

## Chapter 9

### 適應性控制(Adaptive Control)

相對於強健控制，適應性控制是控制理論的另一個大類型，它能夠因應環境的變化，隨時自動調整控制的法則與策略。適應性控制的發展過程曾經遇到許多阻礙，但隨著理論的不斷改良與電腦計算能力的躍增，適應性控制如今已經是非常實用的控制手段。以下略述它發展過程中的幾個重要階段：

- (1) 1950 年代初期，由於高性能戰機自動駕駛儀(autopilot)的設計，需要適應飛行狀況的劇烈變化，從而引發適應性參考模式控制(Model Reference Adaptive Control)的設計理念(Whitaker, Yamron and Kezer, 1958)，以及 Self-tuning 適應性控制理念(Kalman, 1958)。
- (2) 適應性控制發展初期由於理論的缺乏，電腦計算能力的不足，再加上飛行測試的失敗(Taylor and Adkins, 1965)，使其在 1950 年末及 1960 年初之期間幾乎消失。
- (3) 1960 年代是適應性控制奠定學理基礎之時期。在此時期內，狀態空間(state-space)表示法(Rosenbrock, 1970)，Lyapunov 穩定性定理(Parks, 1966)，系統識別及參數估測理論(Astrom and Eykko, 1971)相繼被提出，均有助於適應性控制之成長。
- (4) 到了 1970 年代，適應性控制的穩定性分析趨於成熟(Egardt, 1979)，由於電腦逐漸發達，數位控制及離散系統的廣泛應用(Goodwin and Sin, 1984)，增強了適應性控制的實用性。參考模式適應性控制(MRAC)在此時間內有突破性的發展，而且有數個成功的應用實例(Narendra and Monopoli, 1980; Harris and Billings, 1981)。
- (5) 於 1980 年代初期，適應性控制的發展遭遇到挫折。一些學者發現當系統存在有「無結構的不確定性」<sup>1</sup> (unstructured uncertainty)時，或遭受外來的干擾(disturbance)時，適應性控制會變成發散，不能達到控制的目的(Egardt, 1979)。也就是說，適應性控制缺乏強健(robust)的特性(Ioannou and Kokotovic, 1984)。
- (6) 1980 年代中期，具有強健性的改良型適應性控制器被提出(Rohrs, et al., 1985; Slotine and Coetsee, 1986)，一直到 1980 年代末，強健適應性控制持續被改良(Ioannou and Sun, 1988; Taylor, 1989; Ortega and Yu, 1989)，加強了暫態及穩態響應(Datta and Ioannou, 1991)，並被擴展至線性時變系統(Tsakalis and Ioannou, 1993)。
- (7) 進入 1990 年代，適應性控制被延伸至非線性系統，而更廣義的架構也被提出，用以統一各種改良型的強健適應性控制。整體來看，「強健性」(Ioannou and Sun, 1996)與「非線性」(Sastry and Isidori, 1989; Kanellakopoulos, Kokotovic and Morse, 1991; Krstic, Kanellakopoulos and Kokotovic, 1995; Khalil, 1996)仍是適應性控制的二大發展方向。而此二方向的結合進一步產生非線性強健適應性控制的研究成果(Chen, Lee and Chang, 1997; Freeman, Krstic and Kokotovic, 1998; Kosmatopoulos and Ioannou, 2002)。
- (8) 進入 21 世紀以後，適應性控制逐漸與模糊-類神經網路結合，藉由類神經網路的非線性建模，擴展了適應控制的應用範圍，除了增加強健性並能確保性能規格的滿足(Calise,

<sup>1</sup>當一受控體表成  $G_0(s) + \Delta G$ ，其中  $\Delta G$  之階數及係數均不知，僅知道  $\Delta G$  的上界，如  $|\Delta G| < \varepsilon$ ，則稱此系統存在有「無結構的不確定性」。當一受控體可表成  $a/(s+b)$  時，則其結構確切已知(分子零階，分母一階)，但其參數  $a, b$  會變化，故稱此系統具有「結構化的不確定性」。

Hovakimyan and Idan, 2001; Xu and Ioannou, 2003; Ge and Wang, 2004; Li, et al., 2004, Bechlioulis and Rovithakis, 2008; Boutalis, et al., 2014)。

本章是為初學適應性控制的讀者所做的一個的簡介，各相關主題的進一步探討，可參閱本章後面所列的參考文獻。適應性控制的功能在自動調整控制器的結構與參數，以適應外在環境的改變。而根據其調整的自主性與調整的快慢程度，適應性控制可區分為三大類：(A) 自動調整型(auto-tuning)控制器，(B) 增益排程型(gain-scheduling)控制器，(C) 適應型(adaptation)控制器。本章將分別介紹這三種類型的適應性控制，討論它們各自適用的時機及優缺點。

## 9.1 三種類型的適應性控制

在分別介紹三種類型的適應性控制之前，我們先做一個歸納整理，比較它們適應性調整機制的不同，並了解它們的優缺點及適用的時機。

(A) 自動調整型(auto-tuning)控制器：

- 控制器參數：控制器自動調整。
- 調整時機：由使用者所決定。例如使用者只要按一個鍵，自動調整控制器即自動根據按鍵當時的受授體狀況，自動決定控制器的最佳參數；但使用者若不按鍵，則控制器即不調整，繼續使用原有的參數設定。
- 調整頻率：由使用者決定。
- 使用時機：自動調整型的控制器適用於受授體的狀態未知，但其特性卻不會改變，或改變很慢的情形。

(B) 增益排程型(gain-scheduling)控制器：

- 控制器參數：自動調整。
- 調整時機：自動決定。
- 調整頻率：由使用者預先規劃。例如將受控體的操作環境，分成 $n$ 個狀況，每一個狀況有一組控制器，及對應的參數設定值，且事先存在電腦中。當感測器發現操作狀況改變時，則通知電腦將新的操作狀況所對應的控制器參數呼叫出來，存入控制器中。圖 9.1.1 是以飛機的增益排程控制為例，將飛機的飛行範圍依據高度 $h$ 及速度(馬赫數 $M$ )分割成 $n$ 個區域，再對每一個飛行區域設計線性 PI 控制器，求得控制增益值分別為 $K_{Pi}$ 、 $K_{Ii}$ 並加以儲存。當飛機飛行區域改變時，其控制器的增益值也隨之變化。
- 使用時機：受控體的整體操作範圍已知，且容易將其劃分成有限個區域組合。

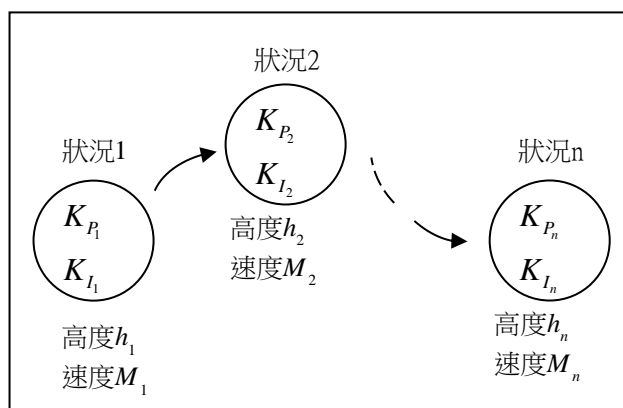


圖 9.1.1 飛機針對不同的飛行區域設計增益排程控制器。

## (C) 適應型(adaptation)控制器：

- 控制器參數：自動調整
- 調整時機：自動決定且隨時調整
- 調整頻率：自動決定，環境變化快時，控制器參數也變化快；完全依環境而定。
- 適用時機：受控體的操作環境無法預估，且無規則性或重覆性，無法事先規劃。

以上三種適應性控制法則歸納成如下表：

表 10.1.1 三種適應性控制法則比較表

特性/種類	自動調整型	增益排程型	適應型
控制器參數值	自動調整	自動調整	自動調整
調整時機	使用者決定	自動決定	自動決定
調整頻率	使用者決定	預先規劃	依環境自動變化
適用環境	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 有未知動態，但特性不變或變化很慢。</li> <li>● 人為監控環境下。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 操作環境變化大</li> <li>● 有重覆性，可預先分割成小區域。</li> <li>● 沒有突發狀況。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 操作環境無法預估範圍大小。</li> <li>● 沒有重覆性，無法做規律的分割。</li> </ul>
優缺點	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 調整機制簡單</li> <li>● 需使用者隨時監控</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 調整機制簡單</li> <li>● 不需使用者監控</li> <li>● 對於突發或新的狀況無法處理。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 依環境的變化而反應，不需人監控。</li> <li>● 可應付突發狀況。</li> <li>● 調整機制複雜。</li> </ul>
應用實例	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 自動調整 PID</li> <li>● 工業控制</li> <li>● 程序控制</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 飛行控制</li> <li>● 強健路徑控制</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 自我調變控制</li> <li>● 參考模式適應控制</li> </ul>
目前進展	一般自動化產業	高精密科技	學術性研發

自動調整和增益排程控制因為結構簡單，在工業界被廣泛的應用，但也因為容易實現，學理成熟，比較少出現於碩、博士論文或學術性論文。目前學術界所講的適應性控制，通常是專指適應型(adaptation)而言。根據控制器產生方式的不同，Adaptation 又可分為兩大類：

## (1) 數學模式法(model-based method)：

此方法又稱為間接(indirect)法，如圖 9.1.2 所示。此法含有二大步驟：

- 利用系統識別(system identification)法求得受控體的數學模式。
- 再利用所得的模式去決定控制器的參數。

- 當模式改變時，控制器參數也隨之變化，故此法又稱為自我調變適應控制器(self-tuning adaptive controller)。

(2) 經驗邏輯法(rule-based method)：

此方法又稱為直接法(direct method)，因為不需估測受控體的模式，而「直接」以知識庫或經驗邏輯去求得控制器的參數，例如

- 參考模式適應控制(model reference adaptive control)
- 模糊控制(fuzzy control)
- 類神經網路模糊控制(neural-network-fuzzy control)

等等均是屬於經驗邏輯法，此法的特色是不需建構受控體的數學模型，但必須將受控體的行為以知識庫或模糊法則的方法表示出來。

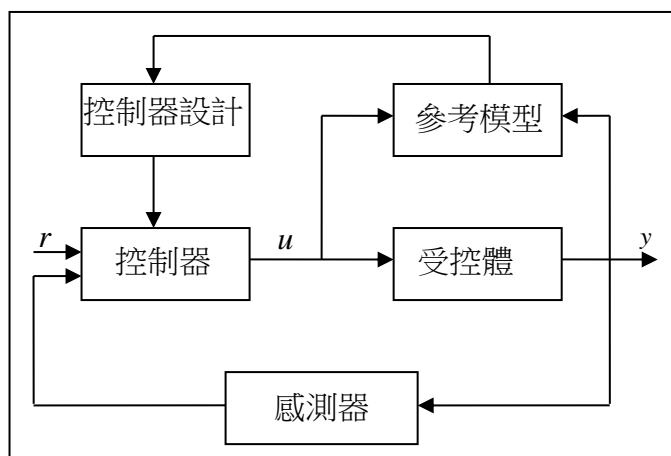


圖 9.1.2 基於受控體數學模式的適應性控制

(D) 工業用適應性控制器：

表 10.1.2 列出幾種不同廠牌的適應性控制器的性能，可分類成自我調整型(automatic tuning)、增益排程(gain scheduling)、及適應型(adaptation)三種類型的功能，有些控制器兼具其中二種，甚至三種功能。自動調整型控制器所使用的輸入訊號可分為四種：步階輸入(Step)，斜坡輸入(Ramp)，弦波輸入(Relay)，隨機二位元數列輸入(PRBS)。前面三種輸入法將在下面章節中討論。適應型控制器又可區分成回授(feedback)及前授(feedforward)二種不同設計。

表 10.1.2 不同適應性控制器的性能比較

Manufacturer	Controller	Automatic Tuning	Gain Scheduling	Adaptive Feedback	Adaptive Feedforward
Bailey Controls	CLC04	Step	Yes	Model Based	-
Control Techniques	Expert Controller	Ramps	-	Model Based	-
Fisher Controls	DPR900	Relay	Yes	-	-
	DPR910	Relay	Yes	Model Based	Model Based
Foxboro	Exact	Step	-	Rule Based	
Fuji	CC-S:PNA 3	Steps	Yes	-	-
Hartmann & Braun	Protronic P	Step	-	-	-
	Digitric P	Step	-	-	-

Honeywell	UDC 6000	Step	Yes	Rule Based	-
Alfa Laval Automation	ECA40	Relay	Yes	-	-
	ECA400	Relay	Yes	Model Based	Model Based
Siemens	SIPART DR22	Step	Yes	-	-
Toshiba	TOSDIC-215D	PRBS	Yes	Model Based	-
	EC300	PRBS	Yes	Model Based	-
Turnbull Control Systems	TCS 6355	Steps	-	Model Based	-
Yokogawa	SLPC-171,271	Step	Yes	Rule Based	-
	SLPC-181,281	Step	Yes	Model Based	-

可以看到大部分的工業用控制器都具有增益排程的功能，且大部分是基於數學模式法，但是基於經驗法則的控制器近年來有更加普遍的趨勢。一般使用者的反應，可歸納如下幾點意見：

- (1) 增益排程的功能接近於適應型控制，但卻簡單許多，產品的價格也較便宜。
- (2) 法則應用(Rule-based)適應性控制的功能比基於數學模式法(Model-based)適應性控制的功能為佳，且使用的環境較有彈性。
- (3) 一般的工業用控制器大部分只針對回授控制器的參數加以適應性地調整；然而，前授(feed-forward)控制器也需加以適應性調整。一般的回授控制受到外擾 $d$ 的輸入時，輸出 $y$ 與命令 $r$ 間會有很大的誤差，此誤差藉由回授的調整，而慢慢變小。而前授控制則是不等 $d$ 去影響受控體，直接將 $d$ 的值送到前面與 $r$ 相加，而形成大的追蹤誤差 $e$ ，此大的誤差 $e$ 進入回授控制器後，激發出較大的控制力用以對付外擾 $d$ ，進而加速控制器的反應。

我們可用以下的例子來說明回授控制與前授控制的不同運作機制。參考圖 9.1.3，假設現在有一部車子重 2 公噸，我們想要找一些人來推動它，並使其等速前進。則回授控制與前授控制可比較如下：

- 回授控制是微調型：回授控制會先叫一個人來推，發現推不動了，再叫第二個人來幫忙，如此一個一個慢慢加，加到第 10 個人時，車子才開始移動了。
- 前授控制是粗調型：前授控制不是由嘗試錯誤中去尋找適當的人數，而是事先預估車子的重量，然後大約估計所要的人數，一次叫足，一起來幫忙。例如可能第一次就叫了 9 個人幫忙，發現推不動，透過回授控制的微調，再多叫一個人即可推動車子。可知前授控制有助於增加反應的速度，能快速去除外擾的影響。

歸納言之，前授控制可以快速減少追蹤誤差，是快速粗調；回授控制可以做精密修正，使誤差完全降為 0，是慢速微調。

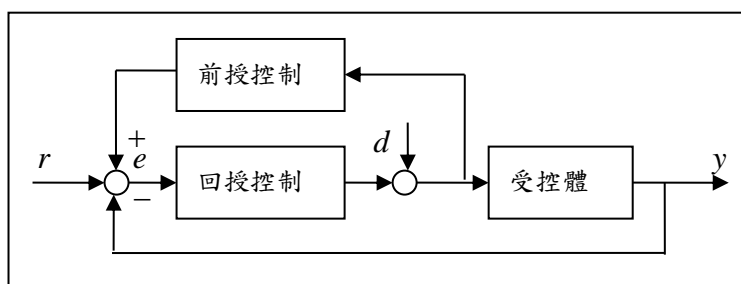


圖 9.1.3 前授控制有助於增加控制反應的速度

## 9.2 自動調整型 PID 控制器

自動調整型控制器會根據當下運作的環境，自動調整控制器的參數值，但調整的時機是由使用者決定。自動調整型 PID 控制器如圖 9.2.1 所示，PID 控制器的結構可表成

$$G_c(s) = \frac{K(1+sT_i+s^2T_iT_d)}{sT_i} = K + K\frac{T_i}{s} + KT_d s \quad (9.2.1)$$

自動調整控制器的工作就是去決定  $K$ 、 $T_i$ 、 $T_d$  三個參數值。在決定的過程中，是根據受控體的響應，而完全不需人為的介入。任何時刻，只要使用者想調整  $K$ 、 $T_i$ 、 $T_d$  的值，只需要按一個鍵，自動調整 PID 即會根據當時受控體的特性，找出一組最佳的參數組合。

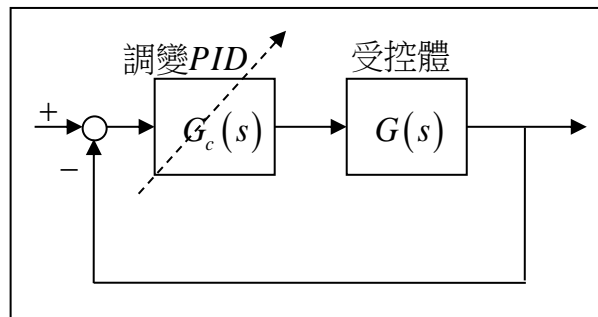


圖 9.2.1 基本控制架構

自動調整型 PID 控制器決定參數的方法有下列三種：(A)特性法(feature-based techniques)，(B)解析法(analytical methods)，(C)最佳化法(optimization-based methods)，分別介紹如下：

### 9.2.1 特性法

此法最常為工業界所採用，此法是先以開迴路的方式，施予系統一個步階輸入(Step)，有少數設計是施予系統一個斜坡輸入(ramp)，參見表格 10.1.2。然後畫出受控體的步階響應或頻率響應，再從圖上的數據決定  $K$ 、 $T_i$ 、 $T_d$  之值。目前最常用的是 Ziegler 和 Nichols 於 1942 年提出的方法：

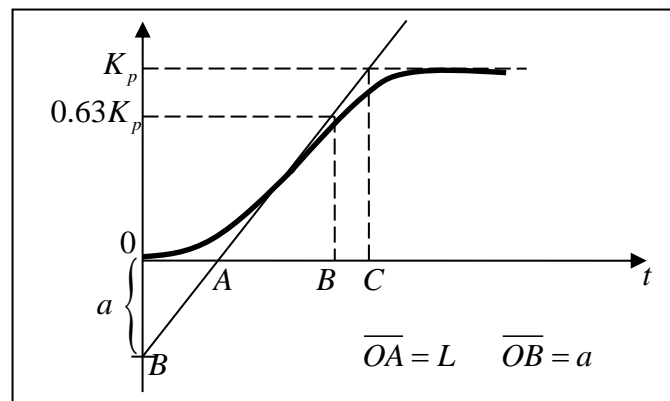


圖 9.2.2 時域法中之步階響應圖

### (A) 時域法

在開迴路之下(沒有控制器介入)，給系統一個步階輸入，並實際測量機台的步階響應。求出圖 9.2.2 中之步階響應參數:(a) $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ，(b) $L = \underline{\hspace{2cm}}$ 。有了 $a$ 和 $L$ 的值後，PID 的係數即可決定如下：

(a)  $P$ 控制器： $K = 1/a$

(b)  $PI$ 控制器： $K = 0.9/a$ ， $T_i = 3L$

(c)  $PID$ 控制器： $K = 1.2/a$ ， $T_i = 2L$ ， $T_d = L/2$

這些參數關係式是經過大量數值模擬後，所得到的最佳公式。

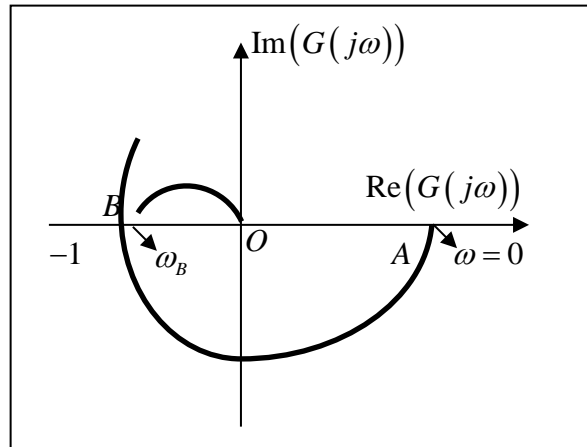


圖 9.2.3 奈氏圖求參數 $\omega_B$

## (B) 頻域法

輸入不同頻率的正弦波 $\sin\omega t$ 到系統中，實測受控體的頻率響應圖，如圖 9.2.3 所示；求出 $\overline{OB}$ 的距離，及 $B$ 點所在的頻率 $\omega_B$ ，並令

$$K_u = 1/\overline{OB}, T_u = 2\pi/\omega_B \quad (9.2.2)$$

則 PID 控制器的參數可由 $K_u$ 、 $T_u$ 決定如下：

(a)  $P$ 控制器： $K = 0.5K_u$

(b)  $PI$ 控制器： $K = 0.4K_u$ ， $T_i = 0.8T_u$

(c)  $PID$ 控制器： $K = 0.6K_u$ ， $T_i = 0.5T_u$ ， $T_d = 0.12T_u$

上面公式顯示只要知道 $B$ 點所在的振動頻率 $\omega_B$ 及振幅即可，而無須知道所有的頻率響應圖；由實驗求全頻率響應則頗為費時費力。根據波德圖的定義，假設輸入正弦波為 $\sin\omega_i t$ ，系統的輸出則為 $A_i \sin(\omega_i t + \phi_i)$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ 。在實驗的操作上，需先量測系統分別對 $n$ 個正弦波的響應，記錄其振幅 $A_i$ 及相位 $\phi_i$ ，然後再畫 $A_i$ 及 $\phi_i$ 對 $\omega_i$ 之曲線圖，如圖 9.2.4 所示。

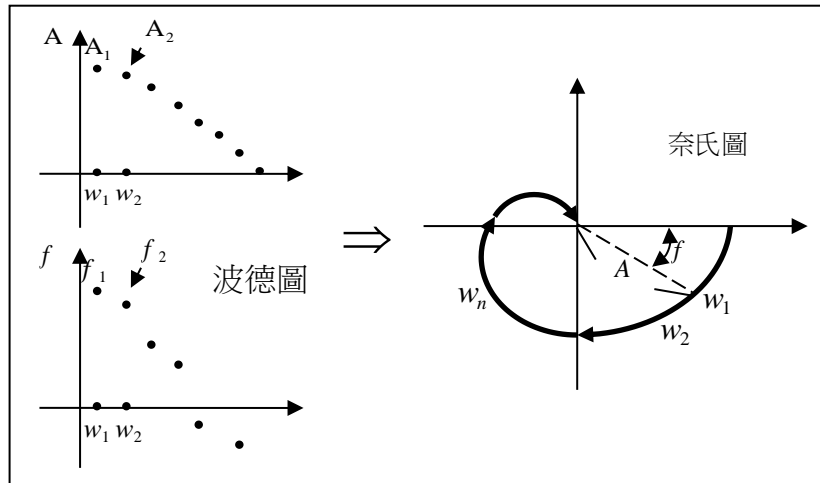


圖 9.2.4 頻率響應的實驗求法

在工業上求 $\omega_B$ 及 $\overline{OB}$ 的方法，是將受控體和一具有延遲效應的繼電器(relay)串聯起來，如圖 9.2.5 所示。此時閉迴路系統所呈現的極限圓振盪，其振動頻率 $\omega_{B'}$ 可近似於 $\omega_B$ ，而振幅 $\overline{OB'}$ 可近似於 $\overline{OB}$ 。

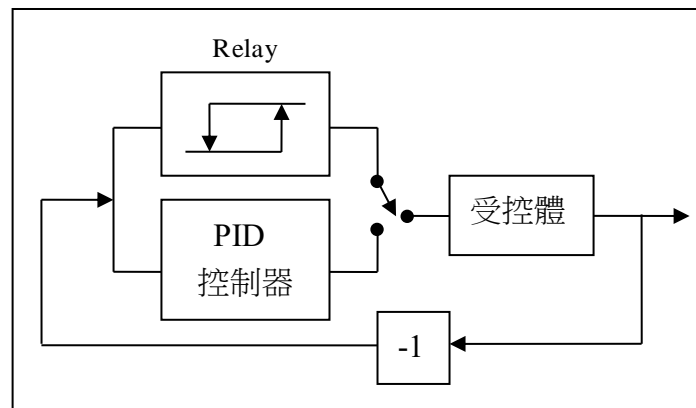


圖 9.2.5 以遲滯元件激發極限圓振盪

具有延遲效應的非線性元件如圖 9.2.6 所示，其中 $X$ 為輸入大小； $M$ 為輸出大小； $d$ 為延遲元件的寬度。參考 3.4 節之表格，其描述函數 $N(X)$ 為

$$N(X) = \frac{4M}{\pi X} \sqrt{1 - (d/X)^2} - i \left( \frac{4dM}{\pi X^2} \right) \quad (9.2.3)$$

