

序言 --- 回『家』

非線性系統中的『家』被稱為平衡點(equilibrium point)，這些家有些是穩定的，有些則是不穩定的。穩定的家建築在山谷的最低處，重力位能會自動帶我們回家，此時回家是必然，不須人為控制力量的介入。不穩定的家建築在山頂的最高處，稍不小心即會滾落山坡，離家越來越遠，此時回家需要有工具的協助及策略的運用。非線性系統是一門分析人與『家』關係的學問，而非線性控制則是在探討回家的方法。如果現在你只有一個家或者是未曾遠離家，則你仍然是處於線性系統的領域，此時回家的工具靠的是線性代數與拉氏轉換(Laplace transfer)。如果現在你有多個家，那麼你已從線性系統進入了非線性系統的領域；如果更進一步，你已是四海為家，進入了『處處無家，處處是家』的境界，則你將是非線性系統的典範。在非線性系統中，線性代數與拉氏轉換已不能適用，我們必須學一些新的方法才能回家。這本書即在介紹非線性系統的『家』，以及回『家』的各種方法。

在生活上，家是一個可以穩定下來休息的地方，在科學上這個地方叫做平衡點。在平衡點附近操作的系統稱為線性系統。平衡點就像是山谷中的村落，四面是高山，村落正位於四周圍最低的地方。村落中的人們日出而作、日落而息，四周圍高聳的山巒迫使人們在一天的工作後，終又回到山谷中的家。依科學上的解釋，山谷中的人們是一個典型的線性系統，像是一個與世隔絕的桃花源，不管偏離平衡點(家)多遠，每天都有回到平衡點(家)的趨勢。直到有一天，有村民越過高山，出了山谷，來到了山外的世界。看到山外更富饒的村落，定居下來而有了第二個家。這個遠離故鄉的村民這次離開了原來的平衡點，不再回去，而進入了另一個新的平衡點，其所表現的行為即是非線性系統。讀者們當你們從線性系統的領域，進入了非線性系統，就像是這位越過高山的村民，遠離了故鄉熟悉的情境，將要面對山谷外不曾見過的奇異的世界。

線性系統假設這個世界只有一個平衡點，一個『家』；家鄉的四周環繞無窮高的山巒，不管攀爬多高，最後仍將盪回山谷中最低的平衡位置。線性系統是一個虛擬的世界，它只是真實世界的一種近似描述。當村民不曾越過高山，山谷中規律的生活確實像是線性系統。越過高山遠離山谷的村民才見識到真實的世界。真實的世界才是非線性系統，它有許多個平衡點，山谷之外另有山谷，高山之外另有高山。相當於線性系統所看到的是某個山谷內的局部特寫，而非線性系統看到的則是峰巒層疊、溝壑相連的 3D 環繞全景。

『家』有二種，一種是穩定的家(穩定的平衡點)，另一種是不穩定、發散的家(不穩定的平衡點)。穩定的家建築在山谷的最低處，受到干擾偏離後，會自動回到原來的位置；不穩定的家建築在山頂的最高處，受到干擾後，則會越離越遠，最後導致發散。由於線性系統只能有一個家，所以這個家的特性代表了整個系統的特性，也就是線性系統的穩定性是全域的：只要是這個家(這個平衡點)是穩定的，則線性系統處處是穩定收斂；只要是這個家是不穩定的，則線性系統處處是發散。所以在線性系統中，只有二種運動趨勢，亦即進入平衡點的收斂運動(穩定的平衡點)與遠離平衡點的發散運動(不穩定的平衡點)。線性系統理論告訴我們，當系統的特徵值或極點落在左半平面，系統的響應收斂到平衡點；當系統的特徵值或極點落在右半平面，系統的響應則發散到無窮大。因此線性系統的響應很單純，不是收斂就是發散。究其原因，就是因為線性系統只有一個『家』(一個平衡點)，離開了家即無處安頓，只好浪跡天涯越跑越遠。

然而非線性系統卻有好多個『家』(多平衡點)，離開了一個家(即對某一平衡點為發散)，卻可進入另外一個家(即對另一個平衡點為收斂)。所以非線性系統的穩定性是區域性的，當其對某一個平衡點為發散時，卻可能對另一區域的平衡點為收斂。所以當非線性系統發散時，大可不必像線性系統一樣去浪跡天涯，它可以找到附近的另一個家去安頓下來。多個家(多個平衡點)是非線性系統的主要特徵，而非線性系統即在分析哪些『家』是穩定的，那些『家』是不穩定的，以及家與家之間如何做連結。

