

# 非線性控制

# Nonlinear Control

## 第三章作業



學 號：P46071204

研 究 生：蔡旻哲

授課教授：楊憲東

Department of Aeronautics and Astronautics

National Cheng Kung University

Tainan, Taiwan, R.O.C.

中 華 民 國 109 年 10 月 23 日

## 目錄

第 1 題.....	2
Matlab Code .....	12

## 第1題.

考慮如下列之控制方塊圖，其中包含非線性的飽和元件

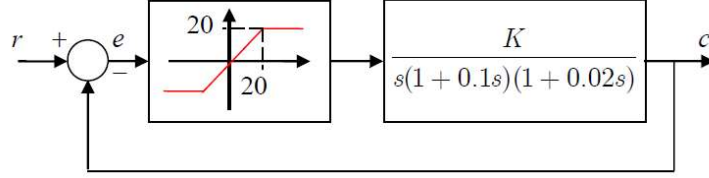


圖 1.1、包含非線性飽和元件之系統控制方塊圖

Question:

- (a) 將非線性飽和元件用其描述函數加以取代，並利用古典控制的 Nyquist 定理決定使得系統為穩定的最大允許  $K$  值(記作  $K^*$ )。

Answer:

首先，令參考輸入誤差為正弦波訊號  $e(t) = X \sin(\omega t)$  且輸入圖 1.1 中的飽和元件，其中， $X$  為輸入訊號振幅， $\omega$  為輸入訊號頻率。根據飽和元件的描述函數定義，在圖 1.1 的系統方塊圖中，飽和元件之描述函數可以被寫為

$$N(X) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[ \sin^{-1}\left(\frac{20}{X}\right) + \frac{20}{X} \sqrt{1 - \frac{400}{X^2}} \right], & X \geq 20 \\ 1, & X \leq 20 \end{cases} \quad (1.1)$$

接著根據圖 1.1，吾人將受控系統拆為一個增益值  $K$  乘上一個轉移函數  $G(s)$ ，如  $KG(s)$ ，其中

$$G(s) = \frac{1}{s(0.1s+1)(0.02s+1)} \quad (1.2)$$

式(1.2)可以說明，受控系統的開迴路極點位於  $s = 0$ 、 $s = -1/0.1$  以及  $s = -1/0.02$ ，也就是說受控系統開迴路並沒有不穩定極點。基於(1.2)，進一步將  $s$  以  $j\omega$  代換，因此  $G(s)$  透過  $s \rightarrow j\omega$  並且經過推導，可以表示為以下複數函式

$$G(j\omega) = \frac{-0.12\omega^2 - j\omega(1 - 0.002\omega^2)}{(-0.12\omega^2)^2 + \omega^2(1 - 0.002\omega^2)^2} \quad (1.3)$$

並且，將(1.3)內的頻率  $\omega$ ，由負無限大調變到無限大可以畫出如圖 1.2 之奈氏圖，更可以由圖 1.2 中看出，其中當輸入頻率調變為  $\omega = \omega_0 = 22.3607$  時，會使得開迴路受控系統  $G(j\omega)$  虛部為零，而這樣的輸入頻率，我們可以令(1.3)式虛部等於零，進一步透過以下式子求解

$$\omega(1 - 0.002\omega^2) = 0 \quad (1.4)$$

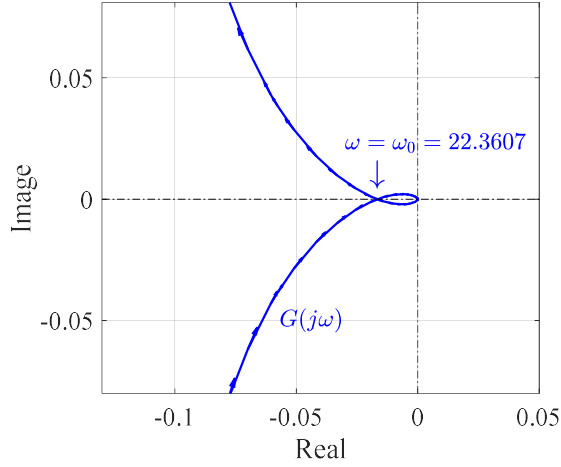


圖 1.2、開迴路受控系統之奈氏曲線

因此，參考圖 1.1 之方塊圖，並且引入圖中飽和系統的描述函數，系統的閉迴路等效轉移函數被寫為

$$\frac{c(j\omega)}{r(j\omega)} = \frac{N(X)KG(j\omega)}{1 + N(X)KG(j\omega)} \quad (1.5)$$

式(1.5)的特徵方程式為

$$1 + N(X)KG(j\omega) = 0 \quad (1.6)$$

亦可以進一步化為以下等式

$$KG(j\omega) = -\frac{1}{N(X)} \quad (1.7)$$

由描述函數(1.1)以及其適用範圍可以知道， $-1/N(X)$ 的曲線在複數平面上，是一條落在負實軸上的射線，並且起點在 $-1$ （當 $X = 20$ 時）。並且在此引入 Nyquist 定理（ $Z = N - P$ ），根據以上的敘述，受控系統的開迴路並沒有不穩定極點，也就是說 $P = 0$ ，因此根據 Nyquist 定理知，若要使得閉迴路系統穩定（ $Z = 0$ ），則 $-1/N(X)$ 不能為 $KG(j\omega)$ 的曲線所包圍（ $N = 0$ ）。

