

Chapter 4 非線性系統的穩定性分析

線性系統的穩定性可以透過特徵值(eigenvalue)或極點(pole)的位置來加以判斷，但非線性系統既無特徵值亦無極點，所以需要針對非線性系統建立新的判斷穩定性的準則。線性系統是非線性系統的特例，因此這一判斷穩定性的新準則自然也適用於線性系統。線性系統的解不是收斂就是發散，其穩定性分析相對簡單；但是非線性系統的解有五種形式，要判斷其是屬於哪一種形式的解，情況變得複雜，所以衍生出各種不同的穩定性定義，以及判斷穩定性的不同方法。

4.1 穩定性的定義

線性系統的穩定性都是相對於平衡點而言，而且線性系統只有一個平衡點(即泰勒級數的展開點)，所以當我們說某一線性系統為穩定，所指的就是其所對應的平衡點為穩定。但是這樣的看法在非線性系統中是不適用的，因為非線性系統收斂時，不一定是收斂到平衡點，它可能是收斂到一條軌跡，如極限圓，或是收斂到一個區域之內，但既不進入平衡點也不進入極限圓，而是在此區域內不停地迂迴纏繞。所以當我們說某一非線性系統為穩定，必須同時說明它是相對於平衡點穩定，還是相對於軌跡穩定？亦或是相對於區域穩定？相對於平衡點不穩定的非線性系統，可能相對於軌跡為穩定；相對於軌跡不穩定的非線性系統，可能相對於區域為穩定。因此線性系統的穩定性是絕對的，而非線性系統的穩定性則是相對的。總而言之，對於非線性系統的穩定性，我們必須先定義是相對於甚麼的穩定性。

4.1.1 非時變系統

本章將針對非時變的非線性系統探討穩定性，下一章則針對時變系統。時變與非時變之分，已於第一章介紹過，這裡再做一個簡單的複習。關於非時變系統(time-invariant system)或稱自主性系統(autonomous system)，其時間 t 不以顯函數的型式出現在動態方程式之中： $\dot{x} = f(x)$ ，其中 $f(x)$ 僅是 x 的函數，而不為 t 之函數。穩定性分析的目的在於了解，當 $t \rightarrow \infty$ 時， $x(t)$ 的行為。控制系統的時變特性可能是由受控體所引入，或者是由控制器所引入，可組成下列不同的情況：

- 非時變受控體： $\dot{x} = f(x)$ ， t 改成 $t - t_1$ ，方程式不變。(此特性稱為時間平移不變性)
- 時變受控體： $\dot{x} = f(x, t)$ ， t 改成 $t - t_1$ ，方程式改變成： $\dot{x} = f(x, t - t_1)$ 。
- 非時變受控體+非時變控制器=非時變閉迴路系統(closed-loop system)。
 - 開迴路系統： $\dot{x} = f(x, u)$ ，非時變控制器： $u = g(x)$
 - 閉迴路系統： $\dot{x} = f(x, u) = f(x, g(x)) = \bar{f}(x) \Rightarrow$ 非時變
- 非時變受控體+時變控制器=時變閉迴路系統
 - 開迴路系統： $\dot{x} = f(x, u)$ ，時變控制器： $u = g(x, t)$
 - 閉迴路系統： $\dot{x} = f(x, u) = f(x, g(x, t)) = \bar{f}(x, t) \Rightarrow$ 時變
- 時變受控體+時變控制器=時變閉迴路系統
 - 開迴路系統： $\dot{x} = f(x, u, t)$ ，時變控制器： $u = g(x, t)$
 - 閉迴路系統： $\dot{x} = f(x, u, t) = f(x, g(x, t)) = \bar{f}(x, t) \Rightarrow$ 時變

時變系統之穩定性和初始時間有關，不同的初始時間會導致不一樣之穩定特性，因此分析較困難；而非時變系統的穩定性和釋放時刻 t_0 無關，只和釋放時的狀態有關。不過對於大部分的時變系統而言，均可利用狀態的擴增，而將其化為非時變的型態。

例題 4.1.1：

對於一個二階時變系統

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) \quad (4.1.1)$$

若只設二個狀態變數 $x_1 = x$ ， $x_2 = \dot{x}$ 則有

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = f(x_1, x_2, t) \quad (4.1.2)$$

此仍為時變系統。但若多設一新變數

$$x_3 = t \rightarrow \dot{x}_3 = 1 \quad (4.1.3)$$

則原二階時變系統可化為如下等義之三階非時變系統

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = f(x_1, x_2, x_3), \dot{x}_3 = 1 \quad (4.1.4)$$

例題 4.1.2：

考慮二階非線性時變系統

$$\ddot{x} + \alpha(x^2 - 1)\dot{x} + \omega^2 x = F \cos \omega t$$

其中 F 為常數，新狀態變量的引入，不僅可取代 t 也可直接取代 $\cos \omega t$ 。首先觀察 $\cos \omega t$ 是下列方程式的解

$$\ddot{z} = -\omega^2 z, z(0) = 1, \dot{z}(0) = 0 \quad (4.1.5)$$

上式又可表成兩個一階 ODE 的聯立

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -\omega^2 x_3 \end{cases}, \begin{cases} x_3(0) = 1 \\ x_4(0) = 0 \end{cases} \quad (4.1.6)$$

藉 x_3 ， x_4 兩個新變量的擴增，原二階非線性系統等義於如下之四階非時變系統：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 - \alpha(x_1^2 - 1)x_2 + Fx_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -\omega^2 x_3 \end{cases} \quad (4.1.7)$$

4.1.2 穩定性的對像

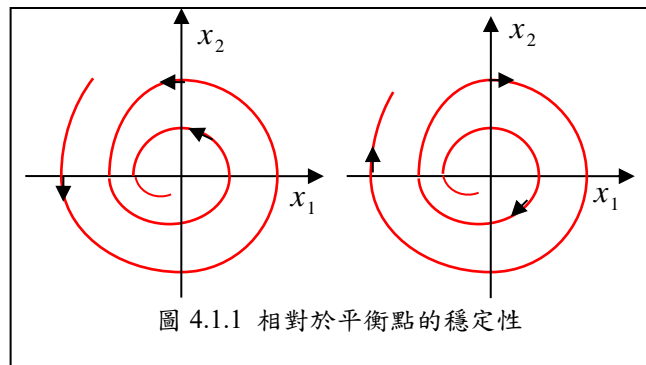


圖 4.1.1 相對於平衡點的穩定性

通常所謂的穩定性是相對於平衡點(假設此平衡點已經平移到原點)，亦即 $t \rightarrow \infty$ 時，判斷狀態變數 $x = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$ 相對於原點 $[0 \ 0 \ \cdots \ 0]^T$ 之關係是越來越近或越來越遠？(見圖 4.1.1)。

然而穩定性亦可相對於一軌跡而言，也就是說當 $t \rightarrow \infty$ 時，軌跡不一定是收斂到一個平衡點，而是收斂至另一條軌跡。後面將提到的極限圓(Limit cycle)就是一種收斂後的軌跡。相對於穩定的平衡點，吾人也可定義穩定的極限圓。對於穩定的極限圓而言，極限圓附近的所有軌跡最後都將趨近於此極限圓。試考慮自主性系統

$$\dot{x} = f(x) \quad (4.1.8)$$

當 $x^*(0) = x_0$ 時，(4.1.8)式之解定義為常態軌跡 $x^*(t)$ ，亦即

$$\dot{x}^*(t) = f(x^*), \quad x^*(0) = x_0 \quad (4.1.9)$$

現將初始值稍微變化一下： $x(0) = x_0 + \delta x_0$ ，此時相對於(4.1.8)式之解定義為微擾軌跡 $x(t)$ ，亦即

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0 + \delta x_0 \quad (4.1.10)$$

這裡吾人所關心的是， $t = 0$ 之初始值差一點，則 $t > 0$ 之後之微擾軌跡是逐漸接近或逐漸遠離常態軌跡？

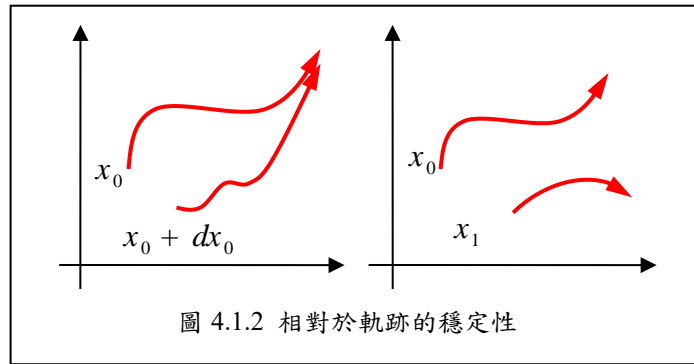


圖 4.1.2 相對於軌跡的穩定性

見圖 4.1.2，定義 $e(t) = x(t) - x^*(t)$ ，則將(4.1.8)式與(4.1.9)式相減得

$$\dot{e} = f(x) - f(x^*) = f(x^*(t) + e) - f(x^*(t)) = g(e, t) \quad (4.1.11)$$

初始條件為 $e(0) = x(0) - x^*(0) = \delta x_0$ ，其中 $x^*(t)$ 為已知之時間函數，並注意 $g(0, t) = 0$ 因為 $e = 0$ 為平衡點。(4.1.11)式表相對於原點之穩定性，不過其系統已經變為時變。因此我們有一結論：非時變系統相對於常態軌跡的穩定性可對應於某一時變系統對原點之穩定性。

4.1.3 Lyapunov 穩定性

如果單講穩定性，可能容易混淆，較確切的說法是『Lyapunov 穩定性』，更詳細的說法是『在 Lyapunov 觀念下的穩定性』(stability in the sense of Lyapunov)。Lyapunov 中文翻譯成李亞普諾夫，是俄國數學家，於 1882 年在他的博士論文中提出著名的非線性系統的穩定性定理。關於李亞普諾夫的簡介，請參考文獻[1]。

定義

吾人稱平衡點 $x = 0$ 為 Lyapunov 穩定，當下列條件滿足時：對任一 $\varepsilon > 0$ ，恒存在 $\delta = \delta(\varepsilon)$ ，使得當初始值 $\|x(0)\| < \delta$ 滿足時，則有 $\|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0$

□

白話解釋：見圖 4.1.3，當 $x(t)$ 之起始值距離原點在半徑 δ 之範圍內時，則當系統開始動以後， $x(t)$ 也始終都在半徑 ε 之範圍內運動，不會越跑離原點越遠。不管 ε 多小，只要一開始 δ 取得夠小(初始值 $x(0)$ 離原點很近)，一定可以保證 $t > 0$ 之後 $x(t)$ 一定落於原先所指定之 ε 半徑之內。在上面的定義中，我們可以推論 δ 的值必定比 ε 值小。(提示：先假設 $\delta > \varepsilon$ ，看看會有何矛盾產

生)

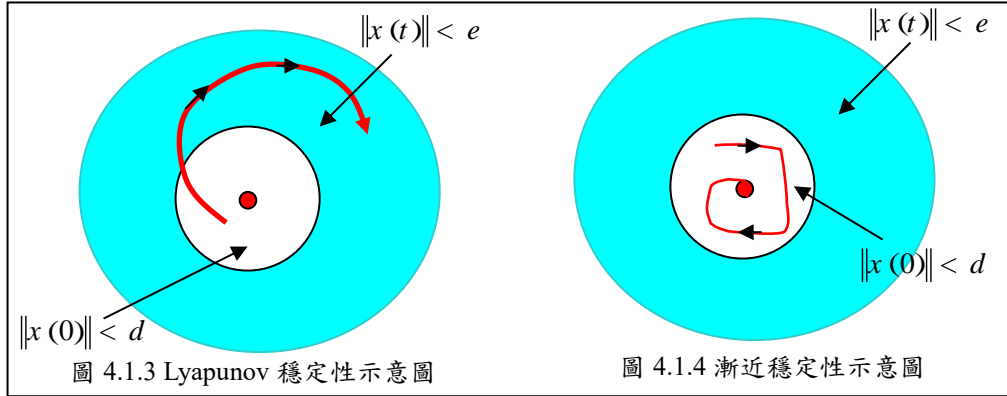


圖 4.1.4 漸近穩定性示意圖

4.1.4 漸進穩定性(Asymptotical Stability)

平衡點 $x = 0$ 可稱為漸近穩定若其滿足：

- (i). $x = 0$ 為 Lyapunov 穩定
- (ii). 存在 δ 使得 $\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$

Lyapunov 穩定性只要求軌跡最後在平衡點附近即可，亦即 $\|x(t)\| < \varepsilon$ ；但漸進穩定進一步要求軌跡最後一定要進入平衡點，亦即 $x(t) \rightarrow 0$ ，當 $t \rightarrow \infty$ ，如圖 4.1.4 所示。

例題 4.1.3：生物系統

本例題在於說明 Lyapunov 穩定，不一定為漸進穩定。設 x_1 為某種小型草食性動物的數量， x_2 為某一肉食性動物的數量，而後者以前者為食物。描述 x_1 、 x_2 消長的方程式可表成

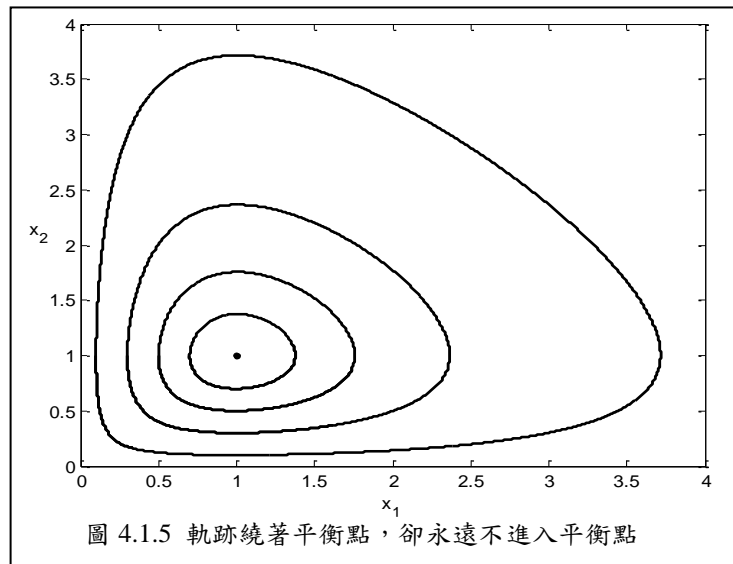
$$\dot{x}_1 = \alpha x_1 - \beta x_1 x_2 \quad (4.1.12a)$$

$$\dot{x}_2 = -\gamma x_2 + \delta x_1 x_2 \quad (4.1.12b)$$

上式稱為 Lotka-Volterra 方程式。(4.1.12a)式右邊第一項代表在無肉食性動物的捕掠下，草食性動物的數目 x_1 為指數型遞減，而(4.1.12b)式右邊的第一項，代表在無草食性動物的供應下，肉食性動物的數量 x_2 將呈指數型遞減。二式的平衡點在

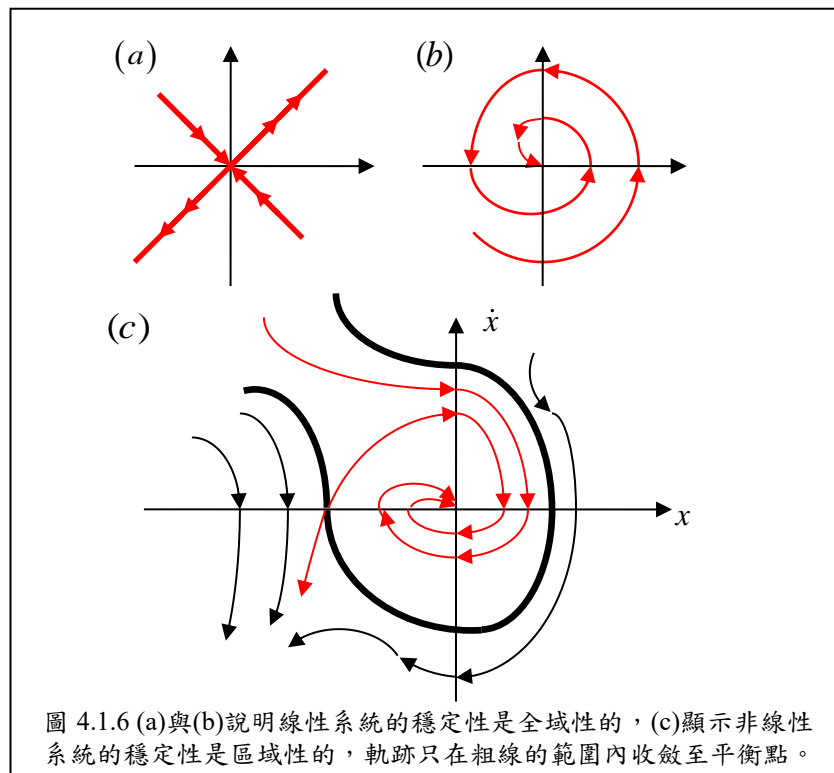
$$\hat{x}_1 = \frac{\delta}{\gamma}, \hat{x}_2 = \frac{\alpha}{\beta} \quad (4.1.13)$$

數值求解(4.1.12a)、(4.1.12b)二式的結果，發現 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 的軌跡如右圖 4.1.5，是繞著平衡點的封閉曲線，但卻永遠不會進入平衡點。即是說軌跡與平衡點可以任意接近，但始終不與平衡點重合。此平衡點即是 Lyapunov 穩定，但不為漸進穩定。右圖 4.1.5 是令 $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$ 時之系統軌跡，4 條封閉曲線對應到 4 個不同的初始條件。



4.1.5 全域穩定性(Global Stability)

不管 $x(0)$ 在何處(可為任一點)，恒有 $x(t) \rightarrow 0$ 時，則稱平衡點 $x = 0$ 為全域穩定。在漸進穩定中，初始位置須要滿足 $\|x(0)\| < \delta$ ，才能保證最後軌跡 $x(t) \rightarrow 0$ ；但全域穩定則要求不管 $x(0)$ 在何處，一定有 $x(t) \rightarrow 0$ ，當 $t \rightarrow \infty$ 。也就是 $x(t)$ 收斂至 0 ，和初始值 $x(0)$ 無關，故又稱為廣域穩定(stable in the large)。



所謂 Lyapunov 穩定是指相對於平衡點或某一給定軌跡而言，非線性系統本身可以既是穩定，又是不穩定。因為在某些區域內，其運動軌跡可能是收斂至平衡點；而在另外的區域內，其運動軌跡相對於平衡點，卻變成是發散的，亦即某一區域的穩定性(local stability)不能判斷另一區域的穩定性。全域穩定性是一強列的條件，其要求所有區域穩定性都要相同。

(1) 線性系統：由平衡點附近之穩定情形(區域穩定)即可判定全域穩定，如右圖 4.1.6a 和

4.1.6b 的情形。換句話說，線性系統所談的穩定性都是全域性的。

- (2) 非線性系統：圖 4.1.6c 是表示 $\ddot{x} + 0.5\dot{x} + 2x + x^2 = 0$ 之相平面軌跡，若初始值落在粗黑線區域之內部，則恒收斂之原點；反之，若落在粗黑線區域之外，則為不穩定；因此這一非線性系統是區域穩定但是全域不穩定。

4.1.6 指數穩定性(Exponential Stability)

平衡點 $x = 0$ 被稱為指數穩定，若其滿足下列條件：

存在二正數 α 和 λ 使得

$$\forall t > 0, \|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\lambda t}$$

其中 λ 稱為指數收斂速度。以上條件說明若一系統對原點為指數穩定，則其穩定不僅要收斂至 0，且收斂速度要比指數型遞減快，換句話說：指數穩定是指定收斂速度的漸近穩定。

例題 4.1.4：

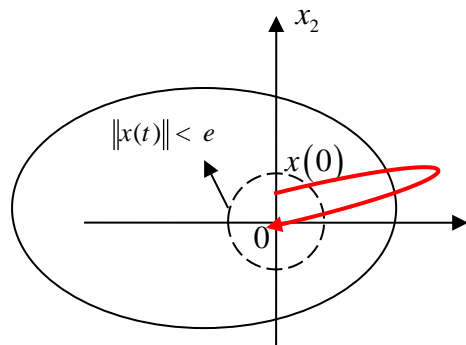
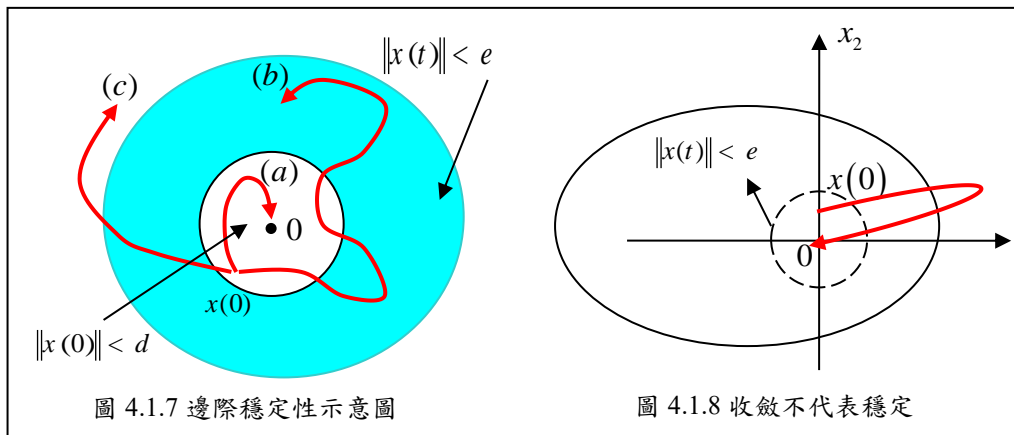
討論 $\dot{x} = -(1 + \sin^2 x)x$ 在原點處之穩定性。 $x(t)$ 的解可表為

