

□

6.3 內部動態與零動態

內部動態(internal dynamics)無法由輸出訊號 y 看到，也不受外部控制訊號 u 的影響，所以一旦一個系統的內部動態為不穩定，我們將無法透過控制力的介入而使其穩定。因此判斷非

線性系統是否具有不穩定的內部動態，在非線性控制領域中的一項重要課題。通常內部動態仍為非線性，且和外部動態結合在一起，它的穩定性需要與外部動態一起考量，無法獨立決定之，故內部動態穩定性的決定並不容易。

這一節我們將回顧一下線性系統內部動態的基本特性，這將有助於我們對於非線性系統內部動態的了解。考慮如下的簡單線性系統

$$\text{系統 A: } \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 + u \\ u \end{bmatrix} \quad (6.3.1a)$$

$$y = x_1 \quad (6.3.1b)$$

控制 u 的設計是要使得輸出 y 追蹤目標訊號 y_d 。對(6.3.1b)式微分一次得到

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2 + u \quad (6.3.2)$$

控制 u 已經出現，並將其設計成

$$u = -x_2 + \dot{y}_d - (y - y_d), \quad y - y_d = e \quad (6.3.3)$$

代入(6.3.2)式化簡，得到追蹤誤差為漸進穩定的條件

$$\dot{e} + e = 0 \quad (6.3.4)$$

在產生(6.3.2)式的過程中未引入 \dot{x}_2 的動態，所以相對於 \dot{y} 而言， \dot{x}_2 是內部動態，它是由(6.3.1a)式的第二式所描述

$$\dot{x}_2 = u = -x_2 + \dot{y}_d - e \Rightarrow \dot{x}_2 + x_2 = \dot{y}_d - e(t) \quad (6.3.5)$$

上述方程式的極點落在 -1 ，故內部動態為穩定。因此(6.3.3)式之控制策略可保證外部動態(6.3.4)和內部動態(6.3.5)同時為穩定。

其次我們將系統動態(6.3.1)改為

$$\text{系統 B: } \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 + u \\ -u \end{bmatrix} \quad (6.3.6)$$

經由相同的分析步驟，發現該系統的內部動態為

$$\dot{x}_2 - x_2 = e(t) - \dot{y}_d \quad (6.3.7)$$

因為極點落在 $+1$ ，故知其內部動態為不穩定。

令我們好奇的是甚麼因素造成(6.3.1)式與(6.3.6)式具有不同穩定性的內部動態？為了找出造成差別的原因，我們從轉移函數下手。在(6.3.1)式中， $u \rightarrow y$ 之間的轉移函數為

$$G_A(s) = (s + 1)/s^2 \quad (6.3.8)$$

而(6.3.6)式中之轉移函數則為

$$G_B(s) = (s - 1)/s^2 \quad (6.3.9)$$

我們發現 $G_A(s)$ 的穩定零點 -1 對應到系統A內部動態的穩定極點 -1 ，如(6.3.5)式所示。而 $G_B(s)$ 的不穩定零點 $+1$ 對應到系統B內部動態的不穩定極點 $+1$ ，如(6.3.7)式所示。因此線性系統的Laplace轉移函數的分子部分，正好對應到線性系統的內部動態，故有下列之觀察結論：

「線性系統的零點若全部落在左半平面，則其內部動態為穩定」

我們再舉一個例子來驗證以上的觀察結果。

例題 6.3.1

考慮一般性的三階系統如下

$$y(s) = \frac{b_0 + b_1 s}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + s^3} u(s) \quad (6.3.10)$$

確認分子的部分 $b_0 + b_1 s$ 即為系統的內部動態。

令 $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $x_3 = \ddot{y}$, 則上式可改寫為狀態空間的表示式如下

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (6.3.11)$$

$$y = [b_0 \quad b_1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (6.3.12)$$

為了建立 y 和 u 的關係式，先對(6.3.12)微分一次，得到 $\dot{y} = b_0 x_2 + b_1 x_3$ 。因為 u 還未出現，故再微分一次得

$$\ddot{y} = b_0 \dot{x}_2 + b_1 \dot{x}_3 = b_0 x_3 + b_1 (-a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 + u) \quad (6.3.13)$$

此時控制 u 出現了，因為 y 微分二次才得到 u ，故輸出系統的相對階數 $r = 2$ 。但原來系統的階數為 3，因此有一階的內部動態在輸出 y 中是看不到的。在另一方面，從轉移函數中，分母比分子多 2 階的事實，也可得到相對階數為 2 的結論。在下列兩組座標系統中

$$[x_1 x_2 x_3]^T \leftrightarrow [x_1 y \dot{y}]^T$$

有一對一的關係存在，兩者都可完整地描述原來之三階系統。對於座標系統 $[x_1 y \dot{y}]$ 而言， y 和 \dot{y} 的動態構成可觀察到的外部動態，剩下來的 x_1 構成一階的內部動態。 \dot{x}_1 之方程式可由(6.3.11)式及(6.3.12)式獲得如下：

$$\dot{x}_1 = x_2 = \frac{1}{b_1} (y - b_0 x_1) \Rightarrow \dot{x}_1 + \frac{b_0}{b_1} x_1 = \frac{1}{b_1} y \quad (6.3.14)$$

其中 $y = e + y_d$ 為有界的訊號，故內部動態為穩定的條件是 $-b_0/b_1 < 0$ ，而 $-b_0/b_1$ 恰為原先轉移函數的零點(zero)，如(6.3.10)式的分子部分所示。

□

對於線性系統而言，穩定的零點意味著穩定的內部動態，然而當我們將此結論延伸到非線性系統時，遇到一個大問題：非系統性系統不存在 Laplace 轉移函數，自然沒有零點或極點的定義。但慶幸的是，非線性系統雖無零點的定義，但有類似的觀念，稱為零動態(zero dynamics)。零點與零動態的相似處在於它們都令輸出 $y = 0$ 。

定義 6.3.1：

設 $\dot{x} = f(x, u)$, $y = g(x)$ ，若存在 u_0 使得 $y(t) = 0, \forall t \geq 0$ ，則 $\dot{x} = f(x, u_0)$ 稱為零動態。

因此所謂的零動態是指使得輸出 y 為零的系統動態。線性系統中的零點也有類似的特性。假設 $G(s)$ 為輸出 y 與輸入 u 之間的轉移函數，則有 $y(s) = G(s)u(s)$ ，零點 s_0 的定義是要滿足 $G(s_0) = 0$ ，所以線性系統中的零點也是使得輸出為零： $y(s_0) = G(s_0)u(s_0) = 0$ 。透過零動態的定義，

我們可將上述的結論擴展到非線性系統之中。也就是說，對於線性系統而言，零點決定內部動態的穩定性；而對於非線性系統而言，則是零點動態決定內部動態的穩定性。關於這一點，6.9 節將有更完整的討論，在這裡我們僅以範例來說明。

例題 6.3.2

決定下列非線性系統的零動態

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2^3 + u \\ u \end{bmatrix} \quad (6.3.15a)$$

$$y = x_1 \quad (6.3.15b)$$

根據定義，零動態是指在任意時刻下，輸出 $y(t) = x_1(t)$ 恆等於零，故其一階導數 $\dot{y}(t) = \dot{x}_1(t)$ 也必須為零。由(6.3.15a)式的第一式知滿足此條件的控制 u 為

$$u_0 = -x_2^3 \quad (6.3.16)$$

將 u_0 代入(6.3.15a)的第二式得

$$\dot{x}_2 + x_2^3 = 0 \quad (6.3.17)$$

此即為零動態。可以看到零動態是非線性系統的固有性質，且其穩定性與外部輸入無關。與零動態息息相關的是內部動態，(6.3.15)式的內部動態已於(6.2.23)式求得為

$$\dot{x}_2 + x_2^3 = \dot{y}_d - e \quad (6.3.18)$$

可見內部動態的穩定性與目標訊號 y_d 和追蹤誤差 e 的大小皆有關。比較(6.3.17)式的零動態與(6.3.18)式的內部動態，可以發現當 $\dot{y}_d - e$ 很小時，內部動態趨近於零動態，因此零動態的穩定性可以推論 $\dot{y}_d - e$ 的值很小時的內部動態穩定性(亦即區域穩定)。這一性質類似於我們在線性系統中所看到的，零點的穩定性可以決定內部動態的穩定性。唯一的差別是線性系統的穩定性判定都是全域性的(因為只有一個平衡點)，而非線性系統只能是區域性。

□

對於一個穩定的線性系統(即所有的極點均位於左半平面)，如果它的零點也都位於左半平面，則稱此系統為最小相位系統(minimum-phase system)。沿用此一相同的定義，如果一個非線性系統的零動態為穩定，我們也稱此非線性系統為最小相位系統。對於非最小相位系統，不管是線性亦或是非線性系統，都代表其內部動態為不穩定。不穩定的內部動態雖然不會造成系統的發散，但會限制控制的效果，使得系統的性能響應變差。以下三個例題有助於我們了解非最小相位系統(non-minimum phase system)的幾個重要特徵。

例題 6.3.3

『最小相位』系統顧名思義，就是指它的相位角是所有可能相位角中最小的。為了解釋這一點，我們考慮二個線性系統，它們的轉移函數分別表示為

$$G_1(j\omega) = \frac{1+j\omega T}{1+j\omega T_1}, G_2(j\omega) = \frac{1-j\omega T}{1+j\omega T_1} \quad (6.3.19)$$

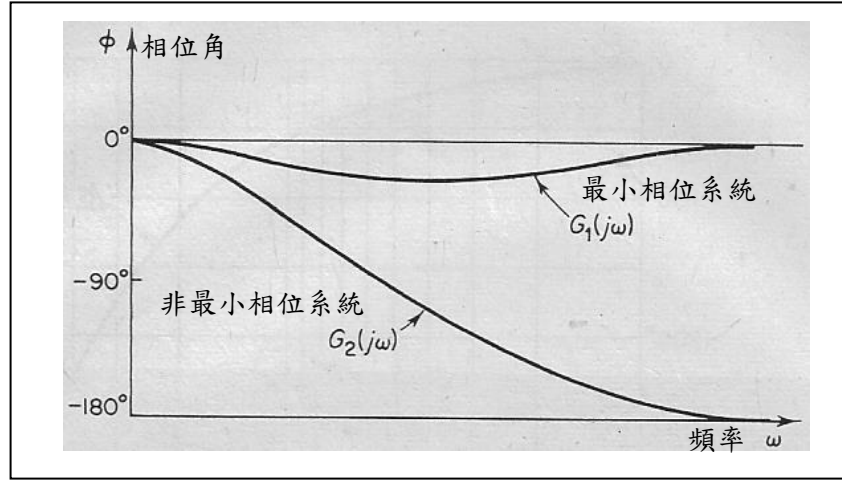


圖 6.3.1 最小相位系統 $G_1(j\omega)$ 與非最小相位系統 $G_2(j\omega)$ ，兩者在相位響應上的不同。『最小相位』系統顧名思義，就是指它的相位角是所有可能中最小的。

可以看到 $G_1(s)$ 的極點 $s = -1/T_1$ 與零點 $s = -1/T$ 都位於左半平面，即所謂的最小相位系統；而 $G_2(s)$ 有一個位於右半平面的零點 $s = 1/T$ ，故為非最小相位系統。 $G_1(s)$ 與 $G_2(s)$ 的零點雖然不同，但是它們的絕對值增益卻相同：

$$|G_1(j\omega)| = |G_2(j\omega)| = \sqrt{\frac{1+(\omega T)^2}{1+(\omega T_1)^2}} \quad (6.3.20)$$

$G_1(s)$ 與 $G_2(s)$ 從增益大小來看，沒有區別，但從相位角來看，卻有很大的不同，如圖 6.3.1 所示。我們可以看到，最小相位系統 $G_1(s)$ 的相位角分布範圍比非最小相位系統 $G_2(s)$ 的相位角分布範圍小很多。實際上 $G_1(s)$ 的相位角是所有可能相位角中，最小的一個。

現在我們考慮所有的轉移函數 $G(s)$ ，已知它的增益大小給定為

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\frac{1+(\omega T)^2}{1+(\omega T_1)^2}} = F(\omega) \quad (6.3.21)$$

像這樣的轉移函數 $G(s)$ 有無窮多個。則我們要問，所有滿足條件(6.3.21)式的轉移函數 $G(s)$ 中，哪一個的相位角 $\angle G(j\omega)$ 為最小？答案就是 $G_1(s)$ ，亦即

$$\min_{|G(j\omega)|=F} \angle G(j\omega) = \angle G_{\min}(j\omega) = \angle G_1(j\omega) \quad (6.3.22)$$

也就是當我們固定一個線性系統的增益大小 $|G(j\omega)|$ 時，它的相位角 $\angle G(j\omega)$ 並沒有被固定，所以相對應的轉移函數 $G(s)$ 還無法唯一決定。在這無窮多種可能的轉移函數 $G(s)$ 之中，相位角分布範圍最小的那一個，可以證明就是極點與零點都位於左半平面的轉移函數 $G(s)$ 。這就是最小相位系統名稱的由來。

□

非最小相位系統具有不穩定的內部動態，會造成系統控制上的困難，其中一個影響會導致需要施加非常大的控制能量 u 才能達到完美的訊號追蹤能力，如以下例題的討論。

例題 6.3.4

考慮線性系統

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = -\dot{u} + u \quad (6.3.23)$$

討論是否存在控制律 u ，使得輸出訊號 $y(t)$ 能夠完美追蹤(perfect tracking)目標訊號 $y_d(t)$ 。

此系統所對應的轉移函數為

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{-s+1}{s^2+2s+2} \quad (6.3.24)$$

很明顯可以看到，該系統的 2 個極點位於左半平面，但有一個不穩定的零點 $s = 1$ 位於右半平面，所以是非最小相位系統。假設我們要達到完美追蹤目標訊號 $y_d(t)$ 的目的，亦即

$$y(t) \equiv y_d(t), \forall t \geq 0 \quad (6.3.25)$$

令 $y = y_d$ 代入(6.3.23)式中，求出控制 u 所要滿足的條件：

$$-\dot{u} + u = -(\ddot{y}_d + 2\dot{y}_d + 2y_d) \quad (6.3.26)$$

給定所要追蹤的目標訊號 $y_d(t)$ ，求解上面的微分方程式即可得到所需施加的控制訊號 $u(t)$ 。然則不管 y_d 訊號為何，我們將發現求解出來的 $u(t)$ 訊號都是發散的。這一點可從(6.3.26)式的 Laplace 轉換式觀察到：

$$u(s) = -\frac{s^2+2s+2}{s-1} y_d(s) \quad (6.3.27)$$

因為其中出現一個不穩定的極點 $s = 1$ ，使得求解出來的控制函數 $u(t)$ 會隨時間而發散。因此對於非最小相位系統，如果要達到無誤差的訊號追蹤，則所需要的控制能量將會是無窮大。換言之，對於非最小相位系統，我們無法要求零誤差的訊號追蹤表現，頂多只能要求誤差不超過某一上限值。

□

比較(6.3.24)式與(6.3.27)式，我們發現達到完美追蹤的控制器動態剛好是原系統動態的倒數，所以如果系統動態含有不穩定零點時，倒數的結果就會在控制器動態上產生不穩定的極點。反之對於最小相位系統，由於極點與零點皆在左半平面，不僅原系統動態為穩定，倒數所得到的控制器動態，只是極點與零點的互相交換，仍然是穩定的系統。

例題 6.3.5

飛機是典型的非最小相位系統，從飛機的動態響應中我們可以了解非最小相位系統的一些基本特徵。圖 6.3.2 顯示飛機在縱方向運動的受力情形，其中 C_G 代表質量中心， C_L 代表氣動力中心，縱向穩定的飛機必須 C_G 在 C_L 的前面。作用在主翼及升降舵上的垂直作用力分別註記為 L_W 及 L_E ：

$$L_W = C_{ZW}\alpha, L_E = C_{ZE}(u - \alpha) \quad (6.3.28)$$

其中 α 稱為攻角，是翼弦與相對風的夾角； u 是升降舵所打的角度，也飛機系統的控制輸入； C_{ZW} 與 C_{ZE} 是氣動力常數。圖 6.3.2 顯示升降舵受到一個向下的作用力 L_E ，此作用力相對於質心產生一順時針的力矩，使得機頭上仰。在正常飛行狀況下，攻角都在 10 度以內，故滿足小角度的假設： $\sin\alpha \approx \alpha$ ， $\cos\alpha \approx 1$ 。

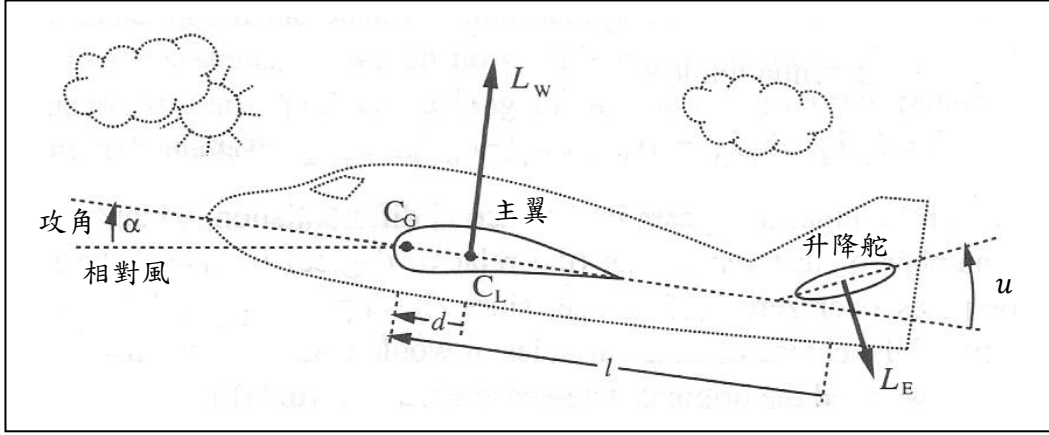


圖 6.3.2 飛機在縱方向運動的受力情形。圖中顯示升降舵向上打 u 角度，產生一向下的作用力 L_E ，此作用力相對於質心產生一順時針的力矩，使得機頭上仰。

在小角度的假設下，相對於重心的力矩平衡方程式可寫成

$$J\ddot{\alpha} + b\dot{\alpha} + (C_{ZW}\alpha)d = C_{ZE}(u - \alpha)l \quad (6.3.29)$$

其中 J 是飛機相對於重心的轉動慣量， $b\dot{\alpha}$ 是空氣阻力產生的恢復力矩。在另一方面，垂直方向的作用力平衡方程式則可表成

$$m\ddot{h} = C_{ZW}\alpha - C_{ZE}(u - \alpha) \quad (6.3.30)$$

其中 m 為飛機的質量， h 為飛機的垂直高度。為了進一步的化簡，採用下列的常數值：

$$J = 1, m = 1, b = 4, C_{ZE} = 1, C_{ZW} = 5, l = 3, d = 0.2$$

將這些常數值代入(6.3.29)式與(6.3.30)式，並取 Laplace 轉換，得到

$$\frac{\alpha(s)}{u(s)} = \frac{3}{(s+2)^2} \quad (6.3.31)$$

$$\frac{h(s)}{u(s)} = -\frac{s^2+4s-14}{s^2(s+2)^2} = -\frac{(s+6.24)(s-2.24)}{s^2(s+2)^2} \quad (6.3.32)$$

從(6.3.32)式可以看到，高度的轉移函數 $h(s)$ 中含有一個不穩定的零點在 $s = 2.24$ ，如圖 6.3.3a 所示，顯示高度 h 相對於升降舵的動態是一個非最小相位系統。下面我們要觀察此不穩定的零點對於高度的動態變化會產生甚麼影響。考慮升降舵的步階輸入，即 $u(s) = 1/s$ ，則由(6.3.32)式得

$$h(s) = -\frac{(s+6.24)(s-2.24)}{s^3(s+2)^2} \quad (6.3.33)$$

現在利用初值定理(initial value theorem)來計算垂直加速度的初始值 $\ddot{h}(0)$

$$\ddot{h}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\ddot{h}(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^3 h(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(s+6.24)(-s+2.24)}{(s+2)^2} = -1 \quad (6.3.34a)$$

其次利用終值定理(final value theorem)來計算垂直加速度的穩態值 $\ddot{h}(\infty)$

$$\ddot{h}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s\ddot{h}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^3 h(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(s+6.24)(-s+2.24)}{(s+2)^2} = 3.5 \quad (6.3.34b)$$

