國 立 成 功 大 學 航 太 工 程 學 系

Department of Aeronautics and Astronautics, NCKU

非 線 性 控 制

Nonlinear Control

第 一 章 作 業

Homework 1

學　　號：P46104308

研 究 生：石　偉

授課教授：楊憲東

中華民國 111 年 9 月 24 日

目錄

1.1 渾沌的測試

<u>Question</u>:

渾沌(chaos)的測試。適用 Matlab 求解非線性 ODE

$$\ddot{x} + 0.1\dot{x} + x^3 = 5\cos t \quad (1.1)$$

測試兩組很接近的初始條件

(a) $x(0) = 3$，$\dot{x}(0) = 4$

(b) $x(0) = 3.01$，$\dot{x}(0) = 4.01$

比對兩組$x(t)$對時間的響應圖，是否很接近?若把非線性項x^3改成線性項x，情況又如何?

<u>Answer</u>:

按題目式(1.1)，設$x_1 = x, x_2 = \dot{x}$，可以寫出狀態空間方程表示式

$$\begin{bmatrix}\dot{x_1}\\ \dot{x_2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -0.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}5cost + \begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}x_1^3 \quad (1.2)$$

將題目中兩組初始條件(a)與(b)帶入(1.2)中，並透過 Matlab 函式庫中的 ODE45 數值積分求解，其結果如下圖 1.1、圖 1.2 所展示

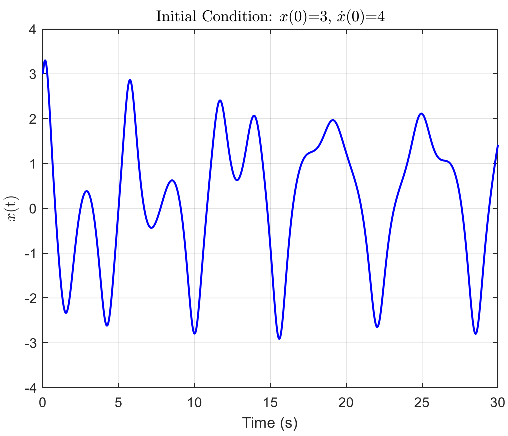

圖 1.1、條件(a)之非線性響應

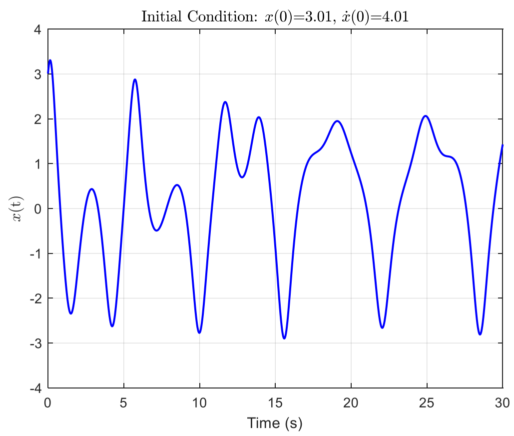

圖 1.2、條件(b)之非線性響應

接著，以疊圖的方式比較兩種初始條件的非線性響應，如下圖 1.3 所展示。由圖 1.3 中可看出初始值的些微差異，導致系統在約 t=8~9s、t=26~27s 等部分有較為明顯的不同，其餘時間也有不易觀測的小差異，應是由於系統初始值的差異非常小與非線性項對系統權重比例不高，因此產生多數響應重疊的結果。

