非線性控制
Nonlinear Control

第三章作業

學號 : P46104285

研究生 : 楊亞勳

授課教授 : 楊憲東

Department of Aeronautics and Astronautics

National Cheng Kung University

Tainan, Taiwan, ROC

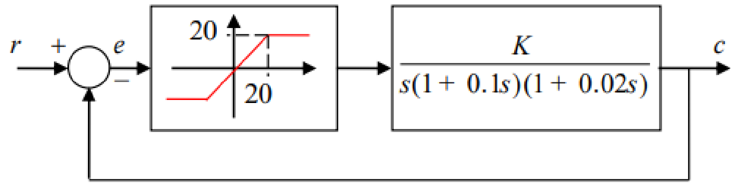
中華民國 111 年 10 月 15 日

目錄

第一題

Question:

考慮如下列之控制方塊圖，其中包含非線性的飽和元件。



(a)

將非線性飽和元件用其描述函數加以取代，並利用古典控制的 Nyquist 定理決定使得系統為穩定的最大允許 K 值(記作 K^*)。

Answer:

飽和元件之輸入可分為下列三段:

(1) 負飽和區：當輸入訊號落在範圍 $e<-20$ 內時，輸出訊號恆為 -20。

(2) 線性區：當輸入訊號落在範圍 $-20<e<20$ 時，輸出訊號和輸入訊號成正比，且兩者之間的比例為 1 (斜率)。

(3) 正飽和區：當輸入訊號落在範圍 $e>20$ 時，輸出訊號恆為 20。

首先，我們可以假設輸入訊號為一個正弦波訊號 $X\sin\omega t$ 輸入此飽和元件，根據上述的輸入輸出關係，其飽和元件之輸出訊號 $y(t)$ 可以表示成下形式:

$$y(t)=\begin{cases} X\sin\omega, & 0\le\omega t\le\omega t_1 \\ 20 & ,\ \omega t_1\le\omega t\le\dfrac{\pi}{2}\end{cases} \tag{1}$$

其中 ωt_1 滿足 $X\sin\omega t_1=20$ ，此表示式可經由移項得到 $\omega t_1=\sin^{-1}\left(\dfrac{20}{X}\right)$。此時假設系統之輸出可以用傅立葉級數展開

$$y(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(n\omega_0 t\right)+b_n\sin\left(n\omega_0 t\right)\right] \tag{2}$$

假設此系統之線性元件符合低頻濾波器之條件，亦即 $\left|G\left(j\omega_0\right)\right|\gg\left|G\left(jn\omega_0\right)\right|,\ n=2,3,...$ 。則(2)可以近似為

$$y_1(t)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos\omega_0 t+b_1\sin\omega_0 t \tag{3}$$

且因此系統之輸出入關亦為對稱形式，則有 $a_0=0$ ，此時

$$y_1(t)=a_1\cos\omega_0 t+b_1\sin\omega_0 t \tag{4}$$

根據課本圖 3.2.11，此正弦波訊號輸入飽和非線性元件時之輸出為奇函數，在傅立葉級數中，若函數為奇函數，則只剩下正弦分量，故(4)可再簡化為

$$y_1(t)=b_1\sin\omega t \tag{5}$$

接下來計算係數b_1，利用輸出對稱之性質，可取第一象限的積分並乘 4

$$\begin{aligned} b_1&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}y(t)\sin(\omega t)\,d(\omega t)\\ &=\frac{4}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}y(t)\sin(\omega t)\,d(\omega t)\\ &=\frac{4}{\pi}\left(\int_{0}^{\omega t_1}X\sin^2(\omega t)\,d(\omega t)+\int_{\omega t_1}^{\frac{\pi}{2}}20\sin^2(\omega t)\,d(\omega t)\right)\\ &=\frac{2}{\pi}\left[\sin^{-1}\left(\frac{20}{X}\right)+\left(\frac{20}{X}\right)\sqrt{1-\left(\frac{20}{X}\right)^2}\right] \end{aligned} \tag{6}$$

由上述推導，可以得到飽和元件之描述函數為

$$N(X,\phi)=\frac{b_1}{X}\angle 0^\circ \ (\text{since } \mathrm{a}_1=0) \tag{7}$$

由上式可觀察到，N 為 X 之函數，故可改寫成

$$N(X)=\frac{2}{\pi}\left[\sin^{-1}\left(\frac{20}{X}\right)+\left(\frac{20}{X}\right)\sqrt{1-\left(\frac{20}{X}\right)^2}\right] \tag{8}$$

若要套用 Nyquist 定理，參考課本圖 3.3.4 之方塊圖，將此飽和元件近似為描述函數後，可列出此包含非線性元件之轉移函數

$$\frac{c(s)}{r(s)}=\frac{N(X)KG(s)}{1+N(X)KG(s)} \tag{9}$$

其特徵方程式為

$$1+N(X)KG(j\omega)=0 \ \Rightarrow \ KG(j\omega)=-\frac{1}{N(X)} \tag{10}$$

先觀察轉移函數

$$G(s)=\frac{K}{s(0.1s+1)(0.02s+1)} \ \Rightarrow G(j\omega)=\frac{K}{j\omega(0.1j\omega+1)(0.02j\omega+1)} \tag{11}$$

再觀察描述函數，可將描述函數之畫法設定為固定ω，再畫出$N(X)$隨著X變化的情形，此時$G(j\omega)$和$N(X)$可以獨立畫出。先用 MATLAB 繪製出$G(j\omega)$之奈氏圖，如圖 1。根據(11)，此系統之不穩定極點(開迴路極點)數量為 0，由 Nyquist 定理可知，若$-1/N(X)$不被$G(j\omega)$之軌跡所包圍，則系統為穩定。

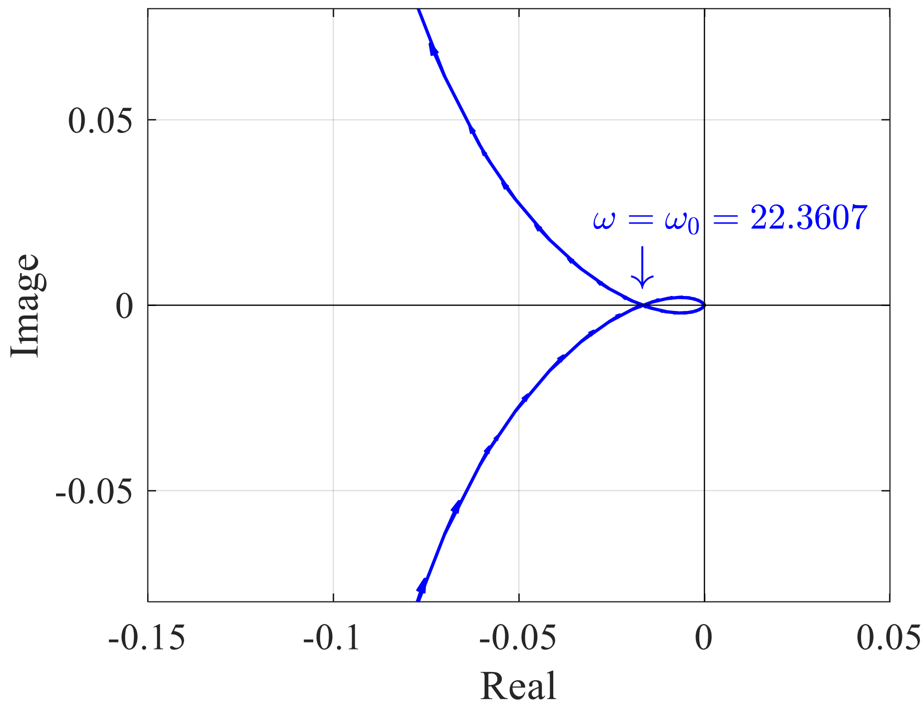


圖 1、$G(j\omega)$奈氏圖

再討論$N(X)$隨X之變化，可以分為四段:

