非線性控制
Nonlinear Control

第六章作業

學號 : P46104285

研究生 : 楊亞勳

授課教授 : 楊憲東

Department of Aeronautics and Astronautics

National Cheng Kung University

Tainan, Taiwan, ROC

中華民國 111 年 11 月 26 日

目錄

Question 1 1
Question 2 6
Question 3 12
Question 4 15
Question 5 19
Question 6 21
Question 7 23
MATLAB Code 28

考慮以下非線性系統

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 x_3 - x_2 + u \\ \dot{x}_3 &= -x_1 + u\end{aligned} \tag{1}$$

Question 1

依據定理(6.6.1)後面的 7 個步驟，設計回授線性化控制$u(x)$，使得線性化後的系統極點(pole)落在$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = -3$。

Answer

首先將非線性系統(1)化為以下形式

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{2}$$

其中u為系統的控制輸入，為純量函數，系統狀態變數x為向量函數，$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$。且

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 x_3 - x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix},\ g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

由(3)我們可以觀察出原點$x = 0$為系統的平衡點，滿足$f(0) = 0$。

其中n維系統狀態向量的維度，亦即狀態向量的個數，在此$n = 3$。

對於非線性系統的控制，此題的目標為尋找一回授線性化控制器使得系統即點落在-1, -2和-3。因此首先要確認的是此系統是否為輸入-狀態可線性化。

根據非線性系統回授線性化定理，非線性狀態方程式$\dot{x} = f(x) + g(x)u$可被回授線性化，若且唯若

A. 矩陣$\left\{g, ad_f g, \ldots, ad_f^{n-1} g\right\}$為線性獨立

B. 分布$\left\{g, ad_f g, \ldots, ad_f^{n-2} g\right\}$為 involutive

綜上所述，回授線性化控制器設計流程如下:

(1) 建立向量函數$g,\ ad_f g,\ \ldots,\ ad_f^{n-1} g$

針對系統(1)，已知$f(x)$和$g(x)$為向量函數，可計算本題之一階李氏括號$ad_f g$和二階李氏括號$ad_f^2 g$，根據李氏括號的定義並代入(3)得到

$$\begin{aligned} ad_f g &= [f, g] = L_f g - L_g f = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 x_3 - x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -x_3 & -1 & -x_1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4}$$

$$ad_f^2 g=\left[f,\left[f,g\right]\right]=\nabla\left[f,g\right]f-\nabla f\left[f,g\right]$$
$$=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-x_1+x_2-x_3\\-x_1x_3-x_2\\-x_1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1&1&-1\\-x_3&-1&-x_1\\-1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1+x_1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1-x_1\\1+x_2-x_3\\0\end{bmatrix} \tag{5}$$

(2) 檢查$\left\{g,ad_f g,...,ad_f^{n-2}g\right\}$的可控條件與 involutive 條件是否成立

首先檢查由(1)導出的可控性矩陣是否滿足$Rank\left[g,ad_f g,ad_f^2 g\right]=3$，由(4)和(5)可知

$$\left[g,ad_f g,ad_f^2 g\right]=\begin{bmatrix}0&0&-1-x_1\\1&1+x_1&1+x_2-x_3\\1&0&0\end{bmatrix} \tag{6}$$

若要使$Rank\left[g,ad_f g,ad_f^2 g\right]=3$成立，則此矩陣需為非奇異矩陣，也就是$\det\left[g,ad_f g,ad_f^2 g\right]\neq 0$時。且$\det\left[g,ad_f g,ad_f^2 g\right]=\left(1+x_1\right)^2$，代表當$x_1\neq -1$時為非奇異矩陣，此時可控條件成立。

再來檢查 involutive 是否成立

$$\left[g,ad_f g\right]=\nabla\left(ad_f g\right)\cdot g-\nabla g\cdot ad_f g$$
$$=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1+x_1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \tag{7}$$

由 involutive 的定義: 兩向量函$\left\{f,g\right\}$稱為 involutive，若其李氏括號可表成f與g的線性組合，推導出

$$\left[g,ad_f g\right]=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=0\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}0\\1+x_1\\0\end{bmatrix}=0\cdot g+0\cdot ad_f g \tag{8}$$

可知$\left\{g,ad_f g\right\}$滿足 involutive 條件。根據 Frobenius 定理，$\left\{g,ad_f g\right\}$滿足完全可積條件。綜合(1)和(2)的結果，可知矩陣$\left\{g,ad_f g,...,ad_f^{n-1}g\right\}$為線性獨立($\left\{f,g\right\}$ 可控條件)和分布$\left\{g,ad_f g,...,ad_f^{n-2}g\right\}$為 involutive($\left\{f,g\right\}$ 完全可積條件)被滿足代表系統(1) 存在座標轉換$z=\Phi\left(x\right)$，可被回授線性化。

(3) 求解聯立偏微分方程式。得到函數ϕ_1

現已知此系統可被回授線性化，則必存在函數ϕ_1滿足

$$L_g\phi_1=L_g\phi_2=...=L_g\phi_{n-1}=0 \tag{9}$$
$$\phi_{i+1}=L_f\phi_i,\ i=1,2,...,n-1 \tag{10}$$

由李式括號恆等式

$$\begin{aligned} L_{ad_f g} h &= \nabla h \cdot ad_f g = \nabla h \cdot [f, g] \\ &= L_f L_g h - L_g L_f h \\ &= \nabla\left(L_g h\right) \cdot f - \nabla\left(L_f h\right) \cdot g \end{aligned} \tag{11}$$

推導可得到

$$L_{ad_f^k g}\phi_1 = \nabla\phi_1 \cdot ad_f^k g = 0,\ k = 0,1,2,\ldots,n-2 \tag{12}$$

$$\nabla\phi_1 \cdot ad_f^{n-1} g \neq 0 \tag{13}$$

由此可知此系統要求解ϕ_1，需滿足下列聯立方程式

$$\begin{cases} \nabla\phi_1 \cdot g = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{\partial\phi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial\phi_1}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow \frac{\partial\phi_1}{\partial x_3} = 0 \\ \nabla\phi_1 \cdot ad_f g = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1+x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\partial\phi_1}{\partial x_2}\left(1+x_1\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial\phi_1}{\partial x_2} = 0 \\ \nabla\phi_1 \cdot ad_f^2 g = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1-x_1 \\ 1+x_2-x_3 \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1} \neq 0 \end{cases} \tag{14}$$

透過上述推導可知，ϕ_1僅為x_1的函數。在此選擇最簡單的形式，$\phi_1(x) = x_1$。

(4) 建立狀態座標轉換以及控制訊號轉換

狀態座標轉換:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ L_f\phi_1 \\ L_f^2\phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial x} \cdot f(x) \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial x} \cdot f(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_1 x_3 \end{bmatrix} \tag{15}$$

控制訊號轉換:

$$u = \alpha(x) + \beta(x)\upsilon,\ \alpha(x) = -\frac{L_f^3\phi_1}{L_g L_f^2\phi_1},\ \beta(x) = \frac{1}{L_g L_f^2\phi_1} \tag{16}$$

其中

$$\alpha(x) = -\frac{L_f^3\phi_1}{L_g L_f^2\phi_1} = \frac{\left(-3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_1x_3 - x_2x_3 + x_1^2 + x_3^2\right)}{\left(1+x_1\right)} \tag{17}$$

$$\beta(x) = \frac{1}{L_g L_f^2\phi_1} = \frac{-1}{\left(1+x_1\right)} \tag{18}$$

(5) 建立線性方程式: 在新的狀態 z ，新的控制 υ 之下，非線性系統(1)轉換為線性系統:

$$\dot{z}=\begin{bmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\\ \dot{z}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\upsilon=A_c z+B_c\upsilon \tag{19}$$

其中

$$\upsilon=\frac{\left(u-\alpha\left(z\right)\right)}{\beta\left(z\right)} \tag{20}$$

(6) 針對線性系統(19)式設計狀態回授控制律

設計一狀態回授控制器

$$\upsilon=-Kz=-\begin{bmatrix}k_1 & k_2 & k_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{bmatrix}=-\left(k_1z_1+k_2z_2+k_3z_3\right) \tag{21}$$

將(21)代入(19)得到

$$\dot{z}=\left(A_c-B_cK\right)z=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-k_1&-k_2&-k_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{bmatrix} \tag{22}$$

其中係數 k_i 的選擇是要使得閉迴路矩陣的特徵值落入所指定的位置。且(22)之特徵多項式可以表示成

$$\det\left(\lambda I-\left(A_c-B_cK\right)\right)=\lambda^3+k_3\lambda^2+k_2\lambda+k_1 \tag{23}$$

對於題目所給定之特徵值，可以表示成

$$\left(\lambda+1\right)\left(\lambda+2\right)\left(\lambda+3\right)=\lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6 \tag{24}$$

比對(23)和(24)可以得到 $k_1=6,\ k_2=11,\ k_3=6$ ，此時線性系統狀態回授控制器為

$$\begin{aligned}\upsilon&=-\left(k_1z_1+k_2z_2+k_3z_3\right)\\&=-\left(6z_1+11z_2+6z_3\right)\\&=-\left(6\phi_1+11L_f\phi_1+6L_f^2\phi_1\right)\end{aligned} \tag{25}$$

(7) 決定非線性控制律 u

將式(24)代入式(16)，可以得到

$$\begin{aligned}u&=-\frac{L_f^3\phi_1}{L_gL_f^2\phi_1}+\frac{1}{L_gL_f^2\phi_1}\upsilon\\&=\frac{1}{L_gL_f^2\phi_1}\left(-L_f^3\phi_1-6\phi_1-11L_f\phi_1-6L_f^2\phi_1\right)\\&\Rightarrow u\left(x\right)=\left(-1-x_1\right)^{-1}\left(-x_1^2-4x_1-3x_2-x_3^2+7x_3+3x_1x_3+x_2x_3\right)\end{aligned} \tag{26}$$

$u(x)$即為系統狀態x的非線性回授，且完全由ϕ_1決定。透過此控制器可將非線性系統成功轉化成線性系統，再以線性系統的工具來設定控制器，達到回授線性穩定化的控制任務。

Question 2

將設計得到的控制器$u(x)$代入(1)式，進行 MATLAB 模擬。選擇 10 個左右的初始位置$(x_1(0),x_2(0),x_3(0))$，畫出相空間軌跡$(x_1(t),x_2(t),x_3(t))$，驗證平衡點(原點)是否為漸進穩定?

<u>Answer</u>

將$u(x)$代入(1)式後，首先選擇 10 組初始值如下:

表 1、 10 組任意選擇之初始值

第一組	$(-5,5,5)$
第二組	$(5,-5,5)$
第三組	$(5,5,-5)$
第四組	$(-5,-5,5)$
第五組	$(5,-5,-5)$
第六組	$(-5,5,-5)$
第七組	$(5,5,5)$
第八組	$(-5,-5,-5)$
第九組	$(4,1,6)$
第十組	$(-8,4,3)$

利用四階的 Runge-Kutaa 數值解算器求解後即可得到三維之相空間軌跡圖(圖 1)，而為了可以更清楚的看到這些軌跡圖是如何變化，故繪製出(x_1,x_2)、(x_1,x_3)和(x_2,x_3)之相平面軌跡圖，如圖 2~圖 4。

