National Cheng Kung University

Department of Aeronautics and Astronautics

非線性控制第三章作業

Author:

Chen, Guan-Shiun (陳冠勳)

Supervisor:

Prof Yang

Student ID No.:

P18091026

An Assignment submitted for the NCKU:

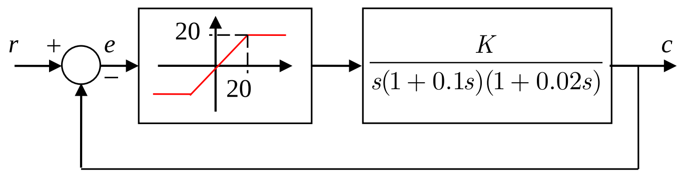
【*P4-065*】非線性控制

October 24, 2020

Contents

1. Problem Statement

考慮如下列之控制方塊圖，其中包含非線性的飽和元件



(a) 將非線性飽和元件用其描述函數加以取代，並利用古典控制的 Nyquist 定理決定使得系統爲穩定的最大允許 K 值（記作 K^*）。

(b) 接續 (a)，隨意取數值 $K_1 > K^*$，並在上面方塊圖中，令 $K = K_1$（例如若$K^* = 10$，可取 $K = K_1 = 15$），參考例題 3.3.2 的方法，由描述函數求出極限圓發生時的振幅 X，及頻率 ω。

(c) 利用 Matlab 的非線性飽和元件模組，模擬上面方塊圖的時間響應 $c(t)$，每次模擬使用不同的 K 值，決定使得系統爲穩定的最大允許 K 值（記作 K^*）。

註：這裡的穩定是指在輸入指令 $r = 0$ 的情形下，不管初始誤差 $e(0) > 20$ 或是 $e(0) < 20$，都可以保證 $c(t) \to 0$。

(d) 比較以上二種方法所得到的 K^* 值，分析二者的差異所代表的意義。

(e) 在問題 (c) 中，取數值 $K = K_1 > K^*$，其中 K_1 的值取成與(b)題相同，但以 Matlab 進行模擬（不使用描述函數），確認方塊圖是否存在極限圓的振盪解 $c(t) = X \sin \omega t$。如果存在的話，比較此振幅 X，及頻率 ω 是否與 (b) 題的答案相同。

（注意:所謂極限圓的振盪解是指不管初始誤差 $e(0)$ 爲多少，Matlab 的響應 $c(t)$ 最後都收斂到相同的弦波函數 $X \sin \omega t$）。

2. Answer to problem (a)

針對本題的飽和元件，吾人可以看出以下特性

(i) 當輸入訊號振幅 X 介於 $-20 \leq X \leq 20$ 區間時，輸出訊號與輸入訊號成正比 (通過原點)，斜率/比值爲 1，落在線性區。

(ii) 當輸入訊號振幅 X 滿足 $X \geq 20$ 時，輸出訊號落在正飽和區且輸出值爲 20。

(iii) 當輸入訊號振幅 X 滿足 $X \leq -20$ 時，輸出訊號落在負飽和區且輸出值爲 -20。

因此，當輸入正弦波訊號 $X\sin(\omega t)$ 時，可推論出輸出訊號 $y(t)$ 前四分之一週期形式爲

$$y(t) = \begin{cases} X\sin(\omega t), & 0 \leq \omega t \leq \omega t_1 \\ 20, & \omega t_1 \leq \omega t \leq \pi/2 \end{cases} \tag{1}$$

其中 ωt_1 滿足 $X\sin(\omega t) = 20$，意即 $\omega t_1 = \sin^{-1}(20/X)$；因爲系統輸入爲奇函數形式，若將系統輸出由傅立葉級數表示並只取第一諧和分

量 $y_1(t)$，吾人可得

$$y_1(t) = a_0 + a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t) = b_1\sin(\omega t) \tag{2}$$

由於函數對稱關係，傅立葉級數的積分區間可由 $0 \le \omega t \le 2\pi$ 改變爲取第一象限積分再乘以 4 (或可直接選擇傅立葉正弦級數展開)， 因此其中 b_1 滿足

$$\begin{aligned}
b_1\sin(\omega t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(t)\sin(\omega t)d(\omega t) \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t)\sin(\omega t)d(\omega t) \\
&= \frac{4}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} X\sin^2(\omega t)d(\omega t) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 20\sin(\omega t)d(\omega t)\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\omega t_1 + \frac{20}{X}\sqrt{1-\left(\frac{20}{X}\right)^2}\right)
\end{aligned} \tag{3}$$

透過上式，吾人可得飽和元件描述函數爲

$$N(X,\phi) = \frac{b_1}{X}\angle 0^\circ = \frac{2}{\pi}\left(\sin^{-1}\left(\frac{20}{X}\right) + \frac{20}{X}\sqrt{1-\left(\frac{20}{X}\right)^2}\right) \tag{4}$$

欲以 Nyquist 定理檢測系統穩定度，則系統等效轉移函數可表示爲

$$\frac{C(j\omega)}{Y(j\omega)} = \frac{N(X)G(j\omega)}{1+N(X)G(j\omega)} \tag{5}$$

吾人可得特徵方程式爲

$$1 + N(X)G(j\omega) = 0 \Longrightarrow G(j\omega) = -\frac{1}{N(X)} \tag{6}$$

透過上式，吾人可知 $-1/N(X)$ 隨輸入振幅 X 之變化如下

(i) 當 $0 \leq X < 20$ 時，系統是操作在線性區域，此時非線性飽和限制不起作用，因而不是描述函數的適用範圍故在此不做討論。

(ii) 當 $X = 20$ 時，$-\frac{1}{N(X)} = -1$

(iii) 當 $X \geq 20$ 時，$-\frac{1}{N(X)} = -\pi \times 2^{-1} \left(\sin^{-1}\left(\frac{20}{X}\right) + \frac{20}{X}\sqrt{1 - \left(\frac{20}{X}\right)^2} \right)^{-1}$

(iv) 當 $X \to \infty$ 時，$-\frac{1}{N(X)} \to -\infty$

由非線性系統之 Nyquist 定理，可判斷出

(i) 若 $-1/N(X)$ 軌跡不被 $G(j\omega)$ 之軌跡所包圍時，則系統爲穩定。

(ii) 若 $-1/N(X)$ 軌跡被 $G(j\omega)$ 之軌跡所包圍時，則系統爲不穩定。

(iii) 若 $-1/N(X)$ 軌跡與 $G(j\omega)$ 之軌跡相交時，則系統爲臨界穩定，此時交點處爲發生極限圓的條件。

透過上述分析，吾人可知 $-1/N(X)$ 在複數平面上是一條落在負實軸上以 -1 爲起始點向負無限大延伸的射線。爲求使得系統爲穩定的最

大允許值 $K=K^*$，吾人令 $G(j\omega)$ 與 $-1/N(X)$ 曲線有一交實軸交點，且 $-1/N(X)$ 軌跡不被 $G(j\omega)$ 之軌跡所包圍；因此吾人欲先求 $G(j\omega)$ 與實軸交點，首先將 $G(j\omega)$ 實部與虛部分離，可得

$$\begin{aligned}
G(j\omega) &= \frac{K}{j\omega(1+0.1j\omega)(1+0.02j\omega)} \\
&= \frac{K}{-0.12\omega^2+j\omega(1-0.002\omega^2)} \\
&= \frac{-0.12K}{0.000004\omega^4+0.0104\omega^2+1} - j\frac{(1-0.002\omega^2)K}{\omega(0.000004\omega^4+0.0104\omega^2+1)}
\end{aligned} \tag{7}$$

此時可令虛部爲零以求實軸交點，因此有

$$Im(G(j\omega))=0 \Longrightarrow 1-0.002\omega^2=0 \Longrightarrow \omega=10\sqrt{5} \tag{8}$$

$$Re(G(j\omega))\Big|_{\omega=10\sqrt{5}} = \frac{-0.12K}{0.000004\omega^4+0.0104\omega^2+1}\Bigg|_{\omega=10\sqrt{5}} = -\frac{K}{60} \tag{9}$$

從上述吾人得知 $G(j\omega)$ 與實軸交點爲 $-K/60$，若欲求系統穩定的最大允許值 K^*，此時可令 $G(j\omega)$ 與 $-1/N(X)$ 曲線繳點落於 $(-1,0)$，此時可得 K^* 爲

$$Re(G(j\omega))\Big|_{\omega=10\sqrt{5}} = -\frac{K^*}{60} = -1 \Longrightarrow K^*=60 \tag{10}$$

$\boxed{\text{從上述可知，當系統穩定時，系統須滿足 } K<K^*=60\text{。}}$

3. Answer to problem (b)

通過上題分析，吾人可知當選擇 $K = K_1 > K^*$ 時，系統將會根據 X ；變化產生不穩定區，臨界穩定區及穩定區，本題欲求由描述函數求出極限圓發生時的振幅 X，及頻率 ω，意即求出使得特徵方程式

$$N(X,\omega)G(j\omega) + 1 = 0 \tag{11}$$

時之振幅 X 及頻率 ω，故吾人在此取 $K = K_1 = 70$，吾人可得

$$G(j\omega) = \frac{-8.4}{0.000004\omega^4 + 0.0104\omega^2 + 1} - j\frac{(1 - 0.002\omega^2)70}{\omega(0.000004\omega^4 + 0.0104\omega^2 + 1)} \tag{12}$$

此時可求得讓 $G(j\omega)$ 曲線與實軸有交點的條件爲(使虛部爲零)

$$\begin{aligned} -j\frac{(1 - 0.002\omega^2)70}{\omega(0.000004\omega^4 + 0.0104\omega^2 + 1)} &= 0 \\ \Longrightarrow 1 - 0.002\omega^2 &= 0 \\ \Longrightarrow \omega &= 10\sqrt{5} \end{aligned} \tag{13}$$