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x} &= d(\ln x) = -(1 + \sin^2 x) dt \\ \Rightarrow x(t) &= x(0) \exp \left[- \int_0^t (1 + \sin^2(x(\tau))) d\tau \right] \leq x(0) e^{-t} \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

故 $x = 0$ 為指數穩定，且收斂速度 $\lambda = 1$ 。注意上式的推導利用到不等式 $-(1 + \sin^2 x) \leq -1$ 。

4.1.7 邊際穩定性(Marginal Stability)

若一平衡點為 Lyapunov 穩定，但卻不是漸近穩定，則稱為邊界穩定。亦即最終軌跡被包絡在 $\|x(t)\| < \varepsilon$ 範圍內，但不進入平衡點。也就是說 Lyapunov 穩定包含二種：(1) 收斂至平衡點的漸近穩定；(2) 不收斂至平衡點的邊際穩定。參考圖 4.1.7，其中曲線(a)為漸近穩定，曲線(b)為邊界穩定，曲線(c)為不穩定。



4.1.8 收斂性與穩定性

收斂性只關係到軌跡最終的狀態，而穩定性則牽涉到整條軌跡的考慮。因此收斂的軌跡不必然是穩定的。如圖 4.1.8 所示，軌跡最終收斂到 0，但其收斂過程中，需迂迴碰到 C 曲線後才往回走，但 C 曲線可能已在指定之 $\|x(t)\| < \varepsilon$ 範圍的外面，因此對 $\|x(t)\| < \varepsilon$ 的 Lyapunov 穩定性要求而言，此收斂性是不穩定的。

4.1.9 軌道穩定性(Orbit Stability)

設軌道 $\gamma = \{\bar{x}(t) | -\infty < t < \infty\}$ ，是指空間中的一條幾何曲線，其中 $\bar{x}(t)$ 是 $\dot{x} = f(x)$ 的一個已知解。另設 $x(t)$ 是 $\dot{x} = f(x)$ 的另一個解，且很靠近 γ 。設 $\rho(t)$ 是 $x(t)$ 和 γ 間之最短距離(在時間 t 之時)即

$$\rho(t) \triangleq \min_{\tau} \|x(t) - \bar{x}(\tau)\| \quad (4.1.15)$$

則稱軌道 γ 為軌道穩定(orbitally stable)，若對任意 $\varepsilon > 0$ ，存在 $\delta(\varepsilon) > 0$ ，使得

$$\rho(0) < \delta \Rightarrow \rho(t) < \varepsilon, \forall t \geq 0 \quad (4.1.16)$$

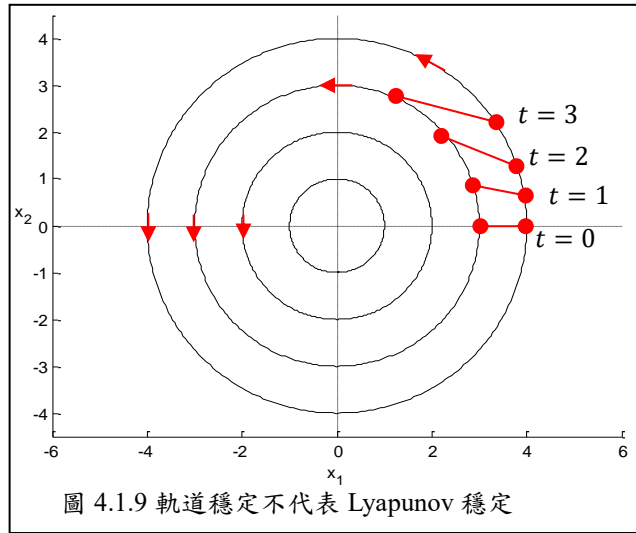
注意軌道穩定性與軌跡穩定性(參見下一小節)間之區別。軌跡穩定性要求 $x(t)$ 和 $\bar{x}(t)$ 在任意時刻 $t \geq 0$ 都要很接近，而軌道穩定性要求兩個點集合 $\{x(t) | t \geq 0\}$ 、 $\{\bar{x}(t) | t \geq 0\}$ 要很接近。因此有可能兩個軌道很接近，但在同一時刻上的二個對應點可能差距很大。例如在右圖 4.1.9 中， $\bar{x}(t)$ 的軌道用極座標表示為

$$\bar{x}(t) \Rightarrow \bar{r}(t) = R, \bar{\theta}(t) = \frac{K}{R^2} t \quad (4.1.17)$$

而 $x(t)$ 是 $\bar{x}(t)$ 的鄰近軌跡，表成極座標

$$x(t) \Rightarrow \bar{r}(t) = R + \Delta R, \bar{\theta}(t) = \frac{K}{(R + \Delta R)^2} t \quad (4.1.18)$$

當 $\Delta R \rightarrow 0$ 時， $\bar{x}(t)$ 和 $x(t)$ 兩個圓軌道重合，但不管 ΔR 多小，當 $t \rightarrow \infty$ 時， $\theta(t)$ 和 $\bar{\theta}(t)$ 會差距越來越大，如圖 4.1.9 所示。此現象說明軌道穩定不代表軌跡穩定。



4.1.10 軌跡穩定性(Trajectory Stability)

只考慮曲線的外型稱為軌道(orbit)，若再加上時間變化的過程則稱為軌跡(trajecory)。設軌跡 $x(t)$ 與 $\bar{x}(t)$ 是 $\dot{x} = f(x)$ 的二個解，其相對應的初始位置是 $x(0)$ 與 $\bar{x}(0)$ 。若對任意微小的 $\varepsilon > 0$ ，必存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ，使得對二個初始值的偏差滿足

$$\|x(0) - \bar{x}(0)\| < \delta \quad (4.1.19)$$

二個軌跡的偏差必也滿足

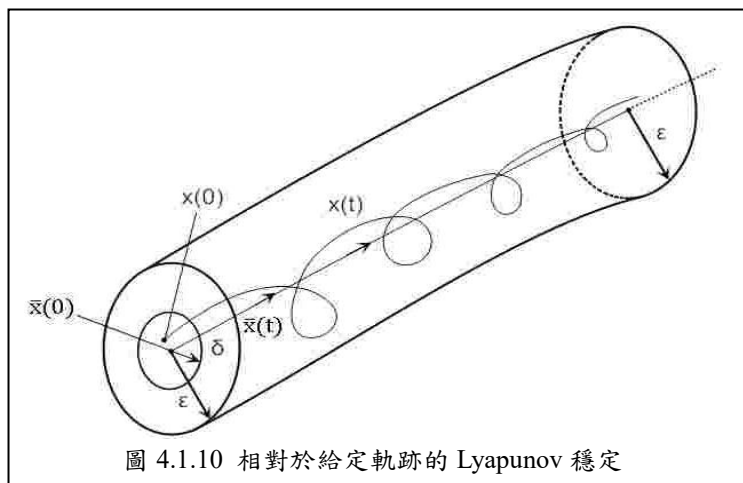
$$\|x(t) - \bar{x}(t)\| < \varepsilon, \forall t > 0 \quad (4.1.20)$$

吾人就稱 $x(t)$ 相對於 $\bar{x}(t)$ 是 Lyapunov 軌跡穩定。倘若更進一步有

$$\|x(t) - \bar{x}(t)\| \rightarrow 0, \text{ 當 } t \rightarrow \infty$$

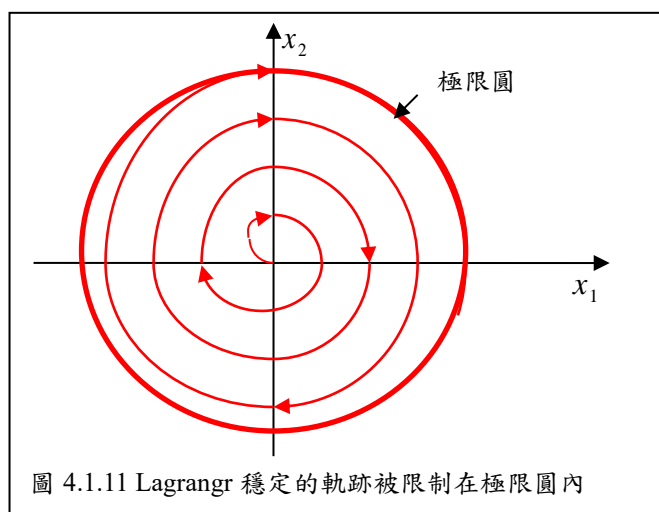
則稱 $x(t)$ 為軌跡漸進穩定。

注意上面的定義中， $\bar{x}(t)$ 是已知給定的軌跡，而 $x(t)$ 的軌跡是不固定的，隨 $x(0)$ 而變。但只要 $x(0)$ 離 $\bar{x}(0)$ 夠近，則 $x(t)$ 離 $\bar{x}(t)$ 也必定在某一範圍內。以上觀念可用圖 4.1.10 表示。



4.1.11 Lagrange 穩定性

如圖 4.1.11 的平衡點 $(0,0)$ 雖是 Lyapunov 不穩定，但在平衡點附近出發的軌跡，卻都是有界的(bounded)，因為這些軌跡都被一極限圓所限制住。吾人稱這樣的平衡點為 Lagrange 穩定。



4.1.12 結構穩定性(structural stability)

對於非線性系統

$$\dot{x} = f(x) \quad (4.1.21)$$

加上一微小擾動後

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x) \quad (4.1.22)$$

其中 ε 是一微小的數值。若(4.1.22)式解的軌跡，其拓撲特性和(4.1.21)式一樣，則吾人稱(4.1.21)

式為結構穩定，亦即(4.1.22)式的軌跡經過連續變形，可以變成和(4.1.21)式的軌跡一致。

例題 4.1.5：

下列系統即是結構不穩定

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon x_2 \quad (4.1.23)$$

當 $\varepsilon < 0$ 時，原點(平衡點)為穩定焦點(focus)；當 $\varepsilon = 0$ 時，原點為中心點(center)；當 $\varepsilon > 0$ 時，原點為不穩定焦點。此三者的軌跡無法藉由連續變形而化為一致，故其拓撲特性不同，代表微擾前的系統

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -x_1 \quad (4.1.24)$$

為結構不穩定。廣義而言，對於線性系統

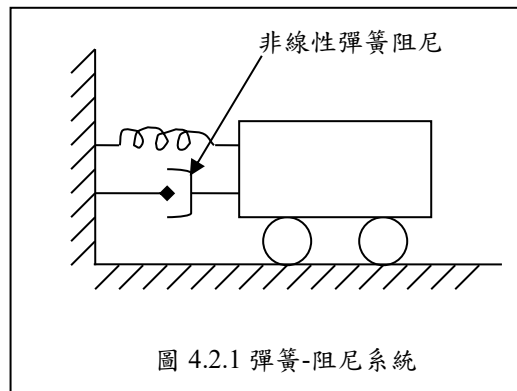
$$\dot{x} = Ax \quad (4.1.25)$$

若有特徵值(eigenvalue)在虛軸上，則其必為結構不穩定。

□

4.2 Lyapunov 直接穩定定理

此方法是基於物理的觀察：若一機械(或電機、化工)系統之總能量隨著時間逐漸耗散(dissipate)時，則此系統不管是線性或非線性，終將趨於某一平衡點。



試考慮下列彈簧-阻尼系統(見圖 4.2.1)，其運動方程式為

$$m\ddot{x} + b\dot{x}|\dot{x}| + k_0x + k_1x^3 = 0 \quad (4.2.1)$$

要分析此系統之穩定性，可用前二章所介紹的方法：相平面分析法(限於二階)或描述函數(適用於非線性程度不高時)。這裡要談的方法是能量法，其精神是『總能量遞減，系統必為穩定』。考慮圖 4.2.1 之系統的總能量

$$V(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \int_0^x (k_0x + k_1x^3)dx = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k_0x^2 + \frac{1}{4}k_1x^4 \quad (4.2.2)$$

從(4.2.2)式有如下之觀察：

- (a). 平衡點 $x = \dot{x} = 0$ 對應於零能量 $V = 0$
- (b). 漸進穩定性相當於要求機械能 V 要收斂到 0
- (c). 不穩定性對應於 V 之遞增。 V 之變化率可直接對(4.2.2)式微分得

$$\dot{V}(x) = m\dot{x}\ddot{x} + k_0x\dot{x} + k_1x^3\dot{x} = \dot{x}(-b\dot{x}|\dot{x}|) = -b|\dot{x}|^3$$

(4.2.3)

系統之機械能隨時間遞減，因此系統為穩定。Lyapunov 直接方法即是在尋求一個類似「總能

量」的函數，並證明其對時間之導數 \dot{V} 非正(≤ 0)。注意 \dot{V} 是沿著系統的狀態方程式作微分。考慮 n 個狀態的情形：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}, \quad V(x) \equiv V(x_1, \dots, x_n) \quad (4.2.4)$$

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \dot{x}_n = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \quad (4.2.5)$$

Lyapunov 直接定理

設 $x = 0$ 為 $\dot{x} = f(x)$ 之平衡點， D 為 $x = 0$ 之一鄰域(neighborhood)， $V : D \rightarrow R$ 在 D 上是一連續可微的函數，若 V 滿足

1. $V(0) = 0$
2. 在 $D - \{0\}$ ， $V(x) > 0$
3. 在 D 上， $\dot{V}(x) \leq 0$

則 $x = 0$ 為 Lyapunov 穩定。若 $V(x)$ 又滿足額外條件

4. 在 $D - \{0\}$ ， $\dot{V}(x) < 0$

則 $x = 0$ 為漸進穩定。

證明：

吾人要先證明 Lyapunov 穩定，亦即要證明對 $\forall \varepsilon > 0$ ，存在 δ 使得

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \quad (4.2.6)$$

對於任一給定之 ε ，選擇 r 在 $0 \leq r < \varepsilon$ 範圍內，並設

$$B_r = \{x \in R^n \mid \|x\| \leq r\} \subset D \quad (4.2.7)$$

取一常數 α 滿足

$$\alpha = \min_{\|x\|=r} V(x)$$

則由條件(2)知 $\alpha > 0$ ，再取 $\beta \in (0, \alpha)$ ，並設

$$\Omega_\beta = \{x \in B_r \mid V(x) \leq \beta\} \quad (4.2.8)$$

注意 Ω_β 全部位於 B_r 之內部。 Ω_β 有一特性：若軌跡在 $t = 0$ 時，由 Ω_β 內之一點開始運動時，則此軌跡亦必一直位於 Ω_β 之內，此性質可由條件(3)得到

$$\dot{V}(x(t)) \leq 0 \Rightarrow V(x(t)) \leq V(x(0)) \leq \beta, \forall t \geq 0 \quad (4.2.9)$$

由於 V 為連續且 $V(0) = 0$ ，吾人可找到一 $\delta > 0$ 使得

$$\|x\| \leq \delta \Rightarrow V(x) < \beta, (B_\delta \subset \Omega_\beta \subset B_r) \quad (4.2.10)$$

於是

$$x(0) \in B_\delta \Rightarrow x(0) \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in B_r$$

上式等義於

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < r \leq \varepsilon, \forall t \geq 0$$

此即為 Lyapunov 穩定的條件。

以下證明條件(1)、(2)、(3)、(4)成立時，則漸進穩定。先注意以下二個條件的同義性

$$x(t) \rightarrow 0, \text{ as } t \rightarrow \infty \Leftrightarrow V(x(t)) \rightarrow 0, \text{ as } t \rightarrow \infty$$

因為 $V(0) = 0$ 且 $V(x(t))$ 為連續。吾人用反證法證明，假設

$$V(x(t)) \rightarrow C > 0, \text{ as } t \rightarrow \infty \quad (4.2.11)$$

由 V 之連續性知，對 $\forall C > 0$ ， $\exists d > 0$ 使得

$$\|x(t)\| < d \Rightarrow \|V(x(t))\| < C \quad (4.2.12)$$

(4.2.11) 式之條件說明軌跡 $x(t)$ 落在 $\|x(t)\| < d$ 之球面區域的外部。因此可令

$$-\gamma = \max_{d \leq \|x\| \leq r} \dot{V}(x) < 0 \quad (\text{由條件(4)})$$

最後得

$$V(x(t)) = V(x(0)) + \int_0^t \dot{V}(x(\tau)) d\tau \leq V(x(0)) - \gamma t \quad (4.2.13)$$

當 $t \rightarrow \infty$ ， $V \rightarrow$ 負值，此與原先之假設 $V(x(t)) \rightarrow C > 0$ ， $t \rightarrow \infty$ ；相矛盾，故知假設不合理，因此必須有 $V \rightarrow 0$ 之結果[10]。

□

滿足定理中條件(1)、(2)、(3)者，稱為 Lyapunov 函數，而 $V(x) = C$ 所圍成之軌跡稱為 Lyapunov 表面或等高線(level surface)。 $\dot{V} \leq 0$ 之條件說明當 $x(t)$ 之路徑碰到 Lyapunov 等高線 $V(x) = C$ 時，其將進入區域

$$\Omega_c = \{x \in R^n | V(x) \leq C\} \quad (4.2.14)$$

之內部，且不能再出此區域。

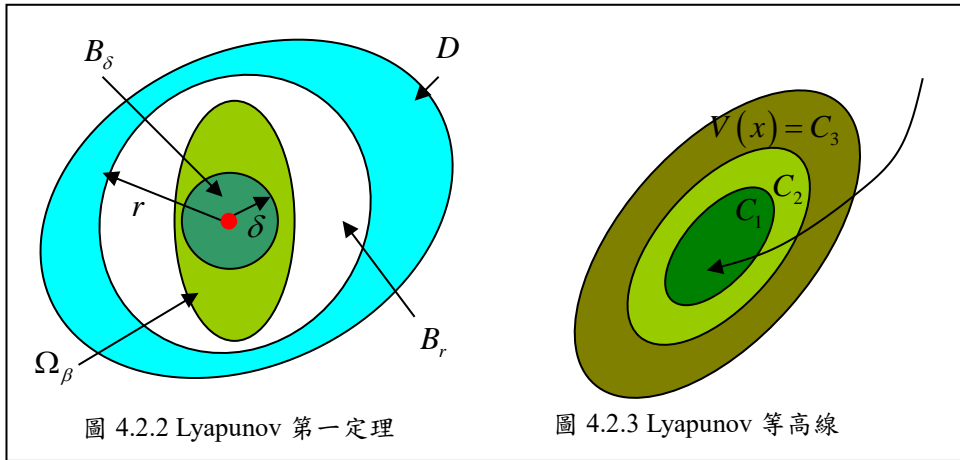
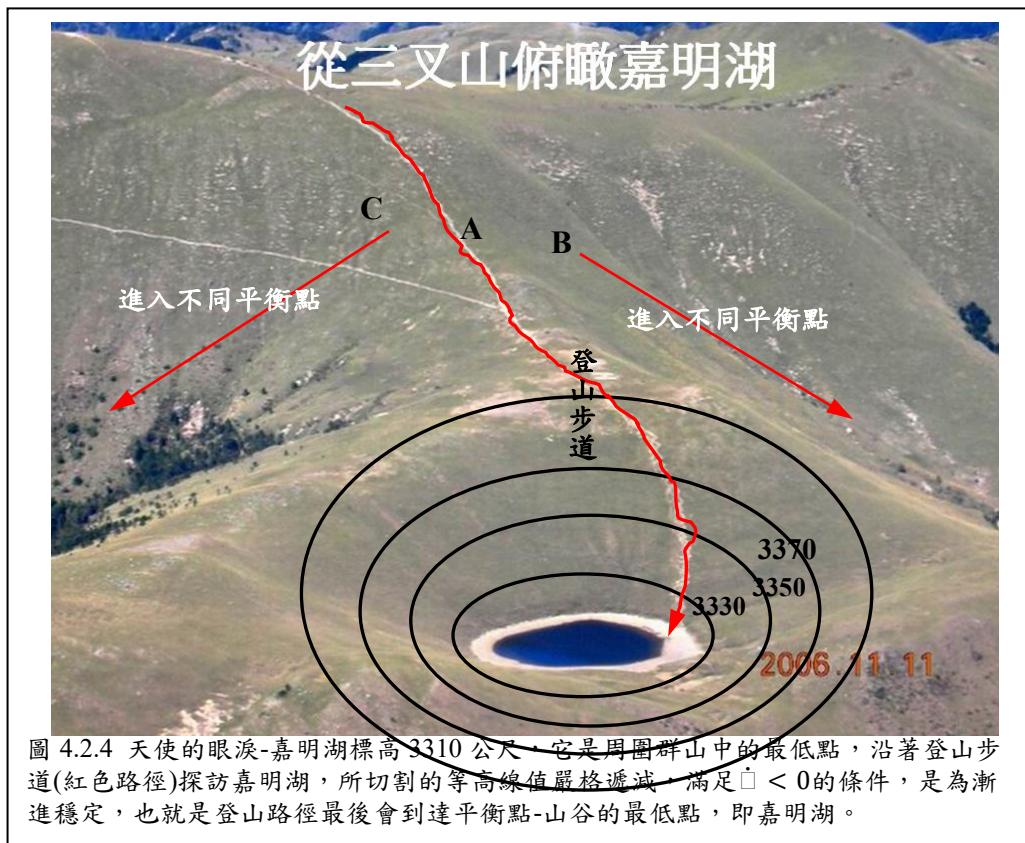


