

Chapter 7

逆向步進控制 (Backstepping Control)

前一章介紹的回授線性化方法，透過座標轉換先將非線性系統轉成等義的線性系統，再針對線性系統進行控制設計，最後再經由逆轉換得到原系統的非線性控制設計。回授線性化的控制方法雖然簡單，但卻要付出雙倍的代價，因為此法要求內、外迴路的雙重控制：內迴路的控制進行回授線性化，外迴路的控制達成控制目標(如指令追蹤)。這種雙重控制迴路的設計理念引發新的質疑：為何我們不能施以非線性控制的方法，一次就直接達到控制目標，而要透過線性化的中間過程？這一章以及後續各章所要介紹的控制方法就是直接型的非線性控制，它們都無需借助中間的線性化過程。

7.1 回授線性化的隱藏缺陷

在討論逆向步進控制(backstepping control)之前，我們先回顧回授線性化控制的幾個隱藏缺陷。先考慮一個簡單的非線性系統

$$\dot{x} = ax^2 + u \quad (7.1.1)$$

如果將控制律 u 設計成狀態回授的形式

$$u = -ax^2 + bx \quad (7.1.2)$$

則(7.1.1)式立即化成線性系統

$$\dot{x} = bx, b < 0 \quad (7.1.3)$$

這就是回授線性化的結果，其中(7.1.2)式的第一項用以抵銷(7.1.1)式中的非線性項，(7.1.2)式中的第二項則用來達到控制的目標，其中參數 b 值負的越大，收斂的速度越快。

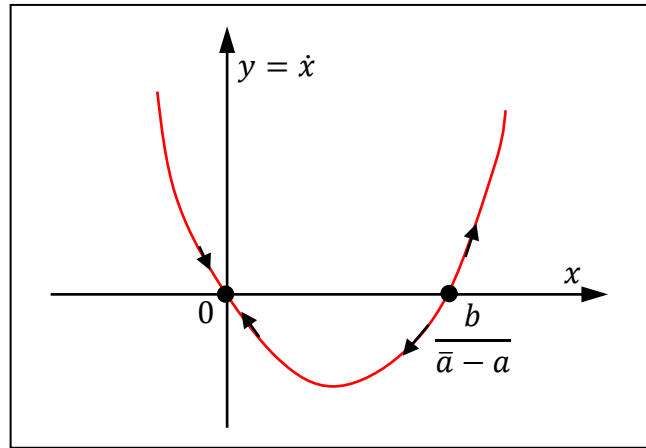


圖 7.1.1 由於參數測量誤差造成的不穩定性。

然而在實際上，由於對系統參數 a 的測量誤差，使得控制律(7.1.2)式無法完美實現。假設 a 的測量值為 $\bar{a} \neq a$ ，則相對應的控制訊號為 $u = -\bar{a}x^2 + bx$ ，將之代入(7.1.1)式得到

$$\dot{x} = (a - \bar{a})x^2 + bx \quad (7.1.4)$$

與(7.1.3)式比較，可以發現由於測量誤差 $a - \bar{a}$ 的存在，導致系統無法被完全線性化。(7.1.4)式的相平面軌跡如圖 7.1.1 所示，其中顯示原點僅為區域性穩定，而另一平衡點則為不穩定。然則完全線性化系統(7.1.3)式的原點則為全域穩定。可見參數的測量誤差將造成回授線性化的不完全，並且使得穩定的區域範圍變小了。

在沒有參數測量誤差的情況下，回授線性化可將所有的非線性項全部消除。然而我們發現消除所有的非線性項也並非是最好的決策。不是所有的非線性項都是不好的，有時保留一些非線性項反而能夠得到更快的收斂效果。我們考慮另一個非線性系統來說明這個事實：

$$\dot{x} = ax^2 - x^3 + u \quad (7.1.5)$$

代入以下二種不同的控制訊號，得到不同的閉迴路控制系統

$$\dot{x} = \begin{cases} -x, & u = u_1 = -ax^2 + x^3 - x \\ -x^3, & u = u_2 = -ax^2 \end{cases} \quad (7.1.6)$$

其中 u_1 控制的結果得到完全線性化的系統： $\dot{x} = -x$ ； u_2 控制的結果則仍然是非線性系統 $\dot{x} = -x^3$ 。二種控制都能保證原點的全域穩定，但是非線性系統 $\dot{x} = -x^3$ 比線性系統 $\dot{x} = -x$ 的收斂速度快。尤其當初始位置 x_0 很大時，非線性系統將比線性系統更快地往原點移動(移動速度 \dot{x} 較大)。比起線性系統，非線性系統發散的速度快，但收斂的速度也快。因此若能充分運用非線性系統的先天優勢，將可得到比回授線性化更好的控制結果。

回授線性化的另一隱藏缺陷是控制訊號可能超過可實現的範圍。觀察在(7.1.6)式中的 u_1 訊號，其中的 x^3 項是要消去(7.1.5)式中 x^3 項，但該項隨著 x 的三次方而快速增加，使得 u_1 訊號可能超過硬體可實現的範圍。在另一方面，對於(7.1.6)式中的 u_2 訊號，只需用到 x 平方的資訊，其值比 u_1 訊號小很多。回授線性化控制為了達到線性化的目的，經常必須提供 x 高次方的項用以消去系統中的非線性項，但是如此作法恐將導致控制訊號過於龐大而無法實現。

以上關於回授線性化的缺陷顯示出『線性化』這個中間過程似乎是非絕對必要，直接針對非線性系統設計控制律反而更有效率、更容易實現。逆向步進控制(backstepping control)正是基於這樣的理念而被提出來，這個控制方法實際上是 Lyapunov 穩定定理的一個應用。考慮非線性系統

$$\dot{x} = f(x, u), x \in \mathbb{R}^n, f(0, 0) = 0 \quad (7.1.7)$$

其中控制訊號 u 是狀態 x 的待定非線性函數：

$$u = \phi(x) \quad (7.1.8)$$

將上式代入(7.1.7)式中，得到閉迴路系統

$$\dot{x} = f(x, \phi(x)) \quad (7.1.9)$$

非線性函數 $\phi(x)$ 的設計是要使得上式相對於原點是漸進穩定。根據第四章的 Lyapunov 穩定定理，這相當於要求存在 Lyapunov 函數 $V(x)$ 滿足以下三個條件：

- (1) $V(0) = 0$ 。
- (2) $V(x) > 0, x \in D - \{0\}$ ，其中 D 為原點的一個鄰域。
- (3) $\dot{V}(x) \leq -V_1(x) < 0, x \in D - \{0\}$ ，其中 $V_1(x)$ 為一正定函數。

設計控制律 $u = \phi(x)$ ，使得滿足以上三條件的 Lyapunov 函數 $V(x)$ 存在，即可保證閉迴路系統(7.1.9)式收斂到平衡點，而無須對(7.1.9)式進行線性化的過程。

我們再次以(7.1.5)式的範例來說明 Lyapunov 控制的設計過程。

$$\dot{x} = ax^2 - x^3 + u \quad (7.1.10)$$

選取 Lyapunov 函數 $V(x) = x^2/2 > 0$ ，對時間微分得到

$$\dot{V} = xf(x, u) = ax^3 - x^4 + xu \quad (7.1.11)$$

如果選取(7.1.6)式中的 $u_1 = -ax^2 + x^3 - x$ 為控制訊號 u ，將之代入(7.1.11)式得到

$$\dot{V} = ax^3 - x^4 + x(-ax^2 + x^3 - x) = -x^2 = -V_1(x) \leq 0$$

確認控制律 $u = u_1$ 可以達到漸進穩定。以上的步驟是先決定控制律 u ，再計算 \dot{V} 。現在我們將步驟顛倒，先指定 \dot{V} ，然後再決定控制律 u 。首先令

$$\dot{V} = ax^3 - x^4 + xu \leq -V_1(x) = -(x^4 + x^2) \quad (7.1.12)$$

求得控制律 u 所要滿足的條件

$$xu \leq -x^2 - ax^3 = -x(x + ax^2)$$

滿足條件的一個選擇為

$$u = u_3 = -x - ax^2 \quad (7.1.13)$$

此控制律滿足(7.1.12)式，故能確保漸進穩定，所對應的閉迴路系統為

$$\dot{x} = ax^2 - x^3 + u_3 = -x - x^3 \quad (7.1.14)$$

與 u_1 比起來， u_3 由於不包含 x^3 項，其值較小，更容易實現。

7.2 逆向步進控制的層狀架構

回顧上一個例題的討論，其關鍵的地方是先求得 \dot{V} 的表示式後，再決定控制律 u 使得 $\dot{V} < 0$ ，這一步驟正是逆向步進控制(backstepping control)的基本操作法則，以下我們以 backstepping 簡稱此控制方法。這一節我們先討論 backstepping 的基本原理及架構，後續各節再討論更一般化的情形。首先考慮如下的非線性系統：