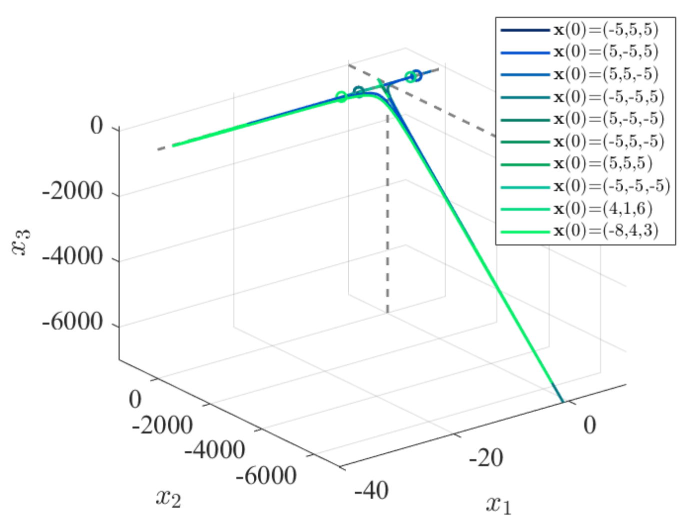

圖 1、表 1 之 10 組初始值所繪製出的相空間軌跡圖

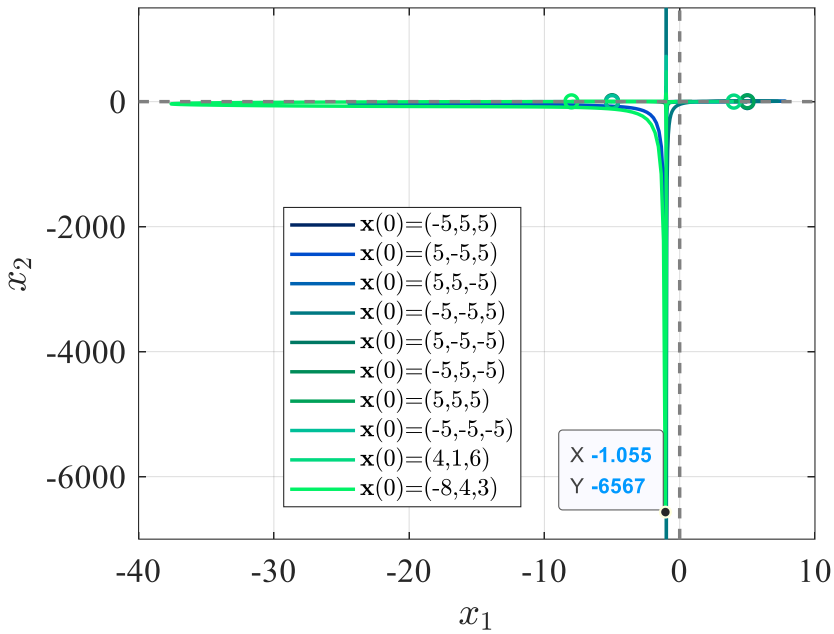

圖 2、表 1 之 10 組初始值所繪製出的 (x_1, x_2) 相平面軌跡圖

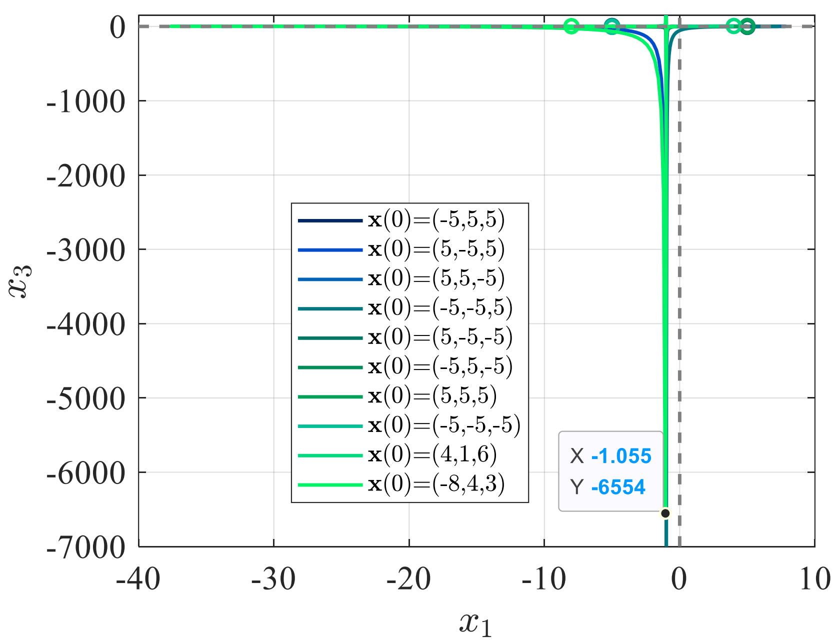

圖 3、表 1 之 10 組初始值所繪製出的 (x_1, x_3) 相平面軌跡圖

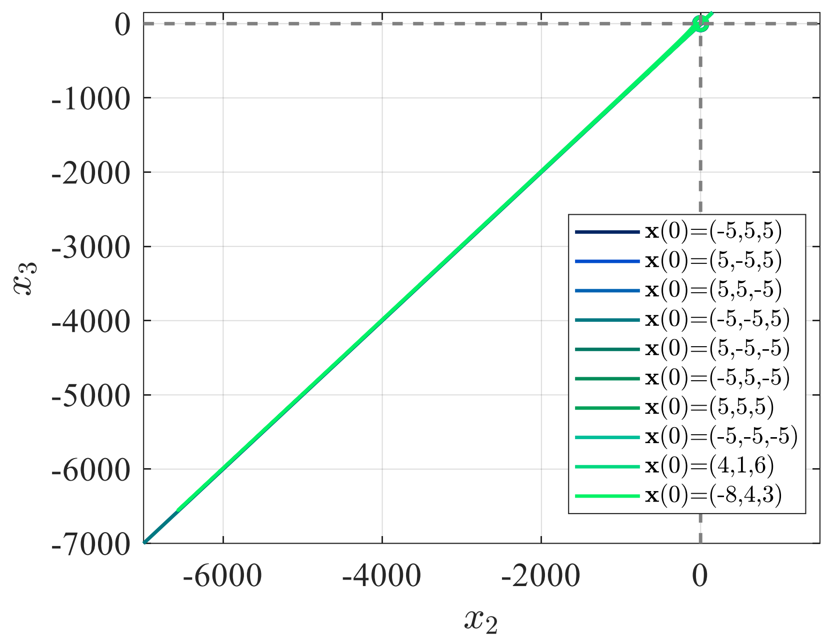

圖 4、表 1 之 10 組初始值所繪製出的(x_2, x_3)相平面軌跡圖

從圖中可以看出，這些相空間和相平面軌跡有跳點的發生，為檢查這些軌跡圖最後是否有收斂，將這 10 組軌跡圖的最後一點繪製在三維相空間圖上，如圖 5。

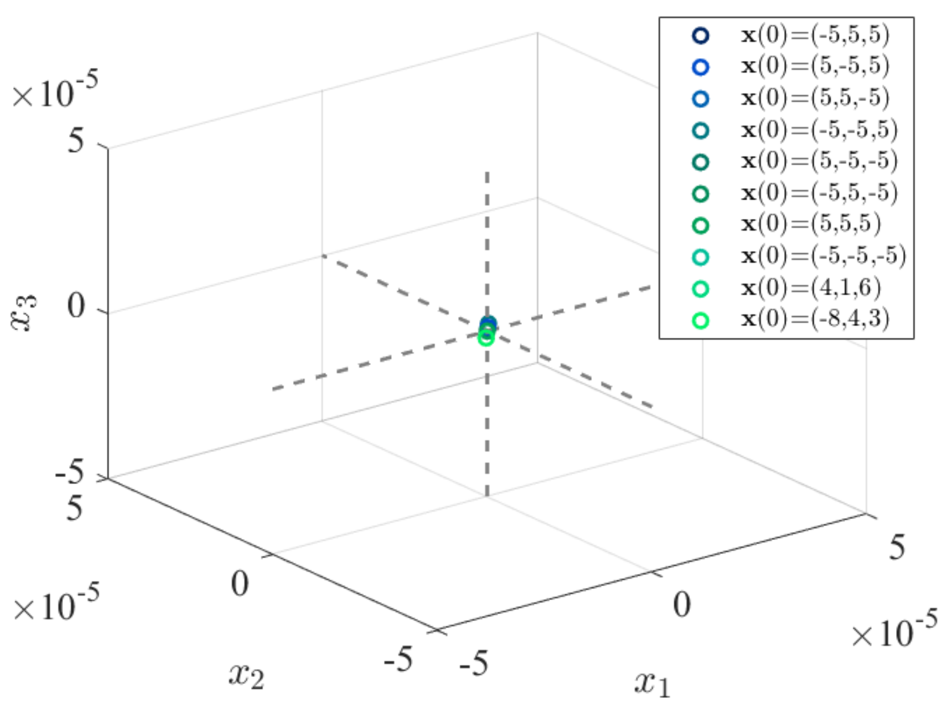

圖 5、表 1 之 10 組初始值所產生之軌跡終值

從圖 5 中觀察可以知道，表 1 之 10 組初始值最後都可以收斂至非常接近 0 的數字。但是這些跳點會讓狀態值達到非常大的數字，而我們所設計之 $u(x)$ 控制器又是狀態變數的函數。這在實際應用上，會使控制硬體超出所能負荷的範圍，無法順利完成控制。

而這個現象可以利用第一題的第二步驟可以得到解釋。第一題第二步驟內容如下:

> 首先檢查由(1)導出的可控性矩陣是否滿足 $Rank\left[g, ad_f g, ad_f^2 g\right]=3$，由(4)和(5)可知
>
> $$\left[g, ad_f g, ad_f^2 g\right]=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1-x_1\\ 1 & 1+x_1 & 1+x_2-x_3\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{6}$$
>
> 若要使 $Rank\left[g, ad_f g, ad_f^2 g\right]=3$ 成立，則此矩陣需為非奇異矩陣，也就是 $\det\left[g, ad_f g, ad_f^2 g\right]\neq 0$ 時。且 $\det\left[g, ad_f g, ad_f^2 g\right]=(1+x_1)^2$，代表當 $x_1 \neq -1$ 時為非奇異矩陣，此時可控條件成立。

這個內容表示當 $x_1=-1$ 時會有奇異矩陣的產生，此時系統不滿足可控條件。此推論搭圖 2 和圖 3 觀察可以知道，當 $x_1=-1$ 時，另外兩個狀態變數 (x_2, x_3) 確實產生了跳點(發散到很大的數)，也就是不可控的情況發生。

為了尋找滿足可控條件之初使值，吾人在程式中加入一判斷條件，當狀態變數的任一值大於 15，則重新選擇初始值，直到 10 條相空間軌跡之狀態變數值皆小於 15。最後，所選擇之 10 組初始值如下表:

表 2、10 組滿足可控條件之初始值

第一組	$(1,2,4)$
第二組	$(2,-3,-5)$
第三組	$(-0.5,-3,-9)$
第四組	$(0,-2,-3)$
第五組	$(4,-6,-6)$
第六組	$(5,7,5)$
第七組	$(6,8,-4)$
第八組	$(7,9,3)$
第九組	$(8,10,-2)$
第十組	$(9,11,1)$

所繪製出之三維之相空間軌跡圖(圖 6)，和(x_1,x_2)、(x_1,x_3)和(x_2,x_3)相平面軌跡圖，如圖 7~圖 9。

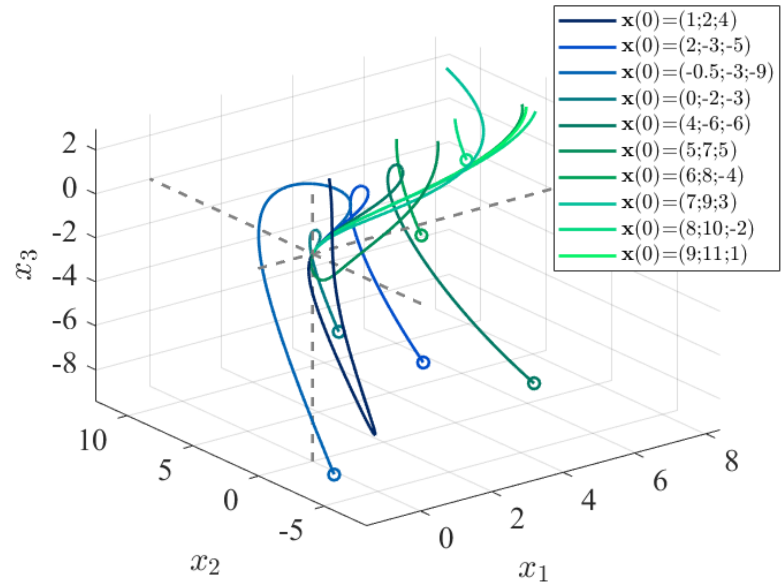

圖 6、表 2 之 10 組初始值所繪製出的相空間軌跡圖

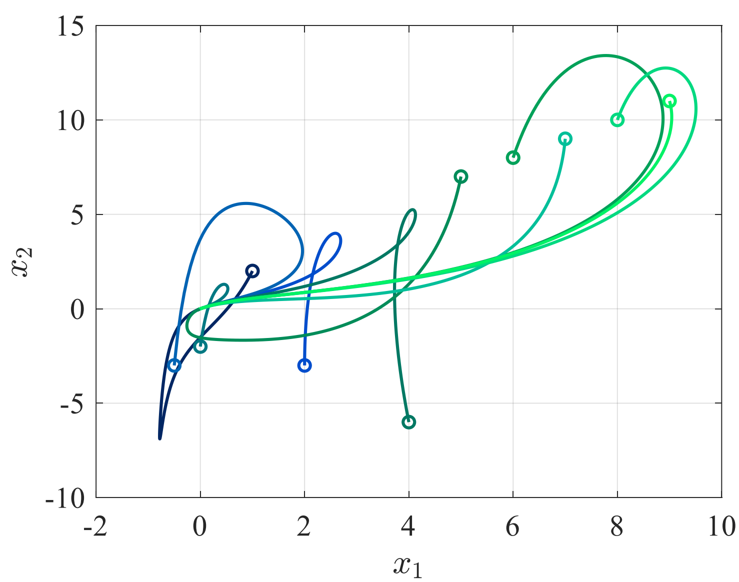

圖 7、表 2 之 10 組初始值所繪製出的(x_1,x_2)相平面軌跡圖

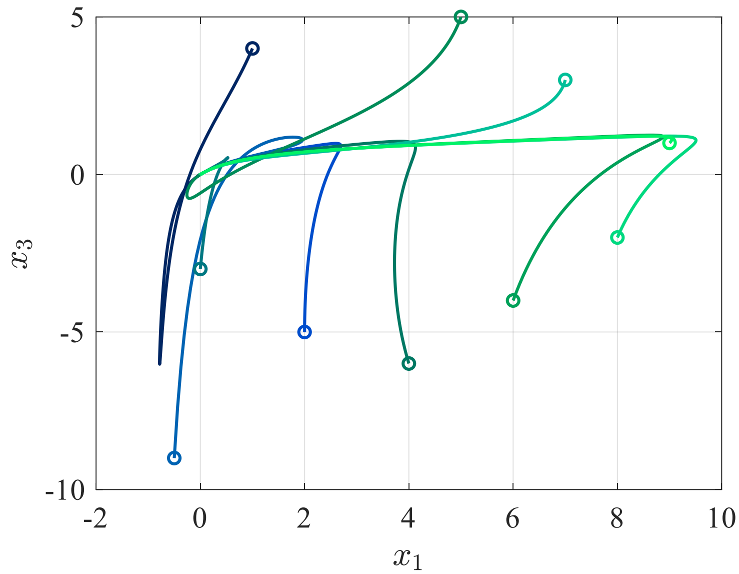

圖 8、表 2 之 10 組初始值所繪製出的(x_1, x_3)相平面軌跡圖

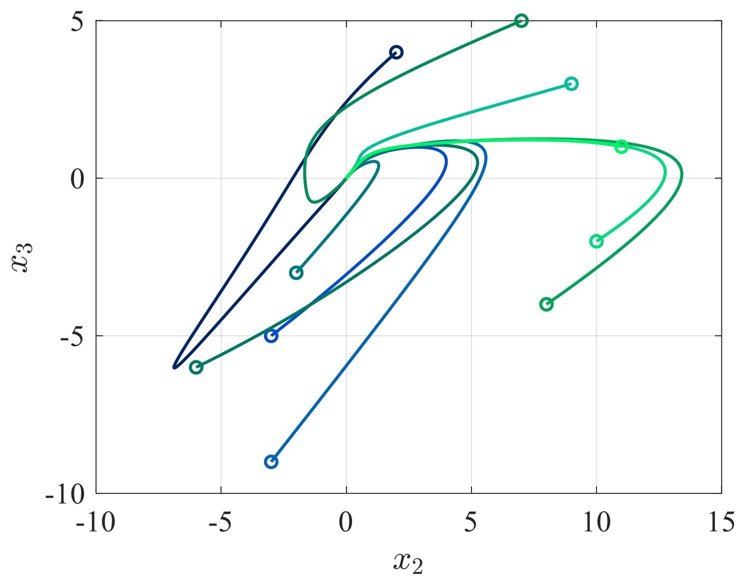

圖 9、表 2 之 10 組初始值所繪製出的(x_2, x_3)相平面軌跡圖

因此回授控制器$u(x)$會將非線性系統等義為線性系統。且因為此題最後控制結果為系統極點(pole)落在$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = -3$，由圖 7~圖 9 觀察可以得知原點(平衡點)為一穩定節點(Stable Node)。最後，因為此系統在不論x_1是否為-1 的情況下，最後皆會收斂至原點，故平衡點(原點)為漸進穩定。

Question 3

比較控制前$(u=0)$與控制後，相空間軌跡有何不同?

Answer

根據(1)，系統控制前之狀態空間方程式如下:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 x_3 - x_2 \\ \dot{x}_3 &= -x_1\end{aligned} \tag{27}$$

控制後之狀態空間方程式如下:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 x_3 - x_2 + \frac{1}{(-1-x_1)}\left(-x_1^2 - 4x_1 - 3x_2 - x_3^2 + 7x_3 + 3x_1 x_3 + x_2 x_3\right) \\ \dot{x}_3 &= -x_1 + \frac{1}{(-1-x_1)}\left(-x_1^2 - 4x_1 - 3x_2 - x_3^2 + 7x_3 + 3x_1 x_3 + x_2 x_3\right)\end{aligned} \tag{28}$$

為了比較這兩者的區別，吾人先選取一初始值，繪製出這兩個系統的相空間軌跡圖。若選取之初始值為$(x_1, x_2, x_3) = (2,2,2)$ ，所得到的相空間軌跡圖如下:

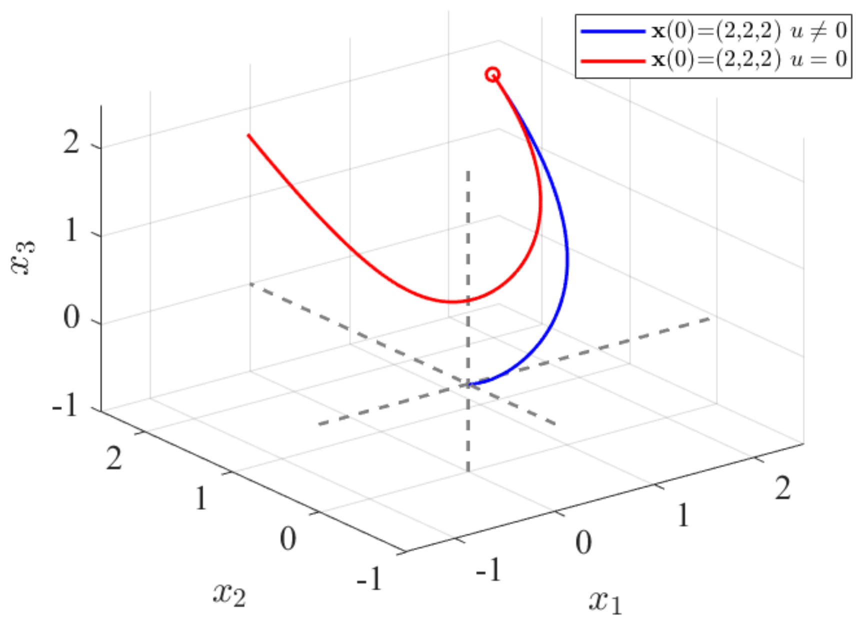

圖 10、針對(27)和(28)在相同初始值$(x_1, x_2, x_3) = (2,2,2)$下之相空間軌跡圖

由圖 10 中觀察可之，在初始值$(x_1, x_2, x_3) = (2,2,2)$下，原先會發散之系統(27)受到回授控制器$u(x)$的控制下，會轉變為震盪收斂至原點(平衡點)之系統(28)。也可以由圖中觀察可知，此初始值不會使受到線性回授控制的系統接觸到不可控的$x_1 = -1$。為了觀察更深入

的現象，現選取另一組初始值$\left(x_1, x_2, x_3\right)=\left(-2.5, 2, 2\right)$，繪製出之相平面軌跡圖如圖 11，和$\left(x_1, x_2\right)$、$\left(x_1, x_3\right)$和$\left(x_2, x_3\right)$ 相平面軌跡圖，如圖 12~圖 14。

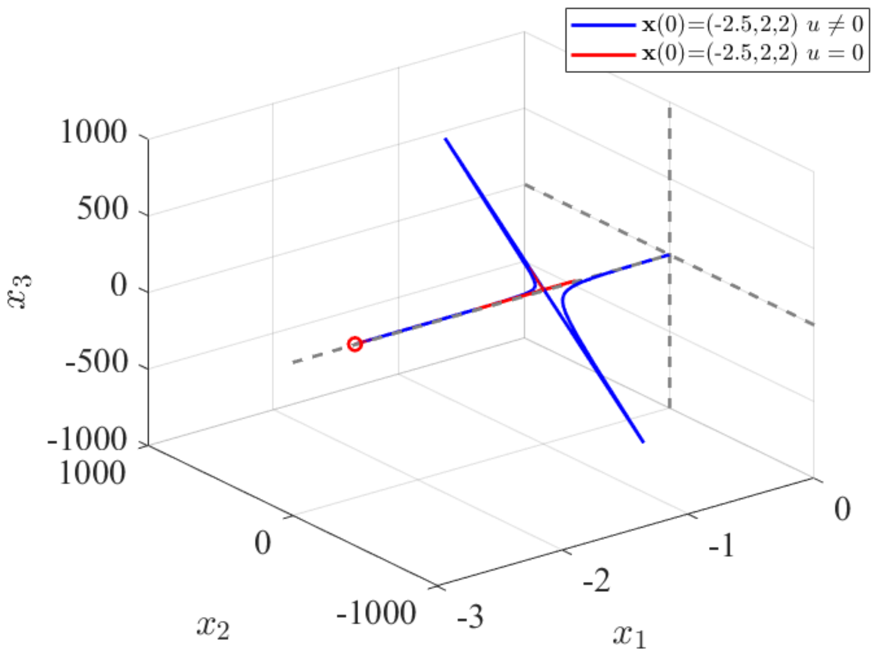

圖 11、針對(27)和(28)在相同初始值$\left(x_1, x_2, x_3\right)=\left(-2.5, 2, 2\right)$下之相空間軌跡圖