有趣的是非線性系統的『家』不一定是固定的居所，家可能沿著一條固定的軌跡在移動著，這一條『家的移動軌跡』稱為極限圓(limit cycle)。游牧民族逐水草而居，他們的家隨季節而遷徙，到明年的春天，又回到當初遷徙的起點。以一年為週期，游牧民族的家沿著極限圓而移動。不管是固定的居所或是移動的蒙古包，它們終究還具有家的穩定性。然而對於那些無家可歸的人，他們的遷徙行為是如何呢？是收斂、還是發散呢？線性系統預測，無家可歸的人一定是浪跡天涯到無窮遠(亦即發散)，但在真實的非線性世界中，顯然並非如此。遊民雖然居無定所，但卻不會遠離都市，他們似乎是在某一特定的區域中，迂迴漫遊，既不收斂於平衡點，但也不發散。

觀察都市遊民的遷徙行為，我們學習到一種廣義的『家』的定義。這個家的新定義打破了既有的家框架，它既不是固定的點，也非沿著固定的軌跡而移動，而是『處處無家，處處是家』的行為模式。它是一種無特定目標、無特定路線，隨機移動，隨遇而安的行為模式。遊民居無定所的隨機移動行為，看來稀鬆平常，但是科學家直到 20 世紀的 70 年代才知道非線性系統存在著一種如遊民般移動的行為響應。在上一世紀的 70 年代，藉由電腦的協助，科學家發現了非線性方程式的一種特殊的解。這種解既不會收斂到任何的平衡點，不會發散到無窮大，也不會沿固定的軌跡震盪(極限圓)。這種解的行為就像遊民一般，在某一特定區域內，永無止盡地迂迴纏繞，而且走過的地方絕不重複再走。科學家把這種非線性的特殊行為稱作混沌(chaos)。而由混沌軌跡衍生出碎形幾何體(fractal geometry)，也是非線性科學的重大發現。

如前面的介紹，非線性系統的行為比我們想像的複雜，不是單純的收斂與發散二選一的問題；若要進一步去操控非線性系統，則更要有足夠的工具。本書是根據作者多年的授課講義所編撰而成，目的是要提供非線性控制的初學者一些基本的知識與入門的工具。國內有關自動控制的教學大多著重於線性系統，一般讀者若是對非線性系統與控制有興趣，必須直接閱讀專業的原文書籍。但是國外關於非線性系統與控制的書籍大部分是以定理證明為導向，周全了數學的嚴謹性，卻增加了閱讀與應用的困難度。本書希望能提供初學非線性系統的讀者一個友善的閱讀平台，透過觀念的講解，圖形化的解說，理工的應用實例，讓非線性系統與控制的教學或是自學都變得容易。對於非線性系統，我們必須先去分析並了解它，然後再去談論如何操控它。依此理念，本書分成 Part I 和 Part II 二部，Part I 包含五個單元講授非線性系統分析，Part II 包含六個單元講授非線性系統的控制設計。茲簡述各章摘要如下，方便讀者快速瀏覽本書的內容。

非線性系統與控制第一部：系統分析

本書的第一部講授非線性系統分析，主要在介紹非線性系統的特徵與現象，建立非線性

系統的分析工具，並討論非線性系統的穩定性。本書第一部內容的難易度定位在大學部開設的課程，以現象講解為主，簡易數學分析為輔，盡量以圖形的方式表達非線性系統的特性，可做為『非線性系統概論』或『非線性動力學』的授課講義，適合修過線性系統或線性控制的讀者閱讀。然而對於未修過線性系統的讀者，閱讀本書亦無困難，因為線性系統只是非線性系統的一個簡單特例，學習非線性系統的過程實際上已涵蓋了線性系統的知識。本書透過許多範例說明非線性系統分析如何簡化成線性系統的結果。所以閱讀本書的第一部不僅是在學習非線性系統，並且同時複習了線性系統，具有溫故知新的成效。第一部的題材區分成五個單元，主題長度適合於一個學期 2 或 3 學分的課程教學。

