

# 非線性控制

## Nonlinear Control

### 第六章作業 (回授線性化)



學 號：P46071204

研 究 生：蔡旻哲

授課教授：楊憲東

Department of Aeronautics and Astronautics

National Cheng Kung University

Tainan, Taiwan, R.O.C.

中 華 民 國 109 年 11 月 27 日

## 目錄

第 1 題. 狀態回授線性化設計 .....	1
Question (a) .....	1
Question (b) .....	6
Question (c) .....	11
Question (d) .....	13
Matlab Code .....	17

## 第1題. 狀態回授線性化設計

考慮以下非線性系統

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 x_3 - x_2 + u \\ \dot{x}_3 &= -x_1 + u\end{aligned}\tag{1.1}$$

### Question (a)

依據講義定理(6.6.1)後面的 7 個步驟，設計回授線性化控制  $u(x)$ ，使得線性化後的系統極點(pole)落在  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -2$ 。

### Answer

將非線性系統(1.1)化為以下常見的非線性方程式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u\tag{1.2}$$

其中  $u$  為系統的控制輸入，為純量函數，系統狀態向量  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$  分別由  $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_3$  三個狀態所組成，且

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 x_3 - x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix}, \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\tag{1.3}$$

由(1.3)我們可以觀察出原點  $\mathbf{x} = 0$  為系統的平衡點，滿足  $\mathbf{f}(0) = 0$ 。

基於回授線性化定理，在進行狀態回授線性化設計之前，必須先檢查非線性方程(1.2)是否滿足以下兩個條件：

- a)  $\{\mathbf{g}, ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g}, \dots, ad_{\mathbf{f}}^{n-1}\mathbf{g}\}$  為線性獨立。
- b)  $\{\mathbf{g}, ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g}, \dots, ad_{\mathbf{f}}^{n-2}\mathbf{g}\}$  為 involutive。

其中  $n$  為系統狀態向量的維度，亦即狀態向量的個數，在本題  $n = 3$ 。

首先，本題的一階李氏括號  $ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g}$  以及二階李氏括號  $ad_{\mathbf{f}}^2\mathbf{g}$ ，可以根據李氏括號的定義並將(1.3)代入計算得出

$$\begin{aligned}ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g} &= [\mathbf{f}, \mathbf{g}] = \nabla \mathbf{g} \cdot \mathbf{f} - \nabla \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 x_3 - x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -x_3 & -1 & -x_1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + x_1 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}ad_{\mathbf{f}}^2\mathbf{g} &= [\mathbf{f}, [\mathbf{f}, \mathbf{g}]] = \nabla(ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g}) \cdot \mathbf{f} - \nabla \mathbf{f} \cdot (ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g}) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 x_3 - x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -x_3 & -1 & -x_1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - x_1 \\ 1 + x_2 - x_3 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{1.5}$$

透過(1.4)、(1.5)，本題的可控性矩陣 $[\mathbf{g}, ad_f \mathbf{g}, ad_f^2 \mathbf{g}]$ 被計算為

$$[\mathbf{g}, ad_f \mathbf{g}, ad_f^2 \mathbf{g}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1-x_1 \\ 1 & 1+x_1 & 1+x_2-x_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

上述矩陣為非奇異，其秩(Rank)為3，故滿足回授線性化定理的可控性條件 a)。

接著我們進一步測試非線性系統狀態轉換解的存在性，根據回授線性化定理的條件 b)，在滿足可控性的條件下，若是 $\{\mathbf{g}, ad_f \mathbf{g}\}$ 再為 involutive，則非線性系統的狀態轉換 $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$ 存在。參考以下式子

$$\begin{aligned} [\mathbf{g}, ad_f \mathbf{g}] &= \nabla(ad_f \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g} - \nabla \mathbf{g} \cdot ad_f \mathbf{g} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1+x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= 0 \cdot \mathbf{g} + 0 \cdot ad_f \mathbf{g} \end{aligned} \quad (1.7)$$

(1.7)表明了 $\{\mathbf{g}, ad_f \mathbf{g}\}$ 為 involutive，因此非線性系統(1.2)又滿足了回授線性化定理的條件 b)，故非線性系統的狀態轉換 $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$ 存在。

上述條件滿足，我們稱非線性系統(1.2)可被回授線性化，存在一微分同構轉換

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(x_1, x_2, x_3) \\ \phi_2(x_1, x_2, x_3) \\ \phi_3(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

並且基於線性系統的相似轉換概念，使得在新的系統狀態 $\mathbf{z} = [z_1 \ z_2 \ z_3]^T$ 之下，(1.2)式化成如下的形式

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_c \mathbf{z} + \mathbf{B}_c \cdot (u - \alpha(\mathbf{z})) / \beta(\mathbf{z}) \quad (1.9)$$

其中

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

且 $\alpha(\mathbf{z}): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ 、 $\beta(\mathbf{z}): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ 為兩個待定的純量函數。首先，對微分同構轉換 $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$ 沿著系統軌跡(1.2)取對時間的一次導數

$$\dot{\mathbf{z}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u] \quad (1.11)$$

另一方面由(1.9)式可得

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_c \Phi(\mathbf{x}) + \mathbf{B}_c \cdot (u - \alpha(\mathbf{x})) / \beta(\mathbf{x}) \quad (1.12)$$

其中 $\alpha(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{z})|_{\mathbf{z}=\Phi(\mathbf{x})}$ 、 $\beta(\mathbf{x}) = \beta(\mathbf{z})|_{\mathbf{z}=\Phi(\mathbf{x})}$ ，比較(1.11)、(1.12)兩式對所有的 $\mathbf{x}$ 及 $u$ 均須成立，故必須左右二邊含 $u$ 的項要相等，不含 $u$ 的項也要相等。因此，得出以下兩個等式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_c \Phi(\mathbf{x}) - \mathbf{B}_c \cdot \alpha(\mathbf{x}) / \beta(\mathbf{x}) \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_c / \beta(\mathbf{x}) \quad (1.14)$$

將(1.13)式展開如下

$$\begin{bmatrix} \nabla \phi_1 \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \nabla \phi_2 \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \nabla \phi_3 \mathbf{f}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \alpha(\mathbf{x}) / \beta(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \\ -\alpha(\mathbf{x}) / \beta(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

並且基於李氏微分的定義，可得到如下的關係式

$$\begin{aligned} \phi_2 &= L_f \phi_1 \\ \phi_3 &= L_f \phi_2 = L_f^2 \phi_1 \\ -\alpha(\mathbf{x}) / \beta(\mathbf{x}) &= L_f \phi_3 = L_f^3 \phi_1 \end{aligned} \quad (1.16)$$

從(1.16)可以觀察到  $\phi_2$ 、 $\phi_3$  均由  $\phi_1$  所唯一決定，並且是  $\phi_1$  的各階李氏微分，在另一方面，透過相同手段將(1.14)式展開如下

$$\begin{bmatrix} \nabla \phi_1 \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \nabla \phi_2 \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \nabla \phi_3 \mathbf{g}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1 / \beta(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 / \beta(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

因此，我們從而得到  $\Phi(\mathbf{x}) = [\phi_1(\mathbf{x}) \quad \phi_2(\mathbf{x}) \quad \phi_3(\mathbf{x})]^T$  所要滿足的關係式

$$\begin{aligned} L_g \phi_1 &= 0 \\ L_g \phi_2 &= L_g L_f \phi_1 = 0 \\ L_g \phi_3 &= L_g L_f^2 \phi_1 = 1 / \beta(\mathbf{x}) \neq 0 \end{aligned} \quad (1.18)$$

歸納以上結果，(1.16)式給出  $\phi_2$ 、 $\phi_3$  分別與  $\phi_1$  之間的關係式

$$\begin{aligned} \phi_2 &= L_f \phi_1 \\ \phi_3 &= L_f^2 \phi_1 \end{aligned} \quad (1.19)$$

(1.18)式則給出待定函數  $\phi_1$  所必須要滿足的聯立偏微分方程式

$$\begin{aligned} L_g \phi_1 &= 0 \\ L_g L_f \phi_1 &= 0 \end{aligned} \quad (1.20)$$

而當  $\phi_1(\mathbf{x})$  從(1.20)求出後，則  $\alpha(\mathbf{x})$ 、 $\beta(\mathbf{x})$  可由(1.16)、(1.18)二式的聯立，而求得解為

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{x}) &= -L_f^3 \phi_1 / L_g L_f^2 \phi_1 \\ \beta(\mathbf{x}) &= 1 / L_g L_f^2 \phi_1 \end{aligned} \quad (1.21)$$

而在經過  $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$  轉換後，原點(平衡點)要仍映至原點(平衡點)，即  $\Phi(0) = 0$ 。觀察(1.2)因  $\mathbf{f}(0) = 0$ ，故由(1.19)知， $\phi_2(0) = \nabla \phi_1(0) \cdot \mathbf{f}(0)$ ，同理亦可以證明  $\phi_3(0) = 0$ ，因此只須要求  $\phi_1(0) = 0$  即可，也就是說最後  $\phi_1(\mathbf{x})$  不僅要滿足聯立偏微分方程式(1.20)，亦還要多加滿足條件  $\phi_1(0) = 0$ 。

接著依據本題的非線性系統(1.2)，著手求解  $\phi_1(\mathbf{x})$ ，由以上敘述我們知道非線性

系統(1.20)滿足回授線性化定理中的 a)、b)兩個條件，因此 $\phi_1(\mathbf{x})$ 若使得以下的兩個式子成立

$$\begin{aligned}\nabla\phi_1 \cdot \mathbf{g} &= 0 \\ \nabla\phi_1 \cdot \text{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g} &= 0\end{aligned}\quad (1.22)$$

則偏微分聯立方程式(1.20)亦會成立，首先計算(1.22)的第一式

$$\nabla\phi_1 \cdot \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\partial\phi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial\phi_1}{\partial x_3} = 0 \quad (1.23)$$

以及計算(1.22)的第二式，並將(1.4)的結果代入

$$\nabla\phi_1 \cdot \text{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1+x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\partial\phi_1}{\partial x_2}(1+x_1) = 0 \quad (1.24)$$

由(1.24)的結果可以知道， $\partial\phi_1/\partial x_2 = 0$ ，也就是 $\phi_1(\mathbf{x})$ 不為 $x_2$ 的函數，接著再這個結果代回(1.23)則又得到 $\partial\phi_1/\partial x_3 = 0$ ，因此得出 $\phi_1(\mathbf{x})$ 只會為 $x_1$ 的函數，因此我們可以選擇 $\phi_1(\mathbf{x})$ 為任意 $x_1$ 的函數，並且滿足 $z_1(0) = \phi_1(0)$ ，在這裡我們先簡單選擇 $\phi_1 = x_1$ ，並且透過(1.19)計算出

$$\begin{aligned}\phi_2 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1+x_2-x_3 \\ -x_1x_3-x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1+x_2-x_3 \\ -x_1x_3-x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} \\ &= -x_1+x_2-x_3\end{aligned}\quad (1.25)$$

$$\begin{aligned}\phi_3 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\phi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial\phi_2}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1+x_2-x_3 \\ -x_1x_3-x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1+x_2-x_3 \\ -x_1x_3-x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} \\ &= 2x_1-2x_2+x_3-x_1x_3\end{aligned}\quad (1.26)$$

以及(1.21)計算出

$$\alpha(\mathbf{x}) = (-3x_1+4x_2-2x_3+3x_1x_3-x_2x_3+x_1^2+x_3^2)/(x_1+1) \quad (1.27)$$

$$\beta(\mathbf{x}) = -1/(x_1+1) \quad (1.28)$$

由以上結果，我們求解出本題的非線性系統(1.2)將透過以下微分同構轉換

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(x_1, x_2, x_3) \\ \phi_2(x_1, x_2, x_3) \\ \phi_3(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1+x_2-x_3 \\ 2x_1-2x_2+x_3-x_1x_3 \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

使得(1.2)可以被轉為(1.9)，並且我們進一步令

$$v = (u - \alpha(\mathbf{z}))/\beta(\mathbf{z}) \quad (1.30)$$

因此(1.9)可以被視為線性系統如下

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_c \mathbf{z} + \mathbf{B}_c v \quad (1.31)$$

其中

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

針對線性系統(1.31)，我們透過狀態負回授控制

$$v = -\mathbf{K}\mathbf{z} = -\begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

的方式將此線性系統改寫為以下閉迴路系統

$$\dot{\mathbf{z}} = (\mathbf{A}_c - \mathbf{B}_c \mathbf{K})\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -K_1 & -K_2 & -K_3 \end{bmatrix} \mathbf{z} \quad (1.34)$$