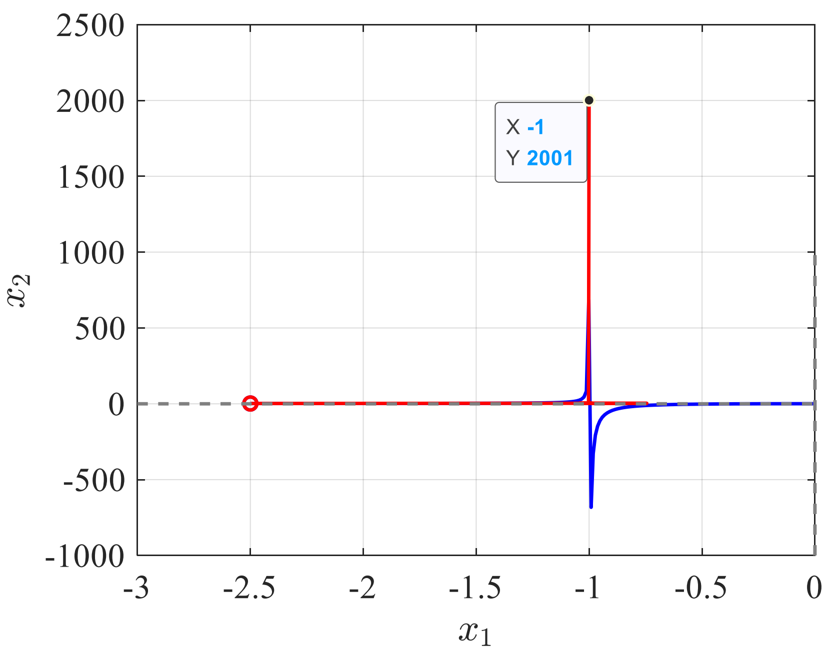

圖 12、$\left(x_1, x_2\right)$相平面軌跡圖

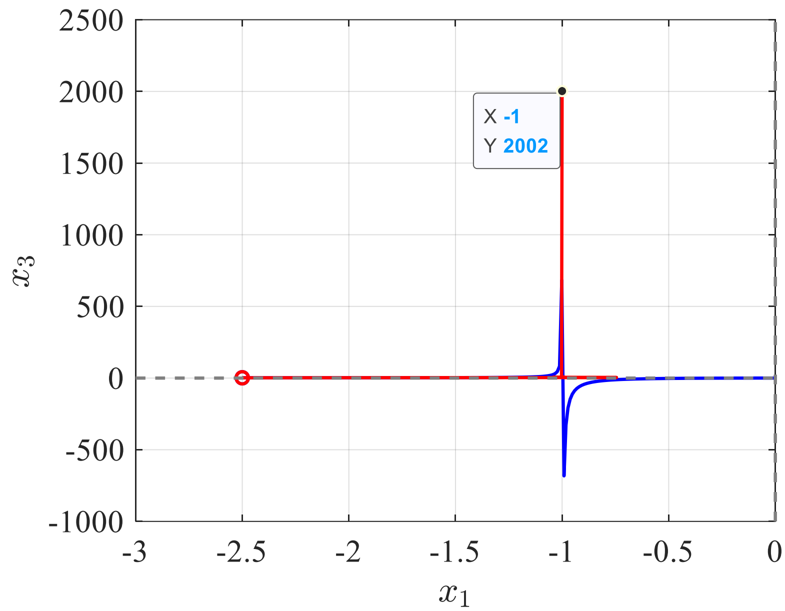

圖 13、(x_1, x_3) 相平面軌跡圖

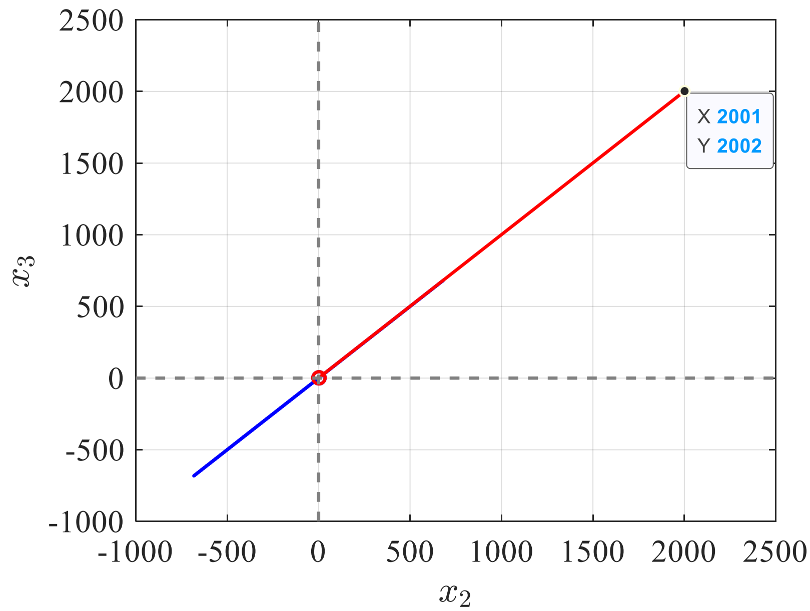

圖 14、(x_2, x_3) 相平面軌跡圖

由圖 11~14 觀察可知。若系統有受線性回授控制，系統(28)在遇到不可控的點 $x_1 = -1$ 後，會產生一跳點，但後續的軌跡變化還是會逐漸收斂至 0。但未受到控制的系統(27)，在狀態變數的 x_1 接近-1 後，(x_2, x_3) 會發散至無窮遠處。圖 12~14 為發散至無窮遠是因為受到 MATLAB 模擬中的時間限制，但是隨著時間增加，他的趨勢即是發散是無窮遠處。故線性回授控制器確實有發揮控制系統狀態的功用。

Question 4

所得到的回授線性化控制$u(x)$是全域穩定嗎?亦或是區域穩定?

Answer

根據全域穩定性定理:

不管$x(0)$在何處(可為任何一點),恆有$x(t)\to 0$時,則稱平衡點$x=0$為全域穩定。

在此我們要測試的是回授線性化控制$u(x)$是否為全域穩定。測試方法為使用 MATLAB 模擬,使用多組不同的初始值來檢測在$t\to\infty$時,$u(x)$的值是否會趨近於 0。首先利用第二題所使用的 20 組初始值(表 1、表 2)來繪製控制$u(x)$對時間t的響應圖。結果如圖 15 和圖 16。

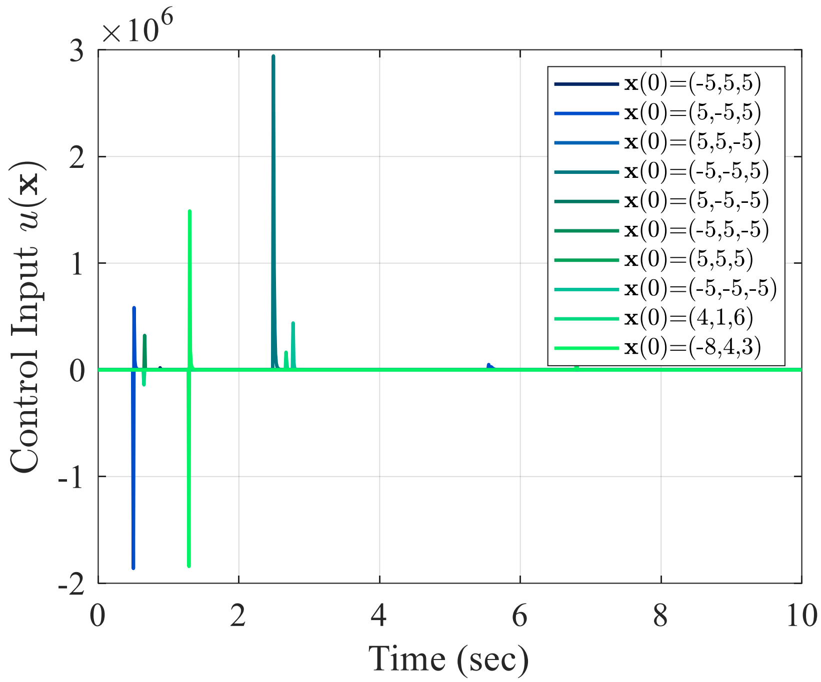

圖 15、10 組初始值(表 1)所產生之輸出時間響應

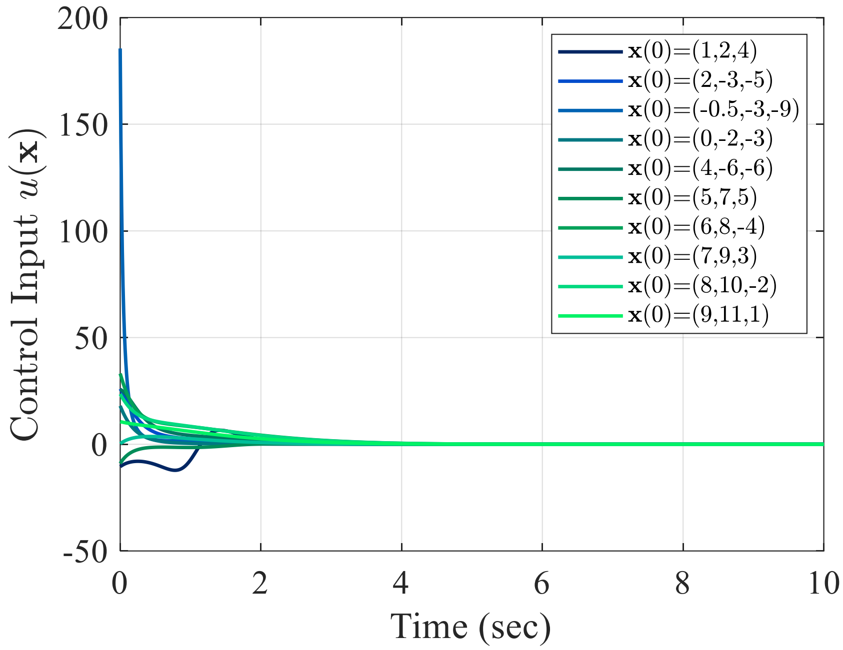

圖 16、10 組初始值(表 2)所產生之輸出時間響應

由圖 15 來看，因為這 10 組初始值內有一些初始值會使系統狀態變數趨近於 $x_1=-1$，這會使系統進入不可控的狀態，此時 (x_2,x_3) 會突然跳躍至較大的數值。但是隨著時間繼續增加，最後 $u(x)$ 仍然會趨近於 0。而圖 16 這 10 組在當初選定初始值時，就有刻意讓系統的狀態變數避開不可控的點 $x_1=-1$，故此組初始值所產生之控制輸入時間響應從一開始就有收斂的趨勢，沒有跳點的產生，最後所有 $u(x)$ 值也都趨近於 0。

但是全域穩定性的要求為不管初始值在何處釋放，最後皆趨近於 0，為了驗證 $u(x)$ 是否滿足此條件，吾人又挑選了 20 組初始值。如表 3 和表 4。表 3 這 10 組初始值的特性為初始值遠小於前面 20 組初始值，而表 4 這 10 組初始值的特性為遠大於前面 3 組所挑選的初始值，吾人利用此 20 組初始值來驗證是否不管初始值為何，$u(x)$ 值都會趨近於 0。

表 3、10 組較小初始值

第一組	$(-0.01,0.01,0.01)$
第二組	$(0.01,-0.01,0.01)$
第三組	$(0.01,0.01,-0.01)$
第四組	$(-0.01,-0.01,0.01)$
第五組	$(-0.01,0.01,-0.01)$
第六組	$(0.01,-0.01,-0.01)$

第七組	$(0.01, 0.01, 0.01)$
第八組	$(-0.01, -0.01, -0.01)$
第九組	$(0.001, 0.001, 0.001)$
第十組	$(-0.001, -0.001, -0.001)$

表 4、10 組較大初始值

第一組	$(100, 100, 100)$
第二組	$(-100, 100, 100)$
第三組	$(100, -100, 100)$
第四組	$(100, 100, -100)$
第五組	$(-100, -100, 100)$
第六組	$(-100, 100, -100)$
第七組	$(100, -100, -100)$
第八組	$(-100, -100, -100)$
第九組	$(1000, 1000, 1000)$
第十組	$(-1000, -1000, -1000)$

由這 20 組初始值所繪製出之控制輸入對時間響應圖如圖 17 和圖 18。

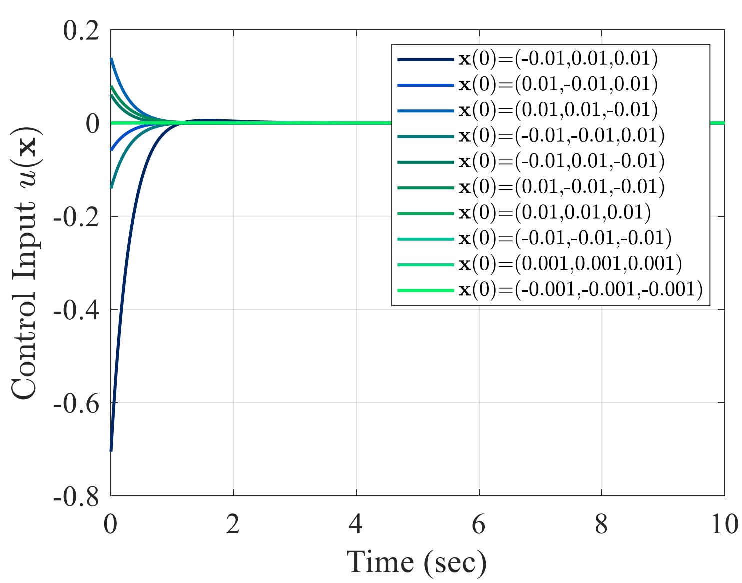

圖 17、10 組初始值(表 3)所產生之輸出時間響應

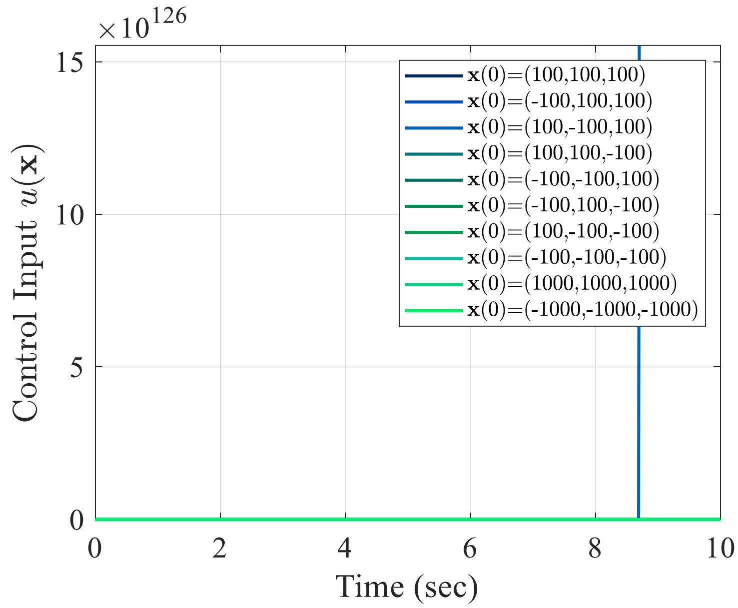

圖 18、10 組初始值(表 4)所產生之輸出時間響應

由圖 17 可以看到，這 10 組較小的初始值可以滿足$u(x)\to 0$的條件。而圖 18 這 10 組較大初始值會產生數值非常大的跳點，若是單純看圖，乍看之下所有$u(x)$接趨近於 0。但是當進入實際繪圖的數值表格查看後，發現$(100,-100,100)$和$(1000,1000,1000)$這兩組數字是不收斂的。而原先模擬的時間為 10 秒，每 0.01 秒為間隔。若是將模擬時間延長至 1000 秒，每 0.01 秒為間隔，會發現當其他組初始值都收斂至 0，這兩組數值依舊無法收斂，如圖 19。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
99981	0	0	NaN	0	0	0	0	0	NaN	0
99982	0	0	NaN	0	0	0	0	0	NaN	0
99983	0	0	NaN	0	0	0	0	0	NaN	0
99984	0	0	NaN	0	0	0	0	0	NaN	0
99985	0	0	NaN	0	0	0	0	0	NaN	0
99986	0	0	NaN	0	0	0	0	0	NaN	0
99987	0	0	NaN	0	0	0	0	0	NaN	0
99988	0	0	NaN	0	0	0	0	0	NaN	0
99989	0	0	NaN	0	0	0	0	0	NaN	0
99990	0	0	NaN	0	0	0	0	0	NaN	0
99991	0	0	NaN	0	0	0	0	0	NaN	0
99992	0	0	NaN	0	0	0	0	0	NaN	0
99993	0	0	NaN	0	0	0	0	0	NaN	0
99994	0	0	NaN	0	0	0	0	0	NaN	0
99995	0	0	NaN	0	0	0	0	0	NaN	0
99996	0	0	NaN	0	0	0	0	0	NaN	0
99997	0	0	NaN	0	0	0	0	0	NaN	0
99998	0	0	NaN	0	0	0	0	0	NaN	0
99999	0	0	NaN	0	0	0	0	0	NaN	0
100000	0	0	NaN	0	0	0	0	0	NaN	0
100001	0	0	NaN	0	0	0	0	0	NaN	0

圖 19、表 4 初始值計算出的控制輸入時間響應值，第三組和第九組初始值無法收斂。

此結果違反了全域穩定的條件，故回授線性化控制$u(x)$為區域穩定。

Question 5

畫出 $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ 分別對時間的響應圖，驗證時間響應圖的收斂速度與 $\lambda=-2$ 的關係。

Answer

現已知非線性系統

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 &= -x_1x_3 - x_2 + u \\ \dot{x}_3 &= -x_1 + u\end{aligned} \tag{29}$$

