

Chapter 8

滑動模式控制 (Sliding Mode Control)

本書所介紹的幾種非線性控制的方法，例如第 6 章的回授線性化(feedback linearization)、第 7 章的逆向步進控制(backstepping control)、第 8 章的滑動控制(sliding control)、第 9 章的適應性控制(adaptive control)、第 10 章的 H_∞ 強健控制(robust control)、第 11 章的最佳控制(optimal control)以及第 12 章的混沌控制(chaotic control)，若以控制器因應對抗環境變化的策略來做區分，則可分為二大類型：

- 強健控制(robust control)類型：如滑動模式控制或 H^∞ 控制；其特性是控制器的參數固定，而允許在系統或環境變化的情況下，仍能維持穩定度和性能表現的滿足，這是『以不變應萬變』的策略。
- 適應控制(adaptive control)：如自我調整(self-tuning)、模式追隨(model-following)及自我學習(self-learning)之控制，其控制器的參數隨著環境之變化而調整，是『以動制動』的策略。

本章所要討論的滑動模式控制是屬於強健控制策略的一種。滑動控制的核心主角是滑動面(sliding surface)，它是相空間中的一條曲線或曲面，其代表控制系統最後所要進入的狀態。圖 8.1.1 即為滑動面的示意圖，不管初始位置在哪裡，滑動模式控制的目的是驅動所有相平面軌跡最後都能進入滑動面上。就像是溜滑梯一樣，每一條軌跡最後都滑入了指定的滑動面，故稱之為 sliding control。依此定義，極限圓就是一個天然的滑動面，如第一章的圖 1.5.2 所示，不管在圓內或圓外，所有的軌跡最後都自動進入了極限圓，不須外界控制力的介入。

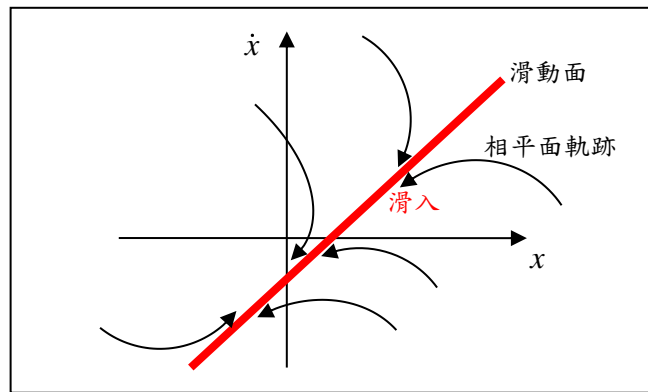


圖 8.1.1 滑動面代表控制系統最後要進入的狀態

8.1 滑動控制的基本精神

然而一般人為所選定的滑動面，不一定具備極限圓的天然特性，所以需透過控制力的協助。滑動控制就是幫助系統進入滑動面所採取的一切控制行為，其包含兩部分：

- (1) 滑動控制的策略必須使得不管系統初始動態位於相平面的哪一點，均有往滑動面運動的趨勢。
- (2) 一旦系統進入滑動面，滑動控制需確保系統一直維持在滑動面內，而不致離開。

以上二點即滑動控制的基本精神，下面將要推導出的滑動控制律即是根據這二點所推演的。

滑動控制是可變結構系統(variable structure system, VSS)的一種應用。可變結構系統的基本特性是控制增益會在數個不同的數值間做切換，每一個增益代表一個結構，故稱為可變結構。可變結構系統在不同的結構間作切換，以達到漸進穩定的目的，但值得注意的是每一個單獨的結構通常均不能保證漸進穩定，吾人茲以下面的例子作說明。

例題 8.1.1 (Utkin, 1977)

試考慮二階系統

$$\ddot{x} + \Psi x = 0 \quad (8.1.1)$$

對應於參數 Ψ 的二個不同數值，此系統具有二個結構

$$(1) \Psi = \alpha_1^2; \quad (2) \Psi = \alpha_2^2$$

其中 $\alpha_1^2 > \alpha_2^2$ 。其相平面圖如圖 8.1.2a 與圖 8.1.2b 所示， $\Psi = \alpha_1^2$ 所對應的結構是縱向的中心點(center)軌跡， $\Psi = \alpha_2^2$ 所對應的結構是橫向的中心點(center)軌跡，可看出二者均非漸進穩定。但若將此二結構合併，並採用下列之切換邏輯

$$\Psi = \begin{cases} \alpha_1^2, & \text{若 } x\dot{x} > 0 \\ \alpha_2^2, & \text{若 } x\dot{x} < 0 \end{cases} \quad (8.1.2)$$

亦即在一、三象限採用縱向的中心點軌跡，

$$\ddot{x} + \alpha_1^2 x = 0 \quad (8.1.3)$$

而在二、四象限採用橫向的中心點軌跡，

$$\ddot{x} + \alpha_2^2 x = 0 \quad (8.1.4)$$

此二結構的交相切換下，其結果如圖 8.1.2c 所示，是一個漸進穩定的系統。當軌跡從 A 點出發，沿著縱向橢圓到達 B 點時，由於 \overline{OB} 是縱向橢圓的短軸， $\overline{OB} < \overline{OA}$ ，B 點比 A 點更接近原點 O。當軌跡繼續沿著橫向橢圓從 B 點到達 C 點時，由於 \overline{OC} 是橫向橢圓的短軸， $\overline{OC} < \overline{OB}$ ，C 點比 B 點更接近原點 O。因此軌跡每切換到一個新的橢圓，其與原點的距離又更接近了一些。

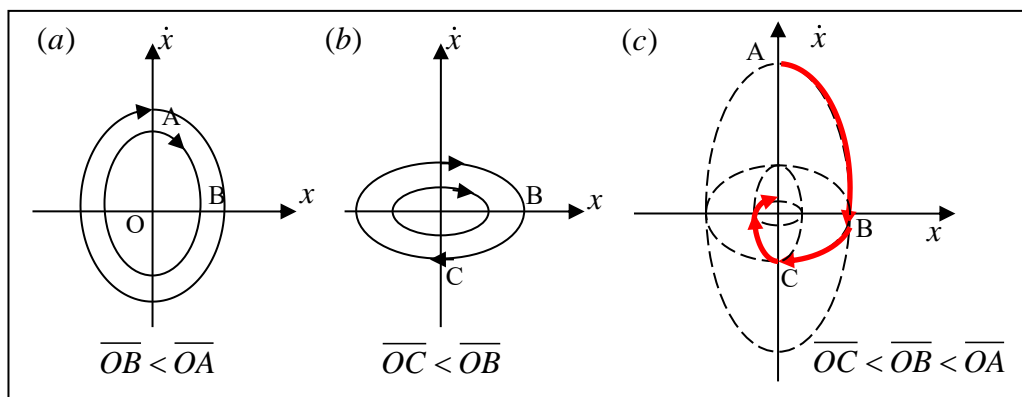


圖 8.1.2 二個非漸進穩定的系統經過切換後，變成漸進穩定，如圖(c)所示。

□

例題 8.1.2 (Utkin, 1977)

考慮另一個二階系統

$$\ddot{x} - \xi \dot{x} + \Psi x = 0 \quad (8.1.5)$$

其包含二個結構如圖 8.1.3 所示：

- (1) $\Psi = -\alpha, \alpha > 0$: 對應的動態方程式為 $\ddot{x} - \xi\dot{x} - \alpha x = 0$ ，具有二個極點，一正一負，故相平面軌跡為鞍點結構，具有兩條漸進線，其中在二、四象限的漸近線為穩定，而在一、三象限的漸近線為不穩定，如圖 8.1.3 的左圖所示。

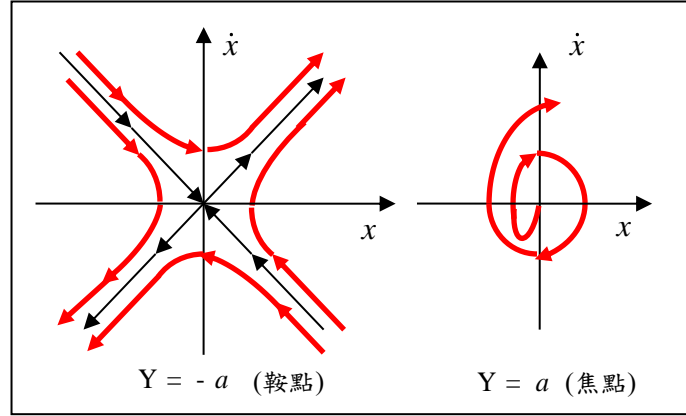


圖 8.1.3 二個不同的結構

- (2) $\Psi = \alpha, \alpha > 0$: 對應的動態方程式為 $\ddot{x} - \xi\dot{x} + \alpha x = 0$ ，此時二個極點是落在右半平面的共軛複數根，故相平面軌跡是屬於不穩定的焦點結構，如圖 8.1.3 的右圖所示。

若將此二個結構合併，並採用下列之切換邏輯

$$\Psi = \begin{cases} \alpha, & xs > 0 \\ -\alpha, & xs < 0 \end{cases} \quad (8.1.6)$$

其中 $s = cx + \dot{x} = 0$ 為漸進線(穩定分支)方程式，即所謂的滑動面。 $xs < 0$ 的區域即為圖 8.1.4 所標示的區域 II，該區域是 Y 軸與漸進線二者之間所夾的區域。在區域 II 之中，採用鞍點軌跡 $\Psi = -\alpha$ 。反之，在區域 I 之中，則採用不穩定焦點軌跡 $\Psi = \alpha$ 。

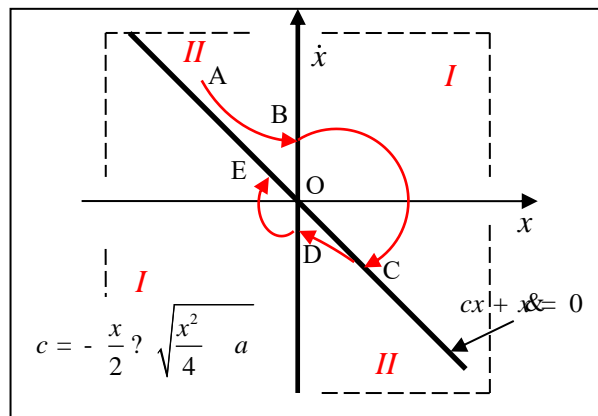


圖 8.1.4 切換結合後的系統為漸進穩定

原先的鞍點結構與焦點結構都是不穩定的，但經過上面的切換控制後，其所結合的可變結構系統卻是漸進穩定的，如圖 8.1.4 所示的紅色箭頭軌跡。鞍點結構具有二條漸進線，其中一條是穩定的，而沿著此一穩定漸進線運動，軌跡有往平衡點接近的趨勢。結合後的系統能夠穩定的原因正是利用了這一穩定漸進線的功能，而不穩定的焦點結構只是做為傳輸轉接的工具，負責將軌跡轉運到收斂的區間 II。如圖 8.1.4 所示，系統軌跡由 A 點出發，沿著收斂的