取倒數得

$$-\frac{1}{N(X)} = \frac{\pi X}{4M} \sqrt{1 - (d/X)^2} - i \frac{\pi d}{4M} \quad (9.2.4)$$

若在複數平面上畫出 $-1/N(X)$ 隨 $X$ 的變化曲線，則如圖 9.2.6b 所示。



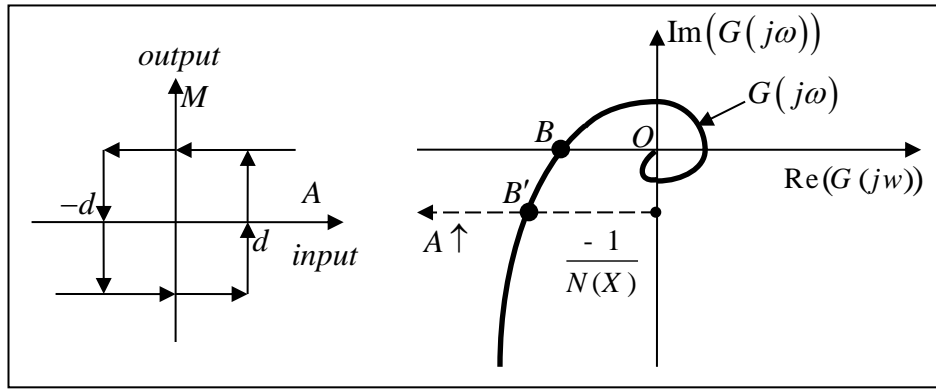


圖 9.2.6 (a) 延遲元件輸出入關係圖，(b) 極限圓的近似發生點  $B'$ 。

$-1/N(X)$  的虛數部分和  $X$  無關，故當  $X$  變化時，虛數部分不變，且當  $X$  增加時， $-1/N(X)$  的實數部分往負的方向增加。因此  $-1/N(X)$  的圖形是一條往負實數方向的水平射線。產生極限圓的地方是  $-1/N(X)$  和  $G(j\omega)$  的交點處，此時的共振頻率，即  $B'$  點處所在的頻率  $\omega_{B'}$ ， $|G(j\omega_{B'})|$  的大小為

$$|G(j\omega_{B'})| = |-1/N(X)| \quad (9.2.5)$$

其中  $X$  是極限圓的振幅。

以實驗法求  $\omega_B$  及  $\overline{OB}$  的方法歸納整理如下：

- (1) 將 PID 控制器與受控體分離。
- (2) 將受控體與延遲元件串聯迴授(參見圖 5.2.5)。
- (3) 測量極限圓的頻率  $\omega_{B'}$ ，此即為  $\omega_B$  的近似值。
- (4) 測量極限圓的振幅  $X_0$ ，代入(9.2.3)式中求  $-1/N(X_0)$ ，則  $\overline{OB} \approx |-1/N(X_0)|$ 。

### (C) 改良型 Ziegler-Nichols

上面所述之求 PID 參數的時域及頻域方法，簡單且容易使用，但其缺點是阻尼比太小 (damping ratio  $\approx 0.2$ )，會伴隨較大的震盪及超越量(overshoot)，因此又有多種的改良型 Ziegler-Nichols 方法被提出，其中較有名的是 Chien-Horones-Reswick 方法如下：

#### ● 超越量=0%：

(a) P 控制器： $K = 0.3/a$

(b) PI 控制器： $K = 0.6/a$ ， $T_i = 4L$

(c) PID 控制器： $K = 0.95/a$ ， $T_i = 2.4L$ ， $T_d = 0.42L$

#### ● 超越量=20%：

(a) P 控制器： $K = 0.7/a$

(b) PI 控制器： $K = 0.7/a$ ， $T_i = 2.3L$

(c) PID 控制器： $K = 1.2/a$ ， $T_i = 2L$ ， $T_d = 0.42L$

其中關於  $a$  與  $L$  的測量採用與圖 9.2.2 相同的方法。

## 9.2.2 解析法

當受控體的模型為二階且參數為確切已知時，PID 控制器的參數可用解析的方法求得。設受控體的數學模型為：

$$G(s) = \frac{K_p}{(1+sT_1)(1+sT_2)} \quad (9.2.6)$$

其中參數 $T_1$ 、 $T_2$ 、 $K_p$ 均為已知。則閉迴路系統的特徵方程式( $1 + G_c(s)G(s) = 0$ 的分母部分)為

$$1 + GG_c = 0 \Rightarrow 1 + \frac{K_p}{(1+sT_1)(1+sT_2)} \frac{K(1+sT_i+s^2T_iT_d)}{sT_i} = 0 \quad (9.2.7)$$

$$\Rightarrow s^3 + s^2 \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{K_pKT_d}{T_1T_2} \right) + s \left( \frac{1}{T_1T_2} + \frac{K_pK}{T_1T_2} \right) + \frac{K_pK}{T_iT_1T_2} = 0 \quad (9.2.8)$$

#### (A) 極點設置法

$K$ 、 $T_i$ 、 $T_d$ 的選擇是使得上面之三階特徵方程式等於所指定之特徵方程式(pole assignment)

$$(s + \alpha\omega)(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2) = 0 \quad (9.2.9)$$

其中 $\alpha$ 、 $\zeta$ 、 $\omega$ 為所設定之已知值。現比較(9.2.8)、(9.2.9)式，可得到三個等式，恰好求解三個未知數 $K$ 、 $T_i$ 、 $T_d$ 如下：

$$K = \frac{T_1T_2\omega^2(1+2\zeta\alpha)-1}{K_p} \quad (9.2.10a)$$

$$T_i = \frac{T_1T_2\omega^2(1+2\zeta\alpha)-1}{T_1T_2\alpha\omega^3} \quad (9.2.10b)$$

$$T_d = \frac{T_1T_2\omega(\alpha+2\zeta)-T_1-T_2}{T_1T_2\omega^2(1+2\zeta\alpha)-1} \quad (9.2.10c)$$

其 $\alpha$ 、 $\omega$ 、 $\zeta$ 為由指定之極點所決定， $T_1$ 、 $T_2$ 、 $K_p$ 為已知的受控體參數。

#### (B) $\lambda$ -調整法：

當受控體的模型為一階且具有時間延遲時，可採用 $\lambda$ -調整法。設 $G_p$ 、 $G_c$ 分別為受控體及控制器之模型，則閉迴路轉移函數 $G_0$ 可表成

$$G_0 = \frac{G_pG_c}{1+G_pG_c} \quad (9.2.11)$$

若 $G_0$ 為已指定之函數，則上式可反求出 $G_c$ 為

$$G_c = \frac{1}{G_p} \cdot \frac{G_0}{1-G_0} \quad (9.2.12)$$

$\lambda$ -調整方法是適用於當受控體可表成如下之型式時：

$$G_p = \frac{K_p}{1+sT} e^{-sL} \quad (9.2.13)$$

此受控體 $G_p$ 代表一有時間延遲量 $L$ 的一階系統。若閉迴路的模型指定成

$$G_0 = \frac{e^{-sL}}{1+s\lambda T} \quad (9.2.14)$$

比較(9.2.13)、(9.2.14)二式，得知

- $\lambda < 1$ 時，閉迴路響應 $G_0$ 比開迴路響應 $G_p$ 快
- $\lambda = 1$ 時， $G_0$ 和 $G_p$ 的動態一致
- $\lambda > 1$ 時，開迴路響應 $G_p$ 比閉迴路響應 $G_0$ 快

茲將(9.2.13)、(9.2.14)代入(9.2.12)式，可得控制器的模型為

$$G_c(s) = \frac{1+sT}{K_p(1+\lambda sT - e^{-sL})} \quad (9.2.15)$$

對於小的時間延遲 $L$ ，上式可近似成 PI 控制器：

$$G_c(s) = \frac{1}{\lambda K_p} \left( 1 + \frac{1/T}{s} \right) \quad (9.2.16)$$

### (C) 內部模式控制法

此方法可用以產生 PID 控制器。參考圖 9.2.7，其中， $G_p$ ：真實受控體動態， $G_m$ ：受控體的模型， $G_m^+$ ： $G_m$ 的近似倒數， $G_f$ ：低通濾波器，用以確保 $G_f G_m^+$ 為 proper(分母次數 $\geq$ 分子次數)。

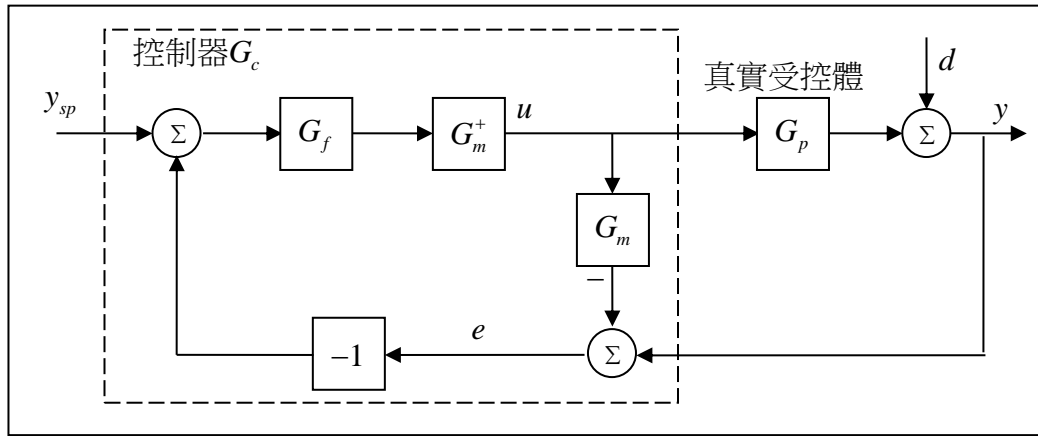


圖 9.2.7 內部模型控制方塊

由於控制器 $G_c$ 中內含有受控體的模型 $G_m$ ，故稱為內模式控制(internal model control)。此方法的特點是，當下列條件成立時：

$$G_f = 1, G_m = G_p, G_m^+ = G_m^{-1}$$

則控制器可完全除去干擾 $d$ 對輸出 $y$ 的影響，亦即 $d \rightarrow y$ 間的轉移函數恆為零。由圖 9.2.7 可求出控制器 $G_c$ 為

$$G_c = \frac{G_f G_m^+}{1 - G_f G_m^+ G_m} \quad (9.2.17)$$

一般工業界常碰到的受控體 $G_p$ ，通常可表成

$$G_p(s) = \frac{K_p}{1+sT} e^{-sL} \quad (9.2.18)$$

這代表具時間延遲 $L$ 的一階系統(尤其適用於液壓、化工、流體系統)。 $G_m^+$ 是 $G_m$ 的近似倒數，茲取

$$G_m^+(s) = \frac{1+sT}{K_p} \quad (9.2.19)$$

低通濾波器 $G_f$ 的選擇是使得 $G_f G_m^+$ 為 proper，故可取

$$G_f(s) = \frac{1}{1+sT_f} \quad (9.2.20)$$

現將(9.2.18)、(9.2.19)、(9.2.20)三式代入(9.2.17)式中，即可求得控制器 $G_c$ 的型式。其中由於非線性項 $e^{-sL}$ 不同的展開型式，會獲致不同的 $G_c$ 結構：

(a)  $e^{-sL} \doteq 1 - sL$

則(9.2.17)式化成

$$G_c(s) = \frac{T}{K_p(L+T_f)} \left(1 + \frac{1/T}{s}\right) \quad (9.2.21)$$

此為標準的 PI 控制器，對照(9.2.1)式可得

$$K = \frac{T}{K_p(L+T_f)}, T_i = \frac{1}{T}$$

(b)  $e^{-sL} \doteq \frac{1-sL/2}{1+sL/2}$

則(9.2.17)式化成

$$\begin{aligned} G_c(s) &= \frac{(1+sL/2)(1+sT)}{K_p s(L+T_f+sT_fL/2)} \\ &\approx \frac{(1+sL/2)(1+sT)}{K_p s(L+T_f)} \approx K(1 + T_i/s + T_d s) \end{aligned} \quad (9.2.22)$$

其中

$$K = \frac{T+L/2}{K_p(L+T_f)}, T_i = \frac{1}{T+L/2}, T_d = \frac{LT/2}{T+L/2}$$

此為標準的 PID 控制器。

有關內模式控制的幾個特點歸納如下：

- 此法可用以產生 PI 或 PID 控制器。見(9.2.21)、(9.2.22)式。
- 此法對外擾 $d$ 有強健性，不受 $d$ 的影響。
- 此法因控制器 $G_c$ 內含受控體 $G_m$ 的模式，因此若 $G_m$ 為高階時， $G_c$ 的階數亦為高階，其複雜度同於 $G_m$ 。故此法通常較適用於低階系統。
- 在(9.2.21)和(9.2.22)式中之 $T_f$ 是一可調整的自由參數，其可同時影響對外擾 $d$ 之強健性，及系統的性能。

### 9.2.3 最佳化法

此法是以數值疊代求得最佳的 PID 參數。其所對應的數學問題可表示如下：求參數 $K$ 、 $T_i$ 、 $T_d$ 使得成本函數 $f(K, T_i, T_d)$ 為最大或最小，並同時滿足不等式

$$\begin{aligned} g_1(K, T_i, T_d) &\geq 0 \\ g_2(K, T_i, T_d) &\geq 0 \\ &\vdots \\ g_m(K, T_i, T_d) &\geq 0 \end{aligned}$$

其中 $f$ 函數是設計者認為最重要之性能指標，需要加以最佳化(optimized)才行； $g_1, \dots, g_m$ 函數則是代表次要之性能指標，只要滿足限制條件即可，無須最佳化。

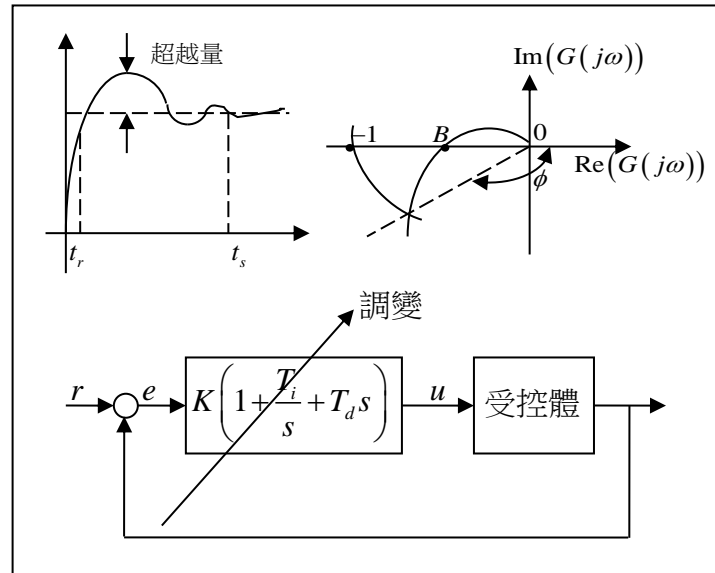


圖 9.2.8 以最佳化法求  $K$ 、 $T_i$ 、 $T_d$  使得時域或頻率的性能指標達到最大或最小，或滿足不等式之限制

我們以圖 9.2.8 所示之自我調整 PID 控制器為例，說明最佳化的問題及求解過程：

- 求三個控制器參數  $K$ 、 $T_i$ 、 $T_d$
- 使得上升時間  $t_r$  為最小，亦即要最佳化的函數選為  $f = t_r$ 。
- 且滿足不等條件
  - (1)  $g_1 \rightarrow$  超越量  $\leq 5\%$
  - (2)  $g_2 \rightarrow$  穩態時間  $t_s \leq 2$  秒
  - (3)  $g_3 \rightarrow$  相位餘度  $180 - \phi \geq 60^\circ$
  - (4)  $g_4 \rightarrow$  增益餘度  $20\log(1/\overline{OB}) \geq 25\text{dB}$

此問題的核心在建立一套  $K$ 、 $T_i$ 、 $T_d$  之搜尋法則(可呼叫 MATLAB 之 optimization ToolBox)，對於每一次疊代之  $K$ 、 $T_i$ 、 $T_d$ ，電腦需畫出時域及頻域之響應圖，計算  $f$  值，並檢測  $g_1, g_2, g_3, g_4$  四個不等式是否滿足；然後再搜尋下一組之  $K$ 、 $T_i$ 、 $T_d$  執行相同的工作，直到求得一組  $K$ 、 $T_i$ 、 $T_d$  使得  $f$  最小，且  $g_1, g_2, g_3, g_4$  同時滿足。

使用最佳化法求控制器參數時，有幾點注意事項：

- (1) 待定參數不可過多：通常參數超過 10 個以上時，疊代即較難收斂。PID 控制器因只有三個待定參數，故適合用最佳化法求之。
- (2) 限制條件要考慮齊全：「天下沒有白吃的午餐」，需注意當某些性能指標由於最佳化而越來越好時，在暗地裡，另外一些性能指標則變得越來越差。例如以前面的例子而言，我們要求上升時間越小越好，也就是閉迴路系統對步階輸入要有非常快的反應。數值疊代的結果，可以發現最佳的 PID 控制器可使系統瞬間對步階輸入做出所要求的響應，亦即上升時間  $t_r \rightarrow 0$ ，這個完美的結果是「too good to be true」，因為當我們去檢測在最佳情況下之控制訊號  $u$ ，會發現有  $u \rightarrow \infty$  之結果；亦即要付出無窮大的控制能量才能使  $t_r \rightarrow 0$ 。代表此最佳化的答案不切實際。問題的關鍵，在於少列了一個限制的條件

$$\int_0^\infty u^2(t)dt \leq u_{\max} \quad \rightarrow g_5$$

- (3) 用數值疊代所得到的最佳設計只是區域性的(locally)結果，也就是只能達到局部最大值或是局部最小值而不是全域性(globally)的最大或最小，如圖 9.2.9 所示。例如當我們要搜尋

性能指標 $f$ 的最大值時，可能會得到區域性的最大值 $P_1$ 或 $P_5$ ，而不是全域性的最大值 $P_3$ 。

- (4) 最佳化問題不一定會收斂，這有可能是因初始猜測值離最佳解太遠，所用的疊代法無法往正確的方向搜尋。

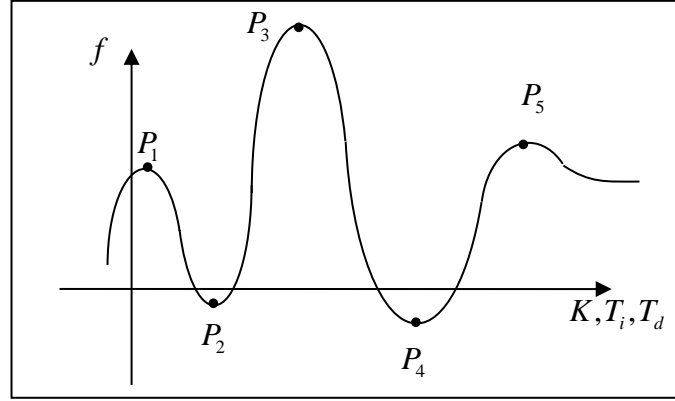


圖 9.2.9 局部與全域最大值

### 9.3 增益排程(Gain-Scheduling)控制

增益排程是實現適應性控制的一種簡易可行的方法，用於非線性系統的操作範圍變化大，但具有規律性與重複性的情況。此法的設計步驟如下：

- (1) 將非線性系統的操作範圍劃分成 $n$ 個區域。
- (2) 在每一個區域內，設計其操作點，並將非線性系統對此操作點做線性化，共可求出 $n$ 個線性系統。
- (3) 針對每一線性系統，設計線性控制器
- (4) 將原非線性系統視為 $n$ 個線性系統的組合，當操作點變化時，其所屬之線性系統也隨之變化，而線性控制器的增益也跟著調變，故稱為增益排程控制。

增益排程在飛行控制領域有許多成功的應用，例如 CH-47 直升機的飛行控制系統(Downing and Bryan, 1987)就是採用增益排程的設計，將水平速度分割成 30 個區間，垂直速度分割成 3 個區間，總共形成 90 個飛行區域，所對應的 90 組控制器事先儲存於飛控電腦之中。實際飛行時，直升機根據速度感測器的測量值，決定所在的飛行區域，同時下載所對應的控制器。增益排程控制適用於非線性系統的數學模式非固定，而是隨著環境而改變的情況。此時的非線性系統可表成如下的形式：

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), s) \quad (9.3.1a)$$

$$y(t) = g(x(t), s) \quad (9.3.1b)$$

參數 $s$ 代表非線性系統所處的環境因子。不同的 $s$ 值代表不同的操作環境，所以 $s$ 又稱為排程參數(scheduling parameter)。一般而言，操作環境相對於時間的變化，比起系統狀態 $x$ 相對於時間的變化，是相對緩慢的，所以我們將環境因子 $s$ 視為一緩慢變化的參數。如果 $s$ 的變化速度與 $x$ 一樣快，那麼就應將 $s$ 納入 $x$ 的其中一個狀態分量，而不能將其視為排程參數。

對於每一個 $s$ 值，都有其對應的平衡點 $(x_{eq}, u_{eq})$ 使得 $\dot{x} = f(x_{eq}, u_{eq}, s) = 0$ ，所得到的平衡點是 $s$ 的函數：

$$\{(x_{eq}(s), u_{eq}(s)) | s_{\min} \leq s \leq s_{\max}\}$$

因此排程參數 $s$ 的變化將導致平衡點的變化。在某一個 $s$ 值之下求得平衡點後，即可針對此平衡點，進行線性化展開：

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) = f(x_{eq}, u_{eq}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{eq} (x - x_{eq}) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{eq} (u - u_{eq}) \quad (9.3.2)$$

其中 $f(x_{eq}, u_{eq}) = 0$ ，且

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{eq} &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_{eq}(s), u=u_{eq}(s)} = A(s) \\ \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{eq} &= \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x=x_{eq}(s), u=u_{eq}(s)} = B(s) \\ \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{eq} &= \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{x=x_{eq}(s)} = C(s) \end{aligned}$$

相對於平衡點的微擾量定義為

$$\bar{x}(t) \triangleq x(t) - x_{eq}(s), \bar{u}(t) \triangleq u(t) - u_{eq}(s), \bar{y}(t) = y(t) - g(x_{eq}(s))$$

則相對於平衡點 $(x_{eq}(s), u_{eq}(s))$ 之線性化模式為

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= A(s)\bar{x}(t) + B(s)\bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) &= C(s)\bar{x}(t) \end{aligned} \quad (9.3.3)$$

可見對於不同的排程參數 $s$ (即對不同的平衡點)，其所對應之線性化模式也不同。對任意給定之 $s$ 值，(9.3.3)式之線性系統所設計出來之線性控制器可表成如下之狀態空間的型式：

$$K(s) : \begin{aligned} \dot{z} &= A_K(s)z + B_K(s)\bar{y} \\ \bar{u} &= C_K(s)z + D_K(s)\bar{y} \end{aligned} \quad (9.3.4)$$

此線性控制器 $K$ 也是排程參數 $s$ 的函數。

由於 $s$ 的值是連續性地變化，不可能針對每一個 $s$ 值，都設計一個線性控制器 $K$ 。實際的作法是選定 $n$ 個 $s$ 值，再針對此 $n$ 個 $s$ 值設計 $n$ 個線性控制器 $\{K_1, K_2, \dots, K_n\}$ ，然後再以此 $n$ 個控制器為基點做內插，以求得任意 $s$ 值下之控制器。