其中

$$u(x) = (-1-x_1)^{-1}\left(-x_1^2 - 4x_1 - 3x_2 - x_3^2 + 7x_3 + 3x_1x_3 + x_2x_3\right) \tag{30}$$

和經過回授線性化 $z=\phi(x)$ 狀態轉換後的系統

$$\dot{z} = (A_c - B_cK)z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = Az \tag{31}$$

由於系統(31)為一線性系統，且閉迴路極點被設置在 $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2$, $\lambda_3=-3$，故在線性系統中的狀態 $z_1(t)$、$z_2(t)$和 $z_3(t)$ 的收斂速度會以指數收斂的形式收斂，而收斂速度由最小的特徵值 $\lambda_1=-1$ 決定，代表收斂速度為 e^{-t}。而由於狀態轉換的關係 $x=\phi^{-1}(z)$，吾人推論在非線性系統的狀態 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 和 $x_3(t)$ 的收斂情形會和指數收斂 e^{-t} 有關。但題目的要求為響應圖收斂速度和 $\lambda_2=-2$ 的關係，故吾人會同時繪製初始值為 $(2,2,2)$ 的 $x(t)$ 和 $z(t)$ 時間響應圖，加上代表指數收斂的 e^{-t}、e^{-2t} 和 e^{-3t}，因初始值的選擇緣故，指數收斂曲線以 $2e^{-t}$、$2e^{-2t}$ 和 $2e^{-3t}$ 表示。結果如圖 20~25 所示。

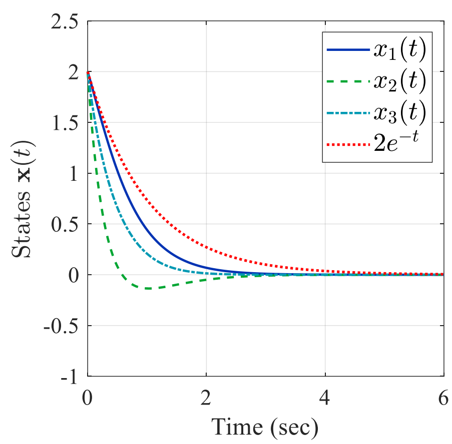

圖 20、非線性系統狀態時間響應($2e^{-t}$)

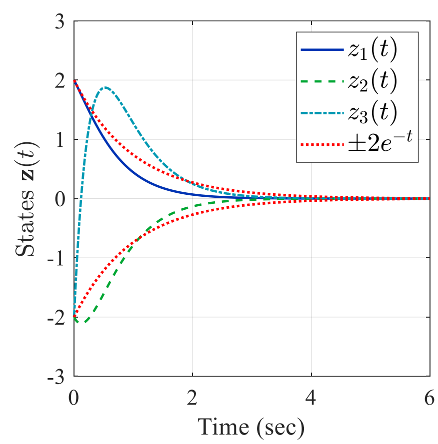

圖 21、線性系統狀態時間響應($2e^{-t}$)

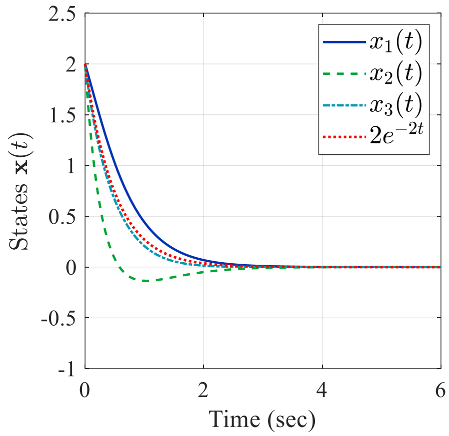

圖 22、非線性系統狀態時間響應($2e^{-2t}$)

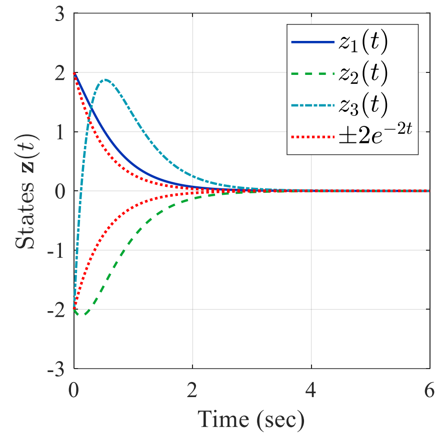

圖 23、線性系統狀態時間響應($2e^{-2t}$)

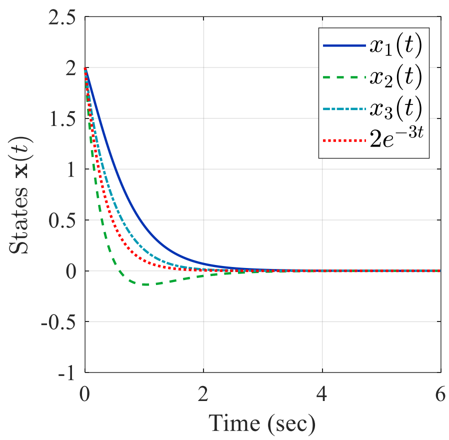

圖 24、非線性系統狀態時間響應($2e^{-3t}$)

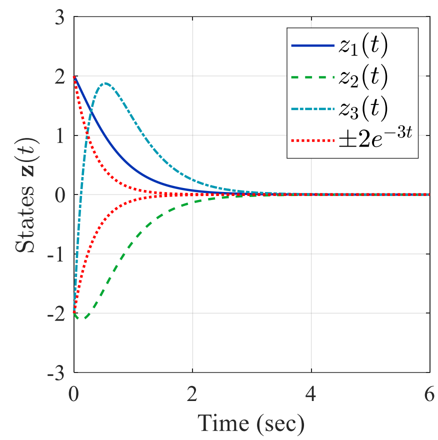

圖 25、線性系統狀態時間響應($2e^{-3t}$)

由圖 20、21 觀察，可以發現 $2e^{-t}$ 的指數收斂曲線幾乎包絡住 3 維狀態變數的響應曲線。代表狀態收斂的速度比 $2e^{-t}$ 還要快。觀察圖 22、23，則可以發現 $2e^{-2t}$ 收斂至 0 的時間和三維狀態變數收斂至 0 的時間差不多。而從圖 24、25 來看，則可以發現 $2e^{-3t}$ 較三維狀態變數快收斂至 0。以線性理論來看，系統時間響應的收斂速度應該由最靠近虛軸的極點決定，但在這個回授線性化的非線性系統來看，雖然差距不大，但是系統狀態變數的收斂速度更接近 $\lambda = -2$ 的 $2e^{-2t}$ 收斂曲線，而不是更靠近虛軸的 $\lambda = -1$。

Question 6

若線性化後的系統極點(pole)落在$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-3$，所得結果有何不同?除了軌跡不同外，控制訊號$u(t)$的時間響應有何差異?

Answer

為了比較不同縣性化系統極點對系統造成的影響。吾人選擇繪製出兩張系統狀態變數$x(t)$對時間的響應圖，兩張的系統極點分別為$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(-1,-2,-3)$和$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(-3,-3,-3)$，而初始初始狀態皆為$x(0)=(2,2,2)$且為了方便觀察收斂速度，故會在圖上繪製出指數收斂$2e^{-t}$的曲線，如圖 26、27。而為了觀察更動系統極點對系統輸入控制訊號的影響，也會繪製兩組不同極點所產生的輸入控制對時間響應圖，如圖 28、29。

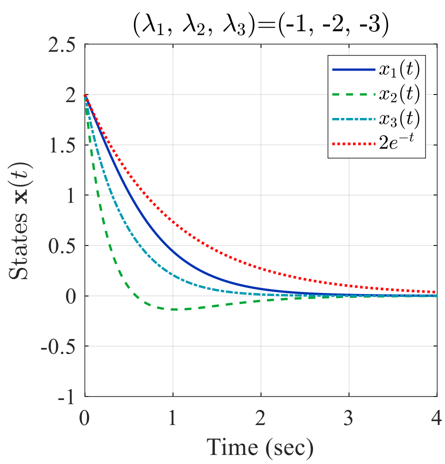

圖 26、非線性系統狀態時間響應($2e^{-t}$)

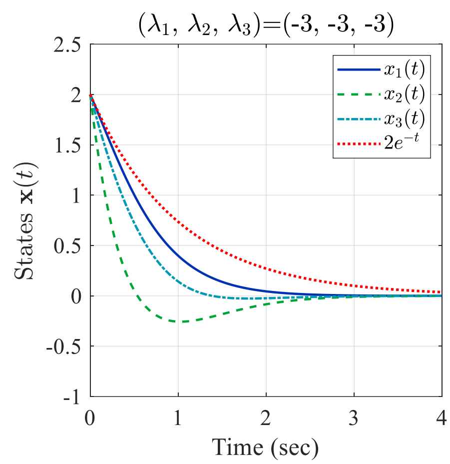

圖 27、非線性系統狀態時間響應($2e^{-t}$)

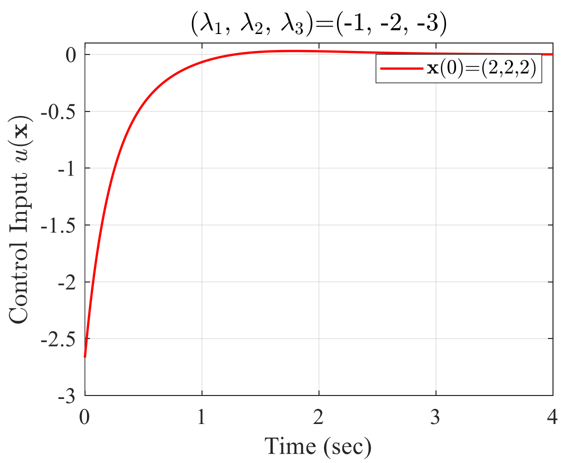

圖 28、控制訊號時間響應

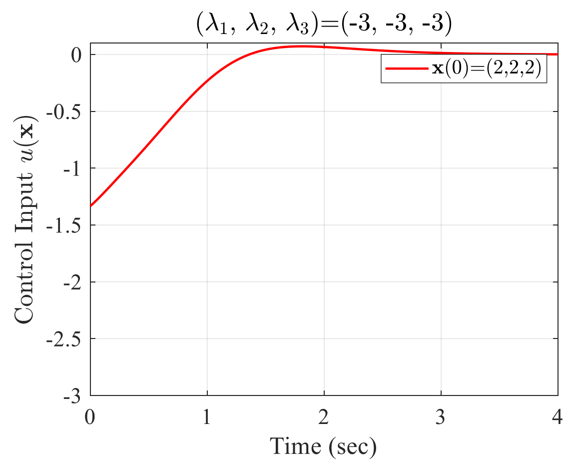

圖 29、控制訊號時間響應

由圖 26、27 觀察可知，當$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(-3,-3,-3)$的系統狀態變數收斂的速度會稍微比當$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(-1,-2,-3)$時要快，也會有較大的 overshoot，但是因為此兩組極點的差異並不

大，故時間響應和 overshoot 的差異並不明顯。而由圖 28、29 觀察可知，距離虛軸較遠的極點，雖然會讓系統狀態有比較快的響應，但在控制訊號上會產生明顯的 overshoot。為了看出更明顯的差距，吾人選擇一組更小的系統極點 $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(-10,-10,-10)$，並繪製相同初始條件下的系統狀態時間響應和控制訊號時間響應，結果如圖 30、31。

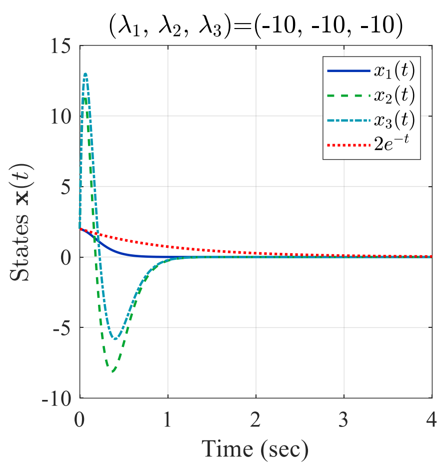

圖 30、非線性系統狀態時間響應($2e^{-t}$)

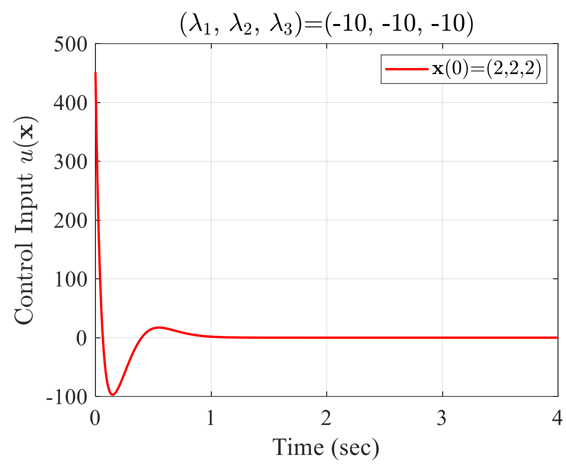

圖 31、控制訊號時間響應

這組系統極點 $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(-10,-10,-10)$ 就更能看出不同系統極點所造成的影響。距離虛軸更遠的系統極點確實使系統狀態很快地達到穩態，但是不管是在系統狀態變數亦或是控制訊號，皆會產生非常大的 overshoot。而較快的系統響應和較大的 overshoot 確實是在設計線性控制系統所需要考量的點。在此我們也可以推論，回授線性化後的非線性系統，的確可以使用線性系統的工具來設計。

Question 7

回到問題(1)，如果極點仍然選擇落在 $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-2,\ \lambda_3=-3$ ，討論回授線性化控制 $u(x)$ 的解是否為唯一?如果不為唯一，嘗試求得 $u(x)$ 的另一個解，並重複以上步驟。所得到的時間響應圖會一樣嗎?

Answer

從第一題的步驟(3)的結果可以知道，若要求解 $\phi_1(x)$，只需要任意選擇一 x_1 的函數。從這個結果來說 $\phi_1(x)$ 不唯一。而回授線性化控制 $u(x)$ 又是 $\phi_1(x)$ 的函數，故 $u(x)$ 的解不唯一。要求得 $u(x)$ 的另一個解，首先需要選擇不同的 $\phi_1(x)$。並重複第一小題的步驟(4)~(7)，即可求得新的 $u(x)$。在此吾人選擇的新的 $\phi_1(x)$ 如下

$$\phi_1(x)=x_1+x_1^2 \tag{29}$$

接著重複第一小題的步驟(4)~(7)

(4) 建立狀態座標轉換以及控制訊號轉換

狀態座標轉換:

$$\begin{bmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\phi_1\\ L_f\phi_1\\ L_f^2\phi_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\phi_1\\ \dfrac{\partial\phi_1}{\partial x}\cdot f(x)\\ \dfrac{\partial\phi_2}{\partial x}\cdot f(x)\end{bmatrix} \tag{30}$$

其中

$$\phi_2=-x_1+x_2-x_3+2x_1x_2-2x_1x_3-2x_1^2 \tag{31}$$

$$\phi_3=(-1-4x_1+2x_2-2x_3)(-x_1+x_2-x_3)+(1+2x_1)(-x_1x_3-x_2)+(1+2x_1)x_1 \tag{32}$$

控制訊號轉換:

$$u=\alpha(x)+\beta(x)\upsilon,\ \alpha(x)=-\frac{L_f^3\phi_1}{L_gL_f^2\phi_1},\ \beta(x)=\frac{1}{L_gL_f^2\phi_1} \tag{33}$$

其中

$$\begin{aligned}\alpha(x)=-\frac{L_f^3\phi_1}{L_gL_f^2\phi_1}=\Big[&(12x_1-8x_2+5x_3-4x_1x_3+1)(-x_1+x_2-x_3)\\ &-(-8x_2+4x_2-4x_3-2)(x_1x_3+x_2)\\ &-x_1\left(5x_1-4x_2+4x_3-2x_1^2+1\right)\Big]/(2x_1+1)(x_1+1)\end{aligned} \tag{34}$$

$$\beta(x)=\frac{1}{L_gL_f^2\phi_1}=\frac{-1}{(1+x_1)(2x_1+1)} \tag{35}$$

(5) 建立線性方程式: 在新的狀態 z ，新的控制 υ 之下，非線性系統(1)轉換為線性系統:

$$\dot{z}=\begin{bmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\\ \dot{z}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\upsilon=A_cz+B_c\upsilon \tag{36}$$

其中

$$\upsilon=\frac{\left(u-\alpha\left(z\right)\right)}{\beta\left(z\right)} \tag{37}$$

(6) 針對線性系統(19)式設計狀態回授控制律

設計一狀態回授控制器

$$\upsilon=-Kz=-\begin{bmatrix}k_1 & k_2 & k_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{bmatrix}=-\left(k_1z_1+k_2z_2+k_3z_3\right) \tag{38}$$

將(21)代入(19)得到

$$\dot{z}=\left(A_c-B_cK\right)z=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-k_1&-k_2&-k_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{bmatrix} \tag{39}$$

其中係數k_i的選擇是要使得閉迴路矩陣的特徵值落入所指定的位置。且(22)之特徵多項式可以表示成

$$\det\left(\lambda I-\left(A_c-B_cK\right)\right)=\lambda^3+k_3\lambda^2+k_2\lambda+k_1 \tag{40}$$

對於題目所給定之特徵值，可以表示成

$$\left(\lambda+1\right)\left(\lambda+2\right)\left(\lambda+3\right)=\lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6 \tag{41}$$