(1) 當$0 \le X < 20$時，系統是操作再線性區域，此時非線性飽和限制不起作用，因此不是描述函數的適用範圍。

(2) 當$X = 20$時，$-\dfrac{1}{N(X)} = -1$

(3) 當$X \ge 20$時，$-\dfrac{1}{N(X)} = -\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{-1}\left[\sin^{-1}\left(\dfrac{20}{X}\right) + \left(\dfrac{20}{X}\right)\sqrt{1-\left(\dfrac{20}{X}\right)^2}\right]^{-1}$

(4) 當$X \to \infty$時，$-\dfrac{1}{N(X)} \to -\infty$

由上述推論可知$-1/N(X)$的曲線在複數平面上，是一條落在負實軸上的射線，當$X = 20$時，起點為-1。為了要尋找最大允許K值，我們必須要尋找臨界穩定的發生處，也就是$G(j\omega)$和$N(X)$之交點。因$N(X)$可代表從-1 起始之負實軸，故$G(j\omega)$和$N(X)$之交點發生在$G(j\omega)$和實軸交點處，可先將(11)展開

$$
\begin{aligned}
G(j\omega) &= \frac{K}{j\omega(0.1j\omega+1)(0.02j\omega+1)} \\
&= \frac{K}{j\omega\left(-0.002\omega^2+0.12j\omega+1\right)} \\
&= \frac{K}{\left(-0.002j\omega^3-0.12\omega^2+j\omega\right)} \\
&= \frac{K\left(-0.12\omega^2-j\omega\left(1-0.002\omega^2\right)\right)}{\left(-0.12\omega^2\right)^2+\omega^2\left(1-0.002\omega^2\right)^2} \\
&= \frac{-0.12K}{0.000004\omega^4+0.0104\omega^2+1}-j\frac{\left(1-0.002\omega^2\right)K}{0.000004\omega^4+0.0104\omega^2+1}
\end{aligned} \tag{12}
$$

並且令虛部為零，也就是

$$\left(1-0.002\omega^2\right)=0 \tag{13}$$

得到 $\omega=10\sqrt{5}\approx 22.3607$ ，將此值代回(12)實部部分後得到

$$\operatorname{Re}\left(G(j\omega)\right)\Big|_{\omega=10\sqrt{5}}=\frac{-0.12K}{0.000004\omega^4+0.0104\omega^2+1}\Big|_{\omega=10\sqrt{5}}=-\frac{K}{60} \tag{14}$$

由此可知 $G(j\omega)$ 與 $-1/N(X)$ 之交點可以透過調整 K 值來移動，由 Nyquist 定理可知，若 $-1/N(X)$ 不被 $KG(j\omega)$ 之軌跡所包圍，則系統為穩定。代表 $-K/60$ 之值要在 $-1/N(X)$ 之起點 $(-1,0)$ 的右邊，亦即

$$-\frac{K}{60}>-1\Rightarrow K<60\Rightarrow K^*=60 \tag{15}$$

由上述可知，若要系統穩定 K 之最大允許值為 60。

以上敘述可由 MATLAB 模擬繪圖可知，圖 2 為繪製當 $K^*=60$ 時，$K^*G(j\omega)$ 之奈氏圖和 $-1/N(X)$ 相交之關係。由圖中可知此系統處為臨界穩定的情形。

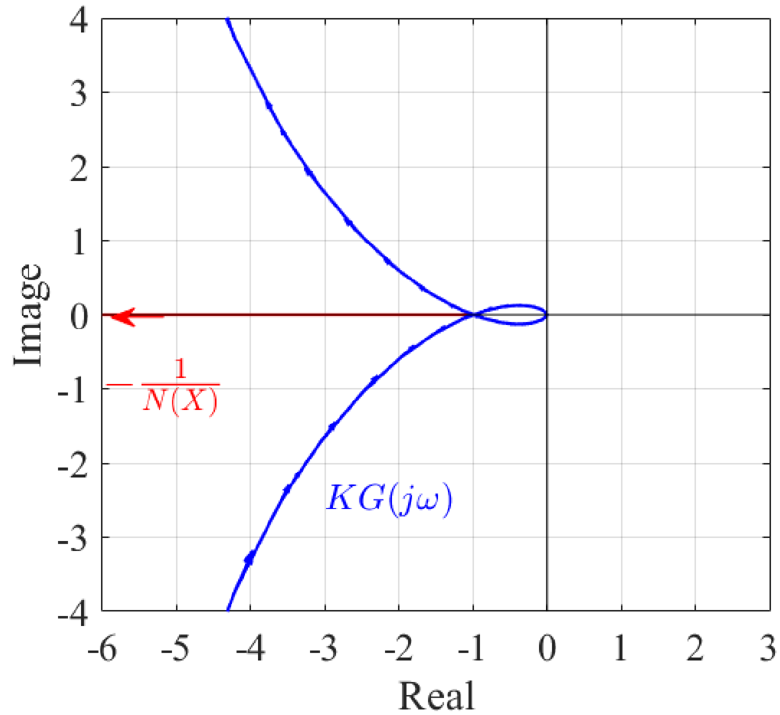


圖 2、當 $K^{*}=60$ 時，系統臨界點軌跡 $-1/N\left(X\right)$ 與線性受控體 $K^{*}G\left(j\omega\right)$ 的奈氏曲線關係

(b)

接續(a)，隨意取數值 $K_1>K^{*}$，並在上面方塊圖中，令 $K=K_1$ (例如若 $K^{*}=10$，可取 $K=K_1=15$)，參考例題 3.3.2 的方法，由描述函數求出極限圓發生時的振幅 X，及頻率 ω。

透過(a)之分析，我們可以知道系統穩定 K 之最大允許值為 60。當 K 小於 60 時，系統開迴路之奈氏圖不論系統輸入振幅為何，系統一定保持穩定。但當 K 大於 60 時，則會導致某些數值之輸入系統振幅，會使 $-1/N\left(X\right)$ 被 $KG\left(j\omega\right)$ 包圍，形成不穩定之系統。依據題目之需求，$K^{*}=60$，取 $K=K_1=100$。根據式(16)

$$G\left(j\omega\right)\Big|_{K=100}=\frac{-0.12K}{0.000004\omega^4+0.0104\omega^2+1}-j\frac{\left(1-0.002\omega^2\right)K}{0.000004\omega^4+0.0104\omega^2+1}\Big|_{K=100} \quad (16)$$

將 $K=K_1=100$ 代入，得到式(17)。

$$G\left(j\omega\right)=\frac{-12}{0.000004\omega^4+0.0104\omega^2+1}-j\frac{100-0.2\omega^2}{0.000004\omega^4+0.0104\omega^2+1} \quad (17)$$

且已知當極限圓發生時，就是臨界穩定的發生處，也就是$-1/N(X)$和$KG(j\omega)$之交點處。已知$-1/N(X)$為$(-1,0)$起始向左延伸之實數軸，故可知當$-1/N(X)$和$KG(j\omega)$相交時，$KG(j\omega)$之虛部為零。用此條件可求出極限圓發生時之頻率ω:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Im}\left(G(j\omega)\right)=0\\
&\Rightarrow \frac{100-0.2\omega^2}{0.000004\omega^4+0.0104\omega^2+1}=0\\
&\Rightarrow 100-0.2\omega^2=0\\
&\Rightarrow \omega=10\sqrt{5}
\end{aligned} \tag{18}$$

但由式(16)觀察可以發現，不論K值為多少，其頻率ω皆為$10\sqrt{5}$，代表極限圓之頻率不受K值影響。接下來求$K=K_1=100$，$\omega=10\sqrt{5}$時之振幅X。首先由下列關係

$$G(j\omega)=-\frac{1}{N(X)} \tag{19}$$

求出

$$\begin{aligned}
G(j\omega)\Big|_{\omega=10\sqrt{5}}&=\frac{-12}{0.000004\omega^4+0.0104\omega^2+1}\Big|_{\omega=10\sqrt{5}}\\
&\approx-1.6667
\end{aligned} \tag{20}$$

由此可知

$$\frac{1}{N(X)}=\left(\frac{2}{\pi}\left[\sin^{-1}\left(\frac{20}{X}\right)+\left(\frac{20}{X}\right)\sqrt{1-\left(\frac{20}{X}\right)^2}\right]\right)^{-1}=1.6667 \tag{21}$$