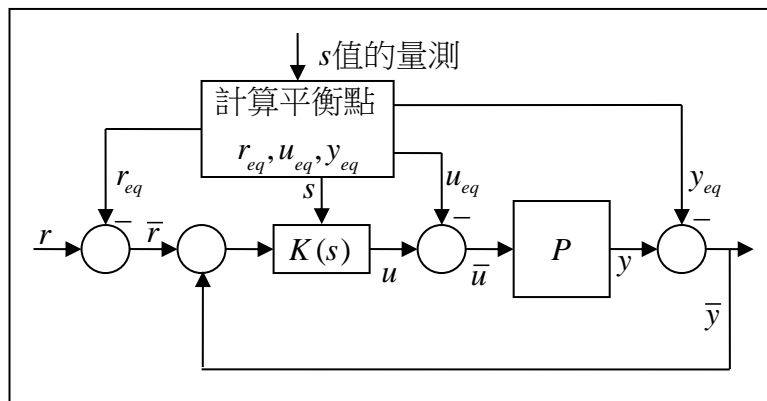


圖 9.3.1 增益排程控制之方塊

例如對於任意介於 $s_1$ 與 $s_2$ 之 $s$ 值，其相對應之線性控制器 $K(s)$ 可表成

$$K(s) = K_1 + \frac{s-s_1}{s_2-s_1} (K_2 - K_1) \quad (9.3.5)$$

此式滿足 $s = s_1$ 時， $K(s) = K_1$ ， $s = s_2$ 時， $K(s) = K_2$ 。(9.3.5)式之控制器其所對應之狀態空間矩陣 $A_K, B_K, C_K, D_K$ ，也具備相同之內插公式，即

$$A_K(s) = A_{K1} + \frac{s-s_1}{s_2-s_1}(A_{K2} - A_{K1}); B_K(s) = B_{K1} + \frac{s-s_1}{s_2-s_1}(B_{K2} - B_{K1})$$

$$C_K(s) = C_{K1} + \frac{s-s_1}{s_2-s_1}(C_{K2} - C_{K1}); D_K(s) = D_{K1} + \frac{s-s_1}{s_2-s_1}(D_{K2} - D_{K1})$$

因此任意值 $s$ 所對應之線性控制器均可由內插而決定之。增益排程之控制方塊圖如圖 9.3.1 所示。

### 例題 9.3.1

本題考慮旋轉手臂之增益排程控制，如圖 9.3.2 所示之旋轉手臂，其非線性運動方程式可寫成

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ (mgL/J)\sin\theta - c\dot{\theta}|\dot{\theta}| \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ T \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (9.3.6)$$

其中 $T(t)$ 為馬達之控制扭矩， $-c\dot{\theta}|\dot{\theta}|$ 為正比角速度平方的阻尼項。此非線性系統之平衡點設為

$$x_{eq}(s) = \begin{bmatrix} \theta_{eq}(s) \\ \dot{\theta}_{eq}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \end{bmatrix}, 0 \leq s \leq 2\pi \quad (9.3.7)$$

也就是手臂可以停在 0 到 360 度間之任意角度上。在(9.3.6)式中令 $\theta_{eq} = s, \dot{\theta}_{eq} = 0$ ，可求出在平衡點上之控制力矩 $u_{eq}$ 為

$$u_{eq}(s) = T_{eq}(s) = -mgL\sin(s)/J \quad (9.3.8)$$

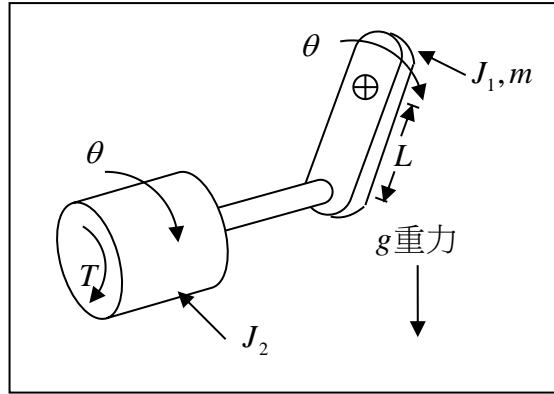


圖 9.3.2 旋轉手臂示意圖

針對平衡點(9.3.7)做線性展開，可得線性化方程式

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \bar{\theta} \\ \dot{\bar{\theta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (mgL/J)\cos(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta} \\ \dot{\bar{\theta}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{u} \quad (9.3.9)$$

其中 $\bar{\theta} = \theta - \theta_{eq} = \theta - s$ ， $\dot{\bar{\theta}} = \dot{\theta} - \dot{\theta}_{eq} = \dot{\theta}$ ，並注意 $A$ 矩陣是 $s$ 的函數。為簡化起見，設定參數值 $mgL/J = 1$ ，並設計控制命令為

$$\bar{u} = -[2 + \cos(s) \quad 2] \begin{bmatrix} \bar{\theta} \\ \dot{\bar{\theta}} \end{bmatrix} \quad (9.3.10)$$

將此 $\bar{u}$ 代回(9.3.9)式，可得閉迴路的運動方程式為



$$\ddot{\bar{\theta}} + 2\dot{\bar{\theta}} + 2\bar{\theta} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

因此(9.3.10)式的 $\bar{u}(t)$ 可確保閉迴路的極點恆落在 $\lambda = -1 \pm i$ ，而與 $s$ 值無關，且對於步階命令不會產生過激(overshoot)。最後之線性控制 $u(t)$ 可表成

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + u_{eq}(s) = -[2 + \cos(s) \quad 2] \begin{bmatrix} \bar{\theta} \\ \dot{\bar{\theta}} \end{bmatrix} + u_{eq}(s) \\ &= -[2 + \cos(s) \quad 2] \begin{bmatrix} \theta - s \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} - mgL \sin(s)/J \end{aligned} \quad (9.3.11)$$

可以觀察到上式已將控制訊號 $u$ 表成排程參數 $s$ 之顯函數。最後剩下的問題就是執行 $s$ 的排程。我們可以依據角度 $\theta$ 做切換排程(switched scheduling)，也就是將 $\theta(t)$ 的操作範圍，切割成 $n$ 個區域 $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ ，在每個區域上各設定一個平衡點，故共有 $n$ 個平衡點 $\{\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_n^*\}$ ，並將排程參數 $s$ 定義成各個區域上之平衡點

$$s = \theta_i^*, \text{ 當 } \theta(t) \in R_i$$

亦即當 $\theta(t)$ 落入第 $i$ 個區域時，則排程參數 $s$ 定為 $\theta_i^*$ 。然後再以此 $s$ 值代入(9.3.11)式，求得第 $i$ 個區域所對應的控制訊號 $u_i$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ 。將此 $n$ 個控制訊號預存在電腦中，當實際進行控制時，感測元件會偵測系統當下所在的區域，然後再呼叫出此區域所對應的控制訊號，進行控制的動作。在區域與區域之間進行切換時， $s$ 會有不連續的變化，導致控制訊號從 $u_i$ 到 $u_{i+1}$ 的跳動，此時可透過線性內插的方式加以平滑化。

## 9.4 自我調整適應性控制

前面二節所介紹的自動調整(Auto-tuning)控制器與增益排程控制器算是適應性控制的初階與中階實現。兩者雖然都能自動調整控制器的參數，但前者的調整時機是人為決定，後者的調整時機則是預先規劃，兩者都無法應付突然的環境變化。以下幾節要介紹的是適應性控制的高階實現，此時不僅是控制器參數能自動調整，而且調整的時機與頻率完全依照當下環境的變化而變化，不必事先規劃，預作排程。

### 9.4.1 隨環境變化自動調整的控制器

不必事先規劃，預作排程，能隨環境變化自動調整控制器的方法可分為兩大類：

- (1) 自我調整適應性控制(Self-tuning adaptive control): Gawthrop, 1987; Harris and Billings, 1981; Johnson, 1988; Astrom and Wittenmark, 1989.
- (2) 參考模式適應性控制(Model Reference Adaptive control, MRAC): Landau, 1979; Narendra and Annaswamy, 1989.

分別簡述如下：

- 自我調整適應性控制

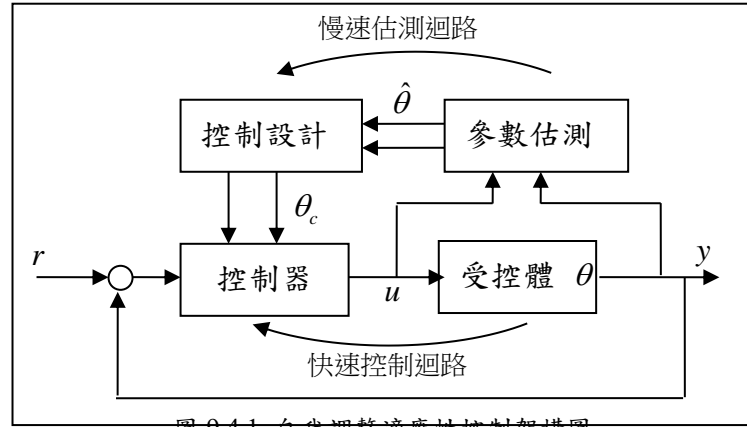


圖 9.4.1 自我調整適應性控制架構圖

此型控制器的架構如圖 9.4.1.所示，它是由二個獨立的結構所組成：

(a) 參數估測(parameter estimation)：

此部分在估測受控體中的未知參數 $\theta$ ，所得之估測參數記做 $\hat{\theta}$ 。當參數 $\theta$ 隨著環境變化時，參數估測值 $\hat{\theta}$ 也隨之調整。

(b) 控制設計(control design)：

此部分的工作是根據前面所估得的受控體參數 $\hat{\theta}$ ，去設計控制律並選定控制參數 $\theta_c$ 。這部分控制器的設計與前一部分的參數估測是完全獨立的，所以可以採用任何控制理論來設計控制器。如果控制器是採用 PID 的構造，則 $\theta_c = [K, T_i, T_d]$ 。當受控體參數 $\hat{\theta}$ 隨環境變化時，控制器參數 $\theta_c$ 也隨之因應變化，從而達到適應環境變化的控制功能。

圖 9.4.1 也可分成二個迴路來看：

- (a) 內迴路：又稱為控制迴路或快速迴路。在一段短暫的 $\Delta t$ 時間內，受控體的參數 $\theta$ 可視為不變。而控制的目的是要 $y$ 追蹤參考指令 $r$ 。
- (b) 外迴路：又稱估測迴路或慢迴路。它是運作在一段較長的時距 $\Delta t$ 內，此時受控體參數的變化即很明顯，故需加以估測。

● 參考模式適應性控制

顧名思義，這種控制方法的目的是要透過適應調整的機制，使得系統的輸出 $y$ 能夠追隨參考模式的輸出 $y_m$ ，如圖 9.4.2 所示。由於受控體的參數 $\theta$ 為未知或隨著環境而變化，控制器參數 $\theta_c$ 必須隨時估測調整，才能保證 $y(t) \rightarrow y_m(t)$ 。

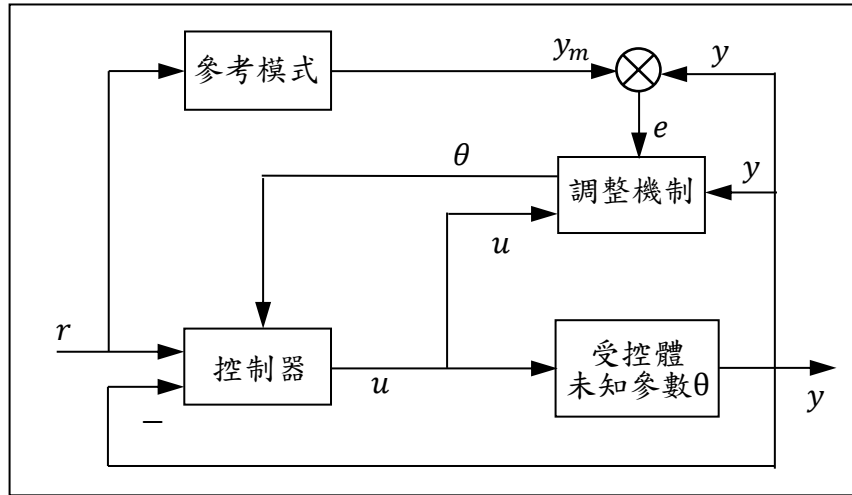


圖 9.4.2 參考模式適應性控制的方塊圖

以上二種適應性控制的方法都牽涉到參數估測的問題，我們可以根據參數估測對象的不同，將適應性控制區分成間接型與直接型兩大類：

- 間接型的適應性控制：此法是先估測得到受控體的參數 $\theta$ 後，才去設計控制器的參數 $\theta_c$ ，故稱為間接型。間接型適應性控制的優點是控制器與估測器能夠分開獨立設計，我們可以根據不同的規格需求與控制理論，設計不同的控制器。間接型適應性控制的缺點則是如果受控體的參數 $\theta$ 估測不準確，後續的控制器設計就無法對真實的受控體做出反應。自我調整適應性控制，如圖 9.4.1 所示，即是屬於間接型的適應性控制。
- 直接型的適應性控制：此法是直接針對控制器參數 $\theta_c$ 進行估測，估測的好壞是以模式追蹤誤差 $e(t) = y(t) - y_m(t)$ 的大小來判斷，而不是以受控體參數 $\theta$ 估的準不準來判斷。此法的優點是模式追蹤誤差 $e(t)$ 不受到參數估測誤差 $\bar{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta(t)$ 的影響，縱使參數估測誤差 $\bar{\theta}(t) \neq 0$ ，仍可保證追蹤誤差 $e(t) \rightarrow 0$ 。缺點則是控制器的結構受到限制，不能任意指定。參考模式適應性控制具有直接型與間接型兩種，將在後面章節介紹。本節先討論自我調整適應性控制，它是屬於間接型的適應性控制。

對於自我調整適應性控制，我們將分成估測器設計和控制器設計二大部分來加以討論；在此之前，先來看一個簡單的例題，從中了解估測器與控制器的分工與整合，同時熟悉所需要的工具：數位化與 $z$ -轉換。

## 9.4.2 數位化與 $z$ -轉換

由於參數估測均是在離散數位系統下操作，我們這裡需先對數位化運算與 $z$ -轉換有一些基本的認識。首先定義符號如下：

- $T$ ：對連續性訊號 $x(t)$ 的取樣時間間隔，而得到離散數列：

$$\{x(T), x(2T), \dots, x(kT), \dots, x(nT)\}$$

- $x(k) \triangleq x(kT) \Rightarrow$ 第 $k$ 次取樣 $x$ 的值
- $x(k+1) \triangleq x((k+1)T) \Rightarrow$ 第 $k+1$ 次取樣 $x$ 的值
- $z \triangleq$ 右移運算子 $\Rightarrow zx(k) = x(k+1)$
- $z^{-1} \triangleq$ 左移運算子 $\Rightarrow z^{-1}x(k) = x(k-1)$
- $\Delta \triangleq 1 - z^{-1}$ ，後向差分運算子 $\Rightarrow \Delta x(k) = (1 - z^{-1})x(k) = x(k) - x(k-1)$

現考慮一個最簡單的資料取樣模型：

$$y(k) = K(k)u(k-1) \quad (9.4.1)$$

其中 $u(k-1)$ 為第 $t = (k-1)T$ 時刻的輸入值； $y(k)$ 為第 $t = kT$ 時刻的輸出值，可見輸出與輸入之間有 $T$ 的時間延遲。參數 $K(k)$ 為未知，且可能會隨時間變化。在這裡適應性控制要解決的問題有二個：(a)設計 $u(k)$ ，使得 $y(k) \rightarrow w(k)$ (參考指令)，(b)估測 $K(k)$ 隨時間變化之值。

(1) 控制器 $u(k)$ 的設計：

設在時間 $t$ 時， $K(k)$ 的估測值為 $\hat{K}(k)$ ，則為了達到 $y(k) \rightarrow w(k)$ 的目的，由(9.4.1)式知可選

$$u(k) = w(k)/\hat{K}(k) \quad (9.4.2)$$

茲定義追蹤誤差 $e(k)$ 為

$$e(k) = w(k) - y(k) = w(k) - K(k)u(k-1) \quad (9.4.3)$$

(9.4.3)

注意(9.4.3)式中之 $y(k) = K(k)u(k-1)$ 是源自(9.4.1)式，是系統的真实輸出，故此式的 $K(k)$ 不可寫成 $\hat{K}(k)$ 。將(9.4.2)式代入(9.4.3)式中得

$$e(k) = \hat{K}(k)u(k) - K(k)u(k-1) \Rightarrow u(k) = \frac{K(k)}{\hat{K}(k)}u(k-1) + \frac{1}{\hat{K}(k)}e(k) \quad (9.4.4)$$

或寫成 $z$ 轉換的型式

$$u(k) = \frac{\frac{1}{\hat{K}(k)}}{1 - \frac{K(k)}{\hat{K}(k)}z^{-1}} e(k) \quad (9.4.5)$$

結合(9.4.1)、(9.4.5)二式可得控制迴路的方塊圖如右圖 9.4.3 所示，圖中有一未知參數 $\hat{K}(k)$ 的值，是要由估測迴路來提供的。

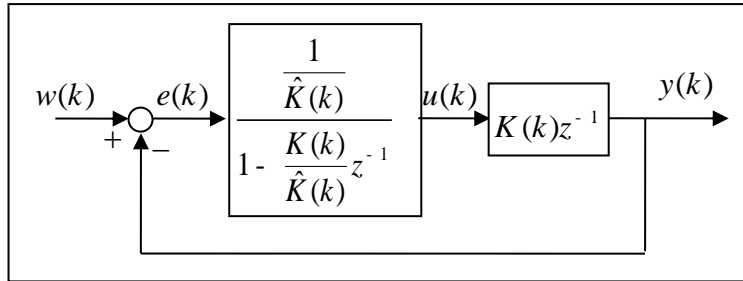


圖 9.4.3 控制迴路方塊圖

(2) 估測器的設計：

$K(k)$ 的值可由系統的輸入 $u(t)$ 和輸出 $y(t)$ 所決定，由(9.4.1)式知 $K(t)$ 的最佳估測值為

$$\hat{K}(k) = y(k)/u(k-1) \quad (9.4.6)$$

注意 $y(k)$ 和 $u(k-1)$ 的值均為已知。定義估測誤差 $\varepsilon(t)$ 為

$$\varepsilon(k) = y(k) - \hat{y}(k|k-1) \quad (9.4.7)$$

其中 $\hat{y}(k|k-1)$ 表用 $k-1$ 時刻的數據所預測到的 $y(k)$ 值，方便起見， $\hat{y}(k|k-1)$ 僅寫成 $\hat{y}(k)$ 。則根據此定義， $\hat{y}(k)$ 為

$$\hat{y}(k) = \hat{K}(k-1)u(k-1) \Rightarrow \hat{y}(k) = u(k-1)z^{-1}\hat{K}(k) \quad (9.4.8)$$

現將(9.4.6)式中之 $y(k)$ 和(9.4.8)式中之 $\hat{y}(k)$ 代入(9.4.7)式中，得

$$\varepsilon(k) = \hat{K}(k)u(k-1) - \hat{K}(k-1)u(k-1) \Rightarrow \hat{K}(k) = \hat{K}(k-1) + \varepsilon(k)/u(k-1) \quad (9.4.9)$$

或寫成z轉換的型式為

$$\hat{K}(k) = \frac{1}{1-z^{-1}} \varepsilon(k) \quad (9.4.10)$$

結合(9.4.8)式和(9.4.10)式，可得估測迴路的方塊圖如圖 9.4.4 所示。

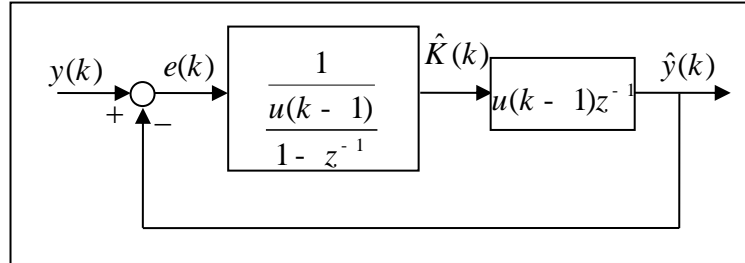


圖 9.4.4 估測迴路方塊圖

### (3) 自我調整適應性控制=控制器+估測器

最後結合圖 9.4.3 的控制迴路與圖 9.4.4 的估測迴路，即構成自我調整適應性控制的整體架構，如下圖 9.4.5 所示：

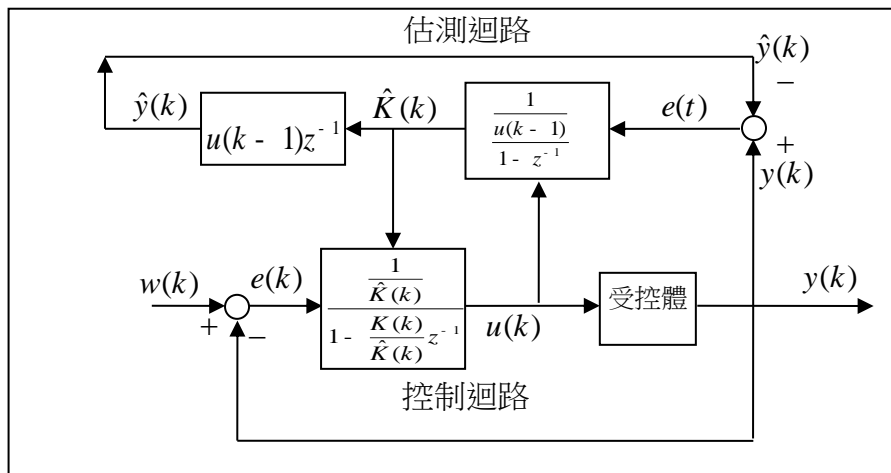


圖 9.4.5 控制器及估測器整合迴路

### (4) 數值計算

- 設定系統參數的真實值為  $K(0) = K(1) = K(2) = K(3) = 2$ ， $K(4) = K(5) = 1$
- 假設各變數的初始條件為：  
 $\hat{K}(0) = 1$ ， $e(0) = \varepsilon(0) = \hat{y}(0) = y(0) = u(0) = 0$
- 參考指令的設定值為步階輸入： $w(0) = 0$ ， $w(k) = 4$ ， $k \geq 1$
- $k = 1$ 時：

$$(9.4.3) \text{式} \rightarrow e(1) = w(1) - K(1)u(0) = 4 - 1 \cdot 0 = 4$$

$$(9.4.8) \text{式} \rightarrow \hat{y}(1) = \hat{K}(0)u(0) = 1 \cdot 0 = 0$$

$$(9.4.1) \text{式} \rightarrow y(1) = K(1)u(0) = 2 \cdot 0 = 0$$

$$(9.4.7) \text{式} \rightarrow \varepsilon(1) = y(1) - \hat{y}(1) = 0 - 0 = 0$$

$$(9.4.9) \text{式} \rightarrow \hat{K}(1) = \hat{K}(0) + \varepsilon(1)/u(0) = \hat{K}(0) = 1$$

$$(9.4.4) \text{式} \rightarrow u(1) = \frac{K(1)}{\hat{K}(1)} u(0) + \frac{1}{\hat{K}(1)} e(1) = \frac{1}{1} \cdot 4 = 4$$

●  $t = 2$ 時：

$$(9.4.3) \text{式} \rightarrow e(2) = w(2) - K(2)u(1) = 4 - 2 \cdot 4 = -4$$

$$(9.4.8) \text{式} \rightarrow \hat{y}(2) = \hat{K}(1)u(1) = 1 \cdot 4 = 4$$

$$(9.4.1) \text{式} \rightarrow y(2) = K(2)u(1) = 2 \cdot 4 = 8$$

$$(9.4.7) \text{式} \rightarrow \varepsilon(2) = y(2) - \hat{y}(2) = 4$$

$$(9.4.9) \text{式} \rightarrow \hat{K}(2) = \hat{K}(1) + \varepsilon(2)/u(1) = 2$$

$$(9.4.4) \text{式} \rightarrow u(2) = \frac{K(2)}{\hat{K}(2)} u(1) + \frac{1}{\hat{K}(2)} e(2) = \frac{2}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2}(-4) = 2$$

表 10.4.1 數值計算結果

$t$	$w$	$y$	$e$	$K$	$\hat{K}$	$\hat{y}$	$\varepsilon$	$u$
0	0	0	0	2	1	0	0	0
1	4	0	4	2	1	0	0	4
2	4	8	-4	2	2	4	4	2
3	4	4	0	2	2	4	0	2
4	4	2	2	1	1	4	-2	4
5	4	4	0	1	1	4	0	4

使用相同的步驟，可得 $t = 3, 4, 5$ 時刻之各個變數值，其結果如右表 10.4.1 所示。在此表中，吾人可以看到自我調整控制器所展現的二種功能：

(1) 追蹤命令的能力：

$$y(k) \rightarrow w(k), e(k) = w(k) - y(k) \rightarrow 0$$

(2) 估測參數的能力：

$$\hat{K}(k) \rightarrow K(k), \varepsilon(k) = K(k) - \hat{K}(k) \rightarrow 0$$

### 9.4.3 受控體模式的參數估測

自我調整適應性控制器首在估測受控體的未知參數，然後再據以求出控制器的參數。在上一小節的例題中，由於未知參數只有一個 $K$ ， $\hat{K}$ 的估測直接即可求得。但當參數很多時，便需藉助系統識別(system identification)的理論才行。