通過分析，吾人發現因爲由於此題飽和元件描述函數之特性，意即 $-1/N(X)$ 爲一條由 -1 爲起始點往負無限大延伸的射線，故在取得極限圓發生的頻率時皆須透過求 $G(j\omega)$ 與實軸之交點，因此無論 K 取多

少，極限圓發生時的頻率皆相同。

另一方面，爲求極限圓發生時的振幅 X ，可透過 $-1/N(X)$ 之取線方程求得，意即通過交點的實部大小來求得振幅 X ，因此吾人首先有

$$
\begin{aligned}
&Re(G(j\omega))\Big|_{\omega=10\sqrt{5},\ K=K_1=65} \\
&= \frac{-0.12K}{0.000004\omega^4+0.0104\omega^2+1}\Big|_{\omega=10\sqrt{5},\ K=K_1=70} \\
&= -\frac{K_1}{60} \\
&= -1.167 \qquad (14)
\end{aligned}
$$

透過上式，吾人最終可得

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{N(X)} = -\pi\times 2^{-1}\left(\arcsin\left(\frac{20}{X}\right)+\frac{20}{X}\sqrt{1-\left(\frac{20}{X}\right)^2}\right)^{-1} = -1.167 \\
&\Longrightarrow X = 26.606 \qquad (15)
\end{aligned}
$$

在此情況下，吾人可知當選擇 $K=K_1=70$ 時，所得的極限圓發生時頻率爲 $\omega=10\sqrt{5}$, 振幅爲 $X=26.606$。

倘若爲人檢驗 K 的選擇對於極限圓發生振幅之影響(前面已證明極限圓在飽和元件下發生之頻率爲定值)，吾人可得之當選擇 $K>K^*$ 時，系統將進入含有部穩定區間的情形，隨著 K 的選擇上升，吾人首

先可知極限圓發生時 $G(j\omega)$ 與 $-1/N(X)$ 曲線之交點將在實軸上往左移動，另一方面， 透過計算可知 X 的上升將會進一步導致極限圓振幅的上升，如下表所示。

K	極限圓振幅 X	K	極限圓振幅 X
60	20	80	31.511
65	23.89	85	33.85
70	26.606	90	36.147
75	29.11	95	38.415

4. Answer to problem (c)

利用 Matlab 的非線性飽和元件模組，吾人可將本題系統轉爲如下的 simulink 方塊圖，並且透過觀察系統誤差來決定系統穩定度，意即本題爲一追蹤問題 (tracking problem)，需藉由調變系統變數 K 使得系統誤差 $e(t) \to 0$。

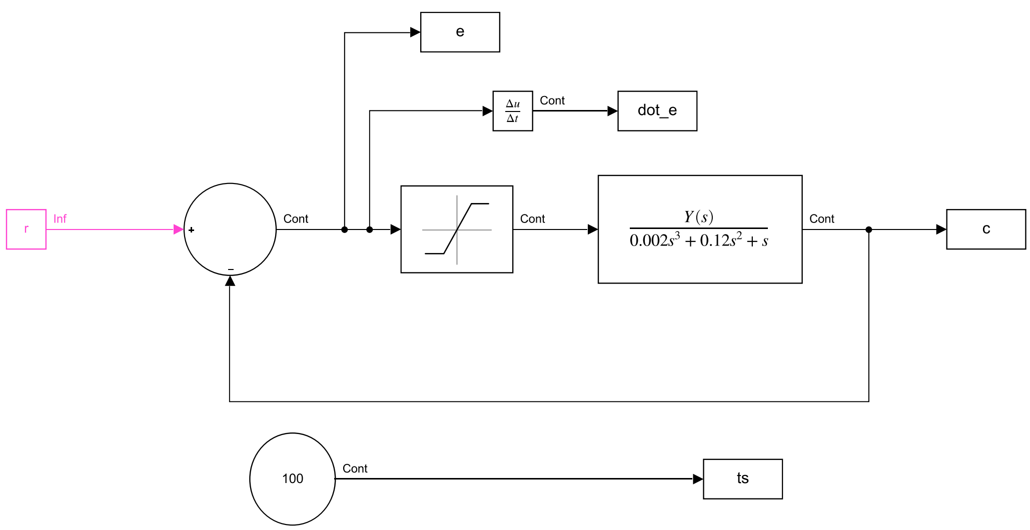


Figure 1: 系統 Simulink 模擬圖

透過分析，當吾人輸入值 $r(t)=1$，隨著 K 的選擇不同而有以下發現

(i) 當吾人選定 $K=30,40,50,55$，可發現系統皆是處於穩定階段，原因是來自於 $-1/N(X)$ 曲線皆未被 $G(j\omega)$ 曲線包圍，如圖 2 所示；當吾人畫出系統誤差的時域分析，可發現隨著 K 值的選擇上升 $(K<60)$，系統誤差收斂至 0 的時間會逐漸拉長，如圖 3 所示；為驗證這一結果，從相平面的結果中吾人可同樣發現當 K值上升，系統誤差以旋轉進入原點的振盪次數會增加，系統平衡點呈現穩定焦點的收斂情形。

(ii) 當吾人選定 $K=56,57,58,59$，可發現系統仍是處於穩定階段，但是不同於 (i) 的地方在於此階段系統誤差收斂時間的靈敏度上升，意即雖然吾人在此階段只將 K 以 1 的間距向上增加，收斂時間卻差距甚大，如圖 5 所示。

(iii) 當吾人選擇 $K=60$ 時，可以看到此時複數平面 $-1/N(X)$ 曲線與 $G(j\omega)$ 曲線將會有一交點然而其他$-1/N(X)$ 曲線的點皆未被 $G(j\omega)$ 曲線包圍，故此時系統處於臨界穩定的情況，如圖 6 所

示；此時系統 $e(t)$ 將會在一固定值 $\pm\alpha$ 來回振盪並且不會收斂，如圖 7 所示；透過相平面分析，此時系統將會有極限圓的存在，如圖 8 所示。