利用 MATLAB 中之 fsolve 函數，可求解出振幅

$$X=40.6627 \tag{22}$$

由此可知，當$K=K_1=100$時，所得到之極限圓頻率ω為$10\sqrt{5}$，振幅X為 40.6627。若用輸出響應之表示法則為

$$c(t)=X\sin(\omega t)=40.6627\sin\left(10\sqrt{5}t\right) \tag{23}$$

圖 3 為基於$K=K_1=100$時繪製之線性受控體$K^*G(j\omega)$的奈氏曲線和$-1/N(X)$曲線。由上述計算可以得知，兩曲線之交點處之振幅X為 40.6627。當振幅大小$20\le X\le 40.6627$時，$-1/N(X)$被$G(j\omega)$所包圍，系統處於不穩定的情形，不穩定故振幅X遞增，X之值會朝兩曲線交點運動。當$X>40.6627$時，$-1/N(X)$不被$G(j\omega)$所包圍，系統處於穩定情形，穩定故X遞減，X之值會朝兩曲線交點運動。這代表不論X之值大於或小於 40.6627，系統之變化趨勢皆會朝著極限圓 (臨界點)運動，代表$X=40.6627$這點之極限圓為穩定極限圓。

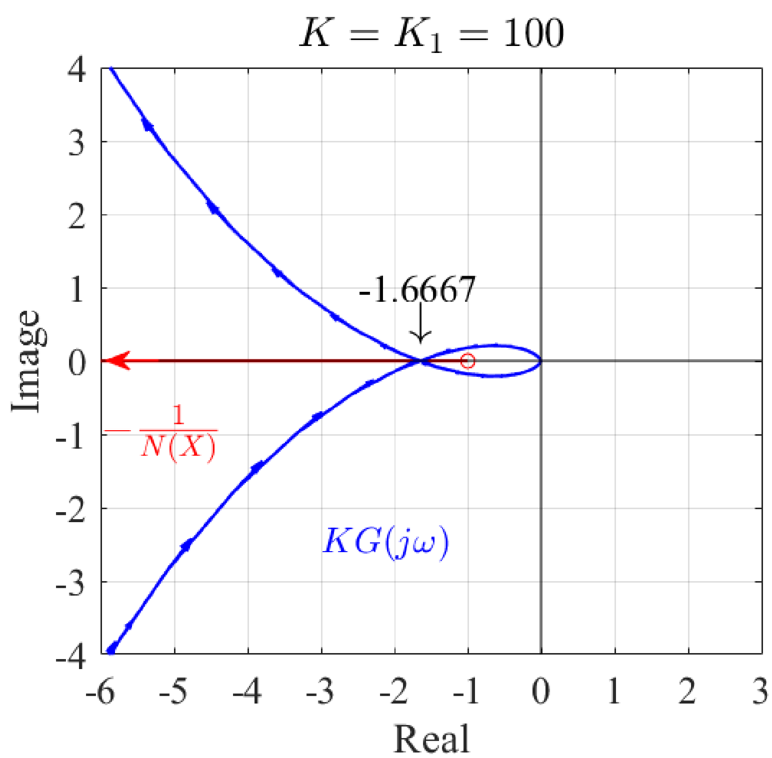


圖 3、當 $K^* = 100$ 時，系統臨界點軌跡 $-1/N(X)$ 與線性受控體 $K^*G(j\omega)$ 的奈氏曲線關係

(c)

利用 MATLAB 的非線性飽和元件模組，模擬上面方塊圖的時間響應 $c(t)$，每次模擬使用不同的 K 值，決定使得系統為穩定的最大允許 K 值(記作 K^*)。註:這裡的穩定是指在輸入指令 $r = 0$ 的情形下，不管初始誤差 $e(0) > 20$ 或是 $e(0) < 20$，都可以保證 $c(t) \to 0$。

為了在 MATLAB SIMULINK 中模擬非線性飽和元件模組，需先將此系統之線性元件轉為狀態空間方程式。此系統之線性元件轉移函數如下:

$$G(s) = \frac{1}{s(0.1s+1)(0.02s+1)} \tag{24}$$

利用 MATLAB 中之函式 ”tf2ss”將(21)轉為狀態空間方程式

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{25}$$

其中

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\ y=500x_3 \tag{26}$$

$$A=\begin{bmatrix}-60 & -500 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix},\ \mathrm{B}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \mathrm{C}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 500\end{bmatrix} \tag{27}$$

在此例中，輸出之向量為 $y=500x_3$ ，也就是此系統之輸出響應 $c(t)$ 。參考圖 4 之方塊圖關係，可知系統輸入為 0，且 $e(t)=0-y(t)=-y(t)$ ，由此可知此系統之初始值可以設置為 $x(0)=\begin{bmatrix}0 & 0 & -e(0)/500\end{bmatrix}^T$ 。

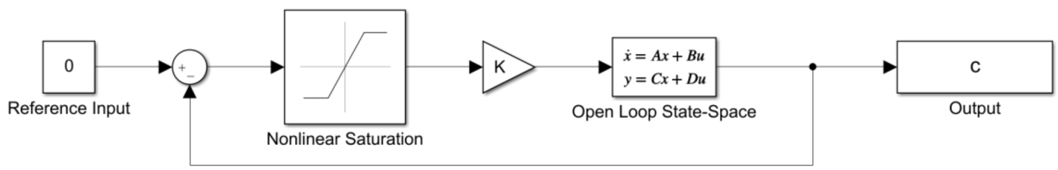


圖 4、非線性飽和元件模組於 MATLAB SIMULINK 中之架構圖

為了找出此系統之最大允許 K 值(記作 K^*)，且依照題目需求，在輸入指令 $r=0$ 的情形下，不管初始誤差 $e(0)>20$ 或是 $e(0)<20$ ，都可以保證 $c(t)\rightarrow 0$ 。故以下採用之方法，會先繪製 8 個 K 值 (1、10、20、30、40、50、60、70)之系統輸出對時間響應圖，且每個 K 值會同時繪製 $e(0)>20$ 、 $e(0)<20$ 和 $e(0)=20$ (30、10、20)等三種不同輸入振幅之系統輸出對時間響應圖。圖 5~12 為 MATLAB 模擬之結果。由圖中觀察，可以發現 $K=1,\ 10,\ 20,\ 30,\ 40,\ 50$ 時，不論輸入之系統初始誤差為何，都會快速的收斂到 0。這和(a)小題之討論結果吻合。當 $K<60$ 時，系統之 $-1/N(X)$ 軌跡永遠不會被 $KG(j\omega)$ 之軌跡所包圍，故不論系統初始誤差值為何，最後皆會收斂 ，也就是 $c(t)\rightarrow 0$ 。