系統識別的第一步是要受控體的模型表成離散(discrete)的型式，這是因為系統識別需要測量輸入數據，而資料的量測(尤其是數位式的感測器)有其取樣的時間間隔，不是連續的。由連續系統化成離散系統可以透過 $z$ -轉換：

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0} \xrightarrow{z=e^{sT}} G(z) = \frac{\bar{b}_m z^m + \dots + \bar{b}_0}{\bar{a}_n z^n + \dots + \bar{a}_0} \quad (9.4.11)$$

有關 $z$ 轉換的幾個特點描述如下：

- (1) 取樣時距 $T$ 越小，離散系統 $G(z)$ 的響應越接近於連續系統 $G(s)$
- (2) 若 $G(s)$ 有一個極點在 $s = \alpha$ ，則 $G(z)$ 有一個極點在 $z = e^{T\alpha}$ ，因此保角映射 $z = e^{sT}$ 將 $s$ 左半面的極點，映射到 $z$ 平面的單位圓內。

- (3) 不過零點的映射並不像極點一般具有規律性，在 $s$ 平面內穩定的零點，可能會被映射到 $z$ 平面上不穩定的零點。
- (4) 通常我們要求一個轉移函數的分母階數 $n$ 要大於或等於分子的階數，其原因是要滿足控制上的「因果律」(causality)，這一點在離散模型 $G(z)$ 上尤其重要。

現若假設 $m = 2, n = 1$ ，則由(9.4.11)式知

$$\begin{aligned}\frac{y(k)}{u(k)} &= \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{a_1 z + a_0} \\ \Rightarrow (a_1 z + a_0)y(k) &= (b_2 z^2 + b_1 z + b_0)u(k) \\ \Rightarrow a_1 y(k+1) + a_0 y(k) &= b_2 u(k+2) + b_1 u(k+1) + b_0 u(k)\end{aligned}\quad (9.4.12)$$

注意在(9.4.12)式中 $u(k)$ 是輸入訊號， $y(k)$ 是輸出訊號，因此 $u(k)$ 是「因」， $y(k)$ 是「果」。因果律是說「先有因，後有果」；但(9.4.12)式卻違反了因果律：

若設 $k+1$ 為現在的時刻，則 $k+2$ 為未來的時刻，那麼(9.4.12)式的意義是說：「現在時刻的果 $y(k+1)$ ，決定於未來時刻的因 $u(k+2)$ 」，變成先果後因的不合理現象。只要分子次方大於分母次方均會發生這種情形。這是為什麼控制器要滿足「proper」的主要原因。

現設(9.4.11)式中， $m = n - 1$ ，且 $\bar{a}_n$ 恒可選成1，故有

$$G(z) = \frac{\bar{b}_{n-1}z^{n-1} + \dots + \bar{b}_0}{z^n + \bar{a}_{n-1}z^{n-1} + \dots + \bar{a}_0} = \frac{y(k)}{u(k)} \quad (9.4.13)$$

由於 $zy(k) = y(k+1)$ 會牽涉到未來時刻的數據，這是未知的(設 $k$ 是現在時刻)，而參數識別是要以過去時刻的數據，估測現在時刻的參數，因此 $z$ 以 $z^{-1}$ 取代較為合宜( $z^{-1}y(k) = y(k-1)$ )。將(9.4.13)式的分子與分母同除以 $z^n$ ，可得

$$\begin{aligned}\frac{y(k)}{u(k)} &= \frac{\bar{b}_{n-1}z^{-1} + \dots + \bar{b}_0z^{-n}}{1 + \bar{a}_{n-1}z^{-1} + \dots + \bar{a}_0z^{-n}} \\ \Rightarrow (1 + \bar{a}_{n-1}z^{-1} + \dots + \bar{a}_0z^{-n})y(k) &= (\bar{b}_{n-1}z^{-1} + \dots + \bar{b}_0z^{-n})u(k) \\ \Rightarrow y(k) + \bar{a}_{n-1}y(k-1) + \dots + \bar{a}_0y(k-n) &= \bar{b}_{n-1}u(k-1) + \dots + \bar{b}_0u(k-n) \\ \Rightarrow y(k) &= -\bar{a}_{n-1}y(k-1) - \dots - \bar{a}_0y(k-n) + \bar{b}_{n-1}u(k-1) + \dots + \bar{b}_0u(k-n)\end{aligned}\quad (9.4.14)$$

其中 $y(k), y(k-1), \dots, y(k-n)$ 是輸出訊號，為已知； $u(k-1), \dots, u(k-n)$ 為輸入訊號，亦為已知； $\bar{a}_{n-1}, \dots, \bar{a}_0, \bar{b}_{n-1}, \dots, \bar{b}_0$ 為待估測之參數。

茲定義下列向量：

- $\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_N]^T = [\bar{a}_{n-1} \ \dots \ \bar{a}_0 \ \bar{b}_{n-1} \ \dots \ \bar{b}_0]^T$
- $x(k) = [x_1(k) \ \dots \ x_N(k)]^T = [-y(k-1), \dots, -y(k-n), u(k-1), \dots, u(k-n)]^T$

則(9.4.14)式可改寫成

$$y(k) = \sum_{i=1}^N \theta_i x_i(k) + e(k) = x^T(k)\theta + e(k) \quad (9.4.15)$$

其中 $e(k)$ 是雜訊(noise)或是干擾(disturbance)。在(9.4.15)式中 $\theta_i$ 是待估測的參數，而估測的準則是使得估測誤差為最小，其中估測誤差定義為

$$\varepsilon(k) = y(k) - \hat{y}(k) \quad (9.4.16)$$

$\hat{y} \triangleq \hat{y}(k|k-1)$ 是指利用 $k-1$ 時刻的數據，所估測到的 $k$ 時刻的輸出值 $\hat{y}(k)$ ；由(9.4.15)式知

$\hat{y}(k)$ 可表成

$$\hat{y}(k) = x^T(k)\hat{\theta}(k-1) \quad (9.4.17)$$

最小平方估測法的目的，是要求得最佳估測值 $\hat{\theta}(t)$ 使得下列之誤差平方和為最小

$$J(k) = \sum_{i=1}^k (y(i) - \hat{y}(i))^2 \quad (9.4.18)$$

圖 9.4.6 描述參數估測的流程。

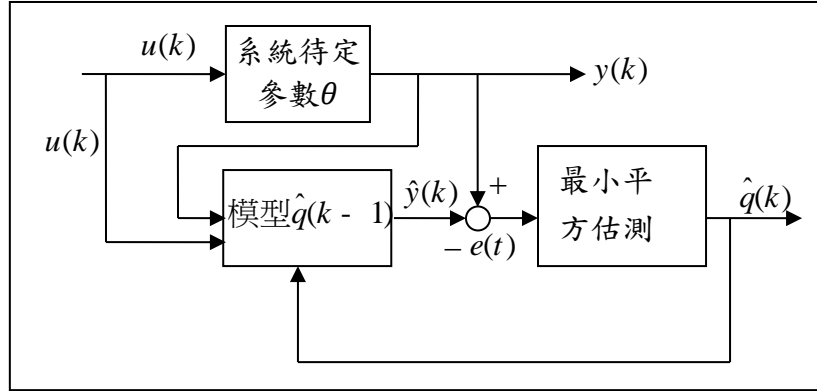


圖 9.4.6 參數估測的流程圖

最小平方估測法所得之參數 $\hat{\theta}(k)$ 如下：

$$\underbrace{\hat{\theta}(k)}_{\text{新的}\hat{\theta}} = \underbrace{\hat{\theta}(k-1)}_{\text{舊的}\hat{\theta}} + \underbrace{K(k)}_{\text{增益}} \underbrace{\varepsilon(k)}_{\text{誤差}} \quad (9.4.19)$$

其中 $K(k)$ 稱為 Kalman 增益，可由下式決定之：(細節可參考一般介紹系統識別的教科書，例如 Ljung, 1987; Johnson, 1988)

$$K(k) = \frac{P(k-1)x(k)}{1+x^T(k)P(k-1)x(k)} \quad (9.4.20)$$

上式中的 $P$ 稱為協方差(covariance)，其滿足下列之疊代式：

$$P(k) = [I - K(k)x^T(k)]P(k-1) \quad (9.4.21)$$

利用(9.4.19)式之疊代可得 $\hat{\theta}(k)$ ，亦即(9.4.13)式中模型的係數 $\bar{a}_i, \bar{b}_i$ 已求得；而有了模型的係數，控制器即可著手設計了。

參數識別要能準確，必須輸入訊號 $u$ 足夠大，且變化度足夠豐富，如此才能激起系統大部分的動態，而反映在輸出訊號 $y(k)$ 中。如此根據 $u(k), y(k)$ 所估測的參數才能接近於系統真正的參數。參數識別有開迴路與閉迴路的區分：



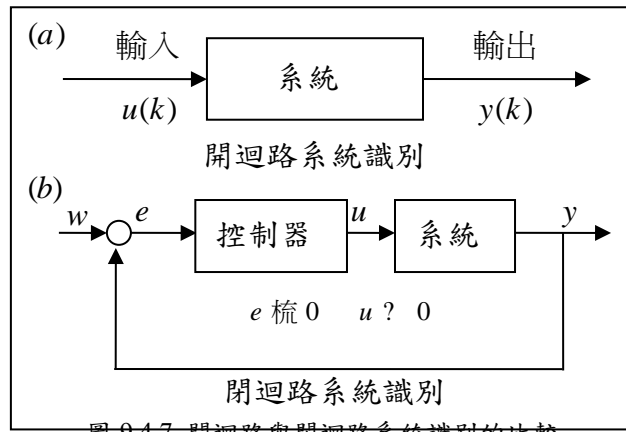


圖 9.4.7 開迴路與閉迴路系統識別的比較

- 開迴路參數識別：

在開迴路中，輸入訊號 $u(k)$ 可由設計者任意指定，如圖 9.4.7a 所示，其大小及變化度均可適當規劃，以便激發系統內部的所有動態，提高參數估測的精度。

- 閉迴路參數識別：

在閉迴路中，訊號 $u(k)$ 並不是直接由設計者所給定，而是由追蹤誤差訊號 $e(t)$ 通過控制器後所形成。在回授控制的過程中，輸出 $y(k)$ 逐漸趨近輸入 $w(k)$ ，如圖 9.4.7b 所示，因此誤差 $e(k) \rightarrow 0$ 且控制訊號 $u(k) \rightarrow 0$ 。當 $u$ 越來越小，且沒有變化時，即無法激發系統內部的動態，使得輸出訊號 $y(t)$ 不能反映系統所有的動態。如此以 $(u(k), y(k))$ 為數據所估測得到之受控體參數自然就不準確。

閉迴路參數估測的另一個困難是所得之估測值並不唯一。此點可由以下例題來加以說明。設有一受控體，其模式可表成

$$u(k) = ay(k-1) + bu(k-1) + e(k) \quad (9.4.22)$$

其中之回授控制訊號 $u(k)$ ，設計成

$$u(k) = -\alpha y(k) \Rightarrow 0 = \alpha y(k) + u(k) \quad (9.4.23)$$

將上式兩邊乘以常數 $\mu$ ，並與(9.4.22)式相加得

$$y(k) = (a + \mu\alpha)y(k-1) + (b + \mu)u(k-1) + e(k)$$

上式可表成具有二個待測參數的模式

$$y(k) = \theta_1 y(k-1) + \theta_2 u(k-1) + e = x^T \theta + e \quad (9.4.24)$$

其中 $\theta$ 可由(9.4.19)~(9.4.21)式之疊代式估測出來。但因 $\theta_1 = a + \mu\alpha$ ,  $\theta_2 = b + \mu$ ，而且 $\mu$ 是任意之常數，縱使 $\theta_1$ 和 $\theta_2$ 的值可求得，待測常數 $a, b$ 之值卻隨 $\mu$ 而變化，無法唯一決定。

為了解決閉迴路參數估測之困難，可採用下列三種補救之道：

- (1) 採用具有快速變化之參考命令 $w(t)$ 。
- (2) 採用高階複雜之控制器。
- (3) 採用具時變特性之控制器。

其中以第 3 點較能為自我調變適應性控制器所滿足。

### 9.4.4 能設置極點的自我調變控制器

當完成系統參數的識別工作後，接著即進行控制器的設計步驟，其中最常用的方法為極點指定法。

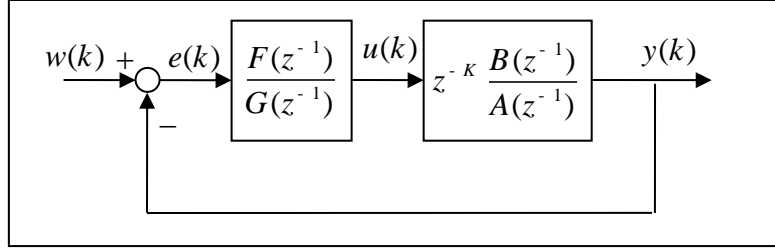


圖 9.4.8 具極點設置能力的自我調變控制器

在圖 9.4.8 之架構中： $z^{-K}B(z^{-1})/A(z^{-1})$ 為受控體之模式， $A(z^{-1})$ 、 $B(z^{-1})$ 為 $z^{-1}$ 之多項式； $K$ 為輸出入間之時間延遲，其值未知，待估測。 $F(z^{-1})/G(z^{-1})$ 為控制器之模式，也是待求。能設置極點的自我調變控制器的設計可分成二個步驟完成：

- (1) 以最小平方估測法估測 $A(z^{-1})$ 、 $B(z^{-1})$
- (2) 以估測所得之 $A(z^{-1})$ 、 $B(z^{-1})$ 去設計 $F(z^{-1})$ 、 $G(z^{-1})$ ，使得閉迴路系統的極點等於預先所設定者。

步驟一：參數估測：

參考圖 9.4.8，受控體之輸出入關係為

$$z^{-K} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(k) = y(k) \quad (9.4.25)$$

將 $A, B$ 多項式展開成冪級數的形式

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots, B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots \quad (9.4.26)$$

其中 $a_i, b_i$ 是待估測之參數。再將(9.4.26)式代入(9.4.25)式中，得

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) - \dots - b_0 u(k-K) - b_1 u(k-K-1) - \dots \quad (9.4.27)$$

並定義

$$\theta = [a_1 \ a_2 \ \dots \ b_0 \ b_1 \ b_2 \ \dots]^T$$

$$x(k) = [-y(k-1) \ -y(k-2) \ \dots \ -u(k-K) \ -u(k-K-1) \ \dots]^T$$

則(9.4.27)式可表成標準型式

$$y(k) = x^T(k)\theta + e(k) \quad (9.4.28)$$

其中 $e(k)$ 為雜訊。此時參數 $\theta$ 可用(9.4.19)、(9.4.20)、(9.4.21)三個步驟加以求得。設在第 $i$ 次疊代時，所得之 $A, B$ 估測值為 $\hat{A}_i, \hat{B}_i$ 。

步驟二：控制器設計：

將估測所得之 $\hat{A}_i, \hat{B}_i$ 代入圖 9.4.8 中，可得閉迴路之特徵方程式為

$$1 + \frac{F(z^{-1})}{G(z^{-1})} \cdot z^{-K} \frac{\hat{B}_i(z^{-1})}{\hat{A}_i(z^{-1})} = 0 \Rightarrow \hat{A}_i(z^{-1})G(z^{-1}) + z^{-K}\hat{B}_i(z^{-1})F(z^{-1}) = 0 \quad (9.4.29)$$

設 $T(z^{-1})$ 為所預先給定之閉迴路特徵方程式，則 $F(z^{-1})$ 及 $G(z^{-1})$ 的選擇是要使得

$$\hat{A}_i(z^{-1})G(z^{-1}) + z^{-K}\hat{B}_i(z^{-1})F(z^{-1}) = T(z^{-1}) \quad (9.4.30)$$

將所得之 $G, F$ 記做 $G_i(z^{-1}), F_i(z^{-1})$ ，代表是相對於第 $i$ 次受控體估測值 $\hat{A}_i, \hat{B}_i$ 所得之控制器。 $F$ 和 $G$ 可以用輾轉相除法求得，其方法類似以下高中數學問題：求多項式 $F(x)$ 及 $G(x)$ 使得

$$(x^2 + 1)F(x) + (x^3 - x + 1)G(x) = 1$$

另一個簡單的求解法是將 $F(x)$ 與 $G(x)$ 展開成多項式的形式，然後代入上式，令左右二邊相等，求解出多項式的待定係數。如果沒有解，再逐步增加多項式的階數，直到有解為止。

#### 例題 9.4.1：

設 $\hat{A}_i(z^{-1}) = 1 - 0.9z^{-1}$ ， $\hat{B}_i(z^{-1}) = 0.5$ ， $T(z^{-1}) = 1 - 0.5z^{-1}$ ， $K = 2$ ，求 $G, F$ 。將 $\hat{A}_i$ ， $\hat{B}_i$ 代入(9.4.29)式中得

$$(1 - 0.9z^{-1})G(z^{-1}) + z^{-2} \cdot 0.5 \cdot F(z^{-1}) = 1 - 0.5z^{-1}$$

此題以簡單的比較係數法即可求解。設

$$G(z^{-1}) = 1 + g_1z^{-1}，F(z^{-1}) = f_0 + f_1z^{-1}$$

代入上式，比較係數即可得 $g_1 = 1.1$ ， $f_0 = 1.28$ ， $f_1 = 0$ ，比對圖 9.4.8，其相對應之控制律可表示成

$$F(z^{-1})e(t) = G(z^{-1})u(t) \Rightarrow 1.28e(t) - (1 + 1.1z^{-1})u(t) = 0$$

$$\Rightarrow u(t) = -1.1u(t-1) + 1.28e(t)$$

此即控制訊號的疊代式。

□

圖 9.4.9 說明極點設置控制器與估測器的合成架構。注意當受控體參數 $A, B$ 變化時，估測值 $\hat{A}_i, \hat{B}_i$ 也隨之變化，而控制器參數 $F_i, G_i$ 也跟著做調變，故稱為自我調變(self-tuning)控制器。

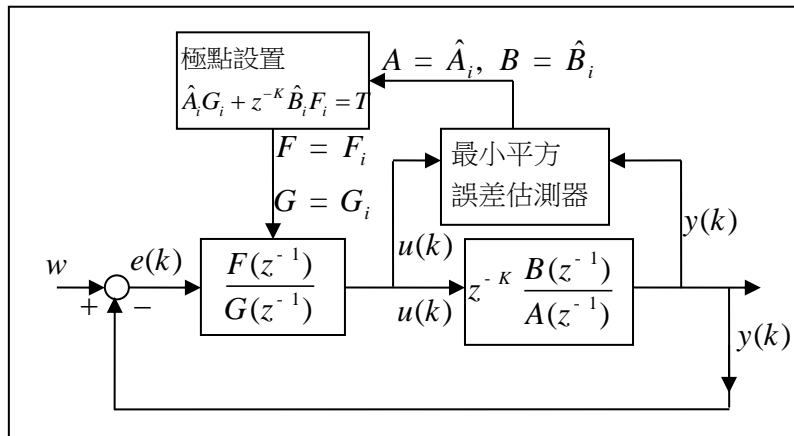


圖 9.4.9 控制器與估測器合成

## 9.5 參考模式控制

參考模式適應性控制以下簡稱 MRAC (Model-Reference Adaptive Control)，MRAC 的觀念主要源自參考模式控制(Model Reference Control，簡稱 MRC)，或稱模式追隨控制(Model

following control)。如圖 9.6.1 所示，參考模式控制顧名思義就是要設計一個控制器使得受控體的行為能夠接近於某一參考模式。在圖 9.5.1 中，參考模式的輸出為  $y_m$ ，而受控體的輸出為  $y_p$ ，控制訊號  $u_p$  的目的是要使得  $e_1 = y_p - y_m \rightarrow 0$ 。

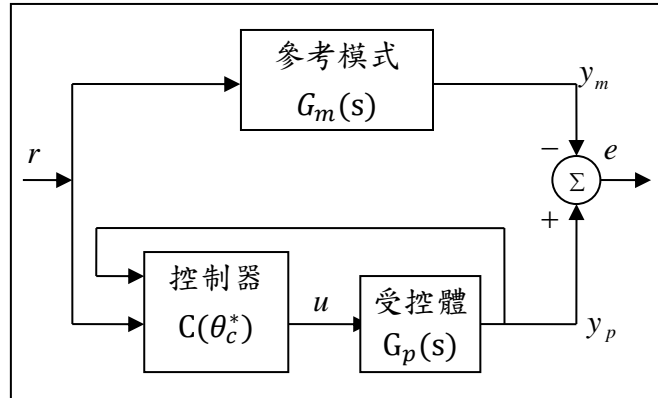


圖 9.5.1 參考模式(MRC)控制方塊圖

參考模式控制原先是假設受控體  $G_p(s)$  為完全已知，但因為適應性控制是在討論  $G_p(s)$  有參數變化的情形，因此參考模式適應性控制必須能一方面估測受控體的參數，而另一方面又能追隨參考模式的行為。由於估測方法的不同，參考模式適應性控制又可分為二大類：

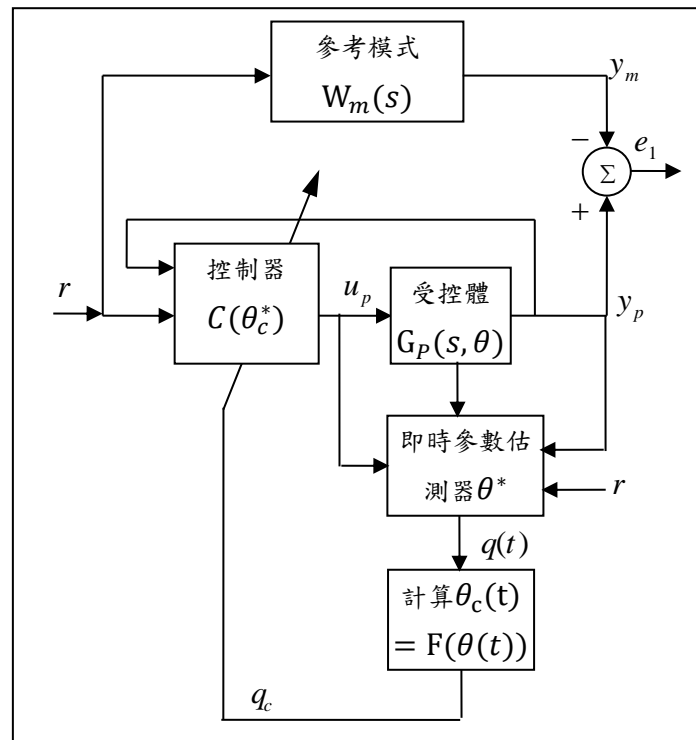


圖 9.5.2 間接式的參考模式適應性控制

- (1) 間接型式的參考模式適應性控制(Indirect MRAC)：其架構圖如圖 9.5.2 所示， $\theta^*$  是受控體的未知參數，而即時參數估測器(online parameter estimator)則根據受控體的輸入  $u_p$  及輸出  $y_p$  去估測  $\theta^*$  的值。然後再由  $\theta^*$  的估測值  $\theta$  去計算控制器的參數  $\theta_c$ ，當受控體參數  $\theta^*$  變化時，控制器的參數  $\theta_c$  也隨之適應調整。由於控制器參數  $\theta_c$  是透過受控體的參數  $\theta^*$  而間接獲得，故稱之為間接型 MRAC。

- (2) 直接型式的參考模式適應性控制：其架構圖如圖 9.5.3 所示，由此圖可看出直接型 MRAC 與間接型 MRAC 最大的不同是參數估測器是直接去估測控制器的參數 $\theta_c$ ，而非受控體的參數 $\theta^*$ 。