透過上述分析，吾人可知當系統穩定時，系統須滿足 $K < K^* = 60$。

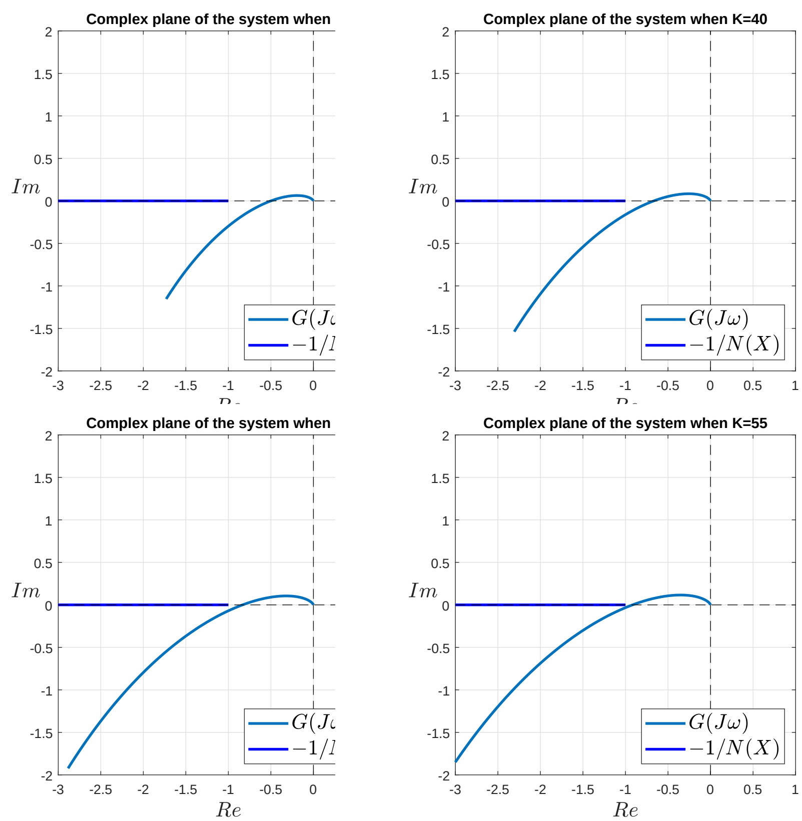


Figure 2: 系統之複數平面分析 $(K = 30, 40, 50, 55)$

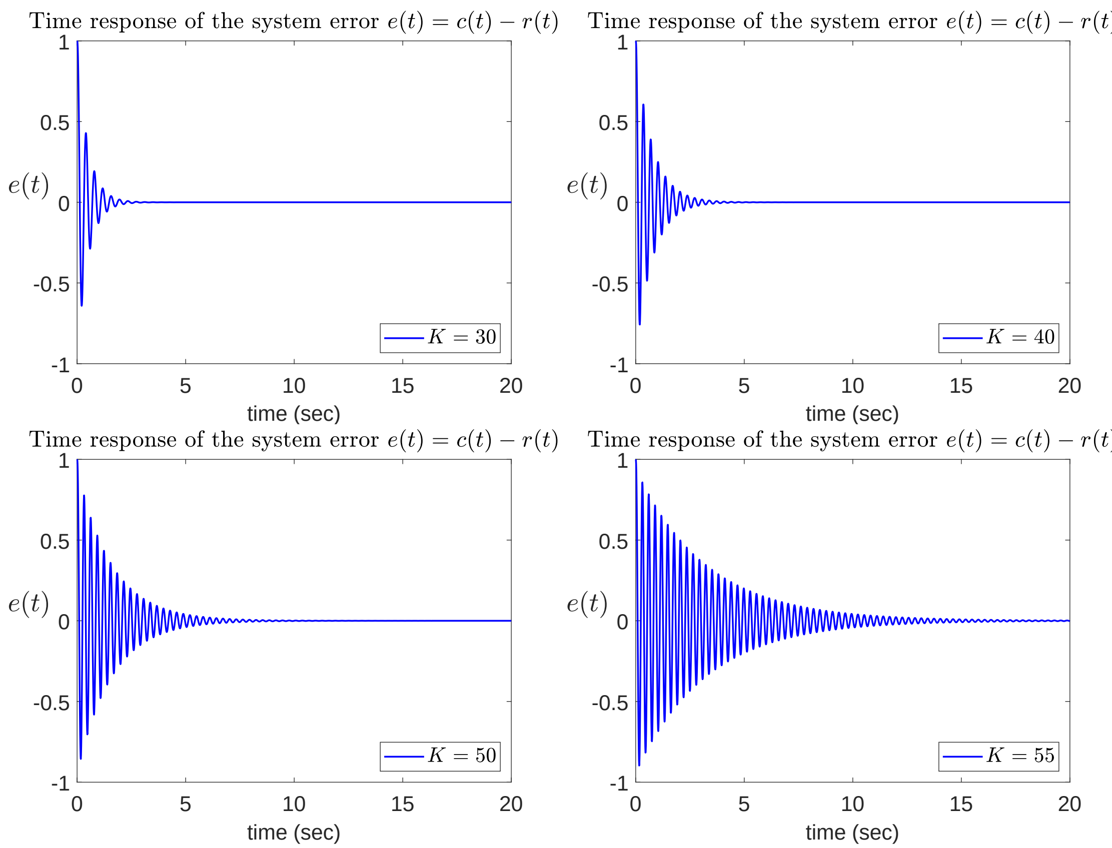


Figure 3: 系統誤差之時域響應 $(K = 30, 40, 50, 55)$

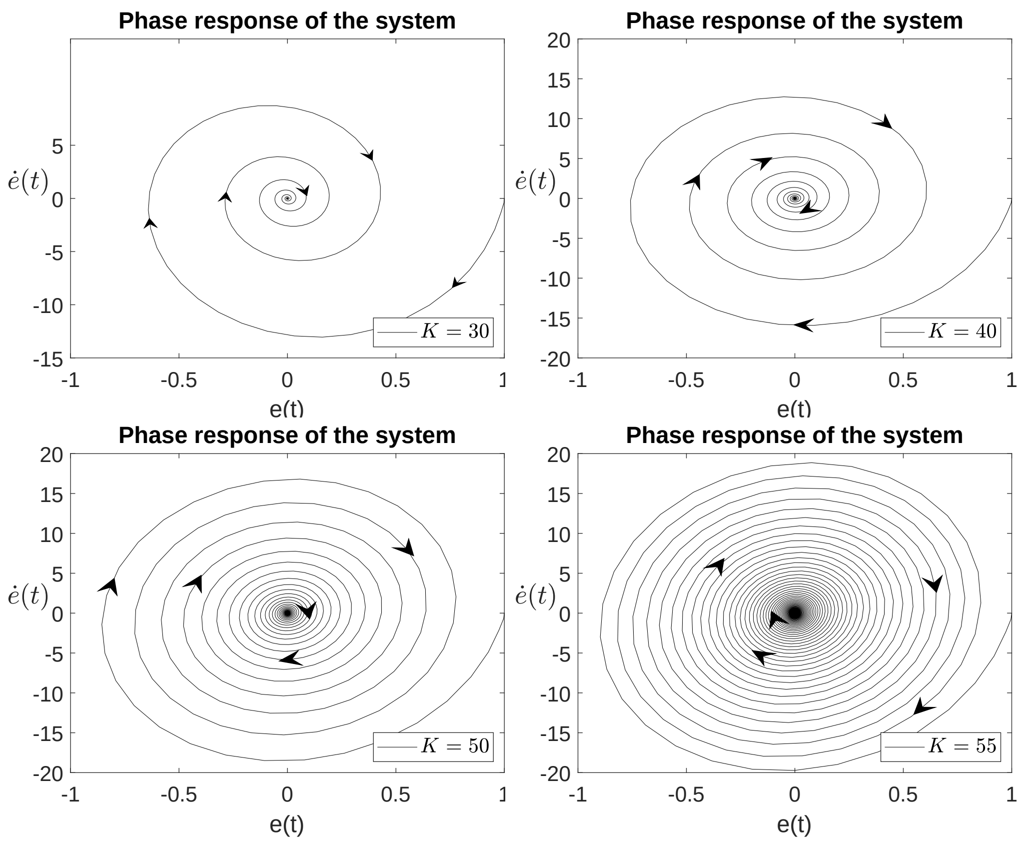


Figure 4: 系統誤差之相平面分析 $(K = 30, 40, 50, 55)$

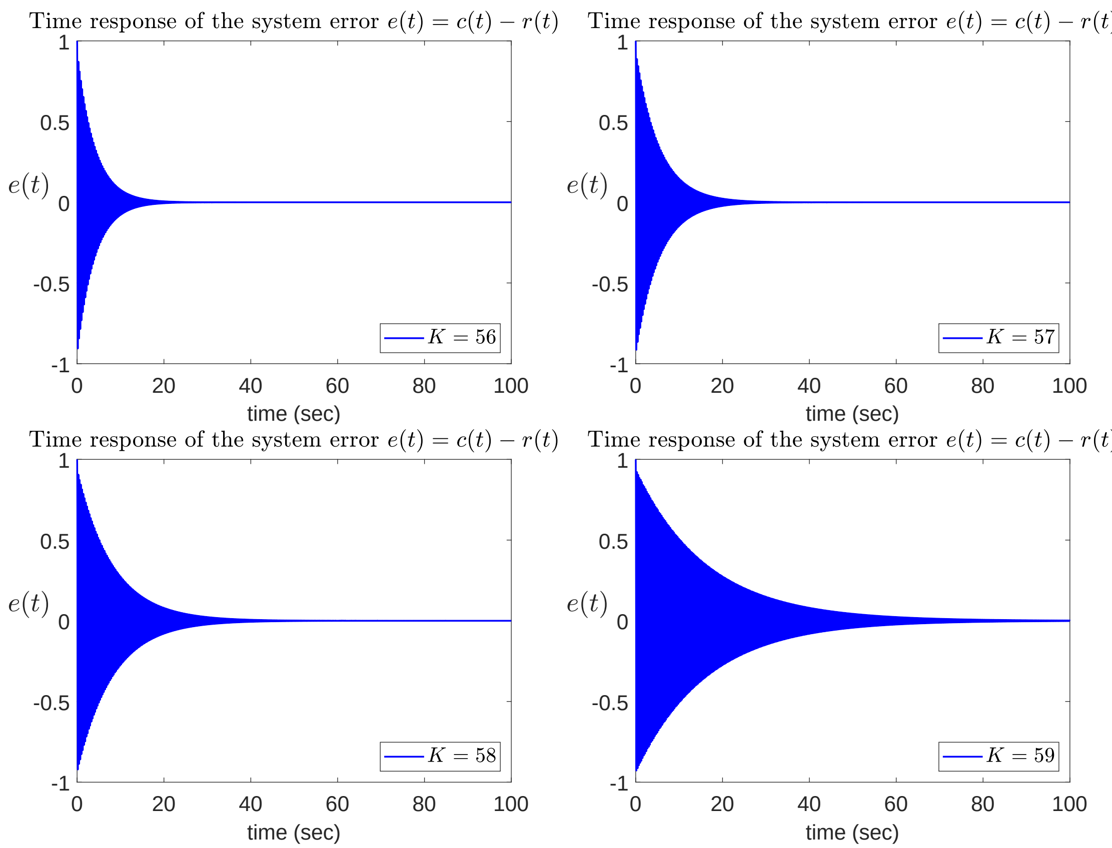


Figure 5: 系統誤差之時域響應 $(K = 56, 57, 58, 59)$

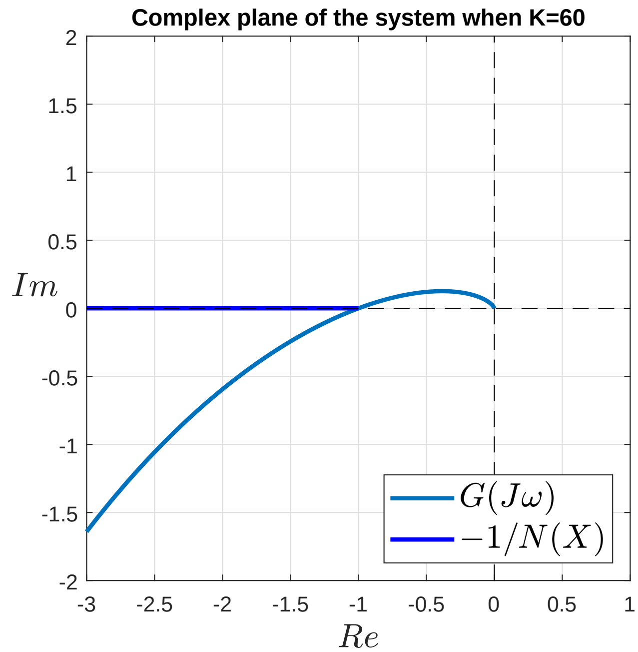


Figure 6: 系統之複數平面分析 $(K = 60)$

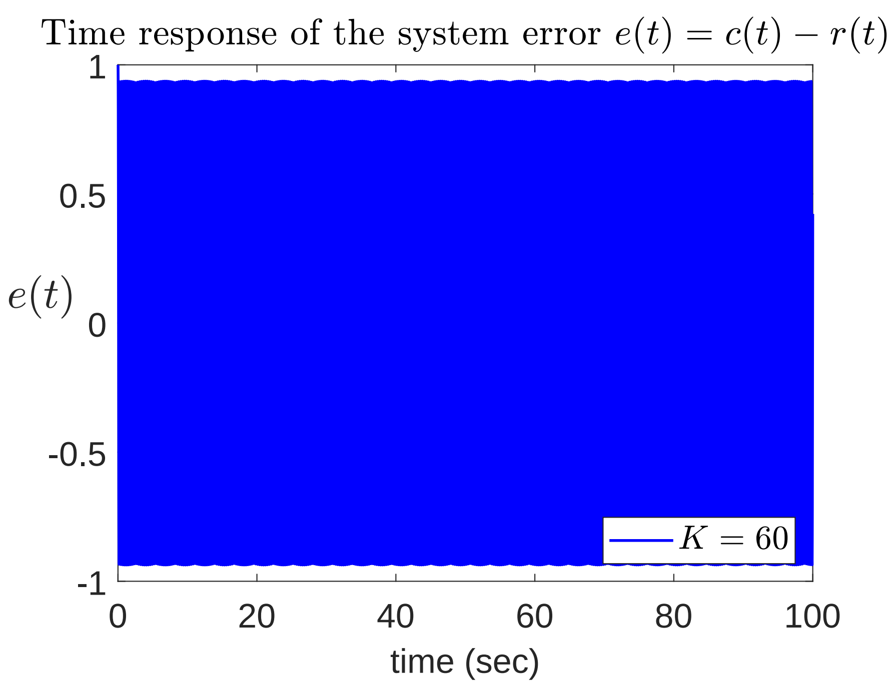


Figure 7: 系統誤差之時域響應 $(K = 60)$