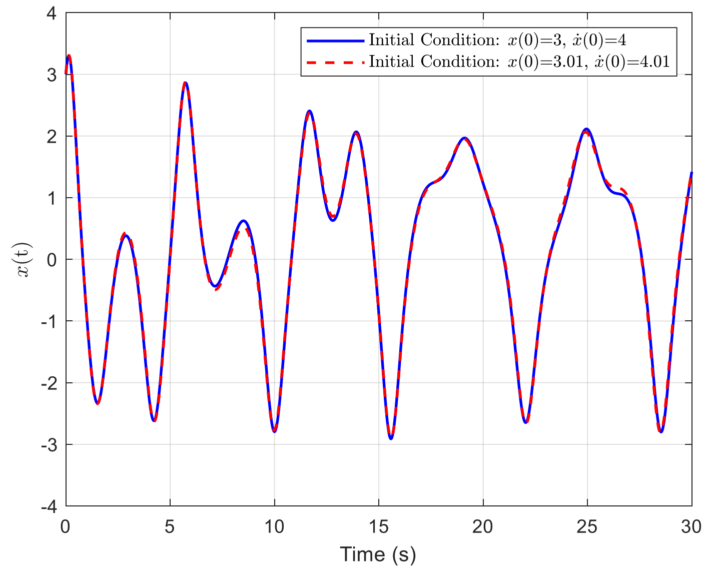

圖 1.3、不同初始值之非線性響應比較圖

其後，測試將題目(1.1)式中的非線性項x^3改成線性項x，則我們可以寫出新式

$$\ddot{x} + 0.1\dot{x} + x = 5\cos t \qquad (1.3)$$

同樣地，我們可以令$x_1 = x, x_2 = \dot{x}$，則(1.3)的狀態方程表示式為

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 5cost \qquad (1.4)$$

最後，我們把(a)、(b)兩初始條件再帶入(1.4)中，也以 ODE45 去做積分求解，則可得出相較於圖 1.3，幾乎不受到微小初始值差異影響的結果，如下圖 1.4 所展示。

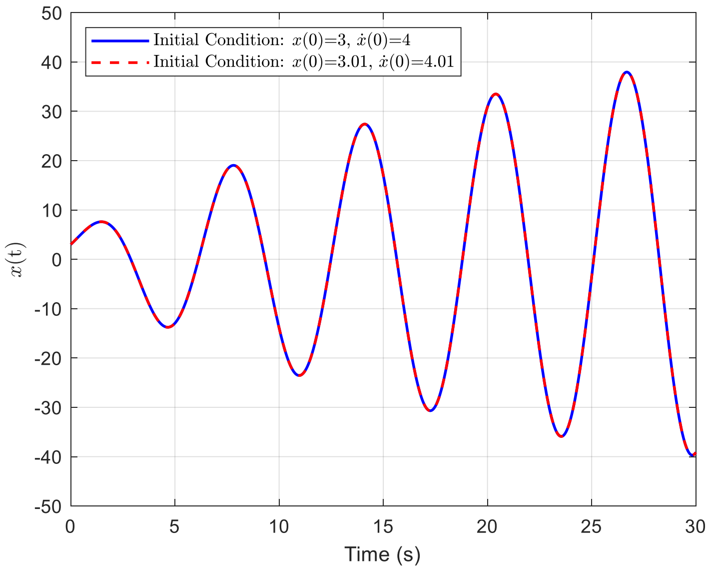

圖 1.4、不同初始值之線性響應比較圖

1.2 Lorentz 奇異吸子的測試

Question:

Lorentz 奇異吸子的測試:用 Matlab 求解下列非線性 ODE

$$\dot{x} = 10(y - x) \tag{2.1}$$

$$\dot{y} = x(28 - z) - y \tag{2.2}$$

$$\dot{x} = xy - 8z/3 \tag{2.3}$$

選取初始位置$\left(x(0), y(0), z(0)\right) = (1,1,0)$，畫出軌跡圖$\left(x(t), y(t), z(t)\right)$隨時間$t = 0$連續變化到$t = T$所連城曲線。比較三種終端時間:$T = 100, 1000, 10000$，所得到的奇異吸子軌跡有何不同?如果將初始位置改成$\left(x(0), y(0), z(0)\right) = (10,1,0)$，其結果有何不同?

Answer:

考慮(2.1~3)三組 Lorentz 系統，帶入第一組初始位置(1,1,0)，並且三個不同的終端時間透過 Matlab 中的 ODE45 數值積分計算解，其響應圖如下圖 2.1 所展示。而圖中可以看見雖然終端時間以十倍再增加，但系統的軌跡僅是在三維空間中不斷地去填滿固定輪廓形成的區域，且軌跡不會相同的點，此即為奇異吸子的現象。

圖 2.2 為帶入起始位置(10,1,0)所畫成之軌跡，觀察後可知，雖然初始值使起點位置有所差異，然而軌跡仍舊會隨著時間於近似圖 2.1 的區域內進行纏繞，且軌跡仍舊不重疊，產生出奇異吸子的現象。