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\xi \quad (7.2.1a)$$

$$\dot{\xi} = u \quad (7.2.1b)$$

系統狀態包含 x 與 ξ ，其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 是向量， $\xi \in \mathbb{R}$ 是純量。這裡所要求解的問題是設計控制律 u 使得整合狀態 $[x\xi]^T$ 為漸進穩定。 x 狀態可視為是整合狀態 $[x^T\xi]^T$ 的一個子系統，(7.2.1a)式表示此子系統的運動方程式，而狀態 ξ 可視為是子系統的控制訊號。Backstepping 控制理念是將系統分解成層狀結構，先對最內層結構設計控制律，然後一層一層往外設計控制律，最外一層的控制律就是所要求的非線性控制律，這樣的設計步驟正是 Backstepping(逆向步進)名稱的由來。

(7.2.1)式代表最簡單的二層結構系統， x 是內層結構的狀態變數， $[x\xi]^T$ 則是外層結構的狀態變數。Backstepping 的控制策略是先對內層 x 設計控制律 ξ ，再對外層 $[x\xi]^T$ 設計控制律 u ，如圖 7.2.1 所示。

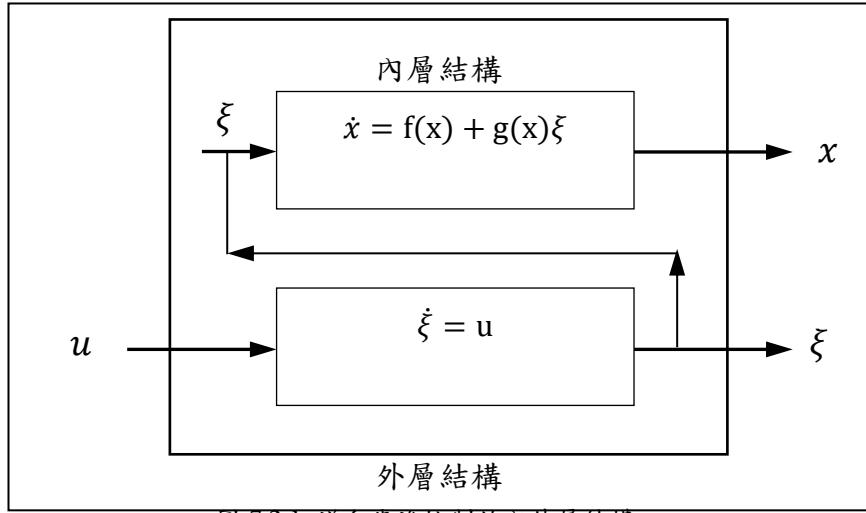


圖 7.2.1 逆向步進控制的內外層結構。

控制律 u 的設計將按照下列四個步驟進行:

(1) 設計內層結構的控制律

參見圖 7.2.1，先針對內層結構的狀態方程式(7.2.1a)，設計控制律 $\xi = \phi(x)$ 使得內層子系統為漸進穩定。亦即要找到 Lyapunov 函數 $V_1(x) > 0$ ，且滿足

$$\dot{V}_1(x) = \frac{\partial V_1}{\partial x} [f(x) + g(x)\phi(x)] \leq -V_a(x) \leq 0 \quad (7.2.2)$$

其中 $V_a(x)$ 為正定函數。所得到的控制律 $\xi = \phi(x)$ 必須確保閉迴路子系統

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\phi(x) \quad (7.2.3)$$

為漸進穩定。

(2) 建立外層結構運動方程式

將(7.2.1)式改寫成如下的形式

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\phi(x) + g(x)(\xi - \phi(x)) \quad (7.2.4a)$$

$$\dot{\xi} = u \quad (7.2.4b)$$

(7.2.1)式所代表的含意表現在圖 7.2.2(a)中，其中可見到變數 ξ 是控制訊號 u 的積分結果，而變數 x 又是(7.2.1a)子系統的控制訊號。(7.2.4)式所代表的含意表現在圖 7.2.2(b)中，顯示進入(7.2.4a)子系統的控制訊號變成了 $\xi - \phi(x)$ 。

(3) 定義外層結構的控制訊號

$$z = \xi - \phi(x) \rightarrow \dot{z} = \dot{\xi} - \phi(x) = u - \phi(x) \quad (7.2.5)$$

其所對應的控制方塊圖如圖 7.2.2c 所示。觀察圖 7.2.2b 到圖 7.2.2c 的變化，不同之處在於將訊號 $-\phi(x)$ 往後移到積分器的外面，這就是英文 backstepping(逆向步進)的原意。在這裡我們只看到 $-\phi(x)$ 往後退一步，在後面一般性的討論中，我們將看到 $-\phi(x)$ 訊號一步一步往後退的現象，真實呈現逆向步進的行為。

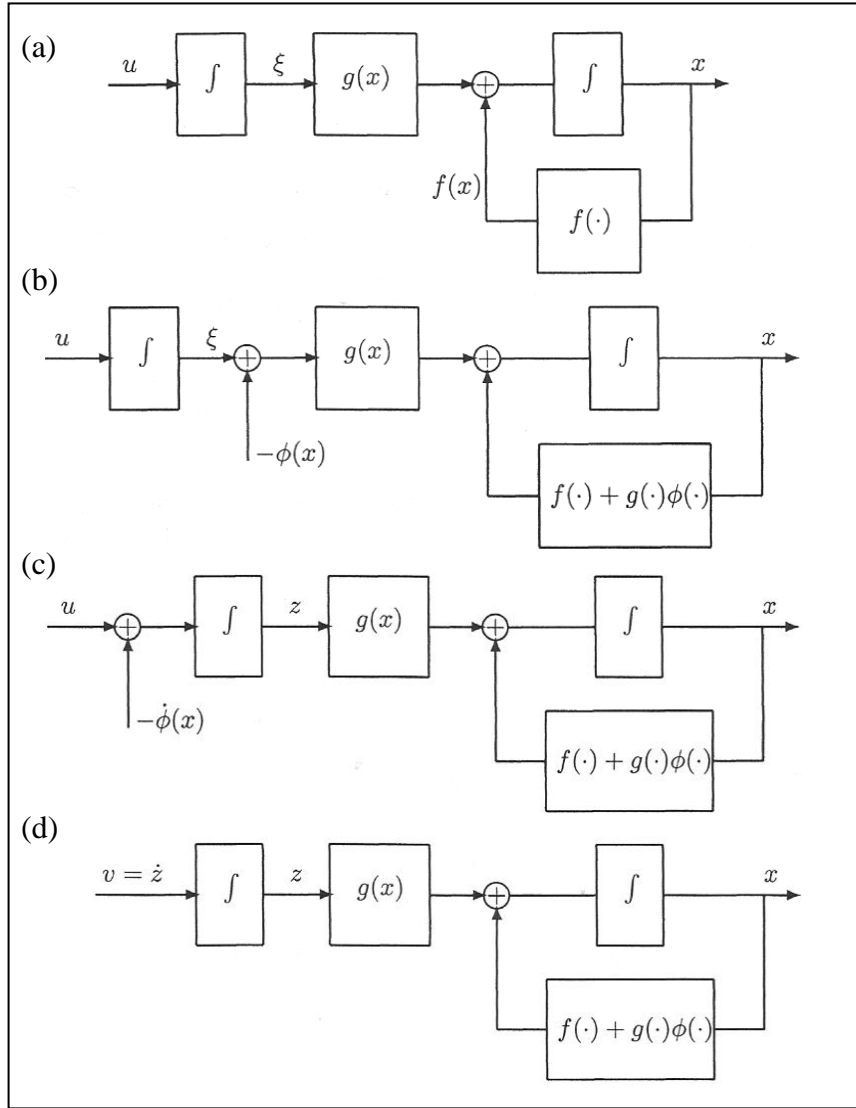


圖 7.2.2 逆向步進控制的四個步驟(Marquez, 2003; Khalil, 1996)。

圖 7.2.2c 顯示整合系統的輸入控制訊號變成了 $u - \dot{\phi}(x)$ ，因此定義新控制訊號如下：

$$v = u - \dot{\phi}(x) \quad (7.2.6)$$

結合(7.2.4a)式、(7.2.5)式及(7.2.6)式，得到變換後的系統方程式：

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\phi(x) + g(x)z \quad (7.2.7a)$$