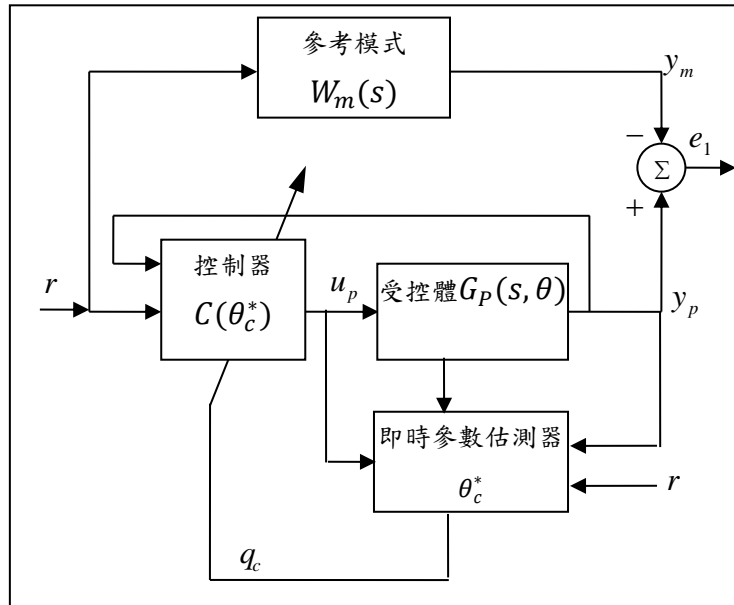


圖 9.5.3 直接式的參考模式適應性控制

從實用的觀點來看，直接型適應性控制較占優勢，因為它不必多花一道程序去估測系統的參數。然則直接型適應性控制並不適用於所有系統，而間接型的使用則沒有限制。在這一小節中，我們先從較廣義的間接型參考模式控制出發，探討在何種條件下，間接型參考模式控制可化簡成直接型控制(Astrom and Wittenmark, 1989)。參考圖 9.5.4，考慮如下受控體的輸出入關係

$$y(t) = \frac{B}{A}u(t) \quad (9.5.1)$$

其中 $u$ 是控制輸入訊號， $y$ 是系統輸出。以上關係適用於連續性系統，此時分子 $B(s)$ 與分母 $A(s)$ 是 Laplace 運算子 $s$ 的多項式；也可適用於離散性系統，此時分子 $B(z)$ 與分母 $A(z)$ 是前向位移運算子 $z$ 的多項式(參見下節的討論)。不管是 $s$ 或 $z$ 的多項式，分母 $A$ 的次方要大於或等於 $B$ 的次方。

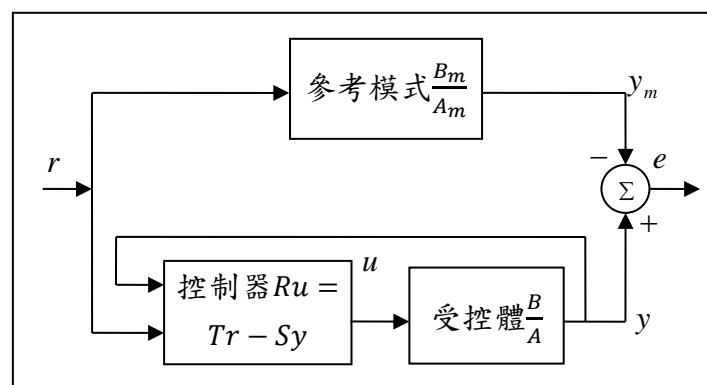


圖 9.5.4 參考模式(MRC)控制方塊圖

而參考模式的輸出入關係則表示成

$$y_m(t) = \frac{B_m}{A_m} r(t) \quad (9.5.2)$$

其中 $r$ 是參考指令輸入， $y_m$ 是參考模式的輸出。控制訊號 $u$ 是由參考指令 $r$ 與系統輸出訊號 $y$ 所決定，其可表示成如下的一般形式：

$$Ru = Tr - Sy \quad (9.5.3)$$

其中 $R$ 、 $T$ 、 $S$ 是待定的多項式。(9.5.3)式的控制律是由回授與前授二項所合成，其中的回授轉移函數是 $-S/R$ ，而前授轉移函數是 $T/R$ 。將(9.5.3)式代入(9.5.1)式得到閉迴路輸出入關係為

$$y = \frac{BT}{AR+BS} r \quad (9.5.4)$$

待定多項式 $R$ 、 $T$ 、 $S$ 的設計是要使得(9.5.4)式與(9.5.2)式完全一致，亦即達到模式追蹤的目的。以下我們逐步列出待定多項式 $R$ 、 $T$ 、 $S$ 所要滿足的條件。

- (1) 比較(9.5.4)式與(9.5.2)二式的分母，我們得知 $AR + BS$ 必定含有參考模式分母 $A_m$ 的因式。
- (2) 在(9.5.4)式中，分子的多項式 $B$ 可能與分母的閉迴路特徵多項式 $AR + BS$ 產生對消，不過這種對消只能限定於左半平面的因子。因此先將多項式 $B$ 因式分解成如下形式

$$B = B^+ B^- \quad (9.5.5)$$

其中 $B^+$ 包含左半平面的因子(可以對消的部分)， $B^-$ 包含右半平面的因子。

- (3) 假設多項式 $B$ 中的因式 $B^+$ 與 $AR + BS$ 產生對消，則 $AR + BS$ 亦必含有 $B^+$ 的因式。再結合推論(1)，得知 $AR + BS$ 同時含有 $A_m$ 及 $B^+$ 的因式，故可將 $AR + BS$ 表示成

$$AR + BS = B^+ A_0 A_m \quad (9.5.6)$$

此式被稱為 Diophantine 方程式或 Bezout 恆等式。

- (4) 觀察(9.5.6)式，左邊第二項含有 $B^+$ 的因式，右邊項也含有 $B^+$ 的因式，因此若要(9.5.6)式有解，多項式 $R$ 也必須含有 $B^+$ 的因式，亦即

$$R = B^+ R_1 \quad (9.5.7)$$

將(9.5.7)式代入(9.5.6)式，並將二側的 $B^+$ 的因式消去，得到

$$AR_1 + B^- S = A_0 A_m \quad (9.5.8)$$

利用 Matlab 求解上面的 Diophantine 方程式，得到多項式 $R_1$ 和 $S$ ，再將 $R_1$ 代入(9.5.7)式得到 $R$ 。這時(9.5.3)式中的待定多項式只剩下 $T$ 還不知道。

- (5) 為了求 $T$ ，將(9.5.6)式代入(9.5.4)式，得到

$$y = \frac{BT}{AR+BS} r = \frac{B^- T}{A_0 A_m} r \quad (9.5.9)$$

上式必須與(9.5.2)式完全一致，因此 $B_m$ 必須具有 $B^-$ 的因式，故將 $B^-$ 表成

$$B_m = B^- B'_m \quad (9.5.10)$$

再將此 $B_m$ 代入(9.5.2)式得到

$$y_m(t) = \frac{B_m}{A_m} r(t) = \frac{B^- B'_m}{A_m} r = \frac{B^- A_0 B'_m}{A_0 A_m} r \quad (9.5.11)$$

最後令(9.5.9)與(9.5.11)二式的右側相等，即可得到待求的多項式 $T$ ：

$$T = A_0 B'_m \quad (9.5.12)$$

在以上 5 個求解  $R$ 、 $T$ 、 $S$  的過程中，(9.5.8) 式的 Diophantine 方程式是主要關鍵，如果此方程式有解，則  $R$ 、 $T$ 、 $S$  即可求得。對於給定的受控體  $B/A$  以及參考模式  $B_m/A_m$ ，必須先滿足以下條件，才能保證 (9.5.8) 式有解：

$$\deg(A_0) \geq 2\deg(A) - \deg(A_m) - \deg(B^+) - 1 \quad (9.5.13a)$$

$$\deg(A_m) - \deg(B_m) \geq \deg(A) - \deg(B) \quad (9.5.13b)$$

因為 (9.5.6) 式中的  $A_0$  可自由選定，因此 (9.5.13a) 式的滿足恆可藉由  $A_0$  的適當選擇而完成。至於 (9.5.13a) 式的條件則是要求參考模式的相對階數要大於或等於受控體的相對階數，此一條件的滿足可由參考模式的適當選擇來完成。滿足 (9.5.13) 式的相容性條件後，待定多項式  $R$ 、 $T$ 、 $S$  即可求得，將之代入 (9.5.3) 式所得到的控制律可以保證完美的模式追隨功能 (perfect model following)。

以上關於參考模式控制的討論是假設受控體的轉移函數  $B(s)/A(s)$  或  $B(z)/A(z)$  為已知。適應性控制所要對付的是轉移函數為未知的情況。此時先要進行參數估測得到  $\hat{A}_i$  與  $\hat{B}_i$ ，再以  $\hat{A}_i$  與  $\hat{B}_i$  的值代入 Diophantine 方程式 (9.5.6)，求解待定多項式  $\hat{R}_i$ 、 $\hat{T}_i$ 、 $\hat{S}_i$ 。此即間接形式的 MRAC 適應性控制，這一過程是先估測得到受控體參數  $\hat{A}_i$  與  $\hat{B}_i$ ，再求解控制器參數  $\hat{R}_i$ 、 $\hat{T}_i$ 、 $\hat{S}_i$ 。無可避免地，間接形式的 MRAC 適應性控制會比較費時，因為對於每一次的疊代  $i$ ，都要重新求解一次 Diophantine 方程式 (9.5.6)。

在某些特殊情形下，求解 Diophantine 方程式的步驟可以去除，此時我們可以直接估測控制器的參數  $\hat{R}_i$ 、 $\hat{T}_i$ 、 $\hat{S}_i$ ，而略去估測受控體參數的中間步驟。此一特殊情形就是當受控體不具有右半平面的零點時，亦即受控體是最小相位系統 (參見 6.3 節的討論)，此時  $B^- = b_0$  = 常數，(9.5.8) 式則化成

$$A_0 A_m = AR_1 + b_0 S \quad (9.5.14)$$

將上式左右二側都乘以  $y$ ，並利用 (9.5.1) 式  $Ay = Bu$ ，得到

$$\begin{aligned} A_0 A_m y &= AR_1 y + b_0 S y = R_1 B u + b_0 S y \\ &= R_1 b_0 B^+ u + b_0 S y = b_0 R u + b_0 S y \\ &= b_0 (R u + S y) \end{aligned} \quad (9.5.15)$$

在上式中，左側的  $A_0 A_m$  是已知的多項式，右側的  $R$  與  $S$  是待求的控制器參數 (比對 (9.5.3) 式)，而  $y$  與  $u$  分別是受控體的輸出入訊號，因此利用 10.4 節所述之參數估測法即可直接估測得到  $\hat{R}$  與  $\hat{S}$ ，中間不必去估測受控體的參數  $\hat{A}$  與  $\hat{B}$ 。以上簡化的結果從而產生了直接形式的 MRAC 適應性控制，這將是後面 3 節所要討論的主題。

### 例題 9.5.1

設計參考模式控制律  $Ru = Tr - Sy$ ，使得受控體

$$y = \frac{B(s)}{A(s)} u = \frac{k}{s(s+a)} u \quad (9.5.16)$$

能夠追蹤二階標準參考模式

$$y_m = \frac{B_m(s)}{A_m(s)} r = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2} r \quad (9.5.17)$$

本題假設受控體的參數均為已知，目的在求得控制律的待定多項式 $R$ 、 $T$ 、 $S$ ，使得 $y \rightarrow y_m$ 。觀察(9.5.16)式，得知 $B = k$ 為常數，可令 $B = B^+ B^- = 1 \cdot k$ 。又因為 $B_m = \omega^2 = B^- B'_m$ ，故得 $B'_m = \omega^2/k$ 。由(9.5.6)式得到 $R$ 與 $S$ 所要滿足的方程式

$$AR + BS = B^+ A_0 A_m \rightarrow AR + kS = A_0 A_m \quad (9.5.18)$$

代入 $A(s) = s(s + a)$ ， $A_m(s) = s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2$ ，得到

$$s(s + a)R(s) + kS(s) = A_0(s)(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2) \quad (9.5.19)$$

其中 $A_0(s)$ 是可自由選擇的多項式，但是其次方必須滿足(9.5.13a)式的條件。這個次方的限制條件源自(9.5.3)式控制律的實現

$$u = \frac{T(s)}{R(s)}r - \frac{S(s)}{R(s)}y \quad (9.5.20)$$

上式要能被實現，必須 $\deg(R) \geq \deg(T)$ 且 $\deg(R) \geq \deg(S)$ ，其中的 $T(s) = A_0(s)B'_m(s) = (\omega^2/k)A_0(s)$ 。因此自由多項式 $A_0(s)$ 的次方必須小於或等於 $R(s)$ 的次方。如果 $R(s)$ 與 $S(s)$ 都取常數的話，我們發現(9.5.19)式的解不存在，故最低階的解是 $R(s)$ 與 $S(s)$ 都取為一次多項式：

$$R(s) = s + r_1, S(s) = s_0 s + s_1 \quad (9.5.21)$$

其中 $r_1$ 、 $s_0$ 、 $s_1$ 為待定參數。此時(9.5.19)式的左側為三次方多項式，因此右側的自由多項式 $A_0(s)$ 必須取為一次多項式：

$$A_0(s) = s + a_0 \quad (9.5.22)$$

其中 $a_0$ 為給定的正數。將(9.5.21)式及(9.5.22)式代入(9.5.19)式，比較兩邊多項式各次方的係數，可得待定參數 $r_1$ 、 $s_0$ 、 $s_1$ 的解為

$$r_1 = 2\zeta\omega + a_0 - a, s_0 = (2\zeta\omega a_0 + \omega^2 - ar_1)/k, s_1 = a_0\omega^2/k \quad (9.5.23)$$

另一個待定多項式 $T(s)$ 則為

$$T(s) = A_0(s)B'_m(s) = (\omega^2/k)A_0(s) = (\omega^2/k)(s + a_0) \quad (9.5.24)$$

最後將多項式 $R(s)$ 、 $T(s)$ 、 $S(s)$ 代入(9.5.20)式，得到所需要的控制律

$$u = \frac{T(s)}{R(s)}r - \frac{S(s)}{R(s)}y = \frac{\omega^2}{k} \frac{s+a_0}{s+r_1} r - \frac{s_0 s + s_1}{s+r_1} y \quad (9.5.25)$$

將(9.5.25)式代入(9.5.16)式可得 $r \rightarrow y$ 間的閉迴路系統響應，結果如圖 9.5.5 所示。此數值模擬結果所採用的受控體參數列出如下：

$$\zeta = 0.7, \omega = 1, a_0 = 2, a = 1, k = 2$$

輸入指令 $r$ 為單位脈波，模式輸出 $y_m(t)$ 是二階標準參考模式(9.5.17)對於指令 $r$ 的響應。從圖 9.5.5 可看到，系統的真实輸出 $y(t)$ 在時間 $t \geq 50$ 以後，和模式輸出 $y_m(t)$ 即完全一致，達到參考模式追蹤的目的。



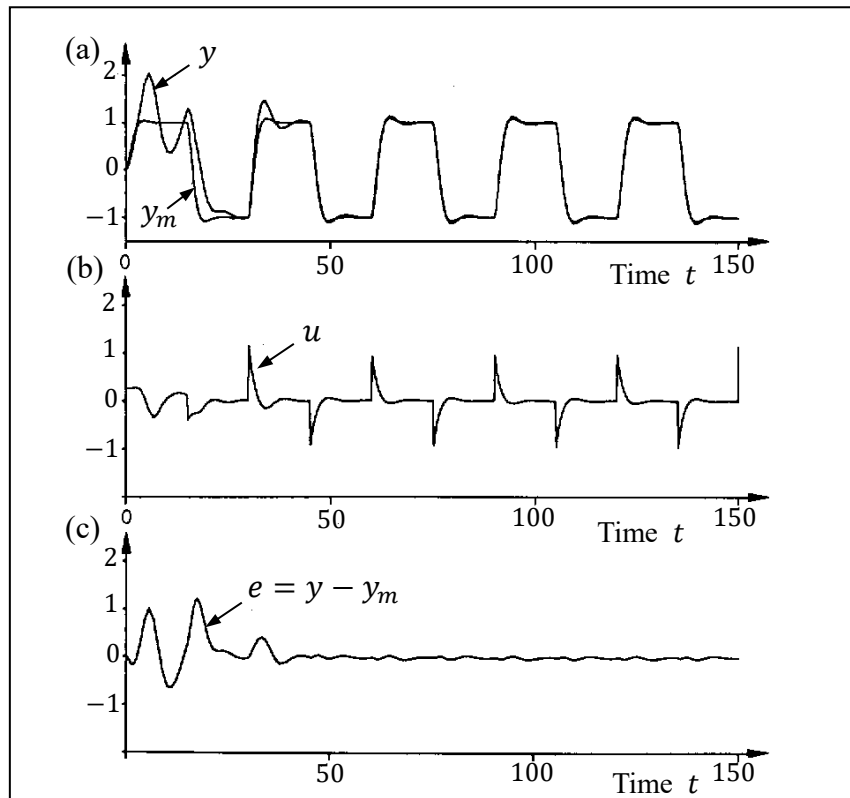


圖 9.5.5 例題 9.5.1 中參考模式控制的閉迴路系統響應(Astrom and Wittenmark, 1989)。

□

## 9.6 一階系統的 MRAC 適應性控制

前一節我們討論了在受控體已知的情況下，如何設計參考模式追蹤控制器。從現在開始我們要面對受控體參數為未知的情形，這時適應性控制的理念必須加進來。雖然受控體為未知，但是我們將只討論受控體為最小相位的情形(亦即沒有右半平面的零點)。對於非最小相位的受控體，6.3 節已說明完美的參考模式追蹤 $y(t) \rightarrow y_m(t)$ 不可能達到，除非控制能量 $u \rightarrow \infty$ 。在最小相位系統的假設下，如上一節的討論，直接形式的參考模式適應性控制變得可能，只要針對控制器的參數進行估測即可。在介紹直接型 MRAC 的一般性理論之前，本節先探討直接型 MRAC 適應性控制在一階線性與非線性系統的應用，這將有助於觀念上的掌握。

### 9.6.1 適應性調節控制(Adaptive Regulation)

調節(regulation)控制的目的是要使得系統的輸出達到某一固定的設定值，例如冷氣機的溫度設定控制。而基於 MRAC 的調節控制則除了要達到設定值外，同時要使得系統的動態響應能夠追隨參考模式的響應。茲考慮一個一階的受控體

$$\dot{y} = -a_p y + u, y(0) = y_0 \quad (9.6.1)$$

其中 $a_p$ 為常數但未知。控制器設計的目的是要在 $a_p$ 未知的情況下，能使 $y(t)$ 追隨參考模式的響應 $y_m(t)$ ，最後並將 $y(t)$ 設定到零，即 $y \rightarrow 0$ 。

假設受控體所要追隨的參考模式為

$$\dot{y}_m = -a_m y_m, y_m(0) = y_{m0}, a_m > 0 \quad (9.6.2)$$

則適應性控制的設計包含下列二個步驟：

#### (1) 控制律的設計：

若假設參數 $a_p$ 為已知，則只要採用控制律

$$u = -K^*y = (a_p - a_m)y \quad (9.6.3)$$

即可使得受控體的動態(9.6.1)和參考模式的動態(9.6.2)完全一致，此結果很容易證實，只要將(9.6.3)式代入(9.6.1)式：

$$\dot{y} = -a_p y + u = -a_p y - K^*y = -a_p y + (a_p - a_m)y = -a_m y$$

此方程式與(9.6.2)式完全相同。但實際上， $a$ 值是未知的，所以(9.6.3)式中的增益 $K^*$ 無法得知。這時我們要引入 MRAC 的適應性控制，方法是仍採用(9.6.3)式的控制，但 $K^*$ 的值由其估測值 $\hat{K}$ 所取代，亦即

$$u = -\hat{K}y \quad (9.6.4)$$

因此下面第二個步驟，即在決定 $\hat{K}$ 的值如何調變。

## (2) 參數調變律(adaptive law)的設計：

調變律是指控制器參數 $\hat{K}(t)$ 的值隨時間變化的機制。在(9.6.1)式中，做如下的改寫

$$\dot{y} = -a_p y - K^*y + K^*y + u = -a_m y + K^*y + u \quad (9.6.5)$$

將(9.6.4)式中的 $u$ 代入(9.6.5)式中，得

$$\dot{y} = -a_m y + (K^* - \hat{K})y \quad (9.6.6)$$

並定義參數估測誤差 $\bar{K} = \hat{K} - K^*$ ，輸出追蹤誤差 $e = y - y_{ref} = y - 0 = y$ ，則(9.6.6)式可改寫成

$$\dot{e} = -a_m e - \bar{K}e \quad (9.6.7)$$

適應性控制的目的，是希望在 $a_p$ 未知的情形下，決定(9.6.4)式的控制增益 $\hat{K}$ ，使得 $e(t) \rightarrow 0$ 當 $t \rightarrow \infty$ 。我們假設 $\hat{K}(t)$ 的調變律可寫成

$$\dot{\hat{K}} = \dot{\bar{K}} = f_1(e, \bar{K}) \quad (9.6.8)$$

其中 $f_1$ 是待定的函數。現在合併(9.6.7)式和(9.6.8)式得

$$\dot{e} = -a_m e - \bar{K}e, \dot{\bar{K}} = f_1(e, \bar{K}) \quad (9.6.9)$$

此為 $e$ 與 $\bar{K}$ 之聯立非線性方程式。我們希望透過 $f_1(e, \bar{K})$ 函數的選擇，使得 $e(t) \rightarrow 0$ 當 $t \rightarrow \infty$ ；也就是說 $e$ 必須為漸進穩定。非線性系統的穩定性證明，需透過 Lyapunov 定理，而相對於(9.6.9)式的 Lyapunov 函數可選成

$$V(e, \bar{K}) = \frac{e^2}{2} + \frac{\bar{K}^2}{2\gamma} > 0 \quad (9.6.10)$$

其中 $\gamma$ 是正的常數。 $V$ 同時也要滿足 $\dot{V} \leq 0$ 之條件。

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e \cdot \dot{e} + \frac{1}{\gamma} \bar{K} \dot{\bar{K}} = e(-a_m e - \bar{K}e) + \frac{1}{\gamma} \bar{K} f_1(e, \bar{K}) \\ &= -a_m e^2 - \bar{K}e^2 + \frac{1}{\gamma} \bar{K} f_1(e, \bar{K}) \end{aligned} \quad (9.6.11)$$

$f_1$ 的選擇是要使 $\dot{V} \leq 0$ ，觀察(9.6.11)式，我們發現只要 $f_1$ 選成

$$f_1(e, \bar{K}) = \gamma e^2 \quad (9.6.12)$$

此時(9.6.11)式即可化成所要求的結果

$$\dot{V} = -a_m e^2 \leq 0$$

而且當 $\dot{V} = 0$ 時恒有 $e = 0$ ，故 $e$ 為漸進穩定；但 $\dot{V} = 0$ 不能確保 $\bar{K} = 0$ ，故 $\bar{K}$ 僅為 Lyapunov 穩定。也就是說雖然 $t \rightarrow \infty$ 時， $\bar{K} = \hat{K} - K^* \neq 0$ ，有估測誤差的存在，但追蹤誤差 $e$ 卻一定會趨近 0，不受估測誤差的影響。

實際上，吾人可直接求解出 $e(t)$ 和 $\bar{K}(t)$ ，並驗證以上的推論結果。將(9.6.12)中的 $f_1$ 函數代入(9.6.9)中，得

$$\dot{e} = -a_m e - \bar{K} e, e(0) = y(0) - 0 = y_0 \quad (9.6.13a)$$

$$\dot{\bar{K}} = \gamma e^2, \bar{K}(0) = \hat{K}_0 - K^* \quad (9.6.13b)$$

此二式聯立可完全決定 $e(t)$ 和 $\bar{K}(t)$ ，其解析解可求得如下：

$$e(t) = \frac{2Ce^{-Ct}}{C + \hat{K}_0 - a_p + (C - \hat{K}_0 + a_p)e^{-2Ct}} \quad (9.6.14a)$$

$$\bar{K}(t) = a_p - K^* + \frac{(C + \hat{K}_0 - a_p)e^{2Ct} - (C - \hat{K}_0 + a_p)}{(C + \hat{K}_0 - a_p)e^{2Ct} + (C - \hat{K}_0 + a_p)} C \quad (9.6.14b)$$

其中 $C^2 = \gamma y_0^2 + (\hat{K}_0 - a_p)^2$ 。由(9.6.14)式可明顯看出

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{K}(t) = a_p - K^* + \sqrt{\gamma y_0^2 + (\hat{K}_0 - a_p)^2}$$

證實追蹤誤差 $e \rightarrow 0$ 的預測。同時可見估測誤差 $\bar{K}(\infty)$ 和初始條件 $y_0, \hat{K}_0$ 有關，且不一定為 0。因此嚴格來說，參數調變律(adaptation law)

$$\dot{\hat{K}} = \gamma e^2$$

的主要目的是要讓追蹤誤差為 0，而不是要去獲得一個正確的參數估測值。畢竟這個題目是要使 $x(t) \rightarrow 0$ ，只要達到這個目的，參數估的準不準，也就不那麼重要了。