比對(23)和(24)可以得到$k_1=6,\ k_2=11,\ k_3=6$，此時線性系統狀態回授控制器為

$$\begin{aligned}\upsilon&=-\left(k_1z_1+k_2z_2+k_3z_3\right)\\&=-\left(6z_1+11z_2+6z_3\right)\\&=-\left(6\phi_1+11L_f\phi_1+6L_f^2\phi_1\right)\end{aligned} \tag{42}$$

但若要將υ整理成像(26)的$u\left(x\right)$，會太過冗長。故在此採用另一種方法，計算輸入控制訊號。(37)式和(38)式結合後可以得到

$$u\left(z\right)=-\beta\left(z\right)Kz+\alpha\left(z\right) \tag{43}$$

再將狀態轉換關係帶入(43)，則可以計算出對非線性系統的控制律

$$u\left(x\right)=-\beta\left(x\right)K\phi\left(x\right)+\alpha\left(x\right) \tag{43}$$

其中$\alpha\left(x\right)$和$\beta\left(x\right)$分別為(34)、(35)表示。

由以上結果，我們可以知道在不同的$\phi_1(x)$選擇下，可以產生不同的控制律$u(x)$，且能然可以使必迴路極點位於$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(-1,-2,-3)$。這可以推論出不管$\phi_1(x)$的選擇為何，最後閉迴路線性系統的響應皆會相同。

為了驗證此結果，吾人繪製了兩種不同的$\phi_1(x)$選擇下，系統狀態變數對時間的響應，選擇之初始值一樣為$(x_1,x_2,x_3)=(2,2,2)$，結果如圖 32。

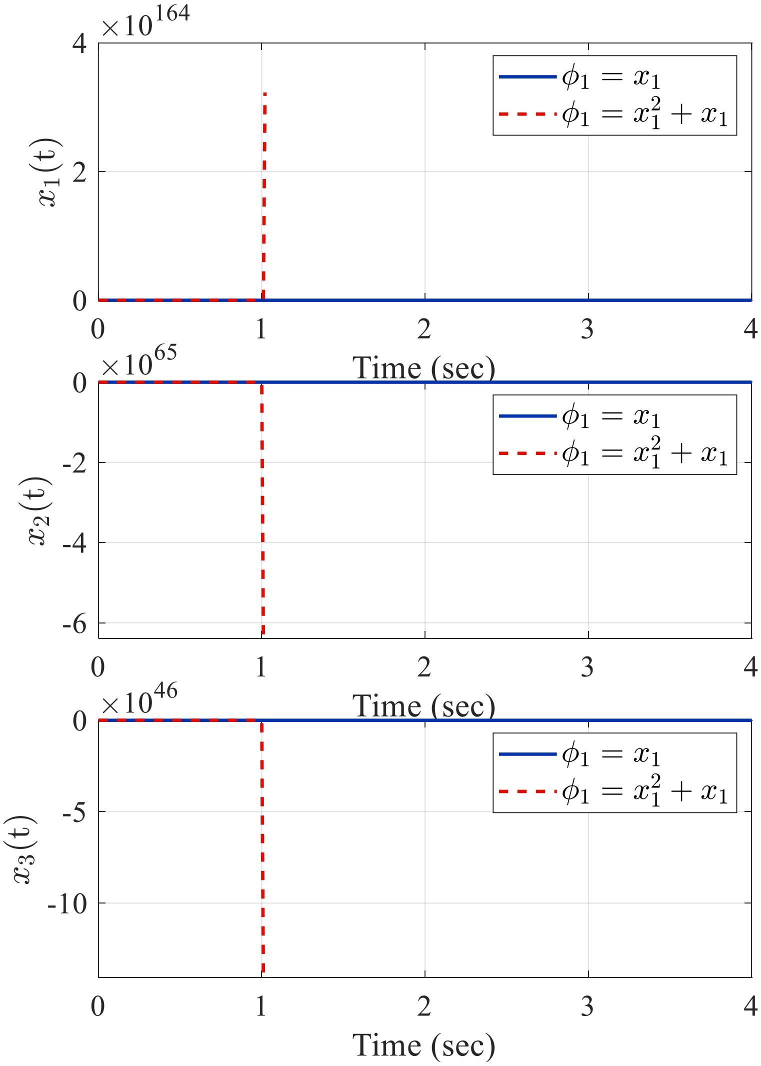

圖 32、不同狀態轉換函數$\phi_1(x)$於相同初值$(x_1,x_2,x_3)=(2,2,2)$所造成之系統狀態時間響應比較

原先認為在相同的系統極點下，兩個不同$\phi_1(x)$選擇所產生之系統響應圖之間，只會存在不同的響應值，但是有相同的收斂速度。但是由圖 32 可知，新選擇之$\phi_1(x)=x_1+x_1^2$無法完成收斂。會造成此結果的原因可由式(34)、(35)得知。原先的$\phi_1(x)=x_1$會在

$x_1 = -1$ 處產生一個不可控的點，也就是奇異點。但是由(34)、(35)可以看到原先的不可控點由一個 $x_1 = -1$ 變成兩個，也就是 $x_1 = -1$ 和 $x_1 = -0.5$。增加的不可控點也代表著對此系統初始值選擇的限制，原先只須避開 $x_1 = -1$，但現在還需要避開 $x_1 = -0.5$。為了對比不同 $\phi_1(x)$ 所帶來的差異，吾人又選擇一可讓兩個不同 $\phi_1(x)$ 值之系統收斂的初始值 $(x_1, x_2, x_3) = (4,1,1)$，結果如圖 33 所示。

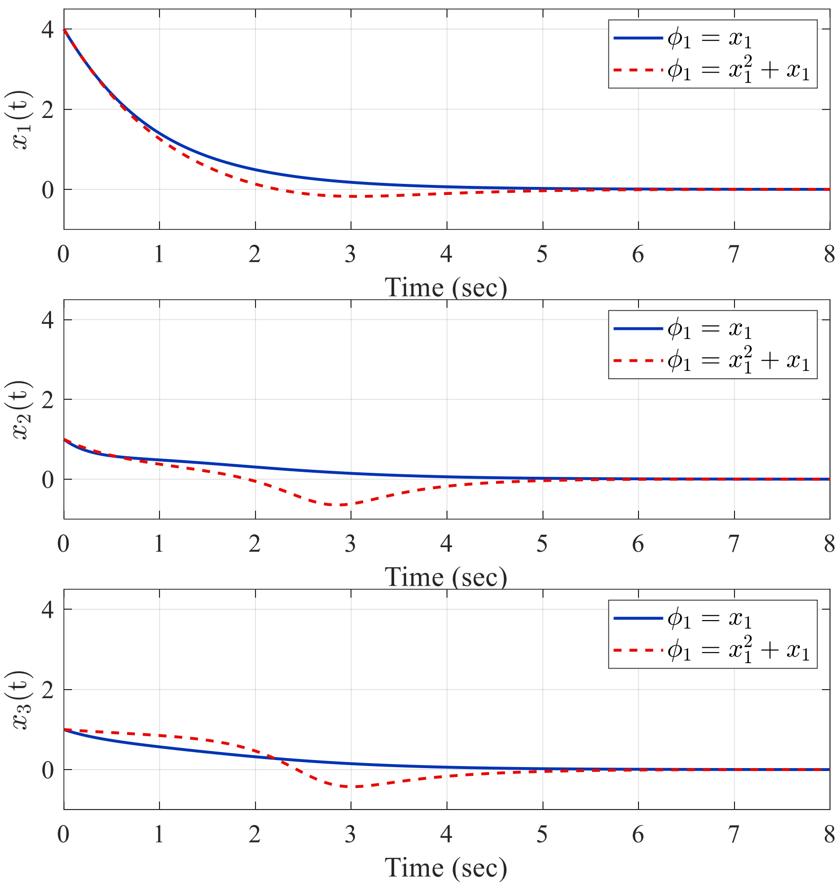

圖 33、不同狀態轉換函數 $\phi_1(x)$ 於相同初值 $(x_1, x_2, x_3) = (4,1,1)$ 所造成之系統狀態時間響應比較

由圖 33 可知，系統狀態的響應和前面推論相符合，不同的 $\phi_1(x)$ 選擇會使系統狀態變數產生差異，但因此回授線性化系統的極點選擇相同，故會有相同的收斂速度，由圖中可以看出兩個曲線收斂至 0 的時間大致相同。除了系統狀態時間響應外，輸入控制時間響應也是一個可以參考的目標，圖 34、35 畫出初始值 $(x_1, x_2, x_3) = (2,2,2)$、$(x_1, x_2, x_3) = (4,1,1)$ 所產生之輸入控制時間響應圖，且可以得到和系統狀態時間響應相同的結論，也就是 $\phi_1(x) = x_1 + x_1^2$ 會使原先可以收斂的初始值 $(x_1, x_2, x_3) = (2,2,2)$，變成無法收斂的時間響應，如圖 34。而在皆可收斂的初始值選擇下，系統的輸入控制響應值會不相同，但是收斂速度會相同。

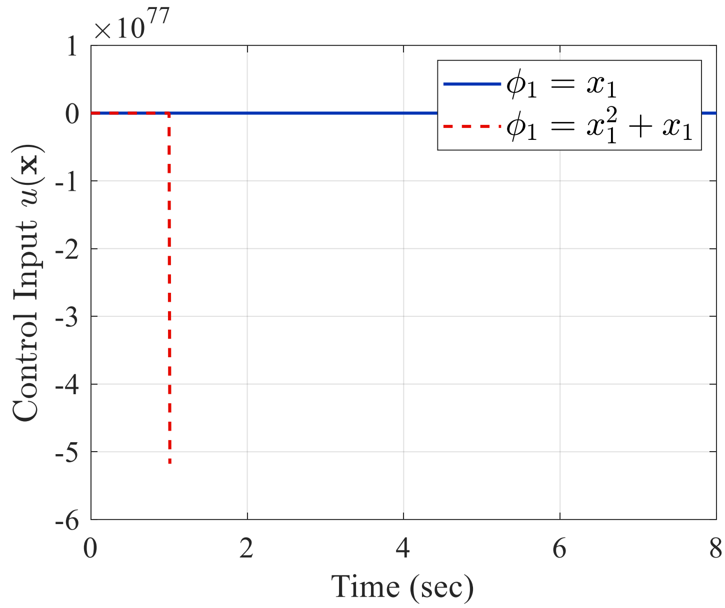

圖 34、不同狀態轉換函數$\phi_1(x)$於特定初值之不同控制輸入響應，初始值

$(x_1, x_2, x_3) = (2,2,2)$

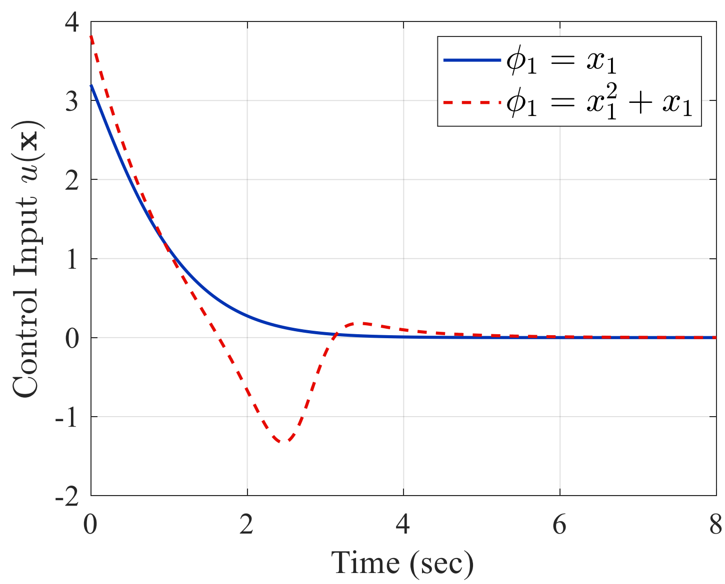

圖 34、不同狀態轉換函數$\phi_1(x)$於特定初值之不同控制輸入響應，初始值

$(x_1, x_2, x_3) = (4,1,1)$

綜上所述，可自由選擇之$\phi_1(x)$使控制$u(x)$不唯一。但是會使初始值選擇的限制不相同，以設計控制器角度來看，在相同的系統響應時間下來看，應選擇限制較少的$\phi_1(x)$使用。