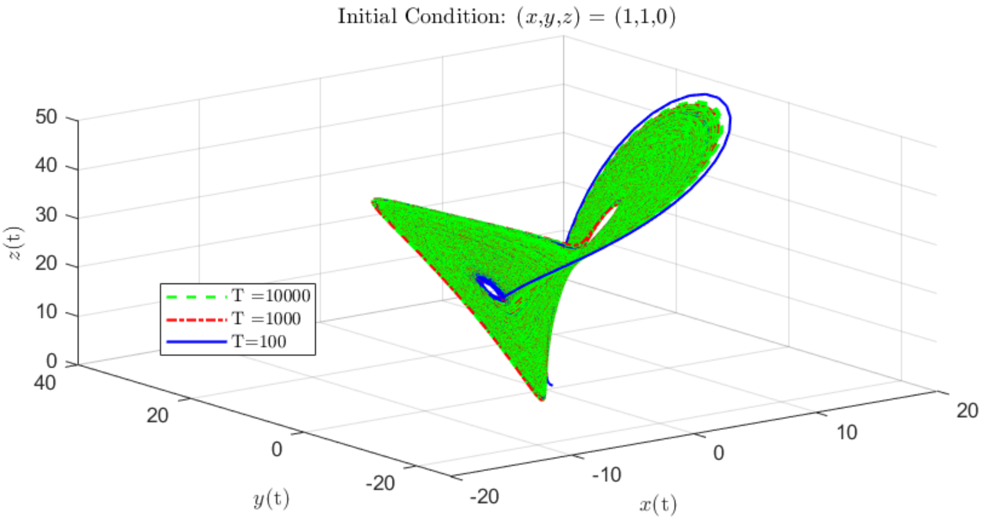

圖 2.1、Lorentz 系統以(1,1,0)初始值產生之奇異吸子軌跡

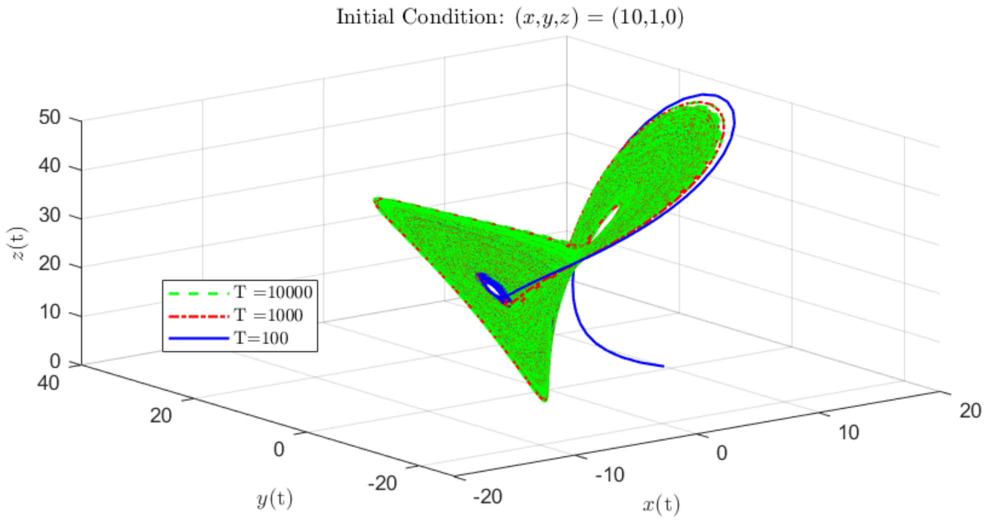

圖 2.2、Lorentz 系統以(10,1,0)初始值產生之奇異吸子軌跡

討論:

上列的圖形都是由式子(2.1~3)積分而產生，就是由同一軌跡纏繞，而就算初始值不同，也會因奇異吸子的存在而被限制。奇異吸子的特徵在於，對高階非線性系統，軌跡不收斂於固定點，不進入極限圓而不發散，且會在限制的區域內變化，行經的軌跡不重複。

1.3 霍普夫分岔(Hopf bifurcation)的測試

Question:

霍普夫分岔(Hopf bifurcation)的測試：考慮下列非線性 ODE

$$\dot{x} = \mu x - y + 2x(x^2 + y^2)^2 \tag{3.1}$$

$$\dot{y} = x - \mu y + 2y(x^2 + y^2)^2 \tag{3.2}$$

其中μ是常數。

(a) 將直角座標(x, y)轉成極座標(r, θ)，並將上式用r，θ表示之。

(b) 任選三個不同的μ值：$\mu_1 > 0$，$\mu_2 = 0$，$\mu_3 < 0$，用 Matlab 畫初其相對應的軌跡圖$(x(t), y(t))$。參考 1.6 節中第一個例題及圖 1.6.3 的討論。

(c) 根據極座標方程式及上述之軌跡變化，推論出分岔現象發生時之μ_c值。

(d) 比較$\mu > \mu_c$及$\mu < \mu_c$二種情形下，平衡點數目是否有改變，軌跡的幾何結構是否有改變?