- 第一章是非線性系統概論，此章點出了非線性系統的主要特徵，以及其與線性系統的不同之處。本章將非線性系統歸納成四個『五種類』來加以介紹：(A)非線性系統的五種來源，(B)非線性系統的五種解答，(C)非線性系統的五種特性，(D)非線性系統的五種現象：(1)極限圓(limit cycle)、(2)分岔(bifurcation)、(3)遽變(catastrophe)、(4)混沌(chaos)、(5)碎形(fractal)。這是本書獨創的劃分方法，分門別類不會混淆，又方便於記憶。
- 第二章介紹相平面分析法(phase plane analysis)，這是非線性系統的時域響應(time response)法。前面用『回家』的概念來比擬非線性系統的變化，就是時域響應分析的結果。非線性系統在某一時刻的狀態可表成狀態空間(state space，又稱相空間，phase space)內的一個點，當系統狀態隨時間連續變化時，即在空間中連成一條狀態空間軌跡，若是在平面上則稱為相平面軌跡。前面提到的『回家』或『離家』，指的就是狀態空間軌跡進入平衡點或離開平衡點的現象。非線性系統如遊民般移動的行為響應，指的就是狀態空間軌跡隨時間迂迴纏繞的混沌現象。現在透過 Matlab 程式，任何非線性系統的複雜行為，都可在狀態空間中顯露無遺。
- 第三章介紹描述函數法(describing function)，這是非線性系統的頻域響應(time response)法。描述函數的角色相當於線性系統的轉移函數(transfer function)，對於一個非線性元件只要能求得其描述函數，就可以採用類似線性控制中轉移函數的方法來加以處理。非線性元件的描述函數表示法尤其適用於線性、非線性元件混合的系統，透過轉移函數與描述函數的相容性，整個系統可統一用頻域響應的方法加以分析。
- 第四章是關於非線性系統的穩定性分析。線性系統的穩定性都是相對於平衡點而言，而且線性系統只有一個平衡點(即泰勒級數的展開點)，所以當我們說某一線性系統為穩定，所指的就是其所對應的平衡點為穩定。但是這樣的看法在非線性系統中是不適用的，因為非線性系統收斂時，不一定是收斂到平衡點，它可能是收斂到一條軌跡，如極限圓，或是收斂到一個區域之內，但既不進入平衡點也不進入極限圓，而是在此區域內不停地迂迴纏繞。所以當我們說某一非線性系統為穩定，必須同時說明它是相對於平衡點的穩定，還是相對於軌跡的穩定？亦或是相對於區域的穩定？同時非線性系統既無特徵值(eigenvalue)亦無極點(pole)可用以判斷穩定性，所以需要針對非線性系統建立新的判斷穩定性的準則。本章將介紹其中最常用的準則，稱為 Lyapunov 定理，此定理實際上是利用等高線遞減法去搜尋『回家』的路徑。如前所述，一個穩定的平衡點就是建築在山谷最低點的家，所以只要順著等高線遞減的方向前進，最後一定會到達平衡點。反之，若存在有一點，在其附近的等高線全部以此點為中心，且由四面八方向此點遞減，則知此點必是該區域的局部最低點，也就是一個穩定的平衡點。Lyapunov 定理就是搜尋『回家』

路徑的基本定理。

- 第五章是關於時變(time-varying)非線性系統的穩定性分析。一個 RLC 電路若操作的時間不長，則其電阻值 R 、電容值 C 、電感值 L 均為常數，此時的 RLC 電路可視為非時變(time-invariant)系統，這正是上一章所討論的對象。但是當操作的時間拉長，原先是定值的電路常數開始隨時間飄移，此時的 RLC 電路變成是時變系統，此為第五章所討論的對象。同一個系統可以既是時變系統又是非時變系統，端看觀察時間的長短。一朵花在 1 分鐘的觀察尺度內，幾乎沒有變化，可視為非時變系統；但在 24 小時的觀察時間內，花的成長或凋謝過程即會呈現，此時花必須視為時變系統。所以非時變與時變之分在於經歷時間的長或短，而非線性與線性之分在於空間涵蓋範圍的大或小。時變非線性系統所描述的是系統在長時間、大範圍空間區域的動態變化，所對應的方程式是屬於變係數非線性微分方程式。時變系統的性質與非時變系統有很大的不同，而且其穩定性分析較為複雜，故將其獨立出來，放在第五章詳加分析。