由於 $-1/N(X)$ 的曲線在複數平面上，是一條落在負實軸的射線，基於此，吾人根據(1.3)並且利用以下式子

$$1 - 0.002\omega_0^2 = 0 \quad (1.8)$$

透過等號左右兩邊移項計算，使開迴路受控系統在複數平面上，虛軸為 $0$ 的頻率為

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{0.002}} = 10\sqrt{5} \quad (1.9)$$

將 $\omega_0$ 代入 $KG(j\omega)$ 可得開迴路受控系統在複數平面上與實軸的交點為

$$KG(j\omega_0) = -\frac{K}{60} \quad (1.10)$$

由於 $-1/N(X)$ 在複數平面上的起點為 $-1$ ，並且隨著輸入振幅 $X$ 越大，射線的趨勢往左。因此，由以上系統閉迴路穩定的條件敘述，若要滿足 $-1/N(X)$ 不能為 $KG(j\omega)$ 的曲線所包圍，則

$$-\frac{K}{60} > -1 \Rightarrow \frac{K}{60} < 1 \Rightarrow K < 60 \quad (1.11)$$

當上式滿足時，代表所有的臨界點  $-1/N(X)$  都不被  $KG(j\omega)$  曲線所包圍，也就是不管輸入振幅  $X$  為多少，系統恆為穩定。

當  $K < 60$  沒有被滿足時，則有部分的輸入振幅  $X$  將造成系統的不穩定。然而，極限圓就是產生在穩定與不穩定交界處，也就是位於  $-1/N(X)$  與  $KG(j\omega)$  的交點處

$$-1/N(X) = KG(j\omega_0) = -1 \quad (1.12)$$

此時  $K = 60$ ，為開迴路受控系統的臨界增益，其奈氏曲線如圖 1.3，在圖中可以看出，此時所有的臨界點  $-1/N(X)$  都還不會被  $KG(j\omega)$  曲線所包圍，但是兩者已經產生交點了。根據以上結果，也因此不管系統輸入振幅  $X$  為多少，使得系統恆為穩定的最大允許  $K$  值為  $K = K^* = 60$

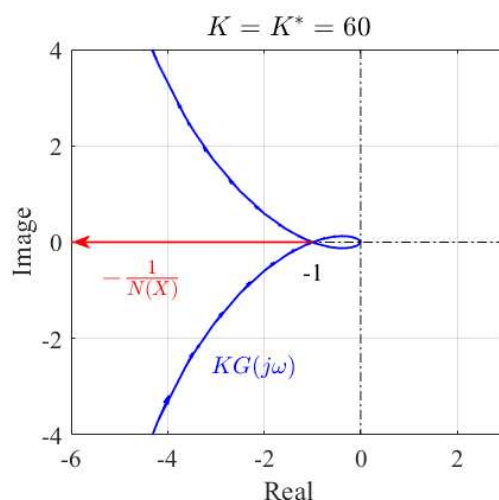


圖 1.3、系統臨界點軌跡  $-1/N(X)$  與線性受控體  $K^*G(j\omega)$  的奈氏曲線關係

#### Question:

- (b) 接續(a)，隨意取數值  $K_1 > K^*$ ，並在上面方塊圖中，令  $K = K_1$  (例如若  $K^* = 10$ ，可取  $K = K_1 = 15$ )，參考例題 3.3.2 的方法，由描述函數求出極限圓發生時的振幅  $X$ ，及頻率  $\omega$ 。

#### Answer:

接續(a)，由(a)吾人推導出只要開迴路受控系統增益  $K < K^* = 60$ ，則系統無論輸入振幅  $X$  值為如何，閉迴路系統皆會穩定，然而當  $K = K_1 > K^*$  時，則會導致有部分振幅  $X$ ，使得  $-1/N(X)$  在複數平面上，被  $KG(j\omega)$  曲線所包圍。

基於以上敘述，令  $K_1 = 150$  並且透過(1.10)可計算出

$$K_1 G(j\omega_0) = -\frac{K_1}{60} = -2.5 \quad (1.13)$$

因此，根據定義，極限圓所發生之處為系統產生在穩定與不穩定的交界，也就是說

$$-1/N(X) = K_1 G(j\omega_0) = -2.5 \quad (1.14)$$

系統的奈氏曲線關係如圖 1.4 所示，由圖中可以驗證，當增益  $K_1$  的選擇大於臨界增益  $K^* = 60$ ，確實會有部分振幅  $X$ ，使得  $-1/N(X)$  在複數平面上，被  $K_1 G(j\omega)$  曲線所包圍，並且我們藉由(1.14)式知道其交點為  $-2.5$  這也呼應了圖 1.4 的結果。

吾人令滿足(1.14)式的輸入振幅為  $X_c$ ，並且利用等式(1.14)，可以求解此時的振幅

$$X_c = 62.5603 \quad (1.15)$$

另外，基於(a)的敘述，此時的頻率條件為  $\omega = \omega_0 = 10\sqrt{5}$ ，因此，可以預測系統輸出響應之極限圓的動態為  $c(t) = X_c \sin(w_0 t) = 62.5603 \sin(10\sqrt{5}t)$ 。