$$\dot{z} = v \quad (7.2.7b)$$

其所對應的控制方塊圖如圖 7.2.2d 所示。在(7.2.1)式中，子系統的控制訊號為 ξ ，全系統的控制訊號為 u ；經過轉換後，在(7.2.7)式中，子系統的控制訊號為 z ，全系統的控制訊號為 v 。轉換前後的關係如下式所示：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\xi \xrightarrow{z=\xi-\phi(x)} \dot{x} = f(x) + g(x)\phi(x) + g(x)z \\ \dot{\xi} &= u \quad \quad \quad \dot{z} = v \end{aligned} \quad (7.2.8)$$

(4) 決定外層結構控制律

當 $z = 0$ 時，(7.2.7a)式及化成(7.2.3)式，而(7.2.3)式代表受控後的內層子系統，其為漸進穩定的系統，所對應的 Lyapunov 函數 $V_1(x)$ 如(7.2.2)所示。設 $V(x, z)$ 為(7.2.8)式全系統 Lyapunov

函數，將其取為如下的形式：

$$V(x, z) = V_1(x) + z^2/2 \quad (7.2.9)$$

其中 $V_1(x)$ 為與內層狀態 x 相關的 Lyapunov 函數，而 $z^2/2$ 則是與狀態 z 相關的 Lyapunov 函數。為了確保整合系統 $[x^T z]^T$ 為漸進穩定， $V(x, z)$ 必須滿足 $V > 0$ 且 $\dot{V} < 0$ ，其中 $V > 0$ 的條件，根據(7.2.9)式的定義，已自動滿足。而條件 $\dot{V} < 0$ 的滿足，則要透過控制律 v 的適當選擇：

$$\dot{V}(x, z) = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial z} \dot{z} = \frac{\partial V_1}{\partial x} [f(x) + g(x)\phi(x) + g(x)z] + zv \quad (7.2.10)$$

根據上式，為了使得 $\dot{V} < 0$ ，可選控制律 v 如下：

$$v = -\frac{\partial V_1}{\partial x} g(x) - kz, k > 0 \quad (7.2.11)$$

將上式的 v 代入(7.2.10)式中，得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, z) &= \frac{\partial V_1}{\partial x} [f(x) + g(x)\phi(x)] - kz^2 \\ &\leq -V_a(x) - kz^2 < 0 \end{aligned} \quad (7.2.12)$$

其中用到(7.2.2)式的條件。條件 $\dot{V} < 0$ 保證(7.2.11)式的控制律 v 使得整合系統(7.2.7)為漸進穩定。控制律 v 得到後，將之代入(7.2.6)式，最後得到原系統(7.2.1)式的控制律 u 如下：

$$\begin{aligned} u &= \dot{\phi}(x) + v = \dot{\phi}(x) - \frac{\partial V_1}{\partial x} g(x) - kz \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x} [f(x) + g(x)\xi] - \frac{\partial V_1}{\partial x} g(x) - k[\xi - \phi(x)] \end{aligned} \quad (7.2.13)$$

其中用到了新變數 v 及 z 的定義式。上式說明全系統的控制律 u 決定於內層子系統的控制律 $\xi = \phi(x)$ ，以及其所對應的 Lyapunov 函數 $V_1(x)$ 。

例題 7.2.1

考慮非線性系統

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1^2 - x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned} \quad (7.2.14)$$

本題的目的是要設計控制律 u 使得該系統為漸進穩定。首先將上式改寫成(7.2.1)式之標準形式：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\xi \quad \xrightarrow{x=x_1} \dot{x}_1 = ax_1^2 - x_1^3 + x_2 \\ \dot{\xi} &= u \quad \dot{x}_2 = u \end{aligned} \quad (7.2.15)$$

相當於將 x_1 視為內層子系統的狀態，並將另一個狀態 $\xi = x_2$ 視為是子系統的控制訊號。根據前面所述的設計步驟，只要求得子系統的控制律 $\xi = \phi(x)$ ，以及其所對應的 Lyapunov 函數 $V_1(x)$ ，則全系統的控制律 u 即可根據(7.2.13)式求得。

- 步驟 1: 決定內層子系統的控制律

子系統的狀態方程式為

$$\dot{x}_1 = f(x_1) + g(x_1)\xi = (ax_1^2 - x_1^3) + \xi \quad (7.2.16)$$

第一個步驟是先求得控制律 $\xi = \phi(x_1)$ ，使得 x_1 為漸進穩定。首先選擇 x_1 的 Lyapunov 函數為最簡單的形式

$$V_1(x_1) = x_1^2/2 \quad (7.2.17)$$

其次求其對時間的微分，得到

$$\dot{V}_1(x_1) = \dot{x}_1 x_1 = (ax_1^2 - x_1^3 + \xi)x_1 \leq -V_a(x_1) \quad (7.2.18)$$

控制律 $\xi = \phi(x_1)$ 的設計是要確保正定函數 $V_a(x_1)$ 的存在。我們可以將順序反過來，先指定正定函數 $V_a(x_1)$ 的形式，再反求控制律 $\xi = \phi(x_1)$ 。從(7.2.18)式可以看到， $V_a(x_1)$ 的最低次方形式將含有 x_1^4 項，故設

$$V_a(x_1) = -(x_1^4 + x_1^2)$$

將之代入(7.2.17)式，得到子系統控制律

$$\xi = \phi(x_1) = -x_1 - ax_1^2 \quad (7.2.19)$$

● 步驟 2: 決定外層系統的控制律

因為本例題只有內外二層，所以外層系統的控制律即為最後所要求的控制律 u 。外層系統的控制律是由(7.2.13)式所給定：

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} [f(x_1) + g(x_1)\xi] - \frac{\partial V_1}{\partial x_1} g(x_1) - k[\xi - \phi(x_1)] \quad (7.2.20)$$

其中根據定義， $\xi = x_2$ ， $\phi(x_1)$ 由(7.2.19)式給定， $V_1(x_1)$ 由(7.2.17)式給定， $f(x_1)$ 與 $g(x_1)$ 由(7.2.16)式給定。完成所有的代入後，(7.2.20)式化成

$$u(x_1, x_2) = -(1 + 2ax_1)(ax_1^2 - x_1^3 + x_2) - x_1 - k(x_2 + x_1 + ax_1^2) \quad (7.2.21)$$

此控制律可確保(7.2.14)式的非線性系統為漸進穩定。整個系統的 Lyapunov 函數是由(7.2.9)式所給定

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2) &= V_1(x_1) + z^2/2 = V_1(x_1) + (\xi - \phi(x_1))^2/2 \\ &= x_1^2/2 + (x_2 - x_1 + ax_1^2)^2/2 \end{aligned} \quad (7.2.22)$$

其中 $V_1(x_1)$ 是內層子系統的 Lyapunov 函數， $V(x_1, x_2)$ 則是外層系統的 Lyapunov 函數。Backstepping 控制策略就是將系統拆成層狀結構，然後由內往外，逐層建立 Lyapunov 函數，以及其所對應的控制律。

□

7.3 多層次的逆向步進控制

上一節中我們討論了內、外雙層結構的 backstepping 控制設計，現在我們將加以擴展變成 n 層控制結構：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\xi_1 \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{k-1} &= \xi_k \\ \dot{\xi}_k &= u \end{aligned} \quad (7.3.1)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ ， $\xi_i \in \mathbb{R}$ 。定義第 1 層為最內層，其狀態變數為 x ，控制輸入訊號為 ξ_1 ，第 2 層的狀態變數為 ξ_1 ，控制輸入訊號為 ξ_2 ，依此類推，第 k 層為最外層，狀態變數為 ξ_k ，控制輸入訊號為 u 。相鄰二層間之關係可視為是內、外層的關係，並可利用前一節的結果，由內層的控制律求得外層的控制律。所以只要最內層的控制律已求得，即可利用前節所得到的疊代公式，一步一步往外求得每一層的控制律，而最外層的控制律即是最後所要求的控制律 u 。