垂直加速度 $\ddot{h}(t)$ 隨時間的變化過程如圖 6.3.3b 所示，從中可以觀察到，飛機一開始是向下加速(垂直加速度為 -1)，然後加速度慢慢轉為正值，最後以 $+3.5$ 的穩態加速度向上爬升。對垂

直加速度 $\ddot{h}(t)$ 做二次積分可得到高度 $h(t)$ 隨時間的變化，如圖 6.3.3c 所示。可以看到飛機是先往下飛一段時間後，機頭才慢慢拉起往上飛。

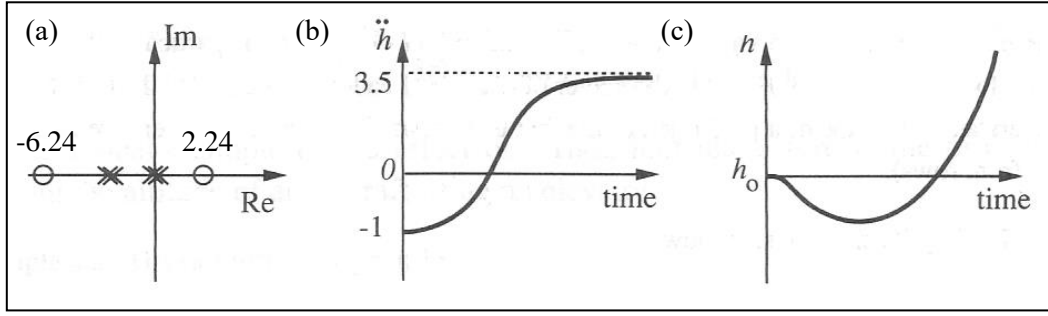


圖 6.3.3 最小相位系統 與非最小相位系統，兩者在相位響應上的不同。『最小相位』系統顧名思義，就是指它的相位角是所有可能中最小的。

造成飛機高度變化的源頭是升降舵向下打了一個單位角度，從圖 6.3.2 可以看到，升降舵受到向下的作用力，此力對重心 C_G 所產生的力矩應該是讓機頭上仰爬升才對，為何飛機的高度會是先降後升呢？原來是飛機同時受到兩種相反的作用：一是令機頭上抬的順時針力矩，另一是升降舵受到的向下作用力。前者使高度增加，後者令高度掉落。當飛機對向下作用力的反應比較快時，即造成飛機的高度先減後增的現象。當這一現象發生時，如果我們檢視轉移函數 $h(s)/u(s)$ ，會發現裡面必存在不穩定的零點，如(6.3.32)式所示。非最小相位系統的一個特徵就是系統的反應方向一開始會和控制命令的方向相反。因此如果我們看到一個系統，受到向西運動的控制命令，結果卻先向東再向西運動，則可知此系統必為非最小相位系統。非最小相位系統的初始反應方向和命令方向相反，必須經過一段時間後，才會跟上命令的腳步，造成反應的遲緩。

上面我們是從不穩定的零點來看非最小相位系統，其次我們由零動態的觀點來分析相同的問題。零動態的觀點需要透過狀態空間的表示式，首先設定狀態變數如下

$$x = [\alpha \quad \dot{\alpha} \quad h \quad \dot{h}]^T$$

則(6.3.31)式與(6.3.32)式可用狀態變數 x 表示如下：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u \quad (6.3.35)$$

$$y = x_3 \quad (6.3.36)$$

其中系統的輸出是飛機的高度 $y = h = x_3$ 。接下來的工作是確定系統的相對階數，執行(6.3.36)式對時間的微分動作，發現第二次微分時，控制 u 出現了：

$$\dot{y} = \dot{x}_3 = x_4 \quad (6.3.37a)$$

$$\ddot{y} = \dot{x}_4 = 6x_1 - u \quad (6.3.37b)$$

因此該系統的相對階數為 2，因(6.3.35)式為 4 階的系統，故存在 2 階的內部動態是輸出 y 所看不到的。假設 y_d 為所要追蹤的目標訊號，並設 $e(t) = y(t) - y_d(t)$ 為追蹤誤差。考慮如下升降舵角度的控制律：

$$u = 6x_1 - \ddot{y}_d + \dot{e} + e \quad (6.3.38)$$

將之代入(6.3.37b)式，可得追蹤誤差所要滿足的微分方程式為

$$\ddot{e} + \dot{e} + e = 0 \quad (6.3.39)$$

從數學上來看，因為二個特徵值均落在左半平面，所以誤差將會收斂到零。然而從工程實務來看，誤差趨近於零的條件無法實現，因為該系統具有不穩定的內部動態。(6.3.37)式顯示，在推導 \ddot{y} 的過程中，並未引入 \dot{x}_1 與 \dot{x}_2 的動態，所以對於輸出 y 而言， x_1 與 x_2 為內部動態，其方程式為

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -4x_1 - 4x_2 + 3u \end{aligned} \quad (6.3.40)$$

代入 $x_1 = \alpha$ 及(6.3.38)式的 u ，得到用攻角 α 表示的2階內部動態：

$$\ddot{\alpha} + 4\dot{\alpha} - 14\alpha = 3(-\ddot{y}_d + \dot{e} + e) \quad (6.3.41)$$

而相對應的零動態為

$$\ddot{\alpha} + 4\dot{\alpha} - 14\alpha = 0 \quad (6.3.42)$$

其二個特徵值分別為 $\lambda_1 = -6.24, \lambda_2 = 2.24$ ，其中有一個落在右半平面，代表零動態不穩定。同時我們再一次驗證(6.3.42)式的零動態恰好就是轉移函數 $\alpha(s)/u(s)$ 的分子部分，如(6.3.32)式所示。不穩定零動態和零點的存在，不至於造成飛機的失控，但也使得飛機的飛行性能受到了限制：

- 追蹤誤差無法趨近於零，除非 $u \rightarrow \infty$ ，但實際上升降舵可打的角度 u 非常有限。
- 飛機的初始響應方向會與 u 的方向相反，而造成飛機反應的遲鈍。

以上兩點是任何非最小相位系統所具有的特性，所以不管對於線性或非線性系統，我們都必須事先了解所要控制的系統是否具有不穩定的零動態。關於非線性系統零動態的穩定性分析，我們在6.9節將有近一步的討論。

□

6.4 數學工具

本節將簡單介紹回授線性化所需用到的數學工具，及一些新的定義。

(A) 向量函數 $f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]^T$ 對純量變數 x_i 的微分

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} \quad (6.4.1)$$

其結果是一行向量。

(B) 純量函數 $f(x)$ 對向量變數 $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ 的微分

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right] \quad (6.4.2)$$

其結果是一列向量。

(C) 向量函數 $f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]^T$ 對向量變數 $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ 的微分。有二種方

法可得到相同的結果。第一種作法是先將 $f(x)$ 視為純量函數，取 $f(x)$ 對向量 x 的微分後，再令 $f(x)$ 為向量的形式：

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (6.4.3a)$$

其結果為一矩陣，稱為向量函數 f 的 Jacobian 矩陣。在(6.4.3a)式的推導過程中，首先用到(6.4.2)式的定義 $\partial f/\partial x = \nabla f$ ，其次用到(6.4.1)式的 $\partial f/\partial x_i$ 的定義。第二種作法是先將 x 視為純量變數，取向量 $f(x)$ 對純量變數 x 的微分後，再令 x 為向量的形式：

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f_1(x) \\ \nabla f_2(x) \\ \vdots \\ \nabla f_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (6.4.3b)$$

同時注意 ∇f_i 為列向量，如(6.4.2)式的定義。在(6.4.3b)式的推導過程中，首先用到(6.4.1)式中的 $\partial f/\partial x$ 的行向量定義式，其次用到(6.4.2)式中的 $\partial f/\partial x$ 的列向量定義式。因此(6.4.3b)式的建構過程是先行運算再列運算，而(6.4.3a)式則是先列運算再行運算，兩者所得結果相同。

(D) 李氏微分(Lie Derivative)

設 $h(x): R^n \rightarrow R$ 是一個純量函數， $f(x): R^n \rightarrow R^n$ 是一個向量函數，則定義李氏微分如下

$$L_f h = \frac{\partial h}{\partial x} \cdot f = \nabla h \cdot f \quad (6.4.4)$$

其中注意 $\nabla h = \partial h/\partial x$ 是列向量，如(6.4.2)式的定義，而 f 是行向量。李氏微分 $L_f h$ 的物理意義即為純量函數 $h(x)$ 的梯度 ∇h 與向量 f 的內積運算。多層次的李氏微分可定義如下：

- $L_f^0 h = h$
- $L_f^1 h = L_f h$
- $L_f^2 h = L_f(L_f h) = L_f(\nabla h \cdot f) = \nabla(\nabla h \cdot f) \cdot f$
- $L_f^3 h = L_f(L_f(L_f h)) = \nabla(L_f(L_f h)) \cdot f = \nabla(\nabla(\nabla h \cdot f) \cdot f) \cdot f$
- $L_f^n h = L_f(L_f^{n-1} h) = \nabla(L_f^{n-1} h) \cdot f, n = 1, 2, 3, \dots$

其中定義任意函數 h 的零階李氏微分即為該函數本身： $L_f^0 h = h$ ，因為零階微分就是不進行微分的動作。另外在多層次的李氏微分中，不同層次的微分可與不同的向量取內積，例如：

- $L_g L_f h = \nabla(L_f h) \cdot g = \nabla(\nabla h \cdot f) \cdot g$

李氏微分的引入有助於化簡回授線性化的運算，讓符號的表達更為簡潔。

例題 6.4.1

考慮如下的非線性系統

$$\dot{x} = f(x), y = h(x)$$

其中向量函數 $f(x)$ 代表狀態 x 的時間變化率，亦即系統的運動速度 \dot{x} 。 $y(x)$ 是純量函數，代表系統的輸出。輸出 $y(x(t))$ 對時間 t 的各階微分可計算如下：

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \frac{dy(x(t))}{dt} = \frac{\partial y(x)}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial h(x)}{\partial x} \dot{x} = \nabla h \cdot f = L_f h \\ \ddot{y} &= \frac{d}{dt} \dot{y} = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x} f = L_f(L_f h) = L_f^2 h\end{aligned}$$

同理可以證明，輸出 y 對時間 t 的 n 階導數即為 n 階的李氏微分：

$$y^{(n)} = L_f^n h, n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.4.5)$$

由此觀之，系統輸出 y 對時間的微分即為李氏微分 $L_f h$ ，亦就是「輸出函數 $h(x)$ 的梯度在狀態軌跡的運動方向 f 上，取其投影量」。當觀察者隨著狀態軌跡一起運動時，李氏微分代表此一觀察者所看到的系統輸出 y 的變化量。當李氏微分為零時，隨著系統一起運動的觀察者即看不到系統輸出 y 的變化。

□

前面所定義的是純量函數 $h(x)$ 的李氏微分，其結果 $L_f h$ 是一個純量(投影量)。李氏微分也可對向量操作，其結果是一個向量。假設 f 和 g 均為 n 維向量函數，則依據李氏微分的定義式：

$$L_f g = \frac{\partial g}{\partial x} \cdot f = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad (6.4.6)$$

其中 $\partial g / \partial x$ 是一個 Jacobian 矩陣，如(6.4.3)式的定義。從上式可以看到，當 g 為向量時， g 的李氏微分 $L_f g$ 亦為向量；而當 g 為純量時， g 的李氏微分 $L_f g$ 則為純量。

例題 6.4.2：

考慮如下的函數

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 - x_2 \end{bmatrix}, g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, h(x) = x_1^2 + x_2$$

分別計算李氏微分 $L_f h$ 、 $L_f^2 h$ 、 $L_g L_f h$ 及 $L_f L_g h$ 。

將 f 、 g 、 h 函數代入(6.4.4)式的李氏微分定義，可得

- $L_f h = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) = [2x_1 \quad 1] \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 - x_2 \end{bmatrix} = 2x_1 x_2 - \sin x_1 - x_2$
- $L_f^2 h = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x} f(x) = [2x_2 - \cos x_1 \quad 2x_1 - 1] \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 - x_2 \end{bmatrix}$
 $= (2x_2 - \cos x_1)x_2 + (2x_1 - 1)(-\sin x_1 - x_2)$
- $L_g L_f h = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x} g(x) = [2x_2 - \cos x_1 \quad 2x_1 - 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2x_1 - 1$
- $L_g h = \frac{\partial h}{\partial x} g(x) = [2x_1 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \Rightarrow L_f L_g h = 0$

□

(E) 李氏括號(Lie bracket)

設 f 和 g 均為 n 維向量函數，則 f 和 g 之李氏括號運算 $[f, g]$ 定義成

$$\begin{aligned} [f, g] &= ad_f g \\ &= \nabla g \cdot f - \nabla f \cdot g = L_f g - L_g f \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.4.7)$$

可以看到李氏括號的運算相當於是二個李氏微分的相減，其結果是一個向量。符號 $ad_f g$ 是李氏括號運算 $[f, g]$ 的另一種寫法，其中的『 ad 』代表『adjoint』聯合的意思，其意在說明 $ad_f g$ 是向量 f 與 g 的聯合運算。以下的討論將視表達的方便性，交互使用 $[f, g]$ 與 $ad_f g$ 此二種等義的寫法。

多層運算的李氏括號則定義成

- $[f^0, g] = ad_f^0 g = g$
- $[f^1, g] = [f, g] = ad_f g$
- $[f^2, g] = ad_f^2 g = [f, [f, g]] = \nabla[f, g] \cdot f - \nabla f \cdot [f, g]$
- $[f^n, g] = [f, [f^{n-1}, g]] = [f, ad_f^{n-1} g], n = 1, 2, 3, \dots$

例題 6.4.3 :

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 - x_2 \end{bmatrix}, g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

計算一階李氏括號 $ad_f g$ 與二階李氏括號 $ad_f^2 g$ 。

將 f 與 g 函數代入(6.4.7)式的李氏括號定義，可得

- $ad_f g = [f, g] = \nabla g \cdot f - \nabla f \cdot g$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 - x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$
- $ad_f^2 g = [f, ad_f g] = \nabla(ad_f g) \cdot f - \nabla f \cdot ad_f g$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 - x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -x_1 - 2x_2 \\ x_1 + x_2 - \sin x_1 - x_1 \cos x_1 \end{bmatrix}$$

□

李氏括號運算在非線性系統回授線性化的過程中，扮演非常重要的角色。在另一方面，如果將李氏括號應用到線性系統中，會得到我們所熟知的結果。下一例題說明了李氏括號在線性系統中的意義。

例題 6.4.4 :

考慮線性系統

$$\dot{x} = Ax + Bu = f(x) + g(x)u$$

其中 A 與 B 為常數矩陣。將 $f(x) = Ax$ ， $g(x) = B$ 代入李氏括號的運算中，得到

- $[f^0, g] = g = B$

- $[f, g] = \nabla g \cdot f - \nabla f \cdot g = 0 - AB = -AB$
- $[f^2, g] = [f, [f, g]] = [f, -AB] = A^2B$
- $[f^3, g] = [f, [f^2, g]] = [f, A^2B] = -A^3B$
- $[f^{n-1}, g] = [f, [f^{n-2}, g]] = (-1)^{n-1}A^{n-1}B, n = 1, 2, 3, \dots$

因此線性系統的可控(controllable)條件

$$\text{Rank}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n \quad (6.4.8)$$

可用李氏括號表達如下

$$\text{Rank}[g, \text{ad}_f g, \text{ad}_{f^2} g, \dots, \text{ad}_{f^{n-1}} g] = \text{Rank}[g, [f, g], [f^2, g], \dots, [f^{n-1}, g]] = n \quad (6.4.9)$$

(6.4.9)式即為非線性系統的可控條件，而(6.4.8)式只是(6.4.9)式應用在線性系統的一個特例。

□

一個非線性系統若可以被回授線性化，則其必須先滿足(6.4.9)式的可控條件。『可控』的原意是指，對於任意給定的初始態 x_0 及終端態 x_f ，必定存在控制訊號 $u(t)$ ，在有限的時段內 $t_0 \leq t \leq t_f$ ，將系統狀態從 x_0 驅動到 x_f 。回授線性化是要透過控制的方法使得系統狀態表現出線性的行為，故系統必須先滿足可控的條件。

(F) 李氏括號的基本性質

- $[\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g] = \alpha_1 [f_1, g] + \alpha_2 [f_2, g]$
 - $[f, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2] = \alpha_1 [f, g_1] + \alpha_2 [f, g_2]$
 - $[f, g] = -[g, f]$
 - $L_{\text{ad}_f g} h = L_f L_g h - L_g L_f h$
- (6.4.10)

其中 α_1, α_2 為常係數， h 為純量函數， g, f 為 n 階向量函數。前面三個等式的證明可由李氏括號的定義而獲得，第四個等式稱為 Jacobi 恆等式的成立，可由(6.4.10)式左右兩側的個別化簡而證明相等：

$$\text{左邊} = \nabla h \cdot \text{ad}_f g = \nabla h \cdot [f, g]$$

$$\text{右邊} = \nabla(L_g h) f - \nabla(L_f h) g = \nabla((\nabla h)g) f - \nabla((\nabla h)f) g$$

$$= \left(\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + g^T \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) f - \left(\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + f^T \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) g = \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g \right) = \nabla h \cdot [f, g]$$

(G) 微分同構(Diffeomorphism)座標轉換

對於二個 n 維空間 $X: [x_1 x_2 \dots x_n]$ 與 $Z: [z_1 z_2 \dots z_n]$ ，吾人稱其為微分同構(參見圖 6.4.1)，若兩者之間存在一對一的狀態轉換關係：

$$z = \Phi(x) \Rightarrow \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} \quad (6.4.11)$$

且滿足下列二個條件：(1)逆轉換 $x = \Phi^{-1}(z)$ 存在，(2) Φ 和 Φ^{-1} 均為可微。對於二個微分同構的空間，其各自的座標點必須有一對一且可逆的對應關係。

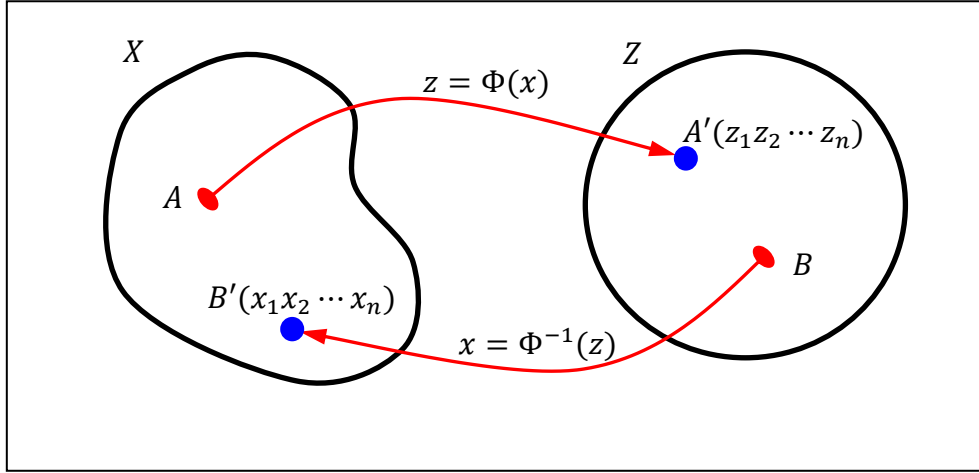


圖 6.4.1 微分同構的二個 n 維空間 X 與 Z ，對於 X 上的任意點 A ，必有 Z 上的一點 A' 與其對應；反之，對於 Z 上的任意點 B ，必有 X 上的一點 B' 與其對應。

如圖 6.4.1 所示，微分同構的二個 n 維空間 X 與 Z ，對於 X 上的任意點 A ，必有 Z 上的一點 A' 與其對應；反之，對於 Z 上的任意點 B ，必有 X 上的一點 B' 與其對應。這關係相當於要求 $\Phi(x)$ 的 Jacobian 矩陣

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

在每一個座標點 $(x_1 x_2 \cdots x_n)$ 上都是非奇異的(non-singular)，也就是要求 Jacobian 矩陣的反矩陣必須處處均存在。