Answer:

(a):

參考非線性系統(3.1)，為將系統以極座標表示，假設

$$r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \tag{3.3}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{3.4}$$

將(3.3)與(3.4)對時間做一次偏微分並透過 r, θ 代換

$$\dot{r} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}(2x\dot{x} + 2y\dot{y})$$

$$= (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}[x(\mu x - y + 2x(x^2 + y^2)^2) + y(x + \mu y + 2y(x^2 + y^2)^2)]$$

$$= (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}[\mu(x^2 + y^2) + 2(x^2 + y^2)(x^2 + y^2)^2]$$

$$= r(\mu + 2r^4)$$

$$\dot{\theta} = \left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right]^{-1}\left[\frac{\dot{y}x - y\dot{x}}{x^2}\right]$$

$$= (x^2 + y^2)^{-1}[x(x + \mu y + 2y(x^2 + y^2)^2) - y(\mu x - y + 2x(x^2 + y^2)^2)]$$

$$= (x^2 + y^2)^{-1}(x^2 + y^2)$$

$$= 1$$

因此可以重新以新的座標軸r, θ表示為以下等效系統

$$\dot{r} = r(\mu + 2r^4) \tag{3.5}$$

$$\dot{\theta} = 1 \tag{3.6}$$

(b):

針對系統(3.6)，若固定 r 之初始值$r_0 = 0.5$，並選擇不同的μ值做系統測試，並觀察以下三種情形。

Case 1: $\mu > 0$

參考(3.5)式子，若$\mu > 0$，則$\dot{r} > 0$

由此可知 r 會發散，如下圖 3.1 所表示，其中我們帶入$\mu = 0.1$測試。