參考圖 1.4 並且基於描述函數(1.1)的計算可得知，當輸出振幅  $X$  介於  $0 < X < X_c$ ， $X_c = 62.5603$  時， $-1/N(X)$  會大於  $-2.5$ ，此時  $-1/N(X)$  在複數平面上會被  $K_1 G(j\omega)$  曲線所包圍，因此系統會不穩定，導致輸出振幅逐漸變大，而當輸出振幅介於  $X > X_c$ ， $X_c = 62.5603$  時， $-1/N(X)$  會小於  $-2.5$ ，此時  $-1/N(X)$  在複數平面上皆不會被  $K_1 G(j\omega)$  曲線所包圍，也就是說系統為穩定的，因此輸出振幅會逐漸所小，透過以上這樣的兩個結果，我們推斷系統的極限圓為穩定的極限圓。

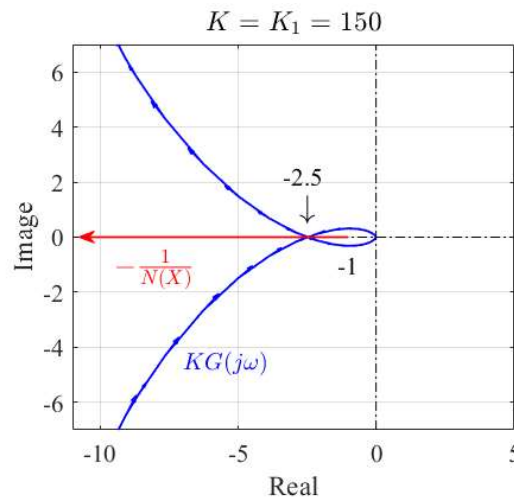


圖 1.4、系統臨界點軌跡  $-1/N(X)$  與線性受控體  $K_1 G(j\omega)$  的奈氏曲線關係

#### Question:

- (c) 利用 Matlab 的非線性飽和元件模組，模擬上面方塊圖的時間響應  $c(t)$ ，每次模擬使用不同的  $K$  值，決定使得系統為穩定的最大允許  $K$  值(記作  $K^*$ )。註:這裡的穩定是指在輸入指令  $r=0$  的情形下，不管初始誤差  $e(0) > 20$  或是  $e(0) < 20$ ，都可以保證  $c(t) \rightarrow 0$ 。

#### Answer:

本文在這裡透過 Matlab 中的 Simulink，來進行系統閉迴路響應的數值模擬，其系統模擬架構如圖 1.5 所示，值得注意的是，由於在 Matlab Simulink 當中，並沒有辦法直接在轉移函數設置初始值，因此在這裡會將圖 1.1 中的線性受控系統

$$G(s) = \frac{1}{s(0.1s+1)(0.02s+1)} \quad (1.16)$$

透過 Matlab 中的函式 “tf2ss”，將線性受控系統轉為以下狀態空間方程式

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (1.17)$$

表示在 圖 1.5 當中，其中系統狀態向量為  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ ，輸出向量為  $\mathbf{y} = 500x_3$ ，且系統矩陣表示如下

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -60 & -500 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [0 \ 0 \ 500] \quad (1.18)$$

這裡的輸出向量  $\mathbf{y} = 500x_3$  就是系統 圖 1.1 中 的輸出響應  $c(t)$ ，因此在初始值設置的部分，假設系統的初始值設置為追蹤誤差  $e(0) = -c(0)$ ，因此在狀態空間中，狀態初始值的部分被設置為  $\mathbf{x}(0) = [0 \ 0 \ -e(0)/500]^T$ 。

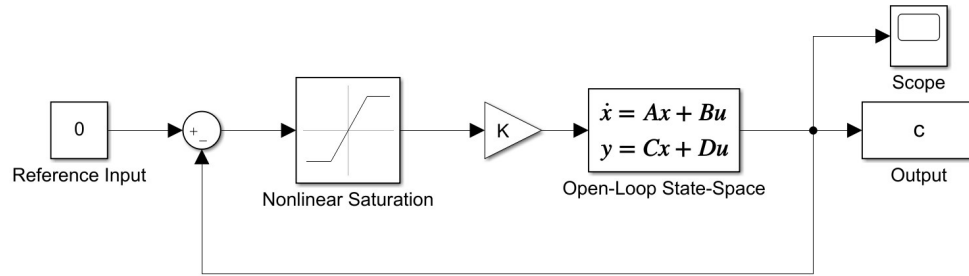


圖 1.5、閉迴路系統於 Matlab Simulink 模擬之架構圖

首先考慮線性系統增益值  $K=1$ ，由(a)的 Nyquist 定理結果可以得知，不管初始誤差的振幅為何，可以預期系統還是會為穩定的，而在此也從系統模擬結果 圖 1.6，驗證了透過此一理論所預期的系統響應。