並且利用設計控制律(1.33)中的增益矩陣  $\mathbf{K}$ ，使得閉迴路矩陣  $\mathbf{A}_c - \mathbf{B}_c \mathbf{K}$  的特徵值皆位於  $\lambda_{1,2,3} = -2$  的位置。在(1.34)中，閉迴路矩陣  $\mathbf{A}_c - \mathbf{B}_c \mathbf{K}$  的特徵多項式表示為

$$\det(\lambda \mathbf{I} - (\mathbf{A}_c - \mathbf{B}_c \mathbf{K})) = \lambda^3 + K_3 \lambda^2 + K_2 \lambda + K_1 \quad (1.35)$$

而我們所指定的系統閉迴路特徵值所表示的特徵方程式為

$$\det(\lambda \mathbf{I} - (\mathbf{A}_c - \mathbf{B}_c \mathbf{K})) = (\lambda + 2)^3 = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8 \quad (1.36)$$

因此，透過比較係數，我們計算出回授增益矩陣中的增益值分別為  $K_1 = 8$ 、 $K_2 = 12$  及  $K_3 = 6$ ，而回授增益向量寫為

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 6 \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

經過以上詳細的推導，我們基於線性系統(1.31)設計了狀態回授控制律  $v = -\mathbf{K}\mathbf{z}$ ，然而我們又假設了  $v = (u - \alpha(\mathbf{z})) / \beta(\mathbf{z})$ ，因此我們可以得出以下等式

$$v = (u - \alpha(\mathbf{z})) / \beta(\mathbf{z}) = -\mathbf{K}\mathbf{z} \quad (1.38)$$

經過整理，(1.38)中的實際非線性控制律  $u$  可以被得出為

$$u = -\beta(\mathbf{z})\mathbf{K}\mathbf{z} + \alpha(\mathbf{z}) \quad (1.39)$$

再將狀態轉換的關係代入(1.39)式中，我們可以計算出實際上對於非線性系統(1.2)的控制律

$$u(\mathbf{x}) = -\beta(\mathbf{x})\mathbf{K}\Phi(\mathbf{x}) + \alpha(\mathbf{x}) \quad (1.40)$$

其中  $\alpha(\mathbf{x})$  以及  $\beta(\mathbf{x})$  分別為(1.27)、(1.28)所表示。

### Question (b)

將設計得到的控制器  $u(x)$  代入(1.1)式，進行 Matlab 模擬。選擇 10 個左右的初始位置  $\mathbf{x}(0) = (x_1(0), x_2(0), x_3(0))$ ，畫出相空間軌跡  $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ ，驗證平衡點(原點)是否為漸進穩定。

### Answer

透過前一題所設計的非線性控制律(1.40)，非線性系統(1.2)將可以先藉由控制律所使得系統被轉換到一個線性系統的領域，並且使其在該線性系統中，達到相對於原點(平衡點)的漸進穩定，因此從這樣的結果我們可以推論，該控制律  $u(\mathbf{x})$  將也會使得原本的系統相對於原點，達到漸進穩定的效果。

首先，將系統初始值分別設置為  $x_1(0)=2$ 、 $x_2(0)=2$  以及  $x_3(0)=2$ ，圖 1.1 為這個非線性系統在受到控制以及這樣的初始值設定之下，系統狀態的相空間軌跡圖。

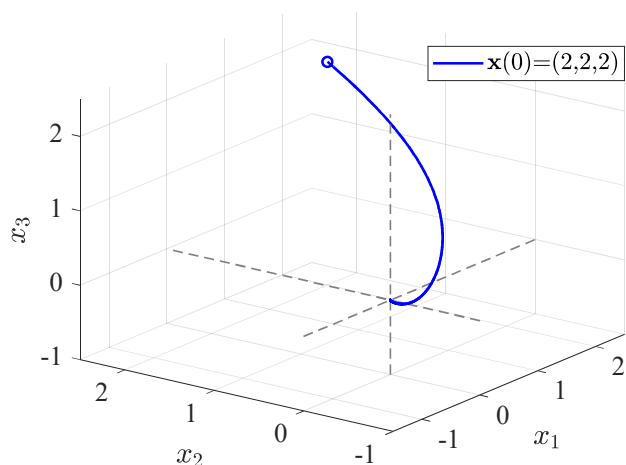


圖 1.1、非線性系統初始值  $\mathbf{x}(0) = (2, 2, 2)$  釋放之相空間軌跡

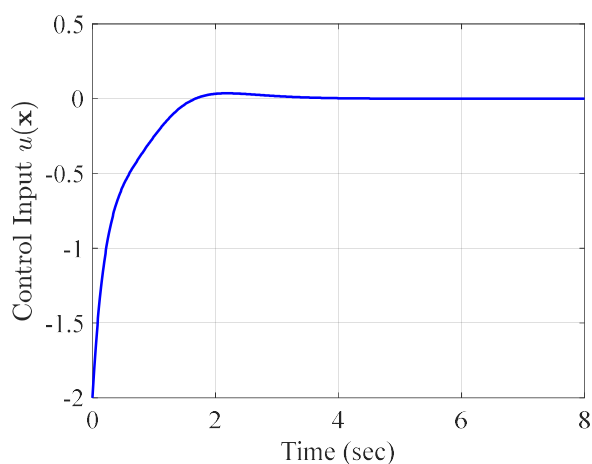


圖 1.2、系統初始值  $\mathbf{x}(0) = (2, 2, 2)$  之非線性控制輸入響應

圖 1.1 其坐標軸所代表的涵義為分別為  $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$  及  $x_3(t)$  在某一時刻的值，而三個



狀態在所有時間所連成的線，即為這個非線性系統的相空間軌跡，而從圖中可以看出，這個非線性系統的狀態在受到控制後，其狀態軌跡會隨著時間以漸進穩定的方式到達原點。而這樣的非線性控制律(1.40)，其響應圖如圖 1.2 所呈現。

而圖 1.1 所對應到的閉迴路線性系統相空間軌跡為圖 1.3，由於我們將非線性系統的初始值設定為  $\mathbf{x}(0) = (2, 2, 2)$ ，因此，經過狀態轉換  $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$ ，線性系統的初始值為  $\mathbf{z}(0) = \Phi(\mathbf{x}(0)) = (2, -2, -2)$ ，而從圖 1.3 看出，此非線性系統對應到的線性系統相空間軌跡，會以漸進穩定的方式趨於原點(平衡點)。

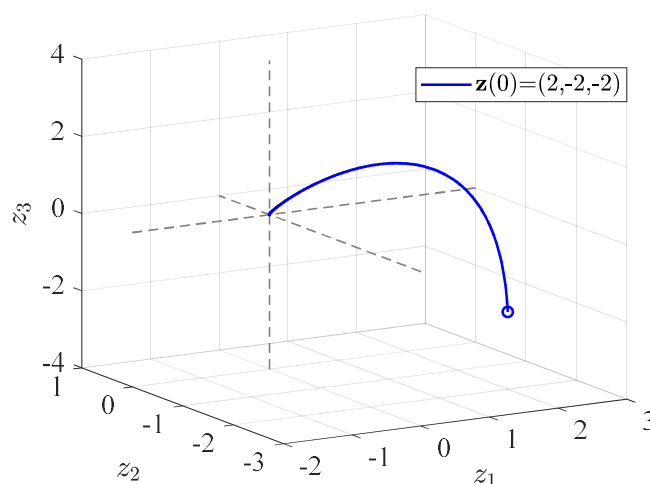


圖 1.3、線性系統初始值  $\mathbf{z}(0) = (2, -2, -2)$  釋放之相空間軌跡

又從(a)小題所設計的控制律(1.40)當中，觀察到  $\alpha(\mathbf{x})$ 、 $\beta(\mathbf{x})$  分別為(1.27)、(1.28)的形式，從中我們發現到當  $x_1$  的值為-1時，則會造成控制律產生奇異(singular)的現象，這時候的控制律  $u(\mathbf{x})$  被計算為無窮大，導致超出實際硬體所能負荷的範圍，且會使得狀態會無法正常的收斂。

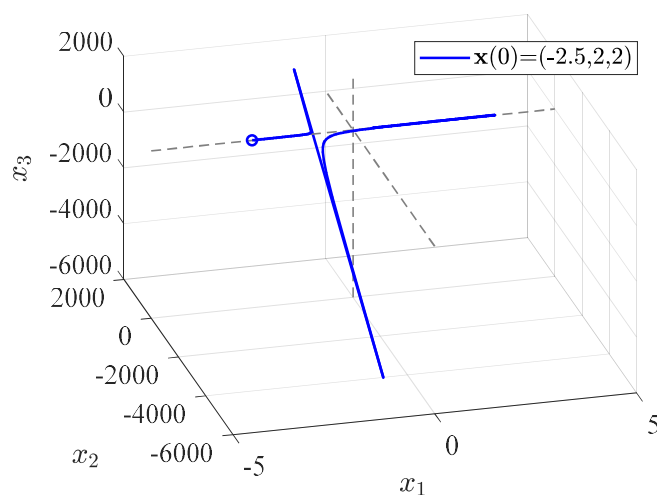


圖 1.4、非線性系統初始值  $\mathbf{x}(0) = (-2.5, 2, 2)$  釋放之相空間軌跡

從數學式子當中，我們了解到會有這樣的現象，因此在數值模擬的部分，故意將

初始值  $x_1(0)$  設置為 -2.5，由於前面的設計，我們知道控制器會保證狀態收斂，因此  $x_1(t)$  的值必定會收斂到  $x_1(t) = -1$ ，然而當  $x_1$  收斂到此時，則導致控制律  $u(\mathbf{x})$  出現 singular，從圖 1.5 我們可以看出此時的  $x_1 = -1$  將會導致控制律異常的大，這是無法被使用的，而由圖 1.4 也可以看出，由於這樣的控制律所導致系統的相空間軌跡呈現發散的現象。

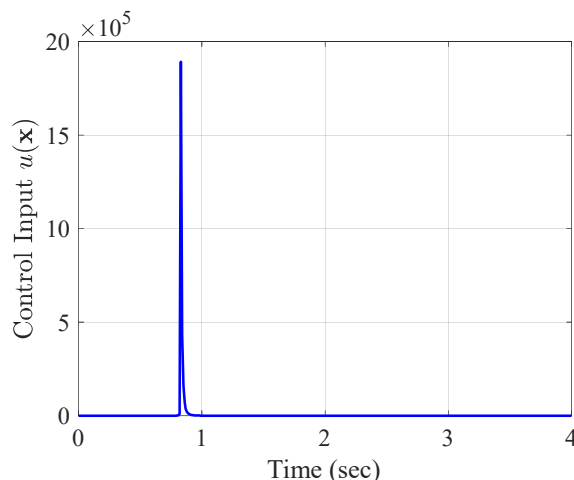


圖 1.5、系統初始值  $\mathbf{x}(0) = (-2.5, 2, 2)$  之非線性控制輸入響應

因此，在接下來的模擬，我們會刻意避開 singular 的狀態，由圖 1.6 中的初始值設置注意到，這裡的  $x_1(0)$  的給定都會避免小於 -1，而從模擬結果來看這樣的條件是不夠的，在模擬結果當中發現，某些的初始值也會導致  $x_1$  小於 -1，使得系統無法收斂，在圖 1.6 結果當中可以看到，特定選擇了 10 種初始值進行模擬，最後其相空間軌跡分別會進入到原點(平衡點)，因此我們可以說這些初始值相對於原點為漸進穩定，然而由於  $x_1$  不能等於 -1 的條件，因此這樣的穩定結果是為局部的，我們稱其為相對於原點局部漸進穩定。

