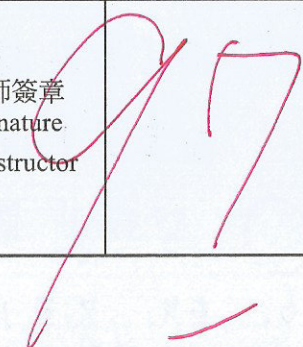


國立成功大學 學年度第 學期考試試卷

National Cheng Kung University Examination Sheet for Academic Year:

Semester:

年 月 日  
Year Month Day

|                   |   |                      |       |                                    |   |
|-------------------|---|----------------------|-------|------------------------------------|---|
| 姓名<br>Name        | 蔣孟桓                                       | 科目名稱<br>Subject Name | 非線性控制 | 教師簽章<br>Signature<br>of Instructor |  |
| 學號<br>Student No. | P46114361                                 |                      |       |                                    |   |
| 院系<br>College     | 學院 系 年 班<br>College Department Year Class | 評閱成績<br>Score        |       |                                    |   |

1. 令系統為  $f(x)$ 

1) 給定 input signal  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$  並得到其 output  $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$  後，測試混合 input  $x_1 + x_2$  是否會得到  $y_{1,2} = f(x_1 + x_2)$ 。(加性性)

$\begin{matrix} \nearrow = f(x_1) \\ y_1(t) \\ \searrow = f(x_2) \\ y_2(t) \end{matrix}$

2) 給定一 input signal  $x_1(t)$  及其 output  $y_1(t)$ ，測試其是否有  $f(kx_1) = ky_1$ 。

$\begin{matrix} = f(x_1) \\ y_1(t) \end{matrix}$

若上述兩項皆是，則 system 為線性，反之則為非線性。

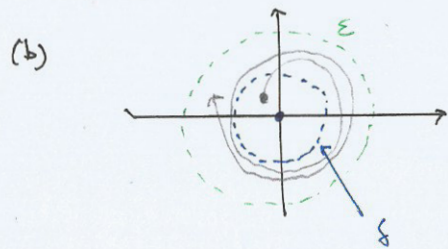
2. 設相平面上某點，其斜率：

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{f_1(x_1, x_2)}{f_2(x_1, x_2)} = \alpha = \text{const.}, \text{ 只有一值，因此軌跡不可能相交。 (若相交應有 2 種不同斜率) }$$

但對於時變系統，因同點上可有不同時間  $t$ ，因此有機會相交。



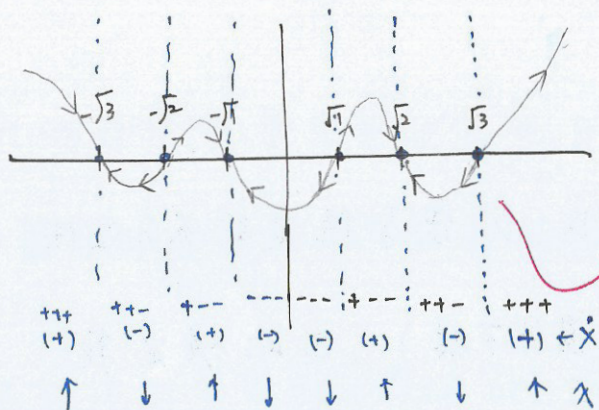
(a) 對一平衡點  $x=0$ ，在其週遭  $\delta$  的區域內釋放的起始點  $x_0$ ，其軌跡始終在  $\varepsilon$  的範圍內，則為 Lyapunov 穩定。



軌跡留在  $\varepsilon$  內，即為 Lyapunov 穩定

而漸近穩定則要求其最終進入平衡點

4. 令  $\dot{x} = (x^2-1)(x^2-2)(x^2-3) = 0$  可得平衡點： $\pm\sqrt{1}$ ,  $\pm\sqrt{2}$ ,  $\pm\sqrt{3}$



Summary:

穩定： $\sqrt{2}$ ,  $-\sqrt{1}$ ,  $-\sqrt{3}$

不穩定： $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{1}$ ,  $-\sqrt{2}$

5.