利用微分同構轉換(6.4.11)，吾人可將非線性狀態方程式

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (6.4.12)$$

轉換到新的座標系統 z

$$\dot{z} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} (f(x) + g(x)u)$$

其中 x 用 z 取代，即 $x = \Phi^{-1}(z)$ ，則上式可以改寫成

$$\dot{z} = \bar{f}(z) + \bar{g}(z)u \quad (6.4.13)$$

本章所關心的問題是如何決定座標轉換關係 $z = \Phi(x)$ ，使得轉換後的狀態方程式(6.4.13)變成線性方程式：

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \Rightarrow z = \Phi(x) \Rightarrow \dot{z} = Az + Bu \quad (6.4.14)$$

尋找滿足上述條件的座標轉換 $z = \Phi(x)$ 是回授線性化的關鍵步驟。

(H) 完全可積(completely integrable)

下一節我們將看到，為了得到滿足(6.4.14)式的座標轉換 Φ ，我們必須先求解某些聯立偏微分方程式，而完全可積的條件可用來判斷這些聯立偏微分方程式的解是否存在。設 $f(x) = [f_1 f_2 f_3]^T$ ， $g(x) = [g_1 g_2 g_3]^T$ 為二個給定的向量函數，考慮由 f 及 g 所形成的聯立偏微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial h}{\partial x_3} f_3 &= 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x_1} g_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2} g_2 + \frac{\partial h}{\partial x_3} g_3 &= 0\end{aligned}\quad (6.4.15)$$

若以上的聯立偏微分方程式存在解答 $h(x_1, x_2, x_3)$ ，則稱 f, g 為完全可積。(6.4.15)式可改寫成李氏微分的形式：

$$\begin{aligned}\nabla h \cdot f &= L_f h = 0 \\ \nabla h \cdot g &= L_g h = 0\end{aligned}\quad (6.4.16)$$

在3維度空間上， $h(x) = 0$ 代表一個曲面，而 $\nabla h(x)$ 則表示此曲面在 x 處之法向量。條件 $\nabla h \cdot f = \nabla h \cdot g = 0$ 則說明此法向量和 f, g 二向量均垂直。

上述定義可擴展到 n 維度的情形：對於 m 個給定的向量函量 $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ ，建立如下的 $n - m$ 個聯立偏微分方程式：

$$\begin{aligned}\nabla h_1 \cdot f_1 &= \nabla h_1 \cdot f_2 = \dots = \nabla h_1 \cdot f_m = 0 \\ \nabla h_2 \cdot f_1 &= \nabla h_2 \cdot f_2 = \dots = \nabla h_2 \cdot f_m = 0 \\ &\vdots \\ \nabla h_{n-m} \cdot f_1 &= \nabla h_{n-m} \cdot f_2 = \dots = \nabla h_{n-m} \cdot f_m = 0\end{aligned}\quad (6.4.17)$$

若此聯立偏微分方程式存在一組解 $h_1(x), h_2(x), \dots, h_{n-m}(x)$ ，則稱 $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ 為完全可積，完全可積是指『可以透過積分求得其解』的意思。上面給出了完全可積的定義，但是完全可積的條件又是甚麼呢？也就是在甚麼條件下，(6.4.17)式的聯立解才存在呢？Frobenius 定理回答了這個問題。

Frobenius 定理：

$\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ 為完全可積，若且為若 $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ 為 involutive。

上述定理引出了另一個新條件稱為『involutive』。兩向量函數 $\{f, g\}$ 稱為 involutive，若其李氏括號可表成 f 與 g 的線性組合

$$[f, g] = \alpha_1 f + \alpha_2 g \quad (6.4.18)$$

其中 $\alpha_1(x), \alpha_2(x)$ 為純量函數。當擴展到 n 維度的情形時，吾人稱 $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ 為 involutive，若從中任意取一對函數 f_i 與 f_j ，都存在純量函數 α_{ijk} 滿足

$$[f_i, f_j](x) = \sum_{k=1}^m \alpha_{ijk}(x) f_k(x) \quad , \quad \forall i, j \quad (6.4.19)$$

Frobenius 定理指出，給定的 $f_i(x)$ 函數若滿足(6.4.19)式的條件，則聯立偏微分方程式(6.4.17)必存在一組解 $h_1(x), h_2(x), \dots, h_{n-m}(x)$ 。而若能判斷出聯立偏微分方程式存在一組解答，則所考慮的非線性系統即可以被回授線性化。

例題 6.4.3

利用 Frobenius 定理判斷是否存在函數 $h(x_1, x_2, x_3)$ 滿足下列聯立偏微分方程式

$$2x_3 \frac{\partial h}{\partial x_1} - \frac{\partial h}{\partial x_2} = 0 \rightarrow \nabla h \cdot f_1 = 0 \quad (6.4.20a)$$

$$-x_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} - 2x_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial h}{\partial x_3} = 0 \rightarrow \nabla h \cdot f_2 = 0 \quad (6.4.20b)$$

首先求出相對應的 f_1, f_2 函數為

$$(6.4.21) \quad f_1 = [2x_3 \quad -1 \quad 0]^T \quad ; \quad f_2 = [-x_1 \quad -2x_2 \quad x_3]^T$$

根據 Frobenius 定理，若(6.4.20)式存在一個解答 $h(x_1, x_2, x_3)$ ，則 f_1, f_2 須為 involutive，亦即 $[f_1, f_2]$ 須能表成 f_1, f_2 之線性組合。由李式括號的定義式(6.4.7)知

$$\begin{aligned} [f_1, f_2] &= \nabla f_2 \cdot f_1 - \nabla f_1 \cdot f_2 \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x_3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 \\ -2x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x_3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= -2f_1 + 0 \cdot f_2 \end{aligned} \quad (6.4.22)$$

故知 $\{f_1, f_2\}$ 為 involutive，因此(6.4.20)式的解答必存在。

□

6.5 回授線性化座標轉換

準備好了數學工具之後，我們開始進行回授線性化的工作。考慮下列的非線性系統

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (6.5.1)$$

其中 $f: U \rightarrow R^n, g: U \rightarrow R^n$ ，在定義域 U 內，二者均是可微的向量函數。我們稱非線性系統(6.5.1)可被回授線性化，若存在一微分同構轉換

$$z = \Phi(x) \Rightarrow \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} \quad (6.5.2)$$

使得在新的座標系統 $(z_1 z_2 \dots z_n)$ 之下，(6.5.1)式化成如下的形式

$$\dot{z} = Az + B \cdot (u - \alpha(z))/\beta(z) \quad (6.5.3)$$

其中常數矩陣 (A, B) 滿足可控的條件。

(6.5.3)式對於新座標 z 而言，仍然不是線性方程式，其中的非線性項出現在 B 的係數。為了消除此一非線性係數，我們進行如下的控制訊號轉換：

$$v = (u - \alpha(z))/\beta(z) \Rightarrow u = \alpha(z) + \beta(z)v \quad (6.5.4)$$

將之代入(6.5.3)式，即得

$$\dot{z} = Az + Bv \quad (6.5.5)$$

此為線性系統的標準方程式，其中新的控制訊號 v 可採用狀態回授的形式：

$$v = -Kz \quad (6.5.6)$$

透過適當選擇 K 矩陣，使得閉迴路系統 $\dot{z} = (A - BK)z$ 的極點(特徵值)落入所指定的位置。將(6.5.6)式代入(6.5.4)式，得到轉換前的控制訊號 u 為

$$u = \alpha(z) - \beta(z)Kz \quad (6.5.7)$$

由上觀之，回授線性化的工作必須經過二個轉換的過程(參見圖 6.5.1)：

(1) 座標轉換： $z = \Phi(x)$ 。

(2) 控制轉換： $v = (u - \alpha(z))/\beta(z)$ 。

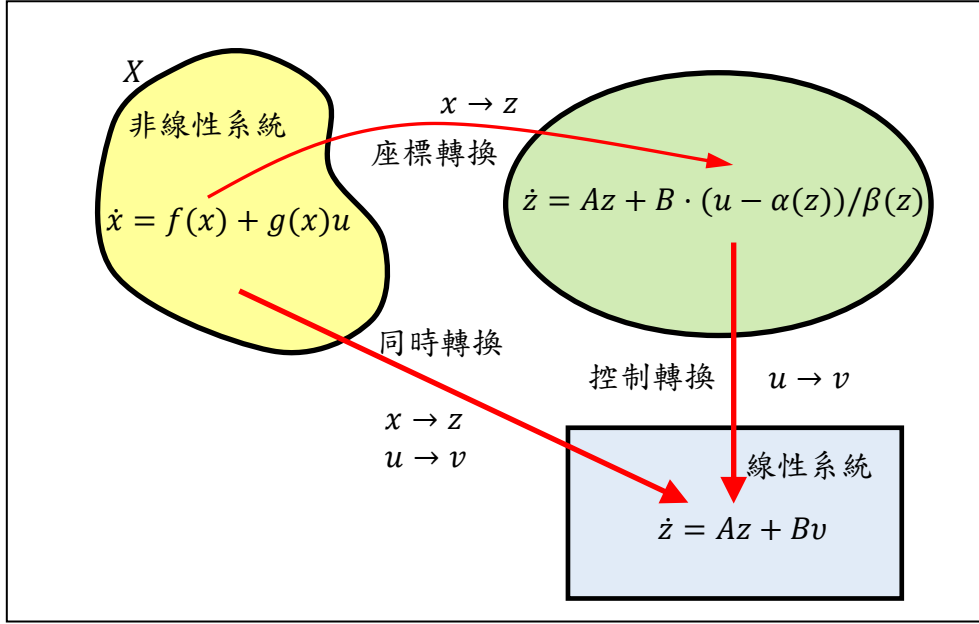


圖 6.5.1 非線性系統 $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ 經過座標轉換 $x \rightarrow z$ 與控制轉換 $u \rightarrow v$ 二個過程，最後轉換成線性系統 $\dot{z} = Az + Bv$ 。

以下我們先假設(6.5.1)式可被回授線性化，從而將轉換式 $\Phi(x)$ 推導出來；然後再從推導的過程中，歸納出非線性系統可被回授線性化的條件。首先對微分同構轉換 $z = \Phi(x)$ 取對時間的一次微分，

$$\dot{z} = \frac{d\Phi(x)}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} [f(x) + g(x)u] \quad (6.5.8)$$

另一方面由(6.5.3)式可得

$$\dot{z} = Az + B \cdot (u - \alpha(z))/\beta(z) = A\Phi(x) + B \cdot (u - \alpha(x))/\beta(x) \quad (6.5.9)$$

其中

$$\alpha(x) = \alpha(z)|_{z=\Phi(x)}, \beta(x) = \beta(z)|_{z=\Phi(x)}$$

比較(6.5.8)、(6.5.9)二式得

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} [f(x) + g(x)u] = A\Phi(x) + B \cdot (u - \alpha(x))/\beta(x) \quad (6.5.10)$$

由於上式對所有 x 及 u 均須成立，故必須左右二邊含 u 的項要相等，不含 u 的項也要相等。先令二邊不含 u 的項相等，得

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} f(x) = A\Phi(x) - B\alpha(x)/\beta(x) \quad (6.5.11)$$

再令含 u 的項相等，得到另一組方程式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} g(x) = B/\beta(x) \quad (6.5.12)$$

在(6.5.11)、(6.5.12)二式中，已知數與未知數分別如下：

- 已知二個向量函數 $f(x)$ ， $g(x)$
- 求解常數矩陣 A 、 B ，純量函數 α 、 β ，以及向量函數 $\Phi(x) = [\phi_1(x)\phi_2(x)\cdots\phi_n(x)]^T$ 。

由於待求的未知數太多，在求解以上問題之前，我們必須先加以簡化。常數矩陣 A 、 B 雖然是未知，但可以透過線性系統中的相似轉換(similarity transformation) M ，將 A, B 矩陣化

成一種已知的標準形式。對於線性系統(6.5.5)式，做如下的相似轉換：

$$\bar{z} = Mz \rightarrow z = M^{-1}\bar{z} \quad (6.5.13)$$

則(6.5.5)式可轉換成如下的形式：

$$\dot{z} = Az + Bv \xrightarrow{\bar{z}=Mz} \dot{\bar{z}} = MAM^{-1}\bar{z} + MBv = \bar{A}\bar{z} + \bar{B}v \quad (6.5.14)$$

根據線性系統理論，如果\$(A, B)\$是可控的話，則存在相似轉換矩陣\$M\$，使得(6.5.14)式中的矩陣\$\bar{A}\$與\$\bar{B}\$具有如下簡單的結構：

$$\bar{A} = MAM^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \bar{B} = MB = B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.5.15)$$

此時的線性系統\$\dot{\bar{z}} = \bar{A}\bar{z} + \bar{B}v\$稱為具有可控正則型式(controllable canonical form)。 (6.5.15)式的\$\bar{A}\$矩陣可進一步拆解成

$$\bar{A} = MAM^{-1} = A_c + B_c\lambda^T \quad (6.5.16)$$

其中

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1}, \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \quad (6.5.17)$$

因此經過可控正則相似轉換後的線性系統化成

$$\dot{\bar{z}} = \bar{A}\bar{z} + \bar{B}v = (A_c + B_c\lambda^T)\bar{z} + B_cv \quad (6.5.18)$$

上式中的\$A_c\$與\$B_c\$矩陣具有已知的簡單結構，如(6.5.17)式所示。在從(6.5.1)式轉換到(6.5.5)式的過程中，我們要求座標轉換\$z = \Phi(x)\$必須使得轉換後的線性系統(6.5.5)式具有如(6.5.18)式的結構，亦即

$$\dot{z} = (A_c + B_c\lambda^T)z + B_c \cdot (u - \alpha)/\beta = A_cz + B_c \cdot (u - \bar{\alpha})/\beta \quad (6.5.19)$$

其中等式的最右邊是將\$B_c\lambda^Tz\$與未知函數\$\alpha(z)\$合併成另一未知函數\$\bar{\alpha}(z)\$。因為都是未知函數，以下仍將\$\bar{\alpha}\$註記成\$\alpha\$。比較(6.5.3)式與(6.5.19)式，可知相似轉換的作用讓我們得到如下的結果：

$$A \rightarrow A_c, B \rightarrow B_c \quad (6.5.20)$$

求得常數矩陣\$A\$、\$B\$的值後，後續的步驟是將\$A = A_c, B = B_c\$代入(6.5.11)、(6.5.12)二式中，以求得純量函數\$\alpha(x)\$、\$\beta(x)\$，以及向量函數\$\Phi(x) = [\phi_1(x)\phi_2(x)\cdots\phi_n(x)]^T\$。

首先考慮(6.5.11)式，其左側可表成

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} f(x) = \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix} f(x) = \begin{bmatrix} \nabla \phi_1(x) \\ \nabla \phi_2(x) \\ \vdots \\ \nabla \phi_n(x) \end{bmatrix} f(x) \quad (6.5.21)$$

而(6.5.11)式的右側可表成

$$A_c \Phi(x) - B_c \alpha(x)/\beta(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_{n-1}(x) \\ \phi_n(x) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \begin{bmatrix} \phi_2(x) \\ \phi_3(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \\ -\alpha(x)/\beta(x) \end{bmatrix} \quad (6.5.22)$$

令(6.5.21)式與(6.5.22)式相等，可得到如下的關係式

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} f(x) = \phi_2(x) \rightarrow \phi_2 = L_f \phi_1 \quad (6.5.23a)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x} f(x) = \phi_3(x) \rightarrow \phi_3 = L_f \phi_2 = L_f(L_f \phi_1) = L_f^2 \phi_1 \quad (6.5.23b)$$

⋮

$$\frac{\partial \phi_{n-1}}{\partial x} f(x) = \phi_n(x) \rightarrow \phi_n = L_f \phi_{n-1} = L_f^{n-1} \phi_1 \quad (6.5.23c)$$

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial x} f(x) = -\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \quad (6.5.24)$$

從以上各式可觀察到， ϕ_1 決定 ϕ_2 ， ϕ_2 決定 ϕ_3 ，而 ϕ_{n-1} 決定 ϕ_n 。這相當於 ϕ_2, \dots, ϕ_n 均由 ϕ_1 所唯一決定，並且是 ϕ_1 的各階李氏微分。當 ϕ_n 決定後，(6.5.24)式可用以決定純量函數 $\alpha(x)$ 、 $\beta(x)$ 。

在另一方面，(6.5.12)式則化簡成

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} g(x) = B/\beta(x) \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial x} g(x) = \begin{bmatrix} \nabla \phi_1(x) \\ \nabla \phi_2(x) \\ \vdots \\ \nabla \phi_n(x) \end{bmatrix} g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\beta(x)} \quad (6.5.25)$$

從而得到 $\Phi(x) = [\phi_1(x) \phi_2(x) \cdots \phi_n(x)]^T$ 所要滿足的關係式

$$\nabla \phi_1 \cdot g(x) = 0 \rightarrow L_g \phi_1 = 0 \quad (6.5.26a)$$

$$\nabla \phi_2 \cdot g(x) = 0 \rightarrow L_g \phi_2 = L_g L_f \phi_1 = 0 \quad (6.5.26b)$$

$$\nabla \phi_3 \cdot g(x) = 0 \rightarrow L_g \phi_3 = L_g L_f^2 \phi_1 = 0 \quad (6.5.26c)$$

⋮

$$\nabla \phi_{n-1} \cdot g(x) = 0 \rightarrow L_g \phi_{n-1} = L_g L_f^{n-2} \phi_1 = 0 \quad (6.5.26d)$$

$$\nabla \phi_n \cdot g(x) = L_g \phi_n = \frac{1}{\beta(x)} \neq 0 \quad (6.5.26e)$$

歸納以上的結果，(6.5.23)式給出 $\phi_i(x)$ 之間的關係式，並全部用 ϕ_1 加以表示：

$$\phi_{i+1} = L_f \phi_i = L_f^i \phi_1, i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (6.5.27)$$

(6.5.26)式則給出待定函數 ϕ_1 所要滿足的聯立偏微分方程式：

$$L_g L_f^{i-1} \phi_1 = 0, i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (6.5.28)$$

當 $\phi_1(x)$ 從(6.5.29)式求出後，則 α, β 可由(6.5.24)與(6.5.26e)二式的聯立，而求得解為

$$\alpha(x) = -\frac{\nabla \phi_n \cdot f(x)}{\nabla \phi_n \cdot g(x)} = -\frac{L_f^n \phi_1}{L_g L_f^{n-1} \phi_1} \quad (6.5.29)$$

$$\beta(x) = \frac{1}{\nabla \phi_n \cdot g(x)} = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} \phi_1} \quad (6.5.30)$$

經過 $z = \Phi(x)$ 轉換後，我們希望原點(即平衡點)仍映至原點，即 $\Phi(0) = 0$ 。因 $f(0) = 0$ ，故由(6.5.27)式知， $\phi_2(0) = \nabla \phi_1 \cdot f(0) = 0$ ，同理可以證明 $\phi_3(0) = \dots = \phi_n(0) = 0$ 自動滿足，故只須要求 $\phi_1(0) = 0$ 即可。

例題 6.5.1

試考慮非線性方程式

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (6.5.31)$$

其中

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -a(1+x_3)\sin(x_1+\delta) + a\sin\delta - bx_2 \\ -cx_3 + d\cos(x_1+\delta) - d\cos\delta \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.5.32)$$

而 a, b, c, d, δ 均為正常數。原點 $x = 0$ 為平衡點滿足 $f(0) = 0$ 。回授線性化的關鍵在於求解 $\phi_1(x)$ ，使其滿足(6.5.26)式：

$$\textcircled{1} \nabla \phi_1 \cdot g(x) = 0, \textcircled{2} \nabla \phi_2 \cdot g(x) = 0, \textcircled{3} \nabla \phi_3 \cdot g(x) \neq 0 \quad (6.5.33)$$

其中的 $\phi_2(x)$ 和 $\phi_3(x)$ 是由 $\phi_1(x)$ 所決定

$$\textcircled{4} \phi_2(x) = \nabla \phi_1 \cdot f(x), \textcircled{5} \phi_3(x) = \nabla \phi_2 \cdot f(x), \textcircled{6} \phi_1(0) = 0 \quad (6.5.34)$$

(a) 由條件 $\textcircled{1}$ 得到

$$0 = \nabla \phi_1 \cdot g(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} \quad (6.5.35)$$

所得條件 $\partial \phi_1 / \partial x_3 = 0$ 說明函數 $\phi_1(x)$ 與 x_3 無關。

(b) 利用條件 $\textcircled{4}$ 以及(6.5.35)式的結果，得到

$$\begin{aligned} \phi_2(x) &= \nabla \phi_1 \cdot f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} f_1(x) + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} f_2(x) + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} f_3(x) \\ &= \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} [a(1+x_3)\sin(x_1+\delta) - a\sin\delta + bx_2] \end{aligned} \quad (6.5.36)$$