為了方便說明，以下我們以三層控制結構為例子，解釋如何重複應用上一節的內外層控制設計，來求解三層結構的控制問題。考慮如下的非線性系統

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\xi_1 \quad (7.3.2a)$$

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2 \quad (7.3.2b)$$

$$\dot{\xi}_2 = u \quad (7.3.2c)$$

我們要設計控制律 u 使得系統狀態 $[x \xi_1 \xi_2]$ 相對於原點為漸進穩定。

(1) 求第一層結構的控制律

首先考慮最內層(第一層)的子系統，如(7.3.2a)式所示，此層的狀態變數為 x ，控制輸入訊號為 ξ_1 。假設使該子系統為漸進穩定的控制律已求得為 $\xi_1 = \phi_1(x)$ ，而其對應的 Lyapunov 函數為 $V_1(x)$ 。

(2) 求第二層結構的控制律

第二層的結構包含 x 與 ξ_1 二個狀態變數，是由(7.3.2a)式與(9.3.2b)式所描述的內外層結構。與(7.2.1)式比較，得到下列的對應式：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\xi_1 & \rightarrow & \dot{x} = f(x) + g(x)\xi \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2 & \rightarrow & \dot{\xi} = u \end{aligned} \quad (7.3.3)$$

其中 ξ_2 為第二層結構的控制律，其解是由(7.2.13)式所給定：

$$\xi_2 = \phi_2(x, \xi_1) = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} [f(x) + g(x)\xi_1] - \frac{\partial V_1}{\partial x} g(x) - k[\xi_1 - \phi_1(x)] \quad (7.3.4)$$

相對應的 Lyapunov 函數由(7.2.9)式決定

$$V_2(x, \xi_1) = V_1(x) + (\xi_1 - \phi_1(x))^2/2 \quad (7.3.5)$$

(3) 求第三層結構的控制律

第三層的結構包含 $[x \xi_1 \xi_2]$ 三個狀態變數，為了表達成內、外層結構的關係，將(7.3.2a)式與(7.3.2b)式結合成單一向量的形式。定義向量

$$X = \begin{bmatrix} x \\ \xi_1 \end{bmatrix}, F(X) = \begin{bmatrix} f(x) + g(x)\xi_1 \\ 0 \end{bmatrix}, G(X) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7.3.6)$$

則(7.3.2)式的三個式子可改寫成如下的內外層結構式：

$$\begin{aligned} \dot{X} &= F(X) + G(X)\xi_2 & \rightarrow & \dot{x} = f(x) + g(x)\xi \\ \dot{\xi}_2 &= u & \rightarrow & \dot{\xi} = u \end{aligned} \quad (7.3.7)$$

其中 ξ_2 是內層結構的控制訊號，也就是第二層結構的控制訊號，已於上一個步驟中求得為 $\xi_2 = \phi_2(x, \xi_1)$ ，如(7.3.4)式所示。相對應的 Lyapunov 函數 $V_2(x, \xi_1)$ 由(7.3.5)式所決定。再一次利用(7.2.13)式決定外層結構(第三層結構)的控制律 u ：

$$\begin{aligned} u &= \phi_3(x, \xi_1, \xi_2) \\ &= \frac{\partial \phi_2}{\partial X} [F(X) + G(X)\xi_2] - \frac{\partial V_2}{\partial X} G(X) - k[\xi_2 - \phi_2(x, \xi_1)] \\ &= \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial x} \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_1} \right] \begin{bmatrix} f(x) + g(x)\xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} - \left[\frac{\partial V_2}{\partial x} \frac{\partial V_2}{\partial \xi_1} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - k[\xi_2 - \phi_2(x, \xi_1)] \\ &= \frac{\partial \phi_2}{\partial x} (f(x) + g(x)\xi_1) + \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_1} \xi_2 - \frac{\partial V_2}{\partial \xi_1} - k[\xi_2 - \phi_2(x, \xi_1)] \end{aligned} \quad (7.3.8)$$

第三層結構所對應的 Lyapunov 函數為

$$\begin{aligned} V_3(x, \xi_1, \xi_2) &= V_2(x, \xi_1) + (\xi_2 - \phi_2(x, \xi_1))^2/2 \\ &= V_1(x) + (\xi_1 - \phi_1(x))^2/2 + (\xi_2 - \phi_2(x, \xi_1))^2/2 \end{aligned} \quad (7.3.9)$$

範例 7.3.1

考慮下列的三階非線性系統

$$\dot{x} = ax^2 + \xi_1 \quad (7.3.10a)$$

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2 \quad (7.3.10b)$$

$$\dot{\xi}_2 = u \quad (7.3.10c)$$

本題的目的是要設計控制律 u 使得系統狀態 $[x\xi_1\xi_2]$ 相對於原點為漸進穩定。根據前面的分析，控制律 u 的設計分三層進行：

- 求第一層結構的控制律

第一層的狀態方程式為 $\dot{x} = ax^2 + \xi_1$ ，控制訊號為 ξ_1 。使得 x 為漸進穩定的控制訊號有許多選擇，其中最簡單的形式為

$$\xi_1 = \phi_1(x) = -ax^2 - x \quad (7.3.11)$$

受控後的 x 狀態方程式變成 $\dot{x} = -x$ ，所對應的 Lyapunov 函數可選成

$$V_1(x) = x^2/2 \quad (7.3.12)$$

- 求第二層結構的控制律

第二層結構的狀態方程式為

$$\dot{x} = ax^2 + \xi_1 \quad (7.3.13a)$$

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2 \quad (7.3.13b)$$

控制輸入訊號是 ξ_2 ，已由(7.3.4)式所給定

$$\xi_2 = \phi_2(x, \xi_1) = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} [f(x) + g(x)\xi_1] - \frac{\partial V_1}{\partial x} g(x) - k[\xi_1 - \phi_1(x)] \quad (7.3.14)$$

代入 $f(x) = ax^2$ ， $g(x) = 1$ ， $\phi_1(x) = -ax^2 - x$ ， $V_1(x) = x^2/2$ ，得到

$$\phi_2(x, \xi_1) = -(2ax + 1)(ax^2 + \xi_1) - x - k(\xi_1 + ax^2 + x) \quad (7.3.15)$$

相對應的 Lyapunov 函數由(7.3.5)式決定

$$\begin{aligned} V_2(x, \xi_1) &= V_1(x) + (\xi_1 - \phi_1(x))^2/2 \\ &= x^2/2 + (\xi_1 + ax^2 + x)^2/2 \end{aligned} \quad (7.3.16)$$

- 求第三層結構的控制律

第三層結構的狀態方程式包含(7.3.10)式中的三個式子，其中控制輸入訊號 u 即是最後所要求的控制律，根據(7.3.8)式：

$$\begin{aligned} u &= \phi_3(x, \xi_1, \xi_2) \\ &= \frac{\partial \phi_2}{\partial x} (f(x) + g(x)\xi_1) + \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_1} \xi_2 - \frac{\partial V_2}{\partial \xi_1} - k[\xi_2 - \phi_2(x, \xi_1)] \end{aligned} \quad (7.3.17)$$

其中 ϕ_2 由(7.3.14)式給定， V_2 由(7.3.15)式給定。從這個例題可以看到最後的控制律 ϕ_3 決定於 ϕ_2 與 V_2 ，而 ϕ_2 與 V_2 又決定於 ϕ_1 與 V_1 ，因此只要最內層的控制律與 Lyapunov 函數求得，則利用相同的疊代式，即可往外疊代求得每一層的控制律與 Lyapunov 函數。

