非線性控制
Nonlinear Control

第一章作業

學號 : P46104285

研究生 : 楊亞勳

授課教授 : 楊憲東

Department of Aeronautics and Astronautics

National Cheng Kung University

Tainan, Taiwan, ROC

中華民國 111 年 9 月 24 日

目錄

第一題

<u>Question:</u>

渾沌(chaos)的測試。試用 MATLAB 求解非線性 ODE

$$\ddot{x}+0.1\dot{x}+x^3=5\cos t \tag{1.1}$$

測試兩組很接近的初始條件

(a) $x(0)=3$，$\dot{x}(0)=4$

(b) $x(0)=3.01$，$\dot{x}(0)=4.01$

比對兩組$x(t)$對時間的響應圖，是否很接近?若把非線性項 x^3 改成線性項x，情況又如何？

<u>Answer:</u>

利用 MATLAB 內中的 ode45 微分方程數值求解器可直接計算(1.1)中 x 對時間的變化。而每組邊界條件有兩組解，標示為 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ ，如圖 1.1~圖 1.4 所示。

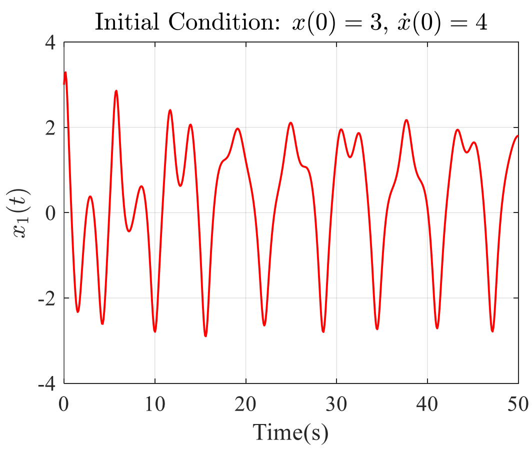

圖 1.1、邊界條件(a)對時間之響應 $x_1(t)$

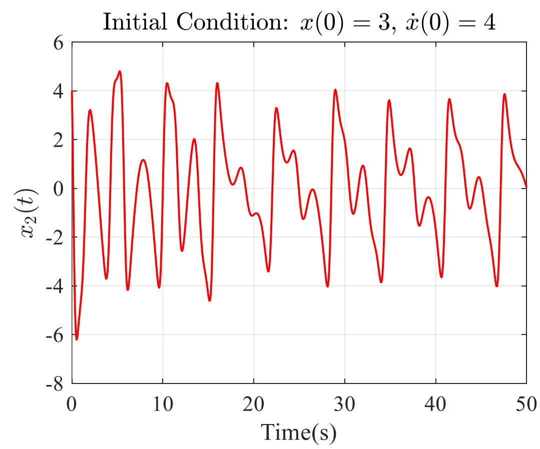

圖 1.2、邊界條件(a)對時間之響應 $x_2(t)$

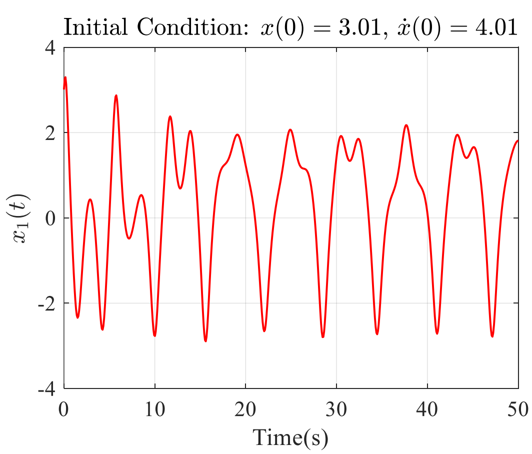

圖 1.3、邊界條件(b)對時間之響應 $x_1(t)$

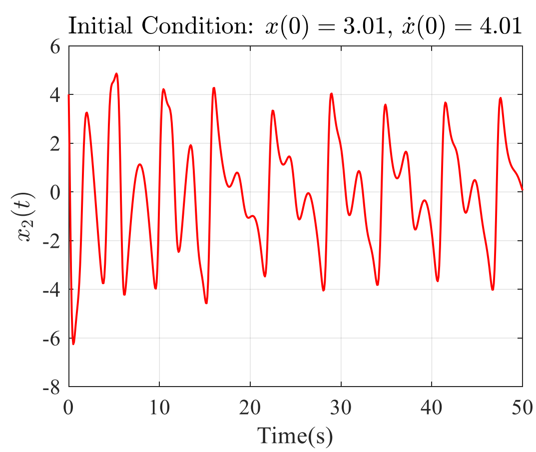

圖 1.4、邊界條件(b)對時間之響應 $x_2(t)$

直觀上，圖 1.1 和圖 1.3，圖 1.2 和圖 1.4(相同邊界條件)之比較並沒有很大的差異。式(1.1)和課本[1]中的式(1.8.1)相比，差別在於 $\dot{x}$ 前的係數和方程式右邊之對時間函數。而在式(1.1)中，$\dot{x}$ 前的係數為 0.1，明顯大於課本中式(1.8.1)之 0.05，這造成了此題中非線性部分權重較小，故渾沌現象較不明顯。圖 1.5 和圖 1.6 將相同的解，不同的邊界條件對時間之響應進行疊圖，發現除了某些點，例如 t=9s、t=26s 以外，並沒有太大的差異。和課本中之圖 1.8.1 相比有很大的不同。