(c) 將(6.5.36)式的 $\phi_2(x)$ 代入條件 $\textcircled{2}$ ，得到

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \phi_2 \cdot g(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \frac{\partial \phi_2}{\partial x_3} \\ &= -a\sin(x_1+\delta) \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (6.5.37)$$

故得 $\partial \phi_1 / \partial x_2 = 0$ ，此條件說明函數 $\phi_1(x)$ 亦與 x_2 無關。

(d) 將(6.5.36)的 ϕ_2 代入條件 $\textcircled{5}$ ，並利用(6.5.37)式的 $\partial \phi_2 / \partial x_3 = 0$ 的結果

$$\begin{aligned}
\phi_3(x) &= \nabla \phi_2 \cdot f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \\
&= \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} f_1(x) + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} f_2(x) \\
&= \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} [-a(1+x_3)\sin(x_1+\delta) + a\sin\delta - bx_2]
\end{aligned} \tag{6.5.38}$$

(e) 將上式的 $\phi_3(x)$ 代入條件⑤ $\nabla \phi_3 \cdot g(x) \neq 0$ ，得到

$$\nabla \phi_3 \cdot g(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \frac{\partial \phi_3}{\partial x_3} = -a\sin(x_1+\delta) \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} \neq 0 \tag{6.5.39}$$

因此上式要求 $\partial \phi_1 / \partial x_1 \neq 0$ ，亦即 ϕ_1 必須是 x_1 的函數。由(6.5.35)式及(6.5.37)式，已知 ϕ_1 和 x_2, x_3 均無關，故 $\phi_1(x) = \phi_1(x_1)$ 。而最簡單之 $\phi_1(x) = \phi_1(x_1)$ 函數並使得 $\partial \phi_1 / \partial x_1 \neq 0$ 者，可取

$$\phi_1(x) = \phi_1(x_1) = x_1 \tag{6.5.40}$$

且其滿足條件⑥ $\phi_1(0) = 0$ 。

(f) 決定微分同構座標轉換： $z = \Phi(x)$

ϕ_1 決定以後， ϕ_2 與 ϕ_3 即可決定之：

$$\bullet z_1 = \phi_1(x) = x_1$$

$$\bullet z_2 = \phi_2(x) = \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} x_2 = x_2, \text{ 由(6.5.36)式。}$$

$$\bullet z_3 = \phi_3(x) = -a(1+x_3)\sin(x_1+\delta) + a\sin\delta - bx_2, \text{ 由(6.5.38)式。}$$

逆轉換 $x = \Phi^{-1}(z)$ 亦存在如下：

$$x_1 = z_1, x_2 = z_2, x_3 = -1 - \frac{z_3 + bz_2 - a\sin\delta}{a\sin(z_1+\delta)} \tag{6.5.41}$$

(g) 純量函數 $\alpha(x)$ 與 $\beta(x)$ 的決定：

將 $\phi_3(x)$ 代入(6.5.29)式及(6.5.30)式，得到

$$\alpha = -\frac{\nabla \phi_3 \cdot f(x)}{\nabla \phi_3 \cdot g(x)} = -\frac{-a(1+x_3)\cos(x_1+\delta)f_1(x) - bf_2(x) - a\sin(x_1+\delta)f_3(x)}{-a\sin(x_1+\delta)} \tag{6.42a}$$

$$\beta = \frac{1}{\nabla \phi_3 \cdot g(x)} = \frac{1}{\partial \phi_3 / \partial x_3} = \frac{-1}{a\sin(x_1+\delta)} \tag{6.42b}$$

(h) 經過座標轉換後之線性方程式：

$$\dot{z} = A_c z + B_c v \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \tag{6.5.43}$$

$$\Rightarrow \dot{z}_1 = z_2, \dot{z}_2 = z_3, \dot{z}_3 = v$$

回授控制訊號 u 則由(6.5.4)式決定

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v = \alpha(x) - \frac{1}{a \sin(x_1 + \delta)} v \quad (6.5.44)$$

其中 $\alpha(x)$ 如(6.42a)式所示，而 $v = -Kz$ ，透過適當選擇 K 矩陣，使得(6.5.43)式中的閉迴路系統 $\dot{z} = (A_c - B_c K)z$ 的極點(特徵值)落入所指定的位置。

□

在上述的推導中，我們一開始是先假設座標轉換 $z = \Phi(x)$ 存在，然後再求出其型式；那麼 $z = \Phi(x)$ 存在的條件是什麼呢？其實在上面求解微分同構轉換的過程，同時亦隱含了此一轉換存在的條件。不是所有的非線性系統都可以被回授線性化，在下一節中，我們將整理出一個非線性系統可以被回授線性化時，其所必須滿足的條件。

6.6 回授線性化定理

在上一節我們已經推導出座標轉換 $z = \Phi(x) = [\phi_1(x) \phi_2(x) \cdots \phi_n(x)]^T$ 的形式，發現函數 $\phi_2(x)$ 到 $\phi_n(x)$ 都可以用 $\phi_1(x)$ 加以表示。所以函數 ϕ_1 有解的條件即是座標轉換 $z = \Phi(x)$ 存在的條件，而座標轉換 $z = \Phi(x)$ 存在的條件就是非線性系統可被回授線性化的條件。本節將應用 6.4 節的數學工具，整理歸納出非線性系統可被回授線性化的條件。

定理 6.6.1: 回授線性化定理

非線性狀態方程式 $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ 可被回授線性化，若且唯若

- (A) $\{g, \text{ad}_f g, \dots, \text{ad}_f^{n-1} g\}$ 為線性獨立。
 (B) $\{g, \text{ad}_f g, \dots, \text{ad}_f^{n-2} g\}$ 為 involutive。

證明：

(A)條件即是 $\{f, g\}$ 的可控條件，(B)條件即是 $\{f, g\}$ 的完全可積條件。(A)與(B)二個條件是非線性系統可被回授線性化的充分必要條件。首先證明必要條件的部分，亦即如果非線性系統可被回授線性化，則證明(A)與(B)二個條件必須滿足。在前一節的推導中，我們已經得到如下的結果:如果非線性系統可被回授線性化，則必存在函數 ϕ_1 滿足

$$L_g \phi_1 = L_g \phi_2 = \cdots = L_g \phi_{n-1} = 0 \quad (6.6.1)$$

$$\phi_{i+1} = L_f \phi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (6.6.2)$$

利用 6.4 節提到的一個關於李式括號的恆等式(6.4.10)

$$\begin{aligned} L_{\text{ad}_f g} h &= \nabla h \cdot \text{ad}_f g = \nabla h \cdot [f, g] \\ &= L_f L_g h - L_g L_f h \\ &= \nabla(L_g h) \cdot f - \nabla(L_f h) \cdot g \end{aligned} \quad (6.6.3)$$

並令 $h = \phi_1$ ，可得

$$\begin{aligned} L_{\text{ad}_f g} \phi_1 &= \nabla \phi_1 \cdot \text{ad}_f g \\ &= \nabla \phi_1 \cdot [f, g] \\ &= \nabla(L_g \phi_1) \cdot f - \nabla(L_f \phi_1) \cdot g \\ &= 0 - L_g \phi_2 = 0 \end{aligned} \quad (6.6.4)$$

在上面的推導中，我們使用了關係式 $L_g \phi_1 = 0$ 及 $\phi_2 = L_f \phi_1$ 。同理可以證明

$$\begin{aligned}
L_{ad_f^2 g} \phi_1 &= \nabla \phi_1 \cdot ad_f^2 g \\
&= \nabla \phi_1 \cdot [f, ad_f g] \\
&= \nabla (L_{ad_f g} \phi_1) \cdot f - \nabla (L_f \phi_1) \cdot ad_f g \\
&= 0 - \nabla \phi_2 \cdot [f, g] = -\nabla (L_g \phi_2) \cdot f + \nabla (L_f \phi_2) \cdot g \\
&= 0 + \nabla \phi_3 \cdot g = L_g \phi_3 = 0
\end{aligned} \tag{6.6.5}$$

依此類推，可以得到一系列的等式

$$L_{ad_f^k g} \phi_1 = \nabla \phi_1 \cdot ad_f^k g = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-2 \tag{6.6.6a}$$

$$\nabla \phi_1 \cdot ad_f^{n-1} g \neq 0 \tag{6.6.6b}$$

在(6.6.6a)中， $ad_f^k g, k = 0, 1, 2, \dots, n-2$ ，表 n 度空間內之 $n-1$ 個函數，且這 $n-1$ 個向量同時和 $\nabla \phi_1$ (即曲面 $\phi_1 = 0$ 之法向量)垂直，由6.4節之定義知， $ad_f^k g, k = 0, 1, 2, \dots, n-2$ ，必須為完全可積，亦即 involutive。

其次證明 $\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g\}$ 為線性獨立。採反證法，假設 $\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g\}$ 不為線性獨立，亦即存在不為零的函數 $\alpha_1(x), \dots, \alpha_{i-1}(x), i \leq n-1$ ，使得

$$ad_f^i g = \sum_{k=0}^{i-1} \alpha_k \cdot ad_f^k g \tag{6.6.7}$$

上式二側取對於 f 的李氏括號運算，得到

$$[f, ad_f^i g] = \sum_{k=0}^{i-1} \alpha_k \cdot [f, ad_f^k g] \Rightarrow ad_f^{i+1} g = \sum_{k=0}^i \alpha_k \cdot ad_f^k g \tag{6.6.8}$$

再繼續對 f 取李氏括號運算，最後得

$$ad_f^{n-1} g = \sum_{k=1}^{n-2} \alpha_k \cdot ad_f^k g$$

上式的二側再對 $\nabla \phi_1$ 取內積，而得

$$\nabla \phi_1 \cdot ad_f^{n-1} g = \sum_{k=1}^{n-2} \alpha_k \nabla \phi_1 \cdot ad_f^k g = 0 \quad (\text{由(6.6.6a)式})$$

但 $\nabla \phi_1 \cdot ad_f^{n-1} g = 0$ 的結果與(6.6.6b)式矛盾，故先前的假設不成立，亦即 $\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g\}$ 必須為線性獨立。

其次證明(A)與(B)二個條件為充分條件，亦即若(A)與(B)二個條件滿足，則非線性系統可被回授線性化。在 $\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-2} g\}$ 為線性獨立且 involutive(完全可積)的條件下，由完全可積的定義知存在 $\phi_1(x)$ 滿足

$$\begin{aligned}
\nabla \phi_1 \cdot g &= \nabla \phi_1 \cdot ad_f g = \dots = \nabla \phi_1 \cdot ad_f^{n-2} g = 0 \\
\Rightarrow L_g \phi_1 &= L_{ad_f g} \phi_1 = \dots = L_{ad_f^{n-2} g} \phi_1 = 0
\end{aligned} \tag{6.6.9}$$

上式可續化簡成如下的等義式子

$$L_g \phi_1 = L_g L_f \phi_1 = \dots = L_g L_f^{n-2} \phi_1 = 0 \tag{6.6.10}$$

例如由條件 $L_g \phi_1 = L_{ad_f g} \phi_1 = 0$ ，可得

$$\begin{aligned}
L_{ad_f g} \phi_1 &= \nabla \phi_1 \cdot [f, g] \\
&= \nabla (L_g \phi_1) \cdot f - \nabla (L_f \phi_1) \cdot g \\
&= 0 - \nabla (L_f \phi_1) \cdot g \\
&= -L_g L_f \phi_1
\end{aligned} \tag{6.6.11}$$

現已知 $L_{ad_f g} \phi_1 = 0$ ，故由(6.6.11)式得到 $L_g L_f \phi_1 = 0$ 。同理可以證明(6.6.10)式的其他等式均成立。

若吾人採用新的狀態變數為

$$[z_1 \ z_2 \ \cdots \ z_n]^T = [\phi_1 \ L_f \phi_1 \ \cdots \ L_f^{n-1} \phi_1]^T \quad (6.6.12)$$

則利用條件(6.6.9)式與(6.6.10)式，得到

$$\dot{z}_1 = \frac{\partial z_1}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} (f(x) + g(x)u) = L_f \phi_1 + (L_g \phi_1)u = L_f \phi_1 = z_2 \quad (6.6.13)$$

同理可以證明

$$\dot{z}_k = z_{k+1}, k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (6.6.14)$$

最後一個方程式是關於 \dot{z}_n

$$\begin{aligned} \dot{z}_n &= \frac{\partial z_n}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial z_n}{\partial x} (f(x) + g(x)u) = L_f z_n + (L_g z_n)u \\ &= L_f L_f^{n-1} \phi_1 + (L_g L_f^{n-1} \phi_1)u = L_f^n \phi_1 + (L_g L_f^{n-1} \phi_1)u \end{aligned} \quad (6.6.15)$$

採用類似前面關於必要條件的證明，由 $\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g\}$ 之線性獨立特性可以證明

$$L_g L_f^{n-1} \phi_1 \neq 0 \quad (6.6.16)$$

故可令(6.6.15)式之 \dot{z}_n 等於新的控制變量 v

$$\dot{T}_n = v \quad (6.6.17)$$

進而求解出控制變量的轉換關係式

$$u = -\frac{L_f^n \phi_1}{L_g L_f^{n-1} \phi_1} + \frac{1}{L_g L_f^{n-1} \phi_1} v \quad (6.6.18)$$

在新的座標 z 及新的控制變量 v 的作用下，系統的狀態空間方程式化為線性的形式

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v = A_c z + B_c v \quad (6.6.19)$$

□

綜合以上定理，給定一非線性系統 $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ ，歸納其回授線性化的步驟如下：

- (1) 建立函數向量 $g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g$ 。
- (2) 檢查 $\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-2} g\}$ 的可控條件與 involutive 條件是否成立。
- (3) 若以上條件滿足，則求解下列 $n-1$ 個聯立偏微分方程式，得到函數 ϕ_1

$$L_g L_f^{i-1} \phi_1 = 0, i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (6.6.20)$$

注意可控條件與 involutive 條件只是保證(6.6.20)式中的未知函數 $\phi_1(x)$ 有解。但是在許多情況下，檢查可控條件與 involutive 條件是否成立所需要的計算量，與直接求解 $\phi_1(x)$ 所需要的計算量相當。所以在初步設計的階段，我們可以跳過步驟(2)，直接求解函數 $\phi_1(x)$ 。只要能夠找到一個函數 $\phi_1(x)$ 滿足(6.6.20)式，也就同時證實了可控條件與 involutive 條件的成立。反之，如果經過多次的求解過程，仍無法得到函數 $\phi_1(x)$ 時，這時就要考慮步驟(2)的檢測，因為有可能是 $\{f, g\}$ 不滿足可控條件或是 involutive 條件，才導致函數 $\phi_1(x)$ 的無解。

- (4) 建立狀態座標轉換

$$[z_1 \ z_2 \ \cdots \ z_n]^T = [\phi_1 \ L_f \phi_1 \ \cdots \ L_f^{n-1} \phi_1]^T$$

(6.6.21)

以及控制訊號轉換

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v, \alpha(x) = -\frac{L_f^n \phi_1}{L_g L_f^{n-1} \phi_1}, \beta(x) = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} \phi_1} \quad (6.6.22)$$

(5) 建立線性方程式：在新的狀態 z ，新的控制 v 之下，非線性系統 $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ 轉換成(6.6.19)式的線性系統。

(6) 針對轉換後的線性系統(6.6.19)式設計狀態回授控制律：

$$v = -Kz = -[k_1 k_2 \cdots k_n] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = -(k_1 z_1 + k_2 z_2 + \cdots + k_n z_n) \quad (6.6.23)$$

將 v 代入(6.6.19)式得到閉迴路的系統動態方程式

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (A_c - B_c K)z \\ &\Downarrow \\ \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & \cdots & -k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.6.24)$$

其中係數 k_i 的選擇是要使得閉迴路矩陣的特徵值落入所指定的位置。(6.6.23)式的閉迴路矩陣 $A_c - B_c K$ 的特徵多項式有一個簡單的表示法：

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - (A_c - B_c K)) &= \lambda^n + k_n \lambda^{n-1} + \cdots + k_2 \lambda + k_1 \\ &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) \end{aligned} \quad (6.6.25)$$

可以看到原來 k_i 即是特徵多項式的展開係數。將所指定的 n 個特徵值(極點) λ_i 代入(6.6.24)式中，再比較 λ 的各次方係數，即可得到係數 k_i 。將此係數代回(6.6.22)式，即可得到線性系統的狀態回授訊號：

$$\begin{aligned} v &= -(k_1 z_1 + k_2 z_2 + \cdots + k_n z_n) \\ &= -k_1 \phi_1 - k_2 L_f \phi_1 - \cdots - k_n L_f^{n-1} \phi_1 \end{aligned} \quad (6.6.26)$$

(7) 最後一個步驟是決定非線性控制律 u 。將(6.6.26)式的 v 代入(6.6.18)式，得到回授線性化所需之控制法則

$$u(x) = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} \phi_1} [-L_f^n \phi_1 - k_n L_f^{n-1} \phi_1 - \cdots - k_2 L_f^1 \phi_1 - k_1 L_f^0 \phi_1] \quad (6.6.27)$$

可以看到 $u(x)$ 是狀態 x 的非線性回授，完全是由函數 $\phi_1(x)$ 所決定。 $u(x)$ 是特殊的非線性控制律，若將此 $u(x)$ 代入非線性系統 $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ 之中，將使得非線性系統的行為與線性系統(6.6.24)的行為一致，而達到回授線性化的最終目的。

例題 6.6.1

考慮如圖 6.6.1 所示的馬達驅動系統，馬達和負載之間經由一彈性扭力桿連接，馬達端和

負載端的旋轉角度分別用 q_2 和 q_1 表示之。

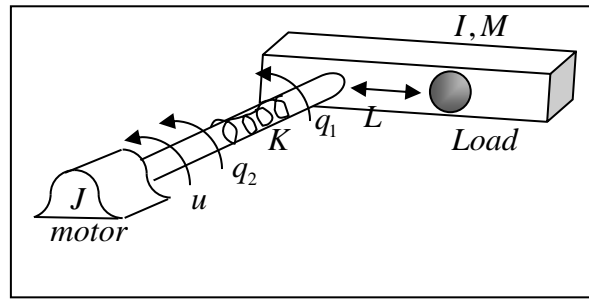


圖 6.6.1 馬達驅動系統

運動方程式分成二個部分列出如下：

馬達端：

$$J\ddot{q}_2 - K(q_1 - q_2) = u \quad (6.6.28)$$

其中 u 為馬達輸出扭矩， J 為馬達的慣性矩， K 為扭力桿的彈性係數。

負載端：

$$I\ddot{q}_1 + MgL\sin q_1 + K(q_1 - q_2) = 0 \quad (6.6.29)$$

其中 I 為負載的慣性矩， M 為負載的質量， L 為負載質心到扭力桿的距離。

定義狀態變數為 $[x_1 x_2 x_3 x_4]^T = [q_1 \quad \dot{q}_1 \quad q_2 \quad \dot{q}_2]^T$ ，則(6.6.28)、(6.6.29)兩式可改寫成標準型式：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{MgL}{I}\sin x_1 - \frac{K}{I}(x_1 - x_3) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{K}{J}(x_1 - x_3) + \frac{1}{J}u \end{cases} \Rightarrow \dot{x} = f(x) + g(x)u$$

其中

$$f(x) = \left[x_2, -\frac{MgL}{I}\sin x_1 - \frac{K}{I}(x_1 - x_3), x_4, \frac{K}{J}(x_1 - x_3) \right]^T \quad (6.6.30)$$

$$g(x) = [0, 0, 0, 1/J]^T \quad (6.6.31)$$

因控制訊號 u 只出現在(6.6.28)式，而非線性項卻出現在(6.6.29)式，故無法藉由直接觀察法而求出回授線性化所須之控制 u ，而需藉助座標轉換。依據上述回授線性化的步驟，首先要檢查可控性矩陣是否滿足

$$\text{Rank}[g, ad_f g, ad_f^2 g, ad_f^3 g] \stackrel{?}{=} 4$$

其中矩陣內的各個元素計算如下：

$$\begin{aligned} ad_f g &= [f, g] = \nabla g \cdot f - \nabla f \cdot g \\ &= - \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{MgL}{I}\cos x_1 - \frac{K}{I} \\ 0 \\ \frac{K}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K}{I} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{K}{J} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{J} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.6.32)$$