## 9.6.2 適應性追蹤(adaptive tracking)

上一個例題的系統輸出 $y(t)$ 是要趨近於設定值 $y = 0$ (此稱為 regulation 問題)，本節的設計目的是要 $y(t)$ 去追蹤(track 或 follow)一個參考模式的狀態 $y_m(t)$ 。考慮下列之一階系統

$$\dot{y} + a_p y = b_p u \quad (9.6.15)$$

其中參數 $a_p, b_p$ 為未知。這裡的控制目標是要設計 $u$ ，使得 $y(t)$ 能追蹤 $y_m(t)$ ，其中 $y_m(t)$ 源自下列參考模式的輸出

$$\dot{y}_m + a_m y_m = b_m r \Rightarrow y_m = \frac{b_m}{s + a_m} r \quad (9.6.16)$$

其 $a_m, b_m$ 為已知之參數， $r$ 為輸入參考指令。適應性控制的設計仍然分成二個步驟進行：

### (1) 控制律的設計：

控制訊號採用線性回授的方式，

$$u = K_y^* y + K_r^* r \quad (9.6.17)$$

其中 $y$ 是系統的輸出值， $r$ 為參考命令，均為已知。將控制 $u$ 代入(9.6.15)式中，得到 $y$ 與 $r$ 間的轉移函數為

$$y = \frac{b_p K_r^*}{s + a_p - b_p K_y^*} r \quad (9.6.18)$$

由於要求 $y$ 和 $y_m$ 要一致，比較(9.6.16)和(9.6.18)式得到如下的結果

$$\frac{b_m}{s+a_m} = \frac{b_p K_r^*}{s+a_p-b_p K_y^*} \Rightarrow K_r^* = \frac{b_m}{b_p}, K_y^* = \frac{a_p-a_m}{b_p} \quad (9.6.19)$$

如此選擇之 $K_r^*$ 及 $K_y^*$ 即可保證 $y(t) \rightarrow y_m(t)$ 。但由於 $K_r^*, K_y^*$ 中包含未知的參數 $a_p, b_p$ ，所以 $K_r^*, K_y^*$ 的值實際上也是未知，因此需要一個調整的機制，來隨時估測 $K_r^*, K_y^*$ 的值。

## (2) 參數調變律(adaptation law)的設計：

將(9.6.17)式的控制律改變成

$$u = \hat{K}_y(t)y + \hat{K}_r(t)r \quad (9.6.20)$$

其中 $\hat{K}_y(t)$ 和 $\hat{K}_r(t)$ 分別是 $K_y^*$ 和 $K_r^*$ 的估測值。並進一步將(9.6.15)式改寫如下：

$$y = \frac{b_m}{s+a_m}r + \frac{b_p}{s+a_m}(-K_y^*y - K_r^*r + u) \quad (9.6.21)$$

若將(9.6.19)式的 $K_y^*$ 和 $K_r^*$ 代入上式，即可化成(9.6.15)式的結果。注意上式右邊的第一項即為參考模式的動態

$$\frac{b_m}{s+a_m}r = y_m$$

現在定義

- 追蹤誤差 $e = y - y_m$
- 參數誤差 $\bar{K}_y = \hat{K}_y - K_y^*, \bar{K}_r = \hat{K}_r - K_r^*$

將(9.6.20)式代入(9.6.21)式，並用 $e, \bar{K}_y, \bar{K}_r$ 的定義，則(9.6.21)式可改寫成

$$\dot{e} = -a_m e + b_p(\bar{K}_y y + \bar{K}_r r) \quad (9.6.22)$$

上面這個式子將參數誤差和追蹤誤差間之關係建立起來。現在有三個時間變數 $e, \bar{K}_y, \bar{K}_r$ ，但只有一個方程式(9.6.22)，因此我們還需要二個關於 $\bar{K}_y$ 和 $\bar{K}_r$ 之微分方程式。假設

$$\dot{\bar{K}}_y = \dot{\hat{K}}_y = f_1(e, \bar{K}_y, \bar{K}_r) \quad (9.6.23a)$$

$$\dot{\bar{K}}_r = \dot{\hat{K}}_r = f_2(e, \bar{K}_y, \bar{K}_r) \quad (9.6.23b)$$

$f_1$ 和 $f_2$ 是二個待定函數，目的是要使得追蹤誤差 $e(t) \rightarrow 0$ 。 $f_1, f_2$ 的選擇需透過 Lyapunov 穩定定理。茲採用一般的二次式 Lyapunov 函數如下：

$$V(e, \bar{K}_y, \bar{K}_r) = \frac{e^2}{2} + \frac{\bar{K}_y^2}{2\gamma_1}|b_p| + \frac{\bar{K}_r^2}{2\gamma_2}|b_p| > 0 \quad (9.6.24)$$

取 $V$ 對時間 $t$ 的微分，並利用(9.6.22)式、(9.6.23)式，得到

$$\dot{V} = -a_m e^2 + b_p \bar{K}_y y e + b_p \bar{K}_r r e + \frac{|b_p|}{\gamma_1} \bar{K}_y f_1 + \frac{|b_p|}{\gamma_2} \bar{K}_r f_2$$

$f_1, f_2$ 的選擇是要確保 $\dot{V} \leq 0$ 。在上式中注意 $|b_p|$ 可改寫如下

$$|b_p| = b_p \cdot \text{sgn}(b_p), \text{sgn}(b_p) = \begin{cases} +1, & b_p > 0 \\ -1, & b_p < 0 \end{cases}$$

因此當吾人選取

$$\dot{\bar{K}}_y = \dot{\hat{K}}_y = f_1 = -\text{sgn}(b_p)\gamma_1 e y \quad (9.6.25a)$$

$$\dot{\bar{K}}_r = \dot{\hat{K}}_r = f_2 = -\text{sgn}(b_p)\gamma_2 e r \quad (9.6.25b)$$

此時 $\dot{V}$ 可化簡成

$$\dot{V} = -a_m e^2 \leq 0 \quad (9.6.26)$$

因此由 Lyapunov 穩定定理知，由(9.6.22)、(9.6.23)式所組成之系統必為 Lyapunov 穩定，亦即 $e(t)$ 、 $\bar{K}_y(t)$ 、 $\bar{K}_r(t)$ 將必侷限在平衡點附近之微小區域內運動，不會發散。尤有甚者，因為

$$\dot{V} = 0 \text{ 時, } e = 0$$

此表示 $t \rightarrow \infty$ 時， $e \rightarrow 0$ ，亦即 $y \rightarrow y_m$ ；不過要注意的是 $t \rightarrow \infty$ 時， $\bar{K}_y(t)$ 、 $\bar{K}_r(t)$ 並不一定要趨於零。此表示 $e$ 為漸進穩定，但 $\bar{K}_y(t)$ 、 $\bar{K}_r(t)$ 僅止於 Lyapunov 穩定。

以(9.6.25)式來調變 $\bar{K}_y$ 和 $\bar{K}_r$ 的值，並將每一瞬間的 $\bar{K}_y$ 和 $\bar{K}_r$ 代入(9.6.20)式形成適應控制器，可以確保系統的輸出 $y(t)$ 可以追蹤參考模式的輸出 $y_m(t)$ ，而達到參考模式適應性控制的目的；不過要注意的是參數的估測值可能會有誤差的存在，但這並不影響到 $y \rightarrow y_m$ 的結果。

### 例題 9.6.1

考慮一個不穩定系統的受控體：

$$\dot{y} + a_p y = b_p u \rightarrow \dot{y} - y = 3u \quad (9.6.27)$$

其中系統的真实參數 $a_p = -1$ ， $b_p = 3$ ，對於適應性控制的設計者而言是未知的。現在要設計適應性控制 $u$ ，使得在系統參數未知的情況下，系統狀態能夠追蹤以下的參考模式：

$$\dot{y}_m + 4y_m = 4r \quad (9.6.28)$$

也就是 $a_m = b_m = 4$ 。設初始條件 $y_m(0) = y(0) = 0$ ，並設任何時刻下的 $y(t)$ 都可被測量到。適應控制律由(9.6.20)式所給定： $u = \bar{K}_y(t)y + \bar{K}_r(t)r$ ，其中的增益 $\bar{K}_y$ 與 $\bar{K}_r$ 則由調變律(9.6.25)式所決定(取 $\gamma_1 = \gamma_2 = 2$ )：

$$\dot{\bar{K}}_y = -2ey, \dot{\bar{K}}_r = -2er, \bar{K}_y(0) = \bar{K}_r(0) = 0 \quad (9.6.29)$$

其中輸出 $y$ 是測量值，但在數值模擬時， $y(t)$ 實際上是求解自(9.6.27)式的數值解。基於 MRAC 的適應性控制一方面要進行參數的調變，一方面要進行參考模式的追蹤控制。將 $u = \bar{K}_y(t)y + \bar{K}_r(t)r$ 代入(9.6.27)式中，並結合(9.6.29)式得到四個聯立的 ODE

$$\dot{y} = (1 + 3\bar{K}_y)y + 3\bar{K}_r r, y(0) = 0 \quad (9.6.30a)$$

$$\dot{y}_m = -4y_m + 4r, y_m(0) = 0 \quad (9.6.30b)$$

$$\dot{\bar{K}}_y = -2(y - y_m)y, \bar{K}_y(0) = 0 \quad (9.6.30c)$$

$$\dot{\bar{K}}_r = -2(y - y_m)r, \bar{K}_r(0) = 0 \quad (9.6.30d)$$

求解得到四個變數( $y(t)$ ,  $y_m(t)$ ,  $\bar{K}_y(t)$ ,  $\bar{K}_r(t)$ )隨時間的變化情形，如圖 9.6.4 所示。圖(a)與(b)顯示輸入 $r = 4$ 所對應的適應性控制結果，可以看到追蹤誤差 $e = y(t) - y_m(t) \rightarrow 0$ ，說明控制的結果使得系統響應與參考模式完全一致。(b)圖則顯示參數估測的結果，參數的正確值為 $K_y^* = (a_p - a_m)/b_p = -5/3$ ， $K_r^* = b_m/b_p = 4/3$ 。可以看到參數估測值 $\bar{K}_y(t)$ 與 $\bar{K}_r(t)$ 最後並未收斂

於 $K_y^*$ 與 $K_r^*$ ，存在有穩態誤差。圖(c)與(d)則顯示輸入 $r = 4\sin 3t$ 所對應的適應性控制結果，同樣得到追蹤誤差 $e = y(t) - y_m(t) \rightarrow 0$ 的結果，而且對於這組正弦波的輸入，參數估測值 $\hat{K}_y(t)$ 與 $\hat{K}_r(t)$ 最後都能收斂於正確的參數值 $K_y^*$ 與 $K_r^*$ 。這二種不同輸入所產生的控制結果，說明使用較複雜的輸入指令 $r$ ，較能得到正確的參數估測。但不管參數估測有沒有誤差，適應性控制都能在未知參數的作用下，達到追蹤參考模式的功能。

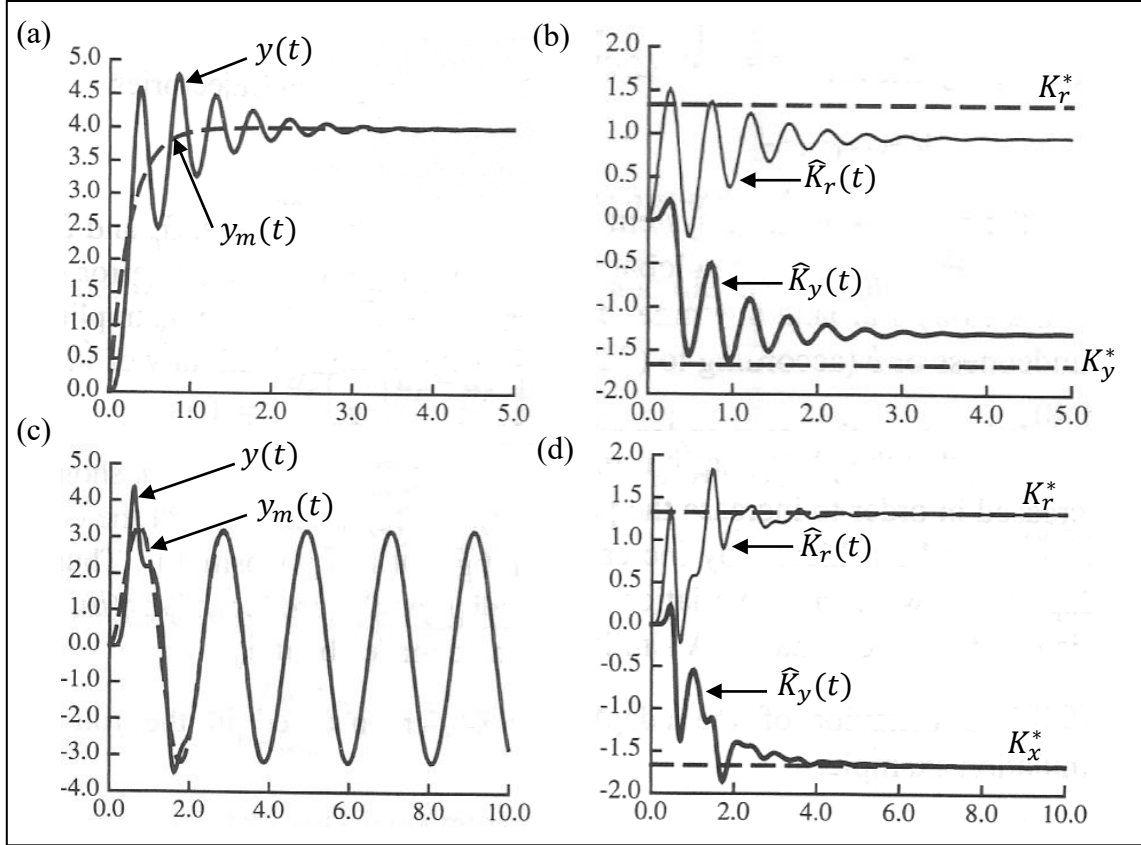


圖 9.6.4 例題 9.6.1 的數值模擬結果，(a)與(b)是相對於 $r = 4$ 的時間響應，(c)與(d)是相對於 $r = 4\sin 3t$ 的時間響應(Slotine and Li, 1991)。

□

### 9.6.3 擴展到非線性系統

前面關於 MRAC 適應性控制的討論可以輕易擴展到非線性的情形(Slotine and Coetsee, 1986)。延續上一小節的討論，但在(9.6.15)式中多加入一個非線性項而成為

$$\dot{y} + a_p y + c_p f(y) = b_p u \quad (9.6.31)$$

其中 $f(y)$ 是給定的非線性函數，三個參數 $a_p$ 、 $b_p$ 與 $c_p$ 則為未知。控制 $u$ 的設計是要在系統有未知參數的情況下，使得非線性系統的動態趨近於參考模式的動態：

$$\dot{y}_m + a_m y = b_m r \quad (9.6.32)$$

類似(9.6.17)式的形式，我們將控制 $u$ 取成

$$u = K_y^* y + K_f^* f(y) + K_r^* r \quad (9.6.33)$$

它是由二個回授項及一個前授項所組成， $K_y^*$ 、 $K_f^*$ 與 $K_r^*$ 分別是三項的增益值。其中的 $K_f^* f(y)$ 是非線性回授項，目的是要去除(9.6.31)式左側的非線性項。為了使(9.6.31)與(9.6.32)二式的動態

完全一樣，三個增益值必須取成下列的數值

$$K_y^* = \frac{a_p - a_m}{b_p}, K_f^* = \frac{c_p}{b_p}, K_r^* = \frac{b_m}{b_p}, \quad (9.6.34)$$

容易證明將以上的增益值代入(9.6.33)式，再將 $u$ 代入(9.6.31)式，其結果就是(9.6.32)式的參考模式。然而(9.6.34)式所給定的增益值決定於系統的三個未知參數 $a_p$ 、 $b_p$ 與 $c_p$ ，這使得正確的控制增益值實際上無從得知。所以我們必須建立一個即時調整的機制，來估測這三個增益值。假設 $\hat{K}_y$ 、 $\hat{K}_f$ 、 $\hat{K}_r$ 是所對應的估測值，則估測所得的控制訊號可表成

$$u = \hat{K}_y y + \hat{K}_f f(y) + \hat{K}_r r \quad (9.6.35)$$

定義參數估測誤差為

$$\bar{K}_y = \hat{K}_y - K_y^*, \bar{K}_f = \hat{K}_f - K_f^*, \bar{K}_r = \hat{K}_r - K_r^* \quad (9.6.36)$$

將(9.6.35)代入(9.6.31)式，可得閉迴路系統方程式

$$\dot{y} + (a_m - b_p \bar{K}_y)y = b_p \bar{K}_f f(y) + (b_m + b_p \bar{K}_r)r \quad (9.6.37)$$

取(9.6.37)式與(9.6.32)式的差，並定義模式追蹤誤差為

$$e(t) = y(t) - y_m(t) \quad (9.6.38)$$

可得追蹤誤差所要滿足的方程式

$$\dot{e} = -a_m e + b_p (\bar{K}_y y + \bar{K}_f f(y) + \bar{K}_r r) \quad (9.6.39)$$

剩下來的問題是要建立增益值的調變機制，其一般化的形式為

$$\dot{\hat{K}}_y = \dot{\bar{K}}_y = f_1(e, \bar{K}_y, \bar{K}_f, \bar{K}_r) \quad (9.6.40a)$$

$$\dot{\hat{K}}_f = \dot{\bar{K}}_f = f_2(e, \bar{K}_y, \bar{K}_f, \bar{K}_r) \quad (9.6.40b)$$

$$\dot{\hat{K}}_r = \dot{\bar{K}}_r = f_3(e, \bar{K}_y, \bar{K}_f, \bar{K}_r) \quad (9.6.40c)$$

其中 $f_1$ 、 $f_2$ 與 $f_3$ 是待定函數，目的是要使得追蹤誤差為漸進穩定，亦即 $e(t) \rightarrow 0$ 。仍然採用Lyapunov 直接定理來確保 $e(t) \rightarrow 0$ ，並選取二次式的Lyapunov 函數如下：

$$V(e, \bar{K}_y, \bar{K}_f, \bar{K}_r) = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}|b_p| \left( \frac{1}{\gamma_1} \bar{K}_y^2 + \frac{1}{\gamma_2} \bar{K}_f^2 + \frac{1}{\gamma_3} \bar{K}_r^2 \right) \geq 0 \quad (9.6.41)$$

其中 $\gamma_i > 0$ 是自由選定的參數。取 $V$ 對時間的微分得

$$\dot{V} = -a_m e^2 + b_p (\bar{K}_y y + \bar{K}_f f(y) + \bar{K}_r r) e + |b_p| \left( \frac{1}{\gamma_1} \bar{K}_y f_1 + \frac{1}{\gamma_2} \bar{K}_f f_2 + \frac{1}{\gamma_3} \bar{K}_r f_3 \right) \quad (9.6.42)$$

為了使得 $\dot{V} \leq 0$ ，三個待定函數 $f_1$ 、 $f_2$ 與 $f_3$ 可取成如下的形式

$$f_1 = -\text{sgn}(b_p) \gamma_1 e y, f_2 = -\text{sgn}(b_p) \gamma_2 e f(y), f_3 = -\text{sgn}(b_p) \gamma_3 e r \quad (9.6.43)$$

將上式代回(9.6.42)式， $\dot{V}$ 可化簡成

$$\dot{V} = -a_m e^2 \leq 0 \quad (9.6.44)$$

當 $\dot{V} = 0$ 時，必有 $e = 0$ ，但無法保證參數估測誤差 $\bar{K}_y$ 、 $\bar{K}_f$ 、 $\bar{K}_r$ 為零。這說明(9.6.40)式與(9.6.43)式所採用的增益調整機制可以達到模式追蹤的目的 $e(t) = y(t) - y_m(t) \rightarrow 0$ ，但無法保證完美的參數估測。通常若指令 $r(t)$ 為步階輸入，將導致參數估測誤差的存在，因為步階輸入無法激起系統高頻的響應。若取指令 $r(t)$ 為弦波輸入，則有助於消除參數估測誤差。

## 例題 9.6.2

本題延續例題 9.6.1 的討論，但是系統多考慮了一個非線性項 $y^2$ 而成為非線性系統：

$$\dot{y} - y - y^2 = 3u \quad (9.6.45)$$

其中系統的真实參數 $a_p = -1$ ， $c_p = -1$ ， $b_p = 3$ ，但在適應性控制的過程中，我們假設這些參數是未知的。現在要設計適應性控制 $u$ ，使得在系統參數未知的情況下，非線性系統的輸出能夠追蹤以下的線性參考模式：

$$\dot{y}_m + 4y_m = 4r \quad (9.6.46)$$

也就是 $a_m = b_m = 4$ 。設初始條件 $y_m(0) = y(0) = 0$ ，並設任何時刻下的 $y(t)$ 都可被測量到。適應控制律由(9.6.35)式所給定： $u = \hat{K}_y y + \hat{K}_f f(y) + \hat{K}_r r$ ，其中的增益 $\hat{K}_y$ 、 $\hat{K}_f$ 與 $\hat{K}_r$ 則由調變律(9.6.40)式與(9.6.43)式所決定(取 $\gamma_i = 2$ )：

$$\dot{\hat{K}}_y = -2ey, \quad \dot{\hat{K}}_f = -2ey^2, \quad \dot{\hat{K}}_r = -2er, \quad (9.6.47)$$

其中輸出 $y$ 是測量值，但在數值模擬時， $y(t)$ 實際上是求解自(9.6.45)式。同時我們假設參數的初始猜測值都是零， $\hat{K}_y(0) = \hat{K}_f(0) = \hat{K}_r(0) = 0$ ，這表示我們對於參數的值沒有任何預先的訊息。基於 MRAC 的適應性控制，一方面要進行參數的調變，一方面要進行參考模式的追蹤控制。將 $u = \hat{K}_y(t)y + \hat{K}_f(t)f(y) + \hat{K}_r(t)r$ 代入(9.6.45)式中，並結合(9.6.47)式得到五個聯立的 ODE

$$\dot{y} = (1 + 3\hat{K}_y)y + (1 + 3\hat{K}_f)y^2 + 3\hat{K}_r r, y(0) = 0 \quad (9.6.48a)$$

$$\dot{y}_m = -4y_m + 4r, y_m(0) = 0 \quad (9.6.48b)$$

$$\dot{\hat{K}}_y = -2(y - y_m)y, \quad \hat{K}_y(0) = 0 \quad (9.6.48c)$$

$$\dot{\hat{K}}_f = -2(y - y_m)y^2, \quad \hat{K}_f(0) = 0 \quad (9.6.48d)$$

$$\dot{\hat{K}}_r = -2(x - x_m)r, \quad \hat{K}_r(0) = 0 \quad (9.6.48e)$$

求解得到五個變數( $y(t)$ ,  $y_m(t)$ ,  $\hat{K}_y(t)$ ,  $\hat{K}_f(t)$ ,  $\hat{K}_r(t)$ )隨時間的變化情形，如圖 9.6.5 所示。圖(a)顯示輸入 $r = 4$ 所對應的適應性控制結果，可以看到追蹤誤差 $e = y(t) - y_m(t) \rightarrow 0$ ，說明控制的結果使得系統響應與參考模式完全一致。(b)圖到(d)圖則顯示參數估測的結果，參數的正確值為 $K_y^* = (a_p - a_m)/b_p = -5/3$ ， $K_f^* = c_p/b_p = -1/3$ ， $K_r^* = b_m/b_p = 4/3$ 。可以看到參數估測值 $\hat{K}_y(t)$ 、 $\hat{K}_f(t)$ 、 $\hat{K}_r(t)$ 最後並未收斂於 $K_y^*$ 、 $K_f^*$ 與 $K_r^*$ ，存在有穩態誤差。

圖 9.6.6 則顯示輸入 $r = 4\sin 3t$ 所對應的適應性控制結果，同樣得到追蹤誤差 $e = y(t) - y_m(t) \rightarrow 0$ 的結果，而且對於這組正弦波的輸入，參數估測值 $\hat{K}_y(t)$ 、 $\hat{K}_f(t)$ 與 $\hat{K}_r(t)$ 最後都能收斂於正確的參數值 $K_y^*$ 、 $K_f^*$ 與 $K_r^*$ 。這二種不同輸入所產生的控制結果，說明使用較複雜的輸入指令 $r$ ，較能得到正確的參數估測。但不管參數估測有沒有誤差，適應性控制都能在未知參數的作用下，以及非線性動態的作用下，達到追蹤參考模式的功能。



