非線性控制
Nonlinear Control

第八章作業
滑動模式控制

學號 : P46104285

研究生 : 楊亞勳

授課教授 : 楊憲東

Department of Aeronautics and Astronautics

National Cheng Kung University

Tainan, Taiwan, ROC

中華民國 111 年 12 月 24 日

目錄

考慮下列之二階非線性系統

$$\dot{x}_1 = x_2 + \theta_1 x_1 \sin x_2 \tag{1a}$$

$$\dot{x}_2 = \theta_2 x_2^2 + x_1 + u \tag{1b}$$

其中 u 是控制訊號；θ_1 和 θ_2 是不確定的參數，但滿足

$$|\theta_1| \le a,\ \ |\theta_2| \le b \tag{2}$$

本題的目的是要設計滑動控制 u 使得系統(1)相對於以下的滑動曲面為 Lyapunov 穩定

$$S = (1+a)x_1 + x_2 \tag{3}$$

Question 1

試證明在不確定性參數 θ_1 、θ_2 的作用下，能確保 $S\dot{S} < 0$ 的滑動控制 u 為

$$u = u_{eq} - \beta(x)\operatorname{sgn}(S) \tag{4}$$

其中

$$u_{eq} = -x_1 - (1+a)x_2 \tag{5}$$

$$\beta(x) = a(1+a)|x_1| + bx_2^2 + b_0,\ b_0 > 0 \tag{6}$$

提示:參考 8.4.3 節的證明方法，先求出 $\dot{S}$ 的表示式(利用(1)式)，將(4)式的 u 帶入 $\dot{S}$ ，再求 $S\dot{S}$ 的表示式，利用不等式層層化簡，得到關係式 $S\dot{S} \le -\eta|S|$ ，其中 η 可用常數 a 、b 、b_0 表示之。

Answer

滑動控制屬於強健控制策略的一種，其核心為選定適當的滑動面(Sliding surface)，代表此系統最後所要進入的狀態。滑動面的數學符號為 $S(\bar{X},t)$ ，為狀態追蹤誤差 $\bar{X}$ 和時間 t 的函數。在沒有時間限制的條件下，滑動面 $S(\bar{X},t)$ 有者定理:若 $|S(\bar{X},t)| \to 0$ ，則追蹤誤差及其各階導數皆趨近於 0。

以上定理代表若一個系統在控制體 u 的控制下，其 n 維狀態變數能夠使得滑動面 $S(\bar{X},t)$ 的值越小，代表追蹤誤差越小。而在沒有追蹤誤差收斂時間限制的情況下，在一 n 維的相空間上，若存在滑動面或曲線 $S(x,t)=0$ ，則此一曲線或曲面必須具備以下兩個條件:

(1) $S\dot{S} < 0$

(2) $\dot{S} = 0$ ，當 $S(x,t)=0$ 時

當存在時間限制時，條件(1)會轉換成

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}S^2 \le -\eta|S|,\ \eta > 0 \tag{7}$$

在受控體有不確定性的情形下，可將系統的不確定性分為結構化不確定性(structures uncertainty)和非結構化不確定性(unstructured uncertainty)兩種。而結構化不確定性系統通常包含非結構化不確定性參數。此題滑動面已選定如式(3)，首先求得滑動面的一階導數

$$\begin{aligned} \dot{S} &= (1+a)\dot{x}_1 + \dot{x}_2 \\ &= (1+a)\left(x_2 + \theta_1 x_1 \sin x_2\right) + \theta_2 x_2^2 + x_1 + u \\ &= \left(x_1 + (1+a)x_2\right) + \left((1+a)\theta_1 x_1 \sin x_2 + \theta_2 x_2^2\right) + u \end{aligned} \tag{8}$$

式(8)第三行的整理，是為了分開含有結構不確定性參數θ_1和θ_2的項次和未有結構化不確定性參數的項次。由於真實受控體含有不確定性參數，故無法準確求得控制律u使得狀態維持在滑動面上，故控制律u可選擇為式(4)，也就是$u = u_{eq} - \beta(x)\operatorname{sgn}(S)$。其中$u_{eq}$用來控制沒有結構化不確定性的項次，也就是$\left(x_1 + (1+a)x_2\right)$；而切換控制$\beta(x)\operatorname{sgn}(S)$則是用來控制未有不確定參數的項次$\left((1+a)\theta_1 x_1 \sin x_2 + \theta_2 x_2^2\right)$。由式(7)化簡，此系統最終要達成的目標為

$$S\dot{S} \le -\eta|S| \tag{9}$$

觀察式(4)和式(8)，可將u_{eq}選擇為

$$u_{eq} = -x_1 - (1+a)x_2 \tag{10}$$

則$\dot{S}$可改寫成

$$\dot{S} = \left((1+a)\theta_1 x_1 \sin x_2 + \theta_2 x_2^2\right) - \beta(x)\operatorname{sgn}(S) \tag{11}$$

接著處理式(11)中的第一項以求得$\beta(x)$，且可將$(1+a)\theta_1 x_1 \sin x_2$和$\theta_2 x_2^2$分開處理。根據不等式$|\theta_1| \le a,\ |\theta_2| \le b$，故

$$\begin{aligned} (1+a)\theta_1 x_1 \sin x_2 &\underset{a\ge|\theta_1|\ge 0}{\le} (1+a)\left|\theta_1 x_1 \sin x_2\right| \underset{|\sin x_2|\le 1}{\le} (1+a)\left|\theta_1 x_1\right| \\ &\underset{\textit{Cauchy-Schwarz}\ \text{Inequality}}{\le} (1+a)|\theta_1||x_1| \underset{a\ge|\theta_1|}{\le} a(1+a)|x_1| \end{aligned} \tag{12}$$

$$\theta_2 x_2^2 \le \left|\theta_2 x_2^2\right| \underset{\textit{Cauchy-Schwarz}\ \text{Inequality}}{\le} |\theta_2|\left|x_2^2\right| = |\theta_2| x_2^2 \underset{b\ge|\theta_2|}{\le} b x_2^2 \tag{13}$$