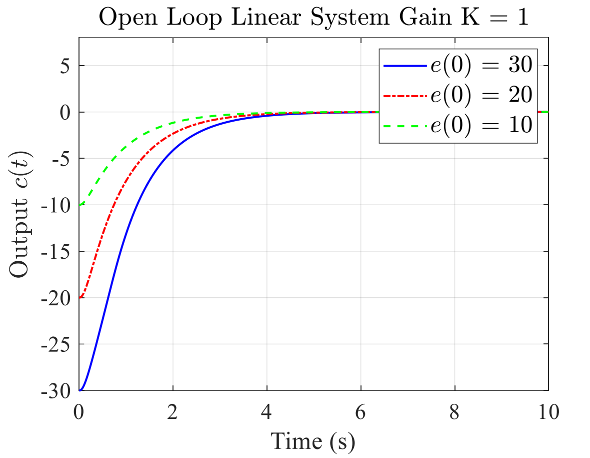


圖 5、系統增益 $K=1$時，不同$e(0)$之系統響應

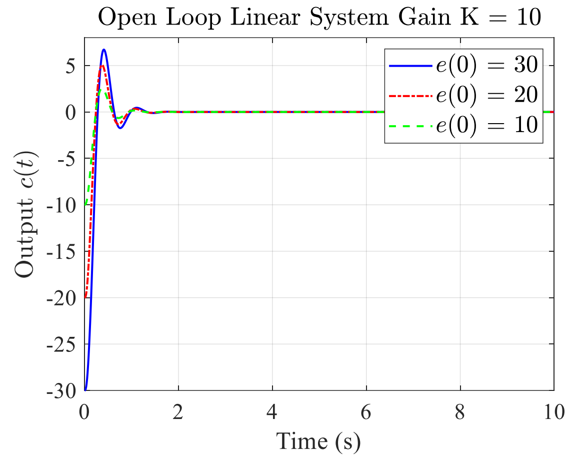


圖 6、系統增益 $K=10$時，不同$e(0)$之系統響應

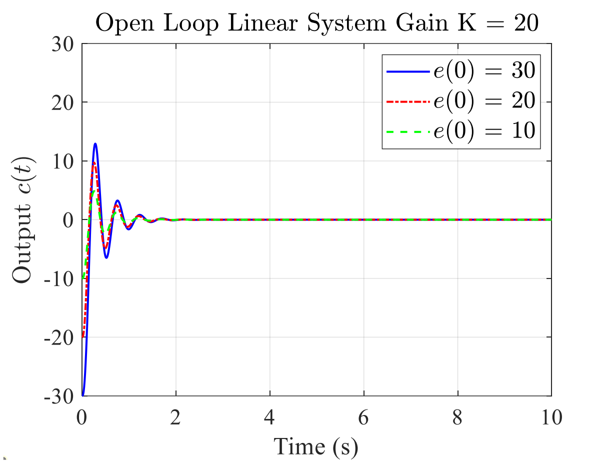


圖 7、系統增益 $K=20$時，不同$e(0)$之系統響應

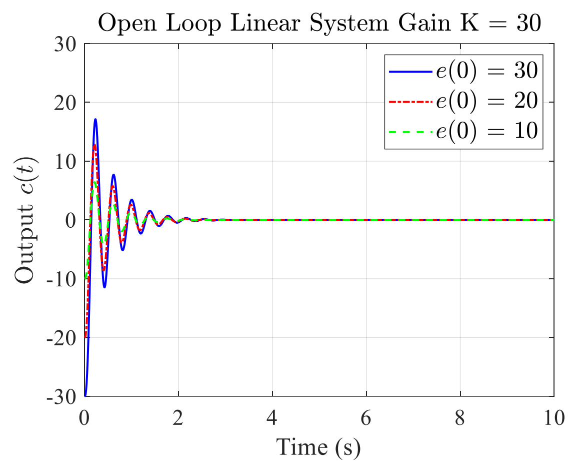


圖 8、系統增益 $K=30$時，不同$e(0)$之系統響應

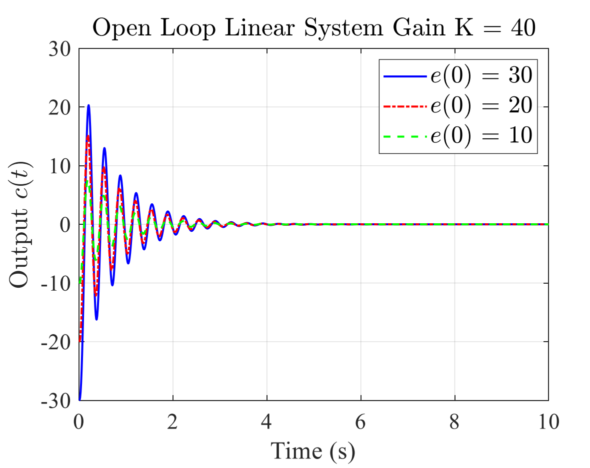


圖 9、系統增益 $K=40$時，不同$e(0)$之系統響應

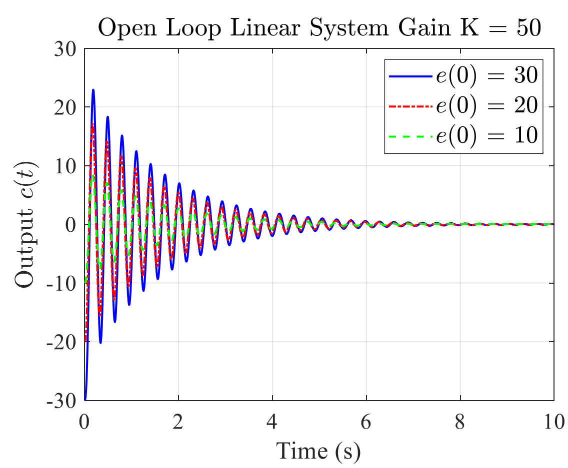


圖 10、系統增益 $K=50$時，不同$e(0)$之系統響應

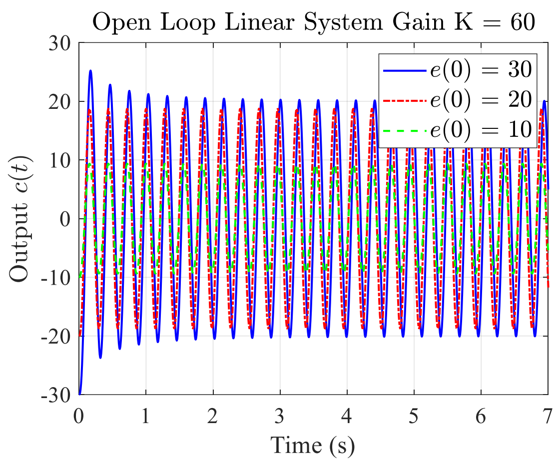


圖 11、系統增益 $K = 60$ 時，不同 $e(0)$ 之系統響應

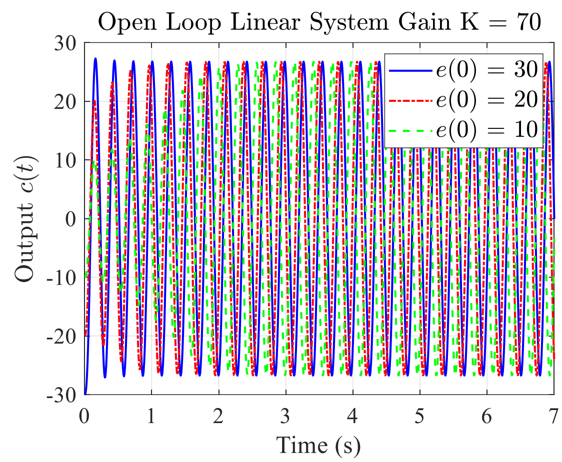


圖 12、系統增益 $K = 70$ 時，不同 $e(0)$ 之系統響應

由圖 11 開始，也就是 $K = 60$ 時，系統不再出現收斂的行為。而是依照不同的初始值，做不同振幅之震盪。這和(b)小題之討論相吻合，當 $K = 60$ 時，系統之 $G(j\omega)$ 奈式曲線會和 $-1/N(X)$ 之交點為 $(-1,0)$ ，代表不論系統之初始誤差值為何，在相平面上之結果即是產生極限圓，在時間響應圖中的表現即是既不收斂，也不發散的來回震盪。而當 $K = 70$ 時，系統也產生了來回震盪的極限圓現象，且振幅較 $K = 60$ 時大，這時可以觀察到一個現象，就是在此系統中，K 之大小和極限圓振幅呈現正向的關係。

但以上的模擬結果並無法直接驗證此系統之最大允許 K 值為 60。只能說明 K 值發生在大於 50 處。為了對此推論進行驗證，吾人將系統誤差初始值固定為 20，並繪製三種 K 值，$K = 59,\ 60,\ 61$ 之系統響應圖。結果如圖 12 所示，當 $K = 59$ 時，系統響應收斂至 0。但當 $K = 60$ 時，系統響應來回震盪，既不發散也不收斂，產生極限圓。由此可推論，在 MATLAB SIMULINK 中模擬出之最大允許 K 值和先前利用數學方法產生之結果相吻合，皆為 60，此即系統之臨界穩定增益。