漸近線到達 B 點，此時有 $\overline{OB} < \overline{OA}$ ，再經過不穩定焦點軌跡的轉運，越過區域 I 到達 C 點。由於該焦點軌跡是不穩定的，使得 $\overline{OC} > \overline{OB}$ 。C 點到 D 點則是沿著漸近線往原點方向運動，而有 $\overline{OD} < \overline{OC}$ 。然後 D 點再經由一次焦點軌跡的轉運到達 E 點。雖然中間過程的軌跡有時漸離原點，有時漸近原點，但經過第一個迴圈後，所到達的位置 $\overline{OE} < \overline{OA}$ ，已經比起始點更接近原點。如此再經由第二次、第三次迴圈的運作，軌跡將距離平衡點越來越近。因此經由切換的控制，整體軌跡呈現出漸進穩定的特徵。

□

8.2 滑動面的功能

滑動控制就是透過切換的動作使得非線性系統變成穩定，同時達到追蹤指令的功能。對於 n 階非線性系統

$$\dot{X} = f(X) + g(X)u \quad (8.2.1)$$

其中向量 $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T = [x, dx/dt, \dots, d^{n-1}x/dt^{n-1}]^T$ 包含位置 x 的各階導數。假設控制的目的是要達成指令的追蹤功能

$$X \xrightarrow{\text{追蹤}} X_d, X_d = [x_d, \dot{x}_d, \dots, x_d^{(n-1)}] \quad (8.2.2)$$

並假設追蹤誤差為

$$\bar{X} = X - X_d = [\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \bar{x}^{(n-1)}] \quad (8.2.3)$$

追蹤的程度如何，端看 \bar{x} 及其各階導數接近 0 的程度；而滑動面即可視為是 \bar{x} 及其各階導數接近於 0 之總體指標。為了追蹤的目的，吾人可選擇滑動面如下：

$$\begin{aligned} S(\bar{X}, t) &= \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} \bar{x} = \bar{x}^{(n-1)} + (n-1)\lambda \bar{x}^{(n-2)} + \dots + \lambda^{n-1} \bar{x} \\ &= \bar{x}_n + (n-1)\lambda \bar{x}_{n-1} + \dots + \lambda^{n-1} \bar{x}_1 \end{aligned} \quad (8.2.4)$$

(8.2.4) 式為 n 個狀態變數的線性組合，而滑動面方程式為

$$S(\bar{X}, t) = \bar{x}_n + (n-1)\lambda \bar{x}_{n-1} + \dots + \lambda^{n-1} \bar{x}_1 = 0 \quad (8.2.5)$$

在 n 度相空間來看，這是一個 n 維的曲面(若是線性組合則為 n 維的平面)，例如

- $S(\bar{X}) = a\bar{x}_1 + b\bar{x}_2 = 0$: 代表二維的滑動面，是一直線。
- $S(\bar{X}) = a\bar{x}_1 + b\bar{x}_2 + c\bar{x}_3 = 0$: 代表三維的滑動面，是一平面。

滑動控制的目的即是要驅使系統的動態軌跡進入 $S(\bar{X}, t) = 0$ 所定義的曲面上。下面吾人要檢測，當系統穩定進入滑動面 $S(\bar{X}, t) = 0$ 後，是否能達到追蹤的功能？亦即當 $S(\bar{X}, t) = 0$ 時，是否滿足以下條件

$$X(t) \rightarrow X_d(t) \Rightarrow \bar{X}(t) = X - X_d \rightarrow 0$$

實際上，吾人有如下之定理：若 $|S| \rightarrow 0$ 時，則追蹤誤差及其各階導數皆趨近於 0；亦即 $|S(\bar{X}, t)|$ 的大小可視為追蹤效果的好壞。

定理 8.2.1

若 $|S(\bar{X}, t)| \leq \Phi, \forall t \geq 0$ ，則有

$$|\bar{x}^{(i)}(t)| \leq (2\lambda)^i \varepsilon, i = 0, 1, 2, \dots, n-1, \varepsilon = \Phi/\lambda^{n-1}$$

證明：

滑動面的方程式為

$$S(\bar{X}, t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} \bar{x}, \quad p = \frac{d}{dt}, \quad \lambda > 0$$

可用下列方塊圖表示之

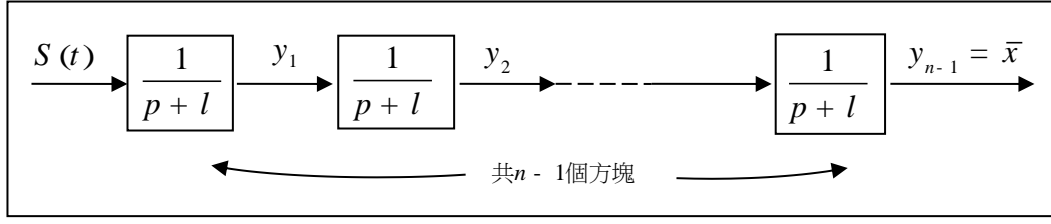


圖 8.2.1 滑動面方塊圖(Slotine, 1991)

首先觀察 $S(t)$ 和 $y_1(t)$ 間之不等關係

$$S(t) = (p + \lambda)y_1(t) \Rightarrow \dot{y}_1 + \lambda y_1 = S(t) \Rightarrow y_1(t) = \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} S(\tau) d\tau$$

$$\Rightarrow |y_1(t)| \leq \Phi \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau, \quad (\because |S(\tau)| \leq \Phi)$$

$$= \frac{\Phi}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \leq \frac{\Phi}{\lambda}$$

利用相同的步驟，可證明 $y_2(t)$ 滿足 $|y_2(t)| \leq \Phi/\lambda^2$ 。則經過 $n-1$ 個相同步驟後，可得到 $|\bar{x}| = |y_{n-1}(t)| \leq \Phi/\lambda^{n-1}$ ，亦即每經過圖 8.2.1 中的一個方塊轉換，輸出即乘以 $1/\lambda$ 。故當

$$|S(t)| \leq \Phi \rightarrow 0 \text{ 時， } |\bar{x}| \leq \Phi/\lambda^{n-1} \rightarrow 0$$

因此當軌跡進入滑動面時， $S(t) = \Phi = 0$ ，此時追蹤誤差 $\bar{x} = 0$ 。

下面再檢查追蹤誤差的各階導數 $|\bar{x}^{(i)}|$ 是否也同時趨近於零。 $\bar{x}^{(i)}$ 可視為 \bar{x} 經過 i 個微分器而得，也就是把方塊圖 8.2.1 多乘 i 個微分器而得到如圖 8.2.2 的結果：

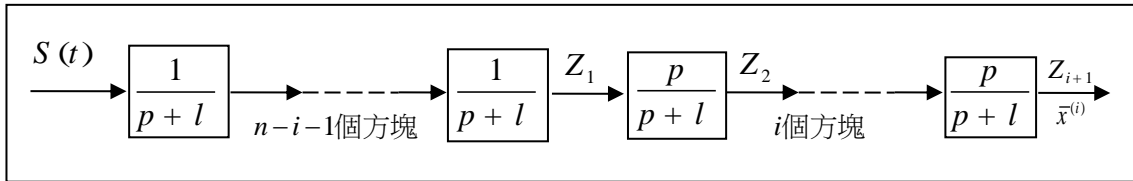


圖 8.2.2 加入微分器的滑動面方塊圖(Slotine, 1991)

首先注意 $\bar{x}^{(i)}$ 與 S 之間的轉換關係為

$$\bar{x}^{(i)} = p^i \bar{x} = \frac{p^i}{(p+\lambda)^{n-1}} S$$

然後再將上式拆成二項的相乘：

$$\bar{x}^{(i)} = \frac{p^i}{(p+\lambda)^{n-1}} S = \frac{p^i}{(p+\lambda)^i} \left[\frac{1}{(p+\lambda)^{n-i-1}} S \right] = \frac{p^i}{(p+\lambda)^i} Z_1$$

其中 S 到 Z_1 間的轉換關係為

$$Z_1 = \frac{1}{(p+\lambda)^{n-i-1}} S$$

其中 Z_1 的大小可由前一階段的分析得到如下

$$|Z_1| \leq \Phi/\lambda^{n-1-i} \quad (8.2.6)$$

在另一方面，於圖 8.2.2 中， Z_1 到 Z_2 間之關係為

$$Z_2(t) = \left(\frac{p}{p+\lambda}\right) Z_1(t) = \left[1 - \frac{\lambda}{p+\lambda}\right] Z_1(t) = Z_1(t) - \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} Z_1(\tau) d\tau \quad (8.2.7)$$

$$\begin{aligned} |Z_2(t)| &\leq |Z_1(t)| + \lambda \left| \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} Z_1(\tau) d\tau \right| \leq |Z_1(t)| + \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} |Z_1(\tau)| d\tau \\ &\leq |Z_1(t)| \left[1 + \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau \right] = |Z_1(t)| [1 + 1 - e^{-\lambda t}] \leq 2|Z_1(t)| \end{aligned} \quad (8.2.8)$$

重複以上的步驟，可得到 $Z_{i+1} = \bar{x}^{(i)}$ 的大小為

$$|\bar{x}^{(i)}(t)| = |Z_{i+1}(t)| \leq 2^i |Z_1(t)| \quad (8.2.9)$$

最後將(8.2.6)式代入(8.2.9)式而得

$$|\bar{x}^{(i)}(t)| \leq (2\lambda)^i \left(\frac{\Phi}{\lambda^{n-1}}\right) = (2\lambda)^i \varepsilon \quad (8.2.10)$$

故當系統狀態接近滑動面時， $S(\bar{X}, t) = \Phi \rightarrow 0$ ，而有 $\bar{x}^{(i)}(t) \rightarrow 0$ ；即追蹤誤差及其各階導數均趨於0。