結合(12)和(13)，可如式(6)選擇$\beta(x)$為

$$\beta(x) = a(1+a)|x_1| + b x_2^2 + b_0,\ b_0 > 0 \tag{14}$$

接著將式(9)、式(11)和式(14)結合，可得

$$
\begin{aligned}
S\dot{S} &= \left(\left(1+a\right)\theta_1 x_1 \sin x_2 + \theta_2 x_2^2\right) S - \beta\left(x\right)\left|S\right| \\
&\le \left(a\left(1+a\right)\left|x_1\right| + b x_2^2\right) S - \left(a\left(1+a\right)\left|x_1\right| + b x_2^2 + b_0\right)\left|S\right| \\
&\le \left(a\left(1+a\right)\left|x_1\right| + b x_2^2\right)\left|S\right| - \left(a\left(1+a\right)\left|x_1\right| + b x_2^2 + b_0\right)\left|S\right| \\
&= -b_0\left|S\right|
\end{aligned}
\tag{15}
$$

由(15)的推導可知$S\dot{S} \le -b_0\left|S\right|$，對照式(9)的$S\dot{S} \le -\eta\left|S\right|$可知$\eta = b_0$。由此證明在不確定性參數$\theta_1$、$\theta_2$的作用下，能確保$S\dot{S} < 0$的滑動控制$u$為

$$
u = -x_1 - \left(1+a\right)x_2 - \left(a\left(1+a\right)\left|x_1\right| + b x_2^2 + b_0\right)\operatorname{sgn}\left(S\right),\ b_0 > 0 \tag{16}
$$

此控制律能確保即使在不確定性參數θ_1和θ_2的作用下，狀態變數能在有限時間內收斂至滑動面上，且收斂時間$t = t_f$為

$$
t_f \le t_0 + \frac{\left|S_0\right|}{b_0} \tag{17}
$$

Question 2

用 MATLAB 模擬以上滑動控制律的正確性。設定 $a=b=1$，並使 θ_1 和 θ_2 在區間 $[-1,1]$ 內任意變化，每次模擬均取不一樣的 θ_1 和 θ_2，例如 $\theta_1=\sin t$，$\theta_1=\cos t$，或是取成 ±1 之間的任意隨機亂數(利用 MATLAB 隨機亂數產生器)。用數值模擬驗證，當 θ_1 和 θ_2 在區間 $[-1,1]$ 內任意變化時，滑動控制律(4)都可確保相平面軌跡進入滑動面 $S=0$，同時觀察是否有顫動現象伴隨發生。

Answer

為了確保以上控制律能夠有效地將系統控制到滑動面上。我們將進行 MATLAB 模擬。模擬的方式為先用數值求解器 ode45，將各個時間的狀態求出，再用這些狀態求出各個時刻的控制訊號和滑動面變數的值。我們將結構化不確定性參數 θ_1、θ_2 分成四組，表 1 總結這四組模擬所使用的參數:

表 1、模擬參數總結

組別/參數	模擬時長	取樣頻率	θ_1	θ_2	(x_{1_0}, x_{2_0})	b_0
第一組	10 s	10000 Hz	$\theta_1 \sim U(-1,1)$	$\theta_2 \sim U(-1,1)$	$(2,2)$	1
第二組	10 s	10000 Hz	$\theta_1=\sin(t)$	$\theta_2=\sin(t)$	$(2,2)$	1
第三組	10 s	10000 Hz	$\theta_1=\cos(t)$	$\theta_2=\cos(t)$	$(2,2)$	1
第四組	10 s	10000 Hz	$\theta_1=\sin(t)$	$\theta_2=\cos(t)$	$(2,2)$	1