MATLAB Code
Question 2

```
%% Nonlinear Control HW6_2
clc;
clear;
close all;

%%
dt=0.01;
t_final=20;
t=0:dt:t_final;
LW1=1.6;
FS1=16;
FS_lg=11;

%% Single Point
f1=figure;
x1_0=2; x2_0=2; x3_0=2;
X0=[x1_0;x2_0;x3_0];
[t,x]=ode45(@Nonlinear_system, t, X0);
plot3(x(:,1),x(:,2),x(:,3), 'b', 'LineWidth', LW1)
hold on
plot3(x1_0,x2_0,x3_0,'bo','LineWidth',LW1);
plot3([-4 4],[0 0],[0 0],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW1);
plot3([0 0],[-4 4],[0 0],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW1);
plot3([0 0],[0 0],[-4 4],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW1);
hs3(1)=legend({'$\mathbf{x}$(0)=(2,2,2)'},'Interpreter','latex');
ax3(1)=gca;
xlabel('$x_1$','Interpreter','Latex')
ylabel('$x_2$','Interpreter','Latex')
zlabel('$x_3$','Interpreter','Latex')
axis([-1.5 2.5 -1 2.5 -1 2.5])
axis normal
grid on

%% Choose 10 arbitrary points 3D plot
f2=figure;
x1=[-5;5;5];
x2=[5;-5;5];
x3=[5;5;-5];
x4=[-5;-5;5];
x5=[5;-5;-5];
x6=[-5;5;-5];
x7=[5;5;5];
x8=[-5;-5;-5];
```

```
x9=[4;1;6];
x10=[-8;4;3];
x_arb=[x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10];
ColorCode = [0,0.15,0.39; 0,0.3,0.8 ; 0,0.39,0.7 ; 0,0.47,0.51 ; 0,0.47,0.39 ; 0,0.55,0.35 ;
0,0.63,0.35 ; 0,0.75,0.6 ; 0,0.85,0.5 ; 0,0.95,0.4];
for i=1:length(x_arb(1,:))
   [t,x_10] = RK4(@(t,x_10) Nonlinear_system(t,x_10) , [0 t_final], x_arb(:,i) ,dt);
   x1_arb=x_10(:,1);
   x2_arb=x_10(:,2);
   x3_arb=x_10(:,3);

   p2(i)=plot3(x1_arb, x2_arb, x3_arb, 'Color', ColorCode(i,:), 'LineWidth', LW1);
   hold on
   plot3(x1_arb(1), x2_arb(1), x3_arb(1),'o', 'Color', ColorCode(i,:), 'LineWidth', LW1);
end
plot3([-40 10],[0 0],[0 0],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW1);
plot3([0 0],[-7000 1500],[0 0],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW1);
plot3([0 0],[0 0],[-7000 150],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW1);
hs3(2)=legend([p2(1),p2(2),p2(3),p2(4),p2(5),p2(6),p2(7),p2(8),p2(9),p2(10)],{'$\mathbf{x}$(
0)=(-5,5,5)','$\mathbf{x}$(0)=(5,-5,5)','$\mathbf{x}$(0)=(5,5,-5)','$\mathbf{x}$(0)=(-5,-
5,5)','$\mathbf{x}$(0)=(5,-5,-5)','$\mathbf{x}$(0)=(-5,5,-
5)','$\mathbf{x}$(0)=(5,5,5)','$\mathbf{x}$(0)=(-5,-5,-
5)','$\mathbf{x}$(0)=(4,1,6)','$\mathbf{x}$(0)=(-8,4,3)'},'Interpreter','latex');
ax3(2) = gca ;
xlabel('$x_1$','Interpreter','Latex')
ylabel('$x_2$','Interpreter','Latex')
zlabel('$x_3$','Interpreter','Latex')
axis([-40 10 -7000 1500 -7000 150])
axis normal
grid on

%% Choose 10 arbitrary points x1-x2 plot
f3=figure;
for i=1:length(x_arb(1,:))
   [t,x_10] = RK4(@(t,x_10) Nonlinear_system(t,x_10) , [0 t_final], x_arb(:,i) ,dt);
   x1_arb=x_10(:,1);
   x2_arb=x_10(:,2);

   p3(i)=plot(x1_arb, x2_arb,'Color', ColorCode(i,:), 'LineWidth', LW1);
   hold on
   plot(x1_arb(1), x2_arb(1),'o', 'Color', ColorCode(i,:), 'LineWidth', LW1);
end
plot([-40 10],[0 0],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW1);
plot([0 0],[-7000 1500],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW1);
hs2(1)=legend([p3(1),p3(2),p3(3),p3(4),p3(5),p3(6),p3(7),p3(8),p3(9),p3(10)],{'$\mathbf{x}$(
0)=(-5,5,5)','$\mathbf{x}$(0)=(5,-5,5)','$\mathbf{x}$(0)=(5,5,-5)','$\mathbf{x}$(0)=(-5,-
```

```
5,5)','$\mathbf{x}$(0)=(5,-5,-5)','$\mathbf{x}$(0)=(-5,5,-
5)','$\mathbf{x}$(0)=(5,5,5)','$\mathbf{x}$(0)=(-5,-5,-
5)','$\mathbf{x}$(0)=(4,1,6)','$\mathbf{x}$(0)=(-8,4,3)'},'Interpreter','latex');
ax2(1) = gca ;
xlabel('$x_1$','Interpreter','Latex')
ylabel('$x_2$','Interpreter','Latex')
axis([-40 10 -7000 1500])
axis normal
grid on

%% Choose 10 arbitrary points x1-x3 plot
f4=figure;
for i=1:length(x_arb(1,:))
   [t,x_10] = RK4(@(t,x_10) Nonlinear_system(t,x_10) , [0 t_final], x_arb(:,i) ,dt);
   x1_arb=x_10(:,1);
   x3_arb=x_10(:,3);

   p4(i)=plot(x1_arb, x3_arb ,'Color', ColorCode(i,:), 'LineWidth', LW1);
   hold on
   plot(x1_arb(1), x3_arb(1),'o', 'Color', ColorCode(i,:), 'LineWidth', LW1);
end
plot([-40 10],[0 0],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW1);
plot([0 0],[-7000 150],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW1);
hs2(2)=legend([p4(1),p4(2),p4(3),p4(4),p4(5),p4(6),p4(7),p4(8),p4(9),p4(10)],{'$\mathbf{x}$(
0)=(-5,5,5)','$\mathbf{x}$(0)=(5,-5,5)','$\mathbf{x}$(0)=(5,5,-5)','$\mathbf{x}$(0)=(-5,-
5,5)','$\mathbf{x}$(0)=(5,-5,-5)','$\mathbf{x}$(0)=(-5,5,-
5)','$\mathbf{x}$(0)=(5,5,5)','$\mathbf{x}$(0)=(-5,-5,-
5)','$\mathbf{x}$(0)=(4,1,6)','$\mathbf{x}$(0)=(-8,4,3)'},'Interpreter','latex');
ax2(2) = gca ;
xlabel('$x_1$','Interpreter','Latex')
ylabel('$x_3$','Interpreter','Latex')
axis([-40 10 -7000 150])
axis normal
grid on

%% Choose 10 arbitrary points x2-x3 plot
f5=figure;
for i=1:length(x_arb(1,:))
   [t,x_10] = RK4(@(t,x_10) Nonlinear_system(t,x_10) , [0 t_final], x_arb(:,i) ,dt);
   x2_arb=x_10(:,2);
   x3_arb=x_10(:,3);

   p5(i)=plot(x2_arb, x3_arb,'Color', ColorCode(i,:), 'LineWidth', LW1);
   hold on
   plot(x2_arb(1), x3_arb(1),'o', 'Color', ColorCode(i,:), 'LineWidth', LW1);
end
```

```
plot([-7000 1500],[0 0],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW1);
plot([0 0],[-7000 150],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW1);
hs2(3)=legend([p5(1),p5(2),p5(3),p5(4),p5(5),p5(6),p5(7),p5(8),p5(9),p5(10)],{'$\mathbf{x}$(
0)=(-5,5,5)','$\mathbf{x}$(0)=(5,-5,5)','$\mathbf{x}$(0)=(5,5,-5)','$\mathbf{x}$(0)=(-5,-
5,5)','$\mathbf{x}$(0)=(5,-5,-5)','$\mathbf{x}$(0)=(-5,5,-
5)','$\mathbf{x}$(0)=(5,5,5)','$\mathbf{x}$(0)=(-5,-5,-
5)','$\mathbf{x}$(0)=(4,1,6)','$\mathbf{x}$(0)=(-8,4,3)'},'Interpreter','latex');
ax2(3) = gca ;
xlabel('$x_2$','Interpreter','Latex')
ylabel('$x_3$','Interpreter','Latex')
axis([-7000 1500 -7000 150])
axis normal
grid on

%% Choose 10 arbitrary points 3D plot Again
f6=figure;
x1=[1;2;4]; x2=[2;-3;-5]; x3=[-0.5;-3;-9]; x4=[0;-2;-3]; x5=[4;-6;-6];
x6=[5;7;5]; x7=[6;8;-4]; x8=[7;9;3]; x9=[8;10;-2]; x10=[9;11;1];
x_arb_re=[x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10];
ColorCode = [0,0.15,0.39; 0,0.3,0.8 ; 0,0.39,0.7 ; 0,0.47,0.51 ; 0,0.47,0.39 ; 0,0.55,0.35 ;
0,0.63,0.35 ; 0,0.75,0.6 ; 0,0.85,0.5 ; 0,0.95,0.4];
for i=1:length(x_arb_re(1,:))
   [t,x_10_re] = RK4(@(t,x_10_re) Nonlinear_system(t,x_10_re) , [0 t_final],
x_arb_re(:,i) ,dt);
   x1_arb_re=x_10_re(:,1);
   x2_arb_re=x_10_re(:,2);
   x3_arb_re=x_10_re(:,3);


   % Check For Divergence
   if max(x1_arb_re)>15 || abs(max(x1_arb_re))>15
      disp(i)
      disp(': x1_arb_re divergent')
   end

   if max(x2_arb_re)>15 || abs(max(x2_arb_re))>15
      disp(i)
      disp(': x2_arb_re divergent')
   end

   if max(x3_arb_re)>15 || abs(max(x3_arb_re))>15
      disp(i)
      disp(': x3_arb_re divergent')
   end

   p6(i)=plot3(x1_arb_re, x2_arb_re, x3_arb_re, 'Color', ColorCode(i,:), 'LineWidth', LW1);
```

```
    hold on
    plot3(x1_arb_re(1), x2_arb_re(1), x3_arb_re(1),'o', 'Color', ColorCode(i,:), 'LineWidth',
LW1);
end
plot3([-2 10],[0 0],[0 0],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW1);
plot3([0 0],[-10 15],[0 0],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW1);
plot3([0 0],[0 0],[-10 5],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW1);
hs3(3)=legend([p6(1),p6(2),p6(3),p6(4),p6(5),p6(6),p6(7),p6(8),p6(9),p6(10)],{'$\mathbf{x}$(
0)=(1;2;4)','$\mathbf{x}$(0)=(2;-3;-5)','$\mathbf{x}$(0)=(-0.5;-3;-9)','$\mathbf{x}$(0)=(0;-
2;-3)','$\mathbf{x}$(0)=(4;-6;-6)','$\mathbf{x}$(0)=(5;7;5)','$\mathbf{x}$(0)=(6;8;-
4)','$\mathbf{x}$(0)=(7;9;3)','$\mathbf{x}$(0)=(8;10;-
2)','$\mathbf{x}$(0)=(9;11;1)'},'Interpreter','latex');
ax3(3) = gca ;
xlabel('$x_1$','Interpreter','Latex')
ylabel('$x_2$','Interpreter','Latex')
zlabel('$x_3$','Interpreter','Latex')
axis([-2 10 -10 15 -10 5])
axis normal
grid on

%% Choose 10 arbitrary points x1-x2 plot again
f7=figure;
for i=1:length(x_arb_re(1,:))
    [t,x_10_re] = RK4(@(t,x_10_re) Nonlinear_system(t,x_10_re) , [0 t_final],
x_arb_re(:,i) ,dt);
    x1_arb_re=x_10_re(:,1);
    x2_arb_re=x_10_re(:,2);

    p7(i)=plot(x1_arb_re, x2_arb_re,'Color', ColorCode(i,:), 'LineWidth', LW1);
    hold on
    plot(x1_arb_re(1), x2_arb_re(1),'o', 'Color', ColorCode(i,:), 'LineWidth', LW1);
end
ax2(4) = gca ;
xlabel('$x_1$','Interpreter','Latex')
ylabel('$x_2$','Interpreter','Latex')
axis normal
grid on

%% Choose 10 arbitrary points x1-x3 plot again
f8=figure;
for i=1:length(x_arb_re(1,:))
    [t,x_10_re] = RK4(@(t,x_10_re) Nonlinear_system(t,x_10_re) , [0 t_final],
x_arb_re(:,i) ,dt);
    x1_arb_re=x_10_re(:,1);
    x3_arb_re=x_10_re(:,3);
```

```
    p8(i)=plot(x1_arb_re, x3_arb_re,'Color', ColorCode(i,:), 'LineWidth', LW1);
    hold on
    plot(x1_arb_re(1), x3_arb_re(1),'o', 'Color', ColorCode(i,:), 'LineWidth', LW1);
end
ax2(5) = gca ;
xlabel('$x_1$','Interpreter','Latex')
ylabel('$x_3$','Interpreter','Latex')
axis normal
grid on

%% Choose 10 arbitrary points x2-x3 plot again
f9=figure;
for i=1:length(x_arb_re(1,:))
    [t,x_10_re] = RK4(@(t,x_10_re) Nonlinear_system(t,x_10_re) , [0 t_final],
x_arb_re(:,i) ,dt);
    x1_arb_re=x_10_re(:,1);
    x2_arb_re=x_10_re(:,2);
    x3_arb_re=x_10_re(:,3);

    p9(i)=plot(x2_arb_re, x3_arb_re,'Color', ColorCode(i,:), 'LineWidth', LW1);
    hold on
    plot(x2_arb_re(1), x3_arb_re(1),'o', 'Color', ColorCode(i,:), 'LineWidth', LW1);
end
ax2(6) = gca ;
xlabel('$x_2$','Interpreter','Latex')
ylabel('$x_3$','Interpreter','Latex')
axis normal
grid on

%%
f10=figure;
ColorCode = [0,0.15,0.39; 0,0.3,0.8 ; 0,0.39,0.7 ; 0,0.47,0.51 ; 0,0.47,0.39 ; 0,0.55,0.35 ;
0,0.63,0.35 ; 0,0.75,0.6 ; 0,0.85,0.5 ; 0,0.95,0.4];
for i=1:length(x_arb(1,:))
    [t,x_10] = RK4(@(t,x_10) Nonlinear_system(t,x_10) , [0 t_final], x_arb(:,i) ,dt);
    x1_arb=x_10(:,1);
    x2_arb=x_10(:,2);
    x3_arb=x_10(:,3);
    endvalue(i,1)=x1_arb(end);
    endvalue(i,2)=x1_arb(end);
    endvalue(i,3)=x1_arb(end);
     p10(i)=plot3(endvalue(i,1), endvalue(i,2), endvalue(i,3),'o', 'Color', ColorCode(i,:),
'LineWidth', LW1);
    hold on
end
plot3([-0.00005 0.00005],[0 0],[0 0],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW1);
```

```
plot3([0 0],[-0.00005 0.00005],[0 0],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW1);
plot3([0 0],[0 0],[-0.00005 0.00005],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW1);
hs3(4)=legend([p10(1),p10(2),p10(3),p10(4),p10(5),p10(6),p10(7),p10(8),p10(9),p10(10)],{'$\mathbf{x}$(0)=(-5,5,5)','$\mathbf{x}$(0)=(5,-5,5)','$\mathbf{x}$(0)=(5,5,-5)','$\mathbf{x}$(0)=(-5,-5,5)','$\mathbf{x}$(0)=(5,-5,-5)','$\mathbf{x}$(0)=(-5,5,-5)','$\mathbf{x}$(0)=(5,5,5)','$\mathbf{x}$(0)=(-5,-5,-5)','$\mathbf{x}$(0)=(4,1,6)','$\mathbf{x}$(0)=(-8,4,3)'},'Interpreter','latex');
ax3(4) = gca ;
xlabel('$x_1$','Interpreter','Latex')
ylabel('$x_2$','Interpreter','Latex')
zlabel('$x_3$','Interpreter','Latex')
axis([-0.00005 0.00005 -0.00005 0.00005 -0.00005 0.00005])
axis normal
grid on
%%
for i = 1:length(ax3)
    set(ax3(i),'FontSize',FS1,'FontName','Times New Roman')
end
for i = 1:length(ax2)
    set(ax2(i),'FontSize',FS1,'FontName','Times New Roman')
end
for i = 1:length(hs3)
    set(hs3(i),'FontSize',FS_lg,'FontName','Times New Roman')
end
for i = 1:length(hs2)
    set(hs2(i),'FontSize',FS_lg,'FontName','Times New Roman')
end
%% Nonlinear System Funciton
function dX=Nonlinear_system(t,x)
phi_1=x(1);
phi_2=-x(1)+x(2)-x(3);
phi_3=2*x(1)-2*x(2)+x(3)-x(1)*x(3);
a=-3*x(1)+4*x(2)-2*x(3)+3*x(1)*x(3)-x(2)*x(3)+(x(1))^2+(x(3))^2;
b=-1-x(1);
k1=6;
k2=11;
k3=6;
u=(b^(-1))*(-a-k1*phi_1-k2*phi_2-k3*phi_3);
dX=zeros(3,1);
dX(1)=-x(1)+x(2)-x(3);
dX(2)=-x(1)*x(3)-x(2)+u;
dX(3)=-x(1)+u;
end
```

<u>Question 3</u>

```
%% Nonlinear Control HW6_3
clc;
```

```
clear;
close all;

%%
dt=0.01;
t_final=2000;
t=0:dt:t_final;
LW1=1.6;
FS1=16;
FS_lg=11;

%% Single Point with Feedback Linearization Control
f1=figure;
x1_0=-2.5; x2_0=2; x3_0=2;
X0=[x1_0;x2_0;x3_0];
[t,x_u] = RK4(@(t,x_u) Nonlinear_system(t,x_u) , [0 t_final], X0 ,dt);
x_u_1=x_u(:,1);
x_u_2=x_u(:,2);
x_u_3=x_u(:,3);
p1=plot3(x_u_1,x_u_2,x_u_3, 'b', 'LineWidth', LW1);
hold on
plot3(x_u_1(1),x_u_2(1),x_u_3(1),'bo','LineWidth',LW1);
hold on

%% Single Point without Feedback Linearization Control
x1_0=-2.5; x2_0=2; x3_0=2;
X0=[x1_0;x2_0;x3_0];
[t,x_nou] = RK4(@(t,x_nou) Nonlinear_system_u0(t,x_nou) , [0 t_final], X0 ,dt);
x_nou_1=x_nou(:,1);
x_nou_2=x_nou(:,2);
x_nou_3=x_nou(:,3);
p2=plot3(x_nou_1,x_nou_2,x_nou_3, 'r', 'LineWidth', LW1);
hold on
plot3(x_nou_1(1), x_nou_2(1), x_nou_3(1),'ro','LineWidth',LW1);
plot3([-3 0],[0 0],[0 0],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW1);
plot3([0 0],[-1000 1000],[0 0],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW1);
plot3([0 0],[0 0],[-1000 1000],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW1);
hs3(1)=legend([p1, p2],{'$\mathbf{x}$(0)=(-2.5,2,2) $u\neq0$','$\mathbf{x}$(0)=(-2.5,2,2)
$u=0$'},'Interpreter','latex');
ax3(1)=gca;
xlabel('$x_1$','Interpreter','Latex')
ylabel('$x_2$','Interpreter','Latex')
zlabel('$x_3$','Interpreter','Latex')
axis([-3 0 -1000 1000 -1000 1000])
axis normal
grid on
```

```
%% Plot x1-x2
f2=figure;
p3=plot(x_u_1,x_u_2, 'b', 'LineWidth', LW1);
hold on
plot(x_u_1(1),x_u_2(1),'bo','LineWidth',LW1);
hold on
p4=plot(x_nou_1,x_nou_2, 'r', 'LineWidth', LW1);
hold on
plot(x_nou_1(1),x_nou_2(1), 'ro', 'LineWidth', LW1);
plot([-3 0],[0 0],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW1);
plot([0 0],[-1000 1000],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW1);
ax2(1) = gca ;
xlabel('$x_1$','Interpreter','Latex')
ylabel('$x_2$','Interpreter','Latex')
axis([-3 0 -1000 2500])
axis normal
grid on

%% Plot x1-x3
f3=figure;
p5=plot(x_u_1,x_u_3, 'b', 'LineWidth', LW1);
hold on
plot(x_u_1(1),x_u_3(1),'bo','LineWidth',LW1);
hold on
p6=plot(x_nou_1,x_nou_3, 'r', 'LineWidth', LW1);
hold on
plot(x_nou_1(1),x_nou_3(1), 'ro', 'LineWidth', LW1);
plot([-3 0],[0 0],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW1);
plot([0 0],[-1000 2500],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW1);
ax2(2) = gca ;
xlabel('$x_1$','Interpreter','Latex')
ylabel('$x_3$','Interpreter','Latex')
axis([-3 0 -1000 2500])
axis normal
grid on

%% Plot x2-x3
f4=figure;
p7=plot(x_u_2,x_u_3, 'b', 'LineWidth', LW1);
hold on
plot(x_u_2(1),x_u_3(1),'bo','LineWidth',LW1);
hold on
p8=plot(x_nou_2,x_nou_3, 'r', 'LineWidth', LW1);
hold on
plot(x_nou_2(1),x_nou_3(1), 'ro', 'LineWidth', LW1);
```

```
plot([-1000 2500],[0 0],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW1);
plot([0 0],[-1000 2500],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW1);
ax2(3) = gca ;
xlabel('$x_2$','Interpreter','Latex')
ylabel('$x_3$','Interpreter','Latex')
axis([-1000 2500 -1000 2500])
axis normal
grid on

%%
for i = 1:length(ax3)
   set(ax3(i),'FontSize',FS1,'FontName','Times New Roman')
end
for i = 1:length(ax2)
   set(ax2(i),'FontSize',FS1,'FontName','Times New Roman')
end
for i = 1:length(hs3)
   set(hs3(i),'FontSize',FS_lg,'FontName','Times New Roman')
end
%% Nonlinear System Funciton
function dX=Nonlinear_system_u0(t,x)
dX=zeros(3,1);
dX(1)=-x(1)+x(2)-x(3);
dX(2)=-x(1)*x(3)-x(2);
dX(3)=-x(1);
end

%% Nonlinear System Funciton
function dX=Nonlinear_system(t,x)
u=(1/(-1-x(1)))*(-(x(1))^2-4*x(1)-3*x(2)-(x(3))^2+7*x(3)+3*x(1)*x(3)+x(2)*x(3));
dX=zeros(3,1);
dX(1)=-x(1)+x(2)-x(3);
dX(2)=-x(1)*x(3)-x(2)+u;
dX(3)=-x(1)+u;
end
```