非線性系統與控制第二部：控制設計

本書的第二部講授非線性系統的控制設計。延續第一部的討論，當我們分析非線性系統的行為並確認其為不穩定之後，接下來的工作即是施加控制的手段，使其穩定下來並達到預期的動態響應。針對非線性系統的不同特質，必須選對控制方法才能發揮控制的效果。本書的第二部介紹了控制非線性系統的各種不同方法，分析其適用時機，並討論其優缺點。第二部內容的難易度定位在大四或研究所一年級的自動控制課程，可做為『非線性控制』的授課講義，以及『強健控制』、『適應性控制』、『最佳控制』課程的參考用書。本書適用於以非線性系統為控制對象的課程以及進行相關領域研究的讀者。在另一方面，對於各種控制理論有興趣的讀者，本書則提供了一個整合的平台，方便於各種方法的查閱與比較。本書第二部包含六個單元，每一個單元分別介紹一種非線性控制的方法，內容長度適合於一個學期 2 或 3 學分的課程來講授。

- 第 6 章介紹回授線性化(feedback linearization)，這是本書所介紹非線性控制的第一個方法。控制的目的是有很多，如命令追蹤、雜訊排除等，但本章所提到的回授控制的目的則是為了線性化。也就是說，透過控制的手段，將非線性系統控制成線性系統。一旦變成線性系統，即可利用已知的方法來加以控制。回授線性化不是傳統上捨去高階項的線性化，它是採用訊號回授和補償的方式將非線性系統轉換成「同義」的線性系統。然後再針對所得到的線性系統進行線性控制，最後將線性控制施予逆轉換，即可得到所需要的非線性控制設計。
- 第 7 章介紹逆向步進控制(backstepping control)，這個方法直接對非線性系統進行控制，不施以線性化的過程。前一章介紹的回授線性化方法，透過座標轉換先將非線性系統轉成等義的線性系統，再針對線性系統進行控制設計，最後再經由逆轉換得到原系統的非線性控制設計。回授線性化的控制方法雖然簡單，但卻要付出雙倍的代價，因為此法要求內、外迴路的雙重控制：內迴路的控制進行回授線性化，外迴路的控制達成控制目標(如指令追蹤)。這種雙重控制迴路的設計理念引發新的質疑：為何我們不能直接對非線性系統進行控制，一次就達到控制目標，而要透過線性化的中間過程？本章解釋『線性化』這

個中間過程有時候非絕對必要，直接針對非線性系統設計控制律反而更有效率、更容易實現。逆向步進控制(backstepping control)正是基於這樣的理念而被提出來。

- 第 8 章介紹滑動模式控制(sliding mode control)，這是一種實用又簡易的非線性控制法則。顧名思義，滑動控制的目的是要驅使系統進入一個滑動面(sliding surface)，它是相平面上的一條曲線或曲面，代表了控制系統最後所要進入的狀態。一旦系統進入滑動面，則控制的規格與目標即自動被滿足。滑動控制就是幫助系統進入滑動面所採取的一切控制行為，它是藉由持續的切換動作來滿足下列二項要求：(1)不管系統動態位於相平面的哪一點，均有往滑動面運動的趨勢。(2)一旦系統進入滑動面，滑動控制能確保系統一直維持在滑動面內，而不致離開。
- 第 9 章介紹適應性控制。適應性控制，顧名思義即是能適應環境的改變，而隨時更新控制策略。適應性控制的理念與強健控制(如第 8 章的滑動模式控制，第 10 章的 H_∞ 控制)剛好相反。以做事策略來看，強健控制是『以不變應萬變』，適應性控制則是『以動制動』；以商業設計來看，強健控制是『通用型』設計，適應性控制是『客製化』設計(customized design)。適應性控制的表現一定比強健控制好，但相對的，付出的成本也高。它必須具有可變的控制器結構，也必須具有足夠的感測元件，用以感測外界環境的多樣性變化。
- 第 10 章介紹 H_∞ 強健控制。強健控制的理念和適應性控制完全相反，它的控制器參數與結構是固定的，不因外在環境的變化而做改變。所以這是一通用型的控制器，實現的成本低廉。 H_∞ 強健控制是針對最惡劣情況做設計(Worst-case design)。如果最惡劣情況都可以控制了，其他情況自然也就沒問題。當然處處都以最惡劣情況來考量，會造成過分保守的控制設計，這是強健控制的內在缺點。
- 第 11 章介紹通用的控制法則:最佳化控制。不管受控系統是線性還是非線性，最佳化(optimization)控制設計均可適用。目前求得最佳控制解的方法有二種，第一種方法是根據變分原理(calculus of variation)，第二種方法是根據動態規劃(Dynamic Programming)原理；變分所得到的最佳控制是開迴路(open-loop)的型式，它是時間 t 的函數，是透過常微分方程式的求解而得到；而動態規劃所得到的最佳控制則是閉迴路(closed-loop)的型式，它是位置 x 的函數，是透過偏微分方程式的求解而得到。開迴路最佳控制告訴我們沿著某一特定軌跡上，在時間 t 時，最佳控制策略是甚麼；閉迴路最佳控制則告訴我們，當在位置 x 時(不管先前是如何到達 x)，所要採用的最佳控制策略是甚麼。最佳控制不僅可應用於人造的工程系統與人文社會系統，自然界的所有定律也都是老天爺最佳化的傑作。我們所看到的、所測量到的所有自然現象與物理定律，都是被老天爺精心安排的最佳化設計。如本章所要介紹的，古典力學(包含 Newton 力學、Lagrange 力學、Hamilton 力學)與量子力學都是自然界的最佳控制設計。人世間觸目所及，不管是天然的或是人造的事物，都是最佳化控制結果的呈現。
- 第 12 章介紹混沌控制。作為本書的最後一章，本章的內容是前面各章的總結與應用，也是本書的核心精華所在。混沌控制是一個非常廣泛的綜合性題材，它涵蓋了本書 part I 的非線性系統分析與 part II 的非線性控制設計。在 part I 中，我們分析了非線性系統的各種現象，而混沌現象正是非線性系統的主要特徵。在 part II 中，我們則介紹了各種非線性控制的方法。現在我們一一將這些非線性控制的方法應用到混沌系統之中，進而發展出各種混沌控制理論。混沌系統又可分成古典混沌系統與量子混沌系統，前者是建立在