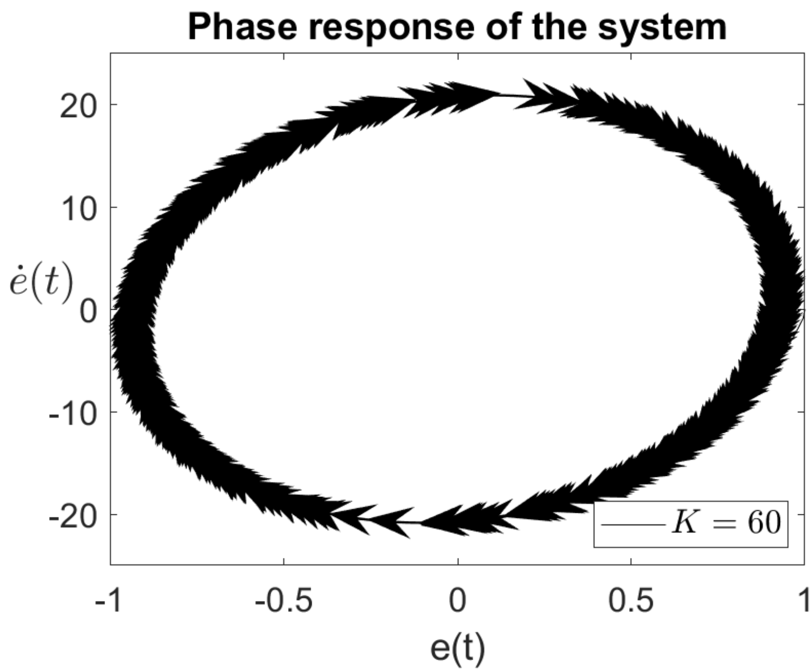


Figure 8: 系統誤差之相平面分析 $(K = 60)$

5. Answer to problem (d)

綜合 (a) 及 (c) 的分析，吾人可得知此系統的最大允許值 K^* 皆爲 60。仔細觀察可以發現，在 (b) 中吾人推論出當 $K = K^* = 60$ 時，此時由描述函數推得之極限圓振幅 $X = 20$，然而透過 Matlab 及 Simulink 分析，吾人發現當輸入 $r(t) = 1$ 時，此時系統誤差將以 $e(t) = \pm r(t) = \pm 1$來回振盪，如圖 7-8 所示；倘若吾人進一步讓 $r(t) = 10$，此時仍會發生同樣的情況，意即系統誤差將以 $e(t) = \pm r(t) = \pm 10$來回振盪，如圖 9-10 所示；故吾人推斷在此情況下，倘若 $r(t)$ 的選擇小於 (b) 題所計算的理論極限圓振幅值，系統誤差將會直接以輸入最爲基礎進行振盪。

爲檢測上述推論，吾人選擇 $r(t) = 30, 40, 50$ (皆大於理論值)，可以發現震幅將會先收斂到計算的振幅值然後在以 ± 20 來回振盪，得到吾人預期的結果。