Question 4

```
%% Nonlinear Control HW6_4
clc;
clear;
close all;

%%
dt=0.01;
t_final=4;
t=0:dt:t_final;
```

```
LW1=1.6;
FS1=16;
FS_lg=11;

%%
f1 = figure;
x1=[1;2;4]; x2=[2;-3;-5]; x3=[-0.5;-3;-9]; x4=[0;-2;-3]; x5=[4;-6;-6];
x6=[5;7;5]; x7=[6;8;-4]; x8=[7;9;3]; x9=[8;10;-2]; x10=[9;11;1];
x_arb_re1=[x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10];
ColorCode=[0,0.15,0.39; 0,0.3,0.8 ; 0,0.39,0.7 ; 0,0.47,0.51 ; 0,0.47,0.39 ; 0,0.55,0.35 ;
0,0.63,0.35 ; 0,0.75,0.6 ; 0,0.85,0.5 ; 0,0.95,0.4];
for i=1:length(x_arb_re1(1,:))
   [t,x1]=RK4(@(t,x1) Nonlinear_system(t, x1), [0 t_final], x_arb_re1(:,i), dt);
   x1_1=x1(:,1);
   x1_2=x1(:,2);
   x1_3=x1(:,3);
   for j=1:length(t)
       u1(j)=(1/(-1- x1_1(j)))*(-( x1_1(j))^2-4* x1_1(j)-3*x1_2(j)-(x1_3(j))^2+7*x1_3(j)+3*
x1_1(j)*x1_3(j)+x1_2(j)*x1_3(j));
   end
   u1_all(i,:)=u1;
   p1(i)=plot(t,u1, 'Color', ColorCode(i,:), 'LineWidth', LW1);
   hold on
end
hs2(1)=legend([p1(1),p1(2),p1(3),p1(4),p1(5),p1(6),p1(7),p1(8),p1(9),p1(10)],...
                    {'$\mathbf{x}$(0)=(1,2,4)','$\mathbf{x}$(0)=(2,-3,-5)','$\mathbf{x}$(0)=(-
0.5,-3,-9)',...
                     '$\mathbf{x}$(0)=(0,-2,-3)','$\mathbf{x}$(0)=(4,-6,-
6)','$\mathbf{x}$(0)=(5,7,5)',...
                     '$\mathbf{x}$(0)=(6,8,-4)','$\mathbf{x}$(0)=(7,9,3)','$\mathbf{x}$(0)=(8,10,-
2)',...
                     '$\mathbf{x}$(0)=(9,11,1)'},'Interpreter','latex');
ax2(1) = gca ;
xlabel('Time (sec)')
ylabel('Control Input $u(\mathbf{x})$','Interpreter','Latex')
axis normal
grid on

%%
f2 = figure;
x1=[-5;5;5]; x2=[5;-5;5]; x3=[5;5;-5]; x4=[-5;-5;5]; x5=[5;-5;-5];
x6=[-5;5;-5]; x7=[5;5;5]; x8=[-5;-5;-5]; x9=[4;1;6]; x10=[-8;4;3];
x_arb_re2=[x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10];
ColorCode=[0,0.15,0.39; 0,0.3,0.8 ; 0,0.39,0.7 ; 0,0.47,0.51 ; 0,0.47,0.39 ; 0,0.55,0.35 ;
0,0.63,0.35 ; 0,0.75,0.6 ; 0,0.85,0.5 ; 0,0.95,0.4];
for i=1:length(x_arb_re2(1,:))
```

```
    [t,x1]=RK4(@(t,x1) Nonlinear_system(t, x1), [0 t_final], x_arb_re2(:,i), dt);
    x2_1=x1(:,1);
    x2_2=x1(:,2);
    x2_3=x1(:,3);
    for j=1:length(t)
        u2(j)=(1/(-1- x2_1(j)))*(-( x2_1(j))^2-4* x2_1(j)-3*x2_2(j)-(x2_3(j))^2+7*x2_3(j)+3*
x2_1(j)*x2_3(j)+x2_2(j)*x2_3(j));
%         if i==4 && j==250
%             x2_1(j)
%             x2_2(j)
%             x2_3(j)
%         end
    end
    u2_all(i,:)=u2;
    p2(i)=plot(t,u2, 'Color', ColorCode(i,:), 'LineWidth', LW1);
    hold on
end
hs2(2)=legend([p2(1),p2(2),p2(3),p2(4),p2(5),p2(6),p2(7),p2(8),p2(9),p2(10)],{'$\mathbf{x}$(
0)=(-5,5,5)','$\mathbf{x}$(0)=(5,-5,5)','$\mathbf{x}$(0)=(5,5,-5)','$\mathbf{x}$(0)=(-5,-
5,5)','$\mathbf{x}$(0)=(5,-5,-5)','$\mathbf{x}$(0)=(-5,5,-
5)','$\mathbf{x}$(0)=(5,5,5)','$\mathbf{x}$(0)=(-5,-5,-
5)','$\mathbf{x}$(0)=(4,1,6)','$\mathbf{x}$(0)=(-8,4,3)'},'Interpreter','latex');
ax2(2) = gca ;
xlabel('Time (sec)')
ylabel('Control Input $u(\mathbf{x})$','Interpreter','Latex')
axis normal
grid on

%%
f3 = figure;
x1=[-0.01;0.01;0.1]; x2=[0.01;-0.01;0.01]; x3=[0.01;0.01;-0.01]; x4=[-0.01;-0.01;0.01]; x5=[-
0.01;0.01;-0.01];
x6=[0.01;-0.01;-0.01]; x7=[0.01;0.01;0.01]; x8=[-0.01;-0.01;-0.01]; x9=[0.001;0.001;0.001];
x10=[-0.001;-0.001;-0.001];
x_arb_re3=[x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10];
ColorCode=[0,0.15,0.39; 0,0.3,0.8 ; 0,0.39,0.7 ; 0,0.47,0.51 ; 0,0.47,0.39 ; 0,0.55,0.35 ;
0,0.63,0.35 ; 0,0.75,0.6 ; 0,0.85,0.5 ; 0,0.95,0.4];
for i=1:length(x_arb_re3(1,:))
    [t,x1]=RK4(@(t,x1) Nonlinear_system(t, x1), [0 t_final], x_arb_re3(:,i), dt);
    x3_1=x1(:,1);
    x3_2=x1(:,2);
    x3_3=x1(:,3);
    for j=1:length(t)
        u3(j)=(1/(-1- x3_1(j)))*(-( x3_1(j))^2-4* x3_1(j)-3*x3_2(j)-(x3_3(j))^2+7*x3_3(j)+3*
x3_1(j)*x3_3(j)+x3_2(j)*x3_3(j));
    end
```

```
    u3_all(i,:)=u3;
    p3(i)=plot(t,u3, 'Color', ColorCode(i,:), 'LineWidth', LW1);
    hold on
end
hs2(3)=legend([p3(1),p3(2),p3(3),p3(4),p3(5),p3(6),p3(7),p3(8),p3(9),p3(10)],...
                    {'$\mathbf{x}$(0)=(-0.01,0.01,0.01)','$\mathbf{x}$(0)=(0.01,-
0.01,0.01)','$\mathbf{x}$(0)=(0.01,0.01,-0.01)',...
                    '$\mathbf{x}$(0)=(-0.01,-0.01,0.01)','$\mathbf{x}$(0)=(-0.01,0.01,-
0.01)','$\mathbf{x}$(0)=(0.01,-0.01,-0.01)',...
                    '$\mathbf{x}$(0)=(0.01,0.01,0.01)','$\mathbf{x}$(0)=(-0.01,-0.01,-
0.01)','$\mathbf{x}$(0)=(0.001,0.001,0.001)',...
                    '$\mathbf{x}$(0)=(-0.001,-0.001,-0.001)'},'Interpreter','latex');
ax2(3) = gca ;
xlabel('Time (sec)')
ylabel('Control Input $u(\mathbf{x})$','Interpreter','Latex')
axis normal
grid on

%%
f4 = figure;
x1=[100;100;100]; x2=[-100;100;100]; x3=[100;-100;100]; x4=[100;100;-100]; x5=[-100;-
100;100];
x6=[-100;100;-100]; x7=[100;-100;-100]; x8=[-100;-100;-100]; x9=[1000;1000;1000]; x10=[-
1000;-1000;-1000];
x_arb_re4=[x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10];
ColorCode=[0,0.15,0.39; 0,0.3,0.8 ; 0,0.39,0.7 ; 0,0.47,0.51 ; 0,0.47,0.39 ; 0,0.55,0.35 ;
0,0.63,0.35 ; 0,0.75,0.6 ; 0,0.85,0.5 ; 0,0.95,0.4];
for i=1:length(x_arb_re4(1,:))
    [t,x1]=RK4(@(t,x1) Nonlinear_system(t, x1), [0 t_final], x_arb_re4(:,i), dt);
    x4_1=x1(:,1);
    x4_2=x1(:,2);
    x4_3=x1(:,3);
    for j=1:length(t)
        u4(j)=(1/(-1- x4_1(j)))*(-( x4_1(j))^2-4* x4_1(j)-3*x4_2(j)-(x4_3(j))^2+7*x4_3(j)+3*
x4_1(j)*x4_3(j)+x4_2(j)*x4_3(j));
        if i==9 && j==11
            x4_1(j)
            x4_2(j)
            x4_3(j)
        end
    end
    u4_all(i,:)=u4;
    p4(i)=plot(t,u4, 'Color', ColorCode(i,:), 'LineWidth', LW1);
    hold on
end
hs2(4)=legend([p4(1),p4(2),p4(3),p4(4),p4(5),p4(6),p4(7),p4(8),p4(9),p4(10)],...
```

```
                    {'$\mathbf{x}$(0)=(100,100,100)','$\mathbf{x}$(0)=(-
100,100,100)','$\mathbf{x}$(0)=(100,-100,100)',...
                    '$\mathbf{x}$(0)=(100,100,-100)','$\mathbf{x}$(0)=(-100,-
100,100)','$\mathbf{x}$(0)=(-100,100,-100)',...
                    '$\mathbf{x}$(0)=(100,-100,-100)','$\mathbf{x}$(0)=(-100,-100,-
100)','$\mathbf{x}$(0)=(1000,1000,1000)',...
                    '$\mathbf{x}$(0)=(-1000,-1000,-1000)'},'Interpreter','latex');
ax2(4) = gca ;
xlabel('Time (sec)')
ylabel('Control Input $u(\mathbf{x})$','Interpreter','Latex')
axis normal
grid on
u5=u4_all';

%%
for i = 1:length(ax2)
   set(ax2(i),'FontSize',FS1,'FontName','Times New Roman')
end
for i = 1:length(hs2)
   set(hs2(i),'FontSize',FS_lg,'FontName','Times New Roman')
end

%%
function dX=Nonlinear_system(t,x)
u=(1/(-1-x(1)))*(-(x(1))^2-4*x(1)-3*x(2)-(x(3))^2+7*x(3)+3*x(1)*x(3)+x(2)*x(3));
dX=zeros(3,1);
dX(1)=-x(1)+x(2)-x(3);
dX(2)=-x(1)*x(3)-x(2)+u;
dX(3)=-x(1)+u;
end
```

Question 5

```
%% Nonlinear Control HW6_5
clc;
clear;
close all;

%%
dt = 0.01 ; t_final = 6 ;
t = 0 : dt : t_final ;
x1_0 = 2 ;  % Initial of x1
x2_0 = 2 ;  % Initial of x2
x3_0 = 2 ;  % Initial of x3
X0 = [ x1_0 ; x2_0 ; x3_0 ] ;

%%%%%% 10 arbitrary initial state values %%%%%%%%%%%%%%
```

```
xt1 = [9 ; 6 ; 3] ; xt2 = [8 ; 6 ; 4] ; xt3 = [5.5 ; 2 ; -6] ; xt4 = [4 ; 1 ; -4] ; xt5 = [3 ; -3 ; -5] ;
xt6 = [2 ; 5 ; 2.5] ; xt7 = [7 ; 8 ; 4] ; xt8 = [1 ; -2 ; -3] ; xt9 = [-0.5 ; 3 ; 4] ; xt10 = [4 ; 7 ; 3.5] ;
Xt_0 = [ xt1 , xt2 , xt3 , xt4 , xt5 , xt6 , xt7 , xt8 , xt9 , xt10 ] ;
%% linear System
Z0 = [ x1_0 ; -x1_0+x2_0-x3_0 ; 2*x1_0-2*x2_0+x3_0-x1_0*x3_0] ; % Initial of
transformation states Z
Ac = [ 0 1 0 ; 0 0 1 ; 0 0 0 ] ; % Linear system matrix
Bc = [ 0 ; 0 ; 1 ] ; % Linear system input matrix
lambda = [-1,-2,-3] ; %  Poles of closed loop system
K = acker(Ac,Bc,lambda) ; % Output feedback control gain

%%%%%% 10 arbitrary initial state values %%%%%%%%%%%%%%
for i = 1:10
   Zt_0(:,i) = [ Xt_0(1,i) ; -Xt_0(1,i)+Xt_0(2,i)-Xt_0(3,i) ;  2*Xt_0(1,i)-
2*Xt_0(2,i)+Xt_0(3,i)-Xt_0(1,i)*Xt_0(3,i) ] ;
end

%% Plot 1
LW1 = 1.6 ;
LW2 = 1 ;
FS1 = 16 ;
FS_lg = 18 ;

[ t , X ] = RK4( @(t,X) Nonlinear_system(K,X) , [0 t_final], X0 ,dt) ;
x1_c = X(:,1) ; x2_c = X(:,2) ; x3_c = X(:,3) ;
for i = 1 : length(t)
Phi(:,i) = [ x1_c(i) ; -x1_c(i)+x2_c(i)-x3_c(i) ; 2*x1_c(i)-2*x2_c(i)+x3_c(i)-x1_c(i)*x3_c(i)] ;
u_alpha(i) = (-3*x1_c(i)+4*x2_c(i)-2*x3_c(i)+3*x1_c(i)*x3_c(i)-
x2_c(i)*x3_c(i)+x1_c(i)^2+x3_c(i)^2)/(x1_c(i)+1) ;
u_beta(i) = -1/(x1_c(i)+1) ;
u_c(i) =  -u_beta(i)*K*Phi(:,i) + u_alpha(i) ;
end

[ t , Z ] = RK4( @(t,Z) Linear_system(K,Ac,Bc,Z) , [0 t_final], Z0 ,dt) ;
z1_c = Z(:,1) ; z2_c = Z(:,2) ; z3_c = Z(:,3) ;

f1 = figure ;
plot(t,x1_c,'-','Color',[0 0.2 0.7],'LineWidth',LW1) ; hold on ;
plot(t,x2_c,'--','Color',[0 0.65 0.2],'LineWidth',LW1) ;
plot(t,x3_c,'-.','Color',[0 0.6 0.7],'LineWidth',LW1) ;
plot(t,2*exp(-3*t),'r:','LineWidth',LW1+0.2) ;
hs1(1)=legend({'$x_1(t)$','$x_2(t)$','$x_3(t)$'},'Interpreter','latex');
hs1(1)=legend({'$x_1(t)$','$x_2(t)$','$x_3(t)$','2$e^{-3t}$'},'Interpreter','latex');
ax1(1) = gca ;
xlabel('Time (sec)')
ylabel('States   $\mathbf{x}(t)$','Interpreter','Latex')
```

```
axis([0 t_final -1 2.5])
axis square
grid on

f2 = figure ;
plot(t,z1_c,'-','Color',[0 0.2 0.7],'LineWidth',LW1) ; hold on ;
plot(t,z2_c,'--','Color',[0 0.65 0.2],'LineWidth',LW1) ;
plot(t,z3_c,'-.','Color',[0 0.6 0.7],'LineWidth',LW1) ;
plot(t,2*exp(-3*t),'r:','LineWidth',LW1+0.2) ;
plot(t,-2*exp(-3*t),'r:','LineWidth',LW1+0.2)
hs1(2)=legend({'$z_1(t)$','$z_2(t)$','$z_3(t)$'},'Interpreter','latex');
hs1(2)=legend({'$z_1(t)$','$z_2(t)$','$z_3(t)$','$\pm$2$e^{-3t}$'},'Interpreter','latex');
ax1(2) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('States   $\mathbf{z}(t)$','Interpreter','Latex') % y label
axis([0 t_final -3 3])
axis square
grid on

%%


for i = 1:length(ax1)
   set(ax1(i),'FontSize',FS1,'FontName','Times New Roman')
end

for i = 1:length(hs1)
   set(hs1(i),'FontSize',FS_lg,'FontName','Times New Roman')
end

%% Nonlinear System Function
function dX = Nonlinear_system(K,X)
x1 = X(1) ; x2 = X(2) ; x3 = X(3) ;

Phi = [ x1 ; -x1+x2-x3 ; 2*x1-2*x2+x3-x1*x3] ;
alpha = (-3*x1+4*x2-2*x3+3*x1*x3-x2*x3+x1^2+x3^2)/(x1+1) ;
beta = -1/(x1+1) ;
u = -beta*K*Phi + alpha ;  % Control Input

dx1 = -x1 + x2 - x3 ;
dx2 = -x1*x3 - x2 + u ;
dx3 = -x1 + u ;
dX = [ dx1 ; dx2 ; dx3 ] ;
end

%% Linear System Function
```

```
function dZ = Linear_system(K,Ac,Bc,Z)
v = -K*Z ; % Cotrol Input
dZ = Ac*Z + Bc*v ;
end
```