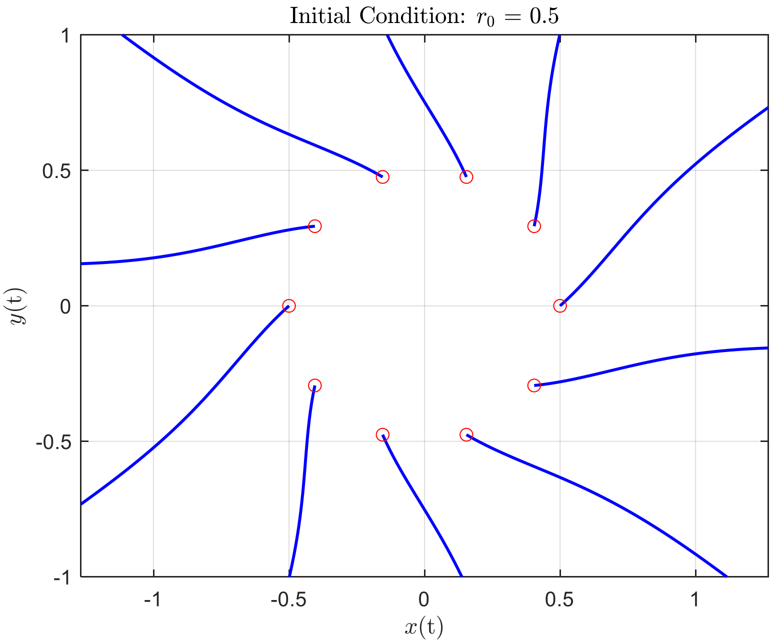

圖 3.1、$\mu > 0$之系統相平面軌跡

Case 2: $\mu = 0$

參考(3.5)式子，若$\mu = 0$，則$\dot{r} > 0$

由此可知 r 會發散，如下圖 3.2 所表示，其中我們帶入$\mu = 0$測試。

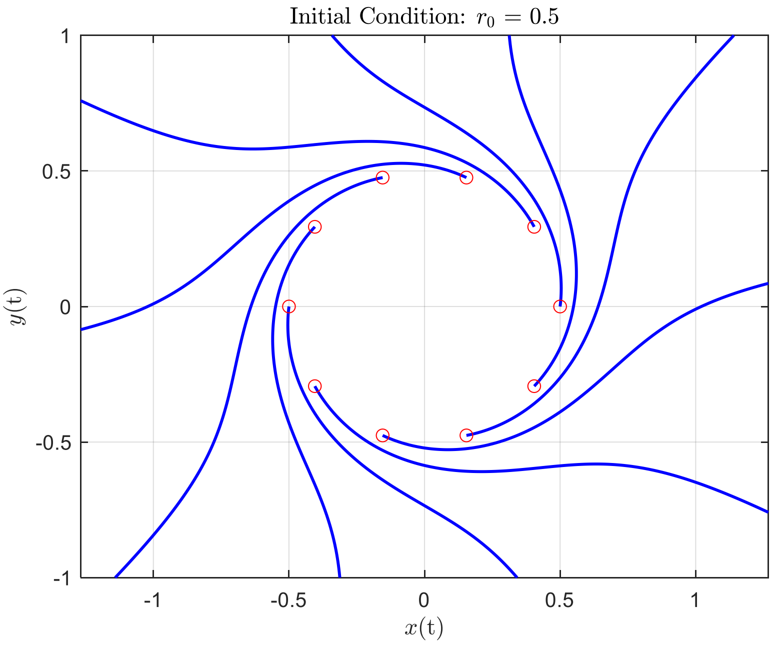

圖 3.2、$\mu = 0$之系統相平面軌跡

Case 3: $\mu < 0$

參考(3.5)式子，令

$$\mu + 2r^4 = 0$$

$$\Rightarrow 2r^4 = -\mu$$

$$\Rightarrow r = \left(-\frac{\mu}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = r_c \tag{3.7}$$

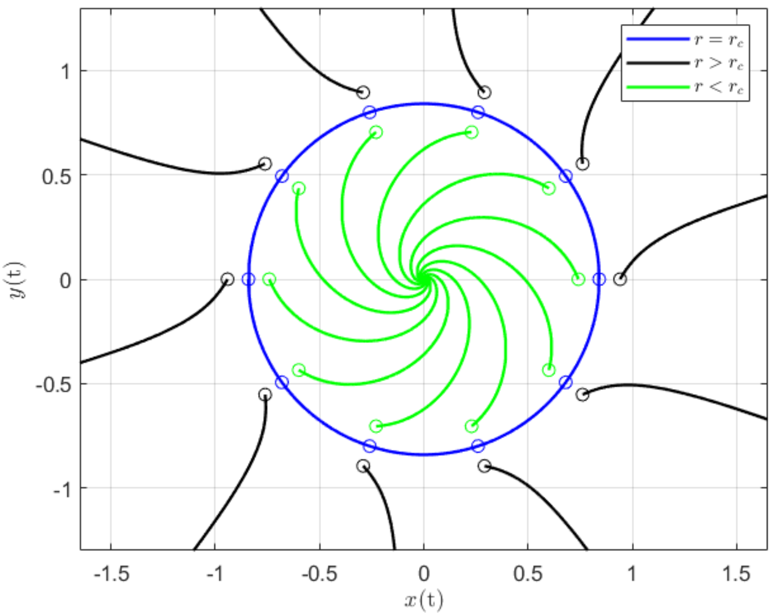

圖 3.3、$\mu < 0$之系統相平面軌跡

(c):

按照上題實作之結果，與上課講義中[1] 1.6 節的討論方式:

1. $\mu > 0$時，因為$r > 0$，所以$\dot{r} > 0$，則軌跡發散。
2. $\mu = 0$時，因為$r > 0$，所以$\dot{r} > 0$，則軌跡發散。
3. $\mu < 0$時，有機會使$\dot{r} < 0$，則須根據不同的μ進行討論:

(1) 當$(\mu + 2r^4) > 0 \Rightarrow r > \sqrt[4]{-\frac{\mu}{2}}$，則$\dot{r} > 0$，軌跡會發散。

(2) 當$(\mu + 2r^4) > 0 \Rightarrow r > \sqrt[4]{-\frac{\mu}{2}}$，則$\dot{r} < 0$，軌跡會收斂至平衡點。

(3) 當$(\mu + 2r^4) > 0 \Rightarrow r > \sqrt[4]{-\frac{\mu}{2}}$，則$\dot{r} > 0$，軌跡會形成一不穩定極限圓。

因此，在$\mu > 0, \mu < 0$的圖形結構不同，分岔現象應該在$\mu = 0 = \mu_c$。

(d):

若

$$\begin{aligned} &\mu + 2r^4 = 0 \\ &\Rightarrow \mu = -2r^4 = \mu_c \end{aligned} \tag{3.8}$$