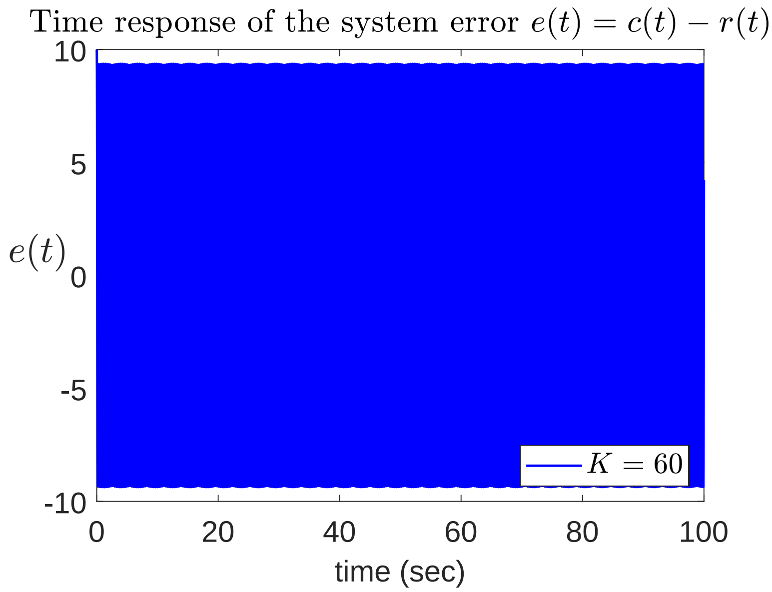


Figure 9: 系統誤差之時域響應 $(K = 60, r(t) = 10)$

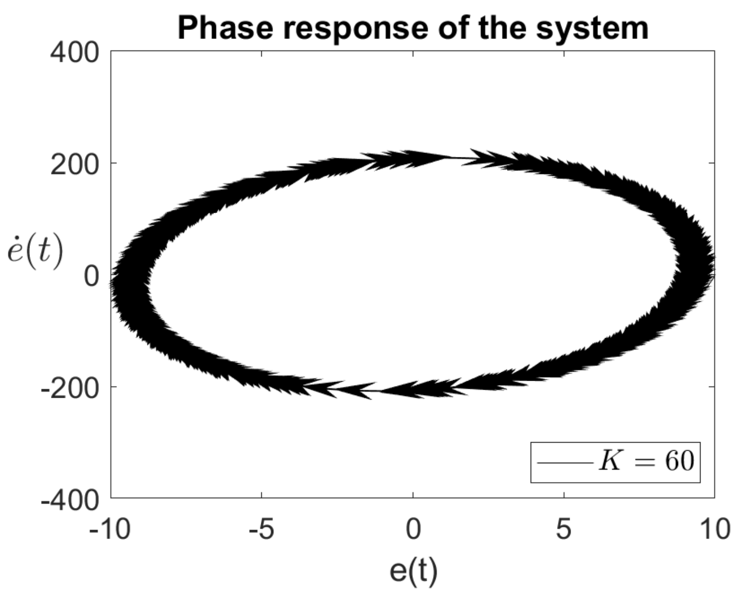


Figure 10: 系統誤差之相平面分析 $(K = 60, r(t) = 10)$

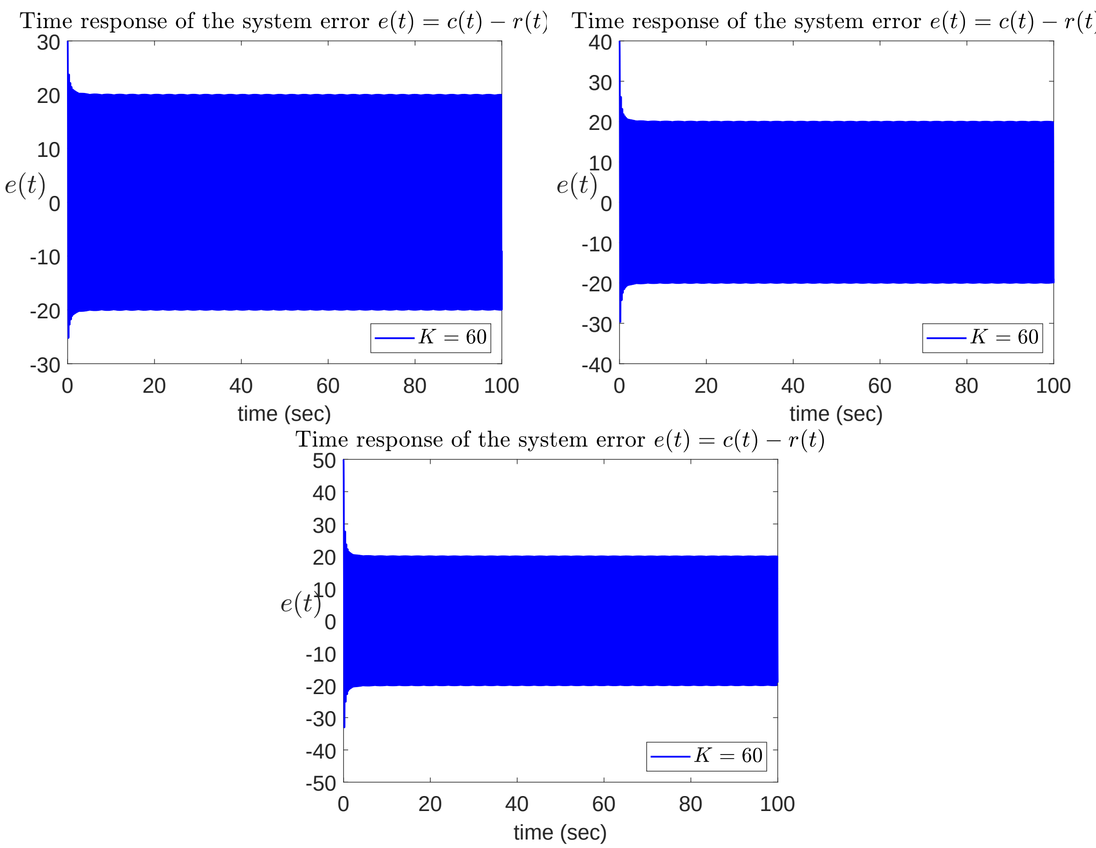


Figure 11: 系統誤差之時域響應 $(K = 60, r(t) = 30(\text{左上})40(\text{右上})50(\text{下}))$

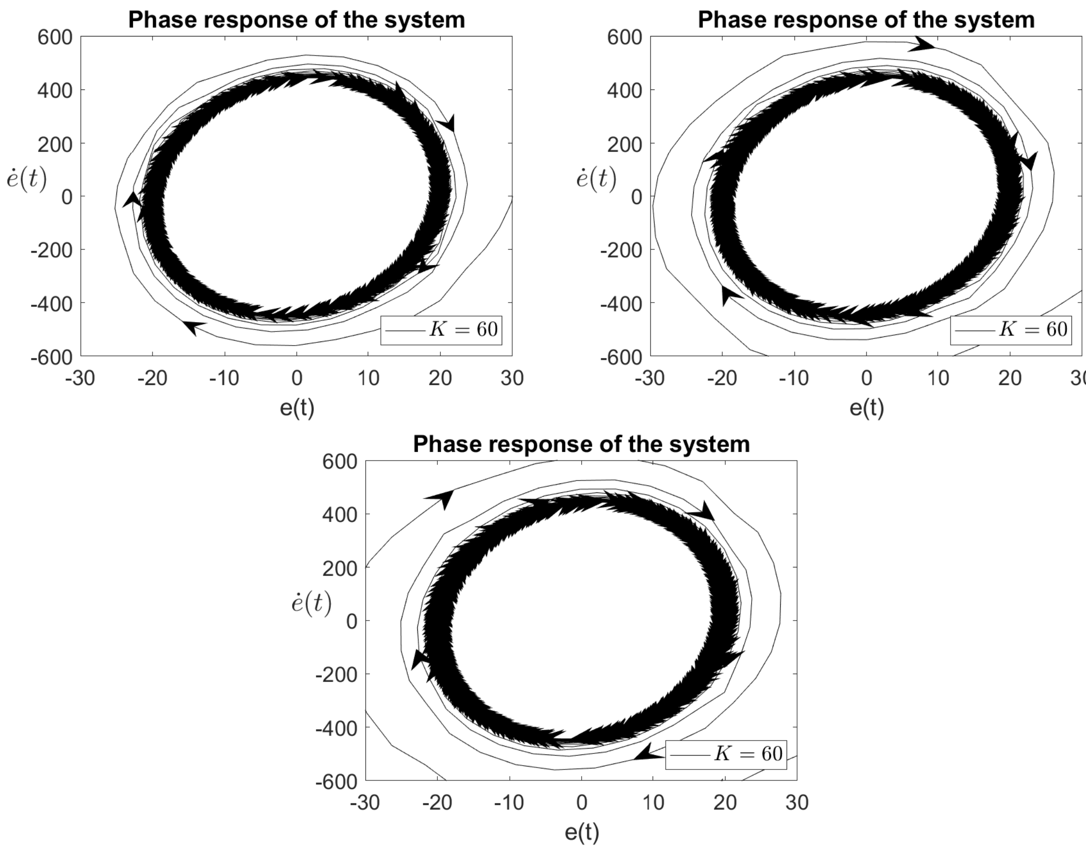


Figure 12: 系統誤差相平面分析 $(K = 60, r(t) = 30(\text{左上})40(\text{右上})50(\text{下}))$

6. Answer to problem (e)

爲比較透過描述函數求得的極限圓與利用程式繪出的極限圓差異，吾人首先令 $r(t) = 1$， $K = 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95$，在此區間吾人可知系統爲不穩定狀態，因爲系統複數平面 $-1/N(X)$ 曲線與 $G(j\omega)$ 曲線將會有一交點然而部分 $-1/N(X)$ 曲線將被 $G(j\omega)$ 曲線包圍，如圖 13 所示:

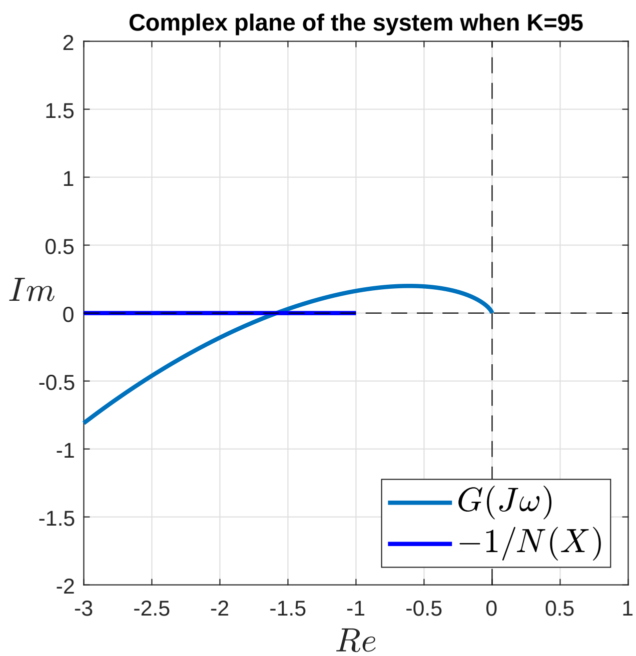


Figure 13: 系統之複數平面分析 (以 $K = 95$ 爲例)

透過進一步計算，可求得兩者振幅差異如下表所示。

K	使用描述函數之極限圓振幅 X	使用Simulink飽和元件之極限圓振幅 X
65	23.89	23.9455
70	26.606	26.7513
75	29.11	29.3602
80	31.511	31.8745
85	33.85	34.3322
90	36.147	36.7520
95	38.415	39.1444

從表中可以發現以 matlab 計算的極限圓振幅雖然略有不同但差距不大，而發生極限圓的頻率同樣都是 $10\sqrt{5}$，極限圓動態均爲 $e(t) = X\sin(10\sqrt{5}t)$。

從 (d) 小題的分析可以發現，在臨界點 $K = 60$，當系統輸入小於理論計算之極限圓振幅時，系統將意該輸入值在正負來回切換，意即系統不會收斂到相同的弦波函數 $e(t) = 20\sin(10\sqrt{5}t)$，爲了測驗其他 K 值是否會有相同情形，吾人有了以下分析

(i) 當輸入 $r(t)=1$ 時，無倫是 $K=65,70,75,80,85,90,95$，系統 $e(t)$ 皆會因爲系統處於不穩定階段故向外發散，直到接觸到臨界點時進入極限圓，此時系統極限圓動態爲 $e(t)=X\sin(10\sqrt{5}t)$，系統振盪情形如圖 14–15 所示，系統相平面分析如圖 16–17 所示，可以發現系統以類似不穩定焦點向外擴散最終進入極限圓後不再離開。

(ii) 當輸入 $r(t)=30$ 或 50 時，無倫是 $K=65,70,75,80,85,90,95$，系統 $e(t)$ 首先會因爲系統處於穩定階段而向內收斂，直到接觸到臨界點時進入極限圓，此時系統極限圓動態爲 $e(t)=X\sin(10\sqrt{5}t)$，系統振盪情形如圖 18–19 所示，系統相平面分析如圖 20–21 所示，可以發現系統軌跡向内收斂至進入極限圓後不再離開。

綜合上述分析，除了臨界點/最大允許值 $K=60$ 之外，隨著 K 的升高系統的極限圓動態相同，意即 $e(t)=X\sin(10\sqrt{5}t)$，其中 振幅 X 可由本題所求出的表所決定，另一方面，由於系統相平面不論從極限圓外出發或是由極限圓内出發，系統誤差軌跡均會收斂到極限圓，故