□

7.4 一般形式的逆向步進控制

在(7.3.1)式中，狀態 ξ_i 與 ξ_{i+1} 之間是純微分的關係，現在我們將之擴展到一般化的情形：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_0(x) + g_0(x)\xi_1 \\ \dot{\xi}_1 &= f_1(x, \xi_1) + g_1(x, \xi_1)\xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= f_2(x, \xi_1, \xi_2) + g_2(x, \xi_1, \xi_2)\xi_3 \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{k-1} &= f_{k-1}(x, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k-1}) + g_{k-1}(x, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k-1})\xi_k \\ \dot{\xi}_k &= f_k(x, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) + g_k(x, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)u\end{aligned}\quad (7.4.1)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ ， $\xi_i \in \mathbb{R}$ 。最內層的狀態變數是 x ，每往外一層，就多加入一個新的狀態變數 ξ_i ，到最外層時，包含了系統的全部狀態變數 $[x, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k]$ 。控制的目的是要設計控制律 u ，使得全部狀態變數相對於原點都是漸進穩定。雖然(7.4.1)式比(7.3.1)式複雜很多，但控制律的設計步驟二者基本上是相同的。為了說明這一點，我們從最簡單的二層結構開始討論：

$$\dot{x} = f_0(x) + g_0(x)\xi_1 \quad (7.4.2a)$$

$$\dot{\xi}_1 = f_1(x, \xi_1) + g_1(x, \xi_1)u \quad (7.4.2b)$$

當 $f_1(x, \xi_1) = 0$ ， $g_1(x, \xi_1) = 1$ 時，(7.4.2)式即化成(7.2.1)式之標準形式。當 $f_1(x, \xi_1) \neq 0$ 時，我們仍然可透過以下的控制訊號轉換，將(7.4.2)式轉換成(7.2.1)式之標準形式：

$$u = \frac{1}{g_1(x, \xi_1)}[u_1 - f_1(x, \xi_1)] \quad (7.4.3)$$

將此轉換代入(7.4.2b)中，得到標準形式

$$\dot{x} = f_0(x) + g_0(x)\xi_1 \quad (7.4.4a)$$

$$\dot{\xi}_1 = u_1 \quad (7.4.4b)$$

對於這一標準系統，其控制律的設計已於 7.2 節討論過，結果如(7.2.13)式所示：

$$u_1 = \phi_2(x, \xi_1) = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} [f_0(x) + g_0(x)\xi_1] - \frac{\partial V_1}{\partial x} g_0(x) - k[\xi_1 - \phi_1(x)] \quad (7.4.5)$$

相對應的 Lyapunov 函數由(7.2.9)式所示

$$V_2(x, \xi_1) = V_1(x) + (\xi_1 - \phi_1(x))^2/2 \quad (7.4.6)$$

其中 $\phi_1(x)$ 與 $V_1(x)$ 是內層子系統 $\dot{x} = f_0(x) + g_0(x)\xi_1$ 的控制律與 Lyapunov 函數。最後再將(7.4.5)式代入(7.4.3)式，即得原系統(7.4.2)的穩定控制律：

$$u = \frac{1}{g_1(x, \xi_1)} \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial x} [f_0(x) + g_0(x)\xi_1] - \frac{\partial V_1}{\partial x} g_0(x) - k[\xi_1 - \phi_1(x)] - f_1(x, \xi_1) \right] \quad (7.4.7)$$

接著將以上的雙層結構系統分析擴展到三層結構：

$$\dot{x} = f_0(x) + g_0(x)\xi_1 \quad (7.4.8a)$$

$$\dot{\xi}_1 = f_1(x, \xi_1) + g_1(x, \xi_1)\xi_2 \quad (7.4.8b)$$

$$\dot{\xi}_2 = f_2(x, \xi_1, \xi_2) + g_2(x, \xi_1, \xi_2)u \quad (7.4.8c)$$

第三層的結構包含 $[x, \xi_1, \xi_2]$ 三個狀態變數，為了將之表達成內、外層結構的關係，將(7.4.8a)式與(7.4.8b)式結合成單一向量的形式。定義向量

$$X = \begin{bmatrix} x \\ \xi_1 \end{bmatrix}, F(X) = \begin{bmatrix} f_0(x) + g_0(x)\xi_1 \\ f_1(x, \xi_1) \end{bmatrix}, G(X) = \begin{bmatrix} 0 \\ g_1(x, \xi_1) \end{bmatrix} \quad (7.4.9)$$

則(7.3.2)式的三個式子可改寫成如下的內、外層結構式：

$$\begin{aligned} \dot{X} &= f(X) + G(X)\xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= f_2(x, \xi_1, \xi_2) + g_2(x, \xi_1, \xi_2)u \end{aligned} \quad (7.4.10)$$

再透過控制訊號的轉換

$$u = \frac{1}{g_2(x, \xi_1, \xi_2)} [u_2 - f_2(x, \xi_1, \xi_2)] \quad (7.4.11)$$

(7.4.11)式可進一步化簡成標準形式：

$$\begin{aligned} \dot{X} &= f(X) + G(X)\xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= u_2 \end{aligned} \quad (7.4.12)$$

其中能確保漸進穩定的控制律 u_2 可由(7.3.8)式獲得

$$\begin{aligned} u_2 &= \phi_3(x, \xi_1, \xi_2) \\ &= \frac{\partial \phi_2}{\partial X} [F(X) + G(X)\xi_2] - \frac{\partial V_2}{\partial X} G(X) - k[\xi_2 - \phi_2(x, \xi_1)] \\ &= \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial x} \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_1} \right] \begin{bmatrix} f(x) + g(x)\xi_1 \\ f_1(x, \xi_1) + g_1(x, \xi_1)\xi_2 \end{bmatrix} - \left[\frac{\partial V_2}{\partial x} \frac{\partial V_2}{\partial \xi_1} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ g_1 \end{bmatrix} - k[\xi_2 - \phi_2(x, \xi_1)] \\ &= \frac{\partial \phi_2}{\partial x} (f_0(x) + g_0(x)\xi_1) + \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_1} (f_1 + g_1\xi_2) - \frac{\partial V_2}{\partial \xi_1} g_1 - k[\xi_2 - \phi_2(x, \xi_1)] \end{aligned} \quad (7.4.13)$$

其中 $\phi_2(x, \xi_1)$ 及 $V_2(x, \xi_1)$ 已於(7.4.5)式及(7.4.6)式中求得。最後再將 u_2 代入(7.4.11)式，即得(7.4.8)式中的控制律

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{g_2(x, \xi_1, \xi_2)} [u_2 - f_2(x, \xi_1, \xi_2)] \\ &= \frac{1}{g_2} \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial x} (f_0 + g_0\xi_1) + \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_1} (f_1 + g_1\xi_2) - \frac{\partial V_2}{\partial \xi_1} g_1 - k[\xi_2 - \phi_2(x, \xi_1)] - f_2 \right] \end{aligned} \quad (7.4.14)$$

依據相同的擴展方法，我們可以分析更多層結構的控制律設計。例如對於四層結構系統，(7.4.13)式變成

$$\begin{aligned} \dot{X} &= f(X) + G(X)\xi_3 \\ \dot{\xi}_3 &= u_3 \end{aligned} \quad (7.4.15)$$

其中向量 $X = [x \xi_1 \xi_2]^T$ 包含前三層的狀態變數。

範例 7.4.1 (Marquez, 2003)

本例題討論逆向步進控制在磁浮系統的應用。磁浮原理廣泛應用在磁浮火車、磁浮軸承及任何需要減少接觸摩擦的系統，例如陀螺儀與加速儀。參考圖 7.4.1，一顆球質量 m 受到磁力作用而在垂直方向運動，磁力的大小由直流電源所控制。球與上方電磁鐵的距離設為 y ，向下為正。