同理可得

$$ad_f^2 g = \left[0 \frac{K}{IJ} 0 \frac{-K}{J^2}\right]^T, ad_f^3 g = \left[\frac{-K}{IJ} 0 \frac{K}{J^2} 0\right]^T \quad (6.6.33)$$

合併以上元素得

$$[g, ad_f g, ad_f^2 g, ad_f^3 g] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-K}{IJ} \\ 0 & 0 & \frac{K}{IJ} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{J} & 0 & \frac{K}{J^2} \\ \frac{1}{J} & 0 & \frac{-K}{J^2} & 0 \end{bmatrix}$$

上述矩陣為非奇異，其秩(rank)為4，故滿足可控的條件，這表示達到回授線性化所需要的座標轉換 $z = \Phi(x)$ 必定存在，並設其為

$$z = \Phi(x) \Rightarrow [z_1, z_2, z_3, z_4]^T = [\phi_1, L_f \phi_1, L_f^2 \phi_1, L_f^3 \phi_1]^T$$

其中函數 $\phi_1(x)$ 需滿足下列條件

$$\nabla \phi_1 \cdot g = \nabla \phi_1 \cdot ad_f g = \nabla \phi_1 \cdot ad_f^2 g = 0, \nabla \phi_1 \cdot ad_f^3 g \neq 0 \quad (6.6.34)$$

將 $f(x)$ 及 $g(x)$ 代入上式，分別得到下列結果

$$\nabla \phi_1 \cdot g = \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}, \frac{\partial \phi_1}{\partial x_3}, \frac{\partial \phi_1}{\partial x_4}\right] \left[0, 0, 0, \frac{1}{J}\right]^T = 0 \rightarrow \frac{\partial \phi_1}{\partial x_4} = 0 \quad (6.6.35)$$

$$\nabla \phi_1 \cdot ad_f g = \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}, \frac{\partial \phi_1}{\partial x_3}, \frac{\partial \phi_1}{\partial x_4}\right] \left[0, 0, \frac{-1}{J}, 0\right]^T = 0 \rightarrow \frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} = 0 \quad (6.6.36)$$

$$\nabla \phi_1 \cdot ad_f^2 g = \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}, \frac{\partial \phi_1}{\partial x_3}, \frac{\partial \phi_1}{\partial x_4}\right] \left[0, \frac{K}{IJ}, 0, \frac{-K}{J^2}\right]^T = 0 \rightarrow \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} = 0 \quad (6.6.37)$$

$$\nabla \phi_1 \cdot ad_f^3 g \neq 0 \rightarrow \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} \neq 0 \quad (6.6.38)$$

故知 ϕ_1 僅為 x_1 之函數，最簡單之 $\phi_1(x)$ 之解為 $\phi_1(x) = x_1$ ； $\phi_2(x)$ 、 $\phi_3(x)$ 、 $\phi_4(x)$ 可隨之決定如下：

$$z_1 = \phi_1 = x_1 \quad (6.6.39)$$

$$z_2 = \phi_2 = L_f \cdot \phi_1 = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \cdot f = x_2 \quad (6.6.40)$$

$$z_3 = \phi_3 = \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \cdot f = -\frac{MgL}{I} \sin x_1 - \frac{K}{I} (x_1 - x_3) \quad (6.6.41)$$

$$z_4 = \phi_4 = \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \cdot f = -\frac{MgL}{I} x_2 \cos x_1 - \frac{K}{I} (x_2 - x_4) \quad (6.6.42)$$

回授線性化所需之控制律為

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{L_g L_f^{n-1} \phi_1} (v - L_f^n \phi_1) = \frac{1}{L_g \phi_4} (v - L_f \phi_4) \\ &= \left(\frac{\partial \phi_4}{\partial x} \cdot g\right)^{-1} \left(v - \frac{\partial \phi_4}{\partial x} \cdot f\right) = \frac{IJ}{K} (v - a(x)) \end{aligned} \quad (6.6.43)$$

其中

$$a(x) = \frac{MgL}{I} \left(x_2^2 + \frac{MgL}{I} \cos x_1 + \frac{K}{I}\right) \sin x_1 + \frac{K}{I} (x_1 - x_3) \left(\frac{K}{I} + \frac{K}{J} + \frac{MgL}{I} \cos x_1\right) \quad (6.6.44)$$

利用此一控制律，在新的狀態變數 z 之下，運動方程式化成

$$\dot{z}_1 = z_2, \dot{z}_2 = z_3, \dot{z}_3 = z_4, \dot{z}_4 = v \quad (6.6.45)$$

□

6.7 輸入-輸出回授線性化

前面所討論的回授線性化問題是考慮控制輸入訊號 u 與系統狀態 x 之間的關係，而本節所要討論的是控制輸入訊號 u 與系統輸出訊號 y 之間關係的線性化。系統的內部狀態 $x = [x_1 x_2 \cdots x_n]^T$ 含有 n 個分量，但並不是每一個分量都是我們所關心的對象。系統輸出項 $y = h(x)$ 即是用來表示我們所關心的某些系統狀態分量，或是這些分量的某種組合。加入系統的輸出項後，系統的動態方程式可表成

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (6.7.1)$$

輸入-輸出回授線性化的工作在於設計控制律 u ，使得輸入 u 與輸出 y 之間呈現線性的關係。輸入-輸出回授線性化的問題遠比輸入-狀態回授線性化的問題簡單，因為後者是要求所有的內部狀態都要線性化，而前者只是要求某些挑選的狀態被線性化即可。至於未被挑選的狀態(或稱內部狀態)則仍保持非線性的動態行為。

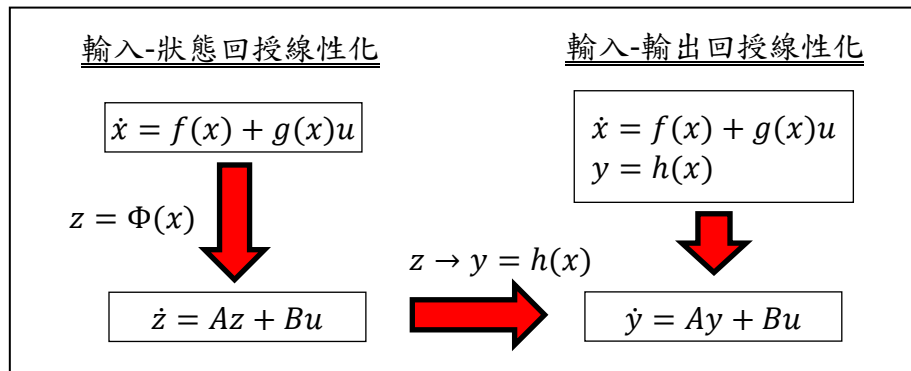


圖 6.7.1 兩種線性化的比較

圖 6.7.1 比較兩種線性化方法的異同，其中的不同點在於座標轉換的有無。輸入-狀態回授線性化必須尋求適當的座標轉換 $z = \Phi(x)$ ，使得在新座標 z 之下，系統呈現線性的行為。然而對於輸入-輸出回授線性化而言，不需要進行座標轉換，而是直接針對輸出 y 建立線性運動方程式。在另一方面，兩者也有相同的地方，我們發現只要將輸入-狀態回授線性化中的新座標 z 換成是輸出訊號 y ，即可得到輸入-輸出回授線性化的結果。兩者的這一關聯性說明它們背後的數學問題以及所需要的數學工具是完全相同的。

為了要建立輸入 u 與輸出 y 之間的關係，我們從(6.7.1)式出發，對 $y = h(x)$ 的二側取對時間的一次微分：

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} = \nabla h \cdot (f + gu) \\ &= \nabla h \cdot f + (\nabla h \cdot g)u = L_f h + (L_g h)u \end{aligned} \quad (6.7.2)$$

可以看到輸入 u 與輸出 y 已經出現在等式的兩側，但是 $L_f h$ 與 $L_g h$ 仍然是狀態 x 的函數。為了消去 x ，定義新的控制變數 v 如下：

$$v = L_f h + (L_g h)u \Rightarrow u = \frac{1}{L_g h} (v - L_f h) \quad (6.7.3)$$

在新的控制變數 v 的作用下，(6.7.2)式變成是線性系統：

$$\dot{y} = v \quad (6.7.4)$$

這時輸入 v 與輸出 y 之間已達到線性化的關係。在以上的過程中，不需要尋求座標轉換，只用到了如(6.7.3)式的控制轉換。正如前面提到的，輸入-輸出回授線性化的問題遠比輸入-狀態回授線性化的問題來得簡單。

然而(6.7.3)式中的控制轉換若存在，必須先滿足條件

$$L_g h \neq 0 \quad (6.7.5)$$

若此一條件滿足，我們稱(6.7.1)式的非線性系統具有相對階數 1，因為其輸出與輸入的關係是一階線性的形式，如(6.7.4)式所式。

然而如果 $L_g h = 0$ ，則(6.7.3)式與(6.7.4)式皆不成立，此時(6.7.2)式化成 $\dot{y} = L_f h$ ，其中的控制訊號 u 消失了。為了要重新獲得輸入 u 與輸出 y 之間的關係，我們再一次對 $\dot{y} = L_f h$ 的二側取對時間的微分：

$$\ddot{y} = \frac{d}{dt}(L_f h) = \nabla(L_f h) \cdot (f + gu) = L_f^2 h + (L_g L_f h)u \quad (6.7.6)$$

控制 u 再次出現，但須先滿足條件：

$$L_g L_f h \neq 0 \quad (6.7.7)$$

此時新的控制變數 v 定義如下：

$$v = L_f^2 h + (L_g L_f h)u \Rightarrow u = \frac{1}{L_g L_f h} (v - L_f^2 h) \quad (6.7.8)$$

(6.7.6)式的輸出入關係式化成二階的線性關係

$$\ddot{y} = v \quad (6.7.9)$$

此時我們稱(6.7.1)式的非線性系統具有相對階數 2，因為其輸出與輸入的關係是二階線性的形式。

如果(6.7.6)式中的係數 $L_g L_f h = 0$ ，則 u 又消失，必須再進行一次微分的動作。如此重複相同的步驟，直到第 r 次的時間微分， u 的係數不為零時，才停止微分的動作，此時的輸出入關係為

$$y^{(r)} = L_f^r h + (L_g L_f^{r-1} h)u \quad (6.7.10)$$

其中 $y^{(r)}$ 代表 y 對時間的 r 次微分，並且 u 的係數不為零：

$$L_g L_f^{r-1} h \neq 0 \quad (6.7.11)$$

此時透過新舊控制變數的轉換：

$$v = L_f^r h + (L_g L_f^{r-1} h)u \Rightarrow u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h} (v - L_f^r h) \quad (6.7.12)$$

輸出入關係式(6.7.10)化成 r 階的線性系統：

$$y^{(r)} = v \quad (6.7.13)$$

歸納以上的討論，我們定義非線性系統的相對階數(relative degree)如下：

定義 6.7.1:

考慮非線性系統

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

如果 $\{f, g, h\}$ 滿足下列的條件:

$$L_g L_f^0 h = L_g L_f^1 h = \dots = L_g L_f^{r-2} h = 0, L_g L_f^{r-1} h \neq 0 \quad (6.7.14)$$

則稱非線性系統的相對階數為 r 。

□

對於相同的非線性系統 $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ ，如果考慮的輸出函數 $h(x)$ 不同，其所對應的相對階數也可能不同。

例題 6.7.1:

對於非線性系統

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 + u\end{aligned}$$

考慮三種不同的輸出函數: $y = h_1(x) = x_1$ ， $y = h_2(x) = x_2$ ， $y = h_3(x) = x_1 + x_2^2$ ，分別計算其所對應的相對階數。

- $y = h_1(x) = x_1$

取 y 對時間的微分，得到

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \dot{x}_1 = x_2 \\ \ddot{y} &= \dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 + u\end{aligned}$$

輸入 u 在二次微分時才出現，故相對階數為 2。

- $y = h_2(x) = x_2$

取 y 對時間的微分，得到

$$\dot{y} = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 + u$$

輸入 u 在第一次微分時即出現，故相對階數為 1。

- $y = h_3(x) = x_1 + x_2^2$

取 y 對時間的微分，得到

$$\dot{y} = x_2 + x_2[-x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 + u]$$

輸入 u 在第一次微分時即出現，故相對階數為 1。但對於這個例題我們要特別注意一點，因為上式 u 的出現，伴隨著係數 x 的相乘，所以當 $x = 0$ 的情形下， u 隨即消失在 \dot{y} 中。因此我們稱 $y = h_3(x)$ 的相對階數為 1，僅適用於不包含 $x = 0$ 的區域內。而對於 $y = h_1(x)$ 與 $y = h_2(x)$ 的情形，所得到的相對階數則適用於 x 的所有區域。

□

對於相對階數為 r 的非線性系統，透過控制變數的轉換公式(6.7.12)，可化成如(6.7.13)式的 r 階線性系統。進一步引入新狀態變數 ζ_i ，其為輸出 y 的各階時間導數，定義如下:

$$\zeta_1 = y = L_f^0 h, \zeta_2 = \dot{y} = L_f^1 h, \dots, \zeta_r = y^{(r-1)} = L_f^{r-1} h \quad (6.7.15)$$

則(6.7.13)式可表成狀態方程式的形式

$$\begin{bmatrix} \dot{\zeta}_1 \\ \dot{\zeta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\zeta}_{r-1} \\ \dot{\zeta}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \vdots \\ \zeta_r \\ L_f^r h + (L_g L_f^{r-1} h)u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_{r-1} \\ \zeta_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \quad (6.7.16)$$

其中 $v = L_f^r h + (L_g L_f^{r-1} h)u = a + bu$ 可採用狀態回授控制的設計

$$v = -K\zeta = -[k_1 k_2 \cdots k_r] \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_r \end{bmatrix} = -(k_1 \zeta_1 + k_2 \zeta_2 + \cdots + k_r \zeta_r) \quad (6.7.17)$$

將(6.7.17)式代回(6.7.16)式，透過係數 k_i 的適當選擇，使得閉迴路系統的特徵值落入指定的位置。比較上一節的(6.6.19)式與(6.7.16)式，我們發現兩者的形式很多相似的地方：

- (1) 輸入-狀態回授線性化所得到的線性系統(6.6.19)，其狀態變數 z_i 是函數 $\phi_1(x)$ 的各階李氏微分，而輸入-輸出回授線性化所得到的線性系統(6.7.16)，其狀態變數 ζ_i 則是輸出函數 $h(x)$ 的各階李氏微分：

$$z_i = L_f^{i-1} \phi_1, \zeta_i = L_f^{i-1} h \quad (6.7.18)$$

其中 $\phi_1(x)$ 是所選取的座標轉換函數，必須滿足聯立偏微分方程式

$$L_g L_f^{i-1} \phi_1 = 0, i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (6.7.19a)$$

$h(x)$ 是系統所指定的輸出函數 $y = h(x)$ ，滿足相對階數為 r 的條件：

$$L_g L_f^{i-1} h = 0, i = 1, 2, \dots, r-1 \quad (6.7.19b)$$

可以看到二種線性化所要滿足的微分方程式具有相同的形式，而差別只在於方程式的數目不同，前者是要使系統的相對階數為 n ，而後者是要使系統的相對階數為 r 。

- (2) 如果以輸入-輸出回授線性化的觀點來看，輸入-狀態線性化實際上是在尋求一適當的輸出函數 $y = \phi_1(x)$ ，使得從 y 的各階微分項即可構成 n 階的狀態空間，亦即從 y 可以「看到」所有的狀態。因此我們可以說『輸入-狀態回授線性化』是相對階數 $r = n$ 時的『輸入-輸出回授線性化』，亦即前者是後者的特例。
- (3) 輸入-狀態回授線性化所得到的線性系統(6.6.19)，其階數 n 與原來的非線性系統階數相同，而且兩者是微分同構。然而輸入-輸出回授線性化所得到的線性系統(6.7.16)，其階數 r 通常小於原來非線性系統的階數 n 。線性系統(6.7.16)只是顯示出與輸出 y 有關的系統動態，此稱為外部動態，而內部動態則無法由(6.7.16)式呈現出來。換句話說，輸入-輸出回授線性化只能達到部分的回授線性化(partial feedback linearization)。
- (4) 輸入-狀態回授線性化是要尋求座標轉換 $z = \Phi(x)$ ，以達到全面性的回授線性化(full feedback linearization)。然而不是所有的非線性系統都可以被全面性的回授線性化，當定理 6.6.1 中的二個條件無法滿足時，座標轉換 $z = \Phi(x)$ 並不存在，此時輸入-狀態回授線性化無法擴及所有的狀態，也只能達到部分回授線性化的功能。此時輸入-狀態回授線性所得到的控制結果就與輸入-輸出回授線性化一樣了。
- (5) 當 $r = n$ 時，也就是說當非線性系統的相對階數 r 等於其本身的階數 n 時，則輸入-狀態回授線性化所得到的線性系統，與由輸入-輸出回授線性化所得到的線性系統，兩者變成相同。

從(6.7.19)式可以看到，在 $r = n$ 的情況下， $\phi_1(x) = h(x)$ ，此時(6.7.18)式則顯示 $z_i = \zeta_i$ ，此說明兩者所得到的線性系統完全相同。換句話說，在 $r = n$ 的情況下，非線性系統不具有內部動態，由輸出 y 所表示的外部動態代表了整個非線性系統的動態。

6.8 外部與內部動態的分離

考慮一個 n 階的非線性系統

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\quad (6.8.1)$$

其動態是由 n 個狀態變數 $x = [x_1 x_2 \cdots x_n]^T$ 所描述。其中的輸出函數 $y = h(x)$ 不是可以任意選擇，而是決定於控制的目標，如 y 須追蹤某一訊號 y_d 等。因此由工程問題所產生的 $y = h(x)$ ，有可能無法看到所有的狀態。此時非線性系統(6.8.1)的相對階數 r 將小於其自身的階數 n ，而且由輸出 y 所建立的 r 階線性系統只代表了非線性系統的外部動態，另外還有 $n - r$ 階的內部動態，則是輸出 y 所看不到的，也是控制 u 所無法影響的。本節的目的是要具體描述這個看不到又控制不了的內部動態，並將其從外部動態分離出來。

為了將 n 階的 x 動態區分為 r 階的外部動態與 $n - r$ 階的內部動態，我們進行下列的座標轉換：

$$\zeta = \Phi(x) \Rightarrow [x_1 x_2 \cdots x_n]^T \xrightarrow{\Phi(x)} [\zeta_1 \zeta_2 \cdots \zeta_n]^T \quad (6.8.2)$$

其中新座標 $\zeta = [\zeta_1, \cdots, \zeta_r, \zeta_{r+1}, \cdots, \zeta_n]^T$ 的前 r 個狀態 $[\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_r]$ 已在 6.7 節求得如下：

$$\zeta_1 = y = L_f^0 h, \zeta_2 = \dot{y} = L_f^1 h, \cdots, \zeta_r = y^{(r-1)} = L_f^{r-1} h \quad (6.8.3)$$

這 r 個狀態變數稱為非線性系統的外部狀態，它可以被回授線性化成如(6.7.16)式的形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{\zeta}_1 \\ \dot{\zeta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\zeta}_{r-1} \\ \dot{\zeta}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_{r-1} \\ \zeta_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v = A_c \zeta + B_c v \quad (6.8.4)$$

如上一節的介紹，我們可以透過新控制變數 v 的設計，將外部狀態 $[\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_r]$ 驅動到任意設定的終態。

n 個狀態變數扣除 r 個外部狀態變數 $[\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_r]$ 後，剩下的 $n - r$ 個狀態變數 $[\zeta_{r+1}, \zeta_{r+2}, \cdots, \zeta_n]$ 就組成了所謂的內部狀態。如何決定這些內部狀態變數呢？首先我們注意到相對階數為 r 的非線性系統必須滿足(6.7.19b)式的條件

$$L_g L_f^{i-1} h = 0, i = 1, 2, \cdots, r-1, L_g L_f^{r-1} h \neq 0 \quad (6.8.5)$$

如果用(6.8.3)式中的外部狀態來表示，(6.8.5)式的條件可改寫成

$$L_g \zeta_i = 0, i = 1, 2, \cdots, r-1, L_g \zeta_r \neq 0 \quad (6.8.6)$$

其中的 $r-1$ 個等式可進一步寫成

$$\nabla \zeta_1 \cdot g = 0, \nabla \zeta_2 \cdot g = 0, \cdots, \nabla \zeta_{r-1} \cdot g = 0 \quad (6.8.7)$$