圖 4.2.2 Lyapunov 第一定理

圖 4.2.3 Lyapunov 等高線

如圖 4.2.3 所示，若 $\dot{V} < 0$ ，則 $x(t)$ 將由外層之 Lyapunov 等高線 $V = C_3$ 逐次進入內層之 Lyapunov 等高線 $V = C_2$ ，再進入 $V = C_1$ 。當 C 一直遞減時，等高線 $V = C$ 之區域漸縮。最後當 $V = 0$ 時，等高線縮至一點， $x = 0$ 。

Lyapunov 定理告訴我們沿著等高線遞減的方向運動，最後即會到達平衡點。這個定理的內涵與我們登山尋幽谷的經驗是一致的。圖 4.2.4 顯示嘉明湖附近的等高線圖，嘉明湖標高 3310 公尺，它是周圍群山中的最低點，沿著登山步道(紅色路徑)探訪嘉明湖，所切割的等高線嚴格遞減，滿足 $\dot{V} < 0$ 的條件，是為漸進穩定。這顯示登山路徑最後會到達平衡點-山谷的最低點，即嘉明湖。從實際的等高線圖分布，我們直覺即可判斷 Lyapunov 定理只能保證區域性的漸進穩定。在圖 4.2.4 中，如果步道的起始點不是點 A，而是點 B 或點 C，則依據等高線遞減的原則運動，我們將進入不同的平衡點。多重山谷的地形對應到非線性系統多平衡點的特性，不同的區域會收斂到不同的平衡點(不同的山谷)。



例題 4.2.1：有關 Lyapunov 直接穩定定理，可用下列例子來說明

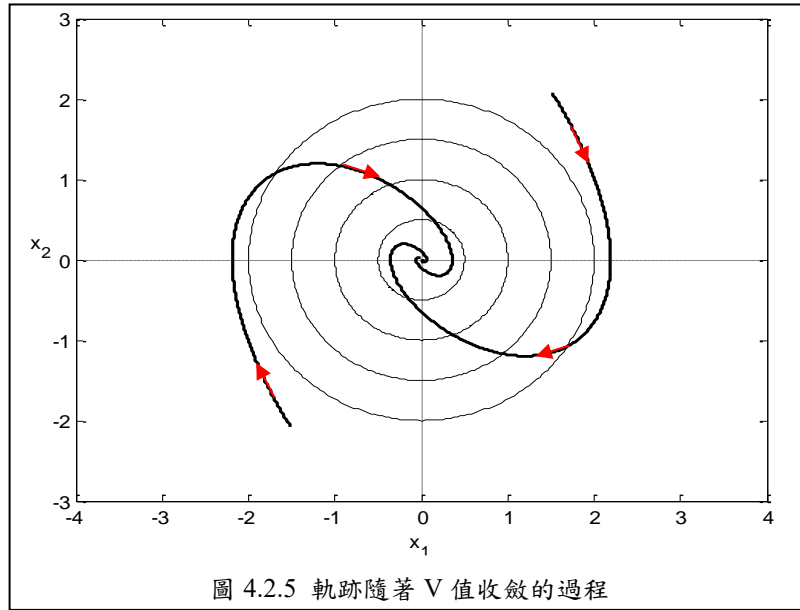
$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \quad (4.2.15)$$

選擇 Lyapunov 函數為 $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ 。此 $V(x)$ 滿足除 $x = 0$ 以外，皆為正的條件。且 $V(x) =$ 常數是代表圓心在原點的同心圓。沿著軌跡 $x(t)$ 來看 $V(x(t))$ 值的變化，即求

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 = -2x_2^2 \leq 0$$

但當 $x_2 = 0$ 時，由原方程式知 $x_1 = 0$ ，亦即除了原點以外， $dV(x(t))/dt$ 為負值。也就是沿著軌跡 $x(t)$ 來看， V 的值呈嚴格遞減，但 V 值越小，代表同心圓的半徑越小。因此軌跡 $x(t)$ 隨著時間 t 的進展，進入越來越小的同心圓中。當 V 減至零時，同心圓的半徑也縮至零，軌跡也就被限制在原點上了。整個收斂過程如圖 4.2.5 所示。

- $\dot{V} < 0$ 代表軌跡 $x(t)$ 一定要「穿透」 $V(x) = C$ (常數) 等高線，而往 V 值小的方向前進，為漸進穩定。
- $\dot{V} \leq 0$ 代表軌跡 $x(t)$ 有可能「沿著」等高線前進，此時 V 值保持定值 ($\dot{V} = 0$)，軌跡繞著平衡點打轉。此即為邊際穩定 (marginally stable)，而不是漸進穩定。

圖 4.2.5 軌跡隨著 V 值收斂的過程

例題 4.2.2：將總能量視為 Lyapunov 函數

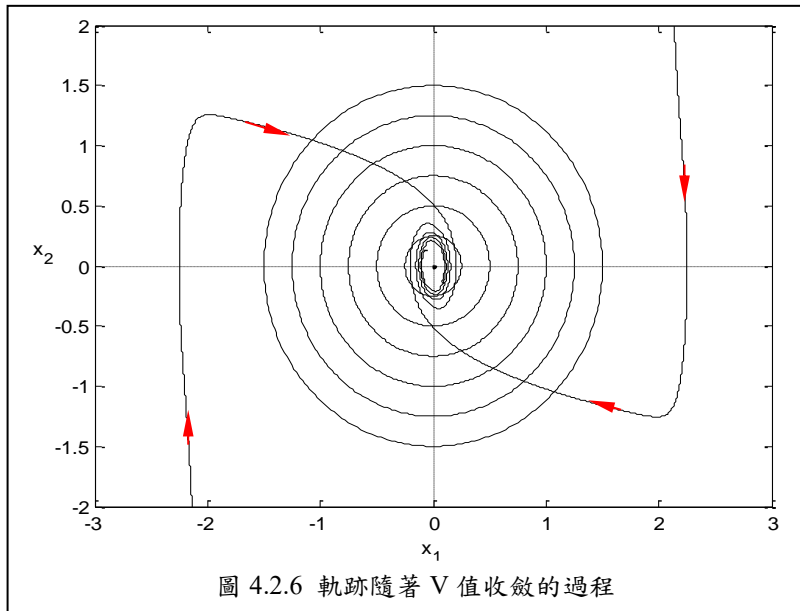
對於物理系統而言，總能量是很好的 Lyapunov 函數候選者。考慮下列非線性系統

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.2.16)$$

$$\dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 - 2\zeta\omega x_2^n \quad (4.2.17)$$

其中 $n \geq 1$ ， ω 和 ζ 是正的常數，則此系統每單位質量的總能量為

$$V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x_1^2 \quad (4.2.18)$$

圖 4.2.6 軌跡隨著 V 值收斂的過程

此 $V(x)$ 滿足除了在 $(0,0)$ 外，均為正的條件，沿著 $x(t)$ ， V 值的變化率為

$$\dot{V} = \omega^2 x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = -2\zeta\omega x_2^{n+1} \quad (4.2.19)$$

故當 n 為奇數時，恒有 $\dot{V} \leq 0$ ，代表此系統至少為 Lyapunov 穩定。

另外注意使 $\dot{V} = 0$ 的唯一的可能是平衡點，因為在 (4.2.19) 式中，若 $\dot{V} = 0$ ，則有 $x_2 = 0$ ，代入 (4.2.16) 和 (4.2.17) 式中，得到 $x_1 = 0$ ，故知除了平衡點以外， \dot{V} 恒為負，因此系統也是屬於漸近穩定。真實的軌跡如圖 4.2.6 所示，其中取 $n = 3$ 、 $\omega = 2$ 、 $\zeta = 1$ 。

□

例題 4.2.3：

考慮一階方程式

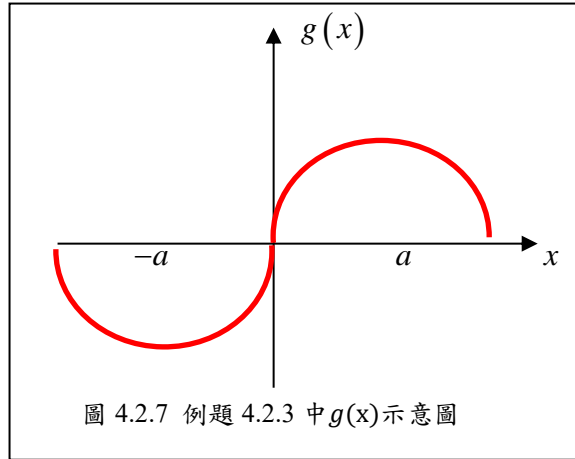
$$\dot{x} = -g(x)$$

其中 $g(x)$ 為連續可微且滿足下列條件

$$g(0) = 0, \quad xg(x) > 0, \quad \forall x \neq 0, \quad x \in (-a, a)$$

 $g(x)$ 如圖 4.2.7 所示，可視為控制訊號，滿足

$$\text{當 } x > 0 \text{ 時} \rightarrow \dot{x} < 0; \quad \text{當 } x < 0 \text{ 時} \rightarrow \dot{x} > 0$$

圖 4.2.7 例題 4.2.3 中 $g(x)$ 示意圖故要判斷是否 $x \rightarrow 0$ ，當 $t \rightarrow \infty$ 時，吾人可用 Lyapunov 直接定理來驗證此點，選擇 $V(x)$ 如下：

$$V(x) = \int_0^x g(y) dy$$

注意 $V(x)$ 為連續可微， $V(0) = 0, V(x) > 0, \forall x \neq 0$ ，故 $V(x)$ 為 Lyapunov 函數之可能候選者。只要再證明 $\dot{V} \leq 0$ (或 $\dot{V} < 0$)，即可確定。

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} = g(x)[-g(x)] = -g^2(x) < 0, \quad \forall x \in D - \{0\} \quad (4.2.20)$$

故知原點為漸進穩定。

□

例題 4.2.4：

考慮一無摩擦的單擺系統

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -(g/l)\sin x_1 \quad (4.2.21)$$

試分析在 $(0,0)$ 處之穩定性。將 $V(x)$ 取為系統之總能量，即

$$V(x) = (g/l)(1 - \cos x_1) + x_2^2/2 \quad (4.2.22)$$

此 V 滿足 $V(0) = 0, V(x) > 0, x \neq 0, x = [x_1 x_2]^T$ 。現沿著狀態方程式，對 $V(x)$ 微分得

$$\dot{V}(x) = \frac{g}{l} \dot{x}_1 \sin x_1 + x_2 \dot{x}_2 = \frac{g}{l} x_2 \sin x_1 - \frac{g}{l} x_2 \sin x_1 = 0 \quad (4.2.23)$$

因此可知該系統是能量守衡系統且在 $(0,0)$ 處為 Lyapunov 穩定(而且是邊際穩定，因系統不會收斂至平衡點)。漸進穩定的系統其動能最後收斂到零，但能量守衡系統只能達到邊際穩定，其動能與位能一直隨時間在變化，但維持兩者的和為定值。

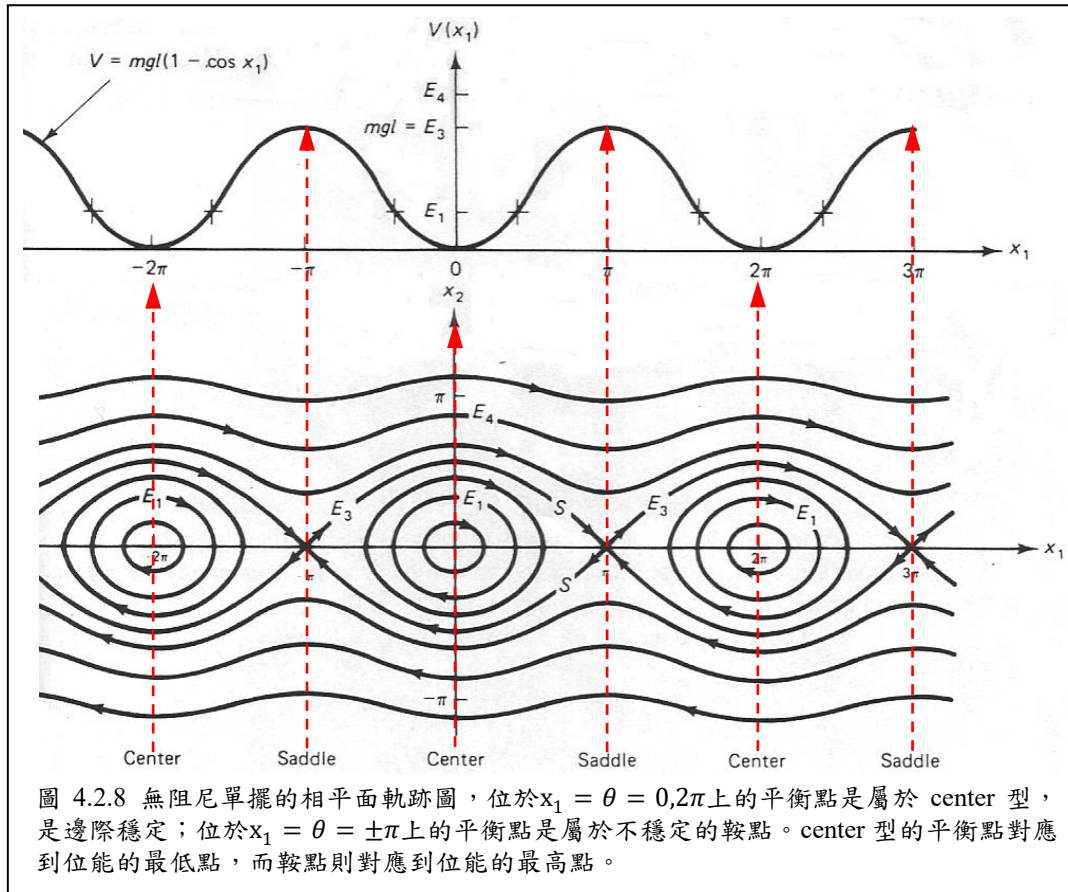


圖 4.2.8 顯示無阻尼單擺的相平面軌跡圖，亦即(4.2.21)式的解 $(x_1(t), x_2(t)) = (\theta(t), \dot{\theta}(t))$ 隨時間 t 變化時，在座標平面上所連成的軌跡。每一條軌跡對應到一個給定的總能量 E 。當相平面軌跡圖是封閉曲線時，代表單擺呈現週期性運動，從圖中可觀察到當總能量 E 小於 E_3 時，單擺呈現週期性運動；當總能量 E 大於 E_3 時，單擺呈現持續性地旋轉運動。以 E_3 為界線，我們可將單擺的運動區分為三大類：

- 週期性來回振盪運動：包圍在 E_3 內部的封閉軌跡，以 $\theta = 0$ 為中心點，在 $-\pi < \theta < \pi$ 的範圍內左右振盪，其中 $\theta = 0$ 為單擺的最低點， $\theta = \pm\pi$ 為單擺的最高點。
- 逆時針旋轉運動： θ 嚴格遞增的開放性軌跡，位於封閉軌跡的上方，此時單擺的總能量大於 E_3 ，當單擺運動到最高點 $\theta = \pi$ 時，能有足夠的動能持續旋轉下去，故 θ 持續遞增，而產生逆時針方向的連續性旋轉運動。
- 順時針旋轉運動： θ 嚴格遞減的開放性軌跡，位於封閉軌跡的下方。此時單擺的總能量大於 E_3 ，當單擺運動到最高點 $\theta = -\pi$ 時，能有足夠的動能持續旋轉下去，故 θ 持續遞減，而產生順時針方向的連續性旋轉運動。

如圖 4.2.8 所示，位於 $x_1 = \theta = 0, 2\pi$ 上的平衡點是屬於 center 型，是邊際穩定，對應到位能的最低點；位於 $x_1 = \theta = \pm\pi$ 上的平衡點是屬於不穩定的鞍點，對應到位能的最高點。

例題 4.2.5：

再考慮鐘擺運動方程式，但此次包含摩擦力在內[10]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{k}{m}x_2 \end{cases} \quad (4.2.24)$$

其中 k 為摩擦係數，若選擇和前一題相同之 $V(x)$

$$V(x) = \frac{g}{l}(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2 \quad (4.2.25)$$

$$\Rightarrow \dot{V} = \left(\frac{g}{l}\right) \dot{x}_1 \sin x_1 + x_2 \dot{x}_2 = -\left(\frac{k}{m}\right) x_2^2 \Rightarrow \dot{V} \leq 0 \text{ (半負定)} \quad (4.2.26)$$

此乃因 $\dot{V} = 0 \Rightarrow x_2 = 0$ ，將之代回(4.2.24)式，吾人無法確認 x_1 必定為零。也就是說，除了(0,0)之外，在其他點， \dot{V} 也有可能等於零，故吾人只能得到 $\dot{V} \leq 0$ 而非 $\dot{V} < 0$ 。因此只能判斷此系統為 Lyapunov 穩定。但由能量之觀點知，摩擦力會逐漸吸收能量，最後之狀態必為 $x = \dot{x} = 0 \rightarrow$ 漸進穩定。這說明(4.2.25)式之 Lyapunov 函數不夠強烈，無法反應漸近穩定之特性。

吾人來看是否有更佳的 $V(x)$ 選擇。設 $V(x)$ 之型式如下：

$$V(x) = \frac{1}{2}x^T P x + \left(\frac{g}{l}\right)(1 - \cos x_1) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \left(\frac{g}{l}\right)(1 - \cos x_1) \quad (4.2.27)$$

其中 P_{ij} 為待定元素，其要滿足

$$x^T P x > 0 \Rightarrow P > 0 \Rightarrow P_{11} > 0, P_{22} > 0, P_{11}P_{22} - P_{12}^2 > 0 \quad (4.2.28)$$

對 $V(x)$ 微分得

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 \quad (4.2.29)$$

$$= \left[P_{11}x_1 + P_{12}x_2 + \frac{g}{l} \sin x_1 \right] x_2 + (P_{12}x_1 + P_{22}x_2) \left[-\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2 \right]$$

$$= \frac{g}{l}(1 - P_{22})x_2 \sin x_1 - \frac{g}{l}P_{12}x_1 \sin x_1 + \left[P_{11} - P_{12} \frac{k}{m} \right] x_1 x_2 + \left[P_{12} - P_{22} \frac{k}{m} \right] x_2^2 \quad (4.2.30)$$

需適當選擇 P_{11}, P_{12}, P_{22} ，使得 $\dot{V}(x) < 0$ 。由於 $x_2 \sin x_1$ 與 $x_1 x_2$ 的符號不確定，必須選擇它們的係數為零；否則會因為它們的存在，而導致 \dot{V} 的也符號不確定。如此得到

$$P_{22} = 1, P_{11} = (k/m)P_{12}$$

但亦需滿足(4.2.28)式，故

$$P_{11} > 0 \rightarrow P_{12} > 0$$

$$P_{11}P_{22} - P_{12}^2 > 0 \rightarrow \frac{k}{m}P_{12} - P_{12}^2 > 0 \rightarrow 0 < P_{12} < \frac{k}{m}$$

現取 $P_{12} = 0.5(k/m)$ ，則 \dot{V} 化簡成

$$\dot{V} = -\frac{1}{2}\left(\frac{g}{l}\right)\left(\frac{k}{m}\right)x_1 \sin x_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{k}{m}\right)x_2^2 \quad (4.2.31)$$

注意 $x_1 \sin x_1 > 0$ ， $\forall x$ 滿足 $0 < |x_1| < \pi$ ；而且除了(0,0)之外， $\dot{V} < 0$ 。因此知原點為漸進穩定。

由以上的分析，無人獲致下列討論：

- (1) 不同的 Lyapunov 函數會有不一樣的穩定性結論。
- (2) $V > 0, \dot{V} \leq 0$ 只是穩定的充分條件，若今測試某一 V_0 不滿足 $V_0 > 0, \dot{V}_0 \leq 0$ ，則只能說 V_0 找得不適當，對於系統之穩定度無法下任何斷語。

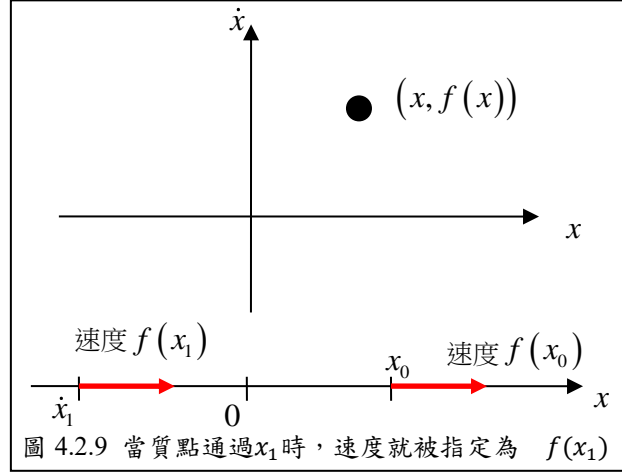
□

Lyapunov 定理是藉由場的規範來達到軌跡規範的效果。此點說明如下。考慮非線性方程式

$$\dot{x} = f(x) \quad (4.2.32)$$

此一方程式所代表者，並非某一質點的運動軌跡 $x(t)$ ，而僅是一速度場，也就是它指定了在每

一個座標點上，「且當質點通過這些座標點時」，質點所應具有的速度。例如圖 4.2.9 中，在直線座標軸上，當質點通過 x_0 時，質點的速度就被「指定」為 $f(x_0)$ 。但真正質點的軌跡卻不一定要通過 x_0 點。這一點非常類似重力場的觀念。吾人可以在太空中的任一點計算出它的重力場強度，雖然沒有質點在某些區域內運動，但吾人還是可以非常清楚的算出那些區域的重力場強度。