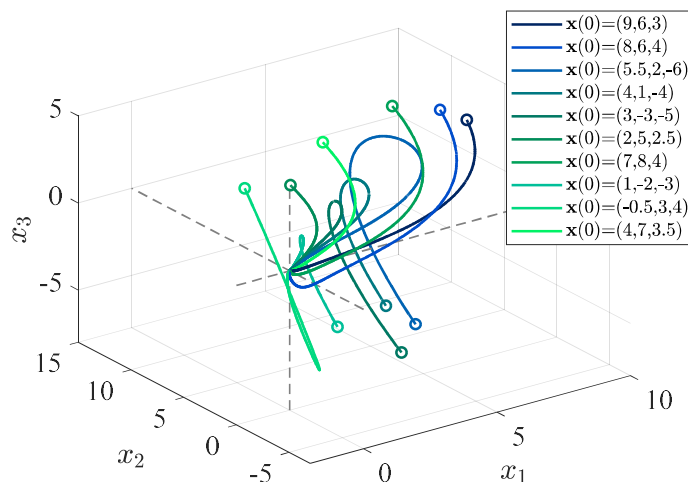


圖 1.6、非線性系統於 10 個不同初始值釋放之相空間軌跡

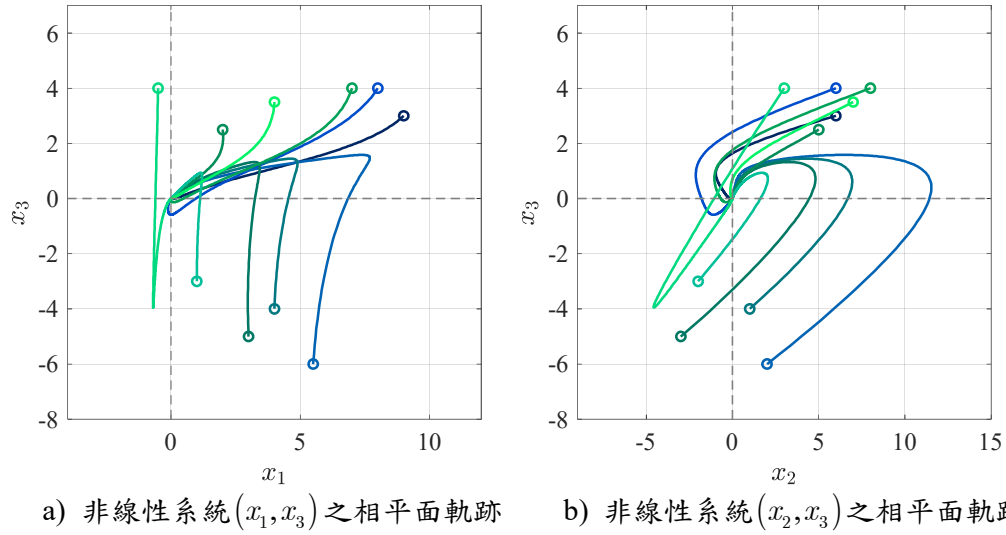


圖 1.7、非線性系統於 10 個不同初始值釋放之相平面軌跡

圖 1.7 為透過模擬 10 種不同初始值，所反映出的系統相平面軌跡圖，從相平面軌跡圖 1.7 a)當中更可以很明顯地看到，如果系統相對於原點為漸進穩定，則整個 $(x_1, x_3)$ 的相平面軌跡皆會為於 $x_1 = -1$ 的右半。

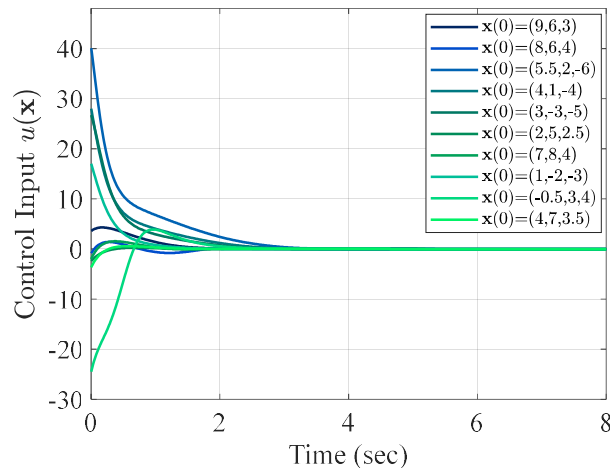


圖 1.8、非線性系統於不同初始值釋放之控制輸入響應

圖 1.20 為系統於不同初始值情況下的非線性控制律(1.40)，從圖中可以看出，由於在這裡的設計，皆限制非線性控制律使得等效的線性系統的閉迴路極點為 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -2$ ，因此控制律在各種初始值情況下收斂的趨勢也是相同的，且由於控制律是由狀態的線性組合而成，因此當各個狀態皆收斂到原點時，控制律也會歸零。

非線性系統受到特殊的控制律作用時，會使的原始的非線性系統被等效為閉迴路線性系統，且極點落在-2 的位置，在此畫出線性系統的狀態空間軌跡圖，如圖 1.9，由圖中可以看出，在線性系統的域中，狀態軌跡較為規則。

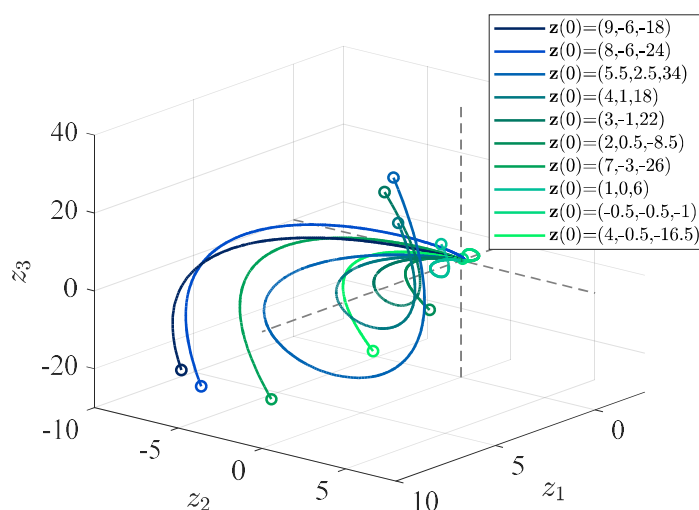


圖 1.9、線性系統於 10 個不同初始值釋放之相空間軌跡

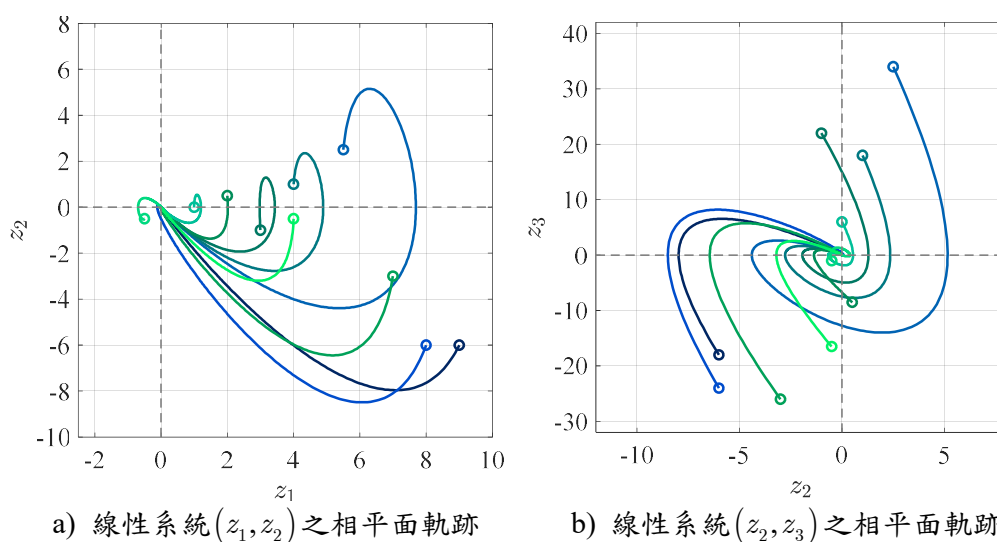


圖 1.10、線性系統於 10 個不同初始值釋放之相平面軌跡

而圖 1.10 為在線性系統下  $(z_1, z_2)$  以及  $(z_2, z_3)$  的相平面軌跡圖，更可以在圖 1.11 b) 當中，看出原點(平衡點)是為一個典型的穩定節點(node)，由於在這裡的  $z_1 = \phi_1$  選擇為  $x_1$ ，因此在圖 1.12 a) 當中也可以看出  $z_1$  能收斂的範圍皆位於  $z_1 = -1$  的右半。

### Question (c)

畫出  $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 、 $x_3(t)$  分別對時間的響應圖，驗證時間響應圖的收斂速度與  $\lambda = -2$  的關係。

### Answer

在(b)小題當中，皆探討的是系統於相空間、相平面的軌跡，而在本小題當中所探討的是系統狀態  $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$  以及  $x_3(t)$  分別對於時間的時間響應，由時間響應圖較能直觀的掌握系統狀態實際上的收斂行為，由於線性系統閉迴路極點在此被設置為  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -2$ ，因此在線性系統域的狀態  $z_1(t)$ 、 $z_2(t)$  及  $z_3(t)$  的收斂情形皆會以指數的形式收斂，且收斂速度為  $e^{-2t}$ ，而由於狀態轉換的關係  $\mathbf{x} = \Phi^{-1}(\mathbf{z})$ ，因此我們可以推論在實際上，系統真實的各個狀態  $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$  以及  $x_3(t)$  的收斂情形皆也會與指數  $e^{-2t}$  收斂有關聯。

圖 1.13 為分別為系統真實狀態  $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$  以及  $x_3(t)$  對於時間的響應圖，以及等效線性系統的狀態  $z_1(t)$ 、 $z_2(t)$  及  $z_3(t)$  對於時間的響應圖，在圖 1.13a 當中，非線性系統各個狀態收斂到零的時間是一致的，而由於以上有提到，我們預測系統的狀態收斂速度為  $e^{-2t}$ ，因此刻意與狀態初值相同為 2 以紅點線表示  $2e^{-2t}$ ，而從這裡也驗證了我們的推論，其系統狀態收斂到零的時間與所預測的  $e^{-2t}$  到達零的時間一致，而由於非線性系統在受到控制後的狀態運動行為過於複雜，因此無法透過指定的收斂曲線使得狀態對於時間的響應皆被位於指數收斂的包絡線內。

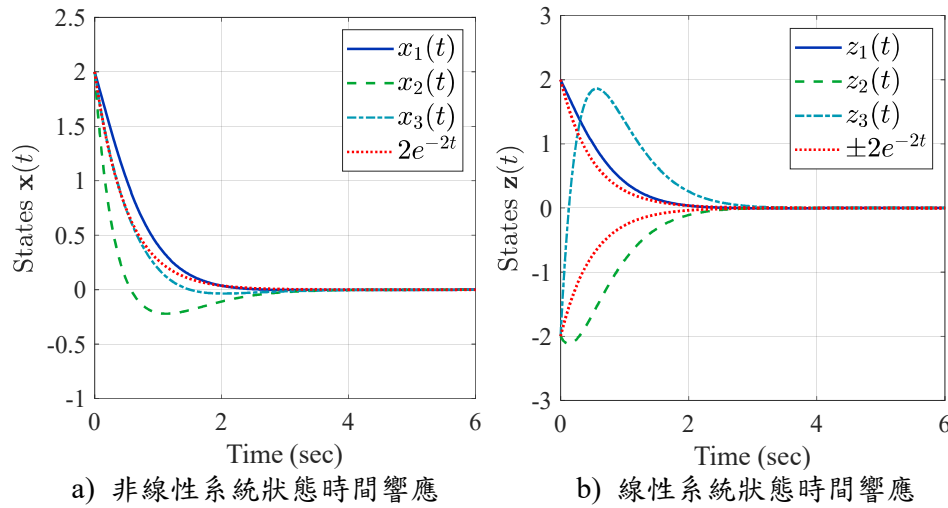
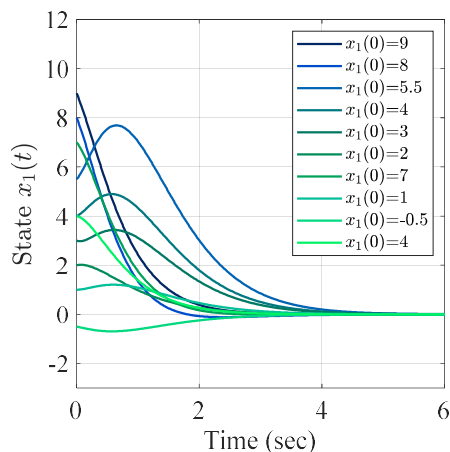
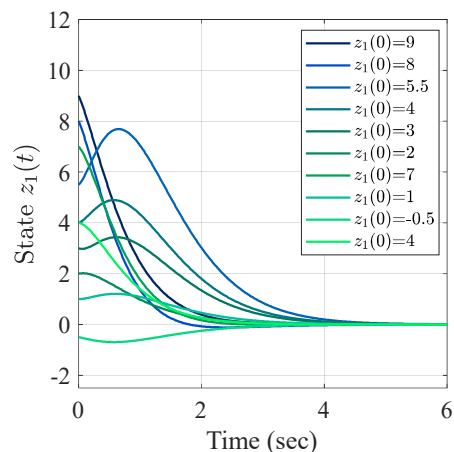


圖 1.13、系統受到回授線性化控制之收斂時間響應圖

圖 1.14、圖 1.15 及圖 1.16 分別為非線性系統三個真實狀態以及對應到的線性系統三個狀態，於不同初始值條件下，受到控制的狀態時間響應圖，而從這三張圖更可以看出由於指定閉迴路極點為 -2 的關係，因此三者的收斂速度皆有相同的指數收斂趨勢，且收斂為零的時間，大致上是相同的。