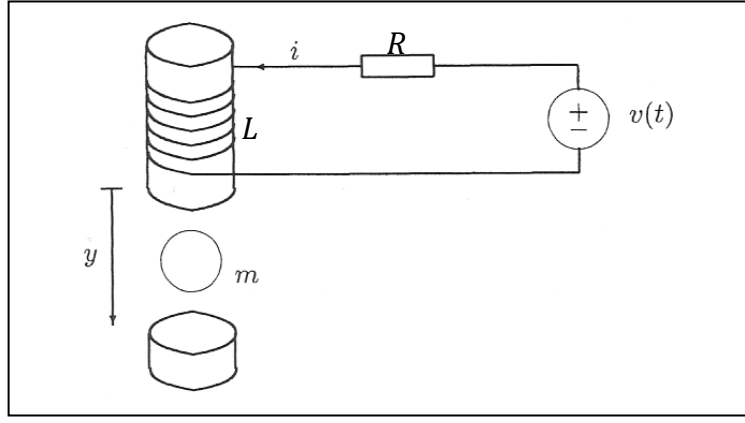


圖 7.4.1 磁浮球運作的基本機制(Marquez, 2003)。

球在垂直方向的運動方程式可表成

$$m\ddot{y} = F - k\dot{y} + mg \quad (7.4.16)$$

其中 $k\dot{y}$ 是球所受到的空氣阻力， F 是球受到的磁力。儲存在電感線圈中的電磁能為

$$E = I^2/2 \quad (7.4.17)$$

其中 I 是流過線圈的電流， L 是線圈的電感，其值受到球位置的影響，所以是 y 的函數

$$L = L(y) = \frac{\lambda}{1+\mu y} \quad (7.4.18)$$

其中 λ 與 μ 為常數。球所受到的磁力可由電磁能 E 對位置 y 的微分而得到：

$$F = \frac{\partial E}{\partial y} = \frac{I^2}{2} \frac{d}{dy} L(y) = -\frac{1}{2} \frac{\lambda \mu I^2}{(1+\mu y)^2} \quad (7.4.19)$$

將磁力 F 代入(7.4.16)式，得到磁浮球在垂直方向的運動方程式

$$m\ddot{y} = -\frac{1}{2} \frac{\lambda \mu I^2}{(1+\mu y)^2} - k\dot{y} + mg \quad (7.4.20)$$

定義狀態變數 $x_1 = y$ ， $x_2 = \dot{y}$ ，將上式改成狀態方程式的形式：

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (7.4.21a)$$

$$\dot{x}_2 = g - \frac{k}{m} x_2 - \frac{\lambda \mu I^2}{2m(1+\mu x_1)^2} \quad (7.4.21b)$$

透過對線圈電流 I 的控制，我們希望將磁浮球驅動到指定的平衡高度 y_0 。在上式中，令 $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ ，得到維持在平衡高度 y_0 時，所需要的電流量為

$$I_0^2 = \frac{2mg}{\lambda \mu} (1 + \mu y_0)^2$$

為了將座標原點移到平衡點上，定義新座標及控制訊號如下：

$$x = x_1 - y_0 \rightarrow \dot{x} = \dot{x}_1$$

$$\xi = x_2 \rightarrow \dot{\xi} = \dot{x}_2$$

$$u = I^2 - I_0^2 = I^2 - \frac{2mg}{\lambda \mu} (1 + \mu y_0)^2$$

則(7.4.21)式用新座標表示變成

$$\dot{x} = \xi \quad (7.4.22a)$$

$$\dot{\xi} = g - \frac{k}{m}\xi - \frac{g(1+\mu y_0)^2}{[1+\mu(x+y_0)]^2} - \frac{\lambda\mu}{2m[1+\mu(x+y_0)]^2}u \quad (7.4.22b)$$

此式與(7.4.2)式比較

$$\dot{x} = f_0(x) + g_0(x)\xi_1 \quad (7.4.23a)$$

$$\dot{\xi}_1 = f_1(x, \xi_1) + g_1(x, \xi_1)u \quad (7.4.23b)$$

我們可以得到如下的對應式：

$$f_0(x) \rightarrow 0, g_0(x) \rightarrow 1 \quad (7.4.24a)$$

$$f_1(x, \xi_1) \rightarrow g - \frac{k}{m}\xi_1 - \frac{g(1+\mu y_0)^2}{[1+\mu(x+y_0)]^2}, g_1(x, \xi_1) \rightarrow -\frac{\lambda\mu}{2m[1+\mu(x+y_0)]^2} \quad (7.4.24b)$$

將以上的對應式代到(7.4.7)式中，即可得到所要之控制律。為方便參閱，(7.4.7)式再重述如下

$$u = \frac{1}{g_1(x, \xi_1)} \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial x} [f_0(x) + g_0(x)\xi_1] - \frac{\partial V_1}{\partial x} g_0(x) - k[\xi_1 - \phi_1(x)] - f_1(x, \xi_1) \right] \quad (7.4.25)$$

在上式中， V_1 是針對(7.4.22a)子系統的 Lyapunov 函數，可選為最簡單的形式 $V_1(x) = x^2/2$ ，接著取對時間的微分，得到 $\dot{V}_1 = x\xi$ ，其中 ξ 是(7.4.22a)子系統的控制訊號。為了使得 $\dot{V}_1 < 0$ ，控制訊號 ξ 的最簡單設計為

$$\xi = \phi_1(x) = -x$$

此時有 $\dot{V}_1 = -x^2 < 0$ 。將 V_1 及 ϕ_1 及(7.4.24)式代入(7.4.25)式，得到磁浮系統的控制訊號

$$\begin{aligned} u &= \phi_2(x, \xi) \\ &= -\frac{2m[1+\mu(x+y_0)]^2}{\lambda\mu} \left[-(1+k)(x+\xi) + \frac{k}{m}\xi - g + \frac{g(1+\mu y_0)^2}{[1+\mu(x+y_0)]^2} \right] \end{aligned} \quad (7.4.26)$$

在控制 u 的作用下，(7.4.22)式所表示的閉迴路磁浮系統化成簡單的形式：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x \\ \dot{\xi} &= -(1+k)(x+\xi) \end{aligned} \quad (7.4.27)$$

□

7.5 具有強健性的逆向步進控制

系統的數學模型通常無法百分之百正確描述系統的實際行為。縱使可以，系統由於受到外在環境的干擾，其數學模型會隨時間變化，無法用確切的方程式加以表示。在這些情況下，我們稱系統具有不確定的動態。強健控制設計就是當系統具有不確定動態時，仍能確保系統的穩定性。這一節我們將說明逆向步進控制如何在不確定動態的作用下，仍能確保系統的穩定性(Khalil, 1996)。

$$\dot{x} = f_0(x) + g_0(x)\xi + \delta_x(x) \quad (7.5.1a)$$

$$\dot{\xi} = f_1(x, \xi) + g_1(x, \xi)u + \delta_\xi(x, \xi) \quad (7.5.1b)$$

上式與(7.4.2)式比較起來，多了 2 個不確定動態 $\delta_x(x)$ 與 $\delta_\xi(x, \xi)$ ，其不確定的範圍由下列不等式所描述：

$$\|\delta_x(x, \xi)\|_2 \leq \alpha_1 \|x\|_2, |\delta_\xi(x, \xi)| \leq \alpha_2 \|x\|_2 + \alpha_3 |\xi| \quad (7.5.2)$$

其中 α_i 為正常數，符號 $\|\cdot\|_2$ 代表向量的長度。根據逆向步進控制的標準步驟，先對(7.5.1a)式的子系統設計控制律 ξ 。假設所得控制律為 $\xi = \phi_1(x)$ ，同時存在 Lyapunov 函數 $V_1(x)$ 使得

$$\dot{V}_1(x) = \frac{\partial V_1}{\partial x} [f_0(x) + g_0(x)\phi(x) + \delta_x(x, \xi)] \leq -c\|x\|_2^2 < 0 \quad (7.5.3)$$

這條件保證子系統為漸進穩定。另外假設所得控制律 $\xi = \phi_1(x)$ 的大小範圍滿足以下條件：

$$|\phi_1(x)| \leq \alpha_4\|x\|_2, \left\| \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right\|_2 \leq \alpha_5 \quad (7.5.4)$$

得到子系統的控制律 $\phi_1(x)$ 及 Lyapunov 函數 $V_1(x)$ 後，(7.5.1)式整合系統的 Lyapunov 函數 $V_2(x)$ 即可取為

$$V_2(x, \xi) = V_1(x) + \frac{1}{2}[\xi - \phi_1(x)]^2 \quad (7.5.5)$$

而控制律 u 的設計是要使得 $\dot{V}_2 < 0$ 。對上式的 V_2 取對時間的微分得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + [\xi - \phi(x)][\dot{\xi} - \dot{\phi}(x)] \\ &= \frac{\partial V_1}{\partial x} (f_0 + g_0\phi + \delta_\eta) + \frac{\partial V_1}{\partial x} g(\xi - \phi) \\ &\quad + (\xi - \phi) \left[f_1 + g_1u + \delta_\xi - \frac{\partial \phi}{\partial x} (f_0 + g_0\phi + \delta_\eta) \right] \end{aligned} \quad (7.5.6)$$