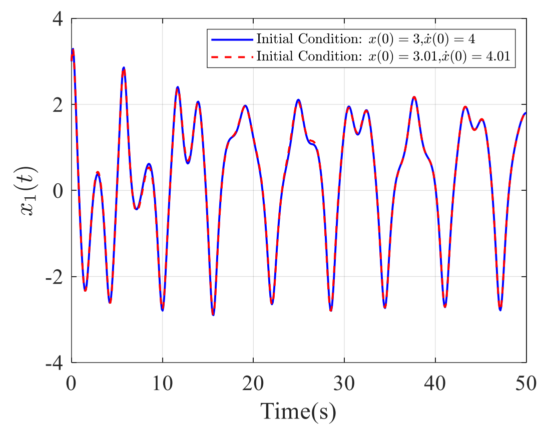

圖 1.5、邊界條件(a)、(b)對時間之響應 $x_1(t)$

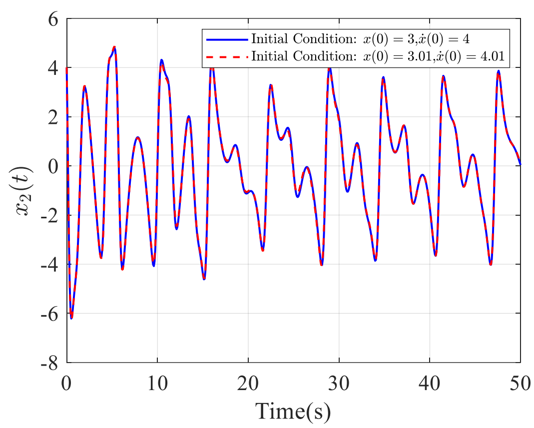

圖 1.6、邊界條件(a)、(b)對時間之響應 $x_2(t)$

若是將式(1.1)之 x^3 項改為 x，則此系統變為一線性系統。由圖 1.7 觀察可知，兩個差異細微的邊界條件，對線性系統的解幾乎沒有任何影響，兩條線幾乎完全貼合。

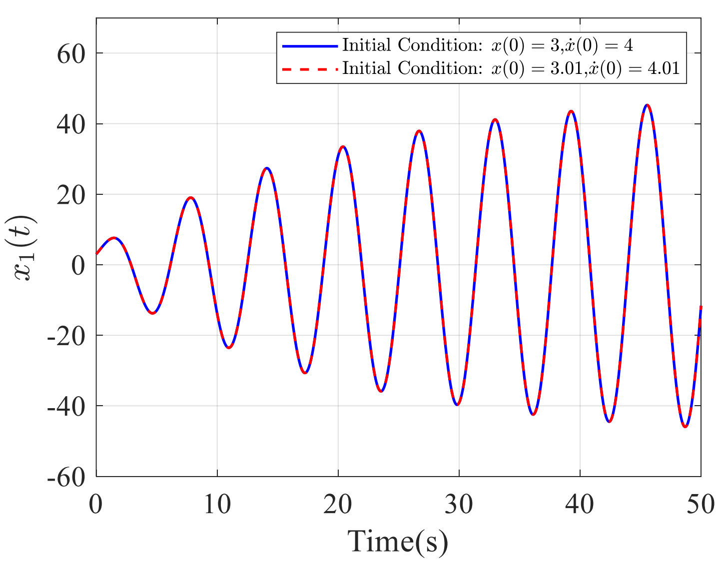

圖 1.7、線性系統於邊界條件(a)對時間之響應 $x_1(t)$

第二題

<u>Question:</u>

Lorentz 奇異吸子的測試：用 MATLAB 求解下列非線性 ODE

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 10(y-x) \\ \dot{y} &= x(28-z)-y \\ \dot{z} &= xy-8z/3 \end{aligned} \tag{2.1}$$

選取初始位置(x(0), y(0), z(0)) = (1,1,0)，畫出軌跡點$(x(t), y(t), z(t))$隨時間$t = 0$連 續變化到$t = T$所連成的曲線。比較三種終端時間:$T = 100, 1000, 10000$，所得到的奇異吸子軌跡有何不同?如果將初始位置改成(x(0), y(0), z(0)) = (10,1,0)，其結果有何不同?

<u>Answer:</u>

奇異吸子的特性為軌跡既不收斂於固定點，也不進入極限圓，但也不發散。而是在有限空間內不斷變化沒有一定的規則，但軌跡絕不會重複。為了驗證這個非線性系統的特性，利用 MATLAB 的數值求解器 ODE45，帶入第一個邊界條件，可求出不同終端時間(2.1)的時間響應。圖 2.1、圖 2.2 和圖 2.3 為邊界條件(x(0), y(0), z(0)) = (1,1,0)對 T=100 秒、T=1000 秒和 T=10000 秒的時間響應。

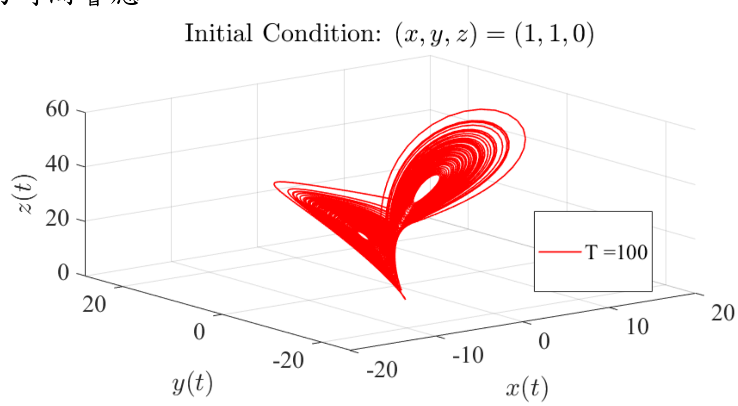

圖 2.1、Lorentz 系統於第一邊界條件之奇異吸子軌跡 (T=100s)

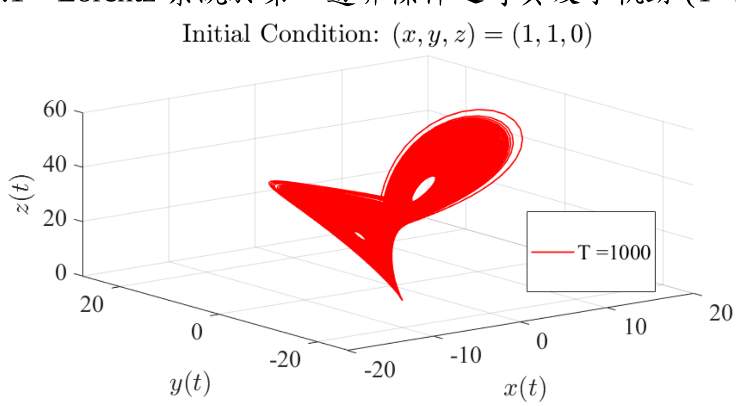

圖 2.2、Lorentz 系統於第一邊界條件之奇異吸子軌跡 (T=1000s)