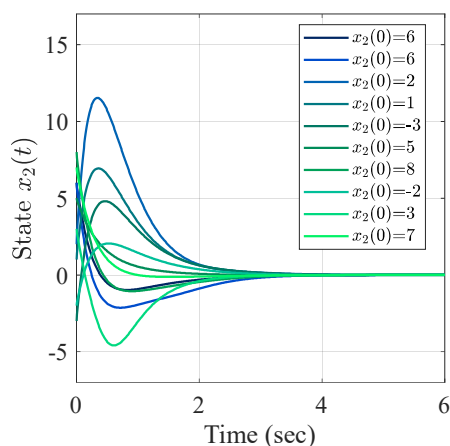


a) 非線性系統  $x_1(t)$  時間響應

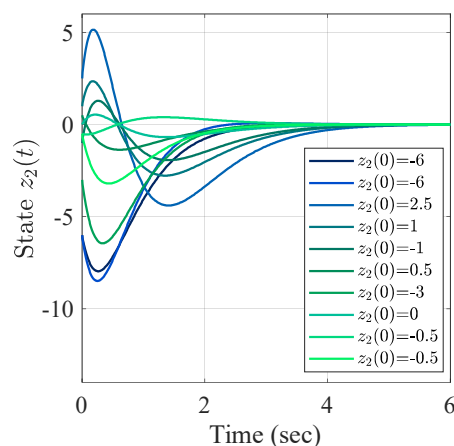


b) 線性系統  $z_1(t)$  時間響應

圖 1.14、系統針對 10 個不同  $x_1(0)$  受到控制的狀態時間響應

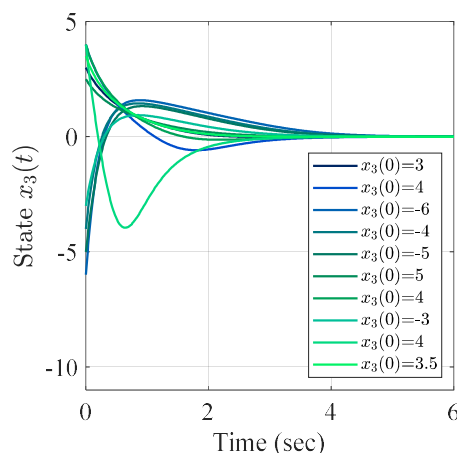


a) 非線性系統  $x_2(t)$  時間響應

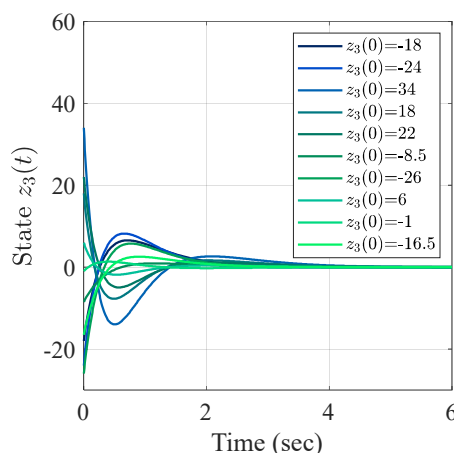


b) 線性系統  $z_2(t)$  時間響應

圖 1.15、系統針對 10 個不同  $x_2(0)$  受到控制的狀態時間響應



a) 非線性系統  $x_3(t)$  時間響應



b) 線性系統  $z_3(t)$  時間響應

圖 1.16、系統針對 10 個不同  $x_3(0)$  受到控制的狀態時間響應

### Question (d)

回到 Question (a)，如果極點仍然選擇落在  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -2$ ，討論回授線性化控制  $u(x)$  的解是否為唯一？如果不為唯一，嘗試求得  $u(x)$  的另一個解，並重複以上步驟。所得到的時間響應圖會一樣嗎？

### Answer

根據(a)小題的結果， $\phi_1(\mathbf{x})$  只要選擇為  $x_1$  的函數即可，從這個結果來說  $\phi_1(\mathbf{x})$  不唯一，因此在本題刻意選擇與(a)小題不同的  $\phi(\mathbf{x})$  來做比較，在本小題刻意選擇  $\phi_1 = x_1^2 + x_1$ ，多加入了  $x_1$  的平方項，且這樣的選擇也滿足了在原始的系統下原點(平衡點)，會映射到經過轉換後的線性系統原點亦為平衡點，有了  $\phi_1$  在進一步透過透過(1.19)計算出

$$\phi_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 x_3 - x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 x_3 - x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

$$\begin{aligned} &= -x_1 + x_2 - x_3 - 2x_1^2 + 2x_1 x_2 - 2x_1 x_3 \\ \phi_3 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 x_3 - x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 - 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 & 1 + 2x_1 & -1 - 2x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 x_3 - x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} \\ &= (-1 - 4x_1 + 2x_2 - 2x_3)(-x_1 + x_2 - x_3) + (1 + 2x_1)(-x_1 x_3 - x_2) + (1 + 2x_1)x_1 \end{aligned} \quad (1.42)$$

並且透過(1.21)計算出非線性控制律  $u(\mathbf{x})$  中的  $\alpha$  及  $\beta$  如下

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{x}) &= -L_f \phi_3 / L_g \phi_3 \\ &= \left[ (12x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 4x_1 x_3 + 1)(-x_1 + x_2 - x_3) \right. \\ &\quad \left. - (-8x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 2)(x_1 x_3 + x_2) \right. \\ &\quad \left. - (5x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 2x_1^2 + 1)(x_1) \right] / (2x_1 + 1)(x_1 + 1) \end{aligned} \quad (1.43)$$

$$\beta(\mathbf{x}) = -1 / (2x_1 + 1)(x_1 + 1) \quad (1.44)$$

由以上結果，我們求解出本題的非線性系統(1.2)將透過以下本小題不同的微分同構轉換

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(x_1, x_2, x_3) \\ \phi_2(x_1, x_2, x_3) \\ \phi_3(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} \quad (1.45)$$

使得(1.2)可以被轉為(1.9)，而本題線性系統下的回授控制律  $v$  將也要使得必迴路極點位於  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -2$ ，因此我們可以斷定不管  $\phi_1(\mathbf{x})$  選擇為何，最終閉迴路線性系統的響應皆會相同，而差別只差在不同的微分同構轉換會導致線性系統的初始值不同。

經過整理，(1.38)中的實際非線性控制律  $u$  如下

$$u(\mathbf{x}) = -\beta(\mathbf{x})\mathbf{K}\Phi(\mathbf{x}) + \alpha(\mathbf{x}) \quad (1.46)$$

其中  $\alpha(\mathbf{x})$  以及  $\beta(\mathbf{x})$  分別為(1.43)、(1.44)所表示。

經過以上計算，我們求解出了系統不同的控制律，也因此得出了結論為系統的控制律不為一，但皆能使得閉迴路極點位於-2 的位置。

圖 1.17 為不同的狀態轉換下，不同的控制律所造成的真實非線性系統狀態時間響應的結果，從圖中可以看到由於以上所求解出的控制律與(a)小提的控制律不同，因此狀態時間響應亦有所不同，但是又因為閉迴路線性系統的極點皆位於-2，因此兩者狀態收斂的速度是相同的，兩者皆以  $e^{-2t}$  的收斂速度下，收到平衡點為 0 的位置，在圖中，藍色的實線代表(a)小題所求解出的微分同構轉換函數，以及其基於此進一步所計算出的控制律，所造成的狀態收斂響應；而紅色虛線所表示的是，本小題以上所求解的不同的微分同構轉換函數，以及基於此所計算出的控制律，所造成的狀態收斂軌跡。

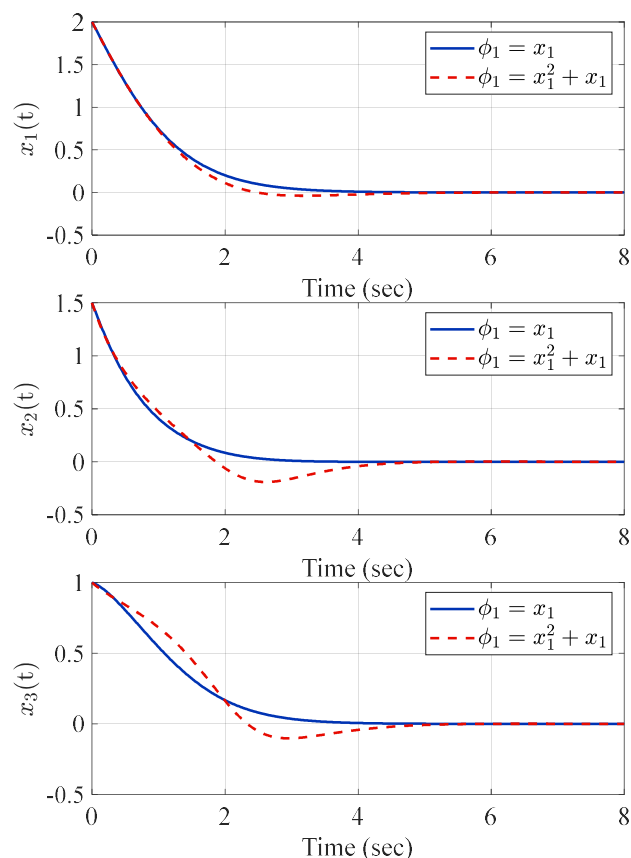


圖 1.17、不同狀態轉換函數  $\phi_1$  於相同初值所造成之系統狀態時間響應比較

由以上敘述所提到，由於微分同構函數  $\Phi(\mathbf{x})$  的不同，因此所推導出的控制律  $u(\mathbf{x})$  亦會有所不同，圖 1.18 分別為兩種不同的控制律之比較圖，從這樣的結果可以知道，對於相同的非線性系統，透過狀態線性回授控制，限制閉迴路極點相同所計算出的控制律解不唯一，而其狀態響應結果也不同，但是皆能達成指定收斂速度的目的。



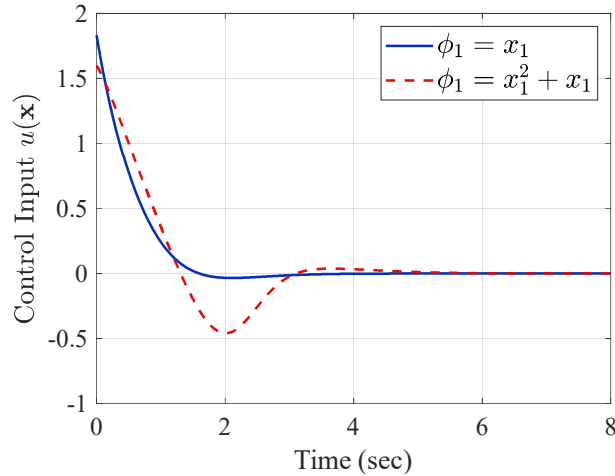


圖 1.18、不同狀態轉換函數  $\phi_1$  所造成之不同控制輸入響應

接下來，值得注意的是，由(1.43)、(1.44)可以看出，本小題所設計的控制律形式一樣會造成控制律出現奇異(Singular)的現象，而且更在這裡出現了2個限制，從(1.43)、(1.44)當中可以看出，當  $x_1 = -1$  以及  $x_1 = -1/2$  皆會導致系統出現 singular，因此在實際應用方面，並沒有那麼方便，且這裡的限制比在(a)小題更為嚴格，接著我們為了驗證這樣的推論，因此選擇了當兩者在初始值為  $x_1(0) = -0.6$  的情況下做控制模擬，由於閉迴路系統為穩定，因此我們推論兩者  $x_1(t)$  的狀態皆應該往 0 收斂，然而從圖 1.19

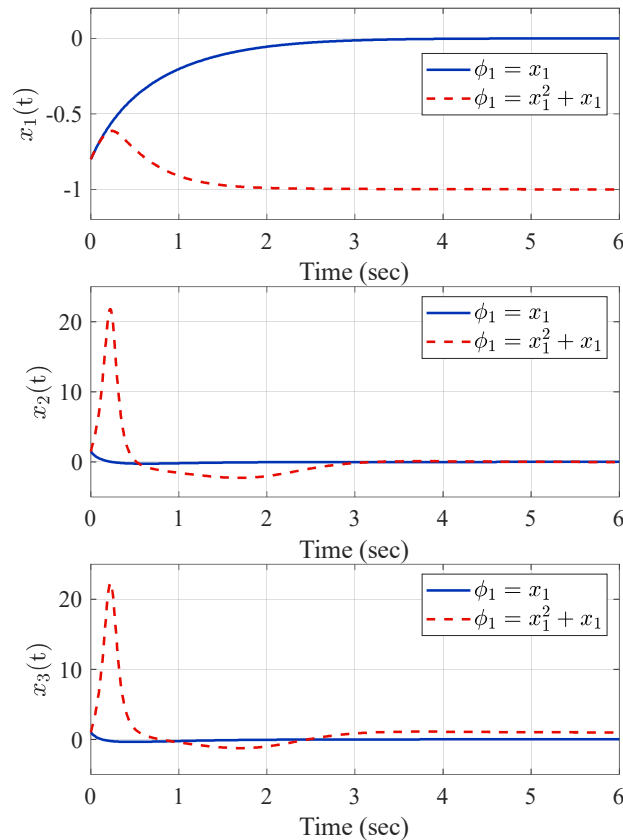


圖 1.19、不同狀態轉換函數  $\phi_1$  於特定初值所造成之系統狀態時間響應比較

我們可以看出，在藍色實線所模擬的結果是沒有問題的， $x_1(t)$  會收斂到 0，而在紅色虛線的部分，由於  $x_1$  在收斂的過程中會先到達 -0.5，因此會使得控制律出現 singular，而產生過大的控制律，使得  $x_1$  發散，而在發散的過程中到達 -1 時，又使得控制律出現了另一個 singular，最後導致所有的狀態皆無法收斂到 0。