因此(4.2.32)式所代表者，只是一種「速度場」而非軌跡。若要表示質點的軌跡，則需指定起始位置，例如

$$\dot{x} = f(x), x(0) = x_0 \quad (4.2.33)$$

因為有了 x_0 即可算出在 x_0 處之速度 $\dot{x}_0 = f(x_0)$ ，有了速度，質點就知道從什麼方向開始動，動多快了。這時整條軌跡就已確定。若將此軌跡稱之為 $S(t, x_0)$ ，則 $S(t, x_0)$ 需滿足

$$\frac{d}{dt}S(t, x_0) = f(S(t, x_0)), S(0, x_0) = x_0 \quad (4.2.34)$$

雖然(4.2.34)和(4.2.33)同義，但在符號上(4.2.33)容易讓人誤解成(4.2.32)式，因此若要清楚地表示軌跡方程式，以(4.2.34)式較為合宜。

Lyapunov 定理是說明當存在一能量場 $V(x)$ (指定在每一座標點 x 上，所應具有的能量)滿足

$$V(x) > 0 \quad (4.2.35)$$

$$\dot{V}(x) = (\nabla V)f(x) = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.2.36)$$

因此 $\dot{V}(x)$ 也是一種場，其表示在每一座標點 x 上，能量的變化速度。Lyapunov 定理說，若有 V 與 \dot{V} 二個場，分別滿足(4.2.35)與(4.2.36)二個規範，則其軌跡 $S(t, x_0)$ 必當滿足下列規範

$$|S(0, x_0) - 0| < \delta \Rightarrow |S(t, x_0) - 0| < \varepsilon \quad (4.2.37)$$

也就是說 Lyapunov 定理是藉由場的規範(4.2.35)與(4.2.36)式，來達到軌跡規範(4.2.37)的效果。了解周圍場的分布，吾人即可知道在場內運動的粒子軌跡是收斂還是發散，而無須去求解出粒子的真正運動軌跡。這一觀念在太空力學中並不陌生：了解太空中某一區域的重力場分布，吾人即可判斷出在此區域運動的星體，其軌跡是屬於有界的橢圓軌跡，亦或是發散的雙曲線軌跡，而無須去求解出星體的真正運動軌跡。

4.3 求 Lyapunov 函數的方法

4.3.1 Krasovskii 方法

考慮 $\dot{x} = f(x)$, $x \in R^n$, 而 $f(x)$ 之 Jacobian 矩陣定義為

$$F(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \triangleq \frac{\partial f}{\partial x} \quad (4.3.1)$$

若

$$\hat{F}(x) = F^T(x) + F(x) < 0 \quad (\text{負定}) \quad (4.3.2)$$

則 $x = 0$ 為漸進穩定，此時 Lyapunov 函數可選為

$$V(x) = f^T(x)f(x) \quad (4.3.3)$$

證明：

$$\dot{f} = \frac{df}{dx} \dot{x} = F(x)\dot{x} = F(x)f(x) \quad (4.3.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{f}^T(x)f(x) + f^T(x)\dot{f}(x) = [F(x)f(x)]^T f(x) + f^T(x)F(x)f(x) \\ &= f^T(x)[F^T(x) + F(x)]f(x) = f^T(x)\hat{F}(x)f(x) \end{aligned}$$

(4.3.5)

因為 \hat{F} 為負定，故 $\dot{V}(x) < 0$ ，因而軌跡相對於 $x = 0$ 為漸進穩定。

□

例題 4.3.1：

試用 Krasovskii 定理證明下列系統為漸進穩定[8]。

$$\dot{x}_1 = -x_1, \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2^3$$

解答：

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1 - x_2 - x_2^3 \end{bmatrix}, F = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 - 3x_2^2 \end{bmatrix}, V(x) = f^T f$$

故得

$$\begin{aligned} \hat{F} &= F^*(x) + F(x) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 - 6x_2^2 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \hat{F}(x) < 0, \forall x \neq 0 \Rightarrow \dot{V} < 0, \forall x \neq 0 \\ &\Rightarrow x = 0 \text{ 為漸進穩定} \end{aligned}$$

□

※注意：Krasovskii 定理只是穩定的充分條件，若 $\hat{F}(x)$ 不為負定，不能判斷 $x = 0$ 就是不穩定。另外對於高階系統，很難去驗證 $\hat{F}(x) < 0$ ，對於所有的 x 均成立，因此 Krasovskii 定理的應用仍非常有限。更為一般性的 Krasovskii 方法，是取

$$V(x) = f^T P f > 0 \quad (4.3.6)$$

其中 P 是待定的正定矩陣，則 $V(x)$ 沿軌跡的微分為

$$\dot{V}(x) = f^T \left\{ P \frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T P \right\} f \quad (4.3.7)$$

因此如果存在 P 滿足

$$P \frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T P = -Q < 0 \quad (4.3.8)$$

其中 Q 為正定矩陣，則有 $\dot{V} < 0$ ，即可證明 $\dot{x} = f$ 為穩定。

例題 4.3.2：

$$\dot{x}_1 = -2x_1 - x_1^3 + x_2 = f_1$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 = f_2$$

若選

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \quad (4.3.9)$$

且利用

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 - 3x_1^2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.3.10)$$

可得

$$P \frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T P = - \begin{bmatrix} 2P_{11}(2 + 3x_1^2) - 2P_{12} & -P_{11} - P_{22} + 3P_{12}(1 + x_1^2) \\ -P_{11} - P_{22} + 3P_{12}(1 + x_1^2) & 2(P_{22} - P_{12}) \end{bmatrix}$$

(4.3.11)

若取 $P = I$ ，則上式可化成

$$P \frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T P = \begin{bmatrix} -2(2 + x_1^2) & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} < 0, \forall x_1 \quad (4.3.12)$$

故有 $\dot{V} < 0$ ，在另一方面

$$V(x) = f^T P f = f^T f = (-2x_1 - 3x_1^3 + x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 > 0 \quad (4.3.13)$$

因此原非線性系統為漸進穩定。

□

4.3.2 可變梯度法(variable gradient method)

此法是先求得 Lyapunov 函數的梯度，然後再用線積分的方法求得 Lyapunov 函數。設 $V(x)$ 是自主性系統 $\dot{x} = f(x)$ 之 Lyapunov 函數，則其對時間之微分可以寫成

$$\dot{V} = (\nabla V) \dot{x} = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right] \dot{x} \quad (4.3.14)$$

其中 ∇V 是一列向量， \dot{x} 是一行向量。上式對時間積分得

$$V(x) = \int_0^x \nabla V dx \quad (4.3.15)$$

其中 ∇V 可表成

$$\nabla V = [\nabla V_1, \nabla V_2, \dots, \nabla V_n] = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right]$$

假設 ∇V 的每一分量可寫成如下型式

$$\nabla V_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (4.3.16)$$

其中 a_{ij} 可為常數或為 x_j 之函數。(4.3.16) 即為可變梯度法的核心，透過係數 a_{ij} 的調整，

(4.3.16) 式提供一個可以調變的梯度函數(故稱可變梯度法)使得

$$(a) \dot{V} < 0; \quad (b) V > 0; \quad (c) \nabla \times \nabla V = 0 \quad (4.3.17)$$

條件(c)是因為 $\nabla \times (\nabla \phi) \equiv 0$ 恒為0, (4.3.16)式中之 a_{ij} 為待定, 若 a_{ij} 任意選, 不見得會使 $\sum_j a_{ij}x_j$ 為某一函數之梯度, 故需加上條件(c), 才能確保(4.3.16)式之成立可行。條件(c)可進一步寫成

$$\frac{\partial(\nabla V_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial(\nabla V_j)}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (4.3.18)$$

$$(\text{注意: } \nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right)\vec{i}_1 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right)\vec{i}_2 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)\vec{i}_3 = 0)$$

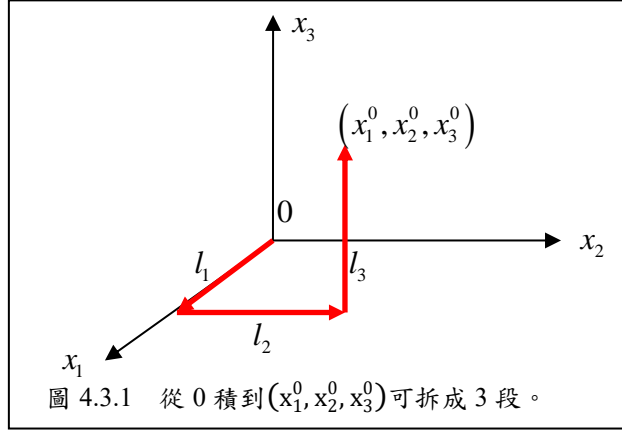


圖 4.3.1 從 0 積到 (x_1^0, x_2^0, x_3^0) 可拆成 3 段。

在(4.3.15)式之積分中, 設積分上項

$$x = [x_1^0 \quad x_2^0 \quad \dots \quad x_n^0]$$

因 $V(x)$ 為 x 之位置函數, 與到達 x 之路徑無關。如圖 4.3.1 所示, 從 0 積到 (x_1^0, x_2^0, x_3^0) 可拆成三段, $l_1 \rightarrow l_2 \rightarrow l_3$:

$$\begin{aligned} l_1 : x_2 = x_3 = 0, \quad 0 \leq x_1 \leq x_1^0 \\ l_2 : x_1 = x_1^0, \quad x_3 = 0, \quad 0 \leq x_2 \leq x_2^0 \\ l_3 : x_1 = x_1^0, \quad x_2 = x_2^0, \quad 0 \leq x_3 \leq x_3^0 \end{aligned}$$

每一段保持只有一個座標值在變化, 寫成通式則成

$$\begin{aligned} V(x) &= \int_0^x \nabla V dx = \int_0^x \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix} \\ &= \int_0^{x_1^0} \nabla V_1 dx_1 + \int_0^{x_2^0} \nabla V_2 dx_2 + \dots + \int_0^{x_n^0} \nabla V_n dx_n \\ &= \int_0^{x_1^0} \nabla V_1(x_1, 0, \dots, 0) dx_1 + \int_0^{x_2^0} \nabla V_2(x_1^0, x_2, 0, \dots, 0) dx_2 \\ &\quad + \dots + \int_0^{x_n^0} \nabla V_n(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{n-1}^0, x_n) dx_n \end{aligned} \quad (4.3.19)$$

例題 4.3.3

試用可變梯度法找下列系統之 Lyapunov 函數：

$$\dot{x}_1 = -x_1, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + x_1 x_2^2$$

解答：

首先設待定之 Lyapunov 函數之梯度如下

$$\nabla V_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \quad \nabla V_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

代入條件(4.3.18)式, 得

$$\frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \nabla V_2}{\partial x_1} \Rightarrow a_{12} + x_2 \frac{\partial a_{12}}{\partial x_2} = a_{21} + x_1 \frac{\partial a_{21}}{\partial x_1} \quad (4.3.20)$$

選 $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = a_{21} = 0$, 可滿足上式；此時 $\nabla V_1 = x_1$, $\nabla V_2 = x_2$

$$\Rightarrow \dot{V} = \nabla V \dot{x} = [\nabla V_1 \quad \nabla V_2] \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = -x_1^2 - x_2^2(1 - x_1 x_2) \quad (4.3.21)$$

若將 x_1 、 x_2 限制在 $1 - x_1 x_2 > 0$ 的範圍，則有 $\dot{V} < 0$ ；相對應的 V 為

$$\begin{aligned} V(x) &= \int_0^x \nabla V dx = \int_0^{x_1} \nabla V_1 dx_1 + \int_0^{x_2} \nabla V_2 dx_2 \\ &= \int_0^{x_1} x_1 dx_1 + \int_0^{x_2} x_2 dx_2 = (1/2)(x_1^2 + x_2^2) > 0, \forall x \neq 0 \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

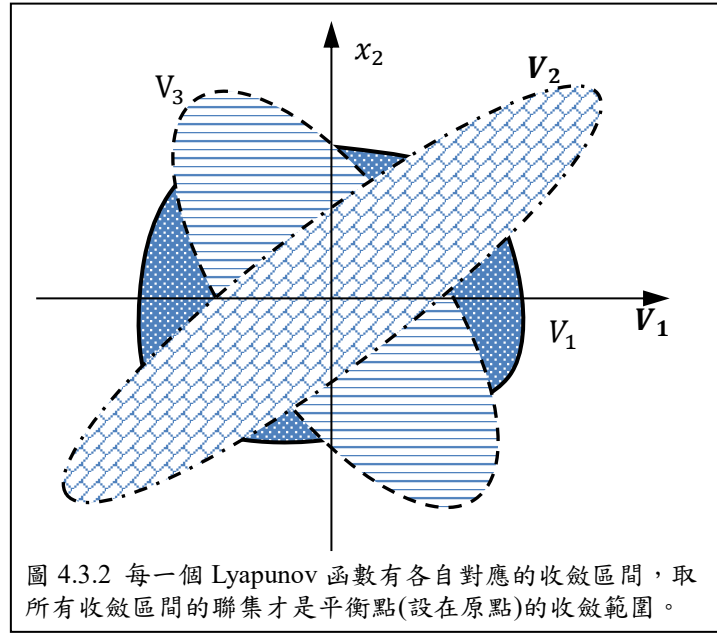
因此若取 $V(x) = (x_1^2 + x_2^2)/2$ 可證明此系統在 $1 - x_1 x_2 > 0$ 之範圍內為穩定(即區域穩定)。滿足(4.3.20)式之 a_{ij} 有無窮多種選擇，每一種 a_{ij} 所對應之 Lyapunov 函數 V ，可得到不一樣區域之穩定，例如若選 a_{ij} 如下： $a_{11} = 1, a_{12} = x_2^2, a_{21} = 3x_2^2, a_{22} = 3$ ，則

$$V(x) = x_1^2/2 + 3x_2^2/2 + x_1 x_2^2 \Rightarrow \dot{V}(x) = -x_1^2 - 3x_2^2 - x_2^2(x_1 x_2 - 3x_1^2 x_2^2)$$

故此 $V(x)$ 在 $x_1 x_2 - 3x_1^2 x_2^2 > 0$ 之區域內，可用以證明該系統為漸進穩定。

□

從以上的例題可以看到不同的 Lyapunov 函數有各自對應的收斂區間，而取所有可能收斂區間的聯集才是平衡點(設在原點處)的收斂範圍。能夠找到的 Lyapunov 函數越多，則它們所決定的收斂區間的聯集越接近實際收斂區間的大小。所以如果只能找到一個 Lyapunov 函數，則由其所決定的收斂區間將太過保守，實際的收斂區間可能要大上許多。



4.3.3 二次式的 Lyapunov 函數

二次式的 Lyapunov 函數

$$V(x) = x^T P x \quad (4.3.23)$$

除了是線性系統的 Lyapunov 函數通式外(參考 4.5 節)，有一些非線性系統，其 Lyapunov 函數也可採用如(4.3.23)的型式。以下例題即在說明此點。

例題 4.3.4：衛星姿態控制系統

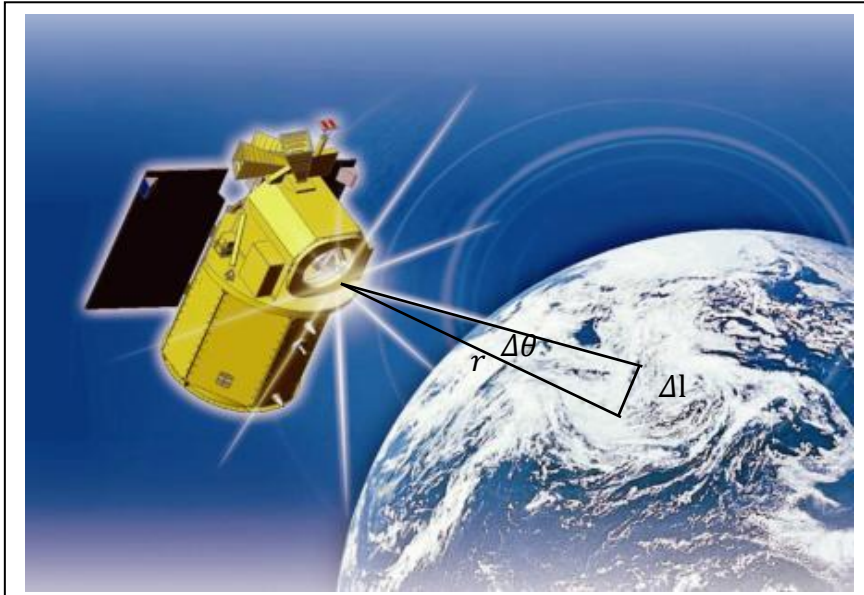


圖 4.3.3 福衛五號裝置有台灣全自製的光學遙測酬載，可觀測到地面 2 米大小的物件。其軌道高度離地面 720 公里，所以衛星姿態一點點角度的誤差，將使得鏡頭投射到地面上時，偏離預定拍攝目標很大的距離。這說明衛星姿態控制必須具有很高的精確度，差之毫釐，失之千里。圖片取材自國家實驗研究院電子報 第 6 期 2010 年 02 月 12 日。

參考圖 4.3.4，衛星距離地表的高度 r 至少有幾百公里，所以衛星姿態角度縱使只有一點點的誤差 $\Delta\theta$ ，也會在地面上所造成很大的距離誤差 $\Delta l = r\Delta\theta$ ，因此衛星姿態控制必須達到很高的精度。本例題是在討論當衛星處於左右搖晃的情況下(tumbling)，如何使其停止搖晃，保持固定的姿態。衛星相對於主軸(principle axis)的運動可用下列之尤拉(Euler)方程式來表示[8]：

$$\begin{aligned} I_x \dot{\omega}_x - (I_y - I_z) \omega_y \omega_z &= T_x \\ I_y \dot{\omega}_y - (I_z - I_x) \omega_z \omega_x &= T_y \\ I_z \dot{\omega}_z - (I_x - I_y) \omega_x \omega_y &= T_z \end{aligned} \quad (4.3.24)$$

其中 I_x 、 I_y 、 I_z 、 ω_x 、 ω_y 、 ω_z 分別是相對於三個主軸的轉動慣量與角速度。當衛星正處於左右搖晃的狀態時，吾人欲設計一個控制迴路，以使其穩定下來，亦即要滿足

$$\omega_x \rightarrow 0, \omega_y \rightarrow 0, \omega_z \rightarrow 0$$

(4.3.24)式中的 T_x 、 T_y 、 T_z 為外加之控制力矩，現採用最簡單的 P 型控制器：

$$T_x = K_1 I_x \omega_x, T_y = K_2 I_y \omega_y, T_z = K_3 I_z \omega_z \quad (4.3.25)$$

設狀態變數如下：

$$x_1 = \omega_x, x_2 = \omega_y, x_3 = \omega_z \quad (4.3.26)$$

並將(4.3.25)式代入(4.3.24)中，可得

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 - [(I_y - I_z)/I_x] x_2 x_3 &= K_1 x_1 \\ \dot{x}_2 - [(I_z - I_x)/I_y] x_3 x_1 &= K_2 x_2 \\ \dot{x}_3 - [(I_x - I_y)/I_z] x_1 x_2 &= K_3 x_3 \end{aligned} \quad (4.3.27)$$

這是一組非線性方程式，可重寫成如下之矩陣型式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & (I_y/I_x)x_3 & -(I_z/I_x)x_2 \\ -(I_x/I_y)x_3 & K_2 & (I_z/I_y)x_1 \\ (I_x/I_z)x_2 & -(I_y/I_z)x_1 & K_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

吾人要利用 Lyapunov 直接穩定理論來決定 K_1 、 K_2 、 K_3 ，使該衛星達到漸近穩定。試選如下之二次式 Lyapunov 函數

$$V(x) = [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} I_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & I_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & I_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x^T P x = I_x^2 x_1^2 + I_y^2 x_2^2 + I_z^2 x_3^2 > 0$$

(4.3.28)

下面測試 $\dot{V} < 0$ 是否滿足

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= x^T \begin{bmatrix} K_1 & -(I_x/I_y)x_3 & (I_x/I_z)x_2 \\ (I_y/I_x)x_3 & K_2 & -(I_y/I_z)x_1 \\ -(I_z/I_x)x_2 & (I_z/I_y)x_1 & K_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & I_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & I_z^2 \end{bmatrix} x \\ &\quad + x^T \begin{bmatrix} I_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & I_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & I_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & (I_y/I_x)x_3 & -(I_z/I_x)x_2 \\ -(I_x/I_y)x_3 & K_2 & (I_z/I_y)x_1 \\ (I_x/I_z)x_2 & -(I_y/I_z)x_1 & K_3 \end{bmatrix} x \\ &= x^T \begin{bmatrix} 2K_1 I_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2K_2 I_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2K_3 I_z^2 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

為使 $\dot{V}(x) < 0$ ，只要選擇控制參數滿足

$$K_1 < 0, K_2 < 0, K_3 < 0$$

即可確保非線性系統(4.3.27)為漸近穩定。

□

4.3.4 二階非線性系統的 Lyapunov 函數

對於二階非線性方程式

$$\ddot{y} + h(y)\dot{y} + g(y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -g(x_1) - h(x_1)x_2 \end{cases} \quad (4.3.29)$$

其中若函數 $h(y)$ 與 $g(y)$ 滿足

$$h(y) > 0, \forall y \neq 0 \quad (4.3.30a)$$

$$yg(y) > 0, \forall y \neq 0 \quad (4.3.30b)$$

則(4.3.29)式的 Lyapunov 函數可選為如下之積分的型式

$$V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} g(\xi) d\xi \quad (4.3.31)$$

此 V 滿足

$$(a) \quad V(0) = 0$$

$$(b) \quad V(x) > 0, \forall x \neq 0, \int_0^{x_1} g(\xi) d\xi > 0 \text{ 是因條件(4.3.30b)}$$

$$(c) \quad \dot{V}(x) = x_2 \dot{x}_2 + g(x_1) \dot{x}_1 = x_2(-g(x_1) - h(x_1)x_2) + x_2 g(x_1) = -h(x_1)x_2^2 < 0$$