這四組模擬所使用的初始值皆為 $(2,2)$，所得到的時間響應圖如圖 1~4 所示。

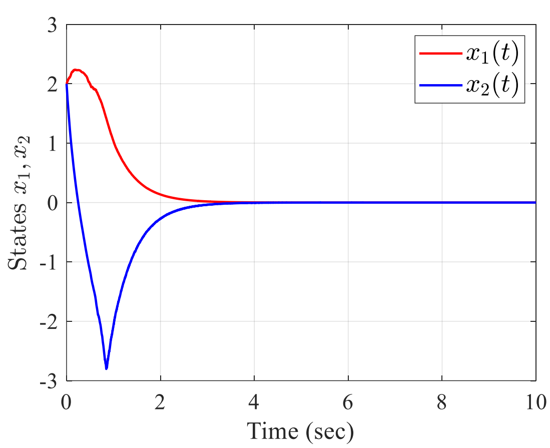

圖 1、第一組參數 MATLAB 模擬時間響應
$\theta_1 \sim U(-1,1)$、$\theta_2 \sim U(-1,1)$

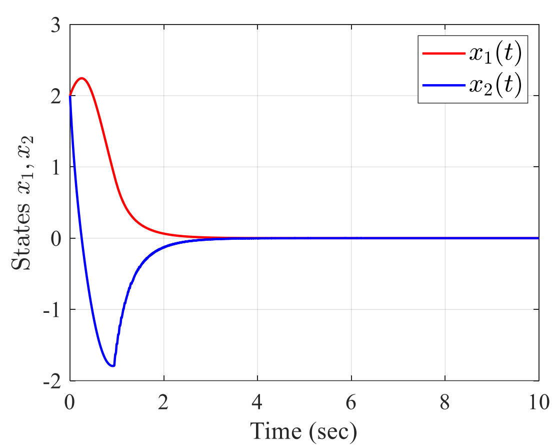

圖 2、第二組參數 MATLAB 模擬時間響應
$\theta_1=\sin(t)$、$\theta_2=\sin(t)$

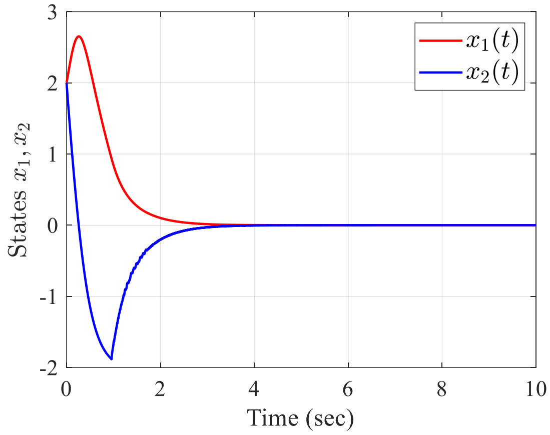

圖 3、第三參數 MATLAB 模擬時間響應

$\theta_1 = \cos(t)$ 、 $\theta_2 = \cos(t)$

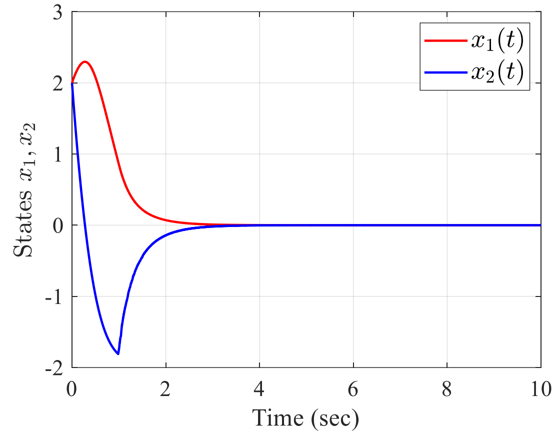

圖 4、第四組參數 MATLAB 模擬時間響應

$\theta_1 = \sin(t)$ 、 $\theta_2 = \cos(t)$

從圖 1~4 來看，由這四種方法產生結構化不確定性參數，所得到的模擬時間響應圖軌跡，並沒有太大的差別，四種方法的收斂時間幾乎相同，軌跡也幾乎相同，皆可漸進收斂至原點。

另一個值得討論的為這四組參數所產生的控制輸入時間響應圖。由於滑動控制中，會不斷切換控制訊號來讓狀態變數相對於滑動面在一個值的範圍內變動，而這個切換為不連續的，所以在控制訊號中能夠觀察到顫動(chattering)現象。圖 5~8 為這四組參數所得到的控制輸入時間響應圖。可以看到控制訊號從開始到過一段時間後，開始出現顫動現象，而到了平穩的階段後，這個顫動現象使控制輸入在 ± 1 之間來回跳動，這個跳動範圍大小和值 b_0 有直接關係，在模擬時，有嘗試將 b_0 調成不同大小的值，若是調成 5，這個顫動的範圍會變成 ± 5。

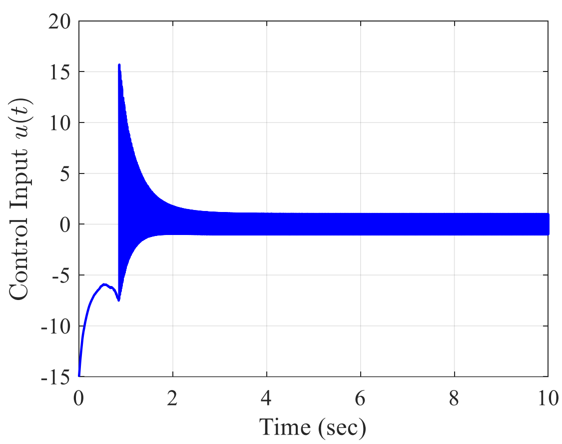

圖 5、第一組參數控制輸入時間響應

$\theta_1 \sim U(-1,1)$ 、 $\theta_2 \sim U(-1,1)$

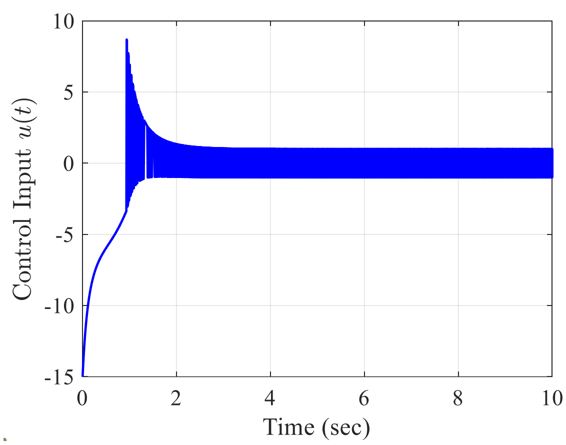

圖 6、第二組參數控制輸入時間響應

$\theta_1 = \sin(t)$ 、 $\theta_2 = \sin(t)$

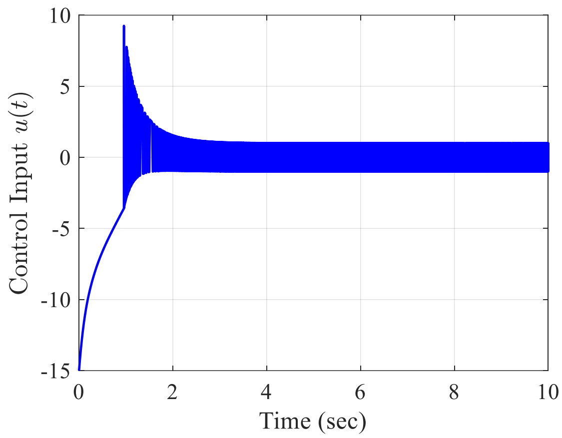

圖 7、第三參數控制輸入時間響應

$\theta_1 = \cos(t)$ 、 $\theta_2 = \cos(t)$

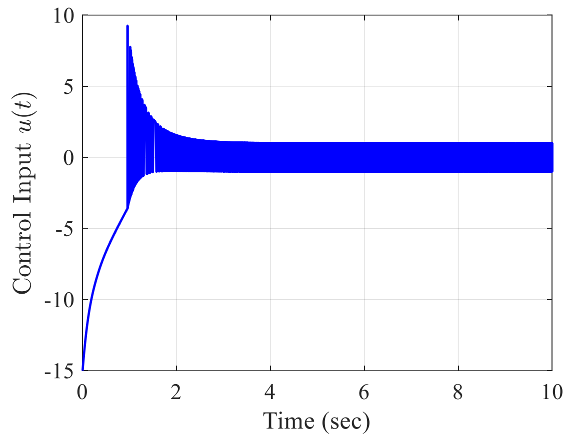

圖 8、第四組參數控制輸入時間響應

$\theta_1 = \sin(t)$ 、 $\theta_2 = \cos(t)$

顫動效應除了可以在控制輸入訊號中找到，也可以在相平面軌跡中找到。圖 9 為第一組參數所得到的相平面軌跡圖，可以看到軌跡順利地從初始值位置漸進收斂至原點。圖 9 右半部為左圖的局部放大，觀察收斂至滑動面 $S\left(\bar{X},t\right)=0$ 的部分，可以看到狀態變數不斷在 $S>0$ 和 $S<0$ 之間來回切換。

