

## 第 4 章作業

- 繳交日期 2022/10/29(星期六), 24:00 前
- 以 PDF 附件 email 傳送 [cdyang@mail.ncku.edu.tw](mailto:cdyang@mail.ncku.edu.tw)
- 作業上傳檔案名稱格式:非線性控制作業(第 4 章)\_姓名\_學號.pdf

4.1 利用 Lyapunov 直接定理分析下列非線性方程式在原點處之穩定性:

$$\dot{x}_1 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) \quad (1a)$$

$$\dot{x}_2 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) \quad (1b)$$

- (a) 採用 Lyapunov 函數  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ , 求出滿足  $\dot{V} < 0$  的  $(x_1, x_2)$  收斂範圍。
- (b) 在此範圍內選 3 個初始點, 用 Matlab 畫出相平面軌跡確認穩定性的預測。同時在確保穩定的範圍之外也任選 3 個初始點, 是否由這些點出發的軌跡都為不穩定? 解釋其原因。
- (c) 不同  $V(x)$  函數所對應的收斂範圍均不同, 最精確的收斂範圍必須由(1)式本身決定。透過座標轉換  $(x_1, x_2) \rightarrow (r, \theta)$ , 求得使得  $\dot{r} < 0$  的  $r$  範圍, 比較由(a)以條件  $\dot{V} < 0$  所得到的範圍有何不同?

4.2 利用可變梯度法求下列非線性系統的 Lyapunov 函數  $V$

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^2x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_2 \quad (3)$$

假設  $V$  的梯度可表成

$$\nabla V = [a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \quad a_{21}x_1 + 2x_2]$$

不同的係數  $a_{ij}$  可得到不同的 Lyapunov 函數  $V$ 。考慮下列二種不同的  $a_{ij}$  選擇, 分別求得對應的 Lyapunov 函數  $V$ , 並求出其可確保穩定的區域範圍:

(a)  $a_{11} = 1, \quad a_{21} = a_{12} = 0$

(b)  $a_{11} = \frac{2}{(1 - x_1x_2)^2}, \quad a_{12} = \frac{-x_1^2}{(1 - x_1x_2)^2}, \quad a_{21} = \frac{x_1^2}{(1 - x_1x_2)^2}$

- (c) 系統(3)可穩定的範圍是以上二個範圍的交集或聯集? 在保證穩定的範圍內選幾個初始點, 以 Matlab 求解(3)式, 證實平衡點為穩定; 在穩定範圍之外也選幾個初始點, Matlab 求解所得之相平面軌跡是否必為發散?

4.3 考慮一個二階非線性系統

$$\dot{x}_1 = -\frac{6x_1}{(1 + x_1^2)^2} + 2x_2, \quad \dot{x}_2 = \frac{-2(x_1 + x_2)}{(1 + x_1^2)^2} \quad (4)$$

本題是要測試(4)式相對於原點是否為全域穩定。

- (a) 若取  $V(x) = \frac{x_1^2}{1 + x_1^2} + x_2^2$ , 證明  $V(x) > 0, \dot{V}(x) < 0, \forall x \in \mathcal{R}^2 - \{0\}$ 。亦即原點為漸近穩定。
- (b) 測試  $V(x)$  是否滿足 radially unbounded 條件(參考講義 4.4 節)? 也就是當  $x$  離原點無窮遠時,  $V(x)$  的值是否也必定趨近於無窮大?
- (c) 畫出  $V(x)$  的等高線圖(令  $V(x)$  = 不同的常數值, 從大排到小, 取約 10 個數值), 並以此等高線圖為背景, 畫出該系統的相平面軌跡。證明從某些點出發的相平面軌跡, 其切割等高線圖的方式雖然滿足  $\dot{V}(x) < 0$  的條件, 然而這些軌跡最後卻不進入平衡點, 亦即此系統不為全域漸近穩定(參照講義的圖 4.4.2)。從數值上求出該系統可保證漸近穩定的初始值範圍。