

## 2022 非線性控制期中考

2022/11/01

Closed-book Test (10:10~12:10)

1. (10%)說明如何用實驗的方法，分辨一個系統是線性還是非線性？
2. (10%)解釋為何一個二階非線性系統，若為非時變，則其相平面軌跡不可能相交；若為時變，則其相平面軌跡有可能相交。
3. (a) (5%)何謂 Lyapunov 穩定性？說明其定義。  
(b) (5%)已知某個二階非線性系統的平衡點(假設在原點)具備 Lyapunov 穩定性，但卻不具備漸進穩定性。大概描繪一下這個系統的相平面軌跡的形狀，並解釋此軌跡確實滿足(a)所述的 Lyapunov 穩定性的定義。
4. (10%)考慮如下的非線性系統：

$$\dot{x} = (x^2 - 1)(x^2 - 2)(x^2 - 3)$$

針對每一個平衡點，討論它們的穩定性。(提示:對於穩定的平衡點，軌跡偏離平衡點後，有回到平衡點的趨勢；對於不穩定的平衡點，偏離平衡點後，會有遠離平衡點的趨勢)

5. (10%)非線性系統的穩定性可相對於平衡點，也可相對於軌跡。已知某個非線性系統有一平衡點在原點，同時在原點的外圍有一個極限圓。原點可能穩定也可能不穩定，極限圓可能穩定也可能不穩定，但兩者之間(原點的穩定性與極限圓的穩定)存在有必然的關係嗎？
6. (10%)若以登山步道比擬相平面軌跡，以山谷的最低點比擬平衡點，並將登山步道 $x$ 處之高度記做 $V(x)$ 。解釋登山者如何利用他所攜帶的 GPS 高度訊號的變化情形，判斷該山谷的最低點具有漸進穩定性而且是全域性的穩定。
7. (10%)考慮下列的線性系統：

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

其中 $a_{ij}$ 是給定的常數值。說明如何利用 4 個給定的 $a_{ij}$ 系數，決定該系統的相平面軌跡是屬於六種類型的哪一種。

8. (10%)對於非線性系統 $\dot{x} = f(x)$ ，有 Lyapunov 函數 $V_1(x)$ 在包含平衡點的 $D_1$ 範圍內，可保證 $V_1 > 0$ 且 $\dot{V}_1 < 0$ ；另外有一個 Lyapunov 函數 $V_2(x)$ 在包含平衡點的 $D_2$ 範圍內，保證 $V_2 > 0$ 且 $\dot{V}_2 < 0$ 。則該平衡點的穩定範圍是 $D_1 \cup D_2$ ，還是 $D_1 \cap D_2$ ？為什麼？
9. (10%)對於一個線性時變系統：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 - \sin t \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{x} = A(t)x$$

若選定 Lyapunov 函數為

$$V(x, t) = x_1^2 + (2 + \sin t)x_2^2$$

證明該線性時變系統具有一致穩定性。

10. (10%)續上題，但採用 Lyapunov 函數 $V(x) = x^T x$ ，證明該線性時變系統具有一致穩定性。