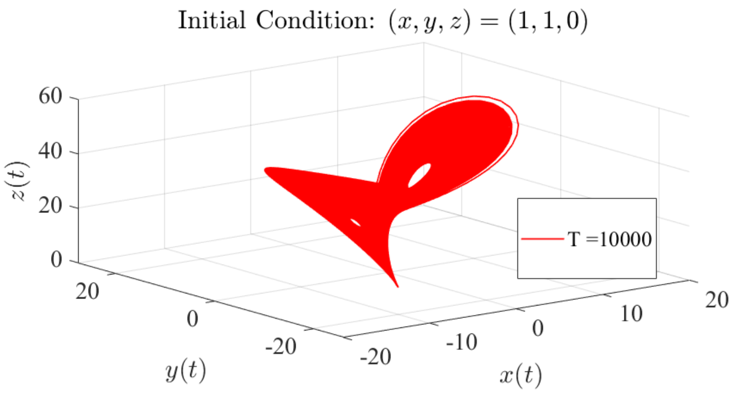

圖 2.3、Lorentz 系統於第一邊界條件之奇異吸子軌跡 (T=10000s)

由上面三個圖可以發現，此系統的解會沿著兩個吸子旋轉，既不發散，也不收斂，隨著時間的增長，軌跡以不重複。符合先前描述的奇異吸子的現象。

若是將邊界條件改為(x(0), y(0), z(0)) = (10,1,0)。則結果如圖 2.4、圖 2.5 和圖 2.6。

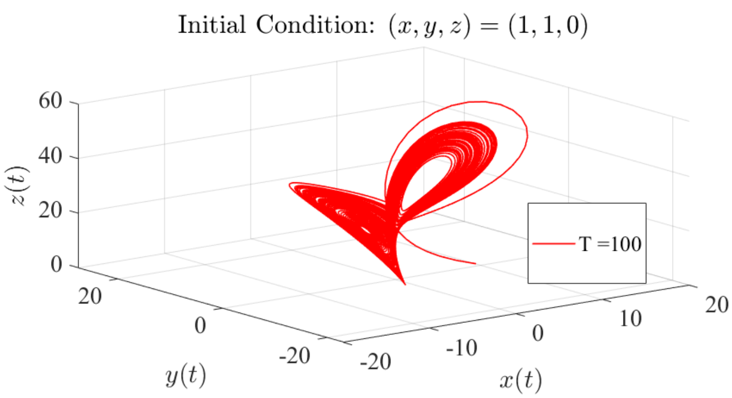

圖 2.4、Lorentz 系統於第二邊界條件之奇異吸子軌跡 (T=100s)

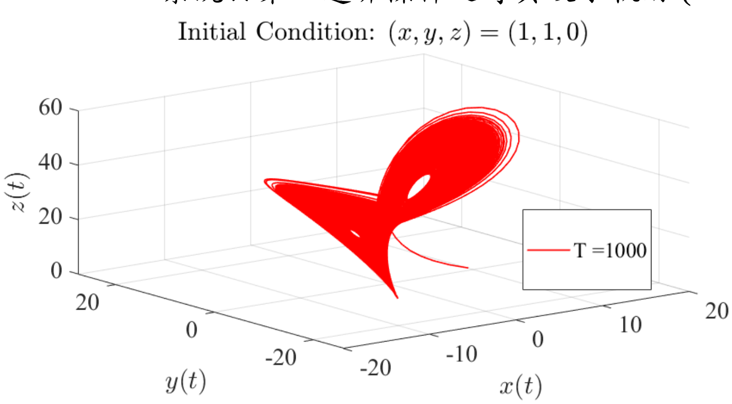

圖 2.5、Lorentz 系統於第二邊界條件之奇異吸子軌跡 (T=1000s)

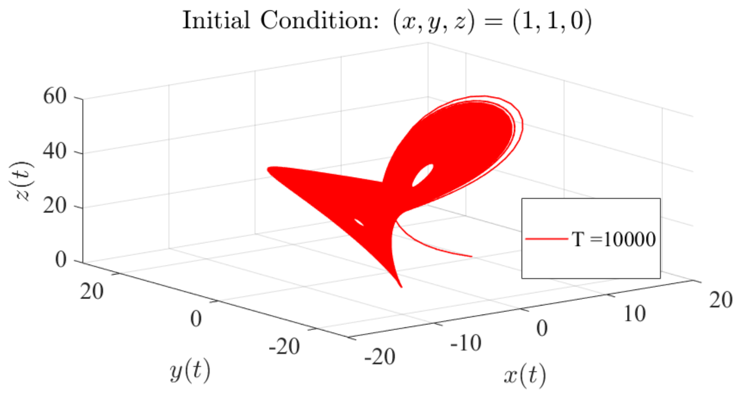

圖 2.6、Lorentz 系統於第二邊界條件之奇異吸子軌跡 (T=10000s)

改變邊界條件後，軌跡旱地一個邊界條件若有不同，但是發生的現象完全相同，就是既不發散，也不收斂，隨著時間的增長，軌跡以不重複。

根據課本[1]中的描述，奇異吸子在某些初始條件下會有渾沌現象的發生，即是初始值隊系統輸出有很大的影響。為了探討這個現象是否存在，圖 2.7 繪製了不同邊界條件下，$x(t)$ 對時間的響應。由圖中可以看到，在 20 秒後，每個時間點的值會有很大的差異，但是值的大小都在-20 到 20 之間。由此可知，渾沌現象可能會伴隨著奇異吸子的發生。