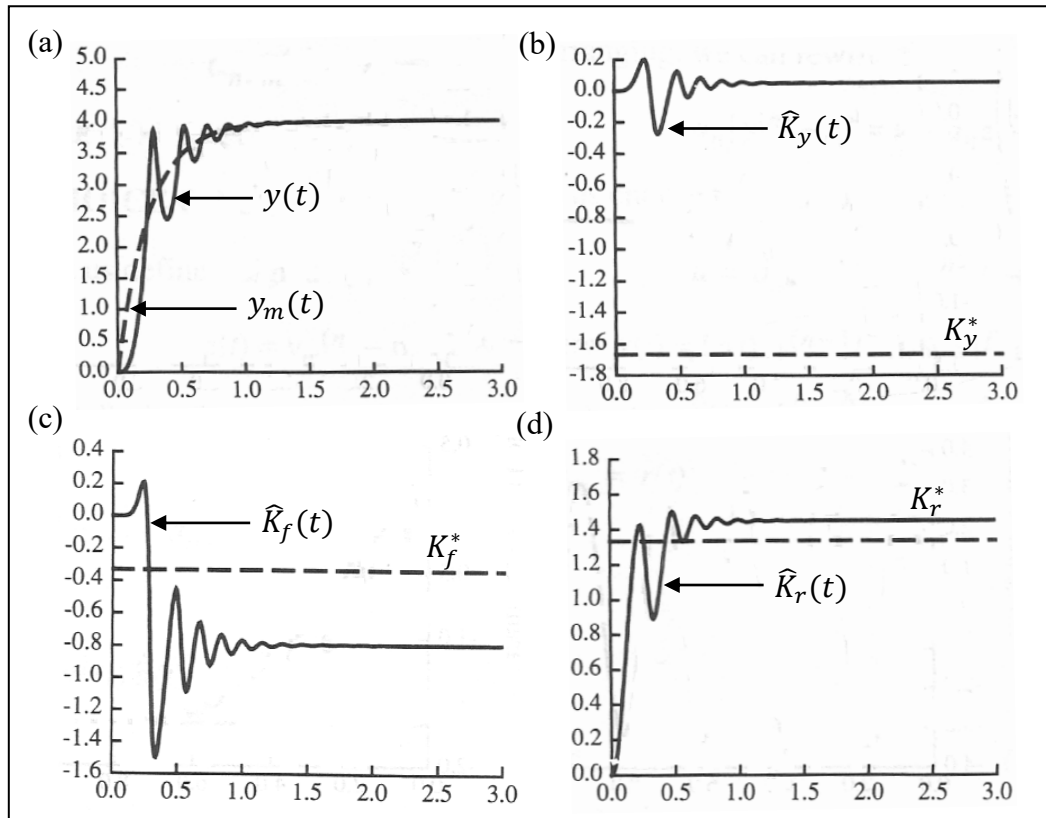


圖 9.6.5 例題 9.5.2 採用輸入  $r=4$  的數值模擬結果，(a)圖顯示模式追蹤誤差，(b)圖到(d)圖則顯示參數估測的結果(Slotine and Li, 1991)。

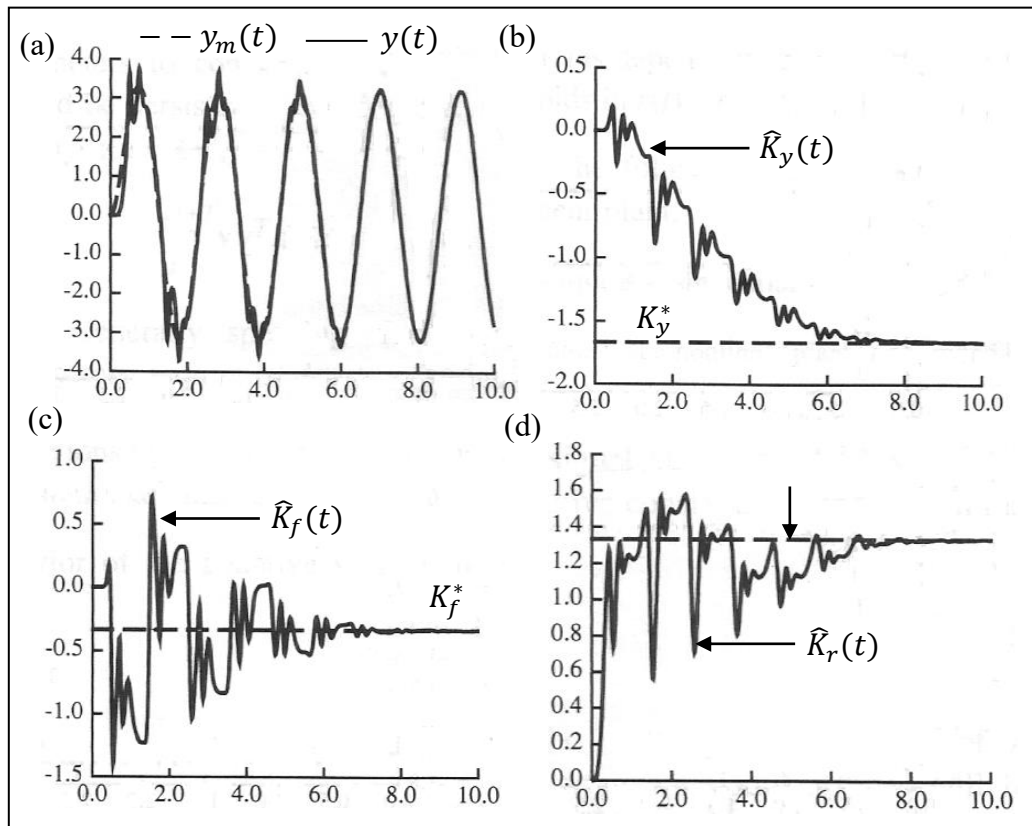


圖 9.6.6 例題 9.6.2 採用輸入  $r=4\sin 3t$  的數值模擬結果，(a)圖顯示模式追蹤誤差，(b)圖到(d)圖則顯示參數估測的結果(Slotine and Li, 1991)。

□

## 9.7 高階系統的 MRAC 適應性控制

上一節討論了 MRAC 適應性控制在一階系統的應用，透過幾個簡單的例題，我們看到這一控制方法可以一方面估測系統的未知參數，一方面調整控制策略使得系統能夠追隨參考模式的動態響應。這一節我們將探討一般高階系統的 MRAC 適應性控制。

### 9.7.1 高階線性系統

考慮如下的 $n$ 階系統

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = u \quad (9.7.1)$$

其中 $y^{(n)}$ 代表系統狀態 $y$ 對時間的 $n$ 階微分。這裡假設狀態 $y$ 的各階導數皆可測量到，並可提供做為回授控制之用(亦即狀態回授)。系統的參數 $a_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ，均為未知，但假設首項係數 $a_n$ 的正負符號為已知。(9.7.1)式的一個標準例題是滑塊-彈簧-阻尼(mass-spring-damper)所組成的二階系統：

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = u \quad (9.7.2)$$

其中 $a_2 = m$ ,  $a_1 = c$ ,  $a_0 = k$ 。假設我們可以量到滑塊的位置 $y$ 及速度 $\dot{y}$ ，則 MRAC 適應性控制的問題是在討論，當系統參數 $m$ 、 $c$ 、 $k$ 均為未知的情形下，如何設計控制律 $u$ ，使得滑塊的位置動態 $y(t)$ 能夠追蹤參考模式的動態 $y_m(t)$ 。

對於一般的情形，控制 $u$ 設計的目的是要在 $a_i$ 未知的情形下，使得(9.7.1)式的動態能夠追蹤以下參考模式的動態：

$$\alpha_n y_m^{(n)} + \alpha_{n-1} y_m^{(n-1)} + \cdots + \alpha_0 y_m = r(t) \quad (9.7.3)$$

定義追蹤誤差

$$e(t) = y(t) - y_m(t) \quad (9.7.4)$$

以及由 $e(t)$ 所組成的一個訊號

$$z(t) = y_m^{(n)}(t) - \beta_{n-1} e^{(n-1)}(t) - \cdots - \beta_0 e(t) \quad (9.7.5)$$

其中係數 $\beta_i$ 是設計者所選定的常數，使得由 $\beta_i$ 所形成的多項式方程式

$$\lambda^n + \beta_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + \beta_1 \lambda + \beta_0 = 0 \quad (9.7.6)$$

即為閉迴路系統的特徵方程式，它的 $n$ 個根為所指定的極點位置。

於(9.7.1)式的二側同時減去 $a_n z(t)$ ，得到

$$a_n (y^{(n)} - z) = u - a_n z - a_{n-1} y^{(n-1)} - \cdots - a_0 y \quad (9.7.7)$$

將適應性控制 $u$ 設計成如下的形式：

$$u = \hat{a}_n z + \hat{a}_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + \hat{a}_0 y = \mathbf{v}^T(t) \hat{\mathbf{a}}(t) \quad (9.7.8)$$

其中

$$\hat{\mathbf{a}}(t) = [\hat{a}_n \hat{a}_{n-1} \cdots \hat{a}_1 \hat{a}_0]^T \quad (9.7.9)$$

是由待估測參數所組成的向量，另外向量 $\mathbf{v}$ 定義成

$$\mathbf{v}^T(t) = [z(t) y^{(n-1)}(t) \cdots \dot{y}(t) y(t)]^T \quad (9.7.10)$$

是由訊號 $z$ 及系統狀態 $y$ 的各階導數所形成的向量，這是一個已知的向量。

將(9.7.8)式的 $u$ 及(9.7.5)式的 $z(t)$ 代入(9.7.7)式中，得到閉迴路系統的方程式

$$e^{(n)} + \beta_{n-1}e^{(n-1)} + \dots + \beta_1\dot{e} + \beta_0e = a_n^{-1}\mathbf{v}^T(t)\bar{\mathbf{a}}(t) \quad (9.7.11)$$

其中右邊項的 $\bar{\mathbf{a}}(t)$ 是參數估測誤差向量：

$$\bar{\mathbf{a}}(t) = \hat{\mathbf{a}}(t) - \mathbf{a}(t) \quad (9.7.12)$$

而(9.7.11)式的左邊項即為閉迴路特徵方程式，如(9.7.6)式所示。為了要建立參數估測 $\hat{\mathbf{a}}(t)$ 的調變機制，先將(9.7.11)式表成狀態空間的形式，並定義狀態空間向量：

$$\mathbf{x} = [x_1 x_2 \dots x_n]^T = [e \dot{e} \dots e^{(n-1)}]^T \quad (9.7.13)$$

則(9.7.11)式可改寫成

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v}^T(t)\bar{\mathbf{a}}(t)a_n^{-1} \quad (9.7.14)$$

其中矩陣 $\mathbf{A}$ 與 $\mathbf{B}$ 的定義為

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\beta_0 & -\beta_1 & -\beta_2 & \dots & -\beta_{n-1} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9.7.15)$$

在以上的推導中， $\mathbf{x}$ 是追蹤誤差向量所形成的向量， $\bar{\mathbf{a}}(t)$ 是參數估測誤差向量。接著我們將透過 Lyapunov 直接定理來確認這二個向量的收斂性。首先選取如下的 Lyapunov 函數

$$V(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{a}}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \bar{\mathbf{a}}^T (|a_n| \Gamma)^{-1} \bar{\mathbf{a}} > 0 \quad (9.7.16)$$

其中矩陣 $\mathbf{P}$ 是對稱正定矩陣滿足 Lyapunov 矩陣方程式

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} = -\mathbf{Q}, \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > 0 \quad (9.7.17)$$

矩陣 $\Gamma$ 是由設計者自由選取，通常取為對角陣： $\Gamma = \text{diag}[\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n]$ ，其中元素 $\gamma_i$ 代表誤差分量 $\bar{a}_i$ 在 $V$ 中所佔的權重，參考(9.6.41)式中的例題。

接著取 $V$ 對時間的微分，並利用(9.7.14)式，得到

$$\dot{V} = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + 2a_n^{-1} \bar{\mathbf{a}}^T \mathbf{v} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + 2\bar{\mathbf{a}}^T (|a_n| \Gamma)^{-1} \dot{\bar{\mathbf{a}}} \quad (9.7.18)$$

為了使 $\dot{V} \leq 0$ ，我們選取如下的 $\dot{\bar{\mathbf{a}}}$ 形式，使得上式右邊二項的和為零：

$$\dot{\bar{\mathbf{a}}} = -\text{sgn}(a_n) \Gamma \mathbf{v} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (9.7.19)$$

此時 $\dot{V}$ 化成

$$\dot{V}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{a}}) = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \leq 0 \quad (9.7.20)$$

當 $\dot{V} = 0$ 時，必有 $\mathbf{x} = 0$ ，亦即追蹤誤差及其各階導數為漸進穩定，保證了追蹤參考模式的功能 $y(t) \rightarrow y_m(t)$ ；但是 $\dot{V} = 0$ 無法保證參數估測誤差 $\bar{\mathbf{a}} \rightarrow 0$ ，顯示可能有參數估測誤差的存在。9.6.2 節所討論的情形即是以上通式的一個特例，對應到 $\bar{\mathbf{a}} = [\bar{K}_y, \bar{K}_r]^T$ 的情形。

## 9.7.2 高階非線性系統

MRAC 適應性控制一樣可以應用於高階非線性系統：

$$y^{(n)} + \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(\mathbf{x}, t) = bu \quad (9.7.21)$$

其中 $\mathbf{x} = [y \dot{y} \dots y^{(n-1)}]^T$ 是系統的狀態向量，且 $f_i$ 是已知的非線性函數， $\alpha_i$ 與 $b$ 則是未知的參數。我們假設狀態向量 $\mathbf{x}$ 可以被量測到，並提供回授之用，而且未知數 $b$ 的正負號為已知。(9.7.21)式的一個標準例題是非線性的滑塊-彈簧-阻尼系統

$$m\ddot{y} + cf_1(\dot{y}) + kf_2(y) = u \quad (9.7.22)$$

其中 $f_1(\dot{y})$ 是非線性阻尼項， $f_2(y)$ 是非線性彈簧項。MRAC 適應性控制的目的是在未知參數的作用之下，設計控制律 $u$ 使得系統輸出 $y(t)$ 能夠追蹤參考模式的輸出 $y_d(t)$ 。

首先將(9.7.21)式改寫成如下型式：

$$a_0 y^{(n)} + \sum_{i=1}^n a_i f_i(\mathbf{x}, t) = u \quad (9.7.23)$$

其中 $a_0 = 1/b$ ， $a_i = \alpha_i/b$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ ，均為未知參數，但假設 $a_0$ 的正負號為已知。並定義追蹤誤差

$$e(t) = y(t) - y_m(t) \quad (9.7.24)$$

及由追蹤誤差 $e(t)$ 所組成的滑動面(sliding surface)：

$$S = e^{(n-1)} + \beta_{n-2} e^{(n-2)} + \dots + \beta_1 \dot{e} + \beta_0 e \quad (9.7.25)$$

其中 $\beta_i$ 的選擇是使得特徵方程式 $\lambda^{n-1} + \beta_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + \beta_1 \lambda + \beta_0 = 0$ 的根落在左半平面所指定的地方。在第8章中我們已學過滑動模式控制的原理，當 $S \rightarrow 0$ 時，追蹤誤差 $e(t)$ 及其各階導數皆趨近於零。所以這裡的控制律設計目的是要讓 $S \rightarrow 0$ 。另外注意(9.7.25)式的滑動面 $S$ 可改寫成

$$S = y^{(n-1)} - y_r^{(n-1)} \quad (9.7.26)$$

其中 $y_r^{(n-1)}$ 定義成

$$y_r^{(n-1)} = y_m^{(n-1)} - \beta_{n-2} e^{(n-2)} - \dots - \beta_1 \dot{e} - \beta_0 e \quad (9.7.27)$$

為了使 $S \rightarrow 0$ ，控制律 $u$ 可設計成如下的形式

$$u = a_0 y_r^{(n)} - kS + \sum_{i=1}^n a_i f_i(\mathbf{x}, t) \quad (9.7.28)$$

其中 $k$ 是一個自由參數，只要符號與 $a_0$ 相同即可。將上式的 $u$ 代入(9.7.23)式中，可得所要的結果：

$$a_0 y^{(n)} = a_0 y_r^{(n)} - kS \Rightarrow a_0 \dot{S} + kS = 0 \Rightarrow S = ce^{-(k/a_0)t} \rightarrow 0 \quad (9.7.29)$$

由於 $k$ 與 $a_0$ 同號，保證了 $S$ 以指數遞減的速度趨近於零。

然而(9.7.28)式的控制 $u$ 實際上無法實現，因為其內的參數 $a_0$ 與 $a_i$ 都是未知的。所以我們必須先估測參數 $a_0$ 與 $a_i$ 的值，然後再以估測得到的參數值去建立控制訊號 $u$ 。假設參數 $a_0$ 與 $a_i$ 的估測值為 $\hat{a}_0$ 與 $\hat{a}_i$ ，則相對應控制訊號 $u$ 的估測值為

$$u = \hat{a}_0 y_r^{(n)} - kS + \sum_{i=1}^n \hat{a}_i f_i(\mathbf{x}, t) \quad (9.7.30)$$

將此 $u$ 代入(9.7.21)式中，得到 $S$ 所要滿足的方程式

$$a_0 \dot{S} + kS = \bar{a}_0 y_r^{(n)} + \sum_{i=1}^n \bar{a}_i f_i(\mathbf{x}, t) \quad (9.7.31)$$

其中 $\bar{a}_0 = \hat{a}_0 - a_0$ ， $\bar{a}_i = \hat{a}_i - a_i$ 是參數估測誤差。上式是關於 $S$ 的動態方程式，接下來要決定的是關於參數估測誤差的動態方程式，而目的是要使得 $S$ 為漸進穩定( $S \rightarrow 0$ )。仍然採用Lyapunov 直接定理，選取 Lyapunov 函數如下形式：

$$V = |a_0| S^2 + \frac{1}{\gamma_0} \bar{a}_0^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\gamma_i} \bar{a}_i^2 \quad (9.7.32)$$

並對 $V$ 取對時間的微分得

$$\dot{V} = 2\text{sgn}(a_0)S \left[ -kS + \bar{a}_0 y_r^{(n)} + \sum_{i=1}^n \bar{a}_i f_i(\mathbf{x}, t) \right] + \frac{2}{\gamma_0} \bar{a}_0 \dot{\bar{a}}_0 + \sum_{i=1}^n \frac{2}{\gamma_i} \bar{a}_i \dot{\bar{a}}_i \quad (9.7.33)$$

為了確保 $\dot{V} \leq 0$ ，可選取 $\dot{\bar{a}}_0$ 與 $\dot{\bar{a}}_i$ 成如下的形式：

$$\begin{aligned} \dot{\bar{a}}_0 &= -\gamma_0 \text{sgn}(a_0) S y_r^{(n)} \\ \dot{\bar{a}}_i &= -\gamma_i \text{sgn}(a_0) S f_i(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (9.7.34)$$

此二式稱為參數調變律。此時 $\dot{V}$ 可化簡成

$$\dot{V} = -2|k|S^2 \leq 0 \quad (9.7.35)$$

其中用到假設條件 $\text{sgn}(a_0) = \text{sgn}(k)$ 。上式的條件確保 $\dot{V} \rightarrow 0$ 時， $S \rightarrow 0$ ，而滑動面 $S \rightarrow 0$ 則又確保追蹤誤差 $e(t)$ 及其各階導數皆趨近於零。(9.7.34)式的參數調變律只能保證追蹤誤差 $e(t) \rightarrow 0$ ，但無法保證參數估測誤差 $\hat{a}_0$ 與 $\hat{a}_i$ 趨近於零。

## 9.8 輸出回授 MRAC 適應性控制

前面關於 MRAC 的討論均是假設系統狀態 $\mathbf{x} = [y \dot{y} \cdots y^{(n-1)}]^T$ 中的所有分量均可測量到，但是在很多時候，通常只有系統輸出 $y$ 可被測量並回授。本節即在於探討只有系統輸出 $y$ 可被測量及回授時，如何設計 MRAC 適應性控制。對於所有狀態可回授的情形，控制訊號 $u$ 可表成狀態的線性組合 $u = -K\mathbf{x}$ ，其中 $K$ 是一個常數增益矩陣， $\mathbf{x}$ 是狀態向量。但如果只有輸出 $y$ （是一個純量）可以回授時，比例控制 $u = -Ky$ 通常無法滿足需求，必須使用動態控制結構： $u = G(s)y$ ，其中 $G(s)$ 是待求的轉移函數。本節的目的在於求得 $G(s)$ ，使得在系統未知參數的作用下，系統的輸出響應能夠追隨參考模式的響應(Narendra and Annaswamy, 1989)。

在進行一般性的討論之前，我們先透過一個例題來了解如何透過輸出回授達到模式追隨的功能。考慮一個二階系統

$$y = \frac{k_p(s+b_p)}{s^2+a_{p1}s+a_{p2}} u \quad (9.8.1)$$

由於分子、分母的階數差 1，我們稱此系統的相對階數為 1。控制律 $u$ 的設計是要使系統的響應追隨下列的參考模式

$$y_m = \frac{k_m(s+b_m)}{s^2+a_{m1}s+a_{m2}} r \quad (9.8.2)$$

閉迴路系統的方塊圖如圖 9.8.1 所示。

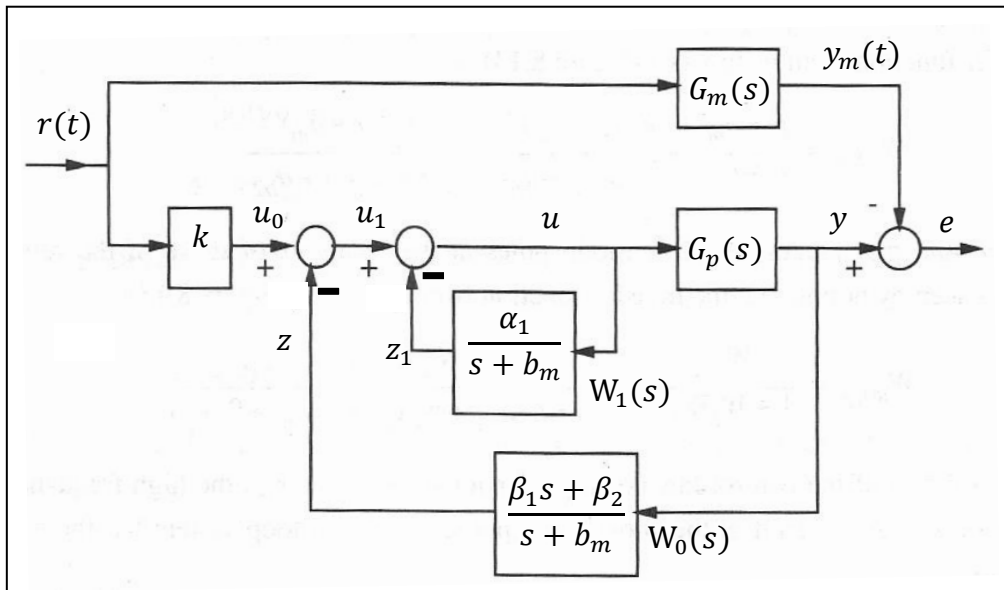


圖 9.8.1 在系統參數已知的情況下，以輸出回授進行參考模式追蹤控制。

從圖 9.8.1 中，可以看到控制訊號 $u$ 是由 3 個分量所組成：

$$\begin{aligned} u &= u_1 + z_1 = u_0 + z + z_1 \\ &= kr + \frac{\beta_1 s + \beta_2}{s + b_m} y + \frac{\alpha_1}{s + b_m} u \end{aligned} \quad (9.8.3)$$

其中 4 個參數 $\alpha_1$ 、 $\beta_1$ 、 $\beta_2$ 、 $k$ 是控制器的待定參數。如果假設系統(9.8.1)式內的參數完全已知，則當控制器參數選擇如下時：

$$\alpha_1 = b_p - b_m, \beta_1 = \frac{a_{m1} - a_{p1}}{k_p}, \beta_2 = \frac{a_{m2} - a_{p2}}{k_p}, k = k_m/k_p \quad (9.8.4)$$

輸入 $r$ 到輸出 $y$ 之間的轉移函數 $G_{ry}(s)$ (參考圖 9.8.1)可求得為

$$G_{ry}(s) = \frac{k_m(s+b_m)}{s^2 + a_{m1}s + a_{m2}} = G_m(s) \quad (9.8.5)$$

亦即閉迴路控制達到完美追蹤參考模式的功能。

接下來我們仔細分析為什麼圖 9.8.1 的控制器結構可以轉換閉迴路系統的轉移函數，將之變成參考模式的轉移函數？這個轉換的動作是由控制訊號 $u$ 的 3 個分量： $z_1$ 、 $z$ 、 $u_0$ ，合力所完成。首先觀察回授訊號 $z_1$ 的作用，在圖 9.8.1 中， $u_1$ 與 $y$ 之間的轉移函數可寫成

$$G_{u_1, y} = \frac{G_p(s)}{1 + W_1(s)} = \frac{s + b_m}{s + b_m + \alpha_1} \frac{k_p(s + b_p)}{s^2 + a_{p1}s + a_{p2}} = \frac{k_p(s + b_m)}{s^2 + a_{p1}s + a_{p2}} \quad (9.8.6)$$