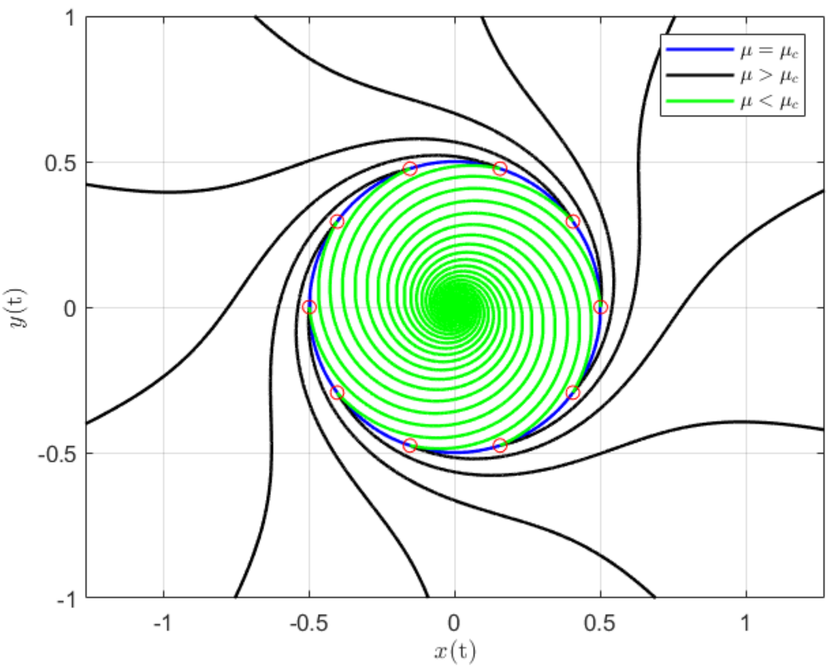

圖 3.4、固定 r 之系統相平面軌跡

平衡點數目沒改變，但系統的軌跡結構發生變化。

文獻

[1]楊憲東，非線性系統與控制 I，成大出版社出版，2015

附錄

Matlab Code

第一題

```
clc;clear all;close all;
% ----- initial condition -----
t = 0:0.001:30;
x0_a = [3 ; 4];
x0_b = [3.01 ; 4.01];
A_1 = [0 1 ; 0 -0.1];
A_2 = [0 1 ; -1 -0.1];
B = [0 ; 1];
C = [0 ; -1];

% ----- solve equation (nonlinear) ------
func_nonlinear = @(t,X)Nonlinear_func(t,X,A_1,B,C);
[t_1_non, X_1_non] = ode45(func_nonlinear,t,x0_a);
[t_2_non, X_2_non] = ode45( func_nonlinear,t,x0_b);

% ----- solve equation (linear) -----
func_linear = @(t,X)Linear_func(t,X,A_2,B);
[t_1_lin, X_1_lin] = ode45(func_linear,t,x0_a);
[t_2_lin, X_2_lin] = ode45(func_linear,t,x0_b);

% ----- Plot -----
LW = 1.4 ;
f(1) = figure() ;
plot(t,X_1_non(:,1),'b','LineWidth',LW) ;
xlabel('Time (s)')
ylabel('$x$(t)','Interpreter','latex')
```

```
title('Initial Condition: $x$(0)=3, $\dot x$(0)=4','Interpreter','latex')
ax(1) = gca ;
ax(1).YLim = [-4 4];
grid on

f(2) = figure() ;
plot(t,X_2_non(:,1),'b','LineWidth',LW) ;
xlabel('Time (s)')
ylabel('$x$(t)','Interpreter','latex')
title('Initial Condition: $x$(0)=3.01, $\dot x$(0)=4.01','Interpreter','latex')
ax(2) = gca ;
ax(2).YLim = [-4 4];
grid on

f(3) = figure() ;
plot(t,X_1_non(:,1),'b','LineWidth',LW) ; hold on ; plot(t,X_2_non(:,1),'r--
','LineWidth',LW)
xlabel('Time (s)')
ylabel('$x$(t)','Interpreter','latex')
ax(3) = gca ;
hs(1)=legend({'Initial Condition: $x$(0)=3, $\dot x$(0)=4','Initial Condition:
$x$(0)=3.01, $\dot x$(0)=4.01'},'Interpreter','latex','Location','Northeast');
ax(3).YLim = [-4 4];
grid on

f(4) = figure() ;
plot(t,X_1_lin(:,1),'b','LineWidth',LW) ; hold on ; plot(t,X_2_lin(:,1),'r--
','LineWidth',LW)
xlabel('Time (s)')
ylabel('$x$(t)','Interpreter','latex')
ax(4) = gca ;
hs(2)=legend({'Initial Condition: $x$(0)=3, $\dot x$(0)=4','Initial Condition:
$x$(0)=3.01, $\dot x$(0)=4.01'},'Interpreter','latex','Location','Northwest');
```

```
ax(4).YLim = [-50 50];
grid on
```