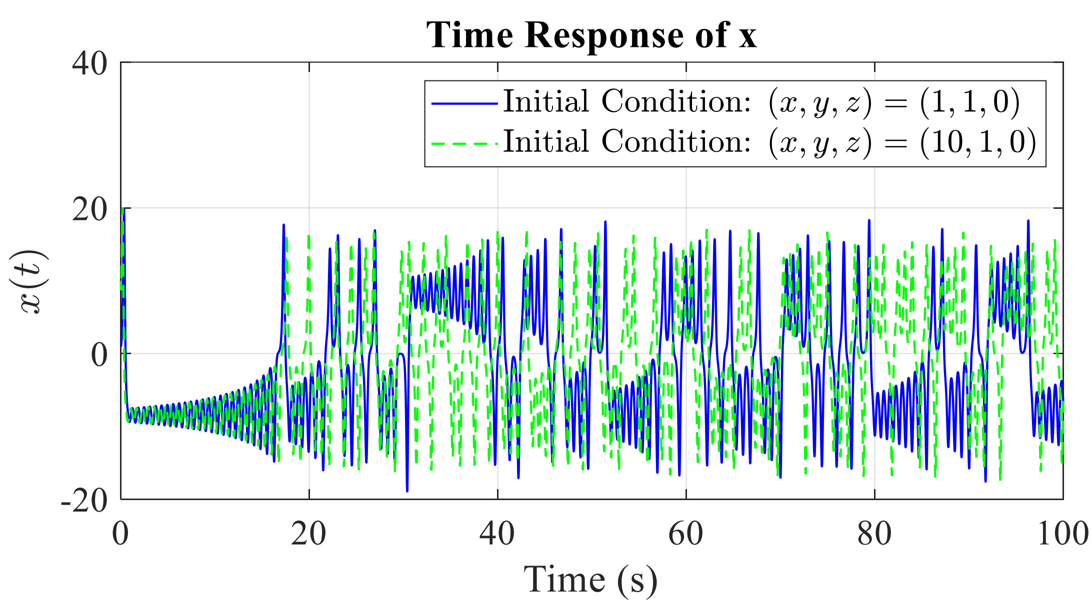

圖 2.7、Lorentz 系統於兩個不同邊界條件下的時間響應

第三題

<u>Question:</u>

霍普夫分岔(Hopf bifurcation)的測試：考慮下列非線性 ODE

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - y + 2x(x^2+y^2)^2 \\ \dot{y} &= x + \mu y + 2y(x^2+y^2)^2\end{aligned} \tag{3.1}$$

其中 m 是常數。

(a) 將直角座標 (x, y) 轉成極座標 (r, θ) ，並將上式用r，θ表示之。

(b) 任選三個不同的μ值： $\mu_1 > 0$ ， $\mu_2 = 0$ ， $\mu_3 < 0$ ，用 MATLAB 畫出其相對應的軌跡圖 $(x(t), y(t))$ 。參考 1.6 節中第一個例題及圖 1.6.3 的討論。

(c) 根據極座標方程式及上述之軌跡變化，推論出分岔現象發生時之 μ_c 值。

(d) 比較 $\mu>\mu_c$ 及 $\mu<\mu_c$ 二種情形下，平衡點數目是否有改變，軌跡的幾何結構是否有改變?

<u>Answer:</u>

(a)

直角坐標表示式如下:

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \tag{3.2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{3.3}$$

若將(3.2)和(3.3)對時間微分，則得到式(3.4)和(3.5)，如下:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2x\dot{x}+2y\dot{y}\right) \tag{3.4}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^{-1}\left(\frac{\dot{y}x-y\dot{x}}{x^2}\right) \tag{3.5}$$

此時再將式(3.1)帶入式(3.4)和式(3.5)中，整理後得到(3.1)之極座標表示法(3.6):

$$\begin{cases}\dot{r} = r(\mu+2r^4) \\ \dot{\theta} = 1\end{cases} \tag{3.6}$$

(b)

Case 1: $\mu_1 > 0$

將 $r = 0.5$ 、 $\mu = 1$ 代入式(3.6)，利用 RK4 數值求解器解算微分方程，得到圖 3.1。觀察式(3.6)，當 μ_1>0 時，因為 r 一定大於等於零，故 $\dot{r} > 0$ ， r 遞增，平衡點不穩定，故圖 3.1 中之軌跡向外發散。

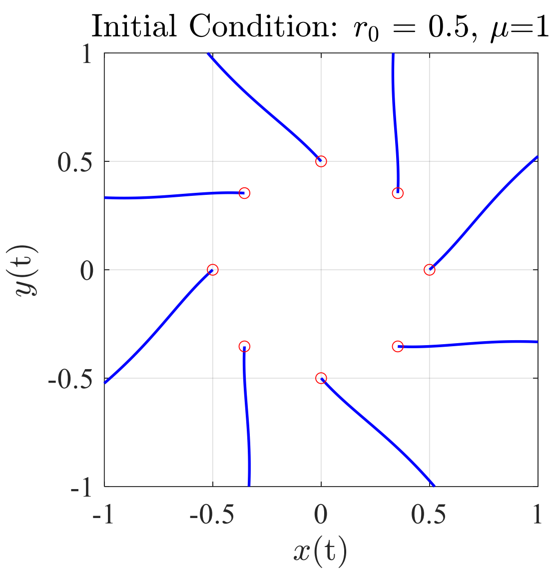

圖 3.1、當 $r = 0.5$ 、 $\mu = 1$ 時之軌跡

Case 2: $\mu_2 = 0$

將 $r = 0.5$ 、 $\mu = 0$ 代入式(3.6)，利用 RK4 數值求解器解算微分方程，得到圖 3.2。觀察式(3.6)，當 $\mu_2 = 0$ 時，因為 r 一定大於等於零，故 $\dot{r} > 0$ ， r 遞增，平衡點不穩定，故圖 3.2 中之軌跡向外發散。和圖 3.1 不同時，當 $\mu = 0$ 時，向外發散的時間發生的較慢。