□

8.3 滑動控制的角色

從定理 8.2.1 我們觀察到，滑動模式最大的特色在於藉由 $S(\bar{X}, t)$ 這一個變數的控制，去掌握 n 個狀態變數 $\bar{X} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n]^T$ 的運動行為，只要 $S \rightarrow 0$ ，則有 $\bar{x}_i \rightarrow 0$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ ；因此滑動控制的基本精神亦可說是將 n 階系統化成等效的一階系統來加以控制。

8.3.1 滑動面存在的條件

在一 n 維的相空間上，若存在有滑動面或滑動曲線 $S(x, t) = 0$ ，則此一曲線或曲面必須具備下列二特徵，參考圖 8.3.1：

(1) 不在 $S(x, t) = 0$ 上面之狀態 x ，有朝向 $S(x, t) = 0$ 運動的趨勢。亦即

$$S(x, t) < 0 \text{ 時, } \dot{S}(x, t) > 0$$

$$S(x, t) > 0 \text{ 時, } \dot{S}(x, t) < 0$$

二式可結合成單一不等式

$$\dot{S}S < 0 \quad (8.3.1)$$

(2) 一旦 $x(t)$ 落入滑動曲面 $S(x, t) = 0$ 之後，則不再離開，亦即

$$\text{當 } S(x, t) = 0 \text{ 時, } \dot{S}(x, t) = 0 \quad (8.3.2)$$

由此二特性來看，滑動面可視為不變集合(invariant set)的一種，亦即進入此一集合後，從此就不再離開。

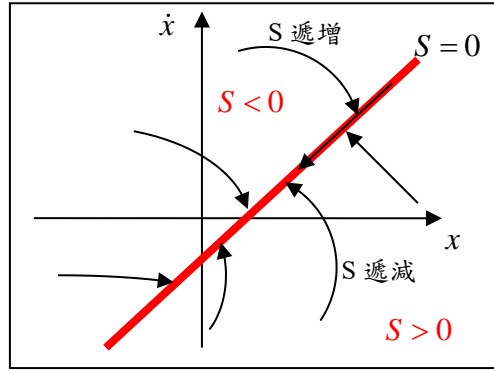


圖 8.3.1 滑動面示意圖

8.3.2 設計滑動控制器

滑動面可在一些非線性系統的相平面圖中發現，例如極限圓。然而自然存在的滑動面可遇不可求，滑動控制的目的是要藉由控制力的輸入，迫使某種指定的滑動面一定要存在，亦即使其滿足條件： $S \neq 0$ 時， $\dot{S}S < 0$ ； $S = 0$ 時， $\dot{S} = 0$ 。

例如為了達到追蹤的目的，吾人選定的滑動曲面為

$$S(x, t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} \tilde{x} \quad (8.3.3)$$

但這一「期望」的滑動面 $S(x, t)$ 通常不會那麼剛好滿足(8.3.1)、(8.3.2)的條件，因此控制力 u 的介入就是要使得原先不滿足的，變成滿足。滑動控制器可以拆成二部分，一部份使用於滑動面之外界區域，稱為切換控制 u_N ；另一部份使用於滑動面之上，稱為平衡控制 u_{Eq} ，如圖 8.3.2 所示。

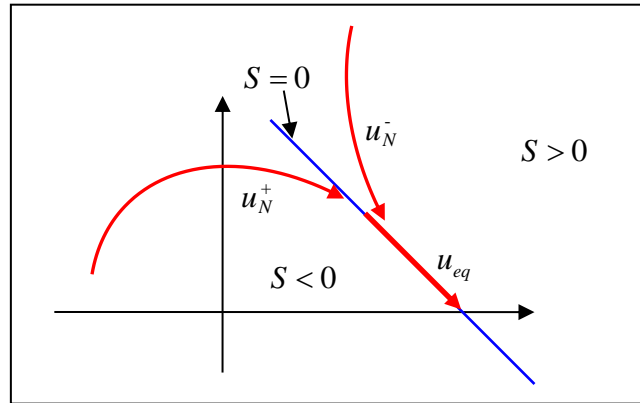


圖 8.3.2 確保狀態能於有限時間內到達滑動面

(A) 滑動面外界區域之控制：切換控制 u_N

考慮非線性系統

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (8.3.4)$$

u 之設計是要使得 $\dot{S}S < 0$ ，其中 \dot{S} 可表之為

$$\dot{S} = \frac{dS}{dx} \dot{x} = \nabla S \cdot (f + gu) \quad (8.3.5)$$

設控制分量 u_N^+ 、 u_N^- 分別滿足

$$\nabla S \cdot (f + gu_N^+) > 0 \quad (8.3.6a)$$

$$\nabla S \cdot (f + gu_N^-) < 0 \quad (8.3.6b)$$

若 u 採用如下的切換邏輯

$$u_N = \begin{cases} u_N^+, & S(x) < 0 \\ u_N^-, & S(x) > 0 \end{cases} \quad (8.3.7)$$

可以看出此時 $u = u_N$ 滿足 $\dot{S}S < 0$ 之條件。當 $S < 0$ 時，取 $u = u_N^+$ ，而 u_N^+ 又使得 $\dot{S} = \nabla S \cdot (f + gu_N^+) > 0$ ，故有 $\dot{S}S < 0$ ；反之，當 $S > 0$ 時，取 $u = u_N^-$ ，而 u_N^- 又使得 $\dot{S} = \nabla S \cdot (f + gu_N^-) < 0$ ，故也有 $\dot{S}S < 0$ 。

(B) 滑動面上的控制：平衡控制 u_{Eq}

此部分的 u 是要使得，當 $S(x_0) = 0$ 時， $\dot{S}(x_0) = 0$ ；亦即一旦軌跡點 x_0 落入滑動面 $S(x_0) = 0$ 之後，則不再離開。這一部分的控制稱為平衡控制，可令(8.3.5)式中的 $\dot{S} = 0$ 而得到

$$u = u_{Eq} = -(\nabla S \cdot g)^{-1} \nabla S \cdot f(x_0) \quad (8.3.8)$$

其中 $x_0 \in \{x_0 | S(x_0) = 0\}$ 。

8.3.3 有限時間到達

切換控制 u_N 雖然保證軌跡有往滑動面 $S = 0$ 運動的趨勢，但卻沒有保證到達滑動面所需的時間，也有可能需要無限久的時間才能到達。通常為了確保軌跡能於有限時間內到達滑動面，而將條件

$$\dot{S}S < 0$$

改成較嚴格之條件

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} S^2 \leq -\eta |S|, \quad \eta > 0 \quad (8.3.9)$$

當 $\eta = 0$ 時，(8.3.9)式即化為 $\dot{S}S < 0$ 。利用 $S^2 = |S|^2$ ，將(8.3.9)式改寫成

$$|S| \cdot \frac{d}{dt} |S| \leq -\eta |S| \Rightarrow \frac{d}{dt} |S| \leq -\eta \Rightarrow |S| - |S_0| \leq -\eta(t - t_0) \quad (8.3.10)$$

假設 $t = t_f$ 時， $|S| = 0$ ，由(8.3.10)式可解得 t_f 為

$$t_f \leq t_0 + |S_0|/\eta \quad (8.3.11)$$

故 η 越大，到達 $S = 0$ 所需之時間越短。若採用原先之條件 $\dot{S}S < 0$ ，即 $\eta = 0$ 的情形，則(8.3.11)式說明到達 $|S| = 0$ 的時間需無窮大。

8.3.4 滑動控制的缺點

由於要判斷 $S(x) > 0$ 或 $S(x) < 0$ 需要知道狀態 x 之值，但因 x 之量測會伴隨雜訊的引入，使得 S 值產生誤差，例如正確值 $S = 0.01$ ，卻測量得到 $S = -0.01$ ，而導致切換的提前或延後發生，使得軌跡無法一次就進入滑動面，而是在 $S > 0$ 和 $S < 0$ 之間做不停的切換修正，此即為顫動(chattering)效應，如圖 8.3.3 所示。

在另一方面，縱使量測完全沒有誤差，但控制訊號在實際上也無法做「瞬時」的切換，這是因取樣時間、控制迴圈的計算時間，均會使得切換的時間有所延遲，致使 S 值無法正確為

零，而在一微小範圍內變動：

$$|S| < \varepsilon$$

完美的追蹤是使 $S = 0$ ，當切換延遲越小， ε 的值也越小，追蹤的功能即越強。

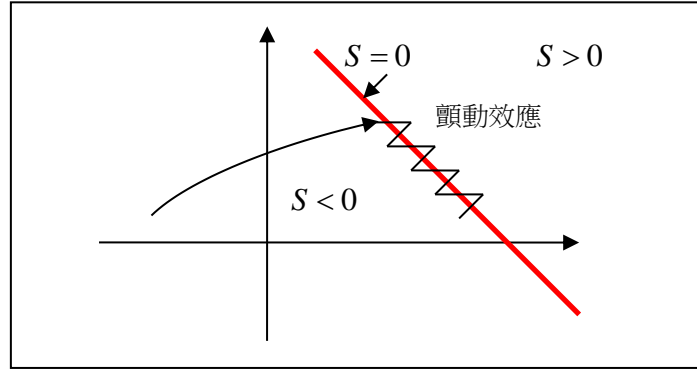


圖 8.3.3 計算的延遲或量測的誤差會導致滑動控制的快速切換。

8.4 滑動控制的強健功能

在受控體有不確定性(plant uncertainty)的情形下，藉由控制器 u 適當的選擇，亦可保證 $\dot{S} < 0$ 的條件，亦即狀態 x 仍有收斂到滑動面的能力，此稱為強健穩定的能力(robust stability)。受控體的不確定性有二種：結構化不確定性(structured uncertainty)及非結構化不確定性(unstructured uncertainty)，分別討論如後。

8.4.1 非結構化不確定性的強健穩定

考慮含有不確定性的非線性系統

$$\ddot{x} = f(\dot{x}, x, t) + u \quad (8.4.1)$$

其中動態 $f(\dot{x}, x, t)$ 具有加成性的不確定性

$$|f - f_0| \leq W(\dot{x}, x) \quad (8.4.2)$$

f_0 代表受控體的平均動態(nominal plant)，是固定且為已知；而真實的受控體 f 則是未知的。吾人稱 f 具有非結構化的不確定性，這是因(8.4.2)式只給出 f 的變化範圍，對於 f 的結構或階數均無設定。

設控制的目的仍為追蹤指令，滑動面之選擇如前

$$S = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} \tilde{x} = \dot{\tilde{x}} + \lambda \tilde{x} \quad (n = 2) \quad (8.4.3)$$