吾人可推斷雖然此系統在 $K > K^* = 60$ 時系統處於不穩定的狀態，但系統含由一個穩定的極限圓。

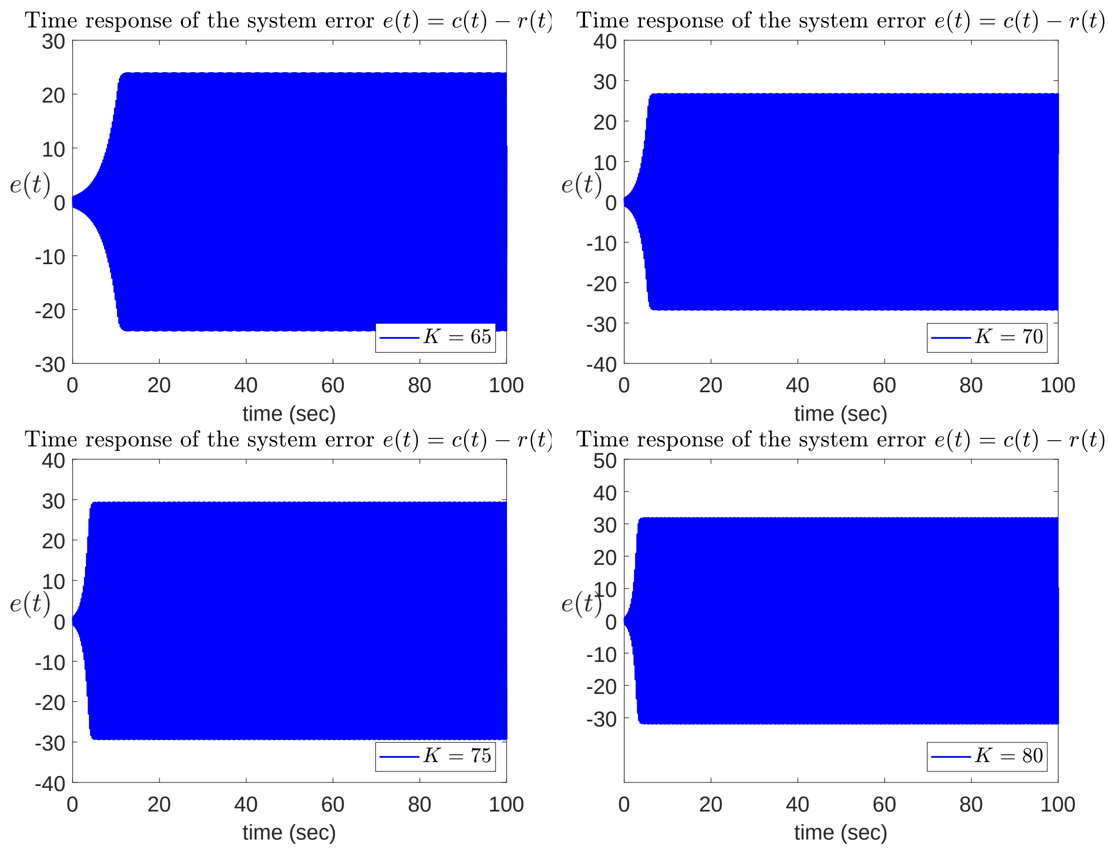


Figure 14: 檢驗系統震盪解，$K = 65, 70, 75, 80$ $r(t) = 1$

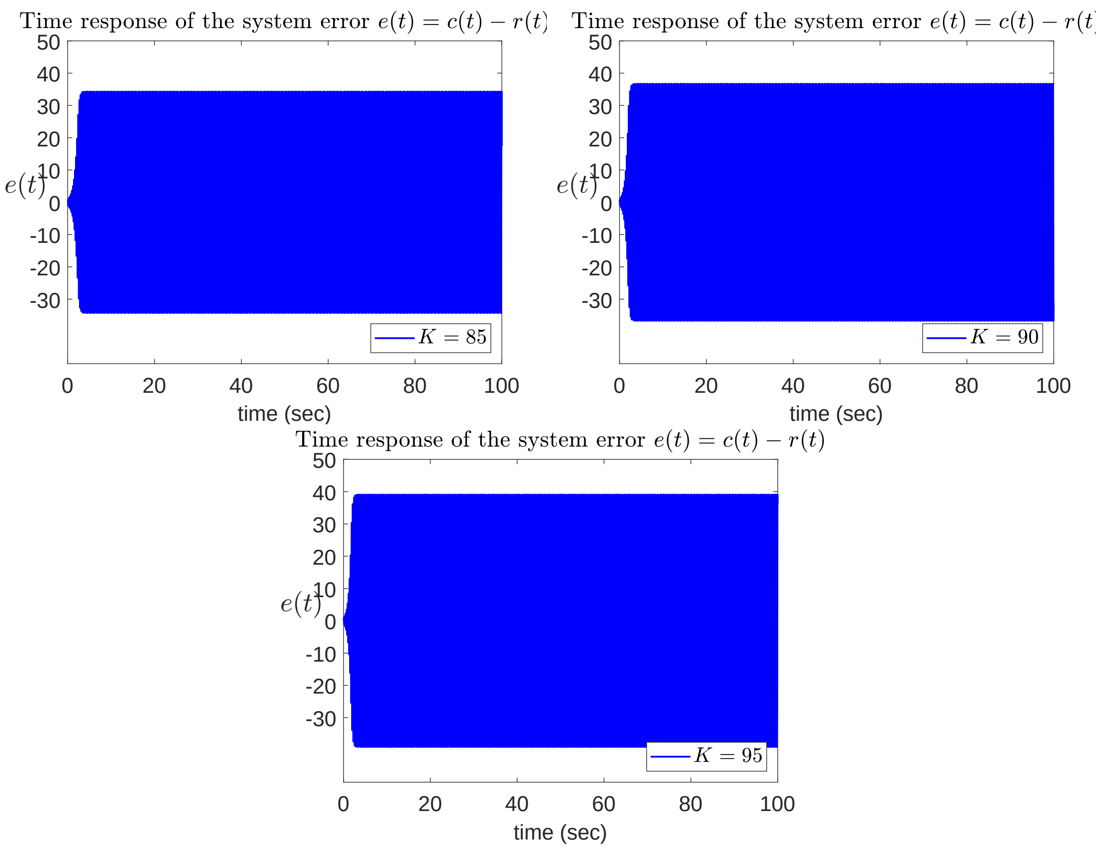


Figure 15: 檢驗系統震盪解，$K = 85, 90, 95,\ r(t) = 1$

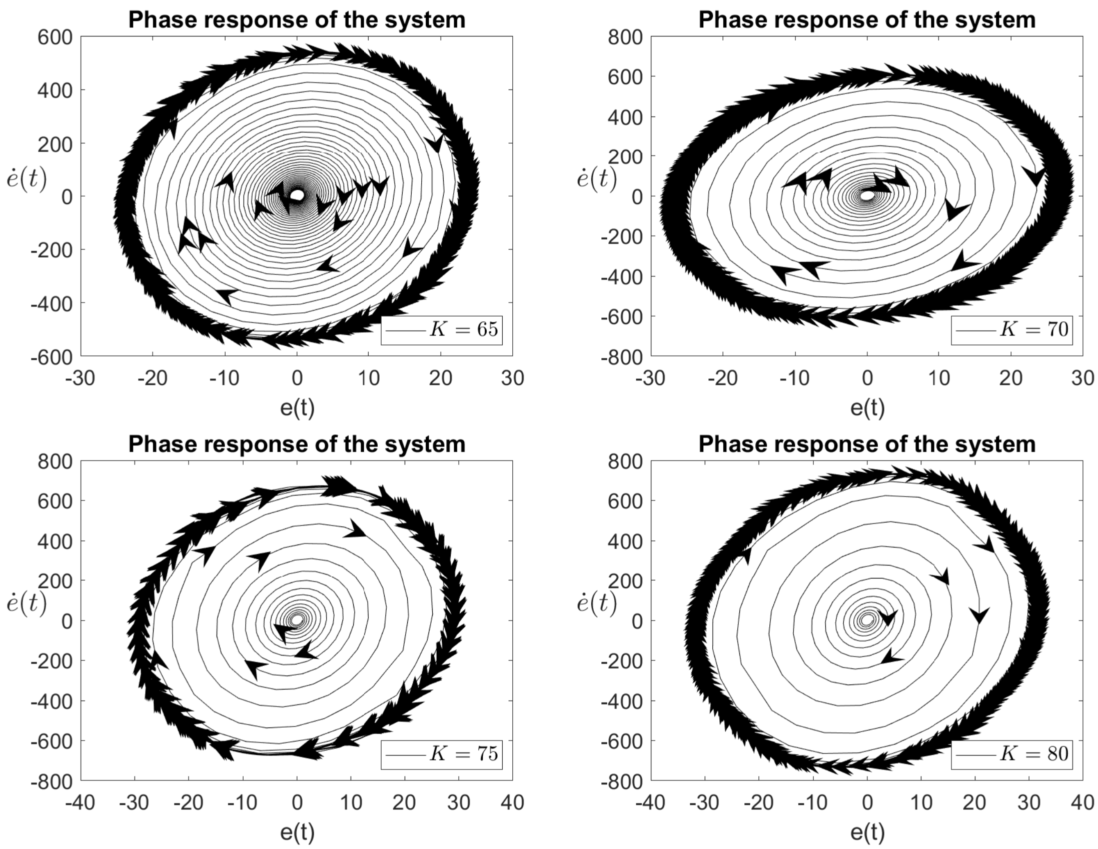


Figure 16: 檢驗系統震盪解，$K = 65, 70, 75, 80$ $r(t) = 1$

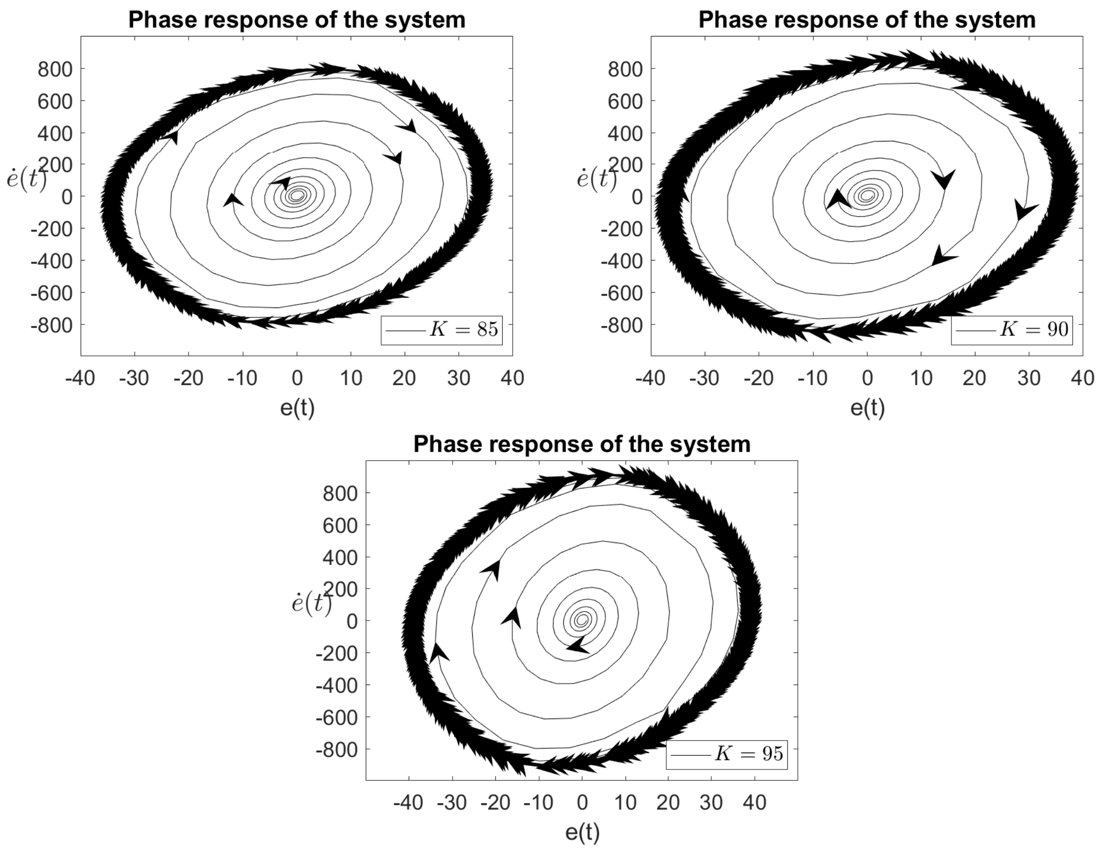


Figure 17: 檢驗系統震盪解，$K = 85, 90, 95,\ r(t) = 1$

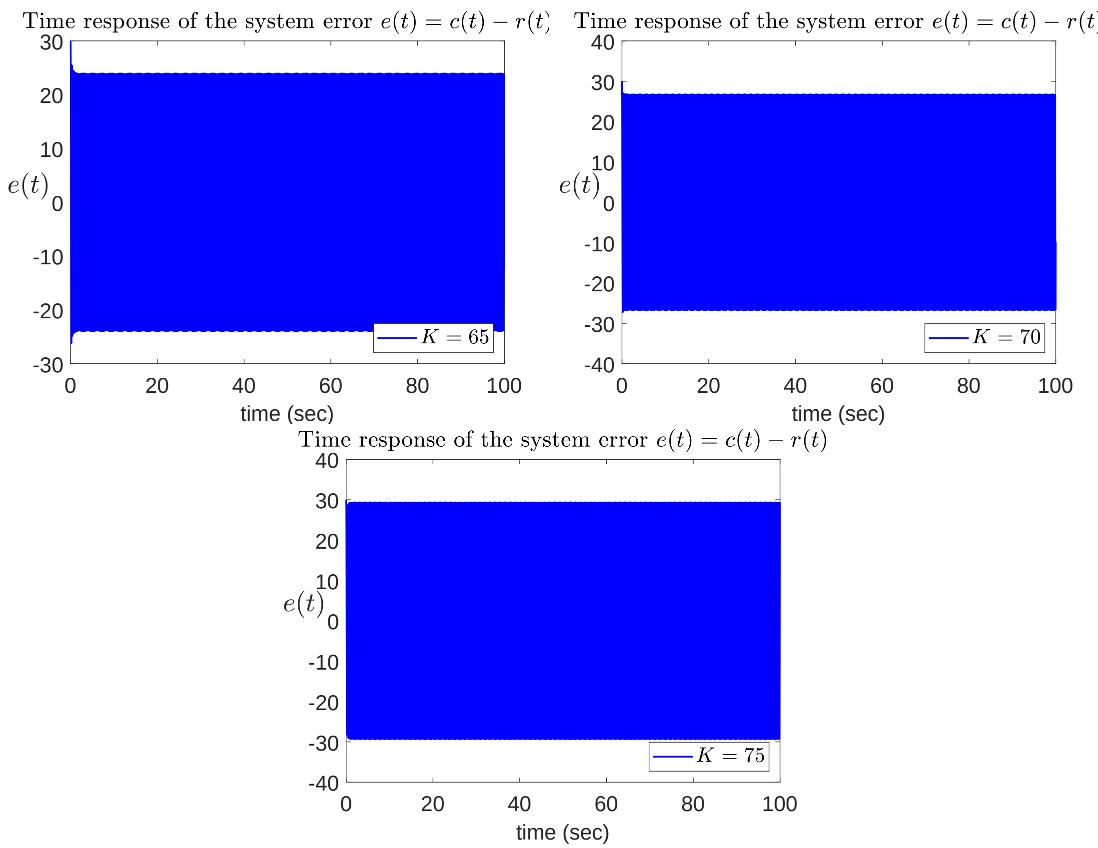


Figure 18: 檢驗系統震盪解，$K = 65, 70, 75,\ r(t) = 30$

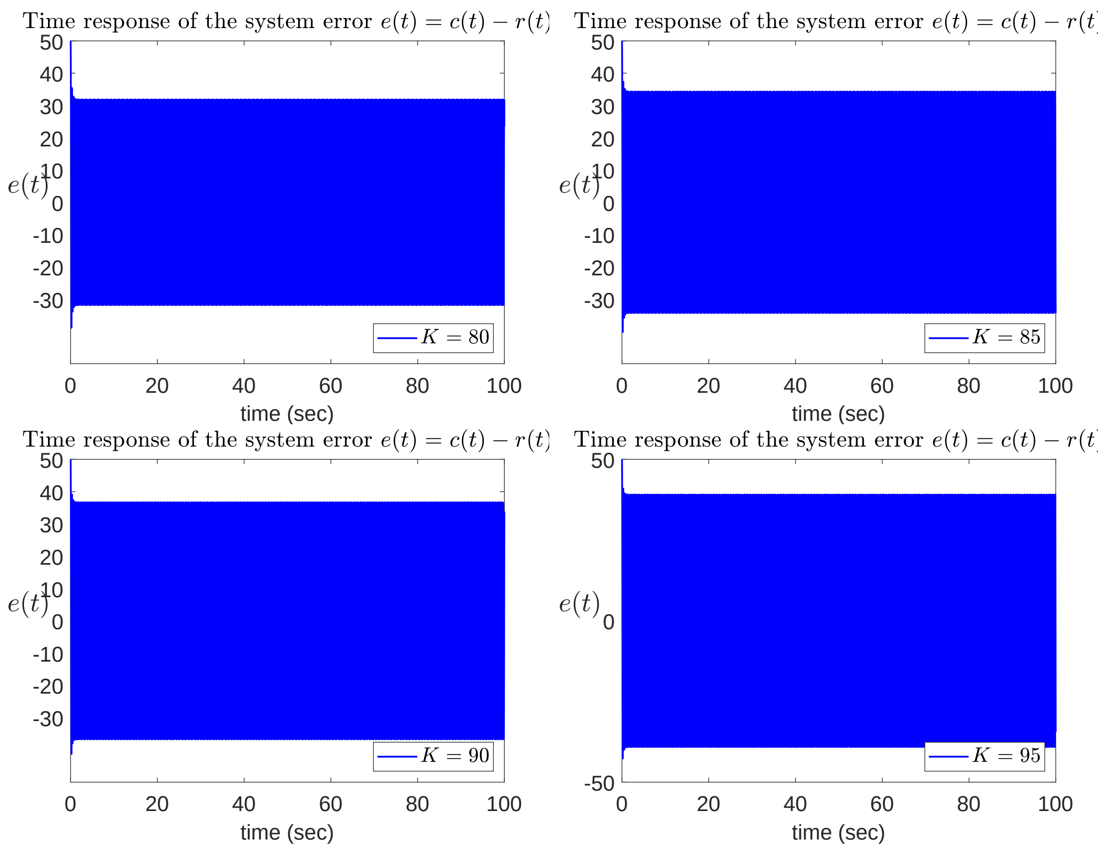


Figure 19: 檢驗系統震盪解，$K = 80.85, 90, 95,\ r(t) = 50$

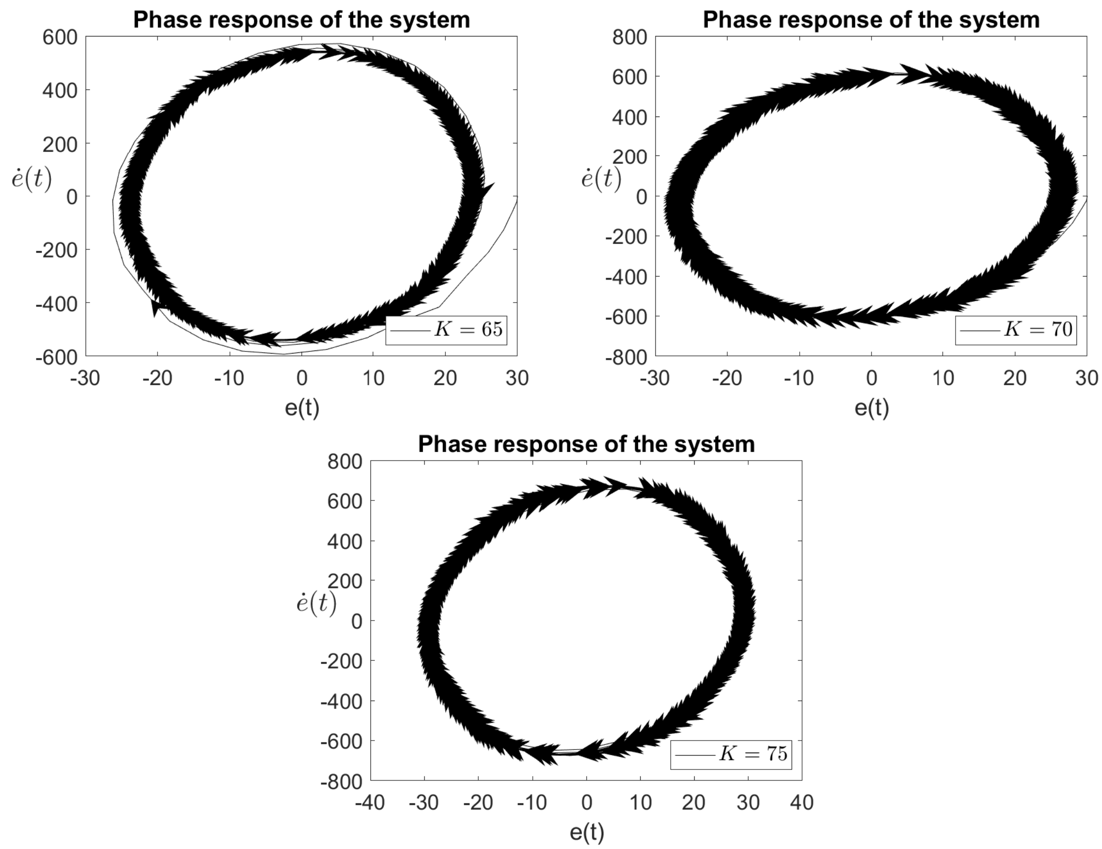


Figure 20: 檢驗系統震盪解，$K = 65, 70, 75,\ r(t) = 30$

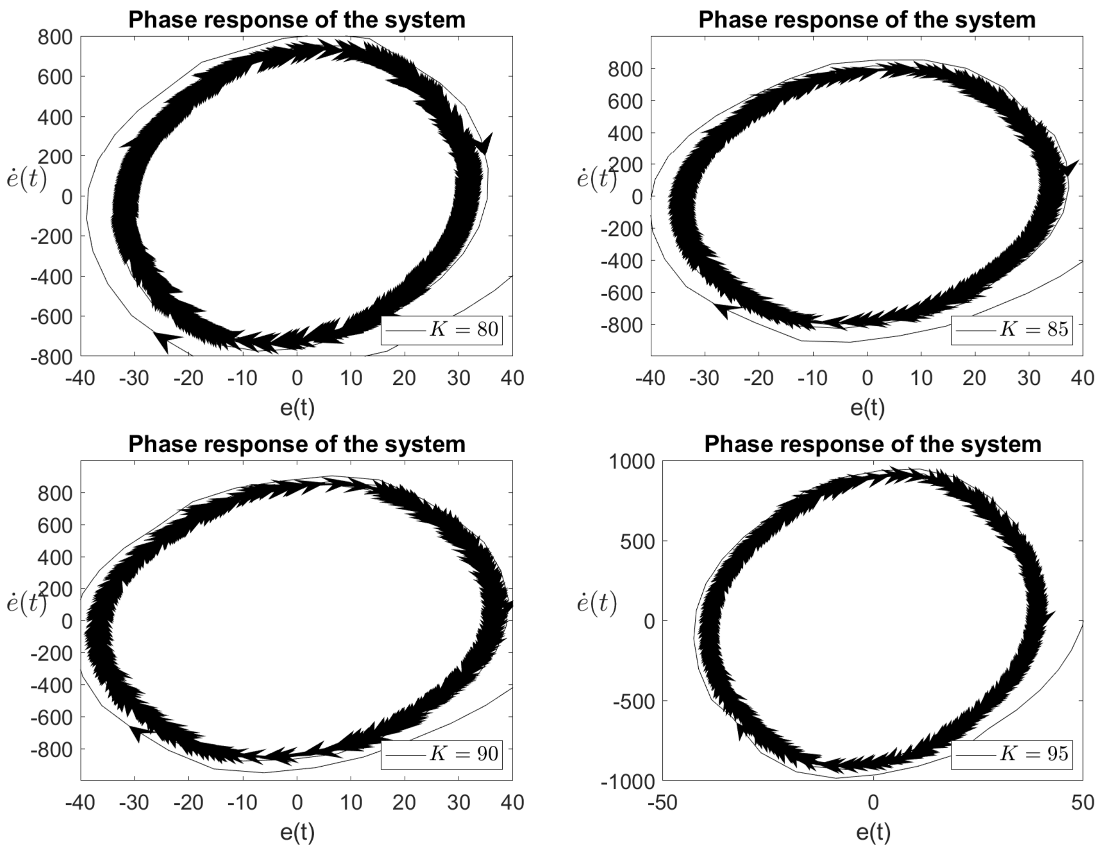
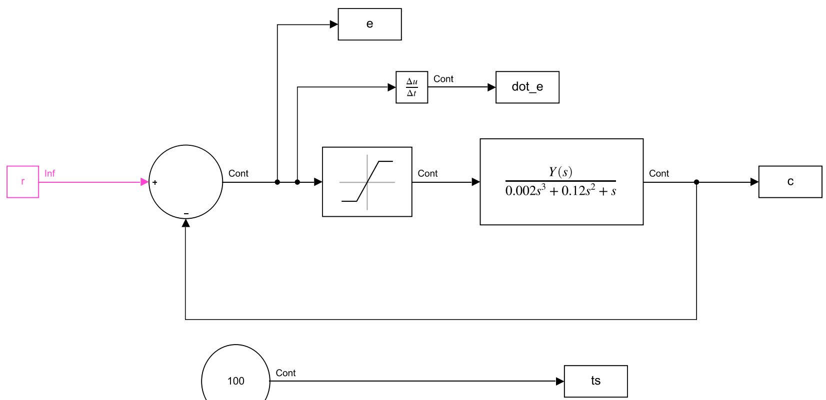


Figure 21: 檢驗系統震盪解，$K = 80.85, 90, 95,\ r(t) = 50$

A. Appendix : Code and simulink diagram




```
clear all;close all;clc;

%%%variable
global K;K=95;
global r;r=1;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% simulink model
sim('saturation1',0:0.01:100)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% simulink results