圖 1.20 為兩者的控制律比較圖，從圖中可以看出，確實本題所設計的控制律紅色的虛線在  $x_1 = -0.5$  時，造成了異常大的控制律，從這樣的結果來看，我們了解線性回授控制存在了這樣的缺點，由於控制律分母時常包著狀態，因此在使用上，更必須要考慮到控制律出現 singular 異常的問題，控制律的設計很重要，而控制律的設計呼應到微分同構轉換函數的選擇很重要，以及系統初始值操作區域的選擇也必須加以考慮。

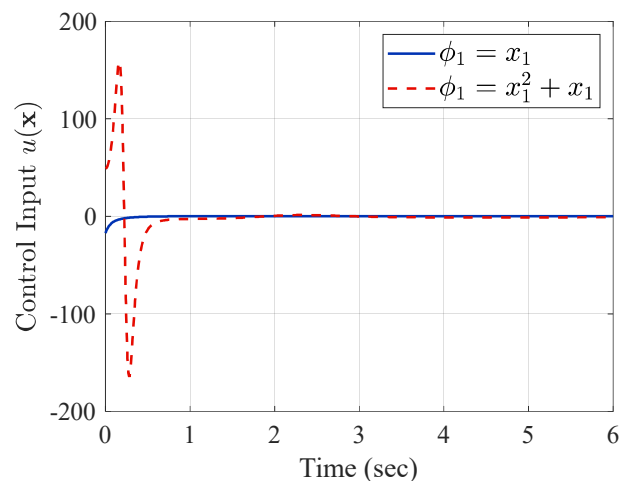


圖 1.20、不同狀態轉換函數  $\phi_1$  於特定初值之不同控制輸入響應

## Matlab Code

### 第一題 - (b)

```

%% Nonlinear Control HW6 - Q1 - (b)
clear ; clc ; close all
dt = 0.01 ; t_final = 8 ;
t = 0 : dt : t_final ;
x1_0 = 2 ; % Initial of x1
x2_0 = 2 ; % Initial of x2
x3_0 = 2 ; % Initial of x3
X0 = [ x1_0 ; x2_0 ; x3_0 ] ;

%%%%%%%%%% 10 arbitrary initial state values %%%%%%%%%%%
xt1 = [9 ; 6 ; 3] ; xt2 = [8 ; 6 ; 4] ; xt3 = [5.5 ; 2 ; -6] ; xt4 = [4 ; 1 ; -4] ; xt5 = [3 ; -3 ; -5] ;
xt6 = [2 ; 5 ; 2.5] ; xt7 = [7 ; 8 ; 4] ; xt8 = [1 ; -2 ; -3] ; xt9 = [-0.5 ; 3 ; 4] ; xt10 = [4 ; 7 ; 3.5] ;
Xt_0 = [ xt1 , xt2 , xt3 , xt4 , xt5 , xt6 , xt7 , xt8 , xt9 , xt10 ] ;

%% linear System
Z0 = [ x1_0 ; -x1_0+x2_0-x3_0 ; 2*x1_0-2*x2_0+x3_0-x1_0*x3_0 ] ; % Initial of transformation states Z
Ac = [ 0 1 0 ; 0 0 1 ; 0 0 0 ] ; % Linear system matrix
Bc = [ 0 ; 0 ; 1 ] ; % Linear system input matrix
lambda = [-2,-2,-2] ; % Poles of closed loop system
K = acker(Ac,Bc,lambda) ; % Output feedback control gain

%%%%%%%%%% 10 arbitrary initial state values %%%%%%%%%%%
for i = 1:10
    Zt_0(:,i) = [ Xt_0(1,i) ; -Xt_0(1,i)+Xt_0(2,i)-Xt_0(3,i) ;
    2*Xt_0(1,i)-2*Xt_0(2,i)+Xt_0(3,i)-Xt_0(1,i)*Xt_0(3,i) ] ;
end

%% Plot 1
LW1 = 1.6 ;
LW2 = 1 ;
FS1 = 16 ;
FS_lg = 11 ;

[ t , X ] = RK4( @(t,X) Nonlinear_system(K,X) , [0 t_final], X0 ,dt) ;
x1_c = X(:,1) ; x2_c = X(:,2) ; x3_c = X(:,3) ;

```

```

for i = 1 : length(t)
Phi(:,i) = [ x1_c(i) ; -x1_c(i)+x2_c(i)-x3_c(i) ; 2*x1_c(i)-2*x2_c(i)+x3_c(i)-x1_c(i)*x3_c(i) ] ;
u_alpha(i) =
(-3*x1_c(i)+4*x2_c(i)-2*x3_c(i)+3*x1_c(i)*x3_c(i)-x2_c(i)*x3_c(i)+x1_c(i)^2+x3_c(i)^2)/(x1_c(i)+1) ;
u_beta(i) = -1/(x1_c(i)+1) ;
u_c(i) = -u_beta(i)*K*Phi(:,i) + u_alpha(i) ;
end

[ t , Z ] = RK4( @(t,Z) Linear_system(K,Ac,Bc,Z) , [0 t_final], Z0 ,dt) ;
z1_c = Z(:,1) ; z2_c = Z(:,2) ; z3_c = Z(:,3) ;

f1 = figure ;
plot3(x1_c,x2_c,x3_c,'b','LineWidth',LW1) ; hold on ;
plot3(x1_0,x2_0,x3_0,'bo','LineWidth',LW1) ;
plot3([-4 4],[0 0],[0 0],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW2) ;
plot3([0 0],[-4 4],[0 0],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW2) ;
plot3([0 0],[0 0],[-4 4],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW2) ;
hsl(1)=legend({'$\mathbf{x}(0)=(2,2,2)$'},'Interpreter','latex');
ax1(1) = gca ;
xlabel('$x_1$','Interpreter','Latex') % x label
ylabel('$x_2$','Interpreter','Latex') % y label
zlabel('$x_3$','Interpreter','Latex') % z label
axis([-1.5 2.5 -1 2.5 -1 2.5])
axis normal
grid on

f2 = figure ;
plot3(z1_c,z2_c,z3_c,'b','LineWidth',LW1) ; hold on ;
plot3(z1_c(1),z2_c(1),z3_c(1),'bo','LineWidth',LW1) ;
plot3([-4 4],[0 0],[0 0],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW2) ;
plot3([0 0],[-4 4],[0 0],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW2) ;
plot3([0 0],[0 0],[-4 4],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW2) ;
hsl(2)=legend({'$\mathbf{z}(0)=(2,-2,-2)$'},'Interpreter','latex');
ax1(2) = gca ;
xlabel('$z_1$','Interpreter','Latex') % x label
ylabel('$z_2$','Interpreter','Latex') % y label
zlabel('$z_3$','Interpreter','Latex') % z label
axis([-2 3 -3 1 -4 4])

```

```

axis normal
grid on

f3 = figure ;
plot(t,u_c,'b','LineWidth',LW1)
ax1(3) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('Control Input  $\mathbf{u}$ ','$','Interpreter','Latex') % y label
axis normal
grid on

for i = 1:length(ax1)
    set(ax1(i),'FontSize',FS1,'FontName','Times New Roman')
end

%% Plot 2
Cm1 = [0,0.15,0.39; 0,0.3,0.8 ; 0,0.39,0.7 ; 0,0.47,0.51 ; 0,0.47,0.39 ; 0,0.55,0.35 ; 0,0.63,0.35 ; 0,0.75,0.6 ;
0,0.85,0.5 ; 0,0.95,0.4] ;
f4 = figure ;
for i = 1:length(Xt_0(1,:))
    [ t , Xt ] = RK4( @(t,X) Nonlinear_system(K,X) , [0 t_final], Xt_0(i,:),dt) ;
    x1t_c = Xt(:,1) ; x2t_c = Xt(:,2) ; x3t_c = Xt(:,3) ;

    p1(i) = plot3(x1t_c,x2t_c,x3t_c,'Color',Cm1(i,:), 'LineWidth',LW1) ; hold on ;
    plot3(x1t_c(1),x2t_c(1),x3t_c(1),'o','Color',Cm1(i,:), 'LineWidth',LW1) ;

end
plot3([-5 10],[0 0],[0 0], '--','Color',[0.5 0.5 0.5], 'LineWidth',LW2) ;
plot3([0 0],[-10 15],[0 0], '--','Color',[0.5 0.5 0.5], 'LineWidth',LW2) ;
plot3([0 0],[0 0],[-10 6], '--','Color',[0.5 0.5 0.5], 'LineWidth',LW2) ;
hs2(1)=legend([p1(1),p1(2),p1(3),p1(4),p1(5),p1(6),p1(7),p1(8),p1(9),p1(10)],...

{' $\mathbf{x}(0)=(9,6,3)$ ',' $\mathbf{x}(0)=(8,6,4)$ ',' $\mathbf{x}(0)=(5.5,2,-6)$ ',...
' $\mathbf{x}(0)=(4,1,-4)$ ',' $\mathbf{x}(0)=(3,-3,-5)$ ',' $\mathbf{x}(0)=(2,5,2.5)$ ',...
' $\mathbf{x}(0)=(7,8,4)$ ',' $\mathbf{x}(0)=(1,-2,-3)$ ',' $\mathbf{x}(0)=(-0.5,3,4)$ ',...
' $\mathbf{x}(0)=(4,7,3.5)$ '],'Interpreter','latex');
ax2(1) = gca ;
xlabel('$x_1$', 'Interpreter','Latex') % x label

```

```

ylabel('$x_2$', 'Interpreter', 'Latex') % y label
xlabel('$x_3$', 'Interpreter', 'Latex') % y label
axis([-2 10 -7 15 -8 5])
axis normal
grid on

f5 = figure ;
for i = 1:length(Xt_0(1,:))

    [ t , Zt ] = RK4( @(t,Z) Linear_system(K,Ac,Bc,Z) , [0 t_final], Zt_0(:,i) ,dt) ;
    z1t_c = Zt(:,1) ; z2t_c = Zt(:,2) ; z3t_c = Zt(:,3) ;

    p2(i) = plot3(z1t_c,z2t_c,z3t_c,'Color',Cm1(i,:),'LineWidth',LW1) ; hold on ;
    plot3(z1t_c(1),z2t_c(1),z3t_c(1),'o','Color',Cm1(i,:),'LineWidth',LW1) ;

end
plot3([-4 10],[0 0],[0 0], '--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW2) ;
plot3([0 0],[-10 9],[0 0], '--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW2) ;
plot3([0 0],[0 0],[-30 40], '--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW2) ;
hs2(2)=legend([p2(1),p2(2),p2(3),p2(4),p2(5),p2(6),p2(7),p2(8),p2(9),p2(10)],...

{'\mathbf{x}(0)=(9,-6,-18)', '\mathbf{x}(0)=(8,-6,-24)', '\mathbf{x}(0)=(5.5,2.5,34)',...
'\mathbf{x}(0)=(4,1,18)', '\mathbf{x}(0)=(3,-1,22)', '\mathbf{x}(0)=(2,0.5,-8.5)',...
'\mathbf{x}(0)=(7,-3,-26)', '\mathbf{x}(0)=(1,0,6)', '\mathbf{x}(0)=(-0.5,-0.5,-1)',...
'\mathbf{x}(0)=(4,-0.5,-16.5)'} , 'Interpreter', 'latex');
ax2(2) = gca ;
xlabel('$z_1$', 'Interpreter', 'Latex') % x label
ylabel('$z_2$', 'Interpreter', 'Latex') % y label
xlabel('$z_3$', 'Interpreter', 'Latex') % y label
axis([-2.5 10 -10 8 -30 40])
axis normal
grid on

f6 = figure ;
for i = 1:length(Xt_0(1,:))

    [ t , Xt ] = RK4( @(t,X) Nonlinear_system(K,X) , [0 t_final], Xt_0(:,i) ,dt) ;
    x1t_c = Xt(:,1) ; x2t_c = Xt(:,2) ; x3t_c = Xt(:,3) ;