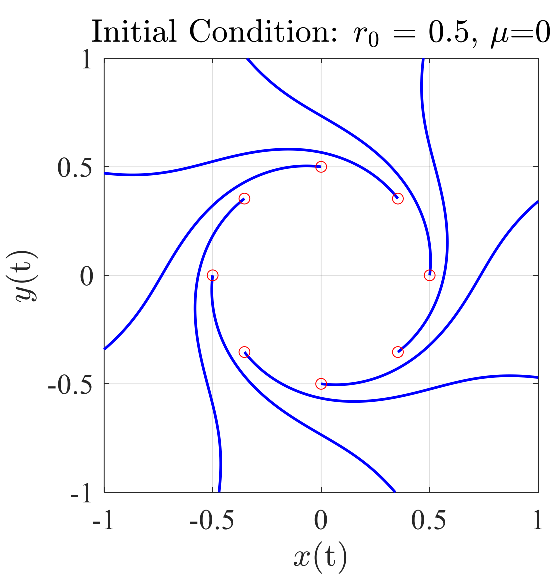

圖 3.2、當 $r = 0.5$ 、 $\mu = 0$ 時之軌跡

Case 3: $\mu_3 < 0$

觀察式(3.6)， 當 $\mu_3 < 0$ 時，可以分成三個情況：

$$\left(\mu + 2r^4\right) = 0 \tag{3.7}$$

$$2r^4 = -\mu \tag{3.8}$$

$$r = r_c = \sqrt{\frac{-\mu}{2}} \tag{3.9}$$

(i) $r > r_c$ ，則 $\dot{r} > 0$，r 增加，使平衡點不穩定。

(ii) $r = r_c$ ，則 $\dot{r} = 0$，r 維持在 $\sqrt{\frac{-\mu}{2}}$ 。

(iii) $r < r_c$ ，則 $\dot{r} < 0$ ，r 減小，且收斂到 0。

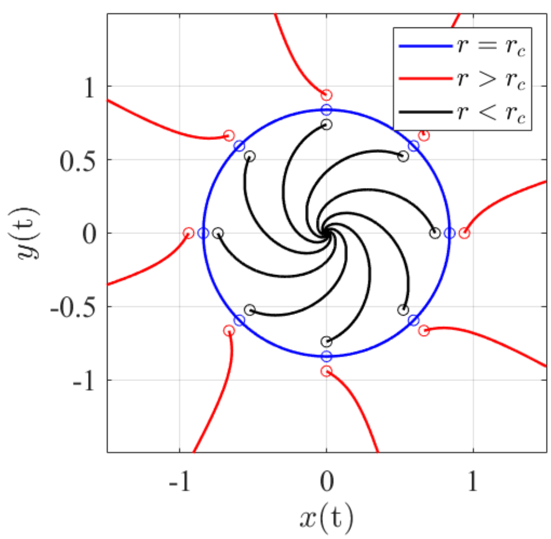

圖 3.3、 $\mu < 0$ 時之軌跡

(c)

因

$$\left(\mu + 2r^4\right) = 0 \tag{3.10}$$

故

$$\mu = \mu_c = -2r^4 \tag{3.11}$$

式(3.11)表示出分岔現象發生時之 μ_c 值。

(d)