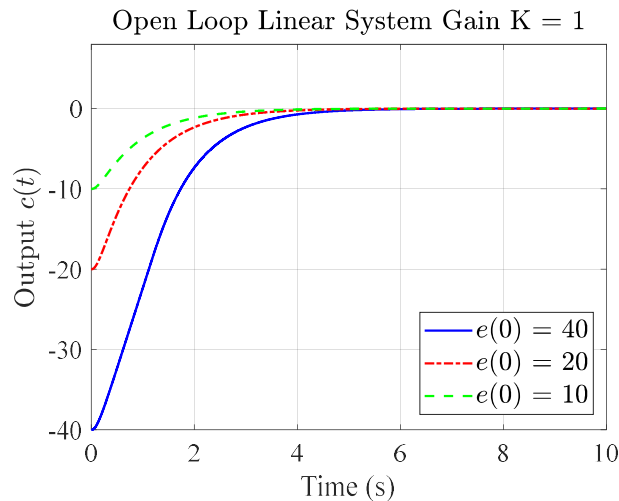


圖 1.6、系統增益值  $K=1$  時不同初始條件下的系統收斂行為

在圖 1.6 中，系統的增益值設為  $K=1$ ，而系統誤差初始值分別設定為  $e(0)=40$ 、 $e(0)=20$  以及  $e(0)=10$ ，由圖中的結果可以驗證系統由 Nyquist 理論分析當中所述，當  $K=1$  時不管初始振幅為何， $-1/N(X)$  在複數平面上皆不會被曲線  $KG(j\omega)$  所包圍，因此系統無論如何皆會為穩定的。

接著將初始誤差設定為  $e(0)=20$ ，相當於在複數平面上圍線  $-1/N(X)$  的起點  $-1$ ，並且透過調整不同的增益值  $K$ ，使得系統響應會從原本的穩定收斂，逐漸變化為系統出現極限圓的現象如圖 1.7。這樣的結果也呼應到了(b)中所敘述到的，在複數平面上，曲線  $KG(j\omega)$  也會從原本不與  $-1/N(X)$  相交，隨著增益值  $K$  的增加，逐漸使得  $KG(j\omega)$  與  $-1/N(X)$  相交，甚至包圍了部分的  $-1/N(X)$ ，而當兩者相交的情況也就是系統由穩定轉為出現極限圓的臨界點，在圖 1.7 當中，也可以看出當  $K$  調整到  $K=60$  時，系統的響應也出現了極限圓，因此由模擬的結果，我們可以得出  $K=60$  為系統的臨界增益值。

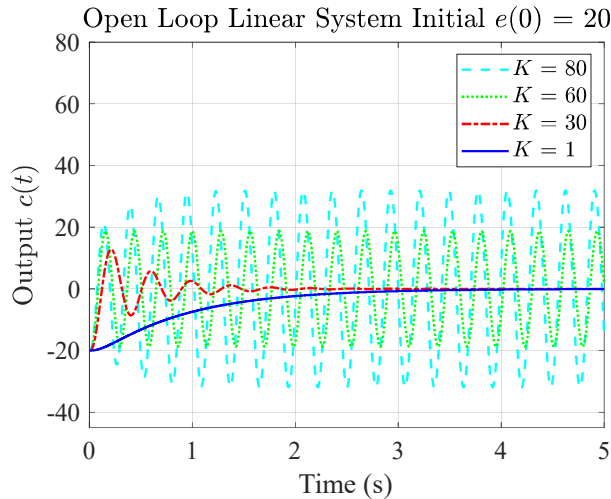


圖 1.7、在固定初始條件下不同開迴路增益值對於系統收斂響應的影響

接著，我們一樣將初始誤差固定在  $-1/N(X)$  在複數平面上的起點  $-1$ ，也就是令  $e(0)=20$ ，並且設定增益值為臨界增益  $K=60$ ，以及其上下  $K=62$ 、 $K=58$  做些微的調整，其系統響應的結果會為圖 1.8 所示，在圖 1.8 中，當增益值設定為臨界增益  $K=60$  時，不意外的系統會由一開始就在極限圓上，而當  $K=58$  時，由 Nyquist 定理我們可以得知，在複數平面上，此時的  $-1/N(X)$  圍線皆還再曲線  $KG(j\omega)$  的左半，因此系統會是收斂的，在圖中系統收斂的響應也以藍實線表示，而當  $K=62$  時，此時在複數平面上， $-1/N(X)$  的圍線起點  $-1$  會被曲線  $KG(j\omega)$  所包圍，因此此時的系統會為不穩定，導致誤差會逐漸增加，而當誤差增加到一定的值時，在複數平面上  $-1/N(X)$  又會與  $KG(j\omega)$  相交，因此會進入極限圓，這樣的現象在圖 1.8 中，以紅色虛線的響應表示。