其中 $\tilde{x} = x - x_d$ 。為了數學上的簡化，以下取 $n = 2$ 的情形來說明。將 S 對時間微分得

$$\dot{S} = \ddot{\tilde{x}} + \lambda \dot{\tilde{x}} = \ddot{x} - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}} = f + u - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}} \quad (8.4.4)$$

若依先前的作法，令 $\dot{S} = 0$ ，求出平衡控制 $u_{eq} = -f + \ddot{x}_d - \lambda \dot{\tilde{x}}$ ，但目前這樣做是不可行的，因為真實的受控體 f 不確定，且未知，所以使得 $\dot{S} = 0$ 的控制 u 無法正確求得。已知的是平均受控體 f_0 ，所以在(8.4.4)中，只能使得 f_0 所對應的 \dot{S} 為零，即

$$f_0 + u_{eq} - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}} = 0 \Rightarrow u_0 = -f_0 + \ddot{x}_d - \lambda \dot{\tilde{x}} \quad (8.4.5)$$

但由於真實的受控體 f 並不等於 f_0 ，所以此一 u_0 將無法使狀態一直維持在滑動面之上；狀態一定會偏離，故需另一控制力將其帶回；整合之控制力 u 是平均控制 u_0 再加另一項切換控制：

$$u = u_0 + u_N = u_0 - K \operatorname{sgn}(S) = u_0 - K(x, \dot{x}) \operatorname{sgn}(S) \quad (8.4.6)$$

其中 $\operatorname{sgn}(S)$ 稱為符號函數，定義如下：

$$\operatorname{sgn}(S) = \begin{cases} 1, & S > 0 \\ -1, & S < 0 \end{cases}$$

平均控制 u_0 的角色類似(8.3.8)式中的平衡控制 u_{eq} ，差別在於平均控制 u_0 只能讓平均受控體 f_0 取得平衡，無法讓真實受控體 f 取得平衡，所以這裡不以 u_{eq} 表示之。(8.4.6)式中的 $K(x, \dot{x})$ 則為待定函數，目的是使得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} S^2 \leq -\eta |S| \quad (8.4.7)$$

將(8.4.6)的 u 代入(8.4.4)式中得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} S^2 &= \dot{S} \cdot S = [f - f_0 - K \operatorname{sgn}(S)] S \\ &= (f - f_0) S - K |S| \\ &\leq |f - f_0| \cdot |S| - K |S| \\ &\leq (W - K) |S| = -\eta |S| \end{aligned} \quad (8.4.8)$$

其中用到了(8.4.2)式中的範圍條件： $|f - f_0| \leq W(x, \dot{x})$ 。故為了達到(8.4.7)式之條件，只需選擇

$$K(x, \dot{x}) = W(x, \dot{x}) + \eta \quad (8.4.9)$$

則(8.4.8)式化成

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} S^2 \leq -\eta |S| \quad (8.4.10)$$

前面已說明遵循條件(8.4.10)式之滑動面 S ，最後必能在有限的時間內得到 $S \rightarrow 0$ 之結果。但因達到 $S = 0$ 後，由於不確定性的存在，無法使狀態一直維持在 $S = 0$ 之滑動面上，因之，狀態又開始漂移，而控制力

$$u = u_0 - K \operatorname{sgn}(S) \quad (8.4.11)$$

又作用將狀態趕回滑動面，如此反覆不停，以致狀態的真實軌跡是落在以滑動面 $S = 0$ 為中心之帶狀區域內，如圖 8.4.1 所示，不確定性越大，帶狀寬度也越大。而前節提到的測量誤差與計算時間延遲都會再加大此一帶狀區域的寬度。

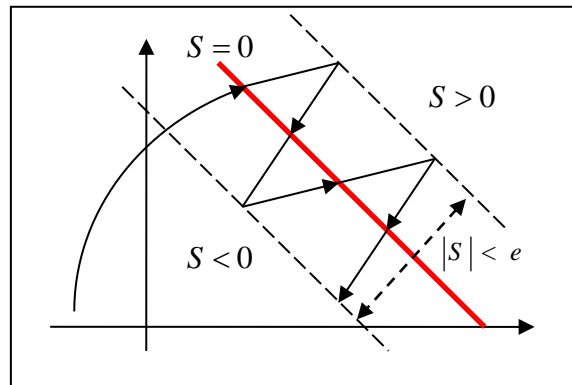


圖 8.4.1 相平面上的真實軌跡是落在以滑動曲線為中心之帶狀區域內。

例題 8.4.1

考慮如下的非線性系統：

$$\ddot{x} = -a(t)\dot{x}^2 \cos 3x + u, 1 \leq a(t) \leq 2$$

本題的目的是要設計滑動控制 u 使得 $x(t)$ 能夠追蹤指令 $x_d(t) = \sin(\pi t/2)$ 。與(8.4.1)式比較，可得 $f(\dot{x}, x, t) = -a(t)\dot{x}^2 \cos 3x$ 。根據 $a(t)$ 的範圍，若將 f 的範圍表成如(8.4.2)式的標準形式： $|f - f_0| \leq W(\dot{x}, x)$ ，可得

$$f_0 = -1.5\dot{x}^2 \cos 3x, W(\dot{x}, x) = 0.5\dot{x}^2 |\cos 3x|,$$

在此不確定性動態的作用下，滑動控制 u 的設計如(8.4.6)式所示

$$u = u_0 - K \operatorname{sgn}(S) = u_0 - K(x, \dot{x}) \operatorname{sgn}(S)$$

其中

$$u_0 = -f_0 + \ddot{x}_d - \lambda \dot{x} = 1.5\dot{x}^2 \cos 3x + \ddot{x}_d - \lambda(\dot{x} - \dot{x}_d)$$

而切換控制的增益 K 則由(8.4.9)式所給定

$$K(x, \dot{x}) = W(x, \dot{x}) + \eta = 0.5\dot{x}^2 |\cos 3x| + \eta$$

當滑動控制 u 中的每一個分量都決定後，我們可以看到訊號 u 的實現需要知道每一個瞬間 x 與 \dot{x} 的測量值。

□

8.4.2 不連續切換控制的平滑化

前面提到滑動控制的實現需要切換的動作，如(8.4.11)所示

$$u = u_0 - K \operatorname{sgn}(S) \quad (8.4.11)$$

此一切換動作造成控制訊號 u 的值在 $S > 0$ 與 $S < 0$ 二側形成不連續的跳躍，如圖 8.4.1 所示。不連續的切換使得相平面軌跡無法精確進入滑動面，而在滑動面的附近形成顫動現象。我們把軌跡顫動的區域稱為邊界層 B ，而用下列不等式表示之：

$$B = \{(x, \dot{x}) | |S(x, \dot{x})| \leq \Phi\} \quad (8.4.12)$$

如果切換可在瞬間準確完成，則邊界層的厚度為零，如圖 8.4.2a 所示。但實際上由於量測誤差與不確定動態的作用，擴大了邊界層的厚度。當控制訊號通過具有厚度的邊界層時，其值將從 $+K$ 連續地變化到 $-K$ ，而非從 $+K$ 瞬間切換到 $-K$ 。 $+K$ 與 $-K$ 之間最簡單的連續性變化方式是採用直線內插，如圖 8.4.2b 所示。

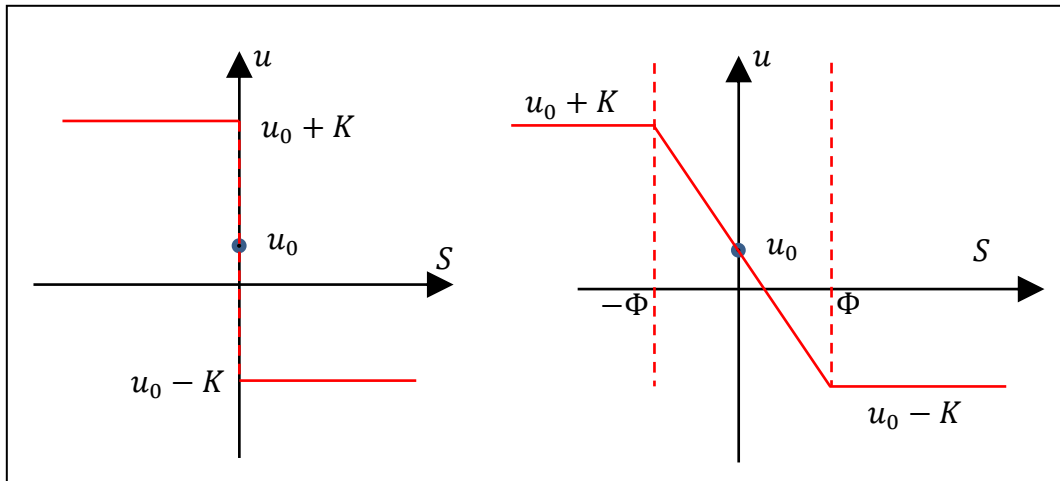


圖 8.4.2 (a)不連續的切換控制;(b)切換控制的平滑化(slotine, 1984; 1991)

若採用直線內插的方式，則控制訊號於邊界層內的連續性變化可用飽和函數表示如下：

$$u = u_0 - K \cdot \text{sat}(S/\Phi) \quad (8.4.13)$$

其中飽和函數 $\text{sat}(S/\Phi)$ 的定義為

$$\text{sat}(S/\Phi) = \begin{cases} 1, & S > \Phi \\ S/\Phi, & -\Phi \leq S \leq \Phi \\ -1, & S < -\Phi \end{cases} \quad (8.4.14)$$

因此當 S 的值從 $+\Phi$ 變化到 $-\Phi$ 的過程中，(8.4.13)式的控制訊號將由 $u = u_0 - K$ 依線性比例平滑地變化到 $u = u_0 + K$ 。以(8.4.13)式的平滑式控制取代(8.4.11)式的切換式控制將有助於減緩滑動控制的顫動現象。以下例題比較了平滑控制(8.4.13)與切換控制(8.4.11)之間的優缺點。

例題 8.4.2

延續例題 8.4.1 的討論，所要控制的非線性系統為

$$\ddot{x} = -a(t)\dot{x}^2 \cos 3x + u, 1 \leq a(t) \leq 2 \quad (8.4.15)$$

滑動控制的目標是要在不確定動態 $a(t)$ 的作用下，使得系統狀態 $x(t)$ 能夠追蹤指令訊號 $x_d(t) = \sin(\pi t/2)$ 。其中控制訊號 u 的設計採用以下二種方法：

- 切換控制： $u = u_0 - K \text{sgn}(S) = u_0 - K(x, \dot{x}) \text{sgn}(S)$ (8.4.16a)