X_limit_cycle = max(e);    % find peak value when limit cycle
    occur

%%%%% plot time response
figure(1)
plot(ts,e,'b','LineWidth',1.3);hold on
set(gca,'FontSize',16);
leg1=legend({'$K=95$'},'Interpreter','latex','location','
    SouthEast');
set(leg1,'Fontsize',16);
 axis([0,100,-50,50])
xlabel('time (sec)','FontSize',16)
ylabel({'$e(t)$'},'Fontsize',20,'Rotation',0,'Interpreter','
    latex');
```

```
title('Time response of the system error $e(t)=c(t)-r(t)$','Interpreter','latex')
print k=95_50_time.eps -depsc;

%%%%% plot phase plane
figure(2)
arrowPlot(e,dot_e,'number', 500,'color', 'k', 'LineWidth', 0.01, 'scale', 0.1);;hold on
set(gca,'FontSize',16);
leg2=legend({'$K=95$'},'Interpreter','latex','location','SouthEast');
set(leg2,'Fontsize',16);
axis([-50,50,-1000,1000])
xlabel('e(t)')
ylabel({'$\dot e(t)$'},'Fontsize',20,'Rotation',0,'Interpreter','latex');
title('Phase response of the system')
print k=95_50_phase.eps -depsc;

%%%%% plot complex plane
figure(3)
den=conv([0.02 1],[0.1 1 0]);
w=[10:0.1:100000];