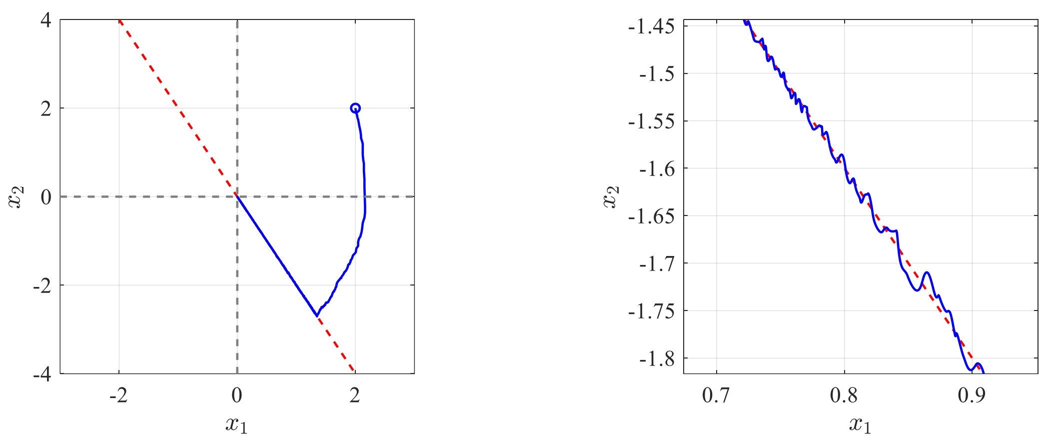

圖 9、第一組參數相平面軌跡圖 $\theta_1 \sim U\left(-1,1\right)$ 、 $\theta_2 \sim U\left(-1,1\right)$ ，右圖為局部放大。

綜上所述，我們嘗試了四種不同產生結構化不確定性參數的方法，所得到的結果皆為系統的相對於原點漸進穩定，且軌跡非常相似。這四組模擬也都能看到顫動現象的發生。而為了測試此系統對不同初始值是否有同樣的控制能力，我們選擇了第一組參數作為模擬參數並測試了 6 個不同的初始值來觀察系統狀態變數也能收斂到原點。測試結果如圖 10。

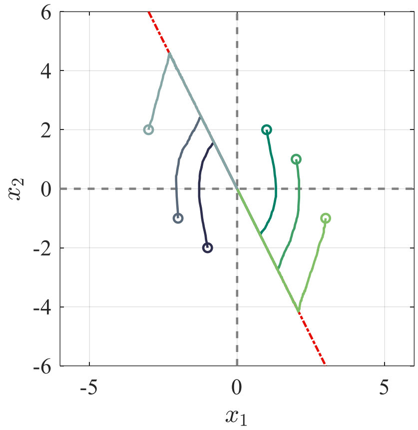

圖 10、不同初始值之相平面軌跡

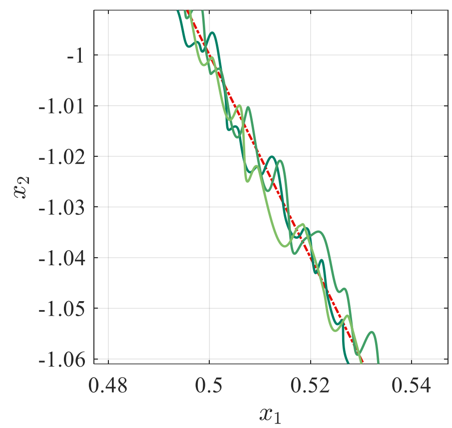

圖 11、不同初始值之相平面軌跡局部放大

由圖 10 觀察可以得知，不同的初始值皆可收斂至原點。而圖 11 為圖 10 在滑動曲線上的局部放大圖，也可以看到顫動現象的發生。

Question 3

設定 $a=b=2$，重複上面步驟的模擬，並觀察顫動的情況有何改變。

Answer

此題要探討的是改變結構化不確定參數的界線範圍所造成的影響，亦即改變 $|\theta_1|\le a$ 和 $|\theta_2|\le b$ 中 a 和 b 的大小。為了方便模擬比較，在此採用第二小題中的第一組參數來進行模擬，差別在於 $a=b=2$。

表 2、$a=b=2$ 之模擬參數

組別/參數	模擬時長	取樣頻率	θ_1	θ_2	(x_{1_0}, x_{2_0})	b_0
第一組	10 s	10000 Hz	$\theta_1 \sim U(-2,2)$	$\theta_2 \sim U(-2,2)$	$(2,2)$	1

在 $a=b=2$，也就是 $|\theta_1|\le 2$、$|\theta_2|\le 2$ 的情況下，二維狀態變數的系統時間響應模擬結果如圖 12 所示，可以看到系統狀態變數隨著時間增加，也漸進收斂到 0，對應於相平面軌跡圖則是原點的位置。

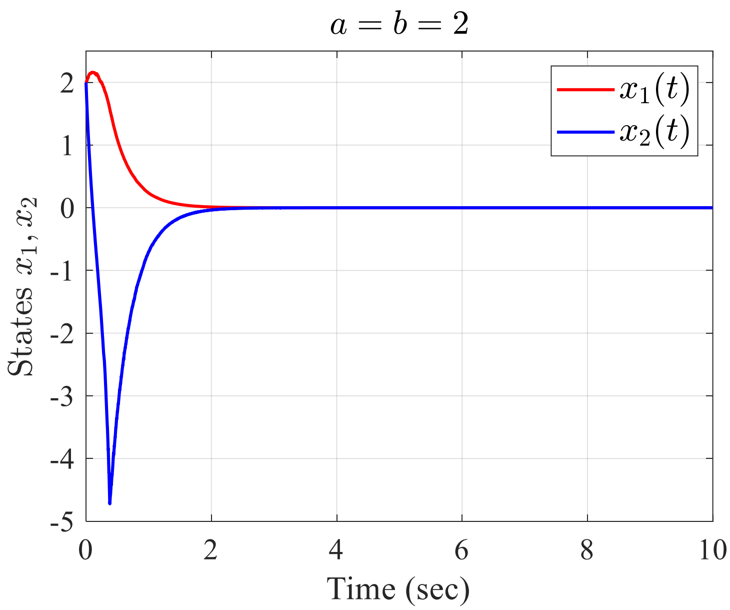

圖 12、系統 $a=b=2$ 之狀態時間響應圖

而與之相應的系統控制輸入時間響應圖如圖 13、14 所示。由圖 13 可以看到系統可以在有限的時間內趨於穩定，而圖 14 為圖 13 在穩定區域的局部放大圖，可以看到控制輸入訊號在正負 1 之間切換，和 $a=b=1$ 時的相同，這是因為這個跳動範圍是被 b_0 控制，故在相同的 b_0 值下，跳動範圍相同，和 a 和 b 的大小無關。