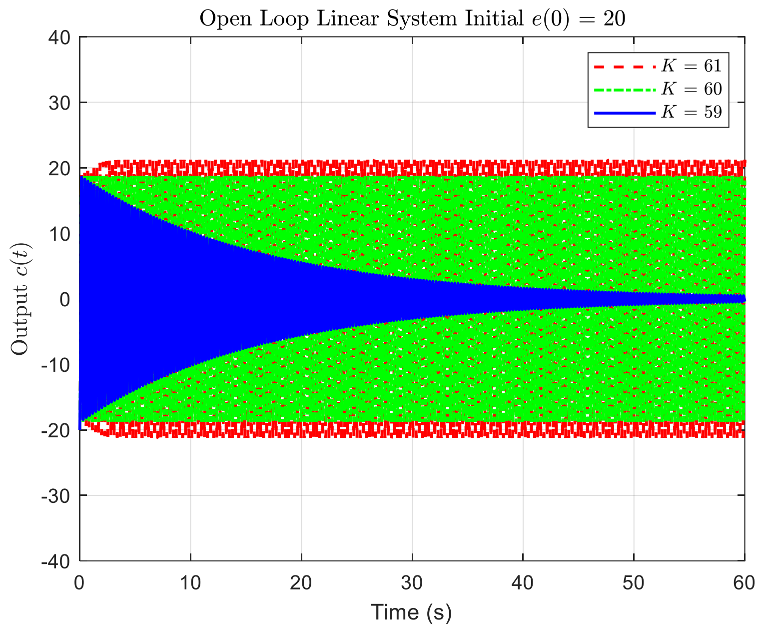


圖 12、固定初始條件下系統在臨界增益 $K = 60$ 附近之系統響應圖

系統之時間響應圖除了可以找出臨界穩定增益 K，也可以找出其他系統特性。例如極限圓之振幅大小和系統初始誤差值 $e(0)$ 無關，而是和系統之增益有關。若以系統之 $-1/N(X)$ 和 $KG(j\omega)$ 曲線來推論，當系統初始誤差值大於 20 時，且系統之增益為 60 時，不管振幅之值 (只要大於 20)為多少，系統一開始皆不會和臨界穩定增益之 $KG(j\omega)$ 相交，故系統一開始呈現收斂的現象。然而當系統振幅逐漸收斂至 20 時，極限圓的現象就會發生，且這個振幅不是由系統之初始誤差值決定，而是由系統之增益決定。

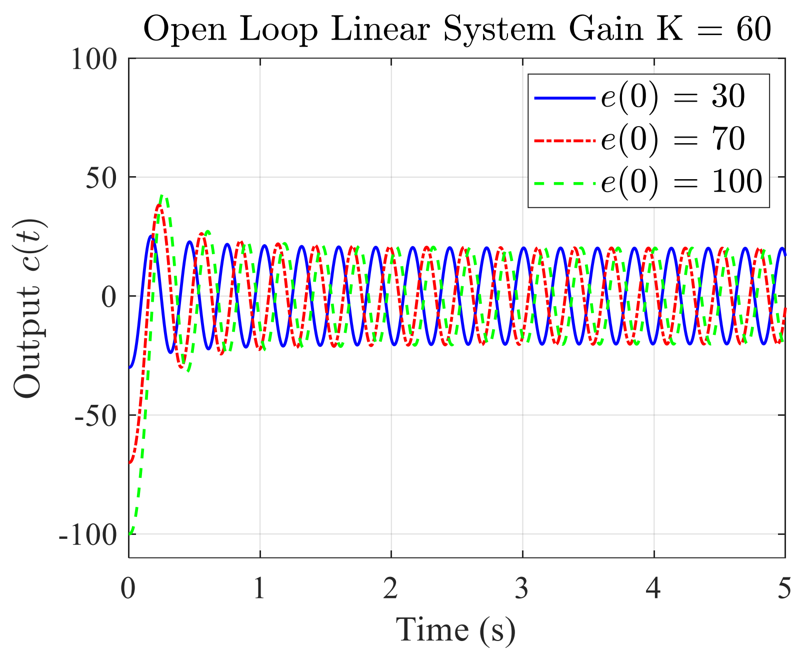


圖 13、系統增益值為臨界增益 K = 60 時 ，初始條件大於 20 的之系統響應

(d)

比較以上二種方法所得到的 K^* 值，分析二者的差異所代表的意義。

在(a)小題和(c)小題中求得之 K^* 皆值為 60。兩種方法所得到的結果相吻合。 (a)小題中得到 K^* 值的方法為利用描述函數和線性系統奈氏圖的關係，用數學方法直接計算臨界增益值。非線性系統能夠用線性系統之穩定性判斷方法，是因為我們利用描述函數這個工具，將非線性元件近似為線性系統，產生非線性系統之轉移函數，進而能夠使用 Nyquist 定理判斷系統之穩定性。但是要能夠產生描述函數，此非線性系統需要滿足一項假設，即是連接非線性元件之線性系統，其頻域響應之低頻大小必須遠大於其高頻大小，也就是類似低通濾波器之行為。數學描述如下

$$\left|G\left(j\omega_0\right)\right| \gg \left|G\left(jn\omega_0\right)\right|,\ n = 2,3,... \tag{28}$$

由 MATLAB 指令"margin"可以獲得線性系統之波德圖。圖 14 中可以看到，此系統之線性元件在頻率為 $1\,rad/s$ 時即下降到 0，此頻寬非常窄，符合(25)中所述之條件。故此系統之非線性元件可以順利使用描述函數進行分析。而(c)小題之方法則是經過(a)小題之分析後，用 MATLAB SIMUKINK 非飽和元件模組和不同振幅、系統增益之系統響應結果來驗證(a)小題之分析結果。其結果也和數學分析結果相符合。但若未經過數學分析，直接使用模擬方法來尋找臨界穩定增益值，並無法直接獲得 60 這個準確的增益值。

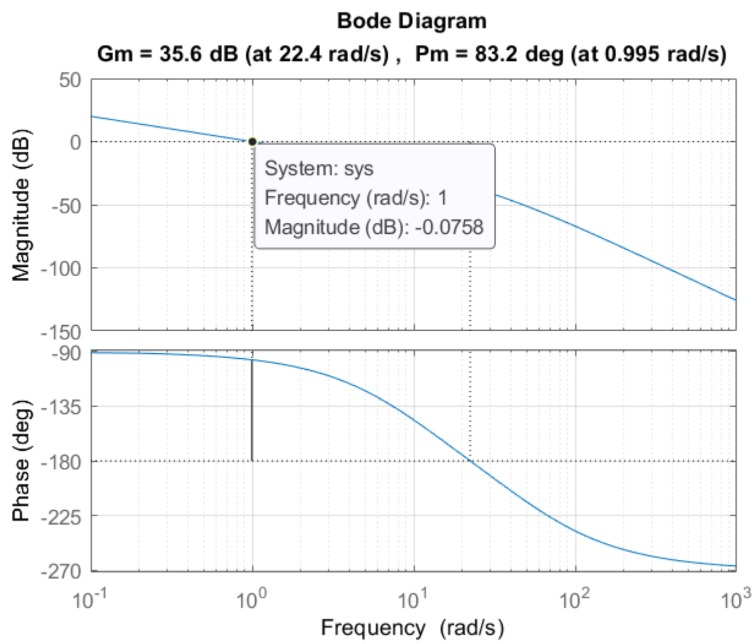


圖 14、線性系統之波德圖

(e)

在問題(c)中，取數值 $K = K_1 > K^*$，其中 K_1 的值取成與(b)題相同，但以 MATLAB 進行模擬(不使用描述函數)，確認方塊圖是否存在極限圓的振盪解 $c(t) = X\sin\omega t$。如果存在的話，比較此振幅 X，及頻率 ω 是否與(b)題的答案相同。(注意: 所謂極限圓的振盪解是指不管初始誤差 $e(0)$ 為多少，MATLAB 的響應 $c(t)$ 最後都收斂到相同的弦波函數 $X\sin\omega t$)