注意在 n 維空間中，應該存在有 n 個互相垂直的向量形成該空間的一組基底。現在若將向量 g 取為其中的一個基底向量，則應存在另外 $n-1$ 個基底向量與 g 垂直。將此 $n-1$ 個基底向量取

為 $\nabla \lambda_k$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, 則有

$$\nabla \lambda_k \cdot g = 0, k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (6.8.8)$$

比較(6.8.7)式與(6.8.8)式, 我們發現 $[\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{r-1}]$ 即是其中的 $r-1$ 個 λ_k , 還剩下 $(n-1) - (r-1) = n-r$ 個 λ_k 滿足(6.8.8)式。我們將此剩下來的 $n-r$ 個 λ_k 用符號表成如下的形式: $\zeta_{r+1}, \zeta_{r+2}, \dots, \zeta_n$, 則它們都滿足(6.8.8)式:

$$\nabla \zeta_{r+1} \cdot g = 0, \nabla \zeta_{r+2} \cdot g = 0, \dots, \nabla \zeta_n \cdot g = 0 \quad (6.8.9)$$

結合(6.8.7)式的 $r-1$ 個向量: $\nabla \zeta_1, \dots, \nabla \zeta_{r-1}$, 與(6.8.9)式的 $n-r$ 個向量: $\nabla \zeta_{r+1}, \dots, \nabla \zeta_n$, 此 $n-1$ 個線性獨立向量構成一個 $n-1$ 維的空間, 此空間與向量 g 垂直。最後一個向量為 $\nabla \zeta_r$, 依據(6.8.6)式的條件, 此向量不與向量 g 垂直:

$$\nabla \zeta_r \cdot g \neq 0 \quad (6.8.10)$$

所以 $\nabla \zeta_r$ 並不在上述的 $n-1$ 維空間之中, 而是獨立出來的一個維度, 因此可以和其他的 $n-1$ 個向量形成一組 n 維空間的基底。

滿足(6.8.9)式的 $n-r$ 個解: $\zeta_{r+1}, \zeta_{r+2}, \dots, \zeta_n$ 稱為非線性系統的內部狀態變數, 它們的解不唯一, 所以沒有固定的形式。現在我們可以將整體狀態 $[\zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_n]^T$ 拆成外部與內部動態, 以一般的形式表示如下:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\zeta}_1 = \zeta_2 \\ \dot{\zeta}_2 = \zeta_3 \\ \vdots \\ \dot{\zeta}_{r-1} = \zeta_r \\ \dot{\zeta}_r = v \end{array} \right\} \text{外部動態}, \quad \left. \begin{array}{l} \dot{\zeta}_{r+1} = q_{r+1}(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \\ \vdots \\ \dot{\zeta}_n = q_n(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \end{array} \right\} \text{內部動態}, \quad y = \zeta_1 \rightarrow \text{輸出} \quad (6.8.11)$$

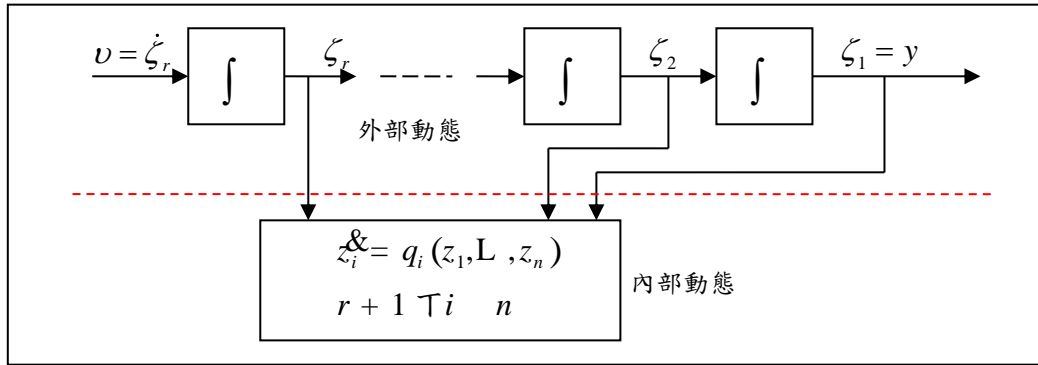


圖 6.8.1 非線性系統的外部動態與內部動態, 以及它們之間的連結運作。

可以看到, 外部動態是獨立的 r 階系統, 不受到內部動態的影響。然而內部動態的運動方程式卻受到外部動態變數的影響, 如圖 6.8.1 所示。若定義符號如下

• 外部動態變數 $\zeta = [\zeta_1 \ \zeta_2 \ \dots \ \zeta_r]^T = [h, L_f h, \dots, L_f^{r-1} h]^T$

• 內部動態變數 $\eta = [\zeta_{r+1}, \dots, \zeta_n]$

則(6.8.1)式的非線性系統經過(6.8.2)式的座標轉換 $\zeta = \Phi(x)$:

$$[x_1 x_2 \dots x_n]^T \xrightarrow{\Phi(x)} \overbrace{[\zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_r]}^{\zeta} \overbrace{[\zeta_{r+1} \dots \zeta_n]}^{\eta} = [\zeta \eta]^T$$

可化成如下的標準型式(normal form)

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_{r-1} \\ \zeta_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_r \\ a(\zeta, \eta) + b(\zeta, \eta)u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_r \\ v \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{\zeta} = A_c \zeta + B_c v \leftarrow \text{外部動態} \quad (6.8.12a)$$

$$\dot{\eta} = q(\zeta, \eta) \leftarrow \text{內部動態} \quad (6.8.12b)$$

$$y = \zeta_1 \leftarrow \text{輸出} \quad (6.8.12c)$$

其中

$$a(\zeta, \eta) = L_f^r h(x) = L_f^r h(\Phi^{-1}(\zeta, \eta)) \quad (6.8.13)$$

$$b(\zeta, \eta) = L_g L_f^{r-1} h(x) = L_g L_f^{r-1} h(\Phi^{-1}(\zeta, \eta))$$

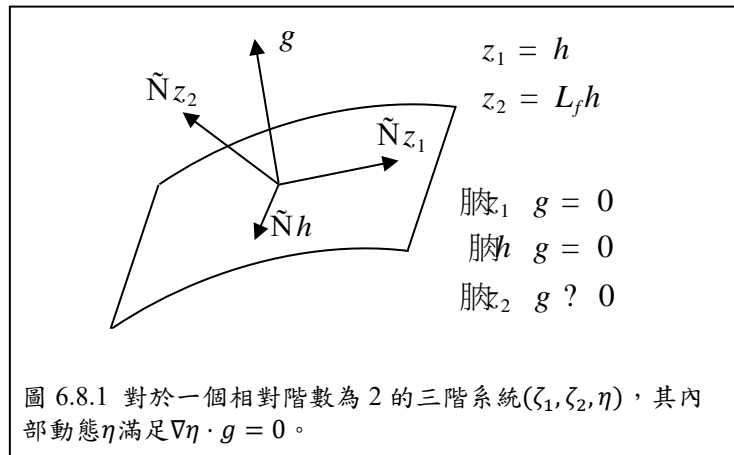
例題 6.8.1

考慮非線性系統

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ 2x_1x_2 + \sin x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{2x_2} \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} u = f(x) + g(x)u \quad (6.8.14)$$

$$y = h(x) = x_3$$

將其化成如(6.8.12)式之標準形式並分離出外部動態與內部動態。



首先求出該系統的相對階數。輸出 y 對時間的一次及二次微分為

$$\begin{aligned} \dot{y} &= 2x_2 \\ \ddot{y} &= 2\dot{x}_2 = 2(2x_1x_2 + \sin x_2) + u \end{aligned}$$

控制訊號 u 在第二次微分時出現，因此該系統的相對階數=2，故有 2 個外部狀態變數 ζ_1 與 ζ_2 ，1 個內部狀態變數 η 。根據(6.8.3)式，外部狀態變數為

$$\zeta_1 = y = x_3 \rightarrow L_g \zeta_1 = \nabla \zeta_1 \cdot g = 0$$

$$\zeta_2 = \dot{y} = 2x_2 \rightarrow L_g \zeta_2 = \nabla \zeta_2 \cdot g \neq 0$$

可見 $\nabla \zeta_1$ 與 g 垂直，而 $\nabla \zeta_2$ 不與 g 垂直。內部狀態變數 η 滿足(6.8.9)式的條件： $\nabla \eta \cdot g = 0$ ，因此 $\nabla \zeta_1$ 與 $\nabla \eta$ 都位於與向量 g 垂直的平面上，如圖 6.8.1 所示。三個向量 $\nabla \zeta_1$ 、 $\nabla \zeta_2$ 、 $\nabla \eta$ 不共平面，故可形成三維空間的一組基底。滿足 $\nabla \eta \cdot g = 0$ 條件的 η 函數不是唯一，只要 $\nabla \eta$ 不與 $\nabla \zeta_1$ 平行

即可。代入(6.8.14)式中的 $g(x)$ 定義， $\nabla\eta \cdot g = 0$ 可展開成

$$\nabla\eta \cdot g = \frac{\partial\eta}{\partial x_1} e^{2x_2} + \frac{\partial\eta}{\partial x_2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\partial\eta}{\partial x_3} \cdot 0 = 0$$

滿足上面條件的其中一個 $\eta(x)$ 解為

$$\eta(x) = 1 + x_1 - e^{2x_2} \quad (6.8.15)$$

至此三個新狀態變數已完全確定：

$$z = [\zeta_1 \zeta_2 \eta]^T = [x_3, 2x_2, 1 + x_1 - e^{2x_2}]^T$$

新舊座標間之座標轉換關係

$$x = [x_1 x_2 x_3]^T \xrightarrow{z=\Phi(x)} z = [\zeta_1 \zeta_2 \eta]^T \quad (6.8.16)$$

為一對一且可逆(微分同構)，這一點可由 Jacobian 矩陣的可逆性來檢測確認

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x_1} & \frac{\partial \eta}{\partial x_2} & \frac{\partial \eta}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2e^{2x_2} & 0 \end{bmatrix}$$

此 Jacobian 矩陣的逆矩陣對於任意 x 均存在，故(6.8.16)式的座標轉換為一對一且可逆，其逆轉換為

$$\begin{cases} \zeta_1 = x_3 \\ \zeta_2 = 2x_2 \\ \eta = 1 + x_1 - e^{2x_2} \end{cases} \xrightarrow{x=\Phi^{-1}(z)} \begin{cases} x_1 = -1 + e^{\zeta_2} + \eta \\ x_2 = \zeta_2/2 \\ x_3 = \zeta_1 \end{cases} \quad (6.8.17)$$

對新座標微分即可得到外部與內部動態方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{\zeta}_1 \\ \dot{\zeta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_2 \\ (-1 + \eta + e^{\zeta_2})\zeta_2 + 2\sin(\zeta_2/2) + u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

$$\dot{\eta} = (1 - \eta - e^{\zeta_2})(1 + 2\zeta_2 e^{\zeta_2}) - 2e^{\zeta_2} \sin(\zeta_2/2) \quad (6.8.18)$$

可以看到控制 v 的影響力僅及於外部動態，內部動態 η 雖不受到 v 的直接作用，但 η 的變化仍然受到外部狀態變數 ζ_1 與 ζ_2 的影響。

□

例題 6.8.2

考慮非線性系統

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_3 \\ x_1 x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (2 + x_3^2)/(1 + x_3^2) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = f(x) + g(x)u$$

$$y = h(x) = x_2 \quad (6.8.19)$$

將其化成如(6.8.12)式之標準形式並分離出外部動態與內部動態。

首先求出該系統的相對階數。輸出 y 對時間的一次及二次微分為

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{x}_2 = x_3 \\ \ddot{y} &= \dot{x}_3 = x_1 x_3 + u \end{aligned} \quad (6.8.20)$$

控制訊號 u 在第二次微分時出現，因此該系統的相對階數 $= 2$ ，故有 2 個外部狀態變數 ζ_1 與 ζ_2 ，1 個內部狀態變數 η 。根據(6.8.3)式，外部狀態變數為

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= y = x_2 \rightarrow L_g \zeta_1 = \nabla \zeta_1 \cdot g = 0 \\ \zeta_2 &= \dot{y} = x_3 \rightarrow L_g \zeta_2 = \nabla \zeta_2 \cdot g \neq 0\end{aligned}$$

內部狀態變數 η 必須滿足 $\nabla \eta \cdot g = 0$ 的條件。代入(6.8.19)式中的 $g(x)$ 定義， $\nabla \eta \cdot g = 0$ 可展開成

$$\nabla \eta \cdot g = 0 \Rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \frac{2+x_3^2}{1+x_3^2} + \frac{\partial \eta}{\partial x_3} = 0$$

用分離變數法求解上式，令 $\eta(x) = T_1(x_1) + T_3(x_3)$ 代入上式化簡，可求得

$$\eta(x) = -x_1 + (x_3 + \tan^{-1} x_3) \quad (6.8.21)$$

至此三個新狀態變數已完全確定：

$$z = [\zeta_1 \zeta_2 \eta]^T = [x_2, x_3, -x_1 + x_3 + \tan^{-1} x_3]^T$$

新舊座標間之座標轉換關係

$$x = [x_1 x_2 x_3]^T \xrightarrow{z=\Phi(x)} z = [\zeta_1 \zeta_2 \eta]^T$$

此座標轉換為可逆，因為其相對應的 Jacobi 矩陣為非奇異。對(6.8.21)式中的 η 取對時間的微分，並將 $\dot{\eta}$ 及(6.8.20)式用新座標 $(\zeta_1 \zeta_2 \eta)$ 來表示，可得如(6.8.12)式之標準形式：

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_1 &= \zeta_2 \\ \dot{\zeta}_2 &= \zeta_2(-\eta + \zeta_2 + \tan^{-1} \zeta_2) + u \\ \dot{\eta} &= (-\eta + \zeta_2 + \tan^{-1} \zeta_2) \left(1 + \frac{2+\zeta_2^2}{1+\zeta_2^2} \zeta_2\right)\end{aligned} \quad (6.8.22)$$

注意轉換後的系統其平衡點仍然落在原點處。

□

前面提到輸入-輸出回授線性化的目的主要是為了輸出訊號的追蹤控制。(6.8.12)式所建立的輸入-輸出回授線性化的標準型式正是為了輸出訊號的追蹤控制做準備。現在將(6.8.12)式改寫如下：

$$\begin{aligned}\dot{\zeta} &= A_c \zeta + B_c [a(x) + b(x)u] \\ \dot{\eta} &= q(\zeta, \eta) \\ y &= \zeta_1\end{aligned} \quad (6.8.23)$$

其中 A_c 、 B_c 矩陣如(6.8.4)式的定義。假設輸出 y 所要追蹤的訊號為 y_d ，並定義二個向量如下：

$$Y_d = \begin{bmatrix} y_d \\ \dot{y}_d \\ \vdots \\ y_d^{(r-1)} \end{bmatrix}, e = \begin{bmatrix} \zeta_1 - y_d \\ \zeta_2 - \dot{y}_d \\ \vdots \\ \zeta_r - y_d^{(r-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y - y_d \\ \dot{y} - \dot{y}_d \\ \vdots \\ y^{(r-1)} - y_d^{(r-1)} \end{bmatrix} = \zeta - Y_d \quad (6.8.24)$$

其中 Y_d 是由目標訊號 y_d 及其各階導數所形成的向量。誤差向量 e 是追蹤誤差 $y - y_d$ 及其各階導數所形成的向量。輸出訊號追蹤的目的是要使得追蹤誤差 $e \rightarrow 0$ ，當 $t \rightarrow \infty$ 時。現在用變數 e 取代變數 ζ ，並將(6.8.23)式改寫如下：

$$\dot{e} = A_c e + B_c [a(x) + b(x)u - y_d^{(r)}] \quad (6.8.25a)$$

$$\dot{\eta} = q(e + Y_d, \eta) \quad (6.8.25b)$$

其次進行控制變數的轉換

$$v = a(x) + b(x)u - y_d^{(r)} \Rightarrow u = -a(x)/b(x) + (v + y_d^{(r)})/b(x) \quad (6.8.26)$$

此時(6.8.25a)式化簡成

$$\dot{e} = A_c e + B_c v = (A_c - B_c K)e \quad (6.8.27)$$

其中 v 採用狀態回授設計： $v = -Ke$ ，而增益矩陣 K 的選擇是要使得閉迴路矩陣 $A_c - B_c K$ 的特徵值落在左半平面即可。如此即可保證(6.8.27)式的 e 能夠漸進穩定： $e(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ 。由(6.8.24)式的定義知，當 $e(t) \rightarrow 0$ 時，則追蹤誤差 $y - y_d$ 及其各階導數皆趨近於零。將 $v = -Ke$ 代入(6.8.26)式，得到輸出訊號追蹤所需要的非線性控制律為

$$\begin{aligned} u(x) &= -a(x)/b(x) + (-Ke + y_d^{(r)})/b(x) \\ &= a(x)/b(x) + [-K(\zeta - Y_d) + y_d^{(r)}]/b(x) \end{aligned} \quad (6.8.28)$$

其中函數 $a(x)$ 與 $b(x)$ 如(6.8.13)式的定義。另外注意外部動態變數 ζ 也是狀態變數 x 的函數：

$$\zeta = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(r-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{r-1} h(x) \end{bmatrix}$$

雖然(6.8.28)式的控制律 u 可使得追蹤誤差 e 趨近於零，但卻無法影響(6.8.25b)式所表示的內部動態。因此輸出訊號的追蹤控制若要有實際的意義，內部動態本身必須是穩定的。在下一節中，我們將介紹如何判斷內部動態的穩定性。

例題 6.8.3

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a \sin x_1 - b x_2 + c u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (6.8.29)$$

本例題的目的是要設計控制律 u ，使得輸出訊號 y 能夠追蹤某一目標訊號 y_d 。

所考慮的非線性系統為2階，且其相對階數亦為2，故知該系統沒有內部動態。因此只要外部動態為穩定，則整個非線性系統即為穩定。(6.8.29)式已是標準型式，無須再進行座標轉換。定義追蹤誤差如下：

$$e_1 = x_1 - y_d, e_2 = x_2 - \dot{y}_d$$

並取對時間的微分，得到

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= -a \sin x_1 - b x_2 + c u - \ddot{y}_d \end{aligned} \quad (6.8.30)$$

其次進行控制變數的轉換

$$v = -a \sin x_1 - b x_2 + c u - \ddot{y}_d \quad (6.8.31)$$

並設計狀態回授 $v = -Ke = -k_1 e_1 - k_2 e_2$ ，代入(6.8.30)式得到追蹤誤差的動態方程式：

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= v = -k_1 e_1 - k_2 e_2 \Rightarrow \ddot{e}_1 + k_2 \dot{e}_1 + k_1 e_1 = 0 \end{aligned} \quad (6.8.32)$$

其中係數 k_1 、 k_2 的選擇是要使得上式的特徵值落在左半平面。在以下的計算中，我們取 $k_1 = 1600$ ， $k_2 = 40$ ， $a = b = c = 1$ 。將 $v = -Ke$ 代入(6.8.31)式中，得到最後形式的非線性訊號追蹤控制律為

$$\begin{aligned} u(x) &= (a\sin x_1 + bx_2 + \ddot{y}_d - k_1 e_1 - k_2 e_2)/c \\ &= [a\sin x_1 + bx_2 + \ddot{y}_d - k_1(x_1 - y_d(t)) - k_2(x_2 - \dot{y}_d(t))]/c \end{aligned} \quad (6.8.33)$$