如果(4.3.31)式中的 $h(y), g(y)$ 不滿足(4.3.32)式的條件，吾人仍可利用控制的方法使其滿足，例如

$$\ddot{y} + h(y, u)\dot{y} + g(y, u) = 0 \quad (4.3.32)$$

其中 u 為控制策略，吾人可適當選擇回授型式，如

$$u = f(y) \quad (4.3.33)$$

使得

$$h(y, f(y)) > 0, \quad yg(y, f(y)) > 0 \quad (4.3.34)$$

這一點在後面的章節中將討論到。

4.4 全域漸近穩定

局部漸近穩定是指當初始值 x_0 落在平衡點附近時，則依據 $\dot{x} = f(x)$ 的運動方程式，必有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (4.4.1)$$

之結果。當 x_0 落在某一區域之內時，則 $x(t)$ 最後必可回到原點，吾人把這個區域稱為 R_A ，如圖 4.4.1 所示：

$$R_A = \{x_0 | x(t, x_0) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty\}$$

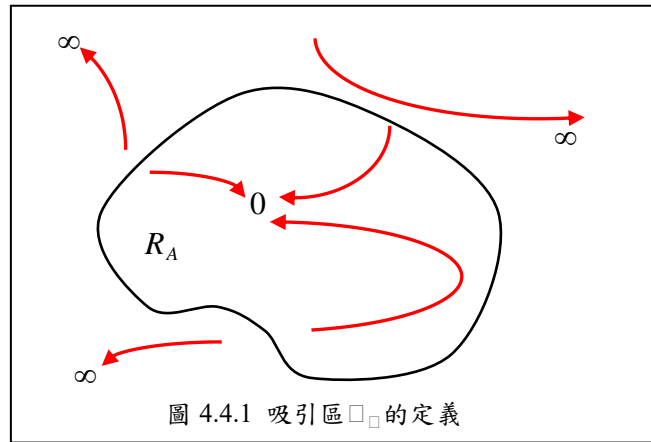
其中 $x(t, x_0)$ 為下列微分方程式之解： $\dot{x} = f(x)$ ， $x(0) = x_0$ 。 R_A 有許多種稱呼：(a) Region of attraction；(b) Region of asymptotic stability；(c) Domain of attraction；(d) Basin(盆地，窪地)。

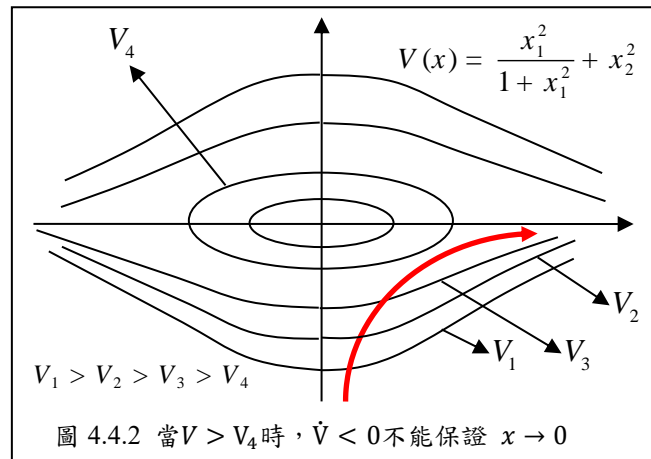
當 region of attraction 為整個 R^n 空間時，則稱 $x = 0$ 為全域穩定。下面吾人要來觀察要滿足全域穩定，除了要有 $V > 0, \dot{V} < 0$ 之外，還需符合什麼額外條件呢？

在圖 4.4.2 中，當 $V < V_4$ 時， $V \rightarrow 0$ 則 $x \rightarrow 0$ ，故 $V > 0, \dot{V} < 0$ 即已足夠保證穩定(局部穩定)。但當 $V > V_4$ 時，如箭頭路徑所示， V 遞減，但 x 有離原點越來越遠的趨勢，亦即 $\dot{V} < 0$ 不能保證 $x \rightarrow 0$ 。為防止此一情形發生，需多加一個條件：

$$\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty$$

此一條件稱為放射狀無界條件(radially unbounded)。





全域穩定定理：(又稱 Barbashin-Krasovskii 定理)

設 $x = 0$ 為 $\dot{x} = f(x)$ 之平衡點，且 $V(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是一連續可微函數，且滿足下列三條件：

- (a). $V(0) = 0$ 且 $V(x) > 0, \forall x \neq 0$
- (b). $\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty$
- (c). $\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0$

則 $x = 0$ 為全域漸進穩定。

證明：

條件(b)在於說明當 $\|x\| < r$ 時，必有 $|V| < \beta$ ，如圖 4.4.3 所示。因此

$$\Omega_\beta = \{x \mid |V(x)| < \beta\} \subset B_r = \{x \mid \|x\| < r\} \Rightarrow \Omega_\beta \subset B_r$$

此說明 Ω_β 有界的。其餘之證明和 Lyapunov 定理相同。

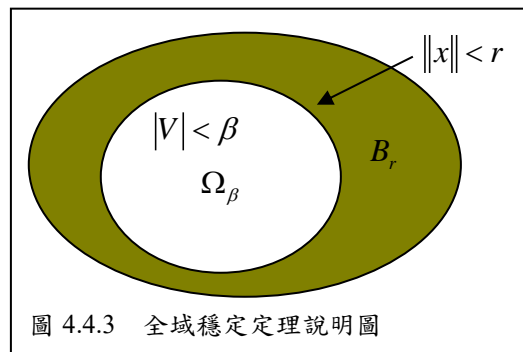


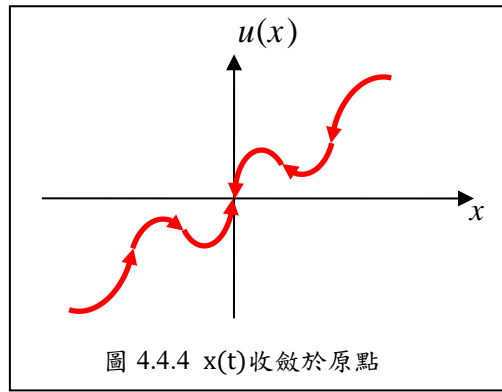
圖 4.4.3 全域穩定定理說明圖

例題 4.4.1：

考慮下列之非線性系統[9]

$$\dot{x} + u(t) = 0, x(0) = x_0 \quad (4.4.2)$$

其中 $u(t)$ 為輸入之控制訊號，吾人欲設計 $u(t)$ 使得不管 x_0 為何，當 $t \rightarrow \infty$ ，則 $x \rightarrow 0 \Rightarrow$ 全域穩定。

圖 4.4.4 $x(t)$ 收斂於原點

最簡易之 $u(t)$ 可選擇如下型式：

$$xu(x) > 0 \quad (4.4.3)$$

亦即 $\dot{x} = -u(t)$ ，當 $x > 0 \rightarrow \dot{x} = -u < 0$ ；當 $x < 0 \rightarrow \dot{x} = -u > 0$ ，如圖 4.4.4 所示。因此 $x(t)$ 恆向原點方向移動。又由(4.4.3)式知 $u(x)$ 必通過原點即 $u(0) = 0$ ，因此當位置 $x = 0$ 時，速度 $\dot{x}(0) = -u(0) = 0$ ，亦即停留在原點不動，達到漸進穩度的目標。

現利用 Barbashin-Krasovskii 定理驗證(4.4.3)之控制策略確實滿足全域穩定之三大條件。

試選 $V(x) = x^2$ (距離原點之平方→誤差能量)，則有

(a) $V > 0, \forall x \neq 0$ ，(b) $\dot{V} = 2x\dot{x} = -2xu(x) < 0, \forall x \neq 0$ ，(c) $\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow |V| \rightarrow \infty$ 。

由以上驗證可知全域穩定。 $u(x)$ 之選擇有很多種，均能滿足 $xu(x) > 0$ ，如：

(1) $u(x) = x - \sin^2 x$ ，(2) $u(x) = x^3$ (或任一 x 之奇次方項)

※注意：

(1) 若 $x = 0$ 為全域穩定中的平衡點，代表 R^n 空間之任一初始值 $x(0)$ 最後必將落入 $x = 0$ 之中，因此在 R^n 空間不能再有另一個平衡點，否則 $x = 0$ 為全域穩定即不成立。

(2) 若 $V(x)$ 為一 Lyapunov 函數，即 $V > 0, \dot{V} < 0$ ，則

$$V_1 = \rho V^\alpha, \rho > 0, \alpha > 1$$

亦必為 Lyapunov 函數。

證明：(a) $V > 0 \rightarrow V_1 > 0$ ；(b) $\dot{V}_1 = \rho\alpha V^{\alpha-1}\dot{V} < 0$ ；(c) V 連續可微 $\rightarrow V_1$ 連續可微。由以上三點可知 V_1 為 Lyapunov 函數。

(3) 局部 Lyapunov 定理或全域 Lyapunov 定理，在應用到實際問題上時，最困難也最重要的步驟，是在尋找適當的 Lyapunov 函數。而可變梯度法是最有效的方法。

例題 4.4.2

現有一非線性系統[10]

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -h(x_1) - ax_2$$

其中 $a > 0, h(0) = 0, yh(y) > 0$ ，試分析此系統：(1)是否為局部漸進穩定？(2)是否為全域漸進穩定？

解答：設

$$g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla V_1 \\ \nabla V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial V / \partial x_1 \\ \partial V / \partial x_2 \end{bmatrix}$$

$g(x), V(x)$ 均是待定函數，其中 g_1, g_2 需滿足旋度為零的條件，即

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_2} = \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \quad (4.4.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) \dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \\ &= g^T(x) \dot{x} \quad (\because g = \nabla V) \\ &= g_1(x)x_2 - g_2(x)[h(x_1) + ax_2] \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

而 $V(x)$ 可由 ∇V 之積分得

$$V(x) = \int_0^x (\nabla V)(y) dy = \int_0^x g^T(y) dy \quad (4.4.6)$$

取 $g(x)$ 如下之型式

$$g(x) = \begin{bmatrix} \alpha(x)x_1 + \beta(x)x_2 \\ \gamma(x)x_1 + \delta(x)x_2 \end{bmatrix} \quad (4.4.7)$$

其中 $\alpha(x)$ 、 $\beta(x)$ 、 $\gamma(x)$ 、 $\delta(x)$ 均為待定之函數。將(4.4.7)式代入(4.4.4)之條件中得

$$\beta(x) + \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} x_1 + \frac{\partial \beta}{\partial x_2} x_2 = \gamma(x) + \frac{\partial \gamma}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial \delta}{\partial x_1} x_2 \quad (4.4.8)$$

而 \dot{V} 之(4.4.5)式則化成

$$\dot{V}(x) = \alpha(x)\underline{x_1}x_2 + \beta(x)x_2^2 - a\gamma(x)\underline{x_1}x_2 - a\delta(x)x_2^2 - \delta(x)\underline{x_2}h(x_1) - \gamma(x)x_1h(x_1) \quad (4.4.9)$$

令上式中的耦合項為 0(底下有線段標示的項)，得

$$\alpha(x)x_1 - a\gamma(x)x_1 - \delta(x)h(x_1) = 0 \quad (4.4.10)$$

則 $\dot{V}(x)$ 剩下 3 項如下

$$\dot{V}(x) = -[a\delta(x) - \beta(x)]x_2^2 - \gamma(x)[x_1h(x_1)] \quad (4.4.11)$$

現選擇

$$\delta(x) = \text{常數} = \delta, \gamma(x) = \text{常數} = \gamma, \beta(x) = \text{常數} = \beta$$

則由(4.4.10)式知 $\alpha(x)$ 僅為 x_1 之函數，即

$$\alpha(x) = (a\gamma x_1 + \delta h(x_1))/x_1 \quad (4.4.12)$$

由(4.4.11)式得知若 δ, β, γ 滿足

$$0 < \gamma, a\delta < \beta \Rightarrow \dot{V} < 0, \forall x \neq 0 \quad (4.4.13)$$

則由條件(4.4.8)可得

$$\beta = \gamma \quad (4.4.14)$$

合併(4.4.13)、(4.4.14)式可知 $0 < \gamma < a\delta$ 。剩下來之工作是在檢查 $V(x) > 0$ ：由(4.4.12)式及 δ, β, γ 為常數之條件， $g(x) = \nabla V(x)$ 化成

$$\nabla V(x) = g(x) = \begin{bmatrix} a\gamma x_1 + \delta h(x_1) + \gamma x_2 \\ \gamma x_1 + \delta x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2) \\ g_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

對 $\nabla V(x)$ 作積分得

$$\begin{aligned}
V(x) &= \int_0^{x_1} g_1(y_1, 0) dy_1 + \int_0^{x_2} g_2(x_1, y_1) dy_2 \\
&= \int_0^{x_1} [a\gamma y_1 + \delta h(y_1)] dy_1 + \int_0^{x_2} [\gamma x_1 + \delta y_2] dy_2 \\
&= (1/2)a\gamma x_1^2 + \gamma x_1 x_2 + (1/2)\delta x_2^2 + \delta \int_0^{x_1} h(y) dy \\
&= \frac{1}{2} [x_1 \ x_2]^T \begin{bmatrix} a\gamma & \gamma \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \delta \int_0^{x_1} h(y) dy
\end{aligned} \tag{4.4.15}$$

其中 $h(y)dy > 0$ 之條件為已知。故為確保 $V > 0$ ，需使

$$(1) \delta > 0, \quad (2) \begin{bmatrix} a\gamma & \gamma \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} > 0 \Rightarrow \gamma > 0, \gamma < a\delta \tag{4.4.16b}$$

合併(4.4.14)和(4.4.16)式，可知若取

$$\delta > 0, \quad 0 < \gamma < a\delta$$

則有(1) $V(x) > 0, \forall x \neq 0$; (2) $\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0$; (3) $\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow |V(x)| \rightarrow \infty$ (由(4.4.15)式)。故最後之結論為 $x = 0$ 是原系統

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -h(x_1) - ax_2$$

之全域平衡點。而其對應的 Lyapunov 函數如(4.4.15)式所示。

□

例題 4.4.3：「當 $\|x\| \rightarrow \infty, V(x) \rightarrow \infty$ 」這個條件通常稱之為「growth condition」，一個平衡點若為 Lyapunov 穩定，且 $V(x)$ 又滿足 growth condition，則此平衡點的穩定是全域性的(globally stable)。growth condition 的滿足可保證：(a) $V(x) = C$ (常數) 是代表環繞平衡點的封閉曲線；(b) $V(x) = C$ 曲線呈層狀結構，即若 $C_1 < C_2$ ，必有

$$\{x | V(x) \leq C_1\} \subset \{x | V(x) \leq C_2\}$$

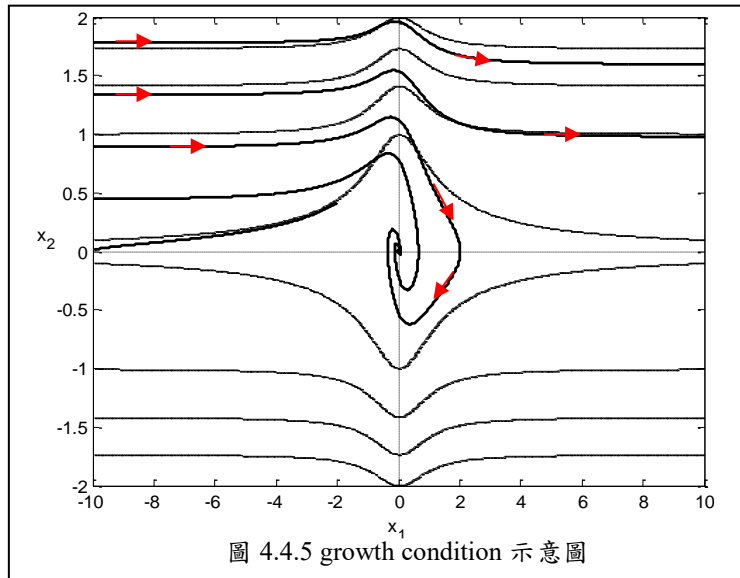


圖 4.4.5 growth condition 示意圖

例如吾人選如下之 Lyapunov 函數

$$V(x) = x_2^2 + \frac{x_1^2}{1+x_1^2} \tag{4.4.17}$$

則只有當 $V(x) < 1$ 時，(a)、(b)兩個條件才滿足； $V(x) \geq 1$ 的區域不滿足，如圖 4.4.5 所示，因為對於此 V ，吾人有 $|x_1| \rightarrow \infty, V(x) \rightarrow 1 + x_2^2$ ，即 $V(x)$ 不一定趨於 ∞ ，故 growth condition 不滿足。

考慮非線性系統

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{x_1}{(1+x_1^2)^2} - \frac{x_2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2}\end{aligned}\quad (4.4.18)$$

利用(4.4.17)、(4.4.18)可得

$$\dot{V}(x) = \frac{-2x_2^2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2} \leq 0, \forall x$$

實際上除了(0,0)以外， $\dot{V}(x)$ 為負，故知原點是漸進穩定；但由於(4.4.17)式的 V 不滿足 growth 條件，因此吾人無法確定此漸近穩定是否是全域性的。如圖 4.4.5 所示，在區域 $V(x) < 1$ 的外部，雖然沿著 $x(t)$ 的軌跡， V 值越來越小($\dot{V} < 0$)，但 x 的值卻跑到無限大去。(由畫箭頭的曲線可看出)

4.5 線性系統的穩定性

討論線性系統

$$\dot{x} = Ax \quad (4.5.1)$$

之漸進穩定除了求 A 之特徵值和特徵向量外，亦可採用 Lyapunov 定理。假設一個二次式的 Lyapunov 函數

$$V(x) = x^T P x > 0 \quad (4.5.2)$$

其中 P 為對稱且正定，接著檢查是否 $\dot{V} < 0$ ：

$$\dot{V}(x) = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x = x^T P (Ax) + (Ax)^T P x = x^T (PA + A^T P) x = -x^T Q x$$

若 Q 為正定，則由 Lyapunov 定理知原點為全域漸進穩定，亦即所有 A 之特徵值均落在左半面， $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ 。以 Lyapunov 討論線性系統的穩定性可有兩種方式：

- (1). 給定 $P > 0$ ，檢查是否 $Q = -PA - A^T P > 0$
- (2). 給定 $Q > 0$ ，求解 Lyapunov 方程式 $PA + A^T P + Q = 0$ ，檢查是否其解 $P > 0$

通常以方法(2)較為方便且常用。吾人可導出如下之定理：

穩定定理：

對任 $Q > 0$ ， $\exists P > 0$ 使得 $PA + A^T P + Q = 0 \Leftrightarrow \text{Re}(\lambda_i(A)) < 0$ ，且若 $\text{Re}(\lambda_i(A)) < 0$ ， $PA + A^T P + Q = 0$ 之解為唯一。

證明：

(\Rightarrow)：

$$\begin{cases} V(x) = x^T P x > 0 \\ \dot{V}(x) = -x^T Q x < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{漸進穩定} \Rightarrow \text{Re}(\lambda_i) < 0$$

(\Leftarrow)：

設 $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ 且 $Q > 0$ (對稱)，吾人將證明必存在 $P > 0$ 滿足 $PA + A^T P + Q = 0$ ，且此解為唯一。選取如下之 P

$$P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{A t} dt \quad (4.5.3)$$

P 有下列特性：

- (1) P 為對稱

(2) P 的值為有限，因 $\lambda_i(A) < 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0$

(3) $P > 0$ 。此特性可用反證法證明：

設存在 $x \neq 0$ 使得 $x^T P x = 0$ ，因為 e^{At} 對 $\forall t \geq 0$ 沒有奇異點存在，故

$$\begin{aligned} x^T P x = 0 &\Rightarrow \int_0^\infty x^T e^{A^T t} Q e^{At} x dt = 0 \\ &\Rightarrow e^{At} x \equiv 0, \forall t \geq 0 \Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

此與假設不合，故 $P > 0$ 。

下面再證實(4.5.3)式之 P 滿足 $PA + A^T P = -Q$ ：

$$\begin{aligned} PA + A^T P &= \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} A dt + \int_0^\infty A^T e^{A^T t} Q e^{At} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dt} [e^{A^T t} Q e^{At}] dt = e^{A^T t} Q e^{At} \Big|_0^\infty \quad (\because \lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0) \\ &= -Q \end{aligned}$$

最後證明滿足 $PA + A^T P = -Q$ 之 P 為唯一。設今有另一 \bar{P} 滿足 Lyapunov 方程式，即

$$\bar{P}A + A^T \bar{P} + Q = 0 \quad (4.5.4)$$

原先之 P 亦滿足 Lyapunov 方程式

$$PA + A^T P + Q = 0 \quad (4.5.5)$$

由(4.5.5)減(4.5.4)得

$$(P - \bar{P})A + A^T(P - \bar{P}) = 0 \quad (4.5.6)$$

上式左右兩邊各乘 $e^{A^T t}$ 和 e^{At} 得

$$\begin{aligned} 0 &= e^{A^T t} [(P - \bar{P})A + A^T(P - \bar{P})] e^{At} = \frac{d}{dt} [e^{A^T t} (P - \bar{P}) e^{At}] \\ &\Rightarrow e^{A^T t} (P - \bar{P}) e^{At} = \text{常數} = C_1, \forall t \geq 0 \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

當 $t = 0$ 時， $C_1 = P - \bar{P}$ ；當 $t = \infty$ 時， $C_1 = 0$ 。由此可知 $P = \bar{P}$ 。