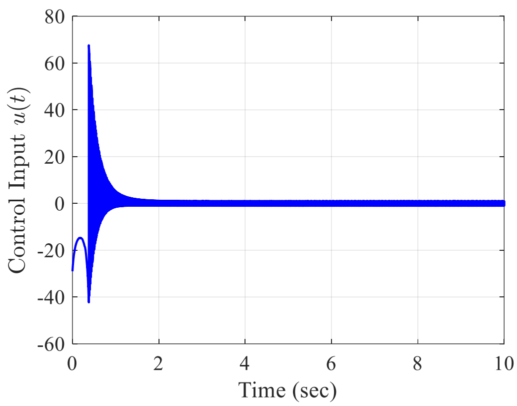

圖 13、系統 $a=b=2$ 之控制輸入時間響應

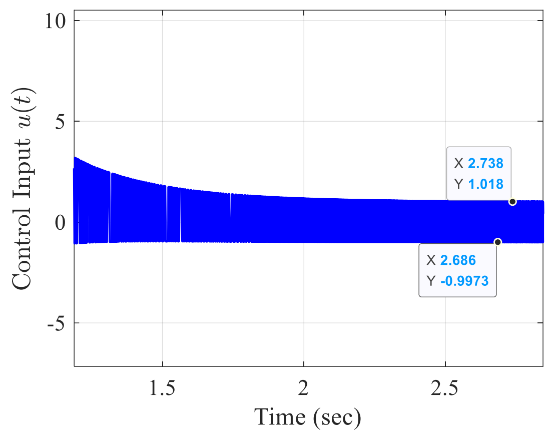

圖 14、控制輸入時間響應局部放大

圖 15、16 則繪製出 $a=b=2$ 時的相平面軌跡圖和其局部放大。從圖 15 可以更清楚的看到系統從初始點釋放後，先往滑動面開始移動，而後在滑動面上往原點移動。在滑動面上往原點移動的過程，可由圖 16 局部放大觀察到顫動的現象。

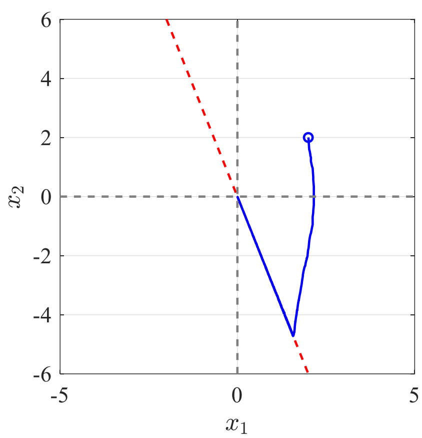

圖 15、系統 $a=b=2$ 之相平面軌跡圖

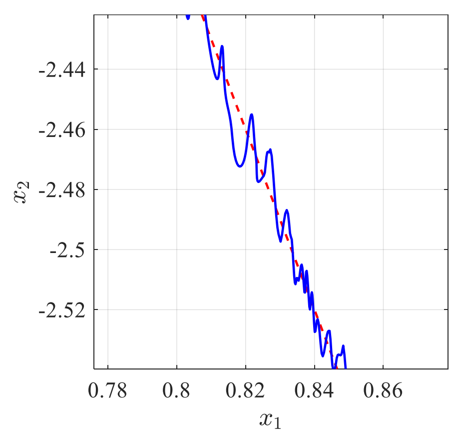

圖 16、相平面軌跡圖局部放大

綜上所述，當 $a=b=2$ 時，系統也可以經由設計出的滑動控制律漸進收斂至原點。而為了進行直接的比較，圖 17 繪製出不同不確定參數的滑動面參數時間響應，兩個系統除了不確定性參數 a 和 b 的大小不同之外，其餘皆相同。由圖 17 觀察可以看出，當 $a=b=2$ 時，系統的收斂時間更快，乍看之下只要調高 a 和 b 的大小即可加快收斂速度，但其付出的代價可以由圖 18 看出，雖然當 $a=b=2$ 時的收斂速度更快，但是會產生很大的 overshoot，而在收斂速度和 overshoot 之間的權衡則端看實際設計的需求。

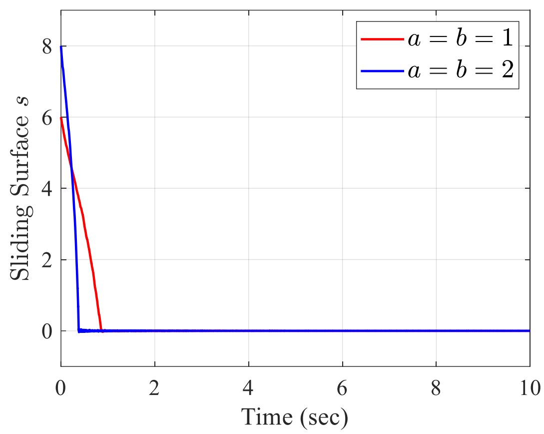

圖 17、不同不確定參數的滑動面參數時間響應

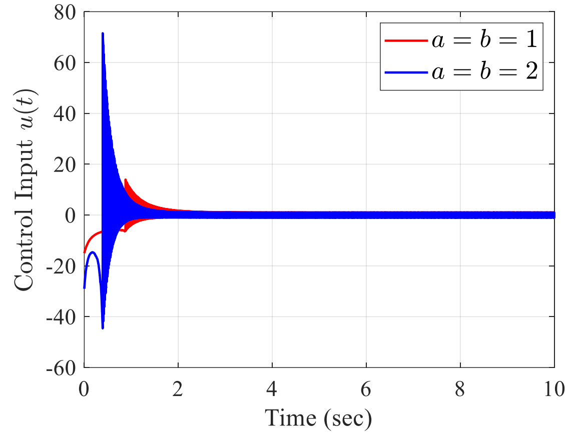

圖 18、不同不確定參數的控制輸入響應

圖 19、20 則繪製出兩個不同不確定性參數系統的狀態時間響應圖。圖 19 為狀態 x_1 時間響應，圖 20 則是狀態 x_2。在這兩張圖也可以看出當 $a=b=2$ 時的收斂速度更快，但是有更大的 overshoot，這個現象在圖 20 中尤其明顯。