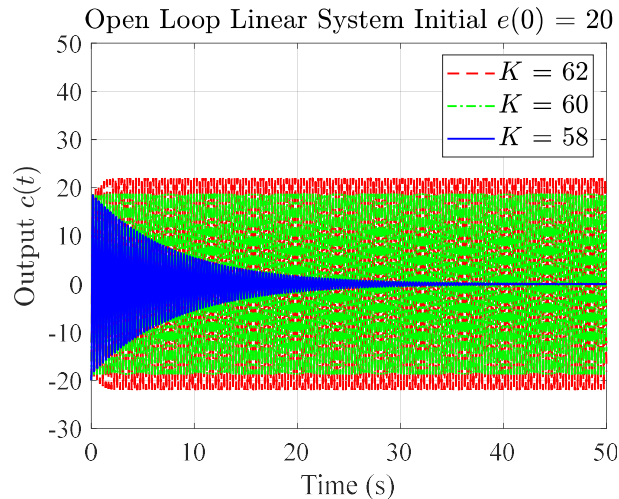


圖 1.8、固定初始條件下系統在臨界增益  $K = 60$  上下附近對於系統收斂響應的影響

根據(1.1)可以知道，初始誤差設定在小於等於 20 的情況之下， $-1/N(X)$  皆等於 -1，也就是說當初使值設定小於等於 20，在複數平面上， $-1/N(X)$  皆會與設定為臨界穩定增益的  $KG(j\omega)$  相交，使得系統從初始開始就在極限圓上，這樣的推論，可以由圖 1.9 驗證，從圖 1.9 當中可以看出，在初始值小於等於 20 的三種情形之下，系統的響應一開始就在極限圓上了，而極限圓的振幅會由一開始的初始條件所決定。

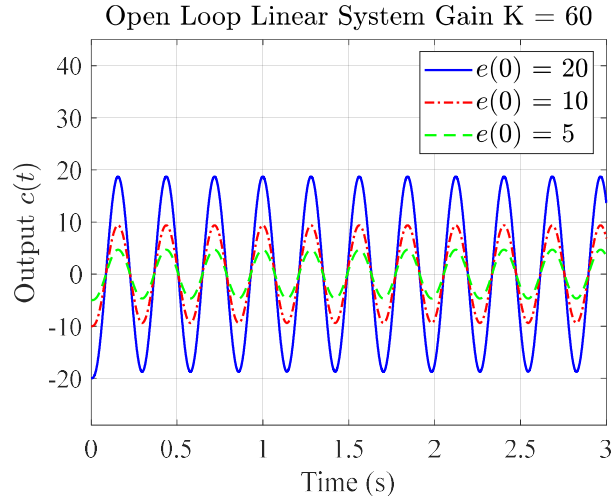


圖 1.9、系統增益值為臨界增益  $K = 60$  時初始條件小於等於 20 的閉迴路系統響應

而當初始誤差設定在大於 20 的情況之下， $-1/N(X)$  皆小於 -1，也就是說當初使值設定大於 20，在複數平面上，這樣的初始振幅帶入  $-1/N(X)$  皆不會與設定為臨界穩定增益的曲線  $KG(j\omega)$  相交，使得系統在一開始是收斂定的，然而在系統收斂到振幅為 20 的時候， $-1/N(X)$  與設定為臨界穩定增益的曲線  $KG(j\omega)$  相交，因此開始進入極限圓，這樣的推論，可以由圖 1.10 驗證，從圖 1.10 當中可以看出，在初始值

大於 20 的三種情形之下，系統的響應一開始皆會收斂，但是最終都會進入到相同振幅的極限圓上，而極限圓的振幅並不是由一開始的初始條件所決定，而是由系統增益值  $K$  所決定。這裡可以特別注意的是，在 圖 1.10 當中，雖然不同的初始值皆會使得系統響應進入相同振幅的極限圓，但是在不同初始值之間也產生了相位的差異。

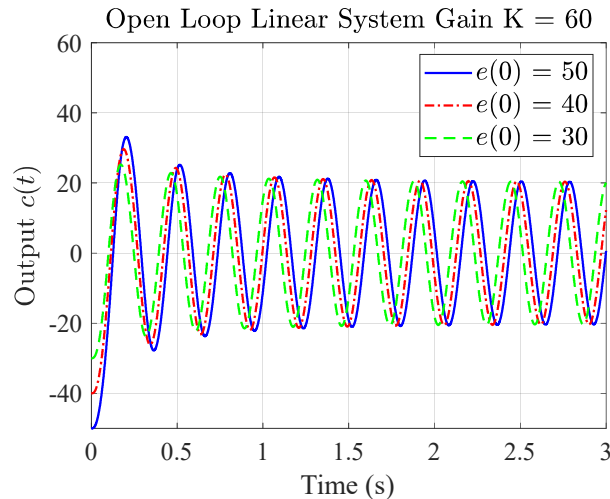


圖 1.10、系統增益值為臨界增益  $K = 60$  時  
初始條件大於 20 的閉迴路系統響應行為

Question:

(d) 比較以上二種方法所得到的  $K^*$  值，分析二者的差異所代表的意義。

Answer:

根據以上的結果，我們可以發現，透過 Nyquist 定理所求解出來的臨界增益  $K^*$ ，與透過多次系統模擬所求解出來的臨界增益  $K^*$  是相同的，兩者皆等於 60，這樣的結果也證明了，利用描述函數的方法將一個非線性系統以線性系統的 Nyquist 理論做系統分析、設計是具有可行性的，而這樣的系統分析行為，並非在任何系統皆適用，並且所求出來的臨界增益值皆相同，最主要我們發現，透過受控系統  $G(s)$  的波德圖分析，受控系統本身的頻寬很窄，也就是說描述函數一開始所建立的假設條件是可以被成立的。

Question:

(e) 在問題(c)中，取數值  $K = K_1 > K^*$ ，其中  $K_1$  的值取成與(b)題相同，但以 Matlab 進行模擬(不使用描述函數)，確認方塊圖是否存在極限圓的振盪解  $c(t) = X \sin \omega t$ 。如果存在的話，比較此振幅  $X$ ，及頻率  $\omega$  是否與(b)題的答案相同。(注意:所謂極限圓的振盪解是指不管初始誤差  $e(0)$  為多少，Matlab 的響應  $c(t)$  最後都收斂到相同的弦波函數  $X \sin(\omega t)$ )。

Answer:

在本題令與(b)小題的系統增益值相同  $K = K_1 = 150$ ，並且透過與(c)小題相同的手段進行系統模擬，在(b)小題中的 Nyquist 定理分析當中得知， $K = K_1 = 150$  大於臨界增益  $K = K^* = 60$ ，因此會有部分的振幅使得圍線  $-1/N(X)$  被曲線  $KG(j\omega)$  所包圍，導致不管出始振幅為多少，最終都會進入系統穩定的極限圓當中，而在(b)當中，我們也預測了系統的極限圓振幅為 62.5606，因此在模擬的部分 圖 1.11，設定了三種不同的初始條件，分別為  $e(0) = 62$ 、 $e(0) = 100 > 62$  以及  $e(0) = 40 < 62$ 。

由 圖 1.11 的可以看到，不管初始振幅是大於或小於極限圓振幅，最終都會收斂到相同的極限圓上，由此驗證(b)小題最後所述，系統的極限圓是為穩定的極限圓，而我們也將(b)小題所預測的極限圓響應，以及系統模擬出來的極限圓響應做比較如 圖 1.12，從圖中可以看到預測出來的極限圓與真實模擬結果的振幅是幾乎相同的。

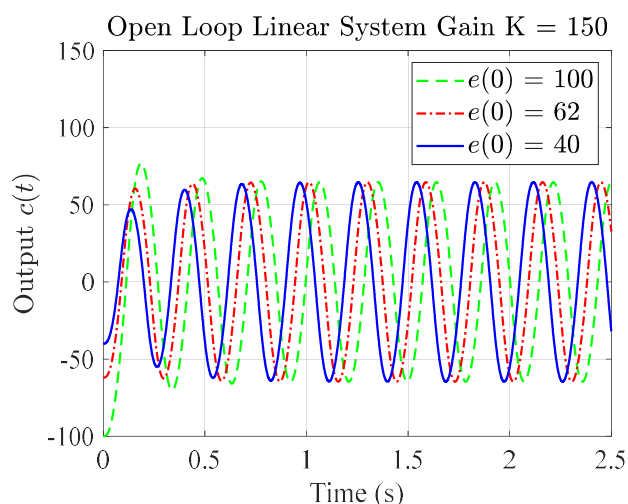


圖 1.11、當系統增益值  $K > 60$  時初始條件分別大於等於小於極限圓振幅所對應到的系統響應

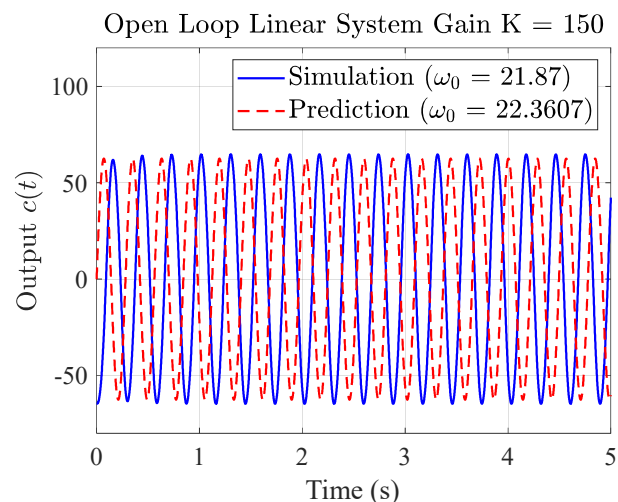


圖 1.12、由系統模擬得到的響應以及預測的系統極限圓響應

在此，我們也將系統模擬出來的響應做快速傅立葉轉換 圖 1.3，分析了其所含有的主要頻率以及振幅，由圖中的結果可以看出，主要頻率為  $\omega = 21.87$ ，這與(b)小題所預測出來的極限圓頻率  $\omega_0 = 10\sqrt{5}$  很相近，以及主要振幅為  $X = 64.85$ ，這也與(b)小題所預測出來的極限圓振幅  $X_c = 62.5603$  差距不遠，總結來說，系統所模擬出來的響應與(b)小題所預測出來的極限圓  $c(t) = X_c \sin(\omega_0 t) = 62.5603 \sin(10\sqrt{5}t)$  還是有些微的差異，以及相位落後的問題，這些差異全部都來自於，前者的分析是將非線性元件利用描述函數方法，做線性系統的穩定性分析，然而非線性元件的描述函數最終也只是一個逼近的方法，因此還是無法完全的達到完美準確的分析預測。