e1=exp(j*w);r1=real(e1);i1=imag(e1);
N=[-1:-0.1:-10000];
Y=zeros(1,99991);
[a1 b1]=nyquist(K,den,w);
plot(a1,b1,'linewidth',2);hold on
arrowPlot(N,Y,'number', 3,'color', 'b', 'LineWidth', 2, 'scale', 1, 'ratio', 'equal');;hold on
plot([0 0],[-2 2],'k--','linewidth',0.5);hold on
plot([-3 2],[0 0],'k--','linewidth',0.5);hold on
leg3=legend({'$G(J\omega)$','$-1/N(X)$'},'Interpreter','latex','location','SouthEast');
set(leg3,'Fontsize',16);
xlabel({'$Re$'},'Interpreter','latex','Fontsize',16);
ylabel({'$Im$'},'Interpreter','latex','Fontsize',16,'Rotation',0);
axis([-3,1,-2,2]);
title('Complex plane of the system when K=95')
grid on;
```

```
print k=95_50_complex.eps -depsc;
```

參考文獻

[1] 楊憲東，非線性系統與控制. I, 系統分析，成大出版社，2015

[2] Slotine, J.-J. E., and Weiping L.. *Applied nonlinear control.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice hall, 1991.

[3] Nise, N. S. *Control systems engineering.* John Wiley Sons, 2020.

[4] Nassirharand, A.. *Computer-aided nonlinear control system design: Using describing function models.* Springer Science & Business Media, 2012.