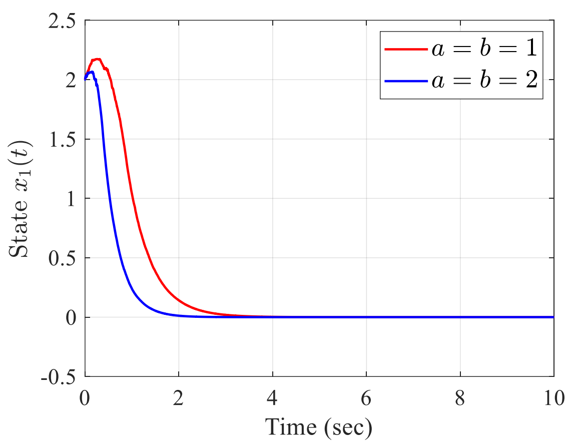

圖 19、狀態 x_1 時間響應

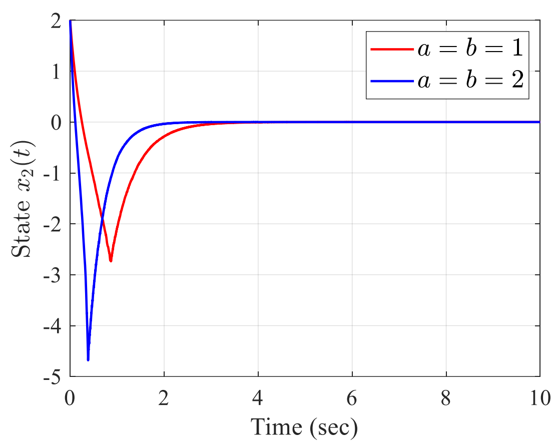

圖 19、狀態 x_2 時間響應

MATLAB Code

Question 2

```
%% Nonlinear Control HW8_2
clc;
clear;
close all;

%% Initial Value
dt=0.0001;
t_final=10;
t=0:dt:t_final;
x1_0=2;
x2_0=2;
X0=[x1_0;x2_0];

%% Plot Parameter
LW = 1.6 ;
FS = 16 ;
FS_lg = 18 ;

%% Calculate Results for Nonlinear_System_rand
[ t , X ] = ode45( @(t,X) Nonlinear_System_rand(X,t) , t, X0);
X=X';
for i =1:length(t)
   [dX(:,i) , theta_1(i) , theta_2(i) , u(i) , s(i) ] = Nonlinear_System_rand(X(:,i),t(i)) ;
end

%% Plot State time response for Nonlinear_System_rand
figure(1)
plot(t, X(1,:), 'r', 'LineWidth', LW)
hold on
plot(t, X(2,:), 'b', 'LineWidth', LW)
hs(1)=legend({'$x_1(t)$','$x_2(t)$'},'Interpreter','latex');
ax(1)=gca;
xlabel('Time (sec)')
ylabel('States    $x_1, x_2 $','Interpreter','Latex')
axis normal
grid on

figure(2)
plot(t,u,'-','Color','b','LineWidth',LW);
ax(2) = gca ;
xlabel('Time (sec)')
ylabel('Control Input $u(t)$','Interpreter','Latex')
```

```
axis normal
grid on

figure(3)
plot(t,s,'b','LineWidth',LW)
ax(3)=gca;
xlabel('Time (sec)')
ylabel('Sliding Surface $S(t)$','Interpreter','Latex')
axis normal
grid on

figure(4)
x1s=-3:0.1:3 ;
x2s=-2.*x1s;
plot(x1s,x2s,'r--','LineWidth',LW)
hold on
plot(X(1,:),X(2,:),'b','LineWidth',LW)
plot(X(1,1),X(2,1),'bo','LineWidth',LW) ;
plot([-5 5],[0 0],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW) ;
plot([0 0],[-5 5],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW) ;
ax(4) = gca ;
xlabel('$x_1$','Interpreter','Latex') % x label
ylabel('$x_2$','Interpreter','Latex') % y label
axis([ -3 3 -4 4 ])
axis square
grid on

%% Calculate Results for Nonlinear_System_sinusoidal
[ t , X ] = ode45( @(t,X) Nonlinear_System_sin(X,t) , t, X0);
X=X';
for i =1:length(t)
   [dX(:,i) , theta_1(i) , theta_2(i) , u(i) , s(i) ] = Nonlinear_System_sin(X(:,i),t(i)) ;
end

%% Plot State time response for Nonlinear_System_sin
figure(5)
plot(t, X(1,:), 'r', 'LineWidth', LW)
hold on
plot(t, X(2,:), 'b', 'LineWidth', LW)
hs(2)=legend({'$x_1(t)$','$x_2(t)$'},'Interpreter','latex');
ax(5)=gca;
xlabel('Time (sec)')
ylabel('States    $x_1, x_2 $','Interpreter','Latex')
axis normal
grid on
```

```
figure(6)
plot(t,u,'-','Color','b','LineWidth',LW);
ax(6) = gca ;
xlabel('Time (sec)')
ylabel('Control Input $u(t)$','Interpreter','Latex')
axis normal
grid on

figure(7)
plot(t,s,'b','LineWidth',LW)
ax(7)=gca;
xlabel('Time (sec)')
ylabel('Sliding Surface $S(t)$','Interpreter','Latex')
axis normal
grid on

figure(8)
x1s=-3:0.1:3 ;
x2s=-2.*x1s;
plot(x1s,x2s,'r--','LineWidth',LW)
hold on
plot(X(1,:),X(2,:),'b','LineWidth',LW)
plot(X(1,1),X(2,1),'bo','LineWidth',LW) ;
plot([-5 5],[0 0],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW) ;
plot([0 0],[-5 5],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW) ;
ax(8) = gca ;
xlabel('$x_1$','Interpreter','Latex') % x label
ylabel('$x_2$','Interpreter','Latex') % y label
axis([ -3 3 -4 4 ])
axis square
grid on

%% Calculate Results for Nonlinear_System_cos
[ t , X ] = ode45( @(t,X) Nonlinear_System_cos(X,t) , t, X0);
X=X';
for i =1:length(t)
    [dX(:,i) , theta_1(i) , theta_2(i) , u(i) , s(i) ] = Nonlinear_System_cos(X(:,i),t(i)) ;
end

%% Plot State time response for Nonlinear_System_cos
figure(9)
plot(t, X(1,:), 'r', 'LineWidth', LW)
hold on
plot(t, X(2,:), 'b', 'LineWidth', LW)
hs(3)=legend({'$x_1(t)$','$x_2(t)$'},'Interpreter','latex');
ax(9)=gca;
```

```
xlabel('Time (sec)')
ylabel('States    $x_1, x_2 $','Interpreter','Latex')
axis normal
grid on

figure(10)
plot(t,u,'-','Color','b','LineWidth',LW);
ax(10) = gca ;
xlabel('Time (sec)')
ylabel('Control Input $u(t)$','Interpreter','Latex')