圖 3.4 表示出 $\mu=\mu_c$ 、 $\mu>\mu_c$ 和 $\mu<\mu_c$ 之軌跡。

當 $\mu>\mu_c$ 時，平衡點之數目為 0，且軌跡向外發散。

當 $\mu<\mu_c$ 時，平衡點數目為 1，所有軌跡收斂到 $(x,y)=(0,0)$ 。

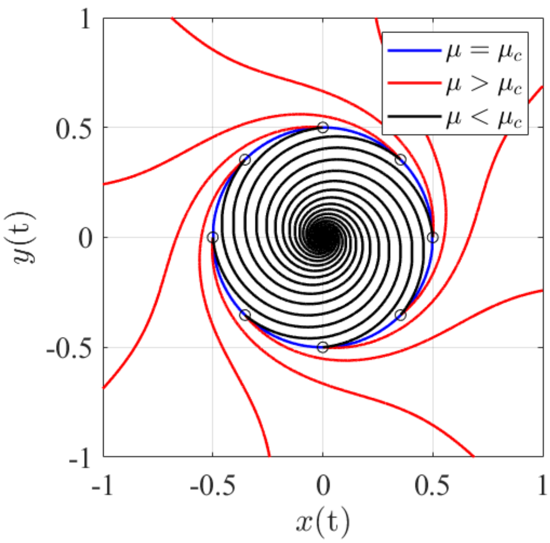

圖 3.4、固定 r，不同 μ 之軌跡

MATLAB Code
第一題

```
% Nonlinear Control HW1_1
%%
clc;
clear;
close all;

%% Initial Condition 1
c1=[3 4];
%% Initial Condition 2
c2=[3.01 4.01];

%% Time span
t0=0;
tf=50;
nout=600;
tspan=linspace(t0, tf, nout);

%% Nonlinear Case 1
[t1, y1]=ode45(@nonlinear, tspan, c1);

%% Nonlinear Case 2
[t2, y2]=ode45(@nonlinear, tspan, c2);

%% Linear Case 1
[t3, y3]=ode45(@linear, tspan, c1);

%% Linear Case 2
[t4, y4]=ode45(@linear, tspan, c2);

%%  Plot
LW_1=1.4;
FS_ax=16;
FS_leg=10;

%% x1 Condition 1
figure(1)
plot(tspan, y1(:,1), 'r', 'LineWidth',LW_1);
xlabel('Time(s)')
ylabel('$x_1(t)$', 'Interpreter', 'latex')
title('Initial Condition: $x(0)=3$, $\dot x(0)=4$','Interpreter', 'latex')
```

```
ax(1)=gca;
ax(1).YLim=[-4 4];
grid on

%% x2 Condition 1
figure(2)
plot(tspan, y1(:,2), 'r', 'LineWidth',LW_1);
xlabel('Time(s)')
ylabel('$x_2(t)$', 'Interpreter', 'latex')
title('Initial Condition: $x(0)=3$, $\dot x(0)=4$','Interpreter', 'latex')
ax(2)=gca;
ax(2).YLim=[-8 6];
grid on

%% x1 Condition 2
figure(3)
plot(tspan, y2(:,1), 'r', 'LineWidth',LW_1);
xlabel('Time(s)')
ylabel('$x_1(t)$', 'Interpreter', 'latex')
title('Initial Condition: $x(0)=3.01$, $\dot x(0)=4.01$','Interpreter', 'latex')
ax(3)=gca;
ax(3).YLim=[-4 4];
grid on


%% x2 Condition 2
figure(4)
plot(tspan, y2(:,2), 'r', 'LineWidth',LW_1);
xlabel('Time(s)')
ylabel('$x_2(t)$', 'Interpreter', 'latex')
title('Initial Condition: $x(0)=3.01$, $\dot x(0)=4.01$','Interpreter', 'latex')
ax(4)=gca;
ax(4).YLim=[-8 6];
grid on

%% Compare x1
figure(5)
plot(tspan, y1(:,1), 'b', 'LineWidth',LW_1)
hold on
plot(tspan, y2(:,1), 'r--', 'LineWidth',LW_1);
xlabel('Time(s)')
ylabel('$x_1(t)$', 'Interpreter', 'latex')
ax(5)=gca;
```

```
hs(1)=legend({'Initial Condition: $x(0)=3$,$\dot x(0)=4$', 'Initial Condition:
$x(0)=3.01$,$\dot x(0)=4.01$'},'Interpreter','latex','Location','Northeast');
ax(5).YLim=[-4 4];
grid on

%% Compare x2
figure(6)
plot(tspan, y1(:,2), 'b', 'LineWidth',LW_1)
hold on
plot(tspan, y2(:,2), 'r--', 'LineWidth',LW_1);
xlabel('Time(s)')
ylabel('$x_2(t)$', 'Interpreter', 'latex')
ax(6)=gca;
hs(2)=legend({'Initial Condition: $x(0)=3$,$\dot x(0)=4$', 'Initial Condition:
$x(0)=3.01$,$\dot x(0)=4.01$'},'Interpreter','latex','Location','Northeast');
ax(6).YLim=[-8 6];
grid on

%% Linear Case
figure(7)
plot(tspan, y3(:,1), 'b', 'LineWidth',LW_1)
hold on
plot(tspan, y4(:,1), 'r--', 'LineWidth',LW_1);
xlabel('Time(s)')
ylabel('$x_1(t)$', 'Interpreter', 'latex')
ax(7)=gca;
hs(3)=legend({'Initial Condition: $x(0)=3$,$\dot x(0)=4$', 'Initial Condition:
$x(0)=3.01$,$\dot x(0)=4.01$'},'Interpreter','latex','Location','Northeast');
ax(7).YLim=[-60 70];
grid on


for i=1:length(ax)
    set(ax(i),'FontSize',FS_ax, 'FontName','Times New Roman')
end

for i = 1:length(hs)
 set(hs(i),'FontSize',FS_leg)
end

%% Nonlinear differential equation
function dfdt=nonlinear(t, f)
del_x1=f(2);
```