其中最後一個等式是代入(9.8.4)式中的 $\alpha_1$ 值。可以看到 $W_1(s)$ 的作用以及參數 $\alpha_1$ 的選擇在於消去受控體 $G_p(s)$ 的分子部分 $s + b_p$ ，並替換成參考模式 $G_m(s)$ 的分子部分 $s + b_m$ 。

再來觀察回授訊號 $z$ 的作用，在圖 9.8.1 中， $u_0$ 與 $y$ 之間的轉移函數可寫成

$$\begin{aligned} G_{u_0, y}(s) &= \frac{G_{u_1, y}(s)}{1 + G_{u_1, y}(s)W_0(s)} = \frac{\frac{k_p(s+b_m)}{s^2 + a_{p1}s + a_{p2}}}{1 + \frac{k_p(s+b_m)}{s^2 + a_{p1}s + a_{p2}} \frac{\beta_1 s + \beta_2}{s + b_m}} \\ &= \frac{k_p(s+b_m)}{s^2 + (a_{p1} + \beta_1 k_p)s + a_{p2} + \beta_2 k_p} = \frac{k_p(s+b_m)}{s^2 + a_{m1}s + a_{m2}} \end{aligned} \quad (9.8.7)$$

其中最後一個等式是代入(9.8.4)式中的 $\beta_1$ 及 $\beta_2$ 的值。可以看到 $W_0(s)$ 的作用以及參數 $\beta_1$ 及 $\beta_2$ 的選擇在於替換閉迴路轉移函數的分母部分，使之成為參考模式 $G_m(s)$ 的分母部分 $s^2 + a_{m1}s + a_{m2}$ 。

得到了 $u_0$ 與 $y$ 之間的轉移函數後，最後觀察圖 9.8.1 中的 $r$ 與 $y$ 之間的轉移函數：

$$G_{r, y}(s) = k G_{u_0, y}(s) = \frac{k k_p(s+b_m)}{s^2 + a_{m1}s + a_{m2}} = \frac{k_m(s+b_m)}{s^2 + a_{m1}s + a_{m2}} = G_m(s) \quad (9.8.8)$$

其中代入了(9.8.4)式中的 $k = k_p/k_m$ ，最後使得輸入 $r$ 與輸出 $y$ 之間的轉移函數 $G_{r, y}(s)$ 完全與參考模式的轉移函數 $G_m(s)$ 完全相同，達到完美模式追隨的功能。

以上的結果是在假設系統參數為已知的情況下所得到的，實際的設計還要加入參數估測的調變機制，再利用所得的參數估測值進行控制律的設計。我們先將以上的二階例題擴展到 $n$ 階系統的一般情形。考慮如下的 $n$ 階受控系統

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= A_p x_p + B_p u, \quad x_p(0) = x_0 \\ y &= C_p x_p \end{aligned} \quad (9.8.9)$$

將之表成轉移函數的型式為

$$y = G_p(s)u = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)} u \quad (9.8.10)$$

其中  $R_p(s)$  和  $Z_p(s)$  是最高次項係數為 1 之多項式 (monic polynomials)。而所要追蹤的參考模式表示成

$$y_m = G_m(s)r = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)} r \quad (9.8.11)$$

$R_m(s)$  及  $Z_m(s)$  的最高次項係數為 1，且均為穩定 (此稱為 Hurwitz monic polynomial)。下面所要提出之 MRAC 適應性控制理論，雖然是一般性的，但仍需要滿足以下幾個假設：

- (1)  $Z_p(s)$  的根均要在左半面 (穩定)，亦即受控體必須為最小相位 (minimum phase system)。
- (2) 設  $Z_p(s)$  及  $R_p(s)$  的階數各為  $m_p$  及  $n_p$ ，且相對階數  $n^* = n_p - m_p$  須為已知。
- (3)  $k_p$  的正負號須為已知 (但其絕對值可以是未知)。
- (4)  $R_m(s)$  及  $Z_m(s)$  的階數分別為  $q_m$  和  $p_m$ ，且  $p_m \leq n$ 。
- (5) 參考模式的相對階數  $n_m^*$  需和受控體的相對階數一樣，即  $n_m^* = p_m - q_m = n^*$ 。

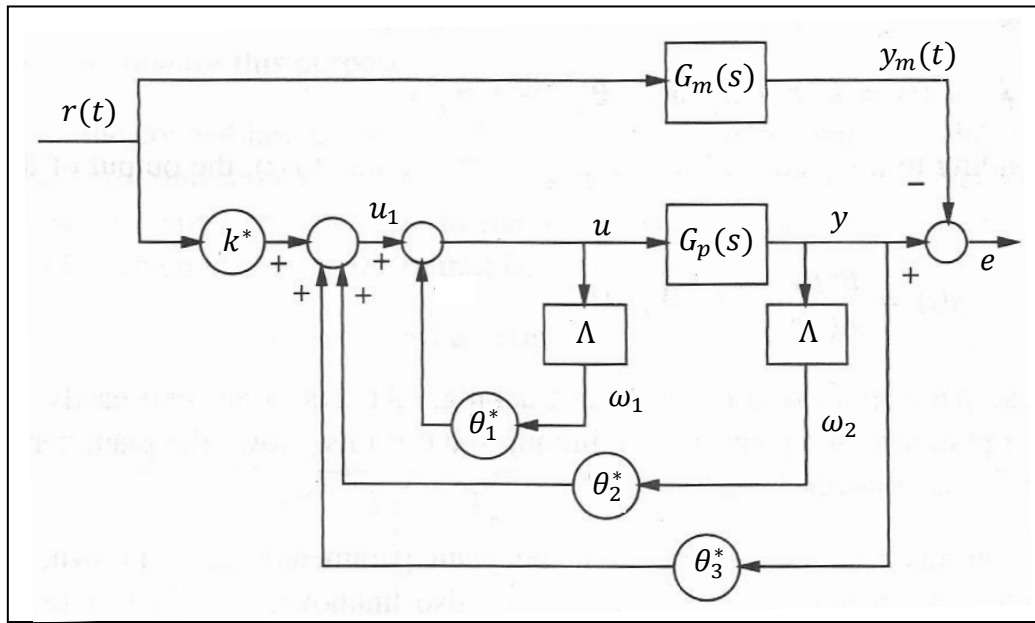


圖 9.8.2 對於一般性的  $n$  階系統，進行輸出回授的 MRAC 適應性控制，控制訊號  $u$  是由 4 項所組成 (Narendra and Annaswamy, 1989)。

控制策略  $u(t)$  的設計是要使得圖 9.8.2 中  $r$  到  $y$  的動態與  $r$  到  $y_m$  的參考模式動態完全一致。由圖中可看到滿足此條件的  $u$  是由 4 個分量所組成

$$u = \theta_1^{*T} \omega_1 + \theta_2^{*T} \omega_2 + \theta_3^* y + k^* r = \Theta^{*T} \Omega \quad (9.8.12)$$

其中每個分量定義如下

- (1)  $\Theta^* = [\theta_1^{*T}, \theta_2^{*T}, \theta_3^*, k^*]^T$  是  $2n$  階向量，由待定控制器參數所組成，其中  $\theta_1^*$  與  $\theta_2^*$  都是  $n-1$  階向量，而  $\theta_3^*$  與  $k^*$  則是純量。
- (2)  $\Omega = [\omega_1^T, \omega_2^T, y, r]^T$  是已知的時間函數。
- (3)  $\omega_1 = \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u$ ,  $\omega_2 = \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y$ ，其中  $\alpha(s) = [s^{n-2}, s^{n-3}, \dots, s, 1]^T$  為  $n-1$  階向量，分母  $\Lambda(s)$  是  $n-1$  階的多項式，為穩定且含有  $Z_m(s)$  之因式，即  $\Lambda(s) = \Lambda_0(s)Z_m(s)$ 。因  $Z_m(s)$  為  $q_m$  階，故知  $\Lambda_0(s)$  為  $n-1-q_m$  階。

現將 (9.8.12) 式代入 (9.8.10) 式中，可得閉迴路系統  $r \rightarrow y$  間之轉移函數為

$$G_{r,y}(s) = \frac{k^* k_p Z_p \Lambda}{(\Lambda - \theta_1^{*T} \alpha) R_p - K_p Z_p (\theta_2^{*T} \alpha + \theta_3^* \Lambda)} \quad (9.8.13)$$





圖 9.8.3 在參數估測誤差的作用下，輸出回授型 MRAC 適應性控制的等義閉迴路方塊圖。

注意圖 9.8.3 中的紅色虛線框，根據圖 9.8.2 中的定義，此即為參考模式的轉移函數  $G_m(s)$ 。因此圖 9.8.3 中的輸出  $y$  可表示成

$$y = G_m(s)[r + \bar{\Theta}^T(t)\Omega/k^*] = G_m(s)r + G_m(s)[\bar{\Theta}^T(t)\Omega/k^*] \quad (9.8.22)$$

其中的右邊第一項即為參考模式的輸出  $y_m = G_m(s)r$ 。定義模式追蹤誤差  $e = y - y_m$ ，則 (9.8.22) 式化成

$$e = G_m(s)[\bar{\Theta}^T(t)\Omega/k^*] \quad (9.8.23)$$

上式將追蹤誤差  $e$  和參數估測誤差  $\bar{\Theta}$  的關係建立起來。 $\hat{\Theta}$  的調變律是要能確保  $e(t) \rightarrow 0$ 。滿足此條件的調變律可取為

$$\dot{\hat{\Theta}} = -\text{sgn}(k^*)\gamma e(t)\Omega(t) \quad (9.8.24)$$

其中  $\gamma$  是任意正常數。如同 9.6 節中的證明步驟，(9.8.24) 之調變律可確保存在 Lyapunov 函數  $V$ ，使得  $V > 0, \dot{V} \leq 0$ 。且當  $\dot{V} = 0$  時，必有  $e = 0$ 。不過 (9.8.24) 式之參數調變律只適用於受控體分母之次方比分子多一階的情形，即相對階數  $n^* = 1$ ，關於  $n^* \geq 2$  之情形，可進一步參閱文獻中的討論 (Slotine and Li, 1991)。

### 例題 9.8.1：

考慮二階受控系統

$$y = \frac{k_p(s+b_0)}{s^2+a_1s+a_0}u \quad (9.8.25)$$

注意此系統之相對階數為 1，且其中  $a_1, a_0, k_p, b_0$  均為未知之參數，且已知  $k_p > 0, b_0 > 0$ 。而所要追蹤之參考模式為

$$y_m = \frac{1}{s+1}r \quad (9.8.26)$$

在 (9.8.12) 式之控制律中，選取  $\Lambda = s + 2$ ，則有

$$u = \hat{\Theta}^T\Omega = \hat{\theta}_1\omega_1(t) + \hat{\theta}_2\omega_2(t) + \hat{\theta}_3y(t) + \hat{k}r(t) \quad (9.8.27)$$

其中訊號  $\omega_1$  與  $\omega_2$  是由以下關係式獲得： $\Lambda(s)\omega_1 = u, \Lambda(s)\omega_2 = y$ ，亦即

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= -2\omega_1 + u, & \omega_1(0) &= 0 \\ \dot{\omega}_2 &= -2\omega_2 + y, & \omega_2(0) &= 0 \end{aligned} \quad (9.8.28)$$

參數調變律根據 (9.8.24) 式，則為

$$\dot{\hat{\Theta}} = -\gamma e\Omega(t) \quad (9.8.29)$$

其中各向量定義如下：

- $e = y - y_m$
- $\hat{\Theta} = [\hat{\theta}_1 \hat{\theta}_2 \hat{\theta}_3 \hat{k}]^T = [\hat{a}_1 \hat{a}_0 \hat{b}_0 \ 1/\hat{k}_p]^T$
- $\Omega(t) = [\omega_1(t) \ \omega_2(t) \ y(t) \ r(t)]^T$

模式追蹤誤差  $e = y - y_m$  與參數估測誤差  $\bar{\Theta}$  間之關係可由 (9.8.23) 式得知為

$$e = G_m(s)[\bar{\Theta}^T(t)\Omega(t)/k^*] = \frac{k_p}{s+1}\bar{\Theta}^T(t)\Omega(t) \quad (9.8.30)$$

其中  $k^* = 1/k_p$ 。(9.8.30) 式可進一步改寫成

$$\dot{e} = -e + k_p\bar{\Theta}^T(t)\Omega(t) \quad (9.8.31)$$

由(9.8.29)和(9.8.31)式所合成之整合系統，可找到相對應之 Lyapunov 函數  $V$  為

$$V(\bar{\Theta}, e) = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}k_p \bar{\Theta}^T \gamma^{-1} \bar{\Theta} > 0 \quad (9.8.32)$$

對  $V$  取時間的微分得

$$\dot{V} = -e^2 + k_p \bar{\Theta}^T e \Omega - k_p \bar{\Theta}^T e \Omega = -e^2 \leq 0 \quad (9.8.33)$$

故得  $\dot{V} \rightarrow 0$  時， $e(t) \rightarrow 0$ ，因此  $e(t)$  為漸進穩定，但  $\bar{\Theta}(t)$  僅為 Lyapunov 穩定，亦即參數的估測值可能會有穩態誤差的存在。

□

## 9.9 非線性系統的適應性控制:回顧與展望

在結束本章前，在這裡我們針對非線性系統的適應性控制，做一個簡單的回顧與展望。本章前面幾節所討論的適應性控制，例如 9.3 節的增益排程(gain scheduling)方法，9.4 節的自我調整(self-tuning)方法與 9.6 節的參考模式(model reference)方法，實際上都是針對線性系統而設計，這部分在 1980 年之前已發展成熟，故被稱之為傳統適應性控制設計。從 1980 年代開始，適應性控制進入另一個新階段，這個新階段的二個重要元素是強健性(robustness)與非線性(nonlinearity)。強健適應性控制的發展是要解決傳統適應性控制面對系統不確定動態時所產生的不穩定問題，這個方向的發展與 1980 年代興起的強健控制理論有密切的關係(Rohrs, et al., 1985; Ioannou and Sun, 1988; Taylor, 1989; Ortega and Yu, 1989)。

在同一時間，針對非線性系統設計的適應性控制也發展了起來，順著原先線性適應性控制的二個架構，而展開了二種不同的非線性系統的適應性控制設計：

### (1) Lyapunov-based Design:

這個設計方法沿用線性系統參考模式適應性控制的理念，核心步驟是在選擇適當的參數調變律與狀態回授控制律，使得 Lyapunov 函數滿足  $V > 0$ ， $\dot{V} < 0$  (參見 9.6 節到 9.8 節的討論)。然而這個方法在 1980 代初期，不管是對線性或非線性系統都遇到相同的問題，也就是不確定參數  $\theta$  的相對階數必須為 0 或 1。當不確定參數  $\theta$  與控制輸入  $u$  出現在同一個方程式時，稱此不確定參數的相對階數是零，此時稱參數滿足 matching condition。例如(9.6.31)式與(9.7.21)式所描述的非線性系統都滿足此一條件。1980 年代的非線性適應性控制大部分都是在滿足 matching condition 這個條件下，所建立起來的(Taylor, et al, 1989)。

到 1980 年代末期，對於相對階數為 1 的不確定參數(亦即經過一次的微分，不確定參數  $\theta$  與控制輸入  $u$  才能出現在同一個方程式)所對應的適應性控制問題也獲得了解決，此時稱參數滿足 extended matching condition (Kanellakopoulos, I., Kokotovic, P. V. and Marino, 1991)。非線性系統的不確定參數的相對階數必須為 0 或 1 的限制困擾了學術界一段時間，直到二篇博士論文的相繼出現，才完全拋開這個限制。第一篇博士論文(Kanellakopoulos, 1991)提出一種稱為 adaptive backstepping 的疊代設計步驟，打破了 matching condition 所圍起的藩籬，然而卻也引發了另一個稱為過度參數估測的新問題(overparametrization)。三年後，第二篇博士論文(Krstic, 1994)提出 tuning function 的方法解決了這個新問題。”Adaptive backstepping”與”Tuning function”的結合打通了適應性控制由線性系統通往非線性系統的任都二脈，奠定了以 Lyapunov 函數設計非線性適應性控制的發展方向。再一年後，這二篇博士論文的作者與他們

的共同指導教授 Kokotovic 所合著的專書《Nonlinear and Adaptive Control Design》(Krstic, Kanellakopoulos and Kokotovic, 1995)，紀錄了這個研究方向的研發歷程。

## (2) Estimation-based Design(或稱 Modular Design):

這個設計方法又稱為模組設計法(modular design)，其特性類似線性系統的自我調整(self-tuning)適應控制原理(參見 9.4 節的討論)，其中的參數調變律(parameter update law)與回授控制律可分開獨立設計。在非線性系統的適應性控制模組化設計中，參數調變律採用 swapping 識別器(swapping identifier)，回授控制律則採用 ISS 控制律，這樣的組合才能確保參數估測與追蹤控制能完全獨立設計(Krstic and Kokotovic, 1995B)。

對於線性系統而言，在設計回授控制律時，可假設待測參數為完全已知，不受參數估測誤差的影響，這個特性稱為「確定等效原理」(certainty equivalence property)。在 9.6 節所討論的範例中，我們已經看到當參數估測存在穩態誤差時，回授控制器仍然可使得追蹤誤差降到零，不受參數估測誤差的影響，這就是確定等效原理的特性。然則當「確定等效原理」被應用到非線性系統時，遇到了挫折，因為縱使是很小的估測誤差都有可能造成追蹤誤差的發散(此即非線性系統常有的蝴蝶效應)。解決之道是要設計一種收斂速度更快的控制律，它的收斂速度要快過估測誤差所造成的發散。如果我們將參數估測誤差視為控制系統的干擾(disturbance)輸入源，而將追蹤誤差視為控制系統的狀態，則控制律須能保證該系統的輸入-狀態穩定性(Input-State Stability, ISS)，這樣的控制律稱為 ISS controller，所對應的 Lyapunov 函數稱為 ISS- Control Lyapunov Function (Lin, Y., Songtag, E. and Wang, 1994; Krstic and Kokotovic, 1995A)。ISS 控制律的提出確保了；在另一方面，swapping 識別器(identifier)的提出，則確保了參數估測誤差的有界性(包含靜態參數與動態參數的估測，Krstic and Kokotovic, 1995B)。ISS Controller 與 swapping identifier 的整合，成功實現了非線性適應性控制的模組化設計理念。

以上二種非線性適應性控制的設計方法在 1990 年代都取得重大的進展，但在付諸實務應用之前，它們還要通過最後一個考驗：從狀態回授(state feedback)設計過渡到輸出回授(output feedback)設計。在線性控制理論中，輸出回授設計是整合狀態控制器(state controller)與狀態估測器(state estimator)而成，並透過分離原理(separation principle)，二者可分開設計。然而分離原理依然不適用於非線性系統，因為狀態估測誤差的收斂無法保證整合系統的收斂，顯然非線性狀態估測器的設計必須滿足更嚴格的收斂條件。後來具有指數型收斂特性的 K-filter (Kreisselmeier, 1977)被引入非線性系統中，解決了非線性適應性控制的輸出回授設計問題(Kanellakopoulos, Krstic and Kokotovic, 1993)。到 1990 年代後期，非線性適應性控制的設計已成功拆解成三個獨立模組：(a)控制律(control law)模組，(b)參數識別器(parameter identifier)模組，(c)狀態估測器(state estimator)模組。

進入 21 世紀以後，非線性系統的適應性控制設計所面對的問題是系統的廣義性不足。之前所建立的各種適應性控制法則都只能各自適用於某些特定族群的非線性系統。為了擴大適用範圍，一個具體的解決之道是透過模糊-類神經網路(Fuzzy-neuro network)為非線性系統建立廣義的模式，再對此廣義模式進行適應性控制，這方面的進展已累積不少研究成果(Calise, Hovakimyan and Idan, 2001; Xu and Ioannou, 2003; Ge and Wang, 2004; Li, et al., 2004, Bechlioulis and Rovithakis, 2008)。透過模糊-類神經網路為各種非線性系統進行適應性控制，將是這個領域持續發展的方向，最新的研究成果與文獻回顧可參閱專書(Boutalis, et al., 2014)。

## 9.10 學習評量

9.10.1 設計參考模式控制律  $Ru = Tr - Sy$ ，使得受控體

$$y = \frac{B(s)}{A(s)} u = \frac{k}{(s+a_1)(s+a_2)} u \quad (9.10.1)$$

能夠追蹤二階標準參考模式

$$y_m = \frac{B_m(s)}{A_m(s)} r = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2} r \quad (9.10.2)$$

其中假設受控體及參考模式的所有參數均為已知。

(a) 仿照例題 9.5.1 的步驟，求出控制律中的待定多項式  $R(s)$ 、 $T(s)$  和  $S(s)$ 。

(b) 利用上一步驟所求出之多項式形成控制指令  $u$ ：

$$u = \frac{T(s)}{R(s)} r - \frac{S(s)}{R(s)} y \quad (9.10.3)$$

將此  $u$  代入 (9.10.1) 式中，求出  $r \rightarrow y$  間的閉迴路轉移函數。

(c) 設定參數值  $k = \omega = 1$ ， $\zeta = 0.7$ ， $a_1 = 1$ ， $a_2 = 2$ ，並設參考指令  $r(t) = 2\sin t$ 。利用上一步驟所求出之閉迴路轉移函數，分別畫出系統輸出響應  $y(t)$  及模式輸出響應  $y_m(t)$ ，設初始條件  $y(0) = 1$ ， $y_m(0) = 1$ 。以數值模擬驗證模式追蹤  $y(t) \rightarrow y_m(t)$  確實達到。

## 9.10.2 考慮一個二階系統

$$y = \frac{B(s)}{A(s)} u = \frac{b}{s(s+1)} u \quad (9.10.4)$$

其中  $b$  是一個隨時間變化的未知參數。本題的目的是要設計適應性控制律

$$u = k(r - y) \quad (9.10.5)$$

使得系統輸出  $y(t)$  能夠追蹤二階標準參考模式的輸出  $y_m(t)$

$$y_m = \frac{B_m(s)}{A_m(s)} r = \frac{1}{s^2 + s + 1} r \quad (9.10.6)$$

(a) 先假設  $b$  為固定的已知常數，求出控制律的參數  $k^*$  (用常數  $b$  表示之)，使得  $r \rightarrow y$  間的轉移函數與  $r \rightarrow y_m$  間的轉移函數完全一致。

(b) 在參數  $b$  未知的情形下，求出參數  $k$  的估測值  $\hat{k}(t)$  所要滿足的調變律，以使得模式追蹤誤差  $r = y(t) - y_m(t) \rightarrow 0$ 。

(c) 以數值模擬驗證模式追蹤  $r = y(t) - y_m(t) \rightarrow 0$  確實達成，模擬時假設系統參數以  $b(t) = \sin t$  的方式隨時間變化，並討論參數  $k$  的估測值  $\hat{k}(t)$  是否收斂到步驟 (a) 所得到的正確值  $k^*$ 。

## 9.10.3 本題延續範例 9.6.2 的討論，但是考慮不同的非線性系統：

$$\dot{y} + a_p y + c_p \sin y = b_p u \quad (9.10.7)$$

現在要設計適應性控制  $u$ ，使得在系統參數未知的情況下，非線性系統的輸出能夠追蹤以下的線性參考模式：

$$\dot{y}_m + 4y_m = 4r \quad (9.10.8)$$

(a) 將控制訊號表成如下型式

$$u = K_y y + K_f \sin y + K_r r \quad (9.10.9)$$

並假設受控體參數 $a_p$ 、 $b_p$ 、 $c_p$ 為已知的情況下，求出控制律參數 $K_y^*$ 、 $K_f^*$ 、 $K_r^*$ ，使得 $r \rightarrow y$ 間的轉移函數與 $r \rightarrow y_m$ 間的轉移函數完全一致。

- (b) 其次假設受控體參數 $a_p$ 、 $b_p$ 、 $c_p$ 為未知的情況下，求出控制律參數的估測值 $\hat{K}_y$ 、 $\hat{K}_f$ 及 $\hat{K}_r$ 所要滿足的調變律，以保證追蹤誤差 $r = y(t) - y_m(t) \rightarrow 0$ 。
- (c) 最後進行數值模擬驗證，設定 $a_p = b_p = 1$ ， $c_p = -1$ ，參考指令 $r(t) = \sin t$ 。畫出追蹤誤差與參數估測誤差隨時間的