axis normal
grid on

figure(11)
plot(t,s,'b','LineWidth',LW)
ax(11)=gca;
xlabel('Time (sec)')
ylabel('Sliding Surface $S(t)$','Interpreter','Latex')
axis normal
grid on

figure(12)
x1s=-3:0.1:3 ;
x2s=-2.*x1s;
plot(x1s,x2s,'r--','LineWidth',LW)
hold on
plot(X(1,:),X(2,:),'b','LineWidth',LW)
plot(X(1,1),X(2,1),'bo','LineWidth',LW) ;
plot([-5 5],[0 0],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW) ;
plot([0 0],[-5 5],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW) ;
ax(12) = gca ;
xlabel('$x_1$','Interpreter','Latex') % x label
ylabel('$x_2$','Interpreter','Latex') % y label
axis([ -3 3 -4 4 ])
axis square
grid on

%% Calculate Results for Nonlinear_System_sin_cos
[ t , X ] = ode45( @(t,X) Nonlinear_System_sin_cos(X,t) , t, X0);
X=X';
for i =1:length(t)
   [dX(:,i) , theta_1(i) , theta_2(i) , u(i) , s(i) ] = Nonlinear_System_sin_cos(X(:,i),t(i)) ;
end

%% Plot State time response for Nonlinear_System_sin_cos
figure(13)
```

```
plot(t, X(1,:), 'r', 'LineWidth', LW)
hold on
plot(t, X(2,:), 'b', 'LineWidth', LW)
hs(4)=legend({'$x_1(t)$','$x_2(t)$'},'Interpreter','latex');
ax(13)=gca;
xlabel('Time (sec)')
ylabel('States    $x_1, x_2 $','Interpreter','Latex')
axis normal
grid on

figure(14)
plot(t,u,'-','Color','b','LineWidth',LW);
ax(14) = gca ;
xlabel('Time (sec)')
ylabel('Control Input $u(t)$','Interpreter','Latex')
axis normal
grid on

figure(15)
plot(t,s,'b','LineWidth',LW)
ax(15)=gca;
xlabel('Time (sec)')
ylabel('Sliding Surface $S(t)$','Interpreter','Latex')
axis normal
grid on

figure(16)
x1s=-3:0.1:3 ;
x2s=-2.*x1s;
plot(x1s,x2s,'r--','LineWidth',LW)
hold on
plot(X(1,:),X(2,:),'b','LineWidth',LW)
plot(X(1,1),X(2,1),'bo','LineWidth',LW) ;
plot([-5 5],[0 0],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW) ;
plot([0 0],[-5 5],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW) ;
ax(16) = gca ;
xlabel('$x_1$','Interpreter','Latex') % x label
ylabel('$x_2$','Interpreter','Latex') % y label
axis([ -3 3 -4 4 ])
axis square
grid on

figure(17)
x1s=-3:0.1:3 ;
x2s=-2.*x1s;
plot(x1s,x2s,'r--','LineWidth',LW)
```

```
%%
for i = 1:length(ax)
   set(ax(i),'FontSize',FS,'FontName','Times New Roman')
end

for i = 1:length(hs)
   set(hs(i),'FontSize',FS_lg,'FontName','Times New Roman')
end
%% Nonlinear System uniform [-1 1]
function [dX, theta_1,theta_2,u,s]=Nonlinear_System_rand(X,t)
% Constant
a=1;
b=1;
b0=1;
x1=X(1);
x2=X(2);
s=(1+a)*x1+x2; % Sliding Surface

u_eq=-x1-(1+a)*x2;
beta=a*(1+a)*abs(x1)+b*x2^2+b0;
u=u_eq-beta*sign(s);

theta_1=-1+2*rand(1);
theta_2=-1+2*rand(1);

dx1=x2+theta_1*x1*sin(x2);
dx2=theta_2*x2^2+x1+u;
dX=[dx1;dx2];
end

%% Nonlinear System sin [-1 1]
function [dX, theta_1,theta_2,u,s]=Nonlinear_System_sin(X,t)
% Constant
a=1;
b=1;
b0=1;
x1=X(1);
x2=X(2);
s=(1+a)*x1+x2; % Sliding Surface

u_eq=-x1-(1+a)*x2;
beta=a*(1+a)*abs(x1)+b*x2^2+b0;
u=u_eq-beta*sign(s);

theta_1=sin(t);
```

```
theta_2=sin(t);

dx1=x2+theta_1*x1*sin(x2);
dx2=theta_2*x2^2+x1+u;
dX=[dx1;dx2];
end

%% Nonlinear System cos [-1 1]
function [dX, theta_1,theta_2,u,s]=Nonlinear_System_cos(X,t)
% Constant
a=1;
b=1;
b0=1;
x1=X(1);
x2=X(2);
s=(1+a)*x1+x2; % Sliding Surface

u_eq=-x1-(1+a)*x2;
beta=a*(1+a)*abs(x1)+b*x2^2+b0;
u=u_eq-beta*sign(s);

theta_1=cos(t);
theta_2=cos(t);

dx1=x2+theta_1*x1*sin(x2);
dx2=theta_2*x2^2+x1+u;
dX=[dx1;dx2];
end

%% Nonlinear System sin_cos [-1 1]
function [dX, theta_1,theta_2,u,s]=Nonlinear_System_sin_cos(X,t)
% Constant
a=1;
b=1;
b0=1;
x1=X(1);
x2=X(2);
s=(1+a)*x1+x2; % Sliding Surface

u_eq=-x1-(1+a)*x2;
beta=a*(1+a)*abs(x1)+b*x2^2+b0;
u=u_eq-beta*sign(s);

theta_1=sin(t);
theta_2=cos(t);
```

```
dx1=x2+theta_1*x1*sin(x2);
dx2=theta_2*x2^2+x1+u;
dX=[dx1;dx2];
end
```