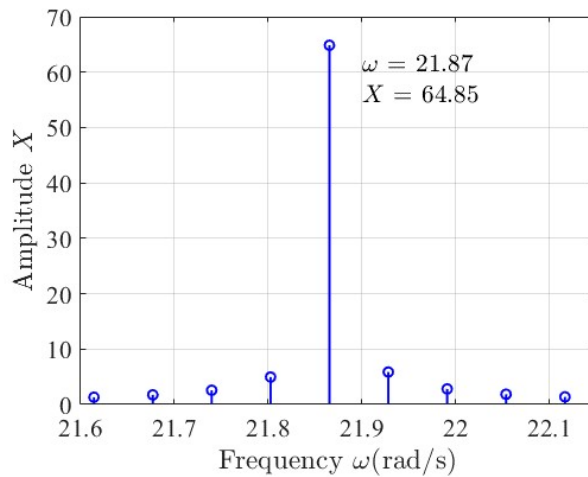


圖 1.13、將系統模擬出的響應做快速傅立葉轉換得到的頻率與振幅對應圖

## Matlab Code

### 第一題 - (a)

```
%% Nonlinear Control HW3 - Q1 - (a)

clc ; clear ; close all

K = 150 ;
num=[K];
den1=conv([0.1 1],[0.02 1]);
den=conv([1 0],den1);
sys=tf(num,den);
[re,im,we]=nyquist(sys);
for i = 1: length(re)
    G_re(i) = re(:,i) ;
    G_im(i) = im(:,i) ;
end

X = 20 : 0.1 : 270 ;
for i = 1:length(X)
    N_X(i) = 2/pi*( asin(20/X(i)) + 20/X(i)*( 1-400/(X(i)^2) )^(1/2) ) ;
end
N_X_inv = 1./N_X ;
func_N_X_c = @(Xc) -2.5*(2/pi*( asin(20/Xc) + 20/Xc*( 1-400/(Xc^2) )^(1/2) ))+1 ;
Xc = fsolve(func_N_X_c,51)

FS_ax = 16 ;
LW_1 = 1.35 ;
figure
plot(G_re,G_im,'b','LineWidth',LW_1)
hold on
quiver(G_re,G_im,gradient(G_re),gradient(G_im),2,'b','LineWidth',LW_1,'MaxHeadSize',100)
hold on
plot(G_re,-G_im,'b','LineWidth',LW_1)
quiver(G_re,-G_im,-gradient(G_re),gradient(G_im),2,'b','LineWidth',LW_1,'MaxHeadSize',100)
% plot([-0.15 0.05],[0 0],'-k')
% plot([0 0],[-0.09 0.09],'-k')
plot([-11 5],[0 0],'-k')
plot([0 0],[-7 7],'-k')
```

```

plot(-N_X_inv,zeros(length(N_X_inv)),'-r','LineWidth',LW_1)
annotation( 'arrow' ,[ 0.248 0.195 ],[0.53 0.53] , 'Color' , 'r' );
text(-1.4,-1,-1,'FontSize',16,'FontName','Times New Roman')
text(-7,-4.6,'$KG(j)\omega$','Interpreter','latex','FontSize',15,'Color','b')
text(-3.4,2.2,-2.5,'FontSize',16,'FontName','Times New Roman')
text(-2.79,0.95,'$\downarrow$','Interpreter','latex','FontSize',20,'Color','K')
% text(-0.03,0.023,'$\omega = \omega_0 = 22.3607$','Interpreter','latex','FontSize',15,'Color','b')
% text(-0.02,0.01,'$\downarrow$','Interpreter','latex','FontSize',20,'Color','b')
text(-9.5,-1.2,'$\frac{1}{N(X)}$','Interpreter','latex','FontSize',18,'Color','r')
grid on
% axis
axis equal
ax(1) = gca ;
% ax(1).XLim = [-0.13 0.05];
% ax(1).YLim = [-0.08 0.081];
ax(1).XLim = [-11 5];
ax(1).YLim = [-7 7];
% label
xlabel('Real')
ylabel('Image')
% title
title('$K = K_1 = 150$','Interpreter','latex')

for i = 1:length(ax)
    set(ax(i),'FontSize',FS_ax,'FontName','Times New Roman')
end

```

### 第一題 - (c)

```

%% Nonlinear Control HW3 - Q1 - (c)
clc ; clear ; close all
dt = 0.0005 ;
t_final = 100 ;
t = 0: dt : t_final ;
K = 61 ;
[A,B,C,D] = tf2ss(1,conv([1 0],conv([0.1 1],[0.02 1])));
e_IC = 20 ;
sim('ClosedLoop_System_Simulink')

```

```

LW_1 = 1.4 ;
LW_2 = 1 ;
FS_ax = 16 ;
FS_leg = 17 ;

f(1) = figure() ;
plot(t,c,'b','LineWidth',LW_1) ;
xlabel('Time (s)')
ylabel('Output $c(t)$','Interpreter','latex')
title(['Initial Condition: $e(0)=$',num2str(e_IC) ],'Interpreter','latex')
ax(1) = gca ;
% ax(1).YLim = [-6 6];
grid on

%%
e_IC_2 = [40 ; 20 ; 10] ;
K_2 = 1 ;
f(2) = figure() ;
color = ['b-' ; 'r-' ; 'g--' ] ;

for i = 1:length(e_IC_2)
    e_IC = e_IC_2(i) ;
    K = K_2 ;
    sim('ClosedLoop_System_Simulink')
    plot(t,c,color(i,:), 'LineWidth',LW_2) ;
    hold on
end
xlabel('Time (s)')
ylabel('Output $c(t)$','Interpreter','latex')
title(['Open Loop Linear System Gain K = ',num2str(K_2) ],'Interpreter','latex')
hs(1) = legend(['$e(0)$ = ', num2str(e_IC_2(1))], ['$e(0)$ = ', num2str(e_IC_2(2))], ['$e(0)$ = ',
num2str(e_IC_2(3))], 'Interpreter','latex') ;
% hs(1) = legend(['$e(0)$ = ', num2str(e_IC_2(1))], ['$e(0)$ = ', num2str(e_IC_2(2))], ['$e(0)$ = ',
num2str(e_IC_2(3))], 'Interpreter','latex') ;
ax(2) = gca ;
ax(2).YLim = [-40 8];
grid on