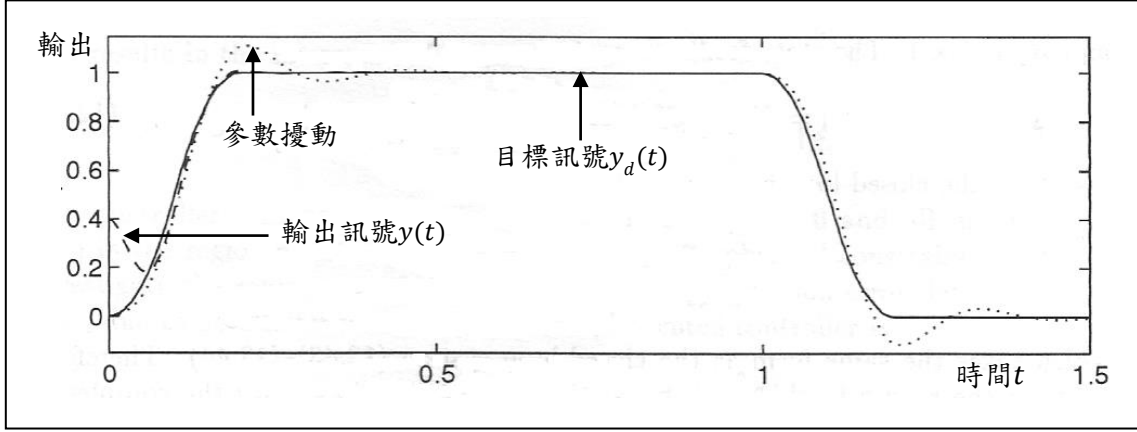


圖 6.8.1 範例 6.8.3 的輸出響應圖。其中實線代表目標訊號，折線代表輸出訊號，點線代表參數變化所造成的輸出擾動(Khalil, 1996)。

將此 $u(x)$ 代入(6.8.29)式進行數值積分，計算所得的解答 $y(t) = x_1(t)$ 顯示在圖 6.8.1 之中，其中實線代表目標訊號 $y_d(t)$ ，折線代表輸出訊號 $y(t)$ 。可以看到雖然起始位置 $y(0)$ 與 $y_d(0)$ 不同，但 $y(t)$ 很快就追蹤到 $y_d(t)$ ，並且最後二線貼合，沒有任何追蹤誤差。

完美的訊號追蹤需要一個基本前提，即系統參數要完全確定。但實際上我們對於系統參數的值，通常會有不同程度的量測誤差。圖 6.8.1 的點線代表參數變化所造成的輸出擾動，其中假設系統的實際參數值為 $a = 1/1.05$ ， $b = 1/4$ ， $c = 1/2.1$ ，但是控制律的設計仍然使用 $a = b = c = 1$ 的設定值，則訊號追蹤控制的結果如圖 6.8.1 中的點線所示。在點線的響應中，我們假設沒有初始追蹤誤差，即 $y(0) = y_d(0)$ ，因此追蹤誤差的產生純粹是因為參數擾動所引起。所設定的參數擾動量為 $\Delta a/a = 5\%$ ， $\Delta b/b = 25\%$ ， $\Delta c/c = 50\%$ ，而點線相對於目標訊號 $y_d(t)$ 的最大偏移量約僅15%，此說明所設計的訊號追蹤控制具有不錯的強健性。

□

6.9 內部動態與零動態的穩定性關係

回授線性化若要成功，必須先確保內部動態 η 的穩定性。由前一節的分析知道，內部動態與外部動態 ζ 耦合在一起，而外部動態又決定於控制輸入 u 。如此看來，不同的控制輸入可能導致內部動態不同的穩定性。與內部動態不同的，零動態的穩定性與控制輸入 u 無關，它是系統的固有特性。如同線性系統中的零點(使 Laplace 轉移函數的分子部分為零的點)，非線性系統的零動態也是由系統本身所唯一決定，不受控制輸入 u 的影響，因此零動態的穩定性可以獨立決定且與環境無關。而更重要的是，我們可以藉由零動態的穩定性來間接推論內部動態的穩定性，進而避開了直接分析內部動態穩定性的困難。

零動態的觀念已在 6.3 節做過簡介，這裡我們對零動態下一個正式的定義。非線性系統的零動態可有幾種不同的定義方法。

(1) 由內部動態定義：

零動態是指輸出 y 在任何時刻下都為零時，即 $y(t) \equiv 0, \forall t \geq 0$ ，系統響應 $x(t)$ 的動態行為。亦即當檯面上的輸出為零時，檯面下看不到的系統動態就是零動態。在任何時刻下，當輸出 y 均為零時，則 y 的各階時間導數也必須為零。在另一方面，由外部動態變數的定義知， $\zeta_1 = \dot{y}, \zeta_2 = \ddot{y}, \dots, \zeta_r = y^{(r)}$ 。因此當 y 的各階時間導數為零時，外部動態也全部為零。在(6.8.12)式的標準型態中，令外部動態變數均為零，得到：

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \vdots \\ y^{(r)} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_{r-1} \\ \zeta_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_r \\ a(\zeta, \eta) + b(\zeta, \eta)u \end{bmatrix} = 0 \quad (6.9.1a)$$

$$\dot{\eta} = q(\zeta, \eta) \quad (6.9.1b)$$

由上式可以看到，當外部動態 ζ 為零時(即輸出 y 為零時)，非線性系統的動態就剩下內部動態 η 。而根據定義，零動態是輸出 y 為零時的系統動態。合起來說，我們得到如下的觀察：

『零動態就是外部動態為零時的系統內部動態』

若以數學符號來表示，令外部動態 $\zeta = [\zeta_1 \cdots \zeta_r]^T = 0$ ，代入(6.9.1b)式中，得到零動態的數學表示式如下：

$$\dot{\eta} = q(0, \eta) \quad (6.9.2)$$

比較(6.9.1b)式與(6.9.2)式，可以看到零動態 $\dot{\eta} = q(0, \eta)$ 是內部動態 $\dot{\eta} = q(\zeta, \eta)$ 的一種特例，也就是零動態就是外部動態 $\zeta = 0$ 時的系統內部動態。

(2) 由空間幾何所定義：

輸出 y 為零的條件可用系統狀態變數 x 表示如下：

$$\begin{cases} \zeta_1 = 0 \rightarrow y = h(x) = 0 \\ \zeta_2 = 0 \rightarrow \dot{y} = L_f h(x) = 0 \\ \vdots \\ \zeta_r = 0 \rightarrow y^{(r-1)} = L_f^{r-1} h(x) = 0 \end{cases} \quad (6.9.3)$$

因為零動態是輸出 y 及其各階導數為零時，系統狀態變數 x 的動態行為。由(6.9.3)式可知當輸出為零時，狀態變數 $x(t)$ 必須落入以下之集合

$$M^* = \{x | h(x) = L_f h(x) = \cdots = L_f^{r-1} h(x) = 0\} \quad (6.9.4)$$

此集合所顯示的 x 區域範圍即是系統的零動態。換句話說，當系統狀態變數 x 進入集合 M^* 之內，系統的輸出及其各階導數必為零。

(3) 由控制律 u 所定義

由(6.7.16)式知道，外部狀態變數若要全部為零，其先決條件必須使得 $\dot{\zeta}_r = 0$ ，滿足此條件的控制律可求得為

$$u^*(x) = -\frac{L_f^r h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)} \quad (6.9.5)$$

故零動態也可由下式定義：

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u^*(x) = f(x) - \frac{L_f^r h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)} g(x) \quad (6.9.6)$$

上式所表示的零動態直接用系統的原始狀態變數 x 來表示，因此無須進行內、外部動態的分解動作。而由(6.9.2)式所表示的零動態則需先進行外部動態與內部動態的分解。應用 Lyapunov 直接定理或間接定理決定(6.9.6)式的穩定性，即可知道零動態的穩定性。

例題 6.9.1

繼續考慮例題 6.8.1 的例子，此系統的標準式已求出為

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_1 &= \zeta_2 \\ \dot{\zeta}_2 &= (-1 + \eta + e^{\zeta_2})\zeta_2 + 2\sin(\zeta_2/2) + u \\ \dot{\eta} &= (1 - \eta - e^{\zeta_2})(1 + 2\zeta_2 e^{\zeta_2}) - 2e^{\zeta_2}\sin(\zeta_2/2)\end{aligned}\quad (6.9.7)$$

造成零動態所需之控制律 u^* 必須使得 $\dot{\zeta}_1 = \dot{\zeta}_2 = 0$ ，由此條件可得 $u^* = -(-1 + \eta + e^{\zeta_2})\zeta_2 - 2\sin(\zeta_2/2)$ 。其次令外部動態變數 $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$ ，代入(6.9.7)式的最後一式中，而得零動態為 $\dot{\eta} = -\eta$ ，故知零動態為穩定。

□

定義了零動態之後，以下將說明如何透過零動態的穩定性判斷內部動態的穩定性。一樣考慮如下的非線性系統

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, y = h(x) \quad (6.9.8)$$

並假設其相對階數為 r 。將此非線性系統分解成如下的標準型式

$$\begin{bmatrix} \dot{\zeta}_1 \\ \dot{\zeta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\zeta}_{r-1} \\ \dot{\zeta}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \vdots \\ \zeta_r \\ L_f^r h + (L_g L_f^{r-1} h)u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_{r-1} \\ \zeta_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (6.9.9a)$$

$$\dot{\eta} = q(\zeta, \eta) \quad (6.9.9b)$$

我們的目的是要了解內部動態 $\dot{\eta} = q(\zeta, \eta)$ 是否為穩定。首先我們注意到內部動態 $\dot{\eta} = q(\zeta, \eta)$ 之中，出現了外部動態變數 ζ ，因此內部動態若要為穩定必須先要求外部動態為穩定。其中外部動態的穩定可由控制輸入 u 來完成。可使外部動態為線性化的控制輸入為

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h} (-L_f^r h + v) \quad (6.9.10)$$

此時所對應的線性化方程式如(6.9.9b)式的右式所示。將新的控制輸入 v 取成如(6.7.17)式的形式，則外部動態可表成

$$\begin{bmatrix} \dot{\zeta}_1 \\ \dot{\zeta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\zeta}_{r-1} \\ \dot{\zeta}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & \cdots & -k_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_{r-1} \\ \zeta_r \end{bmatrix} = A\zeta \quad (6.9.11)$$

其中 A 為穩定矩陣，其內的系數 k_i 是由指定的極點位置所決定，如(6.6.25)式所示。結合(6.9.11)式與(6.9.9b)式，得到

$$\dot{\zeta} = A\zeta \quad (6.9.12a)$$

$$\dot{\eta} = q(\zeta, \eta) \quad (6.9.12b)$$

為了判斷(6.9.12)式的穩定性，我們使用 Lyapunov 間接定理。亦即如果(6.9.12)式的線性化系統為穩定的話，則(6.9.12)式所代表的非線性系統為穩定。首先將 $\dot{\eta} = q(\zeta, \eta)$ 的線性化系統表成

$$\dot{\eta} = q(\zeta, \eta) \approx A_1 \zeta + A_2 \eta \quad (6.9.13)$$

結合(6.9.12a)式，得到整個非線性系統的線性化方程式如下：

$$\begin{bmatrix} \dot{\zeta} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ A_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \eta \end{bmatrix} \quad (6.9.14)$$

依據 Lyapunov 間接定理，只要線性化系統(6.9.14)為穩定，則非線性系統(6.9.12)亦為穩定。考慮如(6.9.14)式中的三角陣，根據線性代數理論，三角陣的特徵值即為其對角線上元素的特徵值。因此(6.9.14)式中三角陣若要穩定，必須其對角線上的矩陣 A 與 A_2 也要穩定。現在已知矩陣 A 為穩定(透過系數 k_i 的選擇)，剩下的問題在於確認矩陣 A_2 是否為穩定。

關於矩陣 A_2 的穩定性，我們從零動態下手。由(6.9.2)式知，零動態即為 $\dot{\eta} = q(0, \eta)$ ，取其一階展開，得到零動態的線性化方程式為

$$\dot{\eta} = q(0, \eta) \approx A_2 \eta \quad (6.9.15)$$

亦即在(6.9.13)式中，取 $\zeta = 0$ 。由此可知(6.9.14)式中的矩陣 A_2 乃由零動態所決定。因此如果零動態 $\dot{\eta} = q(0, \eta)$ 為穩定的話，則其線性化矩陣 A_2 也必為穩定，即 $\lambda_i(A_2) < 0$ 。而 A_2 穩定的話，則整個非線性系統的線性化方程式(6.9.14)也穩定。最後再透過 Lyapunov 間接定理，(6.9.14)式的穩定性可以確保原非線性系統(6.9.12)在平衡點附近的穩定性(即區域性穩定)。綜合言之，我們可以得到如下的結論：

『當一個非線性系統的零動態為穩定時，則透過回授線性化的控制，至少可以確保非線性系統的區域性穩定』。

由此可知零動態的穩定性是回授線性化控制是否能成功的關鍵因素。而零動態是非線性系統的內在特性，其穩定性可獨立決定，不受外在環境或控制輸入的影響。

6.10 多輸入多輸出系統的回授線性化

前面所討論的非線性系統稱為單一輸入、單一輸出系統(single-input, single-output, SISO)，因為其輸入訊號 u 只有一個，輸出訊號 y 也只有一個。本節要將前面的結果擴展至多輸入多輸出系統(multi-input, multi-output, MIMO)。考慮 m 個輸入、 m 個輸出的 MIMO 非線性系統：

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \quad (6.10.1a)$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \\ \vdots \\ h_m(x) \end{bmatrix} \quad (6.10.1b)$$

其中輸入 u 及輸出 y 均是 m 階向量。本節的目標是要建立 u 與 y 之間的線性化方程式，所採用的方法與前面類似，亦即對輸出 y 持續微分，直到輸入 u 出現為止。稍微不同的地方是，這裡的輸出 y 有 m 個分量，所以要對 y 的每一個分量進行微分的動作。不同的 y 分量有不同的相對階數，現在假設 y_i 的相對階數為 r_i ，亦即 y_i 對時間的 r_i 階微分後，至少出現了 u 中的一個分量。依照 6.7 節的相同步驟， y_i 對時間的 r_i 階微分 $y_i^{(r_i)}$ 可表成如下的形式：

$$y_i^{(r_i)} = L_f^{r_i} h_i + \sum_{j=1}^m (L_{g_j} L_f^{r_i-1} h_i) u_j, i = 1, 2, \dots, m \quad (6.10.2)$$

其中 u_j 的係數 $L_{g_j} L_f^{r_i-1} h_i$, $j = 1, 2, \dots, m$, 至少要有一個不為零, 如此才能確保至少一個 u_j 的出現。此時我們稱非線性系統(6.10.1)的相對階數為 (r_1, r_2, \dots, r_m) , 而 $r = r_1 + \dots + r_m$ 稱為系統的總相對階數(total relative degree)。

(6.10.2)式中含有 m 個等式, 將其排列成如下的向量形式:

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ y_2^{(r_2)} \\ \vdots \\ y_m^{(r_m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1 \\ L_f^{r_2} h_2 \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1 & L_{g_2} L_f^{r_1-1} h_1 & \dots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1 \\ L_{g_1} L_f^{r_2-1} h_2 & L_{g_2} L_f^{r_2-1} h_2 & \dots & L_{g_m} L_f^{r_2-1} h_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m & L_{g_2} L_f^{r_m-1} h_m & \dots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (6.10.3)$$

將上式中的方陣註記為符號 \mathbf{E} , 定義新的控制向量 v 如下:

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ y_2^{(r_2)} \\ \vdots \\ y_m^{(r_m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1 \\ L_f^{r_2} h_2 \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h_m \end{bmatrix} + \mathbf{E}u = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \quad (6.10.4)$$

如果矩陣 \mathbf{E} 為可逆的話, 則透過新舊控制向量的轉換:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} = \mathbf{E}^{-1} \begin{bmatrix} v_1 - L_f^{r_1} h_1 \\ v_2 - L_f^{r_2} h_2 \\ \vdots \\ v_m - L_f^{r_m} h_m \end{bmatrix} \quad (6.10.5)$$

(6.10.3)式可化成如下簡單的形式:

$$y_i^{(r_i)} = v_i, i = 1, 2, \dots, m \quad (6.10.6)$$

可以看到控制輸入 v_i 只影響到輸出 y_i , 此現象稱為解耦(decoupling)。所以控制向量的轉換式(6.10.5)不僅達到了線性化的效果, 同時兼具解耦的功能。(6.10.6)式與(6.7.13)式完全相同, 因此控制輸入訊號 v_i , $i = 1, 2, \dots, m$, 的設計可依照 6.7 節的步驟來進行, 在這裡不再重複敘述。注意對於每個輸出 y_i 都有其對應的內部動態, 而(6.10.6)式僅表示出外部動態的回授線性化結果。與上一節的情況相同, 我們必須先確認每個輸出 y_i 的內部動態均為穩定(透過零動態的穩定性來判斷), 如此外部動態的回授線性化才具有實際的意義。

控制向量的轉換式(6.10.5)如果要成立, 必須要求矩陣 \mathbf{E} 為可逆。但在很多情況下, 矩陣 \mathbf{E} 的逆矩陣並不存在, 此時我們要做一些方法上的修正。常用的修正方法有二種, 一種是重新定義輸入, 另一種是重新定義輸出, 茲分別敘述如下。

(1)輸入的重新定義

為了減少符號的複雜度, 我們以二個輸入、二個輸出的系統來加以說明。此時(6.10.3)式簡化成

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ y_2^{(r_2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1 \\ L_f^{r_2} h_2 \end{bmatrix} + \mathbf{E}u = \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1 \\ L_f^{r_2} h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11}(x) & e_{21}(x) \\ e_{12}(x) & e_{22}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (6.10.7)$$

其中的 2×2 矩陣 \mathbf{E} 為不可逆, 並設其秩(rank)為 1, 亦即矩陣 \mathbf{E} 的二直行為線性相依。透過座標

轉換 $x \rightarrow x'$ ，可將矩陣 \mathbf{E} 轉成如下的型式：

$$\begin{bmatrix} e_{11}(x) & e_{21}(x) \\ e_{12}(x) & e_{22}(x) \end{bmatrix} \xrightarrow{x \rightarrow x'} \begin{bmatrix} e_{11}(x') & 0 \\ e_{12}(x') & 0 \end{bmatrix} \quad (6.10.8)$$

則在新座標 x' 之下(以下仍然將 x' 記做 x)，(6.10.7)式化成

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ y_2^{(r_2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1 \\ L_f^{r_2} h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11}(x) \\ e_{12}(x) \end{bmatrix} u_1 \quad (6.10.9)$$

此時只有 u_1 出現在方程式之中。將上式對時間再微分一次，將所得的結果以符號形式表示如下：

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1+1)} \\ y_2^{(r_2+1)} \end{bmatrix} = b(x, u_1) + \mathbf{E}_1(x, u_1) \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (6.10.10)$$

如果矩陣 \mathbf{E}_1 為可逆，則上式對應到(6.10.4)式的標準型式。用 $[\dot{u}_1 u_2]$ 取代 $[u_1 u_2]$ ，定義成系統的控制輸入，並將 u_1 視為是擴增的狀態變數，則由(6.10.10)式可求解出控制律 $[\dot{u}_1 u_2]$ 如下：

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{E}_1^{-1} [v - b(x, u_1)] \quad (6.10.11)$$

在上面控制律的作用下，(6.10.10)式即變成線性化的型式：

$$y_1^{(r_1+1)} = v_1, y_2^{(r_2+1)} = v_2 \quad (6.10.12)$$

如果矩陣 \mathbf{E}_1 仍然是不可逆，則重複(6.10.8)式到(6.10.11)式的步驟，得到矩陣 \mathbf{E}_2 。如果 \mathbf{E}_2 仍然是不可逆，則繼續相同的疊代步驟，直到相對應的 \mathbf{E}_i 矩陣為可逆。

(2) 輸出的重新定義

前面的修正法是藉由輸入變數的重新定義，而得到可逆的 \mathbf{E} 矩陣。第二種方法則是藉由輸出變數的重新定義。在(6.10.9)式中，將第一式乘以 e_{12} 減去第二式乘以 e_{11} ，則所得結果剛好將 u_1 消去，並將此結果令為 z ：

$$z = e_{12}(x)y_1^{(r_1)} - e_{11}(x)y_2^{(r_2)} = e_{12}(x)L_f^{r_1} h_1(x) - e_{11}(x)L_f^{r_2} h_2(x) \quad (6.10.13)$$

其次取 z 對時間的一次微分，將結果表成如下的符號形式：

$$\dot{z} = \gamma_0(x) + \gamma_1(x)u_1 + \gamma_2(x)u_2 \quad (6.10.14)$$

重新定義輸出為 $[y_1 z]$ ，用以取代原先的 $[y_1 y_2]$ 。結合(6.10.9)式的第一式與(6.10.14)式，可得聯立方程式如下：

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1 \\ \gamma_0(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11}(x) & 0 \\ \gamma_1(x) & \gamma_2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1 \\ \gamma_0(x) \end{bmatrix} + \mathbf{E}_1 u \quad (6.10.15)$$

如果 \mathbf{E}_1 為可逆，則可解出回授線性化的控制律為

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{E}_1^{-1} \begin{bmatrix} v_1 - L_f^{r_1} h_1 \\ v_2 - \gamma_0(x) \end{bmatrix} \quad (6.10.16)$$