Question 3

```
%% Nonlinear Control HW8_3
clc;
clear;
close all;

%% Initial Value
dt=0.0001;
t_final=10;
t=0:dt:t_final;
x1_0=2;
x2_0=2;
X0=[x1_0;x2_0];

%% Plot Parameter
LW = 1.6 ;
FS = 16 ;
FS_lg = 18 ;

%% Calculate Results for Nonlinear_System_rand
[ t1 , X1 ] = ode45( @(t,X) Nonlinear_System_rand_ab1(X,t) , t, X0);
X1=X1';
for i =1:length(t1)
   [dX1(:,i) , theta_1_1(i) , theta_2_1(i) , u1(i) , s1(i) ] =
Nonlinear_System_rand_ab1(X1(:,i),t1(i)) ;
end

[ t2 , X2 ] = ode45( @(t,X) Nonlinear_System_rand_ab2(X,t) , t, X0);
X2=X2';
for i =1:length(t2)
   [dX2(:,i) , theta_1_2(i) , theta_2_2(i) , u2(i) , s2(i) ] =
Nonlinear_System_rand_ab2(X2(:,i),t2(i)) ;
end

%% Plot State time response for Nonlinear_System_rand
figure(1)
plot(t, X2(1,:), 'r', 'LineWidth', LW)
hold on
plot(t, X2(2,:), 'b', 'LineWidth', LW)
hs(1)=legend({'$x_1(t)$','$x_2(t)$'},'Interpreter','latex');
ax(1)=gca;
title('$a=b=2$','Interpreter','Latex')
```

```
xlabel('Time (sec)')
ylabel('States    $x_1, x_2 $','Interpreter','Latex')
ylim([-5 2.5])
axis normal
grid on

figure(2)
plot(t1,u2,'-','Color','b','LineWidth',LW);
hold on
plot(t1,u2,'-','Color','b','LineWidth',LW);
ax(2) = gca ;
xlabel('Time (sec)')
ylabel('Control Input $u(t)$','Interpreter','Latex')
axis normal
grid on

figure(3)
x1_s = -5:0.1:5 ;
x2_s = -(1+2).*x1_s ;
plot(x1_s,x2_s,'r--','LineWidth',LW)
hold on
plot(X2(1,:),X2(2,:),'b','LineWidth',LW)
plot(X2(1,1),X2(2,1),'bo','LineWidth',LW) ;
plot([-5 5],[0 0],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW) ;
plot([0 0],[-6 6],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW) ;
ax(3) = gca ;
xlabel('$x_1$','Interpreter','Latex')
ylabel('$x_2$','Interpreter','Latex')
axis([-5 5 -6 6])
grid on
axis square


figure(4)
p(1)=plot(t1,s1,'r','LineWidth',LW);
hold on
p(2)=plot(t2,s2,'b','LineWidth',LW);
hs(2)=legend([p(1),p(2)],{'$a=b=1$','$a=b=2$'},'Interpreter','latex');
ax(4) = gca ;
xlabel('Time (sec)')
ylabel('Sliding Surface $s$','Interpreter','Latex')
xlim([0 t_final])
ylim([-1 9])
axis normal
grid on
```

```
figure(5)
p(3)=plot(t1,X1(1,:),'r','LineWidth',LW);
hold on
p(4)=plot(t1,X2(1,:),'b','LineWidth',LW);
hs(3)=legend([p(3),p(4)],{'$a=b=1$','$a=b=2$'},'Interpreter','latex');
ax(5) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('State  $x_1(t)$','Interpreter','Latex') % y label
axis normal
grid on

figure(6)
p(5)=plot(t2,X1(2,:),'r','LineWidth',LW);
hold on
p(6)=plot(t2,X2(2,:),'b','LineWidth',LW);
hs(4)=legend([p(5),p(6)],{'$a=b=1$','$a=b=2$'},'Interpreter','latex');
ax(6) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('State  $x_2(t)$','Interpreter','Latex') % y label
axis normal
grid on

figure(7)
p(7)=plot(t1,u1,'-','Color','r','LineWidth',LW);
hold on
p(8)=plot(t2,u2,'-','Color','b','LineWidth',LW);
ax(7) = gca ;
hs(5)=legend([p(7),p(8)],{'$a=b=1$','$a=b=2$'},'Interpreter','latex');
xlabel('Time (sec)')
ylabel('Control Input $u(t)$','Interpreter','Latex')
axis normal
grid on
%%
for i = 1:length(ax)
    set(ax(i),'FontSize',FS,'FontName','Times New Roman')
end

for i = 1:length(hs)
    set(hs(i),'FontSize',FS_lg,'FontName','Times New Roman')
end
%% Nonlinear System
function [dX, theta_1,theta_2,u,s]=Nonlinear_System_rand_ab1(X,t)
% Constant
a=1;
b=1;
b0=1;
```

```
x1=X(1);
x2=X(2);
s=(1+a)*x1+x2; % Sliding Surface

u_eq=-x1-(1+a)*x2;
beta=a*(1+a)*abs(x1)+b*x2^2+b0;
u=u_eq-beta*sign(s);

theta_1=-1+2*rand(1);
theta_2=-1+2*rand(1);

dx1=x2+theta_1*x1*sin(x2);
dx2=theta_2*x2^2+x1+u;
dX=[dx1;dx2];
end

function [dX, theta_1,theta_2,u,s]=Nonlinear_System_rand_ab2(X,t)
% Constant
a=2;
b=2;
b0=1;
x1=X(1);
x2=X(2);
s=(1+a)*x1+x2; % Sliding Surface

u_eq=-x1-(1+a)*x2;
beta=a*(1+a)*abs(x1)+b*x2^2+b0;
u=u_eq-beta*sign(s);

theta_1=-2+4*rand(1);
theta_2=-2+4*rand(1);

dx1=x2+theta_1*x1*sin(x2);
dx2=theta_2*x2^2+x1+u;
dX=[dx1;dx2];
end
```