`` del_x2=5*cos(t)-0.1*f(2)-f(1)^3; dfdt=[del_x1, del_x2]'; end %% Linear differential equation function dfdt=linear(t, f) del_x1=f(2); del_x2=5*cos(t)-0.1*f(2)-f(1); dfdt=[del_x1, del_x2]'; end ```
第二題

```
% Nonlinear Control HW1_2
%%
clc;
clear;
close all;

%% Initial Condition
c1=[1 1 0];
c2=[10 1 0];

%% Time Span
delta_t=0.01;
t_final_1=100;
t_final_2=1000;
t_final_3=10000;
t1=0:delta_t:t_final_1;
t2=0:delta_t:t_final_2;
t3=0:delta_t:t_final_3;

%% Case 1
[t1_case1, X1_case1]=ode45(@Lorentz, t1, c1);
[t2_case1, X2_case1]=ode45(@Lorentz, t2, c1);
[t3_case1, X3_case1]=ode45(@Lorentz, t3, c1);

%% Case 2
[t1_case2, X1_case2]=ode45(@Lorentz, t1, c2);
[t2_case2, X2_case2]=ode45(@Lorentz, t2, c2);
[t3_case2, X3_case2]=ode45(@Lorentz, t3, c2);

%% Plot
LW_1=1;
```

```
LW_2=1.3;
FS_ax=16.5;
FS_leg=15;


%% Initial Condition 1, T=100
f(1) = figure('Units','Normalized','Position',[0.29,0.29,0.477,0.415]) ;
plot3(X1_case1(:,1),X1_case1(:,2),X1_case1(:,3),'r','LineWidth',LW_1) ;
xlabel('$x(t)$', 'Interpreter', 'latex')
ylabel('$y(t)$', 'Interpreter', 'latex')
zlabel('$z(t)$', 'Interpreter', 'latex')
title('Initial Condition: $(x,y,z)=(1,1,0)$', 'Interpreter', 'latex')
ax(1)=gca;
hs(1) = legend(['T =',num2str(t_final_1)]) ;
grid on


%% Initial Condition 1, T=1000
f(2) = figure('Units','Normalized','Position',[0.29,0.29,0.477,0.415]) ;
plot3(X2_case1(:,1),X2_case1(:,2),X2_case1(:,3),'r','LineWidth',LW_1) ;
xlabel('$x(t)$', 'Interpreter', 'latex')
ylabel('$y(t)$', 'Interpreter', 'latex')
zlabel('$z(t)$', 'Interpreter', 'latex')
title('Initial Condition: $(x,y,z)=(1,1,0)$', 'Interpreter', 'latex')
ax(2)=gca;
hs(2) = legend(['T =',num2str(t_final_2)]) ;
grid on

%% Initial Condition 1, T=10000
f(3) = figure('Units','Normalized','Position',[0.29,0.29,0.477,0.415]) ;
plot3(X3_case1(:,1),X3_case1(:,2),X3_case1(:,3),'r','LineWidth',LW_1) ;
xlabel('$x(t)$', 'Interpreter', 'latex')
ylabel('$y(t)$', 'Interpreter', 'latex')
zlabel('$z(t)$', 'Interpreter', 'latex')
title('Initial Condition: $(x,y,z)=(1,1,0)$', 'Interpreter', 'latex')
ax(3)=gca;
hs(3) = legend(['T =',num2str(t_final_3)]) ;
grid on

%% Initial Condition 2, T=100
f(4) = figure('Units','Normalized','Position',[0.29,0.29,0.477,0.415]) ;
plot3(X1_case2(:,1),X1_case2(:,2),X1_case2(:,3),'r','LineWidth',LW_1) ;
xlabel('$x(t)$', 'Interpreter', 'latex')
```

```
ylabel('$y(t)$', 'Interpreter', 'latex')
zlabel('$z(t)$', 'Interpreter', 'latex')
title('Initial Condition: $(x,y,z)=(1,1,0)$', 'Interpreter', 'latex')
ax(4)=gca;
hs(4) = legend(['T =',num2str(t_final_1)]) ;
grid on


%% Initial Condition 2, T=1000
f(5) = figure('Units','Normalized','Position',[0.29,0.29,0.477,0.415]) ;
plot3(X2_case2(:,1),X2_case2(:,2),X2_case2(:,3),'r','LineWidth',LW_1) ;
xlabel('$x(t)$', 'Interpreter', 'latex')
ylabel('$y(t)$', 'Interpreter', 'latex')
zlabel('$z(t)$', 'Interpreter', 'latex')
title('Initial Condition: $(x,y,z)=(1,1,0)$', 'Interpreter', 'latex')
ax(5)=gca;
hs(5) = legend(['T =',num2str(t_final_2)]) ;
grid on

%% Initial Condition 2, T=10000
f(6) = figure('Units','Normalized','Position',[0.29,0.29,0.477,0.415]) ;
plot3(X3_case2(:,1),X3_case2(:,2),X3_case2(:,3),'r','LineWidth',LW_1) ;
xlabel('$x(t)$', 'Interpreter', 'latex')
ylabel('$y(t)$', 'Interpreter', 'latex')
zlabel('$z(t)$', 'Interpreter', 'latex')
title('Initial Condition: $(x,y,z)=(1,1,0)$', 'Interpreter', 'latex')
ax(6)=gca;
hs(6) = legend(['T =',num2str(t_final_3)]) ;
grid on

%% Time Response
f(7) = figure('Units','Normalized','Position',[0.29,0.29,0.477,0.415]) ;
plot(t1, X1_case1(:,1), 'b','LineWidth',LW_1)
hold on
plot(t1, X1_case2(:,1), 'g--','LineWidth',LW_1)
xlabel('Time (s)')
ylabel('$x(t)$', 'Interpreter', 'latex')
title('Time Response of x')
ax(7)=gca;
legend({'Initial Condition: $(x,y,z)=(1,1,0)$', 'Initial Condition:
$(x,y,z)=(10,1,0)$'},'Interpreter','latex','Location','Northeast');
ax(7).YLim=([-20 40]);
grid on
```

```
for i = 1:length(ax)
 set(ax(i),'FontSize',FS_ax,'FontName','Times New Roman')
end

for i = 1:length(hs)
set(hs(i),'Position',[0.70,0.29,0.15,0.21],'Fontsize',FS_leg)
end

function dX=Lorentz(t,X)
x=X(1);
y=X(2);
z=X(3);
dx=10*(y-x);
dy=x*(28-z)-y;
dz=x*y-8*z/3;
dX=[dx dy dz]';
end
```