- 平滑控制： $u = u_0 - K \text{sgn}(S) = u_0 - K(x, \dot{x}) \text{sat}(S/\Phi)$ (8.4.16b)

其中的平均控制 u_0 、控制增益 $K(x, \dot{x})$ 、滑動面 $S(\bar{x}, \dot{\bar{x}})$ 已於前一例題求得如下：

$$\begin{aligned} u_0 &= -f_0 + \ddot{x}_d - \lambda \dot{x} = 1.5\dot{x}^2 \cos 3x + \ddot{x}_d - \lambda(\dot{x} - \dot{x}_d) \\ K(x, \dot{x}) &= W(x, \dot{x}) + \eta = 0.5\dot{x}^2 |\cos 3x| + \eta, S = \dot{\bar{x}} + \lambda \bar{x} \end{aligned}$$

其中的參數值設定成 $\lambda = 20$ ， $\eta = 0.1$ ，追蹤誤差 $\bar{x} = x - x_d = x - \sin(\pi t/2)$ 。分別將(8.4.16)式的控制律代入(8.4.15)式中，然後分別求解 ODE 得到系統狀態 $x(t)$ 及控制訊號 $u(t)$ 隨時間的響應，結果如圖 8.4.3 所示。

在設計控制律的階段，我們假設參數 $a(t)$ 的確切值為未知，只知其落在範圍 $1 \leq a(t) \leq 2$ 之內。等控制律設計好後，將其整合到受控體進行閉迴路的測試時，我們必須指定參數 $a(t)$ 的實際變化行為，如此才能進行數值模擬與驗證。圖 8.4.3 是假設 $a(t) = 1 + |\sin t|$ 所得到的模擬結果。圖中(a)與(b)是切換控制(8.4.16a)所得到的結果，(c)與(d)則是平滑化控制(8.4.16b)所得到的結果。圖(a)顯示切換控制造成控制訊號上下跳動，圖(c)則顯示平滑化控制的平滑化消除了原先控制訊號的顫動現象。然而控制訊號的平滑化也帶來了不利的副作用，比較(b)與(d)二圖，可以看到平滑控制使得追蹤誤差增加了約 100 倍。這是因為平滑控制更加延遲了控制訊號在 K 與 $-K$ 之間的切換時間，使得實際相平面軌跡更加偏離了滑動面，而導致追蹤誤差的增加。所以滑動控制的設計策略必須在控制訊號的顫動強度與追蹤誤差之間取得一個妥協點。

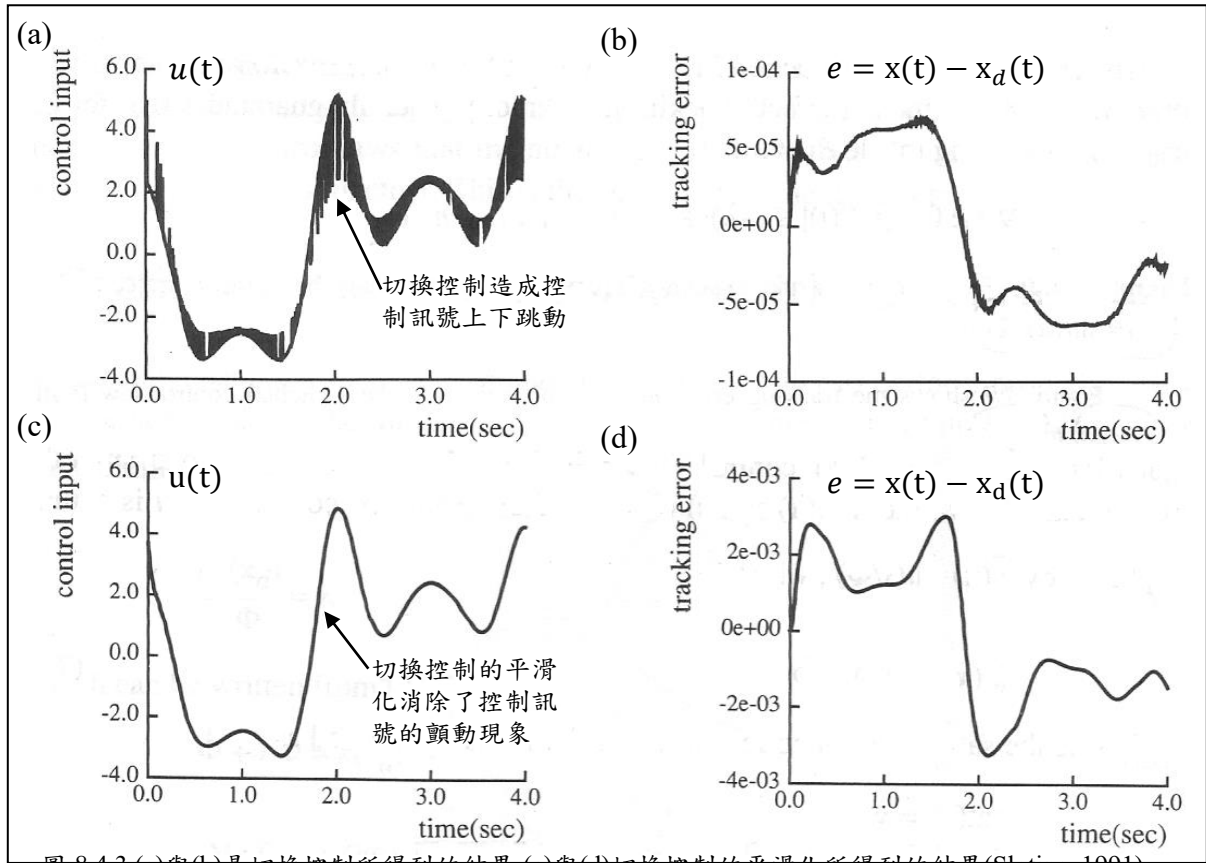


圖 8.4.3 (a)與(b)是切換控制所得到的結果,(c)與(d)切換控制的平滑化所得到的結果(Slotine, 1991)。

□

平滑化控制所採用的控制訊號為

$$u = u_0 + u_N = u_0 - K \cdot \text{sat}(S/\Phi) \quad (8.4.17)$$

由(8.4.14)式中關於飽和函數 $\text{sat}(S/\Phi)$ 的定義可知，控制訊號和 S 的大小成正比，而比例常數為 K ，這種控制結構是屬於PID控制中的比例控制(P控制)。我們可以進一步引入PI控制的概念，用來取代純比例控制：

$$u_N = \underbrace{-\text{sgn}\left(\frac{dS}{du_c}\right)}_{\text{負的迴授}} \left(\underbrace{K_p \hat{S}}_{p\text{控制}} + \underbrace{K_i \int \hat{S} dt}_{I\text{控制}} \right) \quad (8.4.18)$$

區域誤差

其中右邊的積分項有助於減小 S 的累積誤差，進而改善圖 8.4.3 中，純比例控制造成追蹤誤差變大的問題。圖 8.4.4 顯示積分控制的運作原理，控制訊號正比於 S 與時間軸 t 所夾的面積。

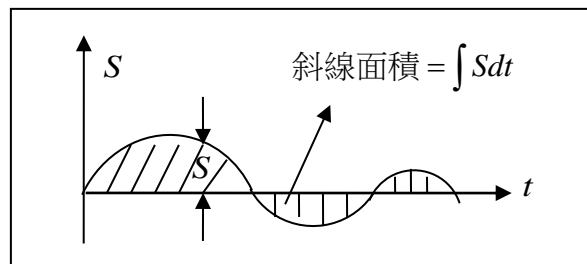


圖 8.4.4 滑動曲線 S 的積分控制

8.4.3 結構化不確定性的強健穩定

考慮二階非線性系統如下

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) + bu \quad (8.4.19)$$

其中動態 f 含有非結構化的不確定性

$$|f - f_0| < W \quad (8.4.20)$$

參數 b 則含有結構化的不確定性

$$0 < b_{\min} \leq b \leq b_{\max} \quad (8.4.21)$$

結構化的不確定性指的是不確定性源自受控體已知結構的變化，例如(8.4.13)式的不確定性即是源自(8.4.11)式中系統參數 b 的變化。反之， $f(x, \dot{x})$ 所含有的不確定性完全沒有指定是 x 與 \dot{x} 的何種函數型式，其結構完全未知，故稱非結構化的不確定性。下面我們將看到，在以上兩種不確定性的同時作用下，滑動控制仍然可以找到切換邏輯

$$u = u_0 - K \operatorname{sgn}(S) \quad (8.4.22)$$

使得狀態 x 具有回到 $S = 0$ 上之趨勢。首先設定參數 b 的平均值 b_0 為

$$b_0 = \sqrt{b_{\min} b_{\max}} \quad (8.4.23)$$

此即 b 之幾何平均值，則 $0 < b_{\min} \leq b \leq b_{\max}$ 可化成

$$\beta^{-1} \leq b/b_0 \leq \beta \quad (8.4.24)$$

其中 $\beta = \sqrt{b_{\max}/b_{\min}}$ 。下面的步驟在設計 u 使得

$$\dot{S}S \leq -\eta|S| \quad (8.4.25)$$

仍考慮命令追蹤的控制目的，採用滑動面

$$S = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} \tilde{x} = \dot{\tilde{x}} + \lambda \tilde{x}$$

微分一次得

$$\dot{S} = \ddot{\tilde{x}} + \lambda \dot{\tilde{x}} = f + bu - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}} \quad (8.4.26)$$

定義平均控制 u_0 是在 $f = f_0$ 及 $b = b_0$ 的情形下，使得 $\dot{S} = 0$ 的控制 u 。則由(8.4.26)式可得 u_0 為

$$u_0 = (-f_0 + \ddot{x}_d - \lambda \dot{\tilde{x}}) b_0^{-1}$$

將其代入(8.4.22)式的滑動控制 u ，得到

$$u = [-f_0 + \ddot{x}_d - \lambda \dot{\tilde{x}} - K \operatorname{sgn}(S)] b_0^{-1}$$

以下的步驟是要求得控制增益值 K ，使能滿足滑動條件： $\dot{S}S \leq -\eta|S|$ 。先將控制 u 代回(8.4.26)式的 \dot{S} ，合併化簡得

$$\dot{S} = (f - b b_0^{-1} f_0) + (1 - b b_0^{-1})(-\ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}}) - b b_0^{-1} K \operatorname{sgn}(S)$$