利用 MATLAB SIMULINK 之模擬，取增益值 $K = K_1 = 100$，兒系統初始誤差值則取三個值，為 $e(0) = 25,\ 40.6,\ 80$。取這三個的原因是根據(b)之分析，極限圓震盪振幅為 $X = 40.6627$，且依照推論此系統之極限圓為穩定極限圓，不論系統初始誤差值(振幅)為何，極限圓振幅皆會收斂至 $X = 40.6627$。取三個數值依序代表振幅小於、等於和大於穩定極限圓之振幅。圖 15 為模擬結果，由圖中觀察可知，模擬結果和解析推論結果幾乎吻合，不管輸入振幅大小為何，系統皆會進入相同振幅之極限圓震盪，我們也可以知道，三個初始之最終振幅無法達到完全相同。但此方塊圖確實存在極限圓之震盪解。

在問題(b)中，吾人取 K_1 值為 100。因 $K_1 = 100 > 60 = K^*$，在 $KG(j\omega)$ 的軌跡中，一定會包圍部分 $-1/N(X)$ 射線。且在(b)中，經過計算已經得知在 $K_1 = 100$ 時，極限圓發生之頻率為 $\omega = 10\sqrt{5}$，振幅為 $X = 40.6627$，得知其極限圓震盪解為

$$c(t) = X\sin(\omega t) = 40.6627\sin\left(10\sqrt{5}t\right) \tag{29}$$

此響應可以直接由 MATLAB 繪圖。圖 15 比較了用解析解之系統響應和模擬方塊圖之系統響應。兩者相位差是由於初始值之不同產生，但是頻率和振幅皆幾乎吻合。但和圖 15 中的結果一樣，所有振幅無法完全準確。這些微小誤差推測來自描述函數在近似的過程中捨棄之精確度。但以結果來看，描述函數已經非常逼近模擬方塊圖的結果，這表示描述函數對於模擬非線性系統依舊是一可用工具。

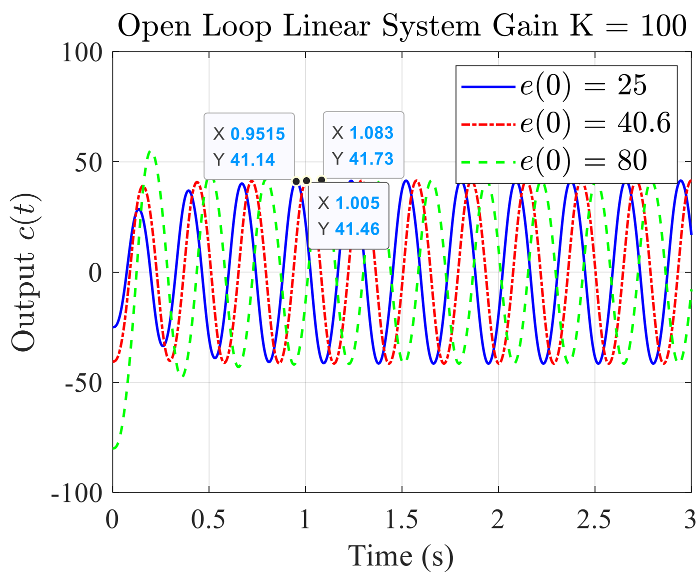


圖 15、當系統增益值 $K_1 > 60$ 時不同系統初始誤差值之系統響應圖

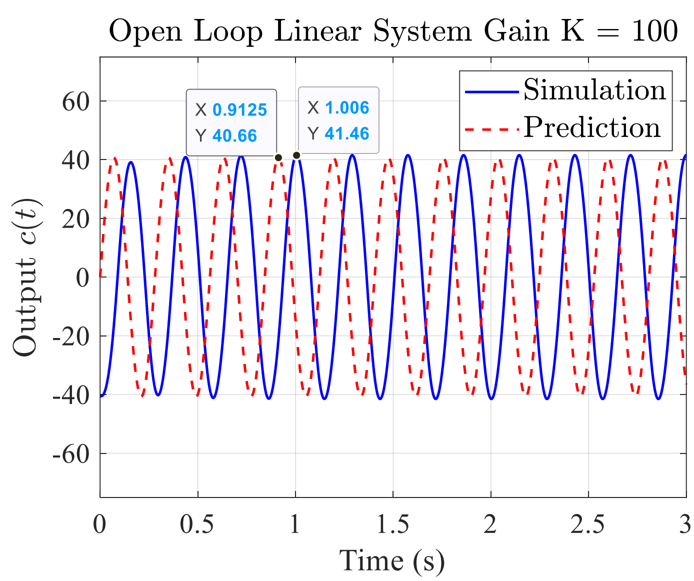


圖 16、由系統模擬得到的響應以及預測的系統極限圓響應

MATLAB Code
(a)

```
%% Nolinear Control HW3_(a)
clc;
clear;
close all;

%%
FS_ax = 16 ;
LW_1 = 1.35 ;

%% Open loop nyquist plot
K = 1;
num=[K];
den1=conv([0.1 1],[0.02 1]);
den=conv([1 0],den1);
sys=tf(num,den);
[re,im,we]=nyquist(sys);
for i =1: length(re)
 G_re(i) = re(:,:,i) ;
 G_im(i) = im(:,:,i) ;
end

figure(1)
plot(G_re,G_im,'b','LineWidth',LW_1)
hold on
quiver(G_re,G_im,gradient(G_re),gradient(G_im),2,'b','LineWidth',LW_1)
hold on
plot(G_re,-G_im,'b','LineWidth',LW_1)
hold on
quiver(G_re,-G_im,-
gradient(G_re),gradient(G_im),2,'b','LineWidth',LW_1,'MaxHeadSize',100)
plot([-0.15 0.05],[0 0],'-k')
plot([0 0],[-0.09 0.09],'-k')
axis equal
ax(1) = gca ;
set(ax(1), 'XLim',  [-0.15 0.05], 'YLim', [-0.08 0.08],'xtick', [-0.15:0.05:0.05], 'ytick', [-
0.1:0.05:0.1])
xlabel('Real')
ylabel('Image')
text(-0.03,0.023,'$\omega = \omega_0 = 22.3607 $','Interpreter','latex','FontSize',15,'Color','b')
text(-0.02,0.01,'$\downarrow$','Interpreter','latex','FontSize',20,'Color','b')
grid on
```

```
%% N(X) and G(jw)
figure (2)
K = 60;
num=[K];
den1=conv([0.1 1],[0.02 1]);
den=conv([1 0],den1);
sys=tf(num,den);
[re,im,we]=nyquist(sys);
for i =1: length(re)
 G_re(i) = re(:,:,i) ;
 G_im(i) = im(:,:,i) ;
end
X = 20 : 0.1 :270;
for i = 1:length(X)
 N_X(i) = 2/pi*( asin(20/X(i)) + 20/X(i)*( 1-400/(X(i)^2) )^(1/2));
end
N_X_inv = 1./N_X ;
plot(-N_X_inv,zeros(length(N_X_inv)),'-r','LineWidth',LW_1)
hold on
plot(G_re,G_im,'b','LineWidth',LW_1)
hold on
quiver(G_re,G_im,gradient(G_re),gradient(G_im),2,'b','LineWidth',LW_1)
hold on
plot(G_re,-G_im,'b','LineWidth',LW_1)
hold on
quiver(G_re,-G_im,-
gradient(G_re),gradient(G_im),2,'b','LineWidth',LW_1,'MaxHeadSize',100)
hold on
annotation( 'arrow' ,[ 0.248 0.195 ],[0.53 0.53] , 'Color' , 'r' );
plot([-6 3],[0 0],'-k')
plot([0 0],[-4 4],'-k')
axis equal
ax(2) = gca ;
set(ax(2), 'XLim',  [-6 3], 'YLim', [-4 4],'xtick', [-6:1:3], 'ytick', [-4:1:4])
xlabel('Real')
ylabel('Image')
text(-3,-2.5,'$KG(j\omega)$','Interpreter','latex','FontSize',15,'Color','b')
text(-6,-1,'$-\frac{1}{N(X)}$','Interpreter','latex','FontSize',18,'Color','r')
grid on

%% title
for i = 1:length(ax)
 set(ax(i),'FontSize',FS_ax,'FontName','Times New Roman')
end
```