第二題

```
clc;clear all;close all;
% ----- condition -----
t1_final = 100; t2_final = 1000; t3_final = 10000;
t1 = 0:0.01:t1_final;
t2 = 0:0.01:t2_final;
t3 = 0:0.01:t3_final;

% ----- intial position -----
X0_1 = [1,1,0];
X0_2 = [10,1,0];

% ----- solve -----
[t1_case1, x1_case1] = ode45(@Lorentz,t1,X0_1);
[t2_case1, x2_case1] = ode45(@Lorentz,t2,X0_1);
[t3_case1, x3_case1] = ode45(@Lorentz,t3,X0_1);

[t1_case2, x1_case2] = ode45(@Lorentz,t1,X0_2);
[t2_case2, x2_case2] = ode45(@Lorentz,t2,X0_2);
[t3_case2, x3_case2] = ode45(@Lorentz,t3,X0_2);

% ----- plot -----
LW = 1.3;
f(1) = figure('Units','Normalized','Position',[0.29,0.29,0.477,0.415]) ;
plot3(x3_case1(:,1),x3_case1(:,2),x3_case1(:,3),'g--','LineWidth',LW) ;
hold on ;
plot3(x2_case1(:,1),x2_case1(:,2),x2_case1(:,3),'r-.','LineWidth',LW) ;
plot3(x1_case1(:,1),x1_case1(:,2),x1_case1(:,3),'b','LineWidth',LW) ;
xlabel('$x$(t)','Interpreter','latex')
ylabel('$y$(t)','Interpreter','latex')
```

```
zlabel('$z$(t)','Interpreter','latex')
title('Initial Condition: ($x$,$y$,$z$) = (1,1,0)','Interpreter','latex')
ax(1) = gca ;
hs(1) = legend(['T =',num2str(t3_final)],['T
=',num2str(t2_final)],['T=',num2str(t1_final)],'Interpreter','latex') ;
grid on

f(2) = figure('Units','Normalized','Position',[0.29,0.29,0.477,0.415]) ;
plot3(x3_case2(:,1),x3_case2(:,2),x3_case2(:,3),'g--','LineWidth',LW) ;
hold on ;
plot3(x2_case2(:,1),x2_case2(:,2),x2_case2(:,3),'r-.','LineWidth',LW) ;
plot3(x1_case2(:,1),x1_case2(:,2),x1_case2(:,3),'b','LineWidth',LW) ;
xlabel('$x$(t)','Interpreter','latex')
ylabel('$y$(t)','Interpreter','latex')
zlabel('$z$(t)','Interpreter','latex')
title('Initial Condition: ($x$,$y$,$z$) = (10,1,0)','Interpreter','latex')
ax(2) = gca ;
hs(2) = legend(['T =',num2str(t3_final)],['T
=',num2str(t2_final)],['T=',num2str(t1_final)],'Interpreter','latex');
grid on
```