□

結論：

判斷 $\lambda_i(A) < 0$ 和求解 $PA + A^T P + Q = 0$ 之 $P > 0$ 兩者是同義的，但求解 Lyapunov 方程式在數值上不見得比解特徵值問題來得容易(參閱註解[11])；吾人亦可由 Lyapunov 方程式的解導出羅斯準則(Routh-Hurwitz criterion)，再由多項式之係數判斷有無正解，參閱學習評量第 4.10.13 題。

例題 4.5.1：

考慮下列線性系統

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

試由 Lyapunov 定理，證實此系統之穩定性

解答：

令 $V(x) = x^T P x$ ，若欲證明此系統為漸進穩定，需尋求 $P > 0$ 並滿足

$$PA + A^T P = -Q = -I \quad (4.5.8)$$

亦即

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(4.5.9)

展開得

$$-2P_{12} = -1 \quad (4.5.10a)$$

$$P_{11} - P_{12} - P_{22} = 0 \quad (4.5.10b)$$

$$2P_{12} - 2P_{22} = -1 \quad (4.5.10c)$$

解得

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

此滿足 $P > 0$ 之條件，此時

$$V(x) = x^T P x = \frac{1}{2} (3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2) > 0 \quad (4.5.11)$$

$$\dot{V}(x) = -x^T Q x = -x^T x = -(x_1^2 + x_2^2) < 0 \quad (4.5.12)$$

故知 $x = 0$ 為漸進穩定。

□

例題 4.5.2：最佳 LQR 控制的穩定性

前面提到 Lyapunov 定理也可用於線性系統穩定性的判斷，而化成一 Lyapunov 方程式的求解問題。利用這一結果，吾人可用以分析 LQR 控制的穩定性。

茲考慮線性系統

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \quad (4.5.13)$$

其為可控的(controllable)，亦即對於任意 x_0 ，必存在控制 u ，使 x 在有限的時間 t_f 內，到達 x_f ，而其條件為

$$\text{Rank}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n$$

設(4.5.13)式的平衡點為 \bar{x} ，到達 \bar{x} 所需之控制 \bar{u} 滿足

$$A\bar{x} + B\bar{u} = 0 \quad (4.5.14)$$

LQR(Linear Quadratic Regulator)控制問題，是要設計 u ，使得下列的成本函數為最小：

$$J = \int_0^\infty [(x - \bar{x})^T Q (x - \bar{x}) + (u - \bar{u})^T R (u - \bar{u})] dt \quad (4.5.15)$$

亦即使得 $x(t)$ 很快接近 \bar{x} (平衡點)，且 $(u - \bar{u})$ 之能量花費也越小越好。上式中的 Q 和 R 均為正定矩陣 ($Q > 0, R > 0$)。

由於系統(4.5.13)為可控，必存在狀態回授增益 K

$$(u - \bar{u}) = -K(x - \bar{x}) \quad (4.5.16)$$

使得 $x(t_f) = \bar{x}$ 。滿足 $x(t_f) = \bar{x}$ 的 K 可能有無限多個，但吾人要找到其中一個，求得(4.5.15)式中的 J 為最小。

將(4.5.16)式代入(4.5.13)式中得

$$\dot{x} = (A - BK)(x - \bar{x}) \quad (4.5.17)$$

再將(4.5.16)式代入 J 中得

$$J = \int_0^{\infty} (x - \bar{x})^T [Q + K^T R K] (x - \bar{x}) dt \quad (4.5.18)$$

對於線性系統(4.5.17)，其 Lyapunov 函數可選為二次式

$$V = (x - \bar{x})^T P (x - \bar{x}) \quad (4.5.19)$$

其中 $P > 0$ 為待定的矩陣，對 V 微分，並利用(4.5.17)式得

$$\dot{V} = (x - \bar{x})^T [(A - BK)^T P + P(A - BK)] (x - \bar{x}) \quad (4.5.20)$$

如果吾人設定

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = -(Q + K^T R K) < 0 \quad (4.5.21)$$

則必有 $\dot{V} < 0$ ，即(4.5.17)式為漸進穩定。

利用(4.5.20)、(4.5.21)式可將(4.5.18)式改寫為

$$\begin{aligned} J &= -\int_0^{\infty} \dot{V} dt = V(x(0)) - V(x(\infty)) \\ &= [x(0) - \bar{x}]^T P [x(0) - \bar{x}], (\because V(x(\infty)) = 0) \end{aligned} \quad (4.5.22)$$

因此 P 的選擇，是要使得上式中的 J 為最小。但由(4.5.21)式知 P 是由 K 所決定。一個 K 矩陣代入(4.5.21)式中，可求得解 P 。最後 LQR 的問題化成：試決定 K ，使得(4.5.21)式所解得的 P 矩陣，代入(4.5.22)中的 J 之後，其值最小。

這樣的 K ，可證明為

$$K = R^{-1} B^T P \quad (4.5.23)$$

將此 K 代入(4.5.21)式中，得

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P = -Q \quad (4.5.24)$$

此方程式即為 LQR 控制中的 Riccati 方程式， P 求得後，代入(4.5.23)，即得狀態回授增益 K 。

4.6 線性化與 Lyapunov 間接穩定定理

本節要討論的是利用平衡點的線性化展開，來預測原來非線性系統的穩定性。這個方法在 Lyapunov 的原始論文[2]中，被稱作 Lyapunov first method，在這裡則稱之為 Lyapunov 間接穩定定理。而在 4.2 節所介紹的 Lyapunov 直接穩定定理則被稱為 Lyapunov second method [3]。不過這種第 1 或第 2 的說法是早期的用語，近來已比較少人使用。Lyapunov 間接穩定定理是透過『線性系統』的穩定性來判斷『非線性系統』的穩定性，故稱其為間接法。Lyapunov 直接穩定定理則是透過 Lyapunov 函數 $V > 0$ ， $\dot{V} < 0$ 的存在性，來直接判斷『非線性系統』的穩定性。直接定理所提供的只是充分條件：若條件 $V > 0$ ， $\dot{V} < 0$ 成立，則非線性系統為穩定。但是若我們測試了許多 Lyapunov 函數，卻發現都不滿足 $V > 0$ ， $\dot{V} < 0$ 時，直接定理無法提供我們進一步的訊息。有可能是我們運氣不好，所以一直找不到合適的 V 。也有可能是該非線性系統根本就是 unstable，自然不存在合格的 Lyapunov 函數，再怎麼找當然也找不到。當直接定理無法告訴我們哪一種情況才是對時，間接定理提供了一個判斷的準則。亦即如果非線性系統在平衡點的線性展開是穩定的話(矩陣的特徵值全部落在左半面)，則非線性系統在平衡點附近也是穩定的。

考慮非線性系統

$$\dot{x} = f(x) \quad (4.6.1)$$

其中 $f: D \rightarrow R^n$ 為一連續可微映像，其定義域 $D \in R^n$ 。設 $x = 0$ 為平衡點，即 $f(0) = 0$ ，由均值理論(mean value theorem)可得

$$f(x) = f(0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=z} x \quad (4.6.2)$$

其中 z 為介於 0 和 x 連線之一點。現將(4.6.2)式改寫如下：

$$\begin{aligned} f(x) &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=z} x \quad (\because f(0) = 0) \\ &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} x + \left[\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=z} - \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} \right] x \\ &= Ax + g(x) \end{aligned} \quad (4.6.3)$$

其中

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x=(0,0,\dots,0)}$$

且 $g(x)$ 需滿足

$$\|g(x)\| = \left\| \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=z} - \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} \right) x \right\| \leq \left\| \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=z} - \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} \right\| \cdot \|x\|$$

由 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 之連續性得

$$\frac{\|g(x)\|}{\|x\|} \leq \left\| \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=z} - \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} \right\| \rightarrow 0, \text{ 當 } x \rightarrow 0$$

其中 $\|x\|$ 所指的就是向量 x 的長度(2-norm)，即

$$\|x\| = \|x\|_2 = \|[x_1, x_2, \dots, x_n]\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

故在 x 之微小鄰域內，吾人可將 $\dot{x} = f(x)$ 近似成

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (4.6.4)$$

吾人將探討如何由線性系統(4.6.4)之穩定度推斷非線性系統(4.6.1)在 $x = 0$ 附近之穩定度。

Lyapunov 線性化穩定定理[3]：

- (1) 設 $\dot{x} = f(x)$ 之線性化系統為 $\dot{x} = Ax$ ，則 $\dot{x} = f(x)$ 在 $x = 0$ 為漸進穩定，若 $\text{Re}(\lambda(A)) < 0$ 。
- (2) $\dot{x} = f(x)$ 在 $x = 0$ 為不穩定，若存在 $-\lambda_i$ 使得 $\text{Re}(\lambda_i(A)) > 0$

證明：

設 $\text{Re}(\lambda_i(A)) < 0, \forall i$ ，則由前一節的定理知：對任意 $Q > 0$ ，存在 $P > 0$ 滿足 $PA + A^T P = -Q$ ，現對於(4.6.1)式，吾人取如下之 Lyapunov 函數

$$V(x) = x^T P x > 0$$

下面需檢查 $\dot{V} < 0$ 之條件

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x = x^T P f + f^T P x \\
&= x^T P [Ax + g(x)] + [Ax + g(x)]^T P x \\
&= x^T (PA + A^T P)x + 2x^T P g(x) \\
&= -x^T Q x + 2x^T P g(x)
\end{aligned} \tag{4.6.5}$$

上式之第一項已為負定，現考慮第二項，因

$$\frac{\|g(x)\|_2}{\|x\|_2} \rightarrow 0, \text{ 當 } \|x\| \rightarrow 0$$

因此對 $\forall \gamma > 0$ ，必存在 $r > 0$ 使得

$$\|g(x)\|_2 < \gamma \|x\|_2, \quad \forall \|x\|_2 < r$$

(4.6.6)

將(4.6.6)式中的結果代入(4.6.5)式得

$$\dot{V}(x) < -x^T Q x + 2\gamma \|P\|_2 \|x\|_2^2, \quad \forall \|x\|_2 < r$$

(4.6.7)

其中右邊第一項滿足不等式

$$x^T Q x \geq \lambda_{\min}(Q) \|x\|_2^2 \Rightarrow -x^T Q x \leq -\lambda_{\min}(Q) \|x\|_2^2$$

(4.6.8)

將(4.6.8)代入(4.6.7)得

$$\dot{V}(x) < -[\lambda_{\min}(Q) - 2\gamma \|P\|_2] \|x\|_2^2, \quad \forall \|x\|_2 < r$$

因此若吾人取

$$\gamma < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\|P\|_2}$$

則 $\dot{V} < 0$ ， $\forall \|x\|_2 < r$ ，即 $x = 0$ 為漸進穩定。

□

結論：

1. 從上面的證明可以看到，雖然間接定理的穩定性判斷不需用到 Lyapunov 函數，但是它的證明實際上還是要透過直接定理。亦即如果 $\text{Re}(\lambda(A)) < 0$ 的條件滿足，則必存在 Lyapunov 函數滿足 $V > 0$ ， $\dot{V} < 0$ ，因此非線性系統為漸進穩定。
2. 要判斷 $\dot{x} = f(x)$ 在平衡點 $x = 0$ 處之穩定度，吾人可先求 Jacobian 矩陣 $\partial f / \partial x$ 並在 $x = 0$ 處取值，即

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0}$$

若 $\text{Re}(\lambda_i(A)) < 0$ ，則 $x = 0$ 為漸進穩定；若有一 λ_i 使得 $\text{Re}(\lambda_i(A)) > 0$ ，則 $x = 0$ 為不穩定。若 $\text{Re}(\lambda_i(A)) \leq 0$ 則無法根據此定理判斷穩定性。

3. 如果條件 $\text{Re}(\lambda_i(A)) < 0$ 滿足，Lyapunov 間接定理雖然告訴我們，非線性系統在平衡點附近為漸進穩定，但是並沒有明確指出是在平衡點附近多大的範圍之內。此時 4.2 節的 Lyapunov 直接定理就可以派上用場了。既然已經知道非線性系統是漸進穩定，則必可找到 Lyapunov 函數 $V(x)$ ，而同時滿足 $V(x) > 0$ ， $\dot{V}(x) < 0$ 的 x 範圍即是保證漸進穩定的區域範圍。綜合言之，我們先用 Lyapunov 間接定理確認平衡點為穩定，再利用 Lyapunov 直接定理找出保證穩定的區域範圍。

例題 4.6.1

考慮單擺方程式[10]

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2 = -(g/l)\sin x_1 - (k/m)x_2\end{aligned}$$

此系統有兩個平衡點： $(x_1, x_2) = (0, 0)$ ， $(x_1, x_2) = (\pi, 0)$ ，分別考慮其穩定性如下：

(1)於平衡點 $(x_1, x_2) = (0, 0)$ 處之穩定性：

先取 Jacobian 矩陣

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(g/l)\cos x_1 & -k/m \end{bmatrix}$$

A 矩陣在 $x_1 = x_2 = 0$ 上取值得

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g/l & -k/m \end{bmatrix}$$

其特徵值為

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2m} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2 - \frac{4g}{l}}$$

因此對正值之 g, l, m, k 恆有

$$\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$$

故知原「非線性方程式」在原點處為漸進穩定。

(2)於平衡點 $(x_1, x_2) = (\pi, 0)$ 處之穩定性：

設新變數 $z_1 = x_1 - \pi$ ， $z_2 = x_2$ ，用以將平衡點移到原點，此時

$$\bar{A} = \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{z=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g/l & -k/m \end{bmatrix}$$

特徵值為

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2m} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2 + \frac{4g}{l}}$$

必有一根落入右半平面。故知原「非線性方程式」在 $(x_1, x_2) = (\pi, 0)$ 處為不穩定。

□

4.7 不變集合(invariant set)定理

漸進穩定通常要求 $V > 0$ ， $\dot{V} < 0$ ，但如果吾人所選之 V 只滿足 $V > 0$ ，而 $\dot{V} \leq 0$ 時，則只能判斷其為 Lyapunov 穩定，而無法確定是否為漸進穩定。不變集合定理的目的即在幫助吾人直接由 $\dot{V} \leq 0$ 去判斷該系統是否為漸進穩定。

不變集合(invariant set)的定義：集合 G 稱為不變，若任一從 G 出發之軌跡自始至終都停留在 G 內。考慮一非時變系統

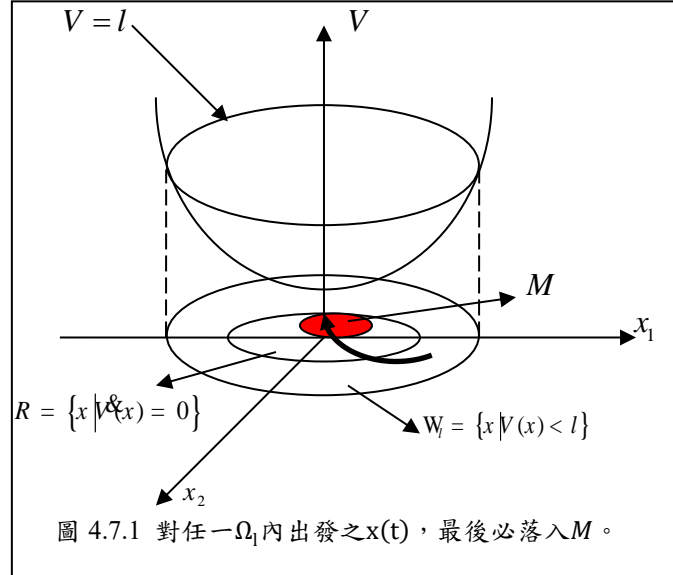
$$\dot{x} = f(x)$$

設 $V(x)$ 為一連續可微函數並滿足下列二條件：(1)區域 $\Omega_l = \{x | V(x) < l\}$ 為有界(bounded)；(2)

$\dot{V} \leq 0, \forall x \in \Omega_l$ 。並設集合 R 為

$$R = \{x | \dot{V}(x) = 0, x \in \Omega_l\}$$

而 M 為 R 內之最大不變集合。則不變集合定理(又稱 La Salle 定理[4])證明「對任一由 Ω_l 內出發之 $x(t)$ ，最後必落入 M ，當 $t \rightarrow \infty$ 」。證明分成二部分：(1) 證明 $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(x) = 0$ ；(2) 證明 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ 必落入一不變集合。



不變集合的種類有：(a)平衡點，(b)吸引區，(c)極限圓，(d)狀態空間軌跡(對於自主性系統)，(e)整個 R^n 狀態空間。其中對於(d)說明如下。考慮自主性系統

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = \sin x_1 \quad (4.7.1)$$

令 $\tau = t - t_1 \rightarrow d\tau = dt$ 則原方程式不變：

$$\frac{dx_1}{d\tau} = x_2, \frac{dx_2}{d\tau} = \sin x_1 \quad (4.7.2)$$

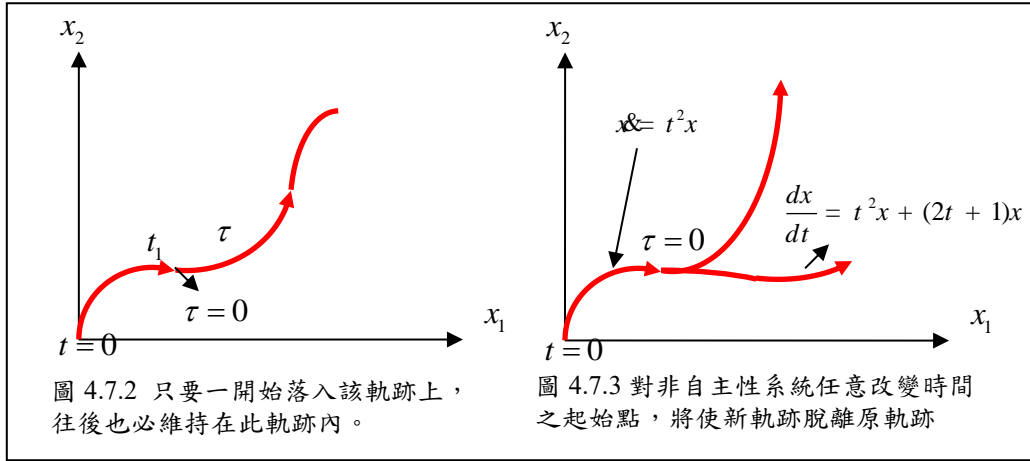
$\tau = 0$ 時，對應到原 $t = t_1$ 之點，由於微分方程式不變，故由 τ 出發之軌跡仍在原來之路徑上，只是起點不同而已。換句話說，只要一開始落入該軌跡上，往後也必維持在此軌跡→不變集合。反之，非自主性系統的軌跡不是不變集合，例如：

$$\dot{x} = t^2 x \quad (4.7.3)$$

現若將時間軸平移到 $t = 1$ ，即令 $\tau = t - 1, t \geq 1$ ，則原方程式變成

$$\frac{dx}{d\tau} = (\tau + 1)^2 x \Rightarrow \frac{dx}{d\tau} = \tau^2 x + [(2\tau + 1)x] \quad (4.7.4)$$

與原方程式比較，新的方程式多了右邊中括號之項，故軌跡已和原來相異，因此對非自主性系統而言，任意改變時間之起始點，將使新軌跡脫離原有軌跡，如圖 4.7.3 所示。因此非自主性系統的軌跡不為不變集合。



不變集合定理說明當 $\dot{V}(x) \leq 0$ 時， $x(t)$ 必趨近於 $\dot{V}(x) = 0$ 之不變集合之內，當 $t \rightarrow \infty$ 時。因此如果吾人可以進一步證實平衡點 $x = 0$ 是唯一可能之不變集合，即相當於證明了該系統為漸進穩定。以下定理即為不變集合定理的應用

Lasalle 定理：由 $\dot{V}(x) \leq 0$ 判定漸進穩定

若 $V(x)$ 滿足(1) $V(x) > 0$ ，(2) $\dot{V}(x) \leq 0$ ，(3) 在集合 $\{x | \dot{V}(x) = 0\}$ 內之不變集合僅含平衡點 $x = 0$ ，則 $x = 0$ 為局部漸進穩定。

□

例題 4.7.1

考慮非線性系統

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -g(x_1) - h(x_2)\end{aligned}$$

其中 g, h 滿足

$$\begin{aligned}g(0) &= 0, yg(y) > 0, \forall y \neq 0, y \in (-a, a) \\ h(0) &= 0, yh(y) > 0, \forall y \neq 0, y \in (-a, a)\end{aligned}$$

將 $V(x)$ 選為總能量的型式

$$V(x) = \int_0^{x_1} g(y)dy + \frac{1}{2}x_2^2 \quad (4.7.5)$$

首先，此 $V(x)$ 滿足 $V(x) > 0$ 的條件；其次看 $\dot{V}(x)$ ：

$$\dot{V}(x) = g(x_1)\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = g(x_1)x_2 + x_2[-g(x_1) - h(x_2)] = -x_2h(x_2) \leq 0 \quad (4.7.6)$$

要判定該系統是否為漸近穩定，吾人須要討論是否原點為唯一可能的不變集合，亦即要判定是否除了原點之外，還有其他的 x 會使得 $\dot{V}(x) = 0$ 。類似的觀念，其實在吾人前面討論漸近穩定時，已經用過了。

首先，需求出集合 $\{x | \dot{V}(x) = 0\}$ 之範圍，然後再尋求此集合內之不變子集合。

$$\dot{V}(x) = 0 \Rightarrow x_2h(x_2) = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \text{ (由 } h(x) \text{ 之定義)} \quad (4.7.7)$$