```

```

    for k = 1 : length(t)
        Phi_t(:,k) = [ x1t_c(k) ; -x1t_c(k)+x2t_c(k)-x3t_c(k) ;
2*x1t_c(k)-2*x2t_c(k)+x3t_c(k)-x1t_c(k)*x3t_c(k)] ;
        u_alpha_t(k) =
(-3*x1t_c(k)+4*x2t_c(k)-2*x3t_c(k)+3*x1t_c(k)*x3t_c(k)-x2t_c(k)*x3t_c(k)+x1t_c(k)^2+x3t_c(k)^2)/(x1t_c
(k)+1) ;
        u_beta_t(k) = -1/(x1t_c(k)+1) ;
        u_c_t(k) = -u_beta_t(k)*K*Phi_t(:,k) + u_alpha_t(k) ;
    end

p3(i) = plot(t,u_c_t,'Color',Cm1(i,:), 'LineWidth',LW1) ; hold on
end
hs2(3)=legend([p3(1),p3(2),p3(3),p3(4),p3(5),p3(6),p3(7),p3(8),p3(9),p3(10)],...
{'$\mathbf{x}(0)=(9,6,3)', '$\mathbf{x}(0)=(8,6,4)', '$\mathbf{x}(0)=(5.5,2,-6)',...
'$\mathbf{x}(0)=(4,1,-4)', '$\mathbf{x}(0)=(3,-3,-5)', '$\mathbf{x}(0)=(2,5,2.5)',...
'$\mathbf{x}(0)=(7,8,4)', '$\mathbf{x}(0)=(1,-2,-3)', '$\mathbf{x}(0)=(-0.5,3,4)',...
'$\mathbf{x}(0)=(4,7,3.5)'} , 'Interpreter', 'latex');
ax2(3) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('Control Input $u(\mathbf{x})$', 'Interpreter', 'Latex') % y label
axis([0 8 -30 48])
axis normal
grid on

for i = 1:length(ax2)
    set(ax2(i), 'FontSize', FS1, 'FontName', 'Times New Roman')
end

for i = 1:length(hs2)
    set(hs2(i), 'FontSize', FS_lg, 'FontName', 'Times New Roman')
end

%% Plot 3
Cm1 = [0,0.15,0.39; 0,0.3,0.8 ; 0,0.39,0.7 ; 0,0.47,0.51 ; 0,0.47,0.39 ; 0,0.55,0.35 ; 0,0.63,0.35 ; 0,0.75,0.6 ;
0,0.85,0.5 ; 0,0.95,0.4] ;
f7 = figure ;
for i = 1:length(Xt_0(1,:))
    [ t , Xt ] = RK4( @(t,X) Nonlinear_system(K,X) , [0 t_final], Xt_0(:,i) ,dt) ;

```

```

x1t_c = Xt(:,1) ; x2t_c = Xt(:,2) ; x3t_c = Xt(:,3) ;

p4(i) = plot(x1t_c,x2t_c,'Color',Cm1(i,:), 'LineWidth',LW1) ; hold on ;
plot(x1t_c(1),x2t_c(1),'o','Color',Cm1(i,:), 'LineWidth',LW1) ;

end
plot([-5 10],[0 0], '--','Color',[0.5 0.5 0.5], 'LineWidth',LW2) ;
plot([0 0],[-10 15], '--','Color',[0.5 0.5 0.5], 'LineWidth',LW2) ;

ax3(1) = gca ;
xlabel('$x_1$', 'Interpreter','Latex') % x label
ylabel('$x_2$', 'Interpreter','Latex') % y label
axis([-2 10 -7 15])
axis square
grid on

f8 = figure ;
for i = 1:length(Xt_0(1,:))
    [ t , Xt ] = RK4( @(t,X) Nonlinear_system(K,X) , [0 t_final], Xt_0(i,:),dt) ;
    x1t_c = Xt(:,1) ; x2t_c = Xt(:,2) ; x3t_c = Xt(:,3) ;

    p5(i) = plot(x2t_c,x3t_c,'Color',Cm1(i,:), 'LineWidth',LW1) ; hold on ;
    plot(x2t_c(1),x3t_c(1),'o','Color',Cm1(i,:), 'LineWidth',LW1) ;

end
plot([-10 15],[0 0], '--','Color',[0.5 0.5 0.5], 'LineWidth',LW2) ;
plot([0 0],[-10 7], '--','Color',[0.5 0.5 0.5], 'LineWidth',LW2) ;

ax3(2) = gca ;
xlabel('$x_2$', 'Interpreter','Latex') % x label
ylabel('$x_3$', 'Interpreter','Latex') % y label
axis([-9 15 -8 7])
axis square
grid on

f9 = figure ;
for i = 1:length(Xt_0(1,:))

```



```

[ t , Xt ] = RK4( @(t,X) Nonlinear_system(K,X) , [0 t_final], Xt_0(:,i) ,dt) ;
x1t_c = Xt(:,1) ; x2t_c = Xt(:,2) ; x3t_c = Xt(:,3) ;

p6(i) = plot(x1t_c,x3t_c,'Color',Cm1(i,:), 'LineWidth',LW1) ; hold on ;
plot(x1t_c(1),x3t_c(1),'o','Color',Cm1(i,:), 'LineWidth',LW1) ;

end

plot([-10 15],[0 0], '--','Color',[0.5 0.5 0.5], 'LineWidth',LW2) ;
plot([0 0],[-10 7], '--','Color',[0.5 0.5 0.5], 'LineWidth',LW2) ;

ax3(3) = gca ;
xlabel('$x_1$', 'Interpreter','Latex') % x label
ylabel('$x_3$', 'Interpreter','Latex') % y label
axis([-4 12 -8 7])
axis square
grid on

f10 = figure ;
for i = 1:length(Xt_0(1,:))

[ t , Zt ] = RK4( @(t,Z) Linear_system(K,Ac,Bc,Z) , [0 t_final], Zt_0(:,i) ,dt) ;
z1t_c = Zt(:,1) ; z2t_c = Zt(:,2) ; z3t_c = Zt(:,3) ;

p7(i) = plot(z1t_c,z2t_c,'Color',Cm1(i,:), 'LineWidth',LW1) ; hold on ;
plot(z1t_c(1),z2t_c(1),'o','Color',Cm1(i,:), 'LineWidth',LW1) ;

end

plot([-4 10],[0 0], '--','Color',[0.5 0.5 0.5], 'LineWidth',LW2) ;
plot([0 0],[-10 9], '--','Color',[0.5 0.5 0.5], 'LineWidth',LW2) ;

ax3(4) = gca ;
xlabel('$z_1$', 'Interpreter','Latex') % x label
ylabel('$z_2$', 'Interpreter','Latex') % y label
axis([-2.5 10 -10 8])
axis square
grid on

f11 = figure ;

```

```

for i = 1:length(Xt_0(1,:))

    [ t , Zt ] = RK4( @(t,Z) Linear_system(K,Ac,Bc,Z) , [0 t_final], Zt_0(:,i) ,dt) ;
    z1t_c = Zt(:,1) ; z2t_c = Zt(:,2) ; z3t_c = Zt(:,3) ;

    p8(i) = plot(z1t_c,z3t_c,'Color',Cm1(i,:), 'LineWidth',LW1) ; hold on ;
    plot(z1t_c(1),z3t_c(1),'o','Color',Cm1(i,:), 'LineWidth',LW1) ;

end

plot([-4 10],[0 0], '--','Color',[0.5 0.5 0.5], 'LineWidth',LW2) ;
plot([0 0],[-30 40], '--','Color',[0.5 0.5 0.5], 'LineWidth',LW2) ;

ax3(5) = gca ;
xlabel('$z_1$', 'Interpreter','Latex') % x label
ylabel('$z_3$', 'Interpreter','Latex') % y label
axis([-2.5 10 -30 40])
axis square
grid on

f12 = figure ;
for i = 1:length(Xt_0(1,:))

    [ t , Zt ] = RK4( @(t,Z) Linear_system(K,Ac,Bc,Z) , [0 t_final], Zt_0(:,i) ,dt) ;
    z1t_c = Zt(:,1) ; z2t_c = Zt(:,2) ; z3t_c = Zt(:,3) ;

    p9(i) = plot(z2t_c,z3t_c,'Color',Cm1(i,:), 'LineWidth',LW1) ; hold on ;
    plot(z2t_c(1),z3t_c(1),'o','Color',Cm1(i,:), 'LineWidth',LW1) ;

end

plot([-12 8],[0 0], '--','Color',[0.5 0.5 0.5], 'LineWidth',LW2) ;
plot([0 0],[-32 42], '--','Color',[0.5 0.5 0.5], 'LineWidth',LW2) ;

ax3(6) = gca ;
xlabel('$z_2$', 'Interpreter','Latex') % x label
ylabel('$z_3$', 'Interpreter','Latex') % y label
axis([-12 8 -32 42])
axis square
grid on

```

```

for i = 1:length(ax3)
    set(ax3(i),'FontSize',FS1,'FontName','Times New Roman')
    RemovePlotWhiteArea(ax3(i)) ;
end

%% Nonlinear System Function
function dX = Nonlinear_system(K,X)
x1 = X(1) ; x2 = X(2) ; x3 = X(3) ;

Phi = [ x1 ; -x1+x2-x3 ; 2*x1-2*x2+x3-x1*x3] ;
alpha = (-3*x1+4*x2-2*x3+3*x1*x3-x2*x3+x1^2+x3^2)/(x1+1) ;
beta = -1/(x1+1) ;
u = -beta*K*Phi + alpha ; % Control Input

dx1 = -x1 + x2 - x3 ;
dx2 = -x1*x3 - x2 + u ;
dx3 = -x1 + u ;
dX = [ dx1 ; dx2 ; dx3 ] ;
end

%% Linear System Function
function dZ = Linear_system(K,Ac,Bc,Z)
v = -K*Z ; % Cotrol Input
dZ = Ac*Z + Bc*v ;
end

```

### 第一題 - (c)

```

%% Nonlinear Control HW6 - Q1 - (c)
clear ; clc ; close all
dt = 0.01 ; t_final = 6 ;
t = 0 : dt : t_final ;
x1_0 = 2 ; % Initial of x1
x2_0 = 2 ; % Initial of x2
x3_0 = 2 ; % Initial of x3
X0 = [ x1_0 ; x2_0 ; x3_0 ] ;

%%%%%%%% 10 arbitrary initial state values %%%%%%%%%

```

```

xt1 = [9 ; 6 ; 3] ; xt2 = [8 ; 6 ; 4] ; xt3 = [5.5 ; 2 ; -6] ; xt4 = [4 ; 1 ; -4] ; xt5 = [3 ; -3 ; -5] ;
xt6 = [2 ; 5 ; 2.5] ; xt7 = [7 ; 8 ; 4] ; xt8 = [1 ; -2 ; -3] ; xt9 = [-0.5 ; 3 ; 4] ; xt10 = [4 ; 7 ; 3.5] ;
Xt_0 = [ xt1 , xt2 , xt3 , xt4 , xt5 , xt6 , xt7 , xt8 , xt9 , xt10 ] ;

%% linear System
Z0 = [ x1_0 ; -x1_0+x2_0-x3_0 ; 2*x1_0-2*x2_0+x3_0-x1_0*x3_0 ] ; % Initial of transformation states Z
Ac = [ 0 1 0 ; 0 0 1 ; 0 0 0 ] ; % Linear system matrix
Bc = [ 0 ; 0 ; 1 ] ; % Linear system input matrix
lambda = [-2,-2,-2] ; % Poles of closed loop system
K = acker(Ac,Bc,lambda) ; % Output feedback control gain

%%%%%%%%%% 10 arbitrary initial state values %%%%%%%%%%%
for i = 1:10
    Zt_0(:,i) = [ Xt_0(1,i) ; -Xt_0(1,i)+Xt_0(2,i)-Xt_0(3,i) ;
    2*Xt_0(1,i)-2*Xt_0(2,i)+Xt_0(3,i)-Xt_0(1,i)*Xt_0(3,i) ] ;
end

%% Plot 1
LW1 = 1.6 ;
LW2 = 1 ;
FS1 = 16 ;
FS_lg = 18 ;

[ t , X ] = RK4( @(t,X) Nonlinear_system(K,X) , [0 t_final], X0 ,dt) ;
x1_c = X(:,1) ; x2_c = X(:,2) ; x3_c = X(:,3) ;
for i = 1 : length(t)
    Phi(:,i) = [ x1_c(i) ; -x1_c(i)+x2_c(i)-x3_c(i) ; 2*x1_c(i)-2*x2_c(i)+x3_c(i)-x1_c(i)*x3_c(i) ] ;
    u_alpha(i) =
    (-3*x1_c(i)+4*x2_c(i)-2*x3_c(i)+3*x1_c(i)*x3_c(i)-x2_c(i)*x3_c(i)+x1_c(i)^2+x3_c(i)^2)/(x1_c(i)+1) ;
    u_beta(i) = -1/(x1_c(i)+1) ;
    u_c(i) = -u_beta(i)*K*Phi(:,i) + u_alpha(i) ;
end

[ t , Z ] = RK4( @(t,Z) Linear_system(K,Ac,Bc,Z) , [0 t_final], Z0 ,dt) ;
z1_c = Z(:,1) ; z2_c = Z(:,2) ; z3_c = Z(:,3) ;

f1 = figure ;
plot(t,x1_c,'-', 'Color',[0 0.2 0.7], 'LineWidth',LW1) ; hold on ;
plot(t,x2_c,'--', 'Color',[0 0.65 0.2], 'LineWidth',LW1) ;