將控制 u 取成如下的形式

$$u = \frac{1}{g_1} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} (f_0 + g_0\xi) - \frac{\partial V_1}{\partial x} g_0 - f_1 - k(\xi - \phi) \right], k > 0 \quad (7.5.7)$$

其中 k 是待定的控制增益。代入(7.5.6)式並利用(7.5.3)式的已知條件可得如下結果

$$\dot{V}_2 \leq -c\|x\|_2^2 + (\xi - \phi) \left(\delta_\xi - \frac{\partial \phi}{\partial x} \delta_x \right) - k(\xi - \phi)^2 \quad (7.5.8)$$

再利用(7.5.2)式與(7.5.4)式的不等式條件，上式可繼續化簡成

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq -c\|x\|_2^2 + 2\alpha_6\|x\|_2|\xi - \phi| - (k - \alpha_3)(\xi - \phi)^2 \\ &= -[\|x\|_2 \quad |\xi - \phi|] \begin{bmatrix} c & -\alpha_6 \\ -\alpha_6 & (k - \alpha_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|x\|_2 \\ |\xi - \phi| \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.5.9)$$

$\dot{V}_2 < 0$ 的條件只要中間矩陣為負定即可滿足，這相當於要求控制增益

$$k > \alpha_3 + \alpha_6^2/c \quad (7.5.10)$$

此時(7.5.9)式化成所要證明的結果

$$\dot{V}_2 \leq -\sigma(\|x\|_2^2 + |\xi - \phi|^2) < 0, \sigma > 0 \quad (7.5.11)$$

這說明由(7.5.7)式所給定的控制 u ，在(7.5.2)式的不確定性動態的作用下，仍可保證(7.5.1)式之非線性系統為漸進穩定。

7.6 學習評量

7.6.1 本題繼續範例 7.4.1 的討論。在範例 7.4.1 中，我們做了一個假設：線圈電流是外界輸入的獨立訊號，可作為控制之用。然則在圖 7.4.1 的架構下，外界輸入的獨立訊號是直流驅動電壓 v ，而非電流 I 。二者的關係可由電路基本原理求得

$$v = RI + \frac{d}{dt}(LI) \quad (7.6.1)$$

(1) 利用(7.4.18)式的電感 L 表示式，證明下列的關係式：

$$v = RI - \frac{\lambda \mu I}{(1+\mu y)^2} \frac{dy}{dt} + \frac{\lambda}{1+\mu y} \frac{dI}{dt} \quad (7.6.2)$$

(2) 定義狀態變數： $x_1 = y$ ， $x_2 = \dot{y}$ ， $x_3 = I^2$ ，證明(7.4.20)式與(7.6.2)式的聯立可得到如下的狀態方程式：

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (7.6.3a)$$

$$\dot{x}_2 = g - \frac{k}{m} x_2 - \frac{\lambda \mu x_3}{2m(1+\mu x_1)^2} \quad (7.6.3b)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{2(1+\mu x_1)}{\lambda} \left[-R x_3 + \frac{\lambda \mu x_2 x_3}{(1+\mu x_1)^2} + x_3^{1/2} v \right] \quad (7.6.3c)$$

(3) 求出以上三階系統的平衡點 $(x_{1eq}, x_{2eq}, x_{3eq})$ ，以及使系統維持在平衡點處之控制 v_{eq} 。

(4) 定義新狀態變數 $x = x_1 - x_{1eq}$ ， $\xi_1 = x_2 - x_{2eq}$ ， $\xi_2 = x_3 - x_{3eq}$ ， $u = v - v_{eq}$ ，證明(7.6.3)式可表成如下之標準形式：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_0(x) + g_0(x)\xi_1 \\ \dot{\xi}_1 &= f_1(x, \xi_1) + g_1(x, \xi_1)\xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= f_2(x, \xi_1, \xi_2) + g_2(x, \xi_1, \xi_2)u \end{aligned} \quad (7.6.4)$$

並求出上式中的所有待定函數 f_i 與 g_i 。

(5) 以逆向步進法設計控制律 $u(x, \xi_1, \xi_2)$ ，使得(7.6.4)式為漸進穩定。

7.6.2 本章所介紹的逆向步進控制原理限於控制訊號是純量(單輸入)的情形，本題將探討如何將之擴展至多控制輸入的情形。考慮如下的多輸入控制系統

$$\dot{x} = f_0(x) + G_0(x)\xi \quad (7.6.5a)$$

$$\dot{\xi} = f_1(x, \xi) + G_1(x, \xi)u \quad (7.6.5b)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ ， $\xi \in \mathbb{R}^m$ ， $u \in \mathbb{R}^m$ ， $G_0(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ， $G_1(x) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 。控制訊號 u 現在是向量，包含有 m 個分量，並假設矩陣 $G_1(x)$ 的逆矩陣存在。本題的目的是要設計控制律 u 使得整合狀態 $[x \xi]^T \in \mathbb{R}^{n+m}$ 為漸進穩定。逆向步進控制仍然分內、外層二步驟進行。

(1) 先對內層子系統(7.6.5a)式進行狀態回授控制，假設所選取的控制律為 $u = \phi(x)$ ，證明若存在 Lyapunov 函數 $V_1(x)$ 滿足

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} [f_0(x) + G_0(x)\phi(x)] \leq -V_a(x) \quad (7.6.6)$$

其中 $V_a(x)$ 為正定函數，則子系統(7.6.5a)式必為漸進穩定。

(2) 外層系統包含整合狀態 $[x \xi]^T$ ，其所對應的 Lyapunov 函數可選成：

$$V_2(x, \xi) = V_1(x) + \frac{1}{2} [\xi - \phi(x)]^T [\xi - \phi(x)] \quad (7.6.7)$$

證明若控制律 u 設計成

$$u = G_1^{-1} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} (f_0(x) + G_0(x)\xi) - \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} G_0(x) \right)^T - f_1(x, \xi) - k(\xi - \phi(x)) \right] \quad (7.6.8)$$

則必有 $\dot{V}_2(x, \xi) < 0$ ，亦即證明上式的 u 可使得系統(7.6.5)式為漸進穩定。

7.6.3 考慮非線性系統

$$\dot{x}_1 = x_1 x_2 \quad (7.6.9a)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + u \quad (7.6.9b)$$

利用逆向步進控制原理，設計控制律 $u(x_1, x_2)$ 使得整合狀態 $[x_1 x_2]^T$ 為全域漸進穩定。

7.6.4 考慮二階非線性系統

$$\dot{x}_1 = -x_2 - \frac{3}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_1^3 \quad (7.6.10a)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (7.6.10b)$$

利用逆向步進控制原理，設計線性控制律 $u(x_1, x_2) = -k_1 x_1 - k_2 x_2$ 使得整合狀態 $[x_1 x_2]^T$ 為全域漸進穩定。(提示:避免利用 u 去對消系統中的非線性項)

7.6.5 考慮二階非線性系統

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_1^2 + x_1 x_2 \quad (7.6.11)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + (1 + x_2^2)u$$

利用逆向步進控制原理，設計控制律 $u(x_1, x_2)$ 使得整合狀態 $[x_1 x_2]^T$ 相對於原點為漸進穩定。

7.6.6 考慮三階非線性系統

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_1^3 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= u \end{aligned} \quad (7.6.12)$$

利用逆向步進控制原理，設計控制律 $u(x_1, x_2, x_3)$ 使得整合狀態 $[x_1 x_2 x_3]^T$ 相對於原點為漸進穩定。

7.6.7 考慮具有不確定動態的二階非線性系統

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \delta_1 x_1 \sin x_2, |\delta_1| \leq a \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \delta_2 x_2 + u, |\delta_2| \leq b \end{aligned} \quad (7.6.12)$$

利用 7.6.5 節所介紹的逆向步進控制設計步驟，設計控制律 $u(x_1, x_2)$ 使得整合狀態 $[x_1 x_2]^T$ 在不確定動態的作用下，仍可保有漸進穩定的特性(相對於原點)。(提示:比較(7.5.1)式與(7.6.12)式)