故知 $\{x | \dot{V}(x) = 0\} = \{x | x_2 = 0\} = M$ ，設 $x(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T$ 自始至終都在 R 內，亦即

$$x_2(t) \equiv 0, \forall t \geq 0 \Rightarrow \dot{x}_1(t) \equiv 0, \forall t \geq 0 \quad (\because \dot{x}_1 = x_2) \Rightarrow x_1(t) \equiv C, \forall t \geq 0 \quad (4.7.8)$$

在另一方面，

$$\begin{aligned}x_2(t) &\equiv 0, \forall t \geq 0 \\ \Rightarrow \dot{x}_2(t) &\equiv 0, \forall t \geq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow -g(x_1) - h(x_2) \equiv 0 \quad (\because \dot{x}_2 = -g(x_1) - h(x_2)) \\
&\Rightarrow -g(C) - h(0) \equiv 0 \quad (\because \dot{x}_2 \equiv 0, x_1 \equiv C) \\
&\Rightarrow -g(C) = 0 \quad (\because h(0) = 0) \\
&\Rightarrow C = 0 \quad (\because g(0) = 0, \text{ 且 } yg(y) > 0, y \neq 0) \\
&\Rightarrow x_1 \equiv 0, x_2 \equiv 0
\end{aligned}$$

故知 $x = [x_1 x_2]^T = [00]^T$ 是 R 內唯一之不變集合，則由 Lasalle 定理知 $x = 0$ 為漸進穩定

□

4.8 Lyapunov 函數在性能分析上的應用

對於漸進穩定系統而言， $V(x) \rightarrow 0$ 即是 $x \rightarrow 0$ ，故 $V(x) \rightarrow 0$ 之速度可做為系統暫態響應 (transient response) 快慢的指標。如圖 4.8.1 所示， V 值愈小，其等高線涵蓋範圍離平衡點 (原點) 愈近。但是不同的 Lyapunov 函數，其值收斂到零的速度可能不同。下面我們要提出一個性能指標來評估 Lyapunov 函數 V 的收斂速度。假設某一 Lyapunov 函數已滿足 $V > 0$ 且 $\dot{V} < 0$ 之漸進穩定條件，並定義新函數

$$\eta(x) = -\frac{\dot{V}}{V} > 0, \forall x \neq 0 \quad (4.8.1)$$

注意 $\eta(x)$ 的值恆為正，並令其最小值為

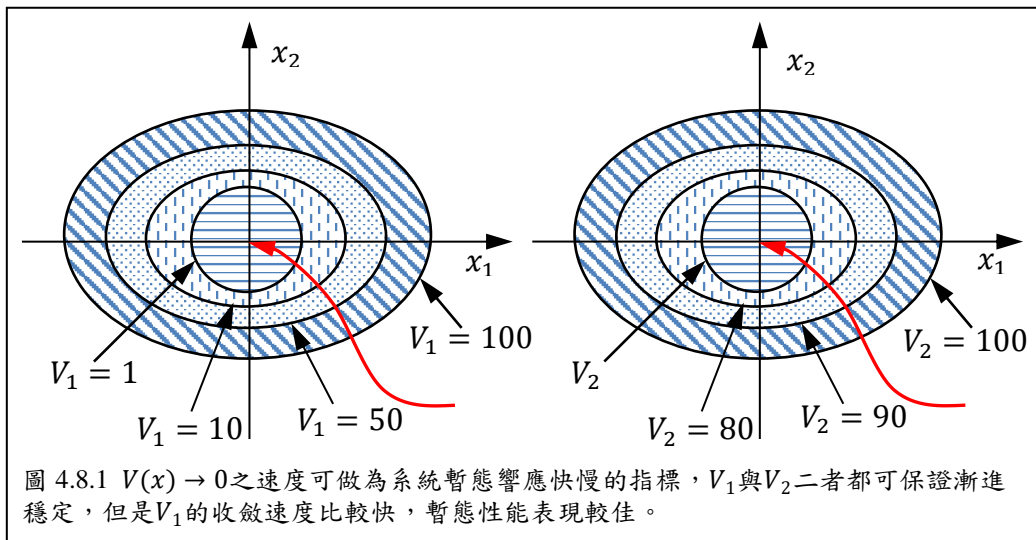
$$\eta_{\min} = \min_x \left[-\frac{\dot{V}(x)}{V(x)} \right]$$

因為 $\eta(x) \geq \eta_{\min}$ ，故有

$$-\frac{\dot{V}}{V} \geq \eta_{\min} \Rightarrow \dot{V} \leq -\eta_{\min} V$$

$$\Rightarrow V(x) \leq V(x_0) e^{-\eta_{\min}(t-t_0)} = V(x_0) \exp \left[\frac{-(t-t_0)}{1/\eta_{\min}} \right]$$

故 η_{\min} 代表系統最小之收斂速度， $1/\eta_{\min}$ 則代表到達穩態之時間常數。



對於非時變系統 (time-invariant)， η_{\min} 可容易求得。試考慮：

$$\dot{x} = Ax$$

其中 A 之所有特徵值為負，因此存在 $P > 0$ ， $Q > 0$ 滿足

$$V(x) = x^T Px > 0, \dot{V}(x) = -x^T Qx < 0, A^T P + PA = -Q$$

此時

$$\eta_{\min} = \min_x \left[-\frac{\dot{V}(x)}{V(x)} \right] = \min_x \left[\frac{x^T Qx}{x^T Px} \right] = \min_{x^T Px=1} [x^T Qx] \quad (4.8.2)$$

此相當於有限制(constraint)條件的最小值問題，可引入 Lagrange 乘積因子 λ ，將其化成沒有限制條件的最佳化問題：

$$J = x^T Qx + \lambda(1 - x^T Px) \Rightarrow \frac{\partial J}{\partial x} = \frac{\partial J}{\partial \lambda} = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial x} = 0 \Rightarrow (Q - \lambda P)x = 0 \Rightarrow Qx = \lambda Px \Rightarrow P^{-1}Qx = \lambda x \quad (4.8.3)$$

將(4.8.3)式代入 J 中，得

$$J = x^T (\lambda Px) + \lambda(1 - x^T Px) = \lambda \Rightarrow J_{\min} = \lambda_{\min} \quad (4.8.4)$$

而 λ 值由(4.8.4)知，即為 $P^{-1}Q$ 之特徵值，故得

$$J_{\min} = \eta_{\min} = \lambda_{\min}(P^{-1}Q) \quad (4.8.5)$$

例題 4.8.1

試考慮

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

求此系統之 Lyapunov 函數 V ，並估算由 $V(x) = 150$ 降到 $V(x) = 0.06$ 所需之時間[8,9]。

解答：

令 $Q = I$ ，則 P 必須滿足 $A^T P + PA = -Q = -I$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

求解得

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

此時

$$V(x) = x^T Px = \frac{1}{2}(3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2) > 0, \dot{V}(x) = -x^T Qx = -x^T x = -(x_1^2 + x_2^2) < 0$$

收斂速率 η 為

$$\eta = -\frac{\dot{V}}{V} = \frac{2(x_1^2 + x_2^2)}{3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2}$$

η_{\min} 之值為 $P^{-1}Q$ 之最小特徵值，亦即在於求

$$|P^{-1}Q - \lambda I| = |P^{-1} - \lambda I| = |I - \lambda P| = 0, (\because Q = I)$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 - 3\lambda/2 & -\lambda/2 \\ -\lambda/2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1.447, \lambda_2 = 0.553$$

故知 $\lambda_{\min} = \lambda_2 = 0.553$ 。而在另一方面，

$$V(x) \leq V(x_0)e^{-\eta_{\min}(t-t_0)} \Rightarrow -\frac{1}{\eta_{\min}} \ln \frac{V(x)}{V(x_0)} \geq t - t_0$$

$$\Rightarrow t - t_0 \leq -\frac{1}{0.553} \ln \frac{0.06}{150} = 14.1$$

亦即在 14.1 秒內 $V(x)$ 將由 150 降至 0.06。

□

例題 4.8.2

求下列非線性系統之收斂速度

$$\dot{x}_1 = x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) - x_2, \dot{x}_2 = x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) \quad (4.8.6)$$

若選 Lyapunov 函數為

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2 \quad (4.8.7)$$

則 \dot{V} 可求出為

$$\dot{V}(x) = 2(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 2V(V - 1) \quad (4.8.8)$$

移項成分離變數的形式

$$\frac{dV}{V(1-V)} = -2dt$$

則 V 的解可表成時間的函數為

$$V(t) = \frac{\alpha e^{-2t}}{1 + \alpha e^{-2t}}, \alpha = \frac{V(0)}{1 - V(0)} \quad (4.8.9)$$

若 $V(0) = \|x(0)\|^2 < 1$ ，即軌跡從單位圓內出發，則 $\alpha > 0$ ，此時可得

$$V(t) = \frac{\alpha e^{-2t}}{1 + \alpha e^{-2t}} < \alpha e^{-2t} \quad (4.8.10)$$

上式中的 2 即代表收斂速度(或說時間常數為 1/2 秒)。反之若 $V(0) > 1$ ，則由 $\dot{V} = 2V(V - 1)$ 知 $\dot{V} > 0$ ，此時 V 為遞增而非遞減，即無法保證系統的穩定性。由 (4.8.7) 式知 $\dot{V} < 0$ 的條件為 $0 < V < 1$ ，所以 (4.8.6) 式的 Lyapunov 函數可保證 (4.8.6) 式的系統為收斂的區域為

$$0 < x_1^2 + x_2^2 < 1$$

在此區域內，系統遵循 e^{-2t} 的收斂趨勢，亦即收斂速度為 2。

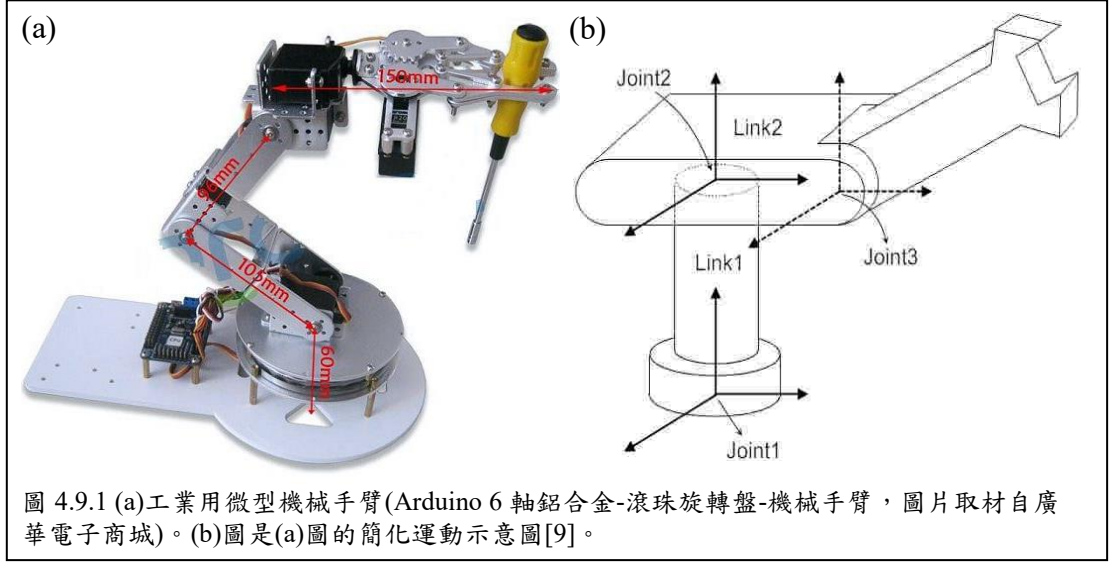
4.9 利用 Lyapunov 定理設計控制律

不管採用何種方法設計非線性控制器，都必須確保受控後的系統至少為 Lyapunov 穩定，也就是必須保證有合格的 Lyapunov 函數的存在。依據選取 Lyapunov 函數先後順序的不同，設計非線性控制器有兩種不同的方式：

- (1) 先選定某種控制律，然後證實存在某一個 Lyapunov 函數 V ，使得在閉迴路的情形下， $V > 0$ ， $\dot{V} \leq 0$ 。
- (2) 先選定 Lyapunov 函數 V 之型式，然後尋求控制律 u 使得 V 滿足 $V > 0$ ， $\dot{V} \leq 0$ (或 $\dot{V} < 0$)，此種方法又稱為 Lyapunov-based control design (基於 Lyapunov 函數的控制設計)。

4.9.1 先選控制律

主要用於指定控制律型式的場合中。例如 PID 控制器，因其增益容易調整，經常被工業界指定採用，在此情形下，吾人需確定確實存在 Lyapunov 函數與其對應，以保證受控體之穩定。



如圖 4.9.1 為一工業用機械人，其運動方程式可表成如下的通式：

$$H(x)\ddot{x} + B(x, \dot{x}) + g(x) = \tau \quad (4.9.1)$$

其中 $H(x)$ 為慣性矩陣， $B(x, \dot{x})$ 為科氏力與離心力， $g(x)$ 為重力，而 τ 為控制力。其中吾人將控制力取成 PD 之型式，即

$$\tau = -k_d \dot{x} - k_p x + g(x), \quad k_p > 0, k_d > 0 \quad (4.9.2)$$

(4.9.2)式右邊最後一項主要在抵抗重力之效應。今選擇 Lyapunov 函數如下：

$$V = \frac{1}{2}(\dot{x}^T H(x) \dot{x} + x^T k_p x) > 0 \quad (4.9.3)$$

在求 \dot{V} 時，注意動能之變化率，即為輸入功率 $\dot{x}^T F$ (此動能之變化不包含由重力所引起者)，故有

$$\dot{V} = \dot{x}^T (\tau - g) + \dot{x}^T k_p x \quad (4.9.4)$$

將(4.9.2)式之 τ 代入得

$$\dot{V} = -\dot{x}^T k_d \dot{x} < 0 \quad (4.9.5)$$

故知使用 PD 控制器確實可使此機器人穩定。以上結果顯示，對於非線性系統，不一定要採用非線性控制器，線性的 PID 控制器可能就已夠用，只要能證明有對應的 Lyapunov 函數的存在即可。在一些場合，吾人為了驗證某些控制器如適應控制(adaptive control)、 H_∞ 控制之功能，也經常採用類似上面的方法，即先指定控制器後，再找找看有否存在 Lyapunov 函數。

4.9.2 先選 Lyapunov 函數

已知 Lyapunov 函數 V ，再選擇控制律 u 。試考慮下列二階非線性方程式

$$\ddot{x} + b(\dot{x}) + c(x) = 0 \quad (4.9.6)$$

其中 b, c 均為連續函數，且滿足

$$\dot{x}b(\dot{x}) > 0, \forall \dot{x} \neq 0 \quad (4.9.7a)$$

$$xc(x) > 0, \forall x \neq 0 \quad (4.9.7b)$$

則存在 Lyapunov 函數

$$V = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \int_0^x c(y)dy > 0 \quad (\forall x, \dot{x} \neq 0) \quad (4.9.8)$$

且

$$\dot{V} = \dot{x}\ddot{x} + c(x)\dot{x} = -\dot{x}b(\dot{x}) - \dot{x}c(x) + c(x)\dot{x} = -\dot{x}b(\dot{x}) \leq 0 \quad (4.9.10)$$

先記住上面之結果，吾人可定出下列之控制策略：試設計控制律 u 使穩定下列系統，

$$\ddot{x} - \dot{x}^3 + x^2 = u \quad (4.9.11)$$

若選

$$u = u_1(\dot{x}) + u_2(x) \quad (4.9.12)$$

代入(4.9.11)式合併得

$$\ddot{x} - (\dot{x}^3 + u_1(\dot{x})) + x^2 - u_2(x) = 0 \quad (4.9.13)$$

與(4.9.6)式比較得

$$b(\dot{x}) = -(\dot{x}^3 + u_1(\dot{x})), \quad c(x) = x^2 - u_2(x)$$

故(4.9.7a)、(4.9.7b)之條件化成

$$\dot{x}b(\dot{x}) > 0 \rightarrow \dot{x}(\dot{x}^3 + u_1(\dot{x})) < 0 \quad (4.9.14a)$$

$$xc(x) > 0 \rightarrow x(x^2 + u_2(x)) > 0 \quad (4.9.14b)$$

(4.9.14a)、(4.9.14b)即為吾人所需之控制策略，其所對應之 Lyapunov 函數 V 為

$$V = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \int_0^x c(y)dy = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \int_0^x (y^2 - u_2(y))dy \quad (4.9.15)$$

且此 V 必滿足

$$V > 0, \quad \dot{V} \leq 0$$

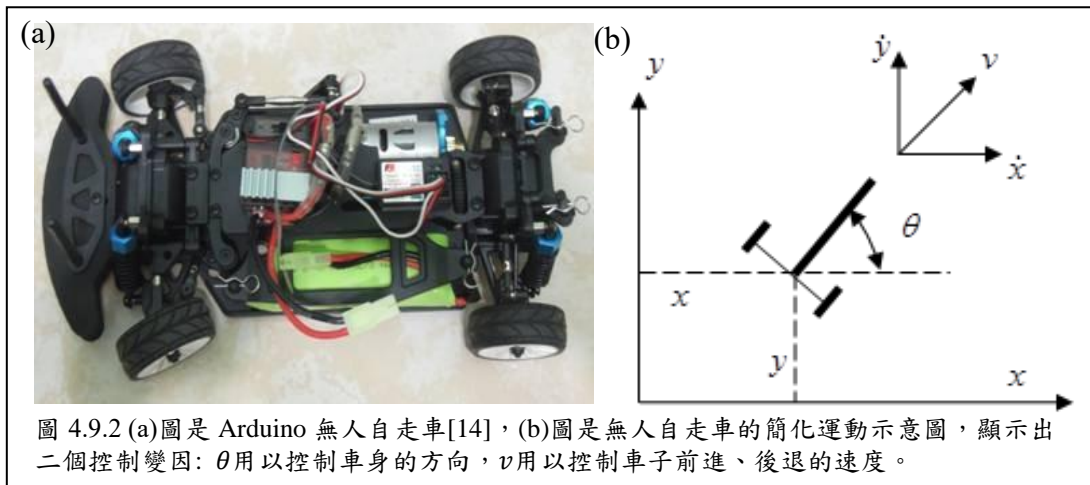
以上所述的第二種設計法，是先選定了 Lyapunov 函數 V 的形式(4.9.15)，然後再適當設計控制律 u_1 和 u_2 使得 $\dot{V} \leq 0$ 的條件能夠滿足。在下一個例題中，穩們將以第二種設計法來為無人自走車設計控制律。

例題 4.9.1:

本例題將為無人自走車(mobile cart, mobile robot)設計自動倒車控制，方法是先選定 Lyapunov 函數 V ，然後再決定控制律使得 $\dot{V} < 0$ 。如圖 4.9.2b 所示，無人自走車的運動方程式為

$$\dot{x} = v\cos\theta, \dot{y} = v\sin\theta, \dot{\theta} = \omega \quad (4.9.16)$$

其中 θ 為車身與 x 軸方向的夾角(由方向盤控制)， v 為車前進速度(由油門控制)， ω 為車身的旋轉角速率。自動倒車控制的目的是要讓車子的中心點停在原點(0,0)處，且車身線與 x 軸重合($\theta = 0$)。圖 4.9.2a 顯示一款實驗室測試用的無人自走車，其中的車身轉向機構是由一伺服馬達所驅動，而車身的前進與後退則是由另一組伺服馬達所驅動。



無人自走車仿照真實自動倒車系統(參考圖 4.9.3)，配備有超音波感測器用以感測四周的障礙物，而紅外線感測器則用以感測車身是否與停車格線平行。當感測器得知有障礙物的存在，或是車身未與停車格線平行時，會將所量到的訊號傳到微處理器，計算出車身方向角的修正值，再將此修正值傳到伺服馬達驅動車身轉向機構。車身方向修正後，感測器會傳回修正後的結果，如果還有誤差，則再進一步重複上面的修正動作。



一般的自動倒車系統均採用模糊控制器，根據經驗法則來設計模糊邏輯。這裡要介紹的是基於 Lyapunov 函數的控制設計。依據所要達到的控制目標： $(x, y, \theta) \rightarrow (0, 0, 0)$ ，我們可以選定 Lyapunov 函數為

$$V_1 = (x^2 + y^2 + \theta^2)/2 > 0 \quad (4.9.17)$$

這一函數可以確保 $V_1 \rightarrow 0$ 時，必有 $(x, y, \theta) \rightarrow (0, 0, 0)$ 。利用(4.9.16)式， V_1 的時間變化率可求得為

$$\dot{V}_1 = x\dot{x} + y\dot{y} + \theta\dot{\theta} = (x\cos\theta + y\sin\theta)v + \theta\omega$$

為了保證 $\dot{V}_1 \leq 0$ ，吾人可選擇控制律如下

$$v = -K_1(x\cos\theta + y\sin\theta), \omega = -K_2\theta, K_1 > 0, K_2 > 0 \quad (4.9.18)$$

代入 \dot{V}_1 中得

$$\dot{V}_1 = -K_1(x\cos\theta + y\sin\theta)^2 - K_2\theta^2 \leq 0 \quad (4.9.19)$$

由 LaSalle 定理知(4.9.18)式之控制使系統進入下面的不變集合中： $x = \theta = 0$ ，但 y 可為任意值。亦即控制律(4.9.18)只能讓自走車停在 y 軸上，且車軸與 x 軸平行，而無法使其停在原點上。

與以上控制律相對的，我們可找到另一控制律使車最後漸進停在 x 軸上。茲取如下的 Lyapunov 函數：

$$V_2 = (x^2 + y^2 + \bar{\theta}^2)/2 > 0, \bar{\theta} = \theta - \sigma\pi/2, \sigma = \pm 1 \quad (4.9.20)$$