(b)

```
%% Nolinear Control HW3_b
clc;
clear;
close all;

%%
FS_ax = 16 ;
LW_1 = 1.35 ;

%%
figure (1)
K = 100;
num=[K];
den1=conv([0.1 1],[0.02 1]);
den=conv([1 0],den1);
sys=tf(num,den);
[re,im,we]=nyquist(sys);
for i =1: length(re)
 G_re(i) = re(:,:,i) ;
 G_im(i) = im(:,:,i) ;
end
X = 20 : 0.1 :270;
for i = 1:length(X)
 N_X(i) = 2/pi*( asin(20/X(i)) + 20/X(i)*( 1-400/(X(i)^2) )^(1/2));
end
N_X_inv = 1./N_X ;
plot(-N_X_inv,zeros(length(N_X_inv)),'-r','LineWidth',LW_1)
hold on
plot(G_re,G_im,'b','LineWidth',LW_1)
hold on
quiver(G_re,G_im,gradient(G_re),gradient(G_im),2,'b','LineWidth',LW_1)
hold on
plot(G_re,-G_im,'b','LineWidth',LW_1)
hold on
quiver(G_re,-G_im,-
gradient(G_re),gradient(G_im),2,'b','LineWidth',LW_1,'MaxHeadSize',100)
hold on
plot(-N_X_inv(1),0,'ro')
annotation( 'arrow' ,[ 0.248 0.195 ],[0.53 0.53] , 'Color' , 'r' );
plot([-6 3],[0 0],'-k')
plot([0 0],[-4 4],'-k')
axis equal
ax(1) = gca ;
set(ax(1), 'XLim',  [-6 3], 'YLim', [-4 4],'xtick', [-6:1:3], 'ytick', [-4:1:4])
xlabel('Real')
ylabel('Image')
```

```
text(-3,-2.5,'$KG(j\omega)$','Interpreter','latex','FontSize',15,'Color','b')
text(-6,-1,'$-\frac{1}{N(X)}$','Interpreter','latex','FontSize',18,'Color','r')
text(-2.5,1,'-1.6667','FontSize',16,'FontName','Times New Roman')
text(-1.8,0.5,'$\downarrow$','Interpreter','latex','FontSize',20,'Color','K')
title('$K=K_1=100$', 'interpreter', 'latex')
grid on

%%
for i = 1:length(ax)
 set(ax(i),'FontSize',FS_ax,'FontName','Times New Roman')
end

%% Calculate the X
func_N_X_c = @(Xc) -1.6667*(2/pi*( asin(20/Xc) + 20/Xc*( 1-400/(Xc^2) )^(1/2) ))+1 ;
Xc = fsolve(func_N_X_c,40)
```

(c)

```
%% Nolinear Control HW3_c
clc;
clear;
close all;

%% System Parameters
dt = 0.0005;
t_final=100;
t=0:dt:t_final;
[A,B,C,D]=tf2ss(1,conv([1 0],conv([0.1 1],[0.02 1])));
LW_1=1.4;
LW_2=1;
FS_ax=16;
FS_leg=17;

%% When K=1
e_IC_1=[30;20;10];
K_1=1;
f(1)=figure() ;
color=['b- ' ; 'r-.' ; 'g--' ] ;
for i=1:length(e_IC_1)
 e_IC=e_IC_1(i) ;
 K=K_1 ;
 sim('ClosedLoop_System_Simulink')
 plot(t,c,color(i,:),'LineWidth',LW_1);
 hold on
end
xlabel('Time (s)')
ylabel('Output $c(t)$','Interpreter','latex')
```

```
title(['Open Loop Linear System Gain K = ',num2str(K_1) ],'Interpreter','latex')
hs(1) = legend(['$e(0)$ = ', num2str(e_IC_1(1))],['$e(0)$ = ', num2str(e_IC_1(2))],['$e(0)$ = ',
num2str(e_IC_1(3))],'Interpreter','latex') ;
ax(1)=gca;
ax(1).XLim=[0 10];
ax(1).YLim=[-30 8];
grid on

%% K=10
e_IC_1=[30;20;10];
K_2=10;
f(2)=figure() ;
color=['b- ' ; 'r-.' ; 'g--' ] ;
for i=1:length(e_IC_1)
 e_IC=e_IC_1(i) ;
 K=K_2 ;
 sim('ClosedLoop_System_Simulink')
 plot(t,c,color(i,:),'LineWidth',LW_1);
 hold on
end
xlabel('Time (s)')
ylabel('Output $c(t)$','Interpreter','latex')
title(['Open Loop Linear System Gain K = ',num2str(K_2) ],'Interpreter','latex')
hs(2) = legend(['$e(0)$ = ', num2str(e_IC_1(1))],['$e(0)$ = ', num2str(e_IC_1(2))],['$e(0)$ = ',
num2str(e_IC_1(3))],'Interpreter','latex') ;
ax(2)=gca;
ax(2).XLim=[0 10];
ax(2).YLim=[-30 8];
grid on

%% K=20
e_IC_1=[30;20;10];
K_3=20;
f(3)=figure() ;
color=['b- ' ; 'r-.' ; 'g--' ] ;
for i=1:length(e_IC_1)
 e_IC=e_IC_1(i) ;
 K=K_3 ;
 sim('ClosedLoop_System_Simulink')
 plot(t,c,color(i,:),'LineWidth',LW_1);
 hold on
end
xlabel('Time (s)')
ylabel('Output $c(t)$','Interpreter','latex')
title(['Open Loop Linear System Gain K = ',num2str(K_3) ],'Interpreter','latex')
```

```
hs(3) = legend(['$e(0)$ = ', num2str(e_IC_1(1))],['$e(0)$ = ', num2str(e_IC_1(2))],['$e(0)$ = ',
num2str(e_IC_1(3))],'Interpreter','latex') ;
ax(3)=gca;
ax(3).XLim=[0 10];
ax(3).YLim=[-30 30];
grid on

%% K=30
e_IC_1=[30;20;10];
K_4=30;
f(4)=figure() ;
color=['b- ' ; 'r-.' ; 'g--' ] ;
for i=1:length(e_IC_1)
 e_IC=e_IC_1(i) ;
 K=K_4 ;
 sim('ClosedLoop_System_Simulink')
 plot(t,c,color(i,:),'LineWidth',LW_1);
 hold on
end
xlabel('Time (s)')
ylabel('Output $c(t)$','Interpreter','latex')
title(['Open Loop Linear System Gain K = ',num2str(K_4) ],'Interpreter','latex')
hs(4) = legend(['$e(0)$ = ', num2str(e_IC_1(1))],['$e(0)$ = ', num2str(e_IC_1(2))],['$e(0)$ = ',
num2str(e_IC_1(3))],'Interpreter','latex') ;
ax(4)=gca;
ax(4).XLim=[0 10];
ax(4).YLim=[-30 30];
grid on

%% K=40
e_IC_1=[30;20;10];
K_5=40;
f(1)=figure() ;
color=['b- ' ; 'r-.' ; 'g--' ] ;
for i=1:length(e_IC_1)
 e_IC=e_IC_1(i) ;
 K=K_5 ;
 sim('ClosedLoop_System_Simulink')
 plot(t,c,color(i,:),'LineWidth',LW_1);
 hold on
end
xlabel('Time (s)')
ylabel('Output $c(t)$','Interpreter','latex')
title(['Open Loop Linear System Gain K = ',num2str(K_5) ],'Interpreter','latex')
hs(5) = legend(['$e(0)$ = ', num2str(e_IC_1(1))],['$e(0)$ = ', num2str(e_IC_1(2))],['$e(0)$ = ',
num2str(e_IC_1(3))],'Interpreter','latex') ;
```

```
ax(5)=gca;
ax(5).XLim=[0 10];
ax(5).YLim=[-30 30];
grid on

%% K=50
e_IC_1=[30;20;10];
K_6=50;
f(1)=figure() ;
color=['b- ' ; 'r-.' ; 'g--' ] ;
for i=1:length(e_IC_1)
 e_IC=e_IC_1(i) ;
 K=K_6 ;
 sim('ClosedLoop_System_Simulink')
 plot(t,c,color(i,:),'LineWidth',LW_1);
 hold on
end
xlabel('Time (s)')
ylabel('Output $c(t)$','Interpreter','latex')
title(['Open Loop Linear System Gain K = ',num2str(K_6) ],'Interpreter','latex')
hs(6) = legend(['$e(0)$ = ', num2str(e_IC_1(1))],['$e(0)$ = ', num2str(e_IC_1(2))],['$e(0)$ = ',
num2str(e_IC_1(3))],'Interpreter','latex') ;
ax(6)=gca;
ax(6).XLim=[0 10];
ax(6).YLim=[-30 30];
grid on

%% K=60
e_IC_1=[30;20;10];
K_7=60;
f(7)=figure() ;
color=['b- ' ; 'r-.' ; 'g--' ] ;
for i=1:length(e_IC_1)
 e_IC=e_IC_1(i) ;
 K=K_7 ;
 sim('ClosedLoop_System_Simulink')
 plot(t,c,color(i,:),'LineWidth',LW_1);
 hold on
end
xlabel('Time (s)')
ylabel('Output $c(t)$','Interpreter','latex')
title(['Open Loop Linear System Gain K = ',num2str(K_7) ],'Interpreter','latex')
hs(7) = legend(['$e(0)$ = ', num2str(e_IC_1(1))],['$e(0)$ = ', num2str(e_IC_1(2))],['$e(0)$ = ',
num2str(e_IC_1(3))],'Interpreter','latex') ;
ax(7)=gca;
ax(7).XLim=[0 7];
```

```
ax(7).YLim=[-30 30];
grid on

%% K=70
e_IC_1=[30;20;10];
K_8=70;
f(8)=figure() ;
color=['b- ' ; 'r-.' ; 'g--'] ;
for i=1:length(e_IC_1)
 e_IC=e_IC_1(i) ;
 K=K_8 ;
 sim('ClosedLoop_System_Simulink')
 plot(t,c,color(i,:),'LineWidth',LW_1);
 hold on
end
xlabel('Time (s)')
ylabel('Output $c(t)$','Interpreter','latex')
title(['Open Loop Linear System Gain K = ',num2str(K_8) ],'Interpreter','latex')
hs(8) = legend(['$e(0)$ = ', num2str(e_IC_1(1))],['$e(0)$ = ', num2str(e_IC_1(2))],['$e(0)$ = ',
num2str(e_IC_1(3))],'Interpreter','latex') ;
ax(8)=gca;
ax(8).XLim=[0 7];
ax(8).YLim=[-30 30];
grid on

%%
e_IC_1=20;
K_9=[20;50;60;80];
f(8)=figure() ;
color=['b- ' ;'r-.';'g--';'c- '] ; %'c-'
for i=1:length(K_9)
 e_IC=e_IC_1 ;
 K=K_9(i) ;
 sim('ClosedLoop_System_Simulink')
 plot(t,c,color(i,:),'LineWidth',LW_1);
 hold on
end
xlabel('Time (s)')
ylabel('Output $c(t)$','Interpreter','latex')
title(['Open Loop Linear System Initial $e(0)$ = ',num2str(e_IC_1) ],'Interpreter','latex')
hs(9) = legend(['$K$ = ', num2str(K_9(1))],['$K$ = ', num2str(K_9(2))],['$K$ = ',
num2str(K_9(3))],['$K$ = ', num2str(K_9(4))],'Interpreter','latex') ;
ax(9)=gca;
ax(9).XLim=[0 15];
ax(9).YLim=[-40 40];
grid on
```

```
%%
e_IC_1=20;
K_10=[61;60;59];
f(9)=figure() ;
color = ['r--' ; 'g-.' ; 'b- ' ] ;
for i=1:length(K_10)
 e_IC=e_IC_1 ;
 K=K_10(i) ;
 sim('ClosedLoop_System_Simulink')
 plot(t,c,color(i,:),'LineWidth',LW_1);
 hold on
end
xlabel('Time (s)')
ylabel('Output $c(t)$','Interpreter','latex')
title(['Open Loop Linear System Initial $e(0)$ = ',num2str(e_IC_1) ],'Interpreter','latex')
hs(10) = legend(['$K$ = ', num2str(K_10(1))],['$K$ = ', num2str(K_10(2))],['$K$ = ',
num2str(K_10(3))],'Interpreter','latex') ;
ax(10)=gca;
ax(10).XLim=[0 60];
ax(10).YLim=[-40 40];
grid on

%%
e_IC_1=[30;70;100];
K_11=60;
f(10)=figure() ;
color=['b- ' ; 'r-.' ; 'g--'] ;
for i=1:length(e_IC_1)
 e_IC=e_IC_1(i) ;
 K=K_11 ;
 sim('ClosedLoop_System_Simulink')
 plot(t,c,color(i,:),'LineWidth',LW_1);
 hold on
end
xlabel('Time (s)')
ylabel('Output $c(t)$','Interpreter','latex')
title(['Open Loop Linear System Gain K = ',num2str(K_11) ],'Interpreter','latex')
hs(10) = legend(['$e(0)$ = ', num2str(e_IC_1(1))],['$e(0)$ = ', num2str(e_IC_1(2))],['$e(0)$ =
', num2str(e_IC_1(3))],'Interpreter','latex') ;
ax(10)=gca;
ax(10).XLim=[0 5];
ax(10).YLim=[-110 100];
grid on

%%
```

```
for i = 1:length(ax)
 set(ax(i),'FontSize',FS_ax,'FontName','Times New Roman')
end
for i = 1:length(hs)
 set(hs(i),'FontSize',FS_leg,'FontName','Times New Roman')
end
```