```

```

plot(t,x3_c,'-','Color',[0 0.6 0.7],'LineWidth',LW1) ;
plot(t,2*exp(-2*t),'r','LineWidth',LW1+0.2) ;
hs1(1)=legend({'$x_1(t)$','$x_2(t)$','$x_3(t)$'},'Interpreter','latex');
hs1(1)=legend({'$x_1(t)$','$x_2(t)$','$x_3(t)$','$2e^{-2t}$'},'Interpreter','latex');
ax1(1) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('States $\mathbf{x}(t)$','Interpreter','Latex') % y label
axis([0 t_final -1 2.5])
axis square
grid on

f2 = figure ;
plot(t,z1_c,'-','Color',[0 0.2 0.7],'LineWidth',LW1) ; hold on ;
plot(t,z2_c,'--','Color',[0 0.65 0.2],'LineWidth',LW1) ;
plot(t,z3_c,'-','Color',[0 0.6 0.7],'LineWidth',LW1) ;
plot(t,2*exp(-2*t),'r','LineWidth',LW1+0.2) ;
plot(t,-2*exp(-2*t),'r','LineWidth',LW1+0.2)
hs1(2)=legend({'$z_1(t)$','$z_2(t)$','$z_3(t)$'},'Interpreter','latex');
hs1(2)=legend({'$z_1(t)$','$z_2(t)$','$z_3(t)$','$pm2e^{-2t}$'},'Interpreter','latex');
ax1(2) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('States $\mathbf{z}(t)$','Interpreter','Latex') % y label
axis([0 t_final -3 3])
axis square
grid on

f3 = figure ;
plot(t,u_c,'b','LineWidth',LW1)
ax1(3) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('Control Input $u(\mathbf{x})$','Interpreter','Latex') % y label
axis normal
grid on

for i = 1:length(ax1)
    set(ax1(i),'FontSize',FS1,'FontName','Times New Roman')
end

```

```

for i = 1:length(hs1)
    set(hs1(i),'FontSize',FS_lg,'FontName','Times New Roman')
end

%% Plot 2
Cm1 = [0,0.15,0.39; 0,0.3,0.8 ; 0,0.39,0.7 ; 0,0.47,0.51 ; 0,0.47,0.39 ; 0,0.55,0.35 ; 0,0.63,0.35 ; 0,0.75,0.6 ;
0,0.85,0.5 ; 0,0.95,0.4] ;
f4 = figure ;
for i = 1:length(Xt_0(1,:))
    [ t , Xt ] = RK4( @(t,X) Nonlinear_system(K,X) , [0 t_final], Xt_0(:,i),dt) ;
    x1t_c = Xt(:,1) ; x2t_c = Xt(:,2) ; x3t_c = Xt(:,3) ;

    plot(t,x1t_c,'Color',Cm1(i,:),'LineWidth',LW1) ; hold on ;
end
ax2(1) = gca ;
hs2(1)=legend({'$x_1(0)=9','$x_1(0)=8','$x_1(0)=5.5',...
               '$x_1(0)=4','$x_1(0)=3','$x_1(0)=2',...
               '$x_1(0)=7','$x_1(0)=1','$x_1(0)=-0.5',...
               '$x_1(0)=4'},'Interpreter','latex');
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('State $x_1(t)$','Interpreter','Latex') % y label
axis([ 0 t_final -3 12 ])
axis square
grid on

f5 = figure ;
for i = 1:length(Xt_0(1,:))
    [ t , Xt ] = RK4( @(t,X) Nonlinear_system(K,X) , [0 t_final], Xt_0(:,i),dt) ;
    x1t_c = Xt(:,1) ; x2t_c = Xt(:,2) ; x3t_c = Xt(:,3) ;

    plot(t,x2t_c,'Color',Cm1(i,:),'LineWidth',LW1) ; hold on ;
end
ax2(2) = gca ;
hs2(2)=legend({'$x_2(0)=6','$x_2(0)=6','$x_2(0)=2',...
               '$x_2(0)=1','$x_2(0)=-3','$x_2(0)=5',...
               '$x_2(0)=8','$x_2(0)=-2','$x_2(0)=3',...
               '$x_2(0)=7'},'Interpreter','latex');
xlabel('Time (sec)') % x label

```

```

ylabel('State  $x_2(t)$ ',Interpreter,'Latex') % y label
axis([ 0 t_final -7 17 ])
axis square
grid on

f6 = figure ;
for i = 1:length(Xt_0(1,:))
    [ t , Xt ] = RK4( @(t,X) Nonlinear_system(K,X) , [0 t_final], Xt_0(:,i) ,dt) ;
    x1t_c = Xt(:,1) ; x2t_c = Xt(:,2) ; x3t_c = Xt(:,3) ;

    plot(t,x3t_c,'Color',Cm1(i,:), 'LineWidth',LW1) ; hold on ;
end
ax2(3) = gca ;
hs2(3)=legend({' $x_3(0)=3$ ', ' $x_3(0)=4$ ', ' $x_3(0)=-6$ ',...
               ' $x_3(0)=-4$ ', ' $x_3(0)=-5$ ', ' $x_3(0)=5$ ',...
               ' $x_3(0)=4$ ', ' $x_3(0)=-3$ ', ' $x_3(0)=4$ ',...
               ' $x_3(0)=3.5$ '},Interpreter,'latex');
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('State  $x_3(t)$ ',Interpreter,'Latex') % y label
axis([ 0 t_final -11 5 ])
axis square
grid on

f7 = figure ;
for i = 1:length(Xt_0(1,:))
    [ t , Zt ] = RK4( @(t,Z) Linear_system(K,Ac,Bc,Z) , [0 t_final], Zt_0(:,i) ,dt) ;
    z1t_c = Zt(:,1) ; z2t_c = Zt(:,2) ; z3t_c = Zt(:,3) ;
    plot(t,z1t_c,'Color',Cm1(i,:), 'LineWidth',LW1) ; hold on ;

end
ax2(4) = gca ;
hs2(4)=legend({' $z_1(0)=9$ ', ' $z_1(0)=8$ ', ' $z_1(0)=5.5$ ',...
               ' $z_1(0)=4$ ', ' $z_1(0)=3$ ', ' $z_1(0)=2$ ',...
               ' $z_1(0)=7$ ', ' $z_1(0)=1$ ', ' $z_1(0)=-0.5$ ',...
               ' $z_1(0)=4$ '},Interpreter,'latex');
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('State  $z_1(t)$ ',Interpreter,'Latex') % y label

```

```

axis([ 0 t_final -2.5 12 ])
axis square
grid on

f8 = figure ;
for i = 1:length(Xt_0(1,:))
    [ t , Zt ] = RK4( @(t,Z) Linear_system(K,Ac,Bc,Z) , [0 t_final], Zt_0(:,i) ,dt) ;
    z1t_c = Zt(:,1) ; z2t_c = Zt(:,2) ; z3t_c = Zt(:,3) ;
    plot(t,z2t_c,'Color',Cm1(i,:), 'LineWidth',LW1) ; hold on ;

end

ax2(5) = gca ;
hs2(5)=legend({'$z_2(0)=-6','$z_2(0)=-6','$z_2(0)=2.5',...
              '$z_2(0)=1','$z_2(0)=-1','$z_2(0)=0.5',...
              '$z_2(0)=-3','$z_2(0)=0','$z_2(0)=-0.5',...
              '$z_2(0)=-0.5'}, 'Interpreter','latex');

xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('State $z_2(t)$','Interpreter','Latex') % y label
axis([ 0 t_final -14 6 ])
axis square
grid on

f9 = figure ;
for i = 1:length(Xt_0(1,:))
    [ t , Zt ] = RK4( @(t,Z) Linear_system(K,Ac,Bc,Z) , [0 t_final], Zt_0(:,i) ,dt) ;
    z1t_c = Zt(:,1) ; z2t_c = Zt(:,2) ; z3t_c = Zt(:,3) ;
    plot(t,z3t_c,'Color',Cm1(i,:), 'LineWidth',LW1) ; hold on ;

end

ax2(6) = gca ;
hs2(6)=legend({'$z_3(0)=-18','$z_3(0)=-24','$z_3(0)=34',...
              '$z_3(0)=18','$z_3(0)=22','$z_3(0)=-8.5',...
              '$z_3(0)=-26','$z_3(0)=6','$z_3(0)=-1',...
              '$z_3(0)=-16.5'}, 'Interpreter','latex');

xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('State $z_3(t)$','Interpreter','Latex') % y label
axis([ 0 t_final -30 60 ])
axis square

```



```

grid on

for i = 1:length(ax2)
    set(ax2(i),'FontSize',FS1,'FontName','Times New Roman')
end

for i = 1:length(hs2)
    set(hs2(i),'FontSize',FS_lg-6,'FontName','Times New Roman')
end

%% Plot 3
[ t , X ] = RK4( @(t,X) Nonlinear_system(K,X) , [0 t_final], X0 ,dt) ;
x1_c = X(:,1) ; x2_c = X(:,2) ; x3_c = X(:,3) ;

[ t , Z ] = RK4( @(t,Z) Linear_system(K,Ac,Bc,Z) , [0 t_final], Z0 ,dt) ;
z1_c = Z(:,1) ; z2_c = Z(:,2) ; z3_c = Z(:,3) ;

f10 = figure ;
plot(t,x1_c,'-','Color',[0 0.2 0.7],'LineWidth',LW1) ; hold on ;
plot(t,x2_c,'--','Color',[0 0.65 0.2],'LineWidth',LW1) ;
plot(t,x3_c,'-','Color',[0 0.6 0.7],'LineWidth',LW1) ;
plot(t,z1_c,'-','Color',[0.69 0.15 0.15],'LineWidth',LW1) ; hold on ;
plot(t,z2_c,'--','Color',[1 0.5 0],'LineWidth',LW1) ;
plot(t,z3_c,'-','Color',[1 0 0.6],'LineWidth',LW1) ;
hs3(1)=legend({'$x_1(t)$','$x_2(t)$','$x_3(t)$','$z_1(t)$','$z_2(t)$','$z_3(t)$'},'Interpreter','latex');
ax3(1) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('States    $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{z}(t)$','Interpreter','Latex') % y label
axis([0 t_final -2.5 2.5])
axis square
grid on

for i = 1:length(ax3)
    set(ax3(i),'FontSize',FS1,'FontName','Times New Roman')
    RemovePlotWhiteArea(ax3(i)) ;
end

for i = 1:length(hs3)

```

```

        set(hs3(i),'FontSize',FS_lg,'FontName','Times New Roman')
    end

```

```

%% Nonlinear System Function

```

```

function dX = Nonlinear_system(K,X)

```

```

x1 = X(1) ; x2 = X(2) ; x3 = X(3) ;

```

```

Phi = [ x1 ; -x1+x2-x3 ; 2*x1-2*x2+x3-x1*x3] ;

```

```

alpha = (-3*x1+4*x2-2*x3+3*x1*x3-x2*x3+x1^2+x3^2)/(x1+1) ;

```

```

beta = -1/(x1+1) ;

```

```

u = -beta*K*Phi + alpha ; % Control Input

```

```

dx1 = -x1 + x2 - x3 ;

```

```

dx2 = -x1*x3 - x2 + u ;

```

```

dx3 = -x1 + u ;

```

```

dX = [ dx1 ; dx2 ; dx3 ] ;

```

```

end

```

```

%% Linear System Function

```

```

function dZ = Linear_system(K,Ac,Bc,Z)

```

```

v = -K*Z ; % Cotrol Input

```

```

dZ = Ac*Z + Bc*v ;

```

```

end

```

### 第一題 - (d)

```

%% Nonlinear Control HW6 - Q1 - (d)

```

```

clear ; clc ; close all

```

```

dt = 0.01 ; t_final = 6 ;

```

```

t = 0 : dt : t_final ;

```

```

x1_0 = -0.8 ; % Initial of x1

```

```

x2_0 = 1.5 ; % Initial of x2

```

```

x3_0 = 1 ; % Initial of x3

```

```

X0 = [ x1_0 ; x2_0 ; x3_0 ] ;

```

```

%% linear System

```

```

Z01 = [ x1_0 ; -x1_0+x2_0-x3_0 ; 2*x1_0-2*x2_0+x3_0-x1_0*x3_0] ; % Initial of transformation states Z

```

```

Z02 = [ x1_0+x1_0^2 ;...