同理，使得 $\dot{V}_2 \leq 0$ 的控制律可選成

$$v = -K_1(x\cos\theta + y\sin\theta), \omega = -K_2\bar{\theta} \quad (4.9.21)$$

此時系統經 u 的運作後，進入下列之不變集合中：

$$x = \text{任意}, y = 0, \theta = \sigma\pi/2 \quad (4.9.22)$$

亦即最後車子停在 x 軸上，且車身和 y 軸平行。比較(4.9.18)和(4.9.21)二式之控制律可知：(4.9.18)式可降低 x 方向的誤差，(4.9.21)式可降低 y 方向的誤差。因此若能將(4.9.18)和(4.9.21)二式合併切換使用，將可使 x 方向和 y 方向的誤差(即和原點的距離)同時減小。二式合併的結果可得

$$v = -K_1(x\cos\theta + y\sin\theta), \omega = -K_2\theta + K_2\sigma(x, y)\pi/2 \quad (4.9.23)$$

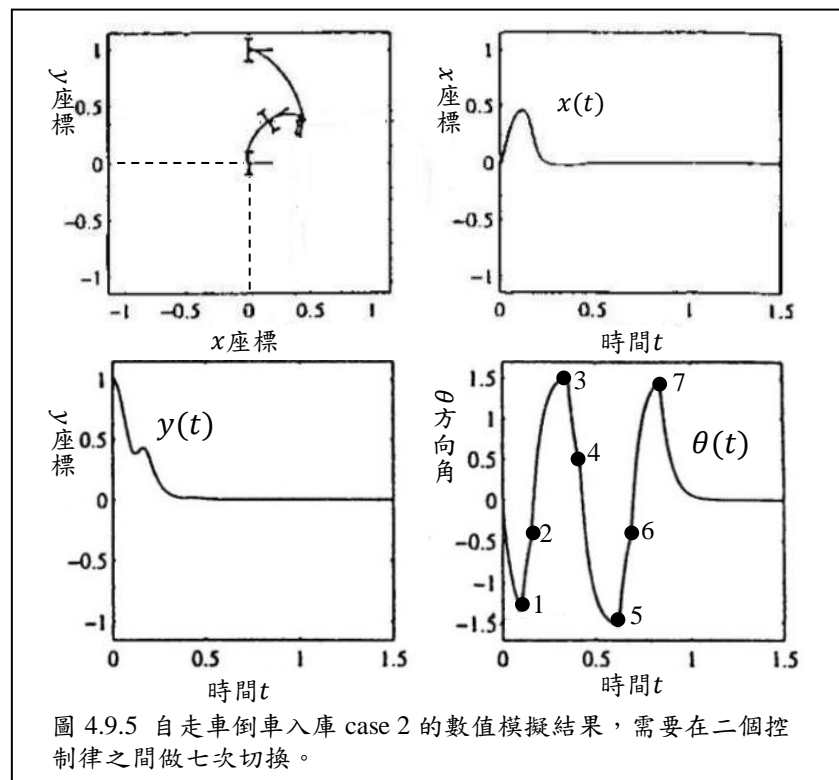
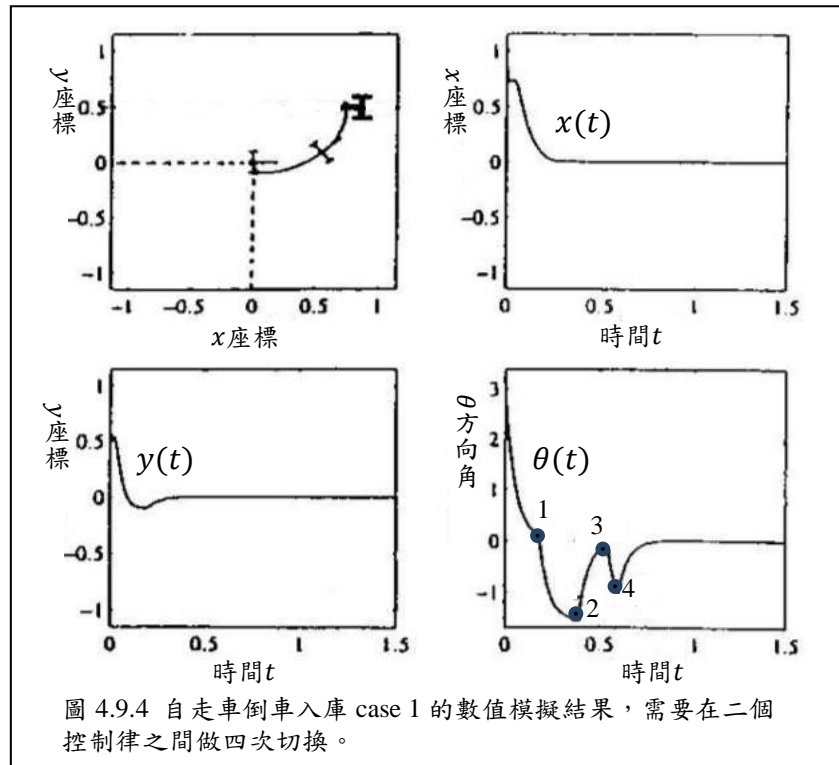
其中 $\sigma(x, y) = \sigma_1(x, y)\sigma_2(x, y, x_s, y_s)$ 且

$$\sigma_1 = \begin{cases} 0, & \sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon \\ 1, & \sqrt{x^2 + y^2} \geq \varepsilon \end{cases}, \quad \sigma_2 = \begin{cases} 0, & |x| \geq |y| \\ \text{sgn}(x_s)\text{sgn}(y_s), & |x| < |y| \end{cases}$$

這一控制策略包含以下特點：

- (1) 車子與原點的距離大於 ε 時，二種策略混合使用： $|x| \geq |y|$ 時，採用(4.9.18)式， $|x| < |y|$ 時，採用(4.9.21)式。
- (2) 車子與原點的距離小於 ε 時，只採用(4.9.18)式的策略，因(4.9.18)式可確保車身最後與 x 軸重合，且車的 x 座標為0，雖 y 座標不為0，但 $|y| < \varepsilon$ 的條件一定滿足。
- (3) 此切換法不能確保漸進穩定，但可以使 $\theta \rightarrow 0$ ， $x \rightarrow 0$ ， $y \rightarrow$ 任意微小的值。

數值模擬結果如下圖所示：



數值模擬結果：

- (A) Case 1: $x_0 = \sqrt{3}/2$, $y_0 = 0.5$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $\theta_0 = \pi$ 。數值結果如右圖 4.9.4 所示，經過 4 次的切換後，車子與原點的距離已小於 10^{-4} 。由 θ 對 t 的響應可以發現，當控制律切換時，會造成 θ 不平滑的變化。
- (B) Case 2: $x_0 = 0$, $y = 1$; $\varepsilon = 10^{-4}$, $\theta_0 = 0$ 。此時共使用 7 次切換，如圖 4.9.5 所示。這裡所提的控制律切換法，其優點是：(a) 結構簡單，不需要很複雜的控制學理。(b) 切換的

次數很少，不像滑動模式控制(第七章)，需要高頻率的切換動作，因此實現也很容易。它唯一的缺點是在學理上，無法達到 $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0$ ，當 $t \rightarrow \infty$ (即漸進穩定)，而只能控制在 ε 的精確度之內，即 Lyapunov 穩定。

4.10 學習評量

4.10.1 考慮一階非線性系統

$$\dot{x} = ax^p + g(x)$$

其中 p 是正整數，而 $g(x)$ 滿足 $|g(x)| \leq k|x|^{p+1}$ 。證明

- (a) p 是奇數，且 $a < 0$ ，則此系統為漸進穩定。
- (b) p 是奇數，且 $a > 0$ ，則為不穩定。
- (c) p 是偶數，且 $a \neq 0$ ，則為不穩定。

4.10.2 取用 $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ ，分析下列系統在原點處之穩定性

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(k^2 - x_1^2 - x_2^2) + x_2(x_1^2 + x_2^2 + K^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1(k^2 + x_1^2 + x_2^2) + x_2(K^2 - x_1^2 - x_2^2)\end{aligned}$$

分成 $K = 0$ 和 $K \neq 0$ 兩種情形討論。

4.10.3 利用可變梯度法找到一 Lyapunov 函數 $V(x)$ ，使得下列系統在原點處為漸近穩定

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -(x_1 + x_2) - \sin(x_1 + x_2)$$

4.10.4 考慮一個二階系統

$$\dot{x}_1 = -\frac{6x_1}{u^2} + 2x_2, \dot{x}_2 = \frac{-2(x_1 + x_2)}{u^2}$$

其中 $u = 1 + x_1^2$ ，試證明

- (a) 若取 $V(x) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2$ ，則有 $V(x) > 0, \dot{V}(x) < 0, \forall x \in R^2 - \{0\}$ 。
- (b) 證明此系統不為全域漸近穩定。

4.10.5 考慮下列系統

$$\dot{x}_1 = (x_1x_2 - 1)x_1^3 + (x_1x_2 - 1 + x_2^2)x_1, \dot{x}_2 = -x_2$$

- (a) 證明 $x = 0$ 是唯一的平衡點。
- (b) 利用線性化證明 $x = 0$ 是漸進穩定
- (c) 證明 $\Gamma = \{x \in R^2 | x_1x_2 \geq 2\}$ 不變集合。
- (d) $x = 0$ 是否為全域漸進穩定？

4.10.6 試證明下列之非線性系統在原點處為不穩定

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2, \dot{x}_2 = x_1^6 - x_2^3$$

(提示：先證明 $\Gamma = \{0 \leq x_1 \leq 1\} \cap \{x_2 \geq x_3\} \cap \{x_2 \leq x_1^2\}$ 是系統的一個不變集合，並探討系統在 Γ 內之軌跡行為)。

4.10.7 圖 4.10.1 為二桿之機械手臂，假設桿的質量均集中在桿的末端，二桿所受到的作用力矩分別為

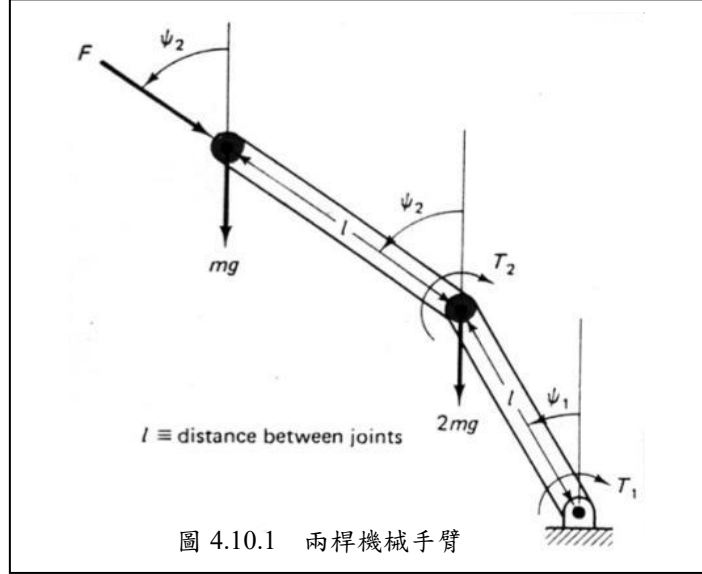
$$T_1 = r\psi_1 + m_1\dot{\psi}_1, T_2 = r(\psi_2 - \psi_1) + m_2(\dot{\psi}_2 - \dot{\psi}_1)$$

其中 r, m_1, m_2 均為常數。此外有一軸向力作用在第一桿上。

(a) 導出此系統之運動方程式。

(b) 將方程式對原點 $(\psi_1, \psi_2) = (0, 0)$ 做線性化，而得線性化的方程式 $\dot{X} = AX$ ，其中 $X = [\Delta\psi_1 \Delta\psi_2]^T$ ， $\Delta\psi_1, \Delta\psi_2$ 為相對於原點之微小擾動。

(c) 由 Lyapunov 第一定理，判定原非線性系統在原點處之穩定性。



4.10.8 分析下列方程式

$$\dot{x}_1 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

$$\dot{x}_2 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

在原點處之穩定性。(利用 Lyapunov 函數 $V(x) = ax_1^2 + bx_2^2$)

4.10.9 利用可變梯度法求下列非線性系統的 Lyapunov 函數 V

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^2x_2, \dot{x}_2 = -x_2$$

假設 V 的梯度可表成

$$\nabla V = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

不同的係數 a_{ij} 可得到不同的 Lyapunov 函數 V 。考慮下列二種不同的 a_{ij} 選擇，分別求得對應的 Lyapunov 函數 V ，並求出其可確保穩定的區域範圍：

(a) $a_{11} = 1, a_{12} = a_{21} = 0$ 。

$$(b) a_{11} = \frac{2}{(1-x_1x_2)^2}, a_{12} = \frac{-x_1^2}{(1-x_1x_2)^2}, a_{21} = \frac{x_1^2}{(1-x_1x_2)^2}$$

4.10.10 考慮求下列非線性系統

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{1+x_3} - x_1$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - 2x_2$$

$$\dot{x}_3 = x_2 - 3x_3$$

首先證明在第一象限內，該系統具有一平衡點。其次探討此一平衡點的穩定性。(提示:求得系統對此平衡點的線性化展開，並利用 Lyapunov 間接穩定定理)

4.10.11 考慮下列非線性系統

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + g(x_3) \\ \dot{x}_2 &= -g(x_3) \\ \dot{x}_3 &= -ax_1 + bx_2 - cg(x_3)\end{aligned}$$

其中 a, b, c 為正常數且 $g(x)$ 滿足

$$g(0) = 0, yg(y) > 0, \forall y, 0 < |y| < k, k > 0$$

(a) 試證明 $x = 0$ 為一平衡點。

(b) 採用下列之 Lyapunov 函數證明 $x = 0$ 為漸進穩定，

$$V(x) = \frac{a}{2}x_1^2 + \frac{b}{2}x_2^2 + \int_0^{x_3} g(y)dy$$

(c) 若設 $yg(y) > 0, \forall y \in \mathbb{R} - \{0\}$ ，說明 $x = 0$ 是否為全域漸進穩定。

4.10.12 考慮下列非線性系統

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 - (2x_2 + x_1)(1 - x_2^2)\end{aligned}$$


(a) 採用 $V(x) = 5x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$ ，證明 $x = 0$ 為漸進穩定。

(b) 設 $S = \{x \in \mathbb{R}^2 | V(x) \leq 5\} \cap \{x \in \mathbb{R}^2 | |x_2| \leq 1\}$ ，試說明 S 為一吸引區 (region of attraction)。

4.10.13 試由 Lyapunov 定理證明羅斯穩定準則 (Routh-Hurwitz criterion)。(可參考 C.T. Chen, "Linear System Theory and Design", Page. 395~340, 417~419)

本章文獻與註解

- [1] 亞歷山大·李亞普諾夫 (Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, 1857—1918) 是 [俄羅斯應用數學](#) 家和 [物理學家](#)。他的名字羅馬字化後，現有多種不同的寫法: Lyapunov、Ljapunov、Liapunov 和 Ljapunow，但以第一種寫法最常用。李亞普諾夫於 1882 年畢業於 [莫斯科大學](#)，他的博士畢業論文是《運動穩定性的一般問題》(The general Problem of Motion Stability)。李亞普諾夫以他在動態系統的穩定性方面做出的貢獻而聞名，這一穩定性如今被命名為 [李雅普諾夫穩定性](#)。李雅普諾夫在很多個領域都有所貢獻，包含了 [微分方程](#)，位勢論，動力系統和機率論。除了運動系統的穩定性分析之外，在數學領域上他致力於解決拉普拉斯方程式的邊界值問題。在機率論方面，他概括了切比雪夫和馬爾可夫的作品，並證明了中心極限定理的一般條件，這一成果超越了他的前輩。與很多數學家一樣，李雅普諾夫喜歡獨自工作，並且只跟幾個同事和家人聯絡。他通常工作到很晚，工作四到五個小時甚至整夜(取材自維基線上百科)。

	出生	1857 年 6 月 6 日 俄羅斯帝國雅羅斯拉夫爾
	逝世	1918 年 11 月 3 日 (61 歲) 烏克蘭人民共和國敖德薩
	研究領域	應用數學 、 物理學
	任職於	聖彼得堡大學 、 俄羅斯科學院 、 哈爾科夫大學
	母校	聖彼得堡大學
	博士導師	巴夫尼提·列波維奇·切比雪夫
	著名成就	李亞普諾夫函數

- [2] A. M. Lyapunov, The general Problem of Motion Stability, 1892, in Russian. Translated in French, Ann. Fac. Sci. Toulouse 9, pp. 203-474, 1907. Reprinted in Ann. Math. Study No. 17, Princeton University Press, 1949。此篇即為李亞普諾夫的博士論文，1892 年以俄文發表，1907 年被翻譯為法文。直到 1949 年，Lyapunov 穩定定理才被翻譯為英文，廣為世人所知。
- [3] 4.6 節所提到的間接穩定定理(線性化穩定定理)，有些教科書稱之為 Lyapunov 第一定理，而 4.2 節的直接穩定定理則被稱為 Lyapunov 第二定理。在 Lyapunov 的原始著作中，線性化穩定定理只是被當成直接穩定定理的一個應用範例。如今在混沌分析中經常使用到的李氏指數(Lyapunov Exponent)即是源自 Lyapunov 的線性化穩定定理。
- [4] J. La Salle, S. Lefschetz, Stability by Lyapunov's Direct Method, Academic Press, 1961。4.7 節所介紹的不變集合定理又稱為 La Salle 定理，在 La Salle 本人所寫的這本專書中有詳細的討論。書名標題中的 Lyapunov's Direct Method 就是本章 4.2 節所介紹的 Lyapunov 直接穩定定理。
- [5] R. E. Kalman, J. E. Bertram, Control System Analysis and Design via the Second Method of Lyapunov, Part I: Continuous-Time Systems, Journal of Basic Engineering, pp. 394-400, 1960。這篇論文的作者 Kalman 是近代控制理論的創立者之一，Kalman 藉由此文將源自俄國數學界的 Lyapunov 定理引入歐美學術界。此文標題中的 Second Method of Lyapunov，指的就是 4.2 節的 Lyapunov 直接穩定定理。
- [6] W. Hahn, Theory and Application of Lyapunov's Direct Method, Prentice Hall, 1963。這是繼 Kalman 於 1960 年的專文介紹後，第一本介紹 Lyapunov 穩定性的專書。
- [7] T. Yoshizawa, Stability Theory by Lyapunov's Second Method, The Mathematical Society of Japan, 1966。這本書也是早期介紹 Lyapunov 穩定性的著作之一，Yoshizawa 藉由此書將 Lyapunov 定理引入日本學術界。
- [8] K. Ogata, Modern Control Engineering, Prentice Hall, 1970。本章中的例題 4.3.1、例題 4.3.4、例題 4.8.1 取材自該書。
- [9] J. J. E. Slotine, W. Li, Applied Nonlinear Control, Pearson, 2005。本章中的圖 4.9.1、例題 4.4.1、例題 4.8.1 取材自該書。
- [10] H. K. Khalil, Nonlinear Systems, Prentice Hall, 1996。本章中的例題 4.2.5、例題 4.4.2、例

題 4.6.1，以及 4.2 節 Lyapunov 直接穩定定理的證明均取材自該書。

- [11] G. H. Golub, C. F. Van Loan, Matrix Computation, The John Hopkins University Press, Baltimore, 1983。幾個關於 Lyapunov 方程式 $PA + A^T P + Q = 0$ 的數值解法可參閱該書，其中最常見的解法是利用 Bartels-Stewart 演算法，該法的主要步驟是對 A 矩陣進行 Schur 分解(Schur decomposition): $A = QUQ^{-1}$ ，其中 Q 是正則矩陣(unitary matrix)， U 是上對角陣，它的對角線元素即是 A 的特徵值。因此可以說求解 Lyapunov 方程式的數值計算量與求矩陣特徵值的計算量是相當的。另一個求解 Lyapunov 方程式的方法是透過 Sylvester 方程式 $PA + BP + C = 0$ 的求解。可以看到 Lyapunov 方程式其實是 Sylvester 方程式的一個特例，其中 $B = A^T$ ， $C = Q$ 。這些不同的解法都可呼叫 Matlab 軟體中的現成指令而輕易獲得解答。
- [12] C. A. Desoer, M. Vidyasagar, Feedback Systems: Input-Output Properties, Academic Press, New York, 1975。該書介紹非線性穩定性分析的另一種方法。Lyapunov 穩定性不是探討非線性系統穩定性的唯一方法，較晚提出的另一方法稱為輸出入穩定性(Input-Output Stability)，是 Sandberg 和 Zames 於 1960 年代所提出。這二種穩定性的分析是根據不同形式的非線性系統表示方法。使用 Lyapunov 穩定性分析時，必須將非線性系統表成一組微分方程式的聯立；而使用輸出入穩定性分析時，則必須將非線性系統表成一組輸出入訊號間的映射(mapping)關係。這二種穩定性分析雖然所根據的系統模式不同，但彼此之間有密切的關連性。Desoer 與 Vidyasagar 的這本著作對於輸出入穩定性分析有詳細的討論，堪為這一領域的代表性作品。
- [13] M. Vidyasagar, Nonlinear Systems Analysis, 2nd Edition, Prentice Hall, 1993。這本著作同時介紹了 Lyapunov 穩定性(前五章)以及輸出入穩定性(第六章)，並且探討了兩者間之關係。
- [14] Arduino 無人自走車是由鑫奇智慧科技公司所開發，做為路邊自動停車系統的測試與驗證之用，圖片取自網址: 89idea.com。