參考文獻

相較於其他非線性控制理論分支的發展，逆向步進控制(Backstepping Control)的出現顯得

晚了許多。翻閱 1980 年代及 1990 年代初期的控制領域教科書，我們還看不到『逆向步進控制』這個名詞。回溯逆向步進控制概念的源頭，最遠可以追溯到 1989 年出現的幾篇相關論文，如 Tsiniias, 1989; Byrnes, C. I. and Isidori, 1989; Kokotovic, P. V. and Sussmann, 1989。隔年，積分型逆向步進控制的疊代設計正式被提出(Saberi, 1990)，並且被持續改良(Kanellakopoulos, 1992)。1991 年 Kokotovic 獲得當年度的 Bode Prize，在他的演講論文中(Kokotovic, 1991)，對於逆向步進控制觀念的起源以及其與適應性控制與強健控制的結合，有很精闢的解說。

逆向步進控制所扮演的主要角色是提供適應性控制從線性系統往非線性系統發展的橋樑，可以說『適應性逆向步進控制』(Adaptive Backstepping Control)成就了非線性適應性控制理論的發展(Kanellakopoulos, 1991)。逆向步進控制與適應性控制完成結合後，又進一步與強健控制結合，而成為 Robust Adaptive Backstepping Control，解決了具有不確定動態的非線性系統的控制問題，相關文獻可參閱 Qu, 1993; Marino and Tomei, 1993; Freeman and Kokotovic, 1993; Slotine and Hedrick, 1993; Krstic, Sun and Kokotovic, 1996。關於逆向步進控制理論的完整介紹，以及其與適應性與強健控制理論的結合，讀者可以參閱專書《Nonlinear and Adaptive Control Design》(Krstic, Kanellakopoulos and Kokotovic, 1995)。作為教科書的一個章節， Marquez (2003) 在他所著書《Nonlinear Control Systems》的第五章中，對於逆向步進控制的淺顯介紹，非常適合初學者的閱讀。

關於逆向步進控制的實際工業應用，以下列出幾個方向供讀者查閱：

- (1) 人造衛星控制(Ali, Radice and Kim, 2010; Kim and Kim, 2003)
 - (2) 無人車自動駕駛(Chen and Tomizuka, 1995)
 - (3) 機電控制系統(Dawson, Hu and Burg, 1998)
 - (4) 飛行控制系統(Harkegard and Glad, 2000; Li, Jing and Gao, 2009)
 - (5) 感應馬達(Kwan and Lewis, 2000)
 - (6) FPGA 晶片控制器(Lin, Chang and Huang, 2007)
 - (7) 迷你四旋翼直升機(Madani and Benallegue, 2006)
 - (8) 電子式油壓系統(Nakkarat and Kuntanapreeda, 2009)
 - (9) 混沌同步控制(Park, 2006; Wang and Ge, 2001)
 - (10) 磁浮軸承(Queiroz and Dawson, 1996)
 - (11) 汽車懸吊系統(Yagiz and Hacioglu, 2008)
- Ali, I., Radice, G. and Kim, J., Backstepping Control Design with Actuator Torque Bound for Spacecraft Attitude Maneuver, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 33, pp. 254-259, 2010.
 - Byrnes, C. I. and Isidori, A., New Results and Examples in Nonlinear Feedback Stabilization, Systems & Control Letters, 12, pp. 437-442, 1989.
 - Chen, C. and Tomizuka, M., Steering and Braking Control of Tractor-semitrailer Vehicles in Automated Highway Systems, Proceedings of 1995 American Control Conference, pp. 658-662, 1995.
 - Dawson, D. M., Hu, J. and Burg, T., Nonlinear Control of Electric Machinery, Marcel Dekker, 1998.
 - Freeman, R. A. and Kokotovic, P. V., Design of Softer Robust Nonlinear Control Laws,

Automatica, 29, pp. 1425-1437, 1993.

- Harkegard, O. and Glad, S. T., A Backstepping Design for Flight Path Angle Control, IEEE Conference on Decision and Control, pp. 3570-3575, 2000.
- Kanellakopoulos, I., Kokotovic, P. V. and Morse, A. S., A Toolkit for Nonlinear Feedback Design, Systems & Control Letters, 18, pp. 83-92, 1992.
- Kanellakopoulos, I., Kokotovic, P. V. and Morse, A. S., Systematic Design of Adaptive Controllers for Feedback Linearizable Systems, IEEE Trans. On Automatic Control, 36, pp. 1241-1253, 1991.
- Khalil, H. K., Nonlinear Systems, Prentice-Hall, 1996.
- Kim, K. S. and Kim, Y., Robust backstepping control for slew maneuver using nonlinear tracking function, IEEE Transactions on Control Systems Technology, 11, pp. 822-829, 2003.
- Kokotovic, P. V., The Joy of Feedback: Nonlinear and Adaptive, 1991 Bode Prize Lecture, Control Systems Magazine, 12, pp. 7-17, 1991.
- Kokotovic, P. V. and Sussmann, H. J., A Positive Real Condition for Global stabilization of Nonlinear Systems, Systems & Control Letters, 13, pp. 125-133, 1989.
- Krstic, M., Sun, J. and Kokotovic, P. V., Robust Control of Nonlinear Systems with Input Unmodeled Dynamics, IEEE Trans. On Automatic Control, 41, pp. 913-920, 1996.
- Krstic, M., Kanellakopoulos, I. and Kokotovic, P. V., Nonlinear and Adaptive Control Design, John Wiley & Sons, 1995.
- Kwan, C. M. and Lewis, F. L., Robust Backstepping Control of Induction Motors Using Neural Networks, IEEE Transactions on Neural Networks, 11, pp. 1178-1187, 2000.
- Li, C. Y., Jing, W. X. and Gao, C. S., Adaptive Backstepping-based Flight Control System Using Integral Filters, Aerospace Science and Technology, 13, pp. 105-113, 2009.
- Lin, F. J., Chang, C. K. and Huang, P. K., FPGA-Based Adaptive Backstepping Sliding-Mode Control for Linear Induction Motor Drive, IEEE Trans. on Power Electronics, 22, pp. 1222-1231, 2007.
- Madani, T. and Benallegue, A., Control of a Quadrotor Mini-Helicopter via Full State Backstepping Technique, IEEE Conferences on Decision and Control, pp. 1515 – 1520, 2006.
- Marino, R. and Tomei, P., Robust Stabilization of Feedback Linearizable Time-varying Uncertain Nonlinear Systems, Automatica, 29, pp. 181-189, 1993.
- Marquez, H. J., Nonlinear Control Systems: Analysis and Design, John Wiley & Sons, 2003.
- Nakkarat, P. and Kuntanapreeda, S., Observer-based Backstepping Force Control of an Electro-hydraulic Actuator, Control Engineering Practice, 17, pp. 895–902, 2009.
- Park, J. H., Synchronization of Genesio Chaotic System via Backstepping Approach, Chaos, Solitons and Fractals, 27, pp. 1369–1375, 2006.
- Qu, Z., Robust Control of Nonlinear Uncertain Systems under Generalized Matching Conditions, Automatica, 29, pp. 985-998, 1993.
- Queiroz, M. S. and Dawson, D. M., Nonlinear Control of Active Magnetic Bearings; A Backstepping Approach, IEEE Trans. on Control Systems Technology, 4, pp. 545-552, 1996.

- Saberi, A., Kokotovic, P. V. and Sussmann, H. J., Global Stabilization of Partially Linear Composite Systems, SIAM Journal of Control and Optimization, 28, pp. 1491-1503, 1990.
- Slotine, J.- J. E. and Hedrick, J. K., Robust Input-output Feedback Linearization, International Journal of Control, 57, pp. 1133-1139, 1993.
- Sontag, E. D. and Sussmann, H. J., Further Comments on the Stabilizability of the Angular Velocity of a Rigid Body, Systems & Control Letters, 12, pp. 213-217, 1988.
- Tsinias, J., Sufficient Lyapunov-like Conditions for Stabilization, Mathematics of Control, Signals and Systems, 2, pp. 343-357, 1989.
- Wang, C. and Ge, S. S., Adaptive Backstepping Control of Uncertain Lorenz System, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 11, No. 4 (2001) 1115–1119.
- Yagiz, N. and Hacioglu, Y., Backstepping control of a vehicle with active suspensions, Control Engineering Practice, 16, pp. 1457– 1467, 2008.