第三題

```
%% Nonlinear control HW1 -- Q3
clc;clear all;close all;
% ----- condition -----
t = 0:0.001:100;
poimt_number = 10;
r0 = 0.5;
% ----- case 1 (mu > 0) -----
mu_case1 = 1;


LW = 1.4 ;
```

```
FS_ax = 16 ;
FS_leg = 12 ;
f(1) = figure ;
for i = 1 : poimt_number
    theta0 = 2*pi/poimt_number*i ;
    X0 = [ r0 ; theta0] ;
    [ t_1 , X ] = RK4(@ (t,X) Hopf(t , X , mu_case1) , t , X0 ) ;
    x = X(:,1).*cos(X(:,2)) ;
    y = X(:,1).*sin(X(:,2)) ;
    plot(x,y,'b','LineWidth',LW) ;
    hold on ;
    plot(x(1),y(1),'ro') ;
end
xlabel('$x$(t)','Interpreter','latex')
ylabel('$y$(t)','Interpreter','latex')
title('Initial Condition: $r_0$ = 0.5','Interpreter','latex')
axis([-1 1 -1 1])
axis equal
grid on
ax(1) = gca ;
ax(1).YTick = [-1 -0.5 0 0.5 1] ;
% set(ax(1),'FontSize',FS_ax,'FontName','Times New Roman')

% ----- case 2 (mu = 0) -----
mu_case2 = 0;

f(2) = figure ;
for i = 1 : poimt_number
    theta0 = 2*pi/poimt_number*i ;
    X0 = [ r0 ; theta0] ;
    [ t_1 , X ] = RK4(@ (t,X) Hopf(t , X , mu_case2) , t , X0 ) ;
    x = X(:,1).*cos(X(:,2)) ;
    y = X(:,1).*sin(X(:,2)) ;
```

```
    plot(x,y,'b','LineWidth',LW) ;
    hold on ;
    plot(x(1),y(1),'ro')
end
xlabel('$x$(t)','Interpreter','latex')
ylabel('$y$(t)','Interpreter','latex')
title('Initial Condition: $r_0$ = 0.5','Interpreter','latex')
axis([-1 1 -1 1])
axis equal
grid on
ax(2) = gca ;
ax(2).YTick = [-1 -0.5 0 0.5 1];

% ----- case 3 (mu < 0) -----
mu_case3 = -1 ;
r0_case3_1 = (-mu_case3/2)^(1/4);
r0_case3_2 = (-mu_case3/2)^(1/4)+0.1;
r0_case3_3 = (-mu_case3/2)^(1/4)-0.1;

f(3) = figure ;
for i = 1 : poimt_number
    theta0 = 2*pi/poimt_number*i ;
    X0 = [ r0_case3_1 ; theta0] ;
    [ t_1 , X ] = RK4(@ (t,X) Hopf(t , X , mu_case3) , t , X0 ) ;
    x = X(:,1).*cos(X(:,2)) ;
    y = X(:,1).*sin(X(:,2)) ;
    p1 = plot(x,y,'b','LineWidth',LW) ;
    hold on ;
    plot(x(1),y(1),'bo') ;
end

for i = 1 : poimt_number
    theta0 = 2*pi/poimt_number*i ;
```

```
    X0 = [r0_case3_2 ; theta0];
    [ t_1 , X ] = RK4(@ (t,X) Hopf(t , X , mu_case3) , t , X0 ) ;
    x = X(:,1).*cos(X(:,2)) ;
    y = X(:,1).*sin(X(:,2)) ;
    p2 = plot(x,y,'k','LineWidth',LW) ;
    hold on ;
    plot(x(1),y(1),'ko') ;
end

for i = 1 : poimt_number
    theta0 = 2*pi/poimt_number*i ;
    X0 = [ r0_case3_3 ; theta0] ;
    [ t_1 , X ] = RK4(@ (t,X) Hopf(t , X , mu_case3) , t , X0 ) ;
    x = X(:,1).*cos(X(:,2)) ;
    y = X(:,1).*sin(X(:,2)) ;
    p3 = plot(x,y,'g','LineWidth',LW) ;
    hold on ;
    plot(x(1),y(1),'go') ;
end

xlabel('$x$(t)','Interpreter','latex')
ylabel('$y$(t)','Interpreter','latex')
legend([p1 p2 p3 ],{'$r=r_c$','$r>r_c$','$r<r_c$'},'Interpreter','latex')
axis([-1.3 1.3 -1.3 1.3])
axis equal
grid on
ax(3) = gca ;
ax(3).YTick = [-1 -0.5 0 0.5 1];

% ----- case 4 (r = k)-----
r0_case4 = 0.5 ;
mu_case4_1 = -2*(r0_case4)^4;
mu_case4_2 = -2*(r0_case4)^4 + 0.1;
```

```
mu_case4_3 = -2*(r0_case4)^4 - 0.1;

f(4) = figure ;
for i = 1 : poimt_number
        theta0 = 2*pi/poimt_number*i;
        X0 = [r0_case4 ; theta0];
        [ t_1 , X ] = RK4(@ (t,X) Hopf(t , X , mu_case4_1) , t , X0 );
        x = X(:,1).*cos(X(:,2));
        y = X(:,1).*sin(X(:,2));
        p1 = plot(x,y,'b','LineWidth',LW);
        hold on;
        plot(x(1),y(1),'ro');
end

for i = 1 : poimt_number
        theta0 = 2*pi/poimt_number*i ;
        X0 = [r0_case4 ; theta0] ;
        [ t_1 , X ] = RK4(@ (t,X) Hopf(t , X , mu_case4_2) , t , X0 ) ;
        x = X(:,1).*cos(X(:,2)) ;
        y = X(:,1).*sin(X(:,2)) ;
        p2 = plot(x,y,'k','LineWidth',LW) ;
        hold on ;
        plot(x(1),y(1),'ro') ;
end

for i = 1 : poimt_number
theta0 = 2*pi/poimt_number*i ;
X0 = [r0_case4 ; theta0] ;
[ t_1 , X ] = RK4(@ (t,X) Hopf(t , X , mu_case4_3) , t , X0 ) ;
x = X(:,1).*cos(X(:,2)) ;
y = X(:,1).*sin(X(:,2)) ;
p3 = plot(x,y,'g','LineWidth',LW) ;
hold on ;
```

```
plot(x(1),y(1),'ro') ;
end
xlabel('$x$(t)','Interpreter','latex')
ylabel('$y$(t)','Interpreter','latex')
legend([p1 p2
p3 ],{'$\mu=\mu_c$','$\mu>\mu_c$','$\mu<\mu_c$'},'Interpreter','latex')
axis([-1 1 -1 1])
axis equal
grid on
ax(4) = gca ;
ax(4).YTick = [-1 -0.5 0 0.5 1];
```