Question 6

```
%% Nonlinear Control HW6_6
clc;
clear;
close all;

%%
dt=0.01;
t_final=4;
t=0:dt:t_final;
x1_0=2;
x2_0=2;
x3_0=2;
X0=[x1_0;x2_0;x3_0];
LW1=1.6;
FS1=16;
FS_lg=14;

%%
Ac = [ 0 1 0 ; 0 0 1 ; 0 0 0 ] ;
Bc = [ 0 ; 0 ; 1 ] ;
lambda_1 = [-1,-2,-3] ;
K1 = acker(Ac,Bc,lambda_1) ;
lambda_2 = [-3,-3,-3] ;
K2 = acker(Ac,Bc,lambda_2) ;
lambda_3 = [-10,-10,-10] ;
K3 = acker(Ac,Bc,lambda_3) ;

%%
[t1, x1]=RK4( @(t1,x1) Nonlinear_system(K1,x1) , [0 t_final], X0 ,dt);
[t2, x2]=RK4( @(t2,x2) Nonlinear_system(K2,x2) , [0 t_final], X0 ,dt);
[t3, x3]=RK4( @(t3,x3) Nonlinear_system(K3,x3) , [0 t_final], X0 ,dt);
x1_1=x1(:,1); x2_1=x1(:,2); x3_1=x1(:,3);
x1_2=x2(:,1); x2_2=x2(:,2); x3_2=x2(:,3);
x1_3=x3(:,1); x2_3=x3(:,2); x3_3=x3(:,3);

for k = 1 : length(t1)
   Phi_1(:,k) = [ x1_1(k) ; -x1_1(k)+x2_1(k)-x3_1(k) ; 2*x1_1(k)-2*x2_1(k)+x3_1(k)-
x1_1(k)*x3_1(k)] ;
   u_alpha_1(k) = (-3*x1_1(k)+4*x2_1(k)-2*x3_1(k)+3*x1_1(k)*x3_1(k)-
x2_1(k)*x3_1(k)+x1_1(k)^2+x3_1(k)^2)/(x1_1(k)+1) ;
   u_beta_1(k) = -1/(x1_1(k)+1) ;
```

```
    u_1(k) =  -u_beta_1(k)*K1*Phi_1(:,k) + u_alpha_1(k) ;
end

for k = 1 : length(t2)
    Phi_2(:,k) = [ x1_2(k) ; -x1_2(k)+x2_2(k)-x3_2(k) ; 2*x1_2(k)-2*x2_2(k)+x3_2(k)-
x1_2(k)*x3_2(k)] ;
    u_alpha_2(k) = (-3*x1_2(k)+4*x2_2(k)-2*x3_2(k)+3*x1_2(k)*x3_2(k)-
x2_2(k)*x3_2(k)+x1_2(k)^2+x3_2(k)^2)/(x1_2(k)+1) ;
    u_beta_2(k) = -1/(x1_2(k)+1) ;
    u_2(k)=-u_beta_2(k)*K2*Phi_2(:,k) + u_alpha_2(k) ;
end

for k = 1 : length(t3)
    Phi_3(:,k) = [ x1_3(k) ; -x1_3(k)+x2_3(k)-x3_3(k) ; 2*x1_3(k)-2*x2_3(k)+x3_3(k)-
x1_3(k)*x3_3(k)] ;
    u_alpha_3(k) = (-3*x1_3(k)+4*x2_3(k)-2*x3_3(k)+3*x1_3(k)*x3_3(k)-
x2_3(k)*x3_3(k)+x1_3(k)^2+x3_3(k)^2)/(x1_3(k)+1) ;
    u_beta_3(k) = -1/(x1_3(k)+1) ;
    u_3(k)=-u_beta_3(k)*K3*Phi_3(:,k) + u_alpha_3(k) ;
end

f1 = figure;
plot(t,x1_1,'-','Color',[0 0.2 0.7],'LineWidth',LW1); hold on
plot(t,x2_1,'--','Color',[0 0.65 0.2],'LineWidth',LW1); hold on
plot(t,x3_1,'-.','Color',[0 0.6 0.7],'LineWidth',LW1); hold on
plot(t,2*exp(-t),'r:','LineWidth',LW1+0.2); hold on
hs(1)=legend({'$x_1(t)$','$x_2(t)$','$x_3(t)$','2$e^{-t}$'},'Interpreter','latex');
ax(1) = gca ;
xlabel('Time (sec)')
ylabel('States   $\mathbf{x}(t)$','Interpreter','Latex')
title('($\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$)=(-1, -2, -3)','Interpreter','latex')
axis([0 t_final -1 2.5])
axis square
grid on

f2 = figure;
plot(t,x1_2,'-','Color',[0 0.2 0.7],'LineWidth',LW1); hold on
plot(t,x2_2,'--','Color',[0 0.65 0.2],'LineWidth',LW1); hold on
plot(t,x3_2,'-.','Color',[0 0.6 0.7],'LineWidth',LW1); hold on
plot(t,2*exp(-t),'r:','LineWidth',LW1+0.2); hold on
hs(2)=legend({'$x_1(t)$','$x_2(t)$','$x_3(t)$','2$e^{-t}$'},'Interpreter','latex');
ax(2) = gca ;
xlabel('Time (sec)')
ylabel('States   $\mathbf{x}(t)$','Interpreter','Latex')
title('($\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$)=(-3, -3, -3)','Interpreter','latex')
axis([0 t_final -1 2.5])
```

```
axis square
grid on


f3=figure;
plot(t,u_1,'r','LineWidth',LW1)
hs(3)=legend({'$\mathbf{x}$(0)=(2,2,2)'},'Interpreter','latex');
ax(3) = gca ;
xlabel('Time (sec)')
ylabel('Control Input $u(\mathbf{x})$','Interpreter','Latex')
title('($\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$)=(-1, -2, -3)','Interpreter','latex')
axis([0 t_final -3 0.1])
axis normal
grid on

f4=figure;
plot(t,u_2,'r','LineWidth',LW1)
hs(4)=legend({'$\mathbf{x}$(0)=(2,2,2)'},'Interpreter','latex');
ax(4) = gca ;
xlabel('Time (sec)')
ylabel('Control Input $u(\mathbf{x})$','Interpreter','Latex')
title('($\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$)=(-3, -3, -3)','Interpreter','latex')
axis([0 t_final -3 0.1])
axis normal
grid on

f5 = figure;
plot(t,x1_3,'-','Color',[0 0.2 0.7],'LineWidth',LW1); hold on
plot(t,x2_3,'--','Color',[0 0.65 0.2],'LineWidth',LW1); hold on
plot(t,x3_3,'-.','Color',[0 0.6 0.7],'LineWidth',LW1); hold on
plot(t,2*exp(-t),'r:','LineWidth',LW1+0.2); hold on
hs(5)=legend({'$x_1(t)$','$x_2(t)$','$x_3(t)$','2$e^{-t}$'},'Interpreter','latex');
ax(5) = gca ;
xlabel('Time (sec)')
ylabel('States   $\mathbf{x}(t)$','Interpreter','Latex')
title('($\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$)=(-10, -10, -10)','Interpreter','latex')
% axis([0 t_final -1 2.5])
axis square
grid on

f6=figure;
plot(t,u_3,'r','LineWidth',LW1)
hs(6)=legend({'$\mathbf{x}$(0)=(2,2,2)'},'Interpreter','latex');
ax(6) = gca ;
xlabel('Time (sec)')
ylabel('Control Input $u(\mathbf{x})$','Interpreter','Latex')
```

```
title('($\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$)=(-10, -10, -10)','Interpreter','latex')
% axis([0 t_final -3 0.1])
axis normal
grid on

for i = 1:length(ax)
    set(ax(i),'FontSize',FS1,'FontName','Times New Roman')
end
for i = 1:length(hs)
    set(hs(i),'FontSize',FS_lg,'FontName','Times New Roman')
end
%% Nonlinear System Function
function dX = Nonlinear_system(K,X)
x1 = X(1) ; x2 = X(2) ; x3 = X(3) ;

Phi = [ x1 ; -x1+x2-x3 ; 2*x1-2*x2+x3-x1*x3] ;
alpha = (-3*x1+4*x2-2*x3+3*x1*x3-x2*x3+x1^2+x3^2)/(x1+1) ;
beta = -1/(x1+1) ;
u = -beta*K*Phi + alpha ;  % Control Input

dx1 = -x1 + x2 - x3 ;
dx2 = -x1*x3 - x2 + u ;
dx3 = -x1 + u ;
dX = [ dx1 ; dx2 ; dx3 ] ;
end
```

Question 7

```
%% Nonlinear Control HW6_7
clc;
clear;
close all;

%%
dt = 0.01 ; t_final = 8 ;
t = 0 : dt : t_final ;
x1_0 = 4 ;
x2_0 = 1 ;
x3_0 = 1 ;
% x1_0 = 2 ;
% x2_0 = 2 ;
% x3_0 = 2 ;
X0 = [ x1_0 ; x2_0 ; x3_0 ] ;

%% linear System
Ac = [ 0 1 0 ; 0 0 1 ; 0 0 0 ] ;
Bc = [ 0 ; 0 ; 1 ] ;
```

```
lambda = [-1,-2,-3] ;
K = acker(Ac,Bc,lambda) ;

%% Plot 1
LW1 = 1.6 ;
LW2 = 1 ;
FS1 = 16 ;
FS_lg = 18 ;

[ t , X1 ] = RK4( @(t,X) Nonlinear_system1(K,X) , [0 t_final], X0 ,dt) ;
x1_c1 = X1(:,1) ; x2_c1 = X1(:,2) ; x3_c1 = X1(:,3) ;
for i = 1 : length(t)
Phi1(:,i) = [ x1_c1(i) ; -x1_c1(i)+x2_c1(i)-x3_c1(i) ; 2*x1_c1(i)-2*x2_c1(i)+x3_c1(i)-
x1_c1(i)*x3_c1(i)] ;
u_alpha1(i) = (-3*x1_c1(i)+4*x2_c1(i)-2*x3_c1(i)+3*x1_c1(i)*x3_c1(i)-
x2_c1(i)*x3_c1(i)+x1_c1(i)^2+x3_c1(i)^2)/(x1_c1(i)+1) ;
u_beta1(i) = -1/(x1_c1(i)+1) ;
u_c1(i) =  -u_beta1(i)*K*Phi1(:,i) + u_alpha1(i) ;
end

[ t , X2 ] = RK4( @(t,X) Nonlinear_system2(K,X) , [0 t_final], X0 ,dt) ;
x1_c2 = X2(:,1) ; x2_c2 = X2(:,2) ; x3_c2 = X2(:,3) ;
for i = 1 : length(t)
Phi2(:,i) = [ x1_c2(i)+x1_c2(i)^2 ;...
        -x1_c2(i)+x2_c2(i)-x3_c2(i)-2*x1_c2(i)^2+2*x1_c2(i)*x2_c2(i)-
2*x1_c2(i)*x3_c2(i) ;...
        (-1-4*x1_c2(i)+2*x2_c2(i)-2*x3_c2(i))*(-x1_c2(i)+x2_c2(i)-
x3_c2(i))+(1+2*x1_c2(i))*(-x1_c2(i)*x3_c2(i)-x2_c2(i))+(1+2*x1_c2(i))*x1_c2(i)] ;
u_alpha2(i) = ((12*x1_c2(i)-8*x2_c2(i)+5*x3_c2(i)-4*x1_c2(i)*x3_c2(i)+1)*(-
x1_c2(i)+x2_c2(i)-x3_c2(i))-...
              (-8*x1_c2(i)+4*x2_c2(i)-4*x3_c2(i)-2)*(x1_c2(i)*x3_c2(i)+x2_c2(i))-...
              (5*x1_c2(i)-4*x2_c2(i)+4*x3_c2(i)-
2*x1_c2(i)^2+1)*x1_c2(i))/((2*x1_c2(i)+1)*(x1_c2(i)+1)) ;
u_beta2(i) = -1/((2*x1_c2(i)+1)*(x1_c2(i)+1)) ;

u_c2(i) =  -u_beta2(i)*K*Phi2(:,i) + u_alpha2(i) ;
end

f1 = figure ;
plot(t,u_c1,'Color',[0 0.2 0.7],'LineWidth',LW1) ; hold on
plot(t,u_c2,'--','Color',[0.9 0.04 0],'LineWidth',LW1)
xlabel('Time (sec)')
ylabel('Control Input $u(\mathbf{x})$','Interpreter','Latex')
xlim([0 t_final])
% ylim([-5 5])
hs1(1)=legend({'$\phi_1 = x_1$','$\phi_1 = x_1^2 +  x_1$'},'Interpreter','latex');
```

```
ax1(1) = gca ;
axis normal
grid on

for i = 1:length(ax1)
   set(ax1(i),'FontSize',FS1,'FontName','Times New Roman')
end

for i = 1:length(hs1)
   set(hs1(i),'FontSize',FS_lg,'FontName','Times New Roman')
end

%%
f2 = figure ;
set(f2,'Position',[680,190,593,788])
subplot(3,1,1)
plot(t,x1_c1,'-','Color',[0 0.2 0.7],'LineWidth',LW1+0.15) ; hold on ;
plot(t,x1_c2,'--','Color',[0.9 0.04 0],'LineWidth',LW1+0.15) ;
hs2(1)=legend({'$\phi_1 = x_1$','$\phi_1 = x_1^2 +  x_1$'},'Interpreter','latex');
ax2(1) = gca ;
set(ax2(1),'Position',[0.1230 , 0.72 , 0.8088 , 0.2426])
xlabel('Time (sec)')
ylabel('$x_1$(t)','Interpreter','Latex')
xlim([0 t_final])
ylim([-1 4.5])
grid on

subplot(3,1,2)
plot(t,x2_c1,'-','Color',[0 0.2 0.7],'LineWidth',LW1+0.15) ; hold on ;
plot(t,x2_c2,'--','Color',[0.9 0.04 0],'LineWidth',LW1+0.15) ;
hs2(2)=legend({'$\phi_1 = x_1$','$\phi_1 = x_1^2 +  x_1$'},'Interpreter','latex');
ax2(2) = gca ;
set(ax2(2),'Position',[0.1230 , 0.4 , 0.8088 , 0.2426])
xlabel('Time (sec)')
ylabel('$x_2$(t)','Interpreter','Latex')
xlim([0 t_final])
ylim([-1 4.5])
grid on

subplot(3,1,3)
plot(t,x3_c1,'-','Color',[0 0.2 0.7],'LineWidth',LW1+0.15) ; hold on ;
plot(t,x3_c2,'--','Color',[0.9 0.04 0],'LineWidth',LW1+0.15) ;
hs2(3)=legend({'$\phi_1 = x_1$','$\phi_1 = x_1^2 +  x_1$'},'Interpreter','latex');
ax2(3) = gca ;
xlabel('Time (sec)')
ylabel('$x_3$(t)','Interpreter','Latex')
```

```
set(ax2(3),'Position',[0.1230 , 0.08 , 0.8088 , 0.2426])
xlim([0 t_final])
ylim([-1 4.5])
grid on

for i = 1:length(ax2)
    set(ax2(i),'FontSize',FS1,'FontName','Times New Roman')
end

for i = 1:length(hs2)
    set(hs2(i),'FontSize',16,'FontName','Times New Roman')
end
%% Nonlinear System Function
function dX = Nonlinear_system1(K,X)
x1 = X(1) ; x2 = X(2) ; x3 = X(3) ;

Phi = [ x1 ; -x1+x2-x3 ; 2*x1-2*x2+x3-x1*x3] ;
alpha = (-3*x1+4*x2-2*x3+3*x1*x3-x2*x3+x1^2+x3^2)/(x1+1) ;
beta = -1/(x1+1) ;
u = -beta*K*Phi + alpha ;  % Control Input

dx1 = -x1 + x2 - x3 ;
dx2 = -x1*x3 - x2 + u ;
dx3 = -x1 + u ;
dX = [ dx1 ; dx2 ; dx3 ] ;
end

function dX = Nonlinear_system2(K,X)
x1 = X(1) ; x2 = X(2) ; x3 = X(3) ;

Phi = [ x1+x1^2 ;...
        -x1+x2-x3-2*x1^2+2*x1*x2-2*x1*x3 ;...
        (-1-4*x1+2*x2-2*x3)*(-x1+x2-x3)+(1+2*x1)*(-x1*x3-x2)+(1+2*x1)*x1] ;
alpha = ((12*x1-8*x2+5*x3-4*x1*x3+1)*(-x1+x2-x3)-(-8*x1+4*x2-4*x3-2)*(x1*x3+x2)-
(5*x1-4*x2+4*x3-2*x1^2+1)*x1)/((2*x1+1)*(x1+1)) ;
beta = -1/((2*x1+1)*(x1+1)) ;
u = -beta*K*Phi + alpha ;  % Control Input

dx1 = -x1 + x2 - x3 ;
dx2 = -x1*x3 - x2 + u ;
dx3 = -x1 + u ;
dX = [ dx1 ; dx2 ; dx3 ] ;
end
```