```

```

%%
e_IC_3 = 20 ;
K_3 = [61 ; 60 ; 59] ;
f(3) = figure() ;
color = ['r--' ; 'g-.' ; 'b- ' ] ;

for i = 1:length(K_3)
    e_IC = e_IC_3 ;
    K = K_3(i) ;
    sim('ClosedLoop_System_Simulink')
    plot(t,c,color(i,:), 'LineWidth',LW_2) ;
    hold on
end
xlabel('Time (s)')
ylabel('Output $c(t)$','Interpreter','latex')
title(['Open Loop Linear System Initial $e(0)$ = ',num2str(e_IC_3) ],'Interpreter','latex')
hs(2) = legend(['$K$ = ', num2str(K_3(1))],['$K$ = ', num2str(K_3(2))],['$K$ = ',
num2str(K_3(3))], 'Interpreter','latex') ;
ax(3) = gca ;
ax(3).YLim = [-30 50];
grid on

for i = 1:length(ax)
    set(ax(i), 'FontSize',FS_ax, 'FontName', 'Times New Roman')
end

for i = 1:length(hs)
    set(hs(i), 'FontSize',FS_leg, 'FontName', 'Times New Roman')
end
end

```

### 第一題 - (e)

```

%% Nonlinear Control HW3 - Q1 - (e)
clc ; clear ; close all
dt = 0.001 ;
t_final = 100 ;
t = 0: dt : t_final ;
[A,B,C,D] = tf2ss(1,conv([1 0],conv([0.1 1],[0.02 1])));

```



```

e_IC_2 = [100 ; 62 ; 40 ] ;
K_2 = 150 ;

f(1) = figure() ;
color = ['g--' ; 'r-' ; 'b-' ] ;
LW_1 = 1.45 ;
LW_2 = 1.4 ;
FS_ax = 16 ;
FS_leg = 17 ;
for i = 1:length(e_IC_2)
    e_IC = e_IC_2(i) ;
    K = K_2 ;
    sim('ClosedLoop_System_Simulink')
    plot(t,c,color(i,:), 'LineWidth',LW_2) ;
    hold on
end
xlabel('Time (s)')
ylabel('Output $c(t)$','Interpreter','latex')
title(['Open Loop Linear System Gain K = ',num2str(K_2) ],'Interpreter','latex')
hs(1) = legend(['$e(0)$ = ', num2str(e_IC_2(1))], ['$e(0)$ = ', num2str(e_IC_2(2))], ['$e(0)$ = ',
num2str(e_IC_2(3))], 'Interpreter','latex') ;
ax(1) = gca ;
ax(1).YLim = [-100 150];
grid on

%%
e_IC = 64.66 ;
K = 150 ;
pre_Xc = 62.5603*sin(10*(5)^(1/2)*t) ;
f(2) = figure ;
sim('ClosedLoop_System_Simulink')
plot(t,c,'b','LineWidth',LW_1) ;
hold on
plot(t,pre_Xc,'r--','LineWidth',LW_1)

xlabel('Time (s)')
ylabel('Output $c(t)$','Interpreter','latex')
title(['Open Loop Linear System Gain K = ',num2str(K) ],'Interpreter','latex')

```

```

hs(2) = legend({'Simulation ($\omega_0$ = 21.8546)', 'Prediction ($\omega_0$ = 22.3607)'}, 'Interpreter', 'latex') ;
ax(2) = gca ;
ax(2).YLim = [-80 120] ;
grid on

%% FFT
t = 0: dt : t_final-dt ;
fs = 1/dt ;
c = c(1:end-1);
l = length(t);
F = fs*(0:(l/2))/l;
y=fft(c);
P2=abs(y/l);
P1=P2(1:l/2+1);
P1(2:end)=2*P1(2:end);
f(3) = figure;
stem((F*2*pi),P1,'b','LineWidth',LW_1);
xlabel('Frequency $\omega$(rad/s)', 'Interpreter', 'latex')
ylabel('Amplitude $X$', 'Interpreter', 'latex')
text(21.9,58,{'$\omega$ = 21.87'; '$X$ = 64.85'}, 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 16, 'Color', 'k')
ax(3) = gca ;
ax(3).XLim = [21.6 22.15] ;
grid on

%%
for i = 1:length(ax)
    set(ax(i), 'FontSize', FS_ax, 'FontName', 'Times New Roman')
end

for i = 1:length(hs)
    set(hs(i), 'FontSize', FS_leg, 'FontName', 'Times New Roman')
end

```