牛頓力學之上，後者則是建立在量子力學之上。我們在第 11 章已經運用最佳化控制的方法分別建立了牛頓力學與量子力學的運動方程式，這些方程式提供了我們描述古典與量子混沌所需要的數學工具。其中的量子混沌是非線性控制與量子力學的結合，同時融入了作者最新的研究成果。歸納而言，混沌控制結合了混沌現象的分析，混沌數學方程式的建立以及各種非線性控制理論的運用，而其實際的應用則在於通訊的加密與解密技術，這些主題都將在本章一一介紹。

最後我們提出一個譬喻來對本書所提各種非線性控制方法做一個簡單的分類。譬如我們要為一班學生設計帽子，帽子的大小至少要讓每個學生都能戴。則設計帽子的方法有三種：

1. 強健性設計(robust design)：只針對頭最大的學生設計帽子即可，其他人不管。連頭最大的學生，都戴的下，其他學生自然都戴的下。這頂帽子最強健，因為適用於每個學生。當然人人都可戴的帽子，人人都戴得不舒服(除頭最大的那個)。而這正是強健性控制的特徵，它不是針對一個人(一個系統)設計，而是針對一群人(一群系統)做設計，也就是所謂的『通用型』設計。本書第九章、第十一章均屬於強健性設計。
2. 適應性設計(adaptive design)是為每個學生設計一頂專屬的帽子，花費最多，但學生戴得最舒服。專屬的帽子適應性佳，但強健性最差，因為專屬於某一個學生的帽子，另外一些學生可能都戴不下。本書第十章即是屬於適應性設計。
3. 合成型設計：將學生的頭圍大小分成四類，再將帽子設計成四段式的扣孔，每一段扣孔剛好適用於某一類頭圍的學生。相較於無段式設計(適應性設計)，四段式設計花費較少，但能同時兼顧到強健性與適應性。合成型設計即是本書第十章所提到的增益排程設計(Gain-scheduling design)，帽子的四段式設計就是一種四段式的增益排程。

本書除了做為課程的教材，同時為了方便自學者的閱讀，較著重於觀念上的講解與工程上的應用，因此難免多處無法兼顧數學的嚴謹性。但對於重要定理的證明本書仍然適度加以保留，以茲作為深入研究的參考；對於一般讀者的初次閱讀，此部分應可以跳過。對於內文中所無法涵蓋的主題，本書每章後面均附有文獻回顧與導讀，可作為讀者進一步閱讀的索引。本書源自作者十多年來教授《非線性系統與控制》的教學紀錄。課程內容除了參酌國外相關教科書，同時融入了許多作者的教學心得與研究成果。依據多年來修課同學的課堂提問與意見回饋，教學講義經過多次的改寫與增修，才逐漸形成本書現有的規模。本書出版前雖經再次校稿並增補多處內容，但疏漏之處仍在所難免，期盼讀者先進不吝予以指正。

楊憲東

2016 年 3 月於成功大學