(d)

```
%% Nolinear Control HW3_d
clc;
clear;
close all;

%% System Parameters
K = 1;
num=[K];
den1=conv([0.1 1],[0.02 1]);
den=conv([1 0],den1);
sys=tf(num,den);
margin(sys)
grid on
```

(e)

```
%% Nolinear Control HW3_e
clc;
clear;
close all;

%% System Parameters
dt = 0.0005;
t_final=100;
t=0:dt:t_final;
[A,B,C,D]=tf2ss(1,conv([1 0],conv([0.1 1],[0.02 1])));
LW_1=1.4;
LW_2=1;
FS_ax=16;
FS_leg=17;

%%
e_IC_1=[25;40.6;80];
K_1=100;
f(1)=figure() ;
color=['b- ' ; 'r-.' ; 'g--' ] ;
for i=1:length(e_IC_1)
 e_IC=e_IC_1(i) ;
 K=K_1 ;
 sim('ClosedLoop_System_Simulink')
```

```
 plot(t,c,color(i,:),'LineWidth',LW_1);
 hold on
end
xlabel('Time (s)')
ylabel('Output $c(t)$','Interpreter','latex')
title(['Open Loop Linear System Gain K = ',num2str(K_1) ],'Interpreter','latex')
hs(1) = legend(['$e(0)$ = ', num2str(e_IC_1(1))],['$e(0)$ = ', num2str(e_IC_1(2))],['$e(0)$ = ',
num2str(e_IC_1(3))],'Interpreter','latex') ;
ax(1)=gca;
ax(1).XLim=[0 3];
ax(1).YLim=[-100 100];
grid on

%%
e_IC = 40.6 ;
K = 100 ;
pre_Xc = 40.6627*sin(10*(5)^(1/2)*t) ;
f(2) = figure ;
sim('ClosedLoop_System_Simulink')
plot(t,c,'b','LineWidth',LW_1) ;
hold on
plot(t,pre_Xc,'r--','LineWidth',LW_1)
xlabel('Time (s)')
ylabel('Output $c(t)$','Interpreter','latex')
title(['Open Loop Linear System Gain K = ',num2str(K) ],'Interpreter','latex')
hs(2) = legend({'Simulation ','Prediction'},'Interpreter','latex') ;
ax(2) = gca ;
ax(2).XLim = [0 3] ;
ax(2).YLim = [-75 75] ;
grid on

%%
for i = 1:length(ax)
 set(ax(i),'FontSize',FS_ax,'FontName','Times New Roman')
end
for i = 1:length(hs)
 set(hs(i),'FontSize',FS_leg,'FontName','Times New Roman')
end
```