若為穩定極限圓，軌跡最終進入極限圓中，因此對於平衡點來說是發散的（不穩定）



而若為不穩定極限圓，圓內軌跡收斂至平衡點，此點穩定

而若為半穩定極限圓，平衡點穩定性則不一定，視半穩定極限圓內的穩定性而定。

6. 首先，只要沿著步道（相軌跡）走時，GPS高度訊號持續降低，極具有漸近穩定性，

但步道不一定能通到這個山谷（平衡點）。若滿足所有步道皆前往此山谷，則為全域穩定。

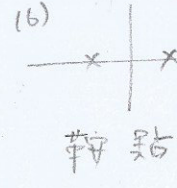
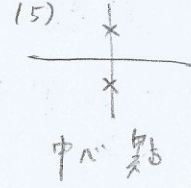
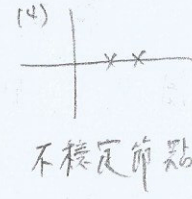
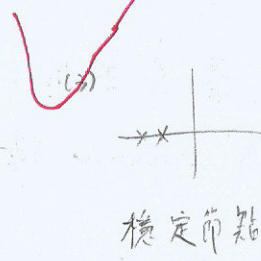
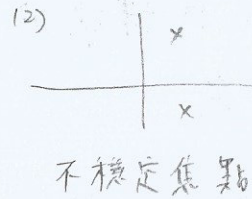
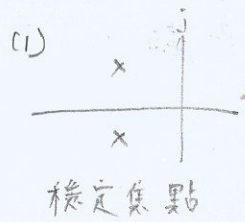
7. 對此線性 system 求 e-val:

$$\lambda(A) = \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$

$$\lambda = \frac{(a_{11}+a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}{2} \quad (7.1)$$

其中  $\lambda$  之解有 6 種可能：





只要將  $a_{ij}$  依 (7.1) 式計算後找出的分布，即可判別相軌跡類型。

8.  $D_1 \cup D_2$ ，因為利用 Lyapunov 直接定理找出的範圍  $D_1, D_2$  僅為穩定的充分條件，意即範圍內保證穩定，而範圍外未知（~~範圍外不穩~~），因此穩定範圍為所有 Lyapunov function 找出的穩定範圍之聯集。



| 國立成功大學  |               |                 | 學年度第                 | 學期考試試卷     | 年             | 月                                  | 日 |
|---|---------------|-----------------|----------------------|------------|---------------|------------------------------------|---|
| National Cheng Kung University Examination Sheet for Academic Year: |               |                 |                      | Semester:  |               |                                    |   |
| 姓名<br>Name  | 蔣五柱           |                 | 科目名稱<br>Subject Name | 非線性控制      |               | 教師簽章<br>Signature<br>of Instructor |   |
| 學號<br>Student No.   | P46114361     |                 |                      |            |               |                                    |   |
| 院系<br>College   | 學院<br>College | 系<br>Department | 年<br>Year            | 班<br>Class | 評閱成績<br>Score |                                    |   |

7.

$$(1) \quad V(x, t) = \underbrace{x_1^2}_{>0} + \underbrace{(2 + \sin t)}_{>0} \underbrace{x_2^2}_{>0} > 0 \quad \checkmark \quad (-1 \leq \sin t \leq 1 \Rightarrow 2 + \sin t > 0 \quad \forall t) \quad \therefore$$

(2)

$$V_0(x, t) \leq V(x, t) \leq V_1(x, t)$$

$$x_1^2 + x_2^2 \leq V(x, t) \leq x_1^2 + x_2^2 \quad \checkmark$$

$$(3) \quad \dot{V}(x, t) = 2x_1 \dot{x}_1 + 4x_2 \dot{x}_2 + \cos t x_2^2$$

$$= 2x_1(-x_1 - 1 - \sin t x_2) + 4x_2(x_1 - x_2) + \cos t x_2^2$$

$$= -2x_1^2 - 2x_1 - 2x_1 x_2 \sin t + 4x_1 x_2 - 4x_2^2 + \cos t x_2^2 < 0$$



10.

$$V(x) = x^T x$$

$$\dot{V}(x) = x^T \dot{x} + \dot{x}^T x = x^T (Ax) + (Ax)^T x = x^T (A(t) + A^T(t)) x$$

10

$$\lambda(A(t) + A^T(t)) = \lambda \begin{pmatrix} -2 & -\sin t \\ -\sin t & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-\lambda & -\sin t \\ -\sin t & -2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + (4 - \sin^2 t)$$

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(4 - \sin^2 t)}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sin t}{2} < 0 \Rightarrow \text{具一致穩定性} \#$$