此時(6.10.15)式被控制成解耦的線性方程式：

$$y_1^{(r_1)} = v_1, \dot{z} = v_2 \quad (6.10.17)$$

後續的步驟與前面相同，就是依據所指定的極點位置設計控制訊號 v_1 與 v_2 ，使得 y_1 與 z 達到收

斂的目的。如果(6.10.16)式中的 E_1 矩陣為不可逆，則重複前述的步驟，直到 E_i 可逆為止。

6.11 實例探討：盪鞦韆

本節將討論回授線性化於盪鞦韆系統的應用。關於盪鞦韆系統的數學模式已於 1.1 節推導出來，其四個狀態分別設為 $x_1 = \theta_1$ 、 $x_2 = \dot{\theta}_1$ 、 $x_3 = \theta_2$ 、 $x_4 = \dot{\theta}_2$ ；而輸出則為 $y = x_1$ 。若以 x 代表系統的狀態向量，則系統方程式可表示成

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \dot{x}_2 = f_2(x) + g_2(x)T \\ \dot{x}_3 &= x_4, \dot{x}_4 = f_4(x) + g_4(x)T \\ y &= x_1\end{aligned}\quad (6.11.1)$$

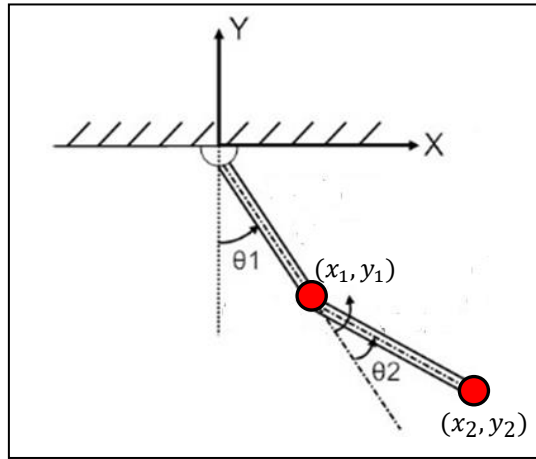


圖 6.11.1 模擬鞦韆示意圖。

其中 T 是控制力矩，其他函數則定義如下：

$$f_2(x) = \frac{\left\{ \begin{aligned} &A_2[2A_3x_2x_4\sin x_3 + A_3x_4^2\sin x_3 - A_4\sin x_1 - A_5\sin(x_1+x_3)] \\ &+ (A_2+A_3\cos x_3)[A_3x_2^2\sin x_3 + A_5\sin(x_1+x_3)] \end{aligned} \right\}}{A_2(A_1+2A_3\cos x_3) - (A_2+A_3\cos x_3)^2} \quad f_4(x) =$$

$$\frac{\left\{ \begin{aligned} &(A_2+A_3\cos x_3)[2A_3x_2x_4\sin x_3 + A_3x_4^2\sin x_3 - A_4\sin x_1 - A_5\sin(x_1+x_3)] \\ &+ (A_1+2A_3\cos x_3)[A_3x_2^2\sin x_3 + A_5\sin(x_1+x_3)] \end{aligned} \right\}}{(A_2+A_3\cos x_3)^2 - A_2(A_1+2A_3\cos x_3)}$$

$$\begin{aligned}g_2(x) &= -\frac{A_2 + A_3\cos x_3}{A_2(A_1 + 2A_3\cos x_3) - (A_2 + A_3\cos x_3)^2} \\ g_4(x) &= -\frac{A_1 + 2A_3\cos x_3}{(A_2 + A_3\cos x_3)^2 - A_2(A_1 + 2A_3\cos x_3)}\end{aligned}$$

上式中的常數參數已於 1.1 節中定義。現在對 $y = x_1$ 微分二次得

$$\ddot{y} = \dot{x}_2 = f_2(x) + g_2(x)T \quad (6.11.2)$$

此時出現控制力矩 T ，故系統的相對階數為 2；代表其有 $4 - 2 = 2$ 階的內部動態。因為外部動態只牽涉到 θ_1 ， θ_2 即為本例題的內部動態。若將控制力矩設計成

$$T = (-f_2 + v)/g_2 \quad (6.11.3)$$

則外部動態(6.11.2)變成線性的型式

$$\ddot{y} = v \quad (6.11.4)$$

因此即可採用線性控制的方法來設計控制律 v 。考慮控制目的在於要求鞣韃擺動的角度 $y = x_1 = \theta_1$ 追蹤某一指令 $y_d = \theta_d$ ，則 v 可取為

$$\ddot{y} = v = \ddot{y}_d - K_D(\dot{y} - \dot{y}_d) - K_P(y - y_d) \Rightarrow \ddot{e} + K_D\dot{e} + K_P e = 0 \quad (6.11.5)$$

其中 $e = y - y_d$ 為追蹤誤差。透過增益值 K_D 與 K_P 的選擇，吾人可以控制 e 趨近於零的速度。將(6.11.5)式代入(6.11.3)式，即得盪鞣韃所需要的控制力矩

$$T = \frac{-f_2(x) + \ddot{y}_d - K_D(\dot{y} - \dot{y}_d) - K_P(y - y_d)}{g_2(x)} \quad (6.11.6)$$

但要注意，上式的 T 只能確保外部動態(即 x_1 的動態)的線性化與收斂，而無法影響內部動態的穩定性。在 6.9 節吾人提到內部動態的區域性穩定可由零動態來加以判斷。因為零動態是一非線性系統的固有特性，與外界輸入及控制均無關。由(6.11.2)式知，使外部動態為零的控制力矩 T 為

$$T = -\frac{f_2(x)}{g_2(x)} \quad (6.11.7)$$

將之代入(6.11.1)式中的內部動態(即 θ_2 的動態，包含 x_3 與 x_4 二個變數)，即得零動態為

$$\dot{x}_3 = x_4, \dot{x}_4 = f_4(x) - \frac{f_2(x)}{g_2(x)} g_4(x) \quad (6.11.8)$$

其中各個函數 $f_2(x)$ ， $f_4(x)$ ， $g_2(x)$ ， $g_4(x)$ 已在前面定義過。接下來的工作在於判斷(6.11.8)式的穩定性。根據 Lyapunov 間接定理，吾人只要檢測(6.11.8)式在平衡點處(0,0)的線性展開是否為穩定。設(6.11.8)式的一階 Taylor 級數展開為

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (6.11.9)$$

由以上 A 矩陣的特徵值即可推論零動態的穩定性，而零動態的穩定性可確保內部動態的穩定。唯有在內部動態穩定的情形下，外部動態的線性化與控制才有意義。圖 6.11.2 顯示盪鞣韃系統的整合控制方塊圖，內部迴圈為回授線性化控制，外部迴圈為擺動角追蹤控制。

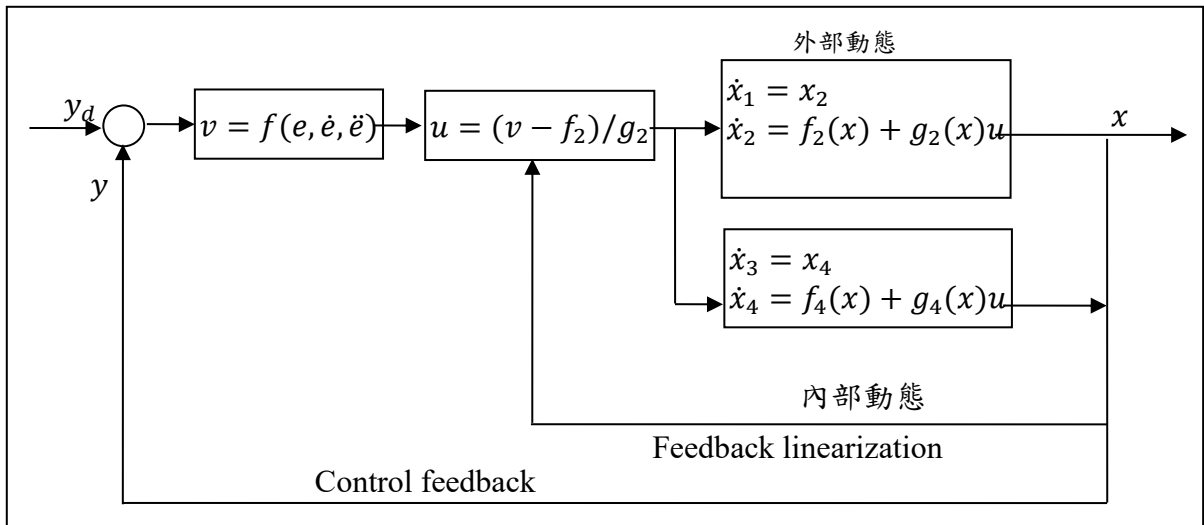


圖 6.11.2 盪鞣韃系統的整合控制方塊圖。內部迴圈為回授線性化控制，外部迴圈為擺動角追蹤控制。

6.12 學習評量

6.12.1 證明下列二系統為輸入-狀態可線性化，並求出適當的座標轉換，使其轉換成線性系統

$$(a) \begin{cases} \dot{x}_1 = e^{x_2} u \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2^2 + e^{x_2} u \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_3(1 + x_2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + (1 + x_2)u \\ \dot{x}_3 = x_2(1 + x_1) - x_3 u \end{cases}$$

(提示：(a)用 $T_1 = T_1(x_3)$ ，(b)用 $T_1 = T_1(x_1)$)

6.12.2 考慮非線性系統

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - x_3, \dot{x}_2 = -x_1 x_3 - x_2 + u, \dot{x}_3 = -x_1 + u$$

(a)此系統是否為輸入-狀態可線性化？

(b)若是，求出回授控制 u 及必要之座標轉換，使得上述系統線性化。

6.12.3 考慮非線性系統

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 x_3 - x_2 + u \\ \dot{x}_3 = -x_1 + u \\ y = x_3 \end{cases}$$

(a) 檢測此系統是否為輸入-輸出可線性化？

(b) 若是，將其轉換到標準式(normal form)，如(6.8.11)式所示。

(c) 檢測此系統是否為最小相位？

6.12.4 考慮如下非線性系統

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1 x_2 - x_2^2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 - x_2^2 + u \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_1 x_2 - x_2^2 - (x_3 - x_1)^3 + u \\ y = x_1 - x_2 \end{cases}$$

(a) 將此系統轉換成標準型式。

(b) 求出此系統的零動態，並證明零動態在原點處為全域漸進穩定。

(c) 設計一回授控制律 u ，使原非線性系統得以穩定。

6.12.5 考慮如下之非線性系統

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 2x_1^2 \\ \dot{x}_2 = x_3 + u \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_3 \\ y = x_1 \end{cases}$$

試設計一回授控制律 u ，使得輸出 y 得以漸進追蹤參考訊號 $y_r(t) = \sin t$

6.12.6 證明下列兩向量滿足 involutivity condition

$$f_1(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix}, f_2(x) = \begin{bmatrix} -e^{x_2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6.12.7 試考慮下列聯立偏微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{\partial \lambda}{\partial x_1} - \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} &= 0 \\ (x_1 + x_2) \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} + (2x_1 + x_3) \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} - (x_1 + x_2) \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} &= 0\end{aligned}$$

討論此 PDE 的解 $\lambda(x)$ 的存在性；提示：利用完全可積(completely integrable)與 involutive 間之關係式。

6.12.8 設計狀態回授 u ，將下列非線性方程式線性化

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \exp(x_2)u \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2^2 + \exp(x_2)u \\ \dot{x}_3 &= x_1 - x_2\end{aligned}$$

6.12.9 給定一非線性系統

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \tan x_3 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\tan x_2}{a \cos x_3} + \frac{\tan u}{b \cos x_2 \cos x_3} \\ \dot{x}_3 &= \frac{\tan x_2}{a \cos x_3}\end{aligned}$$

(a)證明其為可回授線性化

(b)找到適當的變數轉換 $x = T(y)$ ，使得原式轉換成

$$\dot{x} = Ax + B\beta^{-1}(x)(u - \alpha(x))$$

之型式，並求出 $\alpha(x)$ ， $\beta(x)$ 。

參考文獻(References)

回授線性化主要是透過座標轉換，使得在新座標之下，非線性系統變成線性系統。類似的觀點最早可追溯到對於非線性系統解耦合(decoupling)的研究(Freund, 1973; 1975)。狀態-輸入(State-Input)線性化的正式想法最早是 Brockett (1978)所提出，完整的理論是由 Hunt, Su and Meyer (1983)所完成。輸入-輸出(Input-Output)形式的回授線性化問題則由 Krener and Isidori (1983)所解決。有關回授線性化的發展過程及所有相關文獻的回顧請參閱 Isidori (1989)所著專書。幾本常用的非線性控制教科書，均對回授線性化理論有不同程度的介紹，例如 Slotine and Li (1991)的第 6 章，Marquez (2003)的第 10 章，Sastry (1999)的第 9 章，Khalil (1996)的第 12 章，以及 Nijmeijer and van der Schaft (1990)的第 6 章等等。Marino and Tomei (1995)所著的《Nonlinear Control Design》一書，則全部是針對回授線性化方法的討論，對於回授線性化與適應性控制及強健控制的結合有詳細的分析。

本章所介紹的回授線性化都是假設所有狀態為已知，但實際上感測器只能量到部分的狀態，其他未知的狀態則要透過狀態估測器加以估測。關於如何利用非線性狀態估測器(nonlinear observer)進行回授線性化的問題，可參閱(Vidyasagar, 1980; Marquez, 2003)以及回顧性文章(Misawa and Hedrick, 1989)。本章 6.3 節關於內部動態及零動態的討論主要參酌 Slotine (1991)。在本章 6.9 節關於輸入-輸出線性化的討論中，我們看到零動態的穩定性只能確保整個非線性系統在平衡點附近的區域性穩定。在怎樣的情況下，零動態的穩定性能確保非線性系統的全域穩定？這個問題在(Kokotovic and Sussmann, 1989)及(Sussmann, 1990)有完整的討論。本章

6.10 節將回授線性化技巧推展到多輸入多輸出(MIMO)系統，這部分主要參考(Slotine, 1991)的 6.5 節。有關 MIMO 系統的回授線性化，更完整的討論可參閱專書(Sastry, 1999)的第 9 章。

回授線性化的關鍵步驟在求得座標轉換函數 $z = \Phi(x)$ ，如(6.1.11)式所示。但函數 $\Phi(x)$ 的獲得需要求解一組聯立偏微分方程式(6.5.26)，除了少數的特例外，此聯立 PDE 方程式並不好解。Tall (2009, 2010)建立了此聯立 PDE 方程式的系統性解法，同時借助 Matlab 現有程式即可求得其解。

回授線性化在非線性飛行控制的應用可參閱博士論文(Hauser, 1989)，以及期刊論文(Hauser, Sastry and Meyer, 1992)。此外，Sastry (1999)所著專書的 10.4 節，針對一款穿音速垂直起降(V/STOL)戰鬥機，YAV-8B Harrier (翻譯成獵鷹式攻擊機，是美國海軍陸戰隊現役攻擊機)，詳細說明如何對其進行輸入-輸出形式的回授線性化。除了戰鬥機外，以下列出數種回授線性化在不同系統的應用：

- (1) 超高音速飛行器(Wei, 2015)
 - (2) 感應馬達(Chiasson, 1993)
 - (3) 陀螺儀定向(Dzielski, 1991)
 - (4) 旋轉式倒單擺(Chen, 2004)
 - (5) 四旋翼直升機(Lee, 2009)
 - (6) 磁浮軸承轉子(Smith, 1995)
 - (7) 磁浮球(Tandon, 2014)。
- Brockett, R. W., Feedback Invariants for Nonlinear Systems, IFAC Congress, 6, pp. 1115-1120, 1978.
 - Bharadwaj, S., Rao, A. V. and Mease, K. D., Entry Trajectory Tracking Law via Feedback Linearization, Journal of Guidance, Control and Dynamics, 21, pp. 726-732, 1998.
 - Chiasson, J., Dynamic Feedback Linearization of the Induction Motor, IEEE Trans. on Automatic Control, 38, pp. 1588-1594, 1993.
 - Chen, C. K., Lin C. J. and Yao, L. C., Input-State Linearization of a Rotary Inverted Pendulum, Asian Journal of Control, 6, pp. 130-135, 2004.
 - Dayawansa, W., Boothby, W. M. and Elliott, D. L., Global state and Feedback Equivalence of Nonlinear Systems, Systems & Control Letters, 6, pp. 229-234, 1985.
 - Dzielski, J., Rowell, D. and Wormley, D., Approach to Control Moment Gyroscope Steering Using Feedback Linearization, Journal of Guidance, pp. 96-106, 1991.
 - Freund, F., Decoupling and Pole Assignment in Nonlinear Systems, Electronic Letters, 9, pp. 373-374, 1973.
 - Freund, F., The Structure of Decoupled Nonlinear Systems, International Journal of Control, 21, pp. 443-450, 1975.
 - Hauser, J. E., Approximate Tracking for Nonlinear Systems with Applications to Flight Control, Ph.D. Dissertation, University of California, Berkeley, 1989.
 - Hauser, J., Sastry, S. and Meyer, G., Nonlinear Control Design for Slightly Non-minimum Phase Systems: Application to V/STOL Aircraft, Automatica, 28, pp. 665-679, 1992.
 - Hunt, L. R., Su, R. and Meyer, G., Global Transformation of Nonlinear Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, 28, pp. 24-31, 1983.

- Isidori, A., *Nonlinear Control Systems: An Introduction*, Springer, 1989.
- Khalil, H. K., *Nonlinear Systems*, Prentice-Hall, 1996.
- Kokotovic, P. V. and Sussmann, H. J., Positive Real Lemma and the Global Stabilization of Nonlinear Systems, *System & Control Letters*, 13, pp. 125-133, 1989.
- Krener, A. J. and Isidori, A., Linearization by Output Injection and Nonlinear Observers, *Systems & Control Letters*, 3, pp. 47-52, 1983.
- Lee, D., Kim, H. J. and Sastry, S., Feedback linearization vs. adaptive sliding mode control for a quadrotor helicopter, *International Journal of Control, Automation and Systems*, 7, pp. 419-428, 2009.
- Marino, R., On the Largest Feedback Linearizable Subsystems, *Systems & Control Letters*, 6, pp. 345-351, 1986.
- Marino, R., Boothby, W. M. and Elliot, D. L., Geometric Properties of Linearizable Control Systems, *Mathematical Systems Theory*, 18, pp. 97-123, 1985.
- Marino, R. and Tomei, P., *Nonlinear Control Design: Geometric, Adaptive and Robust*, Prentice-Hall, 1995.
- Marquez, H. J., *Nonlinear Control Systems: Analysis and Design*, John Wiley & Sons, 2003.
- Misawa, E. A. and Hedrick, J. K., Nonlinear Observers, A State-of-the-art Survey, *ASME Journal of Dynamical Systems, Measurement and Control*, 113, pp. 344-352, 1989.
- Nijmeijer, H. and van der Schaft, A., *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer-Verlag, 1990.
- Sastry, S., *Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control*, Springer-Verlag, 1999.
- Slotine, J. J. E. and Li, W., *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, 1991.
- Smith, R. D. and Weldon, W. F., Nonlinear Control of a Rigid Rotor Magnetic Bearing System: Modeling and Simulation with Full State Feedback, *IEEE Transactions on Magnetics*, 31, pp. 973 – 980, 1995.
- Sussmann, H. J., Limitations to the Stabilizability of Global Minimum Phase Systems, *IEEE Trans. On Automatic Control*, 35, pp. 117-119, 1990.
- Tall, I. A., Explicit Feedback Linearization of Control Systems, 48th IEEE Conference on Decision and Control, pp.7454-7459, 2009.
- Tall, I. A., Multi-Input Control Systems: Explicit Feedback Linearization, 49th IEEE Conference on Decision and Control, pp.5378-5383, 2010.
- Tandon, B., Narayan, S. and Kumar, J., Explicit Feedback Linearization of Magnetic Levitation System, *International Journal of Computer, Electrical, Automation, Control and Information Engineering*, 8, pp. 1859-1863, 2014.
- Vidyasagar, M., On the Stabilization of Nonlinear Systems Using State Detection, *IEEE Trans. On Automatic Control*, 25, pp. 504-509, 1980.
- Wei, J. and Chen, H., Designing Backstepping Control System for Hypersonic Vehicle Based on Feedback Linearization, *International Journal of Aerospace Engineering*, vol. 2015, Article ID 916328, 11 pages, DOI:10.1155/2015/916328, 2015.