```

```

        -x1_0+x2_0-x3_0-2*x1_0^2+2*x1_0*x2_0-2*x1_0*x3_0 ;...

```

```

(-1-4*x1_0+2*x2_0-2*x3_0)*(-x1_0+x2_0-x3_0)+(1+2*x1_0)*(-x1_0*x3_0-x2_0)+(1+2*x1_0)*x1_0]; %
Initial of transformation states Z
Ac = [ 0 1 0 ; 0 0 1 ; 0 0 0 ] ; % Linear system matrix
Bc = [ 0 ; 0 ; 1 ] ; % Linear system input matrix
lambda = [-2,-2,-2] ; % Poles of closed loop system
K = acker(Ac,Bc,lambda) ; % Output feedback control gain

%% Plot 1
LW1 = 1.6 ;
LW2 = 1 ;
FS1 = 16 ;
FS_lg = 18 ;

[ t , X1 ] = RK4( @(t,X) Nonlinear_system1(K,X) , [0 t_final], X0 ,dt) ;
x1_c1 = X1(:,1) ; x2_c1 = X1(:,2) ; x3_c1 = X1(:,3) ;
for i = 1 : length(t)
    Phi1(:,i) = [ x1_c1(i) ; -x1_c1(i)+x2_c1(i)-x3_c1(i) ; 2*x1_c1(i)-2*x2_c1(i)+x3_c1(i)-x1_c1(i)*x3_c1(i) ] ;
    u_alpha1(i) =
        (-3*x1_c1(i)+4*x2_c1(i)-2*x3_c1(i)+3*x1_c1(i)*x3_c1(i)-x2_c1(i)*x3_c1(i)+x1_c1(i)^2+x3_c1(i)^2)/(x1_c1(i)+1) ;
    u_beta1(i) = -1/(x1_c1(i)+1) ;
    u_c1(i) = -u_beta1(i)*K*Phi1(:,i) + u_alpha1(i) ;
end
[ t , Z1 ] = RK4( @(t,Z) Linear_system1(K,Ac,Bc,Z) , [0 t_final], Z01 ,dt) ;
z1_c1 = Z1(:,1) ; z2_c1 = Z1(:,2) ; z3_c1 = Z1(:,3) ;

[ t , X2 ] = RK4( @(t,X) Nonlinear_system2(K,X) , [0 t_final], X0 ,dt) ;
x1_c2 = X2(:,1) ; x2_c2 = X2(:,2) ; x3_c2 = X2(:,3) ;
for i = 1 : length(t)
    Phi2(:,i) = [ x1_c2(i)+x1_c2(i)^2 ; ...
        -x1_c2(i)+x2_c2(i)-x3_c2(i)-2*x1_c2(i)^2+2*x1_c2(i)*x2_c2(i)-2*x1_c2(i)*x3_c2(i) ; ...
        (-1-4*x1_c2(i)+2*x2_c2(i)-2*x3_c2(i))*(-x1_c2(i)+x2_c2(i)-x3_c2(i))+(1+2*x1_c2(i))*(-x1_c2(i)*x3_c2(i)-x2_c2(i))+
        (1+2*x1_c2(i))*x1_c2(i) ] ;
    u_alpha2(i) =
        ((12*x1_c2(i)-8*x2_c2(i)+5*x3_c2(i)-4*x1_c2(i)*x3_c2(i)+1)*(-x1_c2(i)+x2_c2(i)-x3_c2(i))-...

```

```

(-8*x1_c2(i)+4*x2_c2(i)-4*x3_c2(i)-2)*(x1_c2(i)*x3_c2(i)+x2_c2(i))-...

(5*x1_c2(i)-4*x2_c2(i)+4*x3_c2(i)-2*x1_c2(i)^2+1)*x1_c2(i)/((2*x1_c2(i)+1)*(x1_c2(i)+1));
u_beta2(i) = -1/((2*x1_c2(i)+1)*(x1_c2(i)+1));

u_c2(i) = -u_beta2(i)*K*Phi2(:,i) + u_alpha2(i);
end

[ t , Z2 ] = RK4( @(t,Z) Linear_system2(K,Ac,Bc,Z) , [0 t_final], Z02 ,dt);
z1_c2 = Z2(:,1); z2_c2 = Z2(:,2); z3_c2 = Z2(:,3);

f1 = figure ;
plot(t,x1_c1,'-', 'Color',[0 0.2 0.7], 'LineWidth',LW1) ; hold on ;
plot(t,x2_c1,'--', 'Color',[0 0.65 0.2], 'LineWidth',LW1) ;
plot(t,x3_c1,'-.', 'Color',[0 0.6 0.7], 'LineWidth',LW1) ;
hsl(1)=legend({'$x_1(t)$','$x_2(t)$','$x_3(t)$'}, 'Interpreter','latex');
ax1(1) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('States $\mathbf{x}(t)$', 'Interpreter','Latex') % y label
% axis([0 t_final -1 2.5])
axis square
grid on

f2 = figure ;
plot(t,u_c1,'b', 'LineWidth',LW1)
ax1(2) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('Control Input $u(\mathbf{x})$', 'Interpreter','Latex') % y label
axis normal
grid on

f3 = figure ;
plot(t,z1_c1,'-', 'Color',[0 0.2 0.7], 'LineWidth',LW1) ; hold on ;
plot(t,z2_c1,'--', 'Color',[0 0.65 0.2], 'LineWidth',LW1) ;
plot(t,z3_c1,'-.', 'Color',[0 0.6 0.7], 'LineWidth',LW1) ;
hsl(2)=legend({'$z_1(t)$','$z_2(t)$','$z_3(t)$'}, 'Interpreter','latex');
ax1(3) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label

```

```

ylabel('States   $\mathbf{z}(t)$','Interpreter','Latex') % y label
% axis([0 t_final -3 3])
axis square
grid on

f4 = figure ;
plot(t,x1_c2,'-','Color',[0 0.2 0.7],'LineWidth',LW1) ; hold on ;
plot(t,x2_c2,'--','Color',[0 0.65 0.2],'LineWidth',LW1) ;
plot(t,x3_c2,'-','Color',[0 0.6 0.7],'LineWidth',LW1) ;
hs1(3)=legend({'$x_1(t)$','$x_2(t)$','$x_3(t)$'},'Interpreter','latex');
ax1(4) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('States   $\mathbf{x}(t)$','Interpreter','Latex') % y label
% axis([0 t_final -1 2.5])
axis square
grid on

f5 = figure ;
plot(t,u_c2,'b','LineWidth',LW1)
ax1(5) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('Control Input $u(\mathbf{x})$','Interpreter','Latex') % y label
axis normal
grid on

f6 = figure ;
plot(t,z1_c2,'-','Color',[0 0.2 0.7],'LineWidth',LW1) ; hold on ;
plot(t,z2_c2,'--','Color',[0 0.65 0.2],'LineWidth',LW1) ;
plot(t,z3_c2,'-','Color',[0 0.6 0.7],'LineWidth',LW1) ;
hs1(4)=legend({'$z_1(t)$','$z_2(t)$','$z_3(t)$'},'Interpreter','latex');
ax1(6) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('States   $\mathbf{z}(t)$','Interpreter','Latex') % y label
% axis([0 t_final -3 3])
axis square
grid on

f7 = figure ;

```

```

plot(t,u_c1,'Color',[0 0.2 0.7],'LineWidth',LW1) ; hold on
plot(t,u_c2,'--','Color',[0.9 0.04 0],'LineWidth',LW1)
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('Control Input $u(\mathbf{x})$', 'Interpreter','Latex') % y label
% axis([0 t_final -1 2])
hs1(5)=legend({'$\phi_1 = x_1$', '$\phi_1 = x_1^2 + x_1$'}, 'Interpreter','latex');
ax1(7) = gca ;
axis normal
grid on

for i = 1:length(ax1)
    set(ax1(i),'FontSize',FS1,'FontName','Times New Roman')
end

for i = 1:length(hs1)
    set(hs1(i),'FontSize',FS_lg,'FontName','Times New Roman')
end

f8 = figure ;
set(f8,'Position',[680,190,593,788])
subplot(3,1,1)
plot(t,x1_c1,'-', 'Color',[0 0.2 0.7],'LineWidth',LW1+0.15) ; hold on ;
plot(t,x1_c2,'--','Color',[0.9 0.04 0],'LineWidth',LW1+0.15) ;
hs2(1)=legend({'$\phi_1 = x_1$', '$\phi_1 = x_1^2 + x_1$'}, 'Interpreter','latex');
ax2(1) = gca ;
axis([0 t_final -1.2 0.2])
set(ax2(1),'Position',[0.1230 , 0.72 , 0.8088 , 0.2426])
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('$x_1(t)$', 'Interpreter','Latex') % y label
grid on

subplot(3,1,2)
plot(t,x2_c1,'-', 'Color',[0 0.2 0.7],'LineWidth',LW1+0.15) ; hold on ;
plot(t,x2_c2,'--','Color',[0.9 0.04 0],'LineWidth',LW1+0.15) ;
hs2(2)=legend({'$\phi_1 = x_1$', '$\phi_1 = x_1^2 + x_1$'}, 'Interpreter','latex');
ax2(2) = gca ;
axis([0 t_final -5 25])
set(ax2(2),'Position',[0.1230 , 0.4 , 0.8088 , 0.2426])

```

```

xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('$x_2(t)$','Interpreter','Latex') % y label
grid on

subplot(3,1,3)
plot(t,x3_c1,'-','Color',[0 0.2 0.7],'LineWidth',LW1+0.15) ; hold on ;
plot(t,x3_c2,'--','Color',[0.9 0.04 0],'LineWidth',LW1+0.15) ;
hs2(3)=legend({'$\phi_1 = x_1$','$\phi_1 = x_1^2 + x_1$'},'Interpreter','latex');
ax2(3) = gca ;
axis([0 t_final -5 25])
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('$x_3(t)$','Interpreter','Latex') % y label
set(ax2(3),'Position',[0.1230 , 0.08 , 0.8088 , 0.2426])
grid on

for i = 1:length(ax2)
    set(ax2(i),'FontSize',FS1,'FontName','Times New Roman')
end

for i = 1:length(hs2)
    set(hs2(i),'FontSize',16,'FontName','Times New Roman')
end

%% Nonlinear System Function
function dX = Nonlinear_system1(K,X)
x1 = X(1) ; x2 = X(2) ; x3 = X(3) ;

Phi = [ x1 ; -x1+x2-x3 ; 2*x1-2*x2+x3-x1*x3] ;
alpha = (-3*x1+4*x2-2*x3+3*x1*x3-x2*x3+x1^2+x3^2)/(x1+1) ;
beta = -1/(x1+1) ;
u = -beta*K*Phi + alpha ; % Control Input

dx1 = -x1 + x2 - x3 ;
dx2 = -x1*x3 - x2 + u ;
dx3 = -x1 + u ;
dX = [ dx1 ; dx2 ; dx3 ] ;
end

function dX = Nonlinear_system2(K,X)

```

```

x1 = X(1) ; x2 = X(2) ; x3 = X(3) ;

Phi = [ x1+x1^2 ;...
        -x1+x2-x3-2*x1^2+2*x1*x2-2*x1*x3 ;...
        (-1-4*x1+2*x2-2*x3)*(-x1+x2-x3)+(1+2*x1)*(-x1*x3-x2)+(1+2*x1)*x1] ;

alpha =
((12*x1-8*x2+5*x3-4*x1*x3+1)*(-x1+x2-x3)-(-8*x1+4*x2-4*x3-2)*(x1*x3+x2)-(5*x1-4*x2+4*x3-2*x1^2
+1)*x1)/((2*x1+1)*(x1+1)) ;
beta = -1/((2*x1+1)*(x1+1)) ;
u = -beta*K*Phi + alpha ; % Control Input

dx1 = -x1 + x2 - x3 ;
dx2 = -x1*x3 - x2 + u ;
dx3 = -x1 + u ;
dX = [ dx1 ; dx2 ; dx3 ] ;
end

%% Linear System Function
function dZ = Linear_system1(K,Ac,Bc,Z)
v = -K*Z ; % Cotrol Input
dZ = Ac*Z + Bc*v ;
end

function dZ = Linear_system2(K,Ac,Bc,Z)
v = -K*Z ; % Cotrol Input
dZ = Ac*Z + Bc*v ;
end

```