第三題

```
% Nonlinear Control HW1_3
%%
clc;
clear;
close all;

%% Initial Parameter
dt=0.001;
t_final=100;
t=0:dt:t_final;
points=8;
LW=1.5;
FS_ax=16.5;


%% Case 1   (u>0)
u_case_1=1;
r_case_1=0.5;

figure(1)
for i=1:8
    theta1=2*pi/points*i;
    X0_1=[r_case_1;theta1];
```

```
    [t1, x1]=RK4(@(t, X0_1) Hopf_bifurcation(t, X0_1, u_case_1), t,  X0_1);
    xx_1=x1(:,1).*cos(x1(:,2));
    yy_1=x1(:,1).*sin(x1(:,2));
    plot(xx_1, yy_1, 'b', 'LineWidth', LW);
    hold on
    plot(xx_1(1),yy_1(1),'ro');
end
xlabel('$x$(t)','Interpreter','latex')
ylabel('$y$(t)','Interpreter','latex')
title('Initial Condition: $r_0$ = 0.5, $\mu$=1','Interpreter','latex')
axis equal
grid on
ax(1) = gca ;
ax(1).YTick = [-1 -0.5 0 0.5 1] ;
ax(1).XLim=([-1 1]);
ax(1).YLim=([-1 1]);
set(ax(1),'FontSize',FS_ax,'FontName','Times New Roman')

%% Case 2   (u=0)
u_case_2=0;
r_case_2=0.5;

figure(2)
for i=1:8
    theta2=2*pi/points*i;
    X0_2=[r_case_2;  theta2];
    [t2, x2]=RK4(@(t, X0_2) Hopf_bifurcation(t, X0_2, u_case_2), t,  X0_2);
    xx_2=x2(:,1).*cos(x2(:,2));
    yy_2=x2(:,1).*sin(x2(:,2));
    plot(xx_2, yy_2, 'b', 'LineWidth', LW);
    hold on
    plot(xx_2(1),yy_2(1),'ro');
end
xlabel('$x$(t)','Interpreter','latex')
ylabel('$y$(t)','Interpreter','latex')
title('Initial Condition: $r_0$ = 0.5, $\mu$=0','Interpreter','latex')
axis equal
grid on
ax(2) = gca ;
ax(2).YTick = [-1 -0.5 0 0.5 1] ;
ax(2).XLim=([-1 1]);
ax(2).YLim=([-1 1]);
set(ax(2),'FontSize',FS_ax,'FontName','Times New Roman')
```

```
%% Case 3   (u<0) §ïÅÜrªº¤j¤p
u_case_3=-1;
r_case_3_1=(-u_case_3/2)^(1/4);
r_case_3_2=(-u_case_3/2)^(1/4)+0.1;
r_case_3_3=(-u_case_3/2)^(1/4)-0.1;

figure(3)
for i=1:8
    theta3=2*pi/points*i;
    X0_3=[r_case_3_1  ;theta3];
    [t3, x3]=RK4(@(t, X0_3) Hopf_bifurcation(t,X0_3, u_case_3), t,  X0_3);
    xx_3=x3(:,1).*cos(x3(:,2));
    yy_3=x3(:,1).*sin(x3(:,2));
    p1=plot(xx_3, yy_3, 'b', 'LineWidth', LW);
    hold on
    plot(xx_3(1),yy_3(1),'bo');
end

for i=1:8
    theta3=2*pi/points*i;
    X0_3=[r_case_3_2  ;theta3];
    [t3, x3]=RK4(@(t, X0_3) Hopf_bifurcation(t, X0_3, u_case_3), t,  X0_3);
    xx_3=x3(:,1).*cos(x3(:,2));
    yy_3=x3(:,1).*sin(x3(:,2));
    p2=plot(xx_3, yy_3, 'r', 'LineWidth', LW);
    hold on
    plot(xx_3(1),yy_3(1),'ro');
    hold on
end

for i=1:8
    theta3=2*pi/points*i;
    X0_3=[r_case_3_3  ;theta3];
    [t3, x3]=RK4(@(t, X0_3) Hopf_bifurcation(t, X0_3, u_case_3), t,  X0_3);
    xx_3=x3(:,1).*cos(x3(:,2));
    yy_3=x3(:,1).*sin(x3(:,2));
    p3=plot(xx_3, yy_3, 'k', 'LineWidth', LW);
    hold on
    plot(xx_3(1),yy_3(1),'ko');
    hold on
end
```

```
xlabel('$x$(t)','Interpreter','latex')
ylabel('$y$(t)','Interpreter','latex')
legend([p1 p2 p3],{'$r=r_c$','$r>r_c$','$r<r_c$'},'Interpreter','latex')
axis equal
grid on
ax(3) = gca ;
ax(3).YTick = [-1 -0.5 0 0.5 1] ;
ax(3).XLim=([-1.5 1.5]);
ax(3).YLim=([-1.5 1.5]);
set(ax(3),'FontSize',FS_ax,'FontName','Times New Roman')


%% Case 4   (u<0) §ïÅÜuªº¤j¤p
r_case_4=0.5;
u_case_4_1=-2*(r_case_4)^4;
u_case_4_2=-2*(r_case_4)^4+0.1;
u_case_4_3=-2*(r_case_4)^4-0.1;

figure(4)
for i=1:8
    theta3=2*pi/points*i;
    X0_3=[r_case_4  ;theta3];
    [t3, x3]=RK4(@(t, X0_3) Hopf_bifurcation(t, X0_3, u_case_4_1), t,  X0_3);
    xx_3=x3(:,1).*cos(x3(:,2));
    yy_3=x3(:,1).*sin(x3(:,2));
    p1=plot(xx_3, yy_3, 'b', 'LineWidth', LW);
    hold on
    plot(xx_3(1),yy_3(1),'bo');
end

for i=1:8
    theta3=2*pi/points*i;
    X0_3=[r_case_4  ;theta3];
    [t3, x3]=RK4(@(t, X0_3) Hopf_bifurcation(t, X0_3, u_case_4_2), t,  X0_3);
    xx_3=x3(:,1).*cos(x3(:,2));
    yy_3=x3(:,1).*sin(x3(:,2));
    p2=plot(xx_3, yy_3, 'r', 'LineWidth', LW);
    hold on
    plot(xx_3(1),yy_3(1),'ro');
    hold on
end
```

```
for i=1:8
   theta3=2*pi/points*i;
   X0_3=[r_case_4  ;theta3];
   [t3, x3]=RK4(@(t, X0_3) Hopf_bifurcation(t, X0_3, u_case_4_3), t,  X0_3);
   xx_3=x3(:,1).*cos(x3(:,2));
   yy_3=x3(:,1).*sin(x3(:,2));
   p3=plot(xx_3, yy_3, 'k', 'LineWidth', LW);
   hold on
   plot(xx_3(1),yy_3(1),'ko');
   hold on
end

xlabel('$x$(t)','Interpreter','latex')
ylabel('$y$(t)','Interpreter','latex')
legend([p1 p2 p3 ],{'$\mu=\mu_c$','$\mu>\mu_c$','$\mu<\mu_c$'},'Interpreter','latex')
axis equal
grid on
ax(4) = gca ;
ax(4).YTick = [-1 -0.5 0 0.5 1] ;
ax(4).XLim=([-1 1]);
ax(4).YLim=([-1 1]);
set(ax(4),'FontSize',FS_ax,'FontName','Times New Roman')

%% Hopf bifurcation differential equation
function dX=Hopf_bifurcation(t, X, u)
r=X(1);
dr=r*(u+2*r^4);
dtheta=1;
dX=[dr dtheta]';
end

function [t,y] = RK4(ODESet,TimeSpan,InitialValue,varargin)
% 2019 V1
% 2020/08/25 V2
%... User Given
y0 = InitialValue;
h = TimeSpan(2)-TimeSpan(1);
%... RK4
t = TimeSpan;
n = size(y0,1);
y = zeros(n,length(t));
y(:,1) = y0;
for i = 1:length(t)-1
```

```
 yi = y(:,i);
 ti = t(i);
 f1 = ODESet(ti,yi);
 f2 = ODESet(ti+0.5*h,yi+0.5*h*f1);
 f3 = ODESet(ti+0.5*h,yi+0.5*h*f2);
 f4 = ODESet(ti+h,yi+h*f3);
 y(:,i+1) = yi + h*( 1/6*f1 + 1/3*f2 + 1/3*f3 + 1/6*f4 );
end
y = y.';
end
```