第 4 章作業

- 繳交日期 2020/11/07(星期六), 24:00 前
- 以 PDF 附件 email 傳送 cdyang@mail.ncku.edu.tw
- 作業上傳檔案名稱格式:非線性控制作業(第 4 章)_姓名_學號.pdf

4.1 利用 Lyapunov 直接定理分析下列非線性方程式在原點處之穩定性:

$$\dot{x}_1 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) \tag{1a}$$

$$\dot{x}_2 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) \tag{1b}$$

(a) 採用 Lyapunov 函數$V(x) = x_1^2 + x_2^2$，求出滿足$\dot{V} < 0$的(x_1, x_2)收斂範圍。

(b) 在此範圍內選 3 個初始點，用 Matlab 畫出相平面軌跡確認穩定性的預測。同時在確保穩定的範圍之外也任選 3 個初始點，是否由這些點出發的軌跡都為不穩定?解釋其原因。

(c) 不同$V(x)$函數所對應的收斂範圍均不同,最精確的收斂範圍必須由(1)式本身決定。透過座標轉換$(x_1, x_2) \to (r, \theta)$，求得使得$\dot{r} < 0$的$r$範圍，比較由(a)以條件$\dot{V} < 0$所得到的範圍有何不同?

4.2 利用可變梯度法求下列非線性系統的 Lyapunov 函數V

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^2 x_2, \qquad \dot{x}_2 = -x_2 \tag{3}$$

假設V的梯度可表成

$$\nabla \mathrm{V} = [a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \quad a_{21}x_1 + 2x_2]$$

不同的係數a_{ij}可得到不同的 Lyapunov 函數V。考慮下列二種不同的a_{ij}選擇，分別求得對應的 Lyapunov 函數V，並求出其可確保穩定的區域範圍:

(a) $a_{11} = 1, \qquad a_{21} = a_{12} = 0$

(b) $a_{11} = \dfrac{2}{(1 - x_1 x_2)^2}, \qquad a_{12} = \dfrac{-x_1^2}{(1 - x_1 x_2)^2}, \qquad a_{21} = \dfrac{x_1^2}{(1 - x_1 x_2)^2}$

(c) 系統(3)可穩定的範圍是以上二個範圍的交集或聯集?在保證穩定的範圍內選幾個初始點，以 Matlab 求解(3)式，證實平衡點為穩定；在穩定範圍之外也選幾個初始點，Matlab 求解所得之相平面軌跡是否必為發散?

4.3 考慮一個二階非線性系統

$$\dot{x}_1 = -\frac{6x_1}{(1 + x_1^2)^2} + 2x_2, \qquad \dot{x}_2 = \frac{-2(x_1 + x_2)}{(1 + x_1^2)^2} \tag{4}$$

本題是要測試(4)式相對於原點是否為全域穩定。

(a) 若取$V(x) = \frac{x_1^2}{1 + x_1^2} + x_2^2$，證明$V(x) > 0$，$\dot{V}(x) < 0$，$\forall x \in \mathcal{R}^2 - \{0\}$。亦即原點為漸近穩定。

(b) 測試$V(x)$是否滿足 radially unbounded 條件(參考講義 4.4 節)?也就是當x離原點無窮遠時，$V(x)$的值是否也必定趨近於無窮大?

(c) 畫出$V(x)$的等高線圖(令$V(x)$ =不同的常數值，從大排到小，取約 10 個數值)，並以此等高線圖為背景，畫出該系統的相平面軌跡。證明從某些點出發的相平面軌跡，其切割等高線圖的方式雖然滿足$\dot{V}(x) < 0$的條件，然而這些軌跡最後卻不進入平衡點，亦即此系統不為全域漸近穩定(參照講義的圖 4.4.2)。從數值上求出該系統可保證漸近穩定的初始值範圍。

(d) 證明實際上(3)式的平衡點有 2 個: (1) $x_1 = x_2 = 0$, (2) $x_1 = \pm\infty,\ x_2 = 0$。因此原

點並非全域穩定。確認在(c)的 10 條軌跡中，應該有些軌跡趨近於原點，即平衡點(1)，另外有一些軌跡則趨近於平衡點(2)。