二邊同乘以 S ，得到 $\dot{S}S$ 的表示式

$$\begin{aligned} \dot{S}S &= [(f - b b_0^{-1} f_0) + (1 - b b_0^{-1})(-\ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}})]S - b b_0^{-1} K |S| \\ &\leq b b_0^{-1} |b_0 b^{-1} f - f_0 + (b_0 b^{-1} - 1)(-\ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}})| \cdot |S| - b b_0^{-1} K |S| \end{aligned}$$

再利用恆等式 $f = f_0 + f - f_0$ ，以及已知條件 $|f - f_0| \leq W$ ，化簡上式得

$$\begin{aligned}
\dot{S}S &= bb_0^{-1}|b_0b^{-1}(f - f_0) + (b_0b^{-1} - 1)(f_0 - \ddot{x}_d + \lambda\dot{x})| \cdot |S| - bb_0^{-1}K|S| \\
&\leq bb_0^{-1}(b_0b^{-1}W + |b_0b^{-1} - 1| \cdot |u_0|)|S| - bb_0^{-1}K|S| \\
&\leq [W + (1 - \beta^{-1})|u_0| - \beta^{-1}K]|S|
\end{aligned} \tag{8.4.27}$$

其中若取

$$K = \beta(W + \eta) + (\beta - 1)|u_0| \tag{8.4.28}$$

則(8.4.27)式化簡成

$$\dot{S}S \leq -\eta|S|$$

此代表在雙重不確定性之作用下，藉由(8.4.28)式 K 之選擇，仍可使狀態具有回到滑動面之能力。

8.5 滑動控制在馬達控制上的應用

本節考慮滑動控制在 DC 伺服馬達上的一個應用。一個簡化的馬達線性運動方程式可寫成

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -ax_2 - bu + d
\end{aligned} \tag{8.5.1}$$

其中狀態變數 $x_1 = \theta$ ， $x_2 = \dot{\theta}$ 表示馬達的角位置與角速度。常數 a 與 b 由馬達的電氣常數所決定，常數 d 則由外加負載 T_d 所決定：

$$a = \frac{k_t k_e + BR_a}{JR_a}, \quad b = \frac{k_t k_a}{JR_a}, \quad d = \frac{T_d}{J}$$

這些參數會隨外加負載，環境溫度之變化而漂移，故構成結構化的不確定性。三個常數 a 、 b 、 d 的值不確定，只能夠知道它們的變化範圍：

$$a_{\min} \leq a \leq a_{\max}, \quad b_{\min} \leq b \leq b_{\max}, \quad |d| \leq M \tag{8.5.2}$$

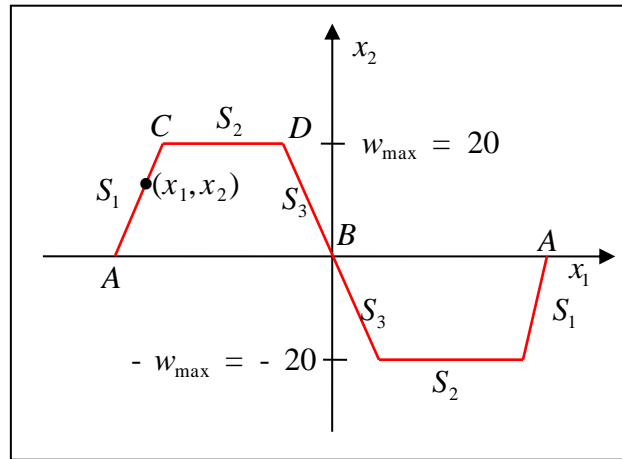


圖 8.5.1 馬達控制的滑動曲線

滑動控制的目的是要在上面的參數不確定性的作用下，使得相平面軌跡能夠進入圖 8.5.1 中的滑動面。此滑動面不是任意的數學曲線，而是標示了馬達轉動的最佳性能曲線。見圖 8.5.1，馬達要從左側的 A 點運轉到 B 點，最有效率的方法是用最大轉動加速度先加速到 C 點，然後保持等轉速 V_0 到 D 點，然後再用最大減速度到達 B 點。這一加速、等速、減速的過程就是由滑動曲線所規範。在相平面上，每個階段的滑動曲線可求出如下：

(a) 等加速度階段: 在 A 與 C 之間是等加速度階段，初始速度為零，角加速度 $= \alpha > 0$ 。利用等

加速度直線運動的公式： $v_f^2 - v_i^2 = 2a\Delta s$ ，其中 v_f 為末速， v_i 為初速， a 為加速度， Δs 為前進的距離。若是旋轉運動則改成： $\dot{\theta}_f^2 - \dot{\theta}_0^2 = 2\alpha\Delta\theta$ 。對應於圖 8.5.1 的相平面圖的符號定義， $x_2 = \dot{\theta}_f$ ， $\dot{\theta}_i = 0$ ， $\Delta\theta = \theta_f - \theta_A = x_1 - x_A$ ，方程式 $\dot{\theta}_f^2 - \dot{\theta}_0^2 = 2\alpha\Delta\theta$ 可以改寫成 $x_2^2 - 2\alpha(x_1 - x_A) = 0$ ，因此這個階段的滑動曲線可表成

$$S_1(x) = \frac{x_2^2}{2\alpha} - (x_1 - x_A) = 0 \quad (8.5.3)$$

此式也可適用於從右側 A 點出發的情形，不過所對應的 α 值為負。

- (b) 等速度階段:在 C 點與 D 點之間是等角速度區，假設此段的角速度為 ω_{\max} ，則運動方程式可簡單表為 $x_2 - \omega_{\max} = 0$ ，相對應的滑動曲線方程式為

$$S_2(x) = x_2 - \omega_{\max} = 0 \quad (8.5.4)$$

- (c) 等減速度階段:在 D 與 B 之間是等減速度階段，末速度為零，角加速度 $= \alpha < 0$ 。由等加速度公式： $\dot{\theta}_f^2 - \dot{\theta}_0^2 = 2\alpha\Delta\theta$ ，代入符號 $x_2 = \dot{\theta}_i$ ， $\dot{\theta}_f = 0$ ， $\Delta\theta = 0 - \theta = -x_1$ ，改寫成 $x_2^2 - 2\alpha x_1 = 0$ ，故相對應的滑動曲線方程式為

$$S_3(x) = x_1 - \frac{x_2^2}{2\alpha} = 0 \quad (8.5.5)$$

這是一條通過原點的拋物線。

- (d) 歸航階段(homing):雖然滑動曲線 S_3 的終點就在 B 點上，然而它只是通過 B 點，而無法停在 B 點上。沿著滑動曲線 S_3 ，馬達進行著減速運動，到達 B 點時，轉速剛好減至零，但此時加速度($\alpha < 0$)並不為零，持續的慣性作用使得馬達無法瞬間停在 B 點上。因此在實務上，在 S_3 的等減速度階段外，又另外加上 S_4 的歸航階段。在歸航階段，滑動曲線是一條通過原點的直線：

$$S_4(x) = Cx_1 + x_2 = 0 \quad (8.5.6)$$

其中常數 C 由馬達性能所決定。

滑動控制器 u 的設計是要使狀態 x 追蹤 $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow S_4$ 之滑動曲線，亦即 u 的設計必須滿足下列之不等式

$$\begin{cases} S_i \dot{S}_i < 0, & S_i \neq 0 \\ \dot{S}_i = 0, & S_i = 0 \end{cases}, i = 1, 2, 3, 4 \quad (8.5.7)$$

滑動控制器仍由二部分所組成：

$$u_i = u_{0,i} - K_i \text{sgn}(S_i), i = 1, 2, 3, 4. \quad (8.5.8)$$

由於參數不確定性的作用，不存在平衡控制 u_{eq} 使得真實受控體 f 可維持在滑動面上，亦即使得 $\dot{S} = 0$ 。我們頂多只能讓平均受控體 f_0 維持在滑動面上，這樣的控制稱為平均控制 u_0 。以下我們以 S_1 區段為例，說明如何得到 u_0 。取(8.5.3)式的 S_1 對時間的微分，得到

$$\dot{S}_1 = x_2 \dot{x}_2 / \alpha - \dot{x}_1 = x_2(-ax_2 - bu + d) / \alpha - x_2 \quad (8.5.9)$$

由於係數 a 、 b 、 d 都是不確定的值，使得 $\dot{S}_1 = 0$ 的 u 無法求得。若令係數 a 、 b 、 d 的平均值分別為 a_0 、 b_0 、 d_0 (參考(8.4.23)式的定義)，則使得 $\dot{S}_1 = 0$ 的平均控制 u_0 為

$$u_0 = (-a_0 x_2 - \alpha + d_0) / b_0 \quad (8.5.10)$$

整合後的控制訊號為

$$u = u_0 - K_1 \text{sgn}(S_1) \quad (8.5.11)$$

其中的增益 K_1 是要滿足 $S_1\dot{S}_1 < 0$:

$$S_1\dot{S}_1 = [x_2^2/2\alpha - (x_1 - x_A)][x_2(-ax_2 - bu + d)/\alpha - x_2] < 0 \quad (8.5.12)$$

其中的控制 u 是由(8.5.11)式的 u 所代入，從而求出 K_1 的大小範圍。依循相同的方法求出其他三個階段的平均控制 u_0 ，以及所對應的控制增益 K_2 、 K_3 、 K_4 。最後再整合各階段的控制成為 $u_i = u_0 - K_i \text{sgn}(S_i)$ ， $i = 1, 2, 3, 4$ 。

8.6 學習評量

8.6.1 利用 8.5 節之結果，及不確定的範圍 $a_{\min} \leq a \leq a_{\max}$ ， $b_{\min} \leq b \leq b_{\max}$ ， $|d| \leq M$ ，求出(8.5.8)式中 K_i 的範圍使得

$$S_i\dot{S}_i < 0$$

8.6.2 考慮下列之二階非線性系統

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \theta_1 x_1 \sin x_2 \\ \dot{x}_2 &= \theta_2 x_2^2 + x_1 + u \end{aligned} \quad (8.6.1)$$

其中 u 是控制訊號； θ_1 和 θ_2 是不確定的參數，但滿足

$$|\theta_1| \leq a, |\theta_2| \leq b \quad (8.6.2)$$

本題的目的是要設計滑動控制使得系統(8.6.1)為 Lyapunov 穩定。假設吾人所採取的滑動曲面為

$$S = (1 + a)x_1 + x_2 \quad (8.6.3)$$

(a) 試證明在不確定性參數 θ_1 、 θ_2 的作用下，能確保 $S\dot{S} < 0$ 的滑動控制 u 為

$$u = u_{eq} - \beta(x) \text{sgn}(S) \quad (8.6.4)$$

其中

$$u_{eq} = -x_1 - (1 + a)x_2 \quad (8.6.5)$$

$$\beta(x) = a(1 + a)|x_1| + bx_2^2 + b_0, b_0 > 0 \quad (8.6.6)$$

(b) 用 Matlab 模擬以上滑動控制律的正確性。設定 $a = b = 1$ ，並使 θ_1 和 θ_2 在區間 $[-1, 1]$ 內任意變化，每次模擬均取不一樣的 θ_1 和 θ_2 。用數值模擬驗證，當 θ_1 和 θ_2 在區間 $[-1, 1]$ 內任意變化時，滑動控制律(8.6.4)都可確保相平面軌跡進入滑動曲面 $S = 0$ ，同時觀察是否有顫動現象伴隨發生。

(c) 設定 $a = b = 2$ ，重覆上面步驟的模擬，並觀察顫動的情況有何改變。

8.6.3 考慮下列受控之 van der Pol 方程式

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega^2 x_1 - \varepsilon\omega(1 - \mu^2 x_1^2)x_2 u \end{aligned} \quad (8.6.7)$$

其中 ω ， ε ， μ 皆為正的常數，而 u 為控制訊號。

(a) 證明當 $u = 1$ 時，有一個穩定的極限圓位於半徑 $r = 1/\mu$ 的圓內；當 $u = -1$ 時，有一個不穩定的極限圓位於半徑 $r = 1/\mu$ 的圓內。

(b) 考慮如下之滑動曲面

$$S = x_1^2 + x_2^2/\omega^2 - a^2, a < 1/\mu \quad (8.6.8)$$

證明當非線性系統(8.6.7)若入此滑動曲面時，其行為變成如下之簡諧振子(harmonic oscillator)

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 \quad (8.6.9)$$

其振幅為 a ，而頻率為 ω 。

- (c) 設計滑動控制訊號 u 使得非線性系統(8.6.7)進入滑動曲面 $S = 0$ 。
- (d) 設定 $\omega = \mu = \varepsilon = 1$ ，並選取六個起始位置 $(x_1(0), x_2(0))$ ，驗證所設計的滑動控制律都能讓這六條軌跡進入滑動曲面 $S = 0$ 。
- (e) 檢視上面步驟所獲得的相平面軌跡，確認所有的軌跡是否都進入一個極限圓？驗證此極限圓為一橢圓

$$x_1^2 + \frac{x_2^2}{\omega^2} = a^2$$

而此極限圓剛好就是吾人所選定的滑動曲面 $S = 0$ 。

8.6.4 考慮下列三階之時變系統

$$\ddot{x} + \alpha_1(t)\dot{x}^2 + \alpha_2(t)\dot{x}^5 \sin 4x = b(t)u$$

其中各個參數的實際值為未知，只知道變化的範圍為

$$|\alpha_1(t)| \leq 1, |\alpha_2(t)| \leq 2, 1 \leq b(t) \leq 4$$

本題的目的是要設計滑動控制器，使得在不確定參數的作用下，系統狀態 x 能夠追蹤一給定的指令 x_d 。假設滑動面取成如下的形式

$$S = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} \bar{x} = \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \lambda^2 \bar{x} \quad (n = 3) \quad (8.6.10)$$

其中 $\bar{x} = x - x_d$ ， λ 為給定的正實數。

- (a) 先將參數 b 的範圍表成如下的形式：

$$\beta^{-1} \leq b(t)/b_0 \leq \beta$$

仿照(8.4.21)式與(8.4.23)式，求出 b_0 及 β 的值。

- (b) 求出 \dot{S} 的表示式，用參數 α_1 、 α_2 、 b ，變數 x 、 \dot{x} 、 \ddot{x} ，及控制 u 表示之。

- (c) 將滑動控制律表成如下的形式

$$u = u_0(x, \dot{x}, \ddot{x}) - K(x, \dot{x}, \ddot{x}) \operatorname{sgn}(S) \quad (8.5.11)$$

求出平均控制 $u_0(x, \dot{x}, \ddot{x})$ 。平均控制 u_0 是指當參數取在平均值時，即 $\alpha_1 = 0$ ， $\alpha_2 = 0$ ， $b = b_0$ 時，使得 $\dot{S} = 0$ 的控制 u 。

- (d) 將(8.5.11)式代入(b)中所求得的 \dot{S} ，並仿照(8.4.3)節的做法，求出控制增益 $K(x, \dot{x}, \ddot{x})$ 使其能滿足滑動面的收斂條件：

$$\dot{S}S \leq -\eta|S|$$

參考文獻(References)

滑動模式控制是可變結構控制的一個分支，滑動曲面(sliding surface)的概念最早源自前蘇聯的文獻(Filippov, 1960)，一開始是在探討具有可變結構系統的控制問題。此設計概念在還未引入歐美科學界時，在蘇聯本土已有許多成功的工業應用實例(Utkin, 1978)。V. Utkin(莫斯科大學控制工程博士)是可變結構控制的創始人之一，他將此思想介紹到西方科學界(Utkin,

1977)，從此開啟了非線性控制的一個新研究領域。可變結構控制最早被應用在機械手臂(Young, 1978)。1980 年代初期，滑動模式控制逐漸從可變結構控制的分支中獨立出來，但其面對系統不確定動態所產生的顫動現象(chattering)與過大的控制能量需求，限制了其早期的發展。Slotine 的博士論文(Slotine, 1983; Slotine, 1984)引入邊界層內插的觀念(參見 8.4 節)，有效消弭顫動的現象。隨後 Slotine 進一步將滑動模式控制擴展至多輸入系統(Slotine, 1985)及輸出回授系統(Slotine, Hedrick and Misawa, 1986)，並與適應性控制相結合(Slotine and Coetsee, 1986)。

邊界層內插的觀念雖然可以消弭顫動的現象，但是如本章例題 8.4.2 的計算結果，這一方法卻也同時造成追蹤誤差的增加。滑動模式控制的脫胎換骨出現在 1980 年代中期，當時一篇俄文文獻(Levantovsky, 1985)提出二階滑動演算法(Second Order Sliding Algorithms)，這個新方法不僅可以消弭顫動的現象，同時可以減小追蹤誤差(Levant and Levantovsky, 1993)。我們在這一章中所介紹的滑動模式控制都是屬於一階(first order)的形式。參考(8.3.5)式，控制 u 出現在 \dot{S} 的方程式中，所謂的一階是指控制訊號 u 只影響到 S 的一階導數 \dot{S} ，而 u 本身的值是由 S 所決定，與 \dot{S} 無關。一階形式的滑動模式控制，由於只用到 S 的資訊，沒有關於 S 變化率(\dot{S})的資訊，導致在驅動 $S \rightarrow 0$ 的過程中，經常會煞車不及而越界，無法剛好停在滑動曲面 $S = 0$ 之上，此即造成顫動(chattering)的主要原因。二階形式的滑動模式控制具有如下的狀態方程式： $\ddot{S} = f(S, \dot{S}, t) + u(S, \dot{S})$ ，可以看到控制訊號 u 直接影響 S 的二階導數，而控制訊號 $u(S, \dot{S})$ 同時用到 S 與 \dot{S} 的資訊，代表控制器不僅知道 S 的正負，也知道 S 變化的快慢，因此可以提早煞車，大大降低越界滑動曲面的情形(Bartolini, Ferrara and Usai, 1998; Bartolini, et al, 2003)。

二階形式的滑動模式控制被提出後，其強大功能陸續被證實，以致更高階的滑動模式控制也隨之激起研究的高潮。滑動模式控制從 1980 年代發展至今已有三十幾年的時間，這中間的發展過程跨越了五個階段(Yu and Efe, 2015):

(1) 第一個階段的滑動模式控制: 一階形式

這是 1980 年代的研究主題，主要涵蓋 Utkin 與 Slotine 的研究成果，也是本章的主要內容。二本論文集(Young, 1993)與(Zinober, 1993)收錄這個時期的幾十篇代表性論文。

(2) 第二個階段的滑動模式控制: 二階形式

這是 1990 年代的研究主題，開始自(Levant and Levantovsky, 1993)的開創性想法，而引發一連串的成功應用。回顧文章(Bartolini, et al, 2003)詳細記錄了該階段的研究成果。

(3) 第三個階段的滑動模式控制: super-twisting 演算法

二階形式滑動模式控制的演算法則稱為 twisting algorithm，該演算法可以產生連續性的控制訊號 u ，避免 chattering 現象的出現，但是該法只能適用於相對階數為 0 或 1 的系統。super-twisting 演算法的提出(Levant, 1993; Levant, 1998)使得相對階數為 2 的系統也可避免 chattering 的發生。

(4) 第四個階段的滑動模式控制: 任意階形式

Levant (2001)提出任意階形式的滑動模式控制。控制的階數越高，控制訊號對於滑動曲面 S 的變化，需要更多的細節資訊。對於任意階數 r 而言，控制訊號 $u(S, \dot{S}, \ddot{S}, \dots, S^{(r-1)})$ 包含到 S 的 $r - 1$ 階導數，所以可以更精準控制 $S \rightarrow 0$ 的過程，避免 chattering 的發生。這個階段的控制可以保證相對階數小於 r 的所有非線性系統皆可透過連續性控制達到 $S \rightarrow 0$ ，不會伴隨 chattering 的產生。

(5) 第五個階段的滑動模式控制: 任意階連續控制

這個階段是更進一步改良第四個階段的滑動模式控制，使得相對階數等於 r 的非線性系統皆也可透過連續性控制達到 $S \rightarrow 0$ ，中間不會伴隨 chattering 的產生(Levant, 2006, 2007, 2010)。

讀者如果若要全面了解三十年來各種滑動模式控制理論的發展，閱讀專書(Shtessel, 2014)應非常有幫助，該書內容廣泛且深入淺出，透過眾多範例的講解，一些較數學性的定理也容易了解。以下先將本章的參考文獻做一個簡單的分類，方便讀者查閱。讀者可以由每一篇文獻後面所附的參考文獻，查到更多的相關資料。

- (1) 飛行控制: Hedrick, 1990A; Hess, 2003; Thukral, 1998; Hu, 2010;
 - (2) 風能發電: Beltran, 2008; Beltran, 2012; Munteanu, 2008;
 - (3) 機械手臂: Young, 1978; Slotine, 1985; Hashimoto, 1992; Young, 1993; Piltan, 2011A;
 - (4) 引擎控制: Khan, 2003;
 - (5) FPGA 晶片設計: Piltan, 2011B;
 - (6) Matlab/Simulink 程式設計: Piltan, 2012;
 - (7) 水下載具: Yoerger, 1986.
 - (8) 電子煞車: Song, 2005;
 - (9) 汽車懸吊系統: Hedrick, 1990B;
 - (10) 機電系統: Utkin, 1999;
 - (11) 機械系統: Bartolini, 2003;
 - (12) 容錯設計: Alwi, 2008; Hu, 2010;
 - (13) 控制實現技術: Sabanovic, 2004;
 - (14) 綜合應用論文集: Young, 1993; Edwards, 1999; Zinober, 1993; Bartolini, 2003; Yu, 2015;
 - (15) 理論基礎: Filippov, 1964; Itkis, 1976; Utkin, 1977; Slotine, 1984; Utkin, 1992; Levant, 1993; Raghavan, 1994; Bartolini, 1998; Young, 1999; Kachroo, 1999; Levant, 2001; Levant, 2006; Levant, 2010; Chen, 2007; Shtessel, 2014;
 - (16) 回顧與展望: Yu, 2002; Bartolini, 2008; Fridman, 2011;
- Alwi, H. and Edwards, C., Fault Tolerant Sliding Mode Control Design with Piloted Simulator Evaluation, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 31, pp. 1186-1201, 2008. ,
 - Bartolini, G., Fridman, L., Pisano, A. and Usai, E. (Eds.), *Modern Sliding Mode Control Theory: New Perspectives and Applications*, Springer-Verlag, 2008.
 - Bartolini, G., Ferrara, A. and Usai, E., Chattering Avoidance by Second-Order Sliding Mode Control, *IEEE Trans. On Automatic Control*, pp. 241-246, 1998.
 - Bartolini, G., Pisano, A., Punta, E. and Usai, E., A Survey of Applications of Second-order Sliding Mode Control to Mechanical Systems, *International Journal of Control*, 76, pp. 875-892, 2003.
 - Beltran, B., Ahmed-Ali, T. and Benbouzid, M. H., Sliding Mode Power Control of Variable-Speed Wind Energy Conversion Systems, *IEEE Trans. On Energy Conversion*, 23, pp. 5511-558, 2008.
 - Beltran, B., Benbouzid, M. H. and Ahmed-Ali, T., Second-Order Sliding Mode Control of a Doubly Fed Induction Generator Driven Wind Turbine, *IEEE Trans. On Energy Conversion*, 27, pp. 261-269, 2012.

- Bondarev, A. G., Bondarev, S. A., Kostilyova, N. Y. and Utkin, V. I., Sliding Modes in Systems with Asymptotic State Observers, *Automation and Remote Control*, 5, pp. 5-11, 1985.
- Chen, Z., Shan, C. and Zhu, H., Adaptive Fuzzy Sliding Mode Control Algorithm for a Non-Affine Nonlinear System, *IEEE Trans. On Industrial Informatics*, 3, pp. 302-311, 2007.
- Filippov, A. F., Differential Equations with Discontinuous Right-hand Sides, *Mathematicheskii Sbornik*, 51, 1, 1960, in Russian. Translated in English, *Am. Math. Soc. Trans.*, 62, p. 199, 1964.
- Fridman, L., Moreno, J. and Iriarte, R. (Eds.), *Sliding Modes After the First Decade of the 21st Century*, Springer-Verlag, 2011.
- Hashimoto, H., Kubota, T., Sato, M. and Harashima, F., Visual control of robotic manipulator based on neural networks, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 39, pp. 490-496, 1992.
- Edwards, C. and Spurgeon, S., *Sliding Mode Control: Theory and Application*, Taylor and Francis, 1999.
- Hedrick, J. K. and Gopalswamy, S., Nonlinear Flight Control Design via sliding Methods, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 13, pp. 850-858, 1990A.
- Hedrick, J. K. and Butsuen, T., Invariant Properties of Automotive Suspensions, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, 204, pp. 21-27, 1990B.
- Hess, R. A. and Wells, S. R., Sliding Mode Control Applied to Reconfigurable Flight Control Design, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 26, pp. 452-462, 2003.
- Hu, Q., Robust Adaptive Sliding-Mode Fault-Tolerant Control with L_2 -gain performance for flexible spacecraft using redundant reaction wheels, *IET Control Theory and Applications*, 4, pp. 1055– 1070, 2010.
- Itkis, U., *Control Systems of Variable Structure*, Wiley, 1976.
- Kachroo, P., Existence of Solutions to a Class of Nonlinear Convergent Chattering-Free Sliding Mode Control Systems, *IEEE Trans. On Automatic Control*, 44, pp. 1620-1624, 1999.
- Khan, M. K., Goh, K. B. and Spurgeon, S. K., Second Order Sliding Mode Control of a Diesel Engine, *Asian Journal of Control*, 5, pp. 614-619, 2003.
- Levantovsky, L. V., Second Order Sliding Algorithms: Their Realization, In "Dynamics of Heterogeneous Systems", Institute for System Studies, Moscow, pp. 32–43 (in Russian), 1985.
- Levant, A. and Levantovsky, L.V., Sliding Order and Sliding Accuracy in Sliding Mode Control, *International Journal of Control*, 58, pp. 1247–1263, 1993.
- Levant, A., Robust Exact Differentiation via Sliding Mode Technique, *Automatica*, 34, pp. 379–384, 1998.
- Levant, A., Universal SISO Sliding-mode Controllers with Finite-time Convergence, *IEEE Trans. Automatic Control*, 46, pp. 1447–1451, 2001.
- Levant, A., Higher-order Sliding Modes, Differentiation and Output-feedback Control, *International Journal of Control*, 76, pp. 924–941, 2003.
- Levant, A., Quasi-continuous High-order Sliding-mode Controllers. *IEEE Trans. Automatic Control*, 50, pp. 1812–1816, 2006.

- Levant, A., Finite Differences in Homogeneous Discontinuous Control, IEEE Trans. Automatic Control, 527, pp. 1208–1217, 2007.
- Levant, A., Chattering Analysis, IEEE Trans. Automatic Control, 55, pp.1380–1389, 2010.
- Munteanu, I., Bacha, S., Bratcu, A. I., Guiraud, J. and Roye, D., Energy-Reliability Optimization of Wind Energy Conversion Systems by Sliding Mode Control, IEEE Trans. On Energy Conversion, 23, pp. 975-985, 2008.
- Piltan, F., Sulaiman, N., Rashidi, M., Tajpeikar, Z. and Ferdosali, P., Design and Implementation of Sliding Mode Algorithm: Applied to Robot Manipulator: a Review, International Journal of Robotics and Automation, 2, pp. 265-282, 2011(A).
- Piltan, F., Sulaiman, N., Marhaban, M. H., Nowzary, A. and Tohidian, M., Design of FPGA-Based Sliding Mode Controller for Robot Manipulator, International Journal of Robotics and Automation, 2, pp., 173-194, 2011(B).
- Piltan, F., Emamzadeh, S., Hivand, Z., Shahriyari, F. and Mirzaei, M., PUMA-560 Robot Manipulator Position Sliding Mode Control Methods Using Matlab/Simulink and Their Integration into Graduate/Undergraduate Nonlinear Control, Robotics and MATLAB Courses, International Journal of Robotics and Automation, 3, pp. 106-150, 2012.
- Raghavan, S. and Hedrick, J. K., Observer Design for a Class of Nonlinear Systems, International Journal of Control, 59, pp. 515–28, 1994.
- Sabanovic, A., Fridman, L. M. and Spurgeon, S. (Eds.), Variable Structure Systems: From Principles to Implementation, The Institution of Engineering and Technology, London, 2004.
- Shtessel, Y., Edwards, C., Fridman, L. and Levant, A., Sliding Model Control and Observation, Springer, 2014.
- Slotine, J. J. E., Tracking Control of Nonlinear Systems Using Sliding Surfaces, Ph.D. Dissertation, Massachusetts Institute of Technology, 1983.
- Slotine, J. J. E., Sliding Controller Design for Nonlinear Systems, International Journal of Control, 40, pp. 421-434, 1984.
- Slotine, J. J. E., The Robust Control of Robot Manipulators, International Journal of Robotics Research, 4, pp. 49-64, 1985.
- Slotine, J. J. E. and Coetsee, J. A., Adaptive Sliding Controller Synthesis for Nonlinear Systems, International Journal of Control, 43, pp. 1631-1651, 1986.
- Slotine, J. J., Hedrick, J. K. and Misawa, E. A., On Sliding Observers, ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 109, pp. 245-252, 1986.
- Slotine, J. J. E and Li, W., Applied Nonlinear Control, Prentice-Hall, 1991.
- Song, J., Performance evaluation of a hybrid electric brake system with a sliding mode controller, Mechatronics, 15, pp. 339–358, 2005.
- Thukral, A. and Innocenti, M., A Sliding Mode Missile Pitch Autopilot Synthesis for High Angle of Attack Maneuvering, IEEE Trans. On Control Systems Technology, 6, pp. 359-371, 1998.
- Utkin, V., Variable Structure Systems with Sliding Mode: A survey, IEEE Trans. On Automatic Control, 22, pp. 212-222, 1977.

- Utkin, V. , Sliding Modes and Their Application to Variable Structure Systems, MIR Publishers, Moscow, 1978.
- Utkin, V., Sliding Modes in Control and Optimization, Springer-Verlag, 1992.
- Utkin, V., Guldner, J. and Shi, J. X., Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems, Taylor and Francis, 1999.
- Yoerger, D. R. and Slotine, J. J. E., Robust Trajectory Control of Underwater Vehicles, IEEE Journal of Oceanic Engineering, 11, pp. 392-400, 1986.
- Young, K. D., Controller Design for a Manipulator Using Theory of Variable Structure Systems, IEEE Trans. On systems, Man, Cybernetics, 8, pp. 101-109, 1978.
- Young, K. D. (Ed.), Variable Structure Control for Robotics and Aerospace Application, Elsevier, 1993.
- Young, K. D. and Ozguner, U. (Eds.), Variable Structure Systems, Sliding Mode and Nonlinear Control, Springer-Verlag, 1999.
- Yu, X. and Xu, J. X. (Eds.), Variable Structure Systems: Towards the 21st Century, Springer-Verlag, 2002.
- Yu, X. and Efe, M. O. (Eds.), Recent Advances in Sliding Modes: From Control to Intelligent Mechatronics, Springer, 2015.
- Zinober, A. S. (Ed.), Variable Structure and Lyapunov Control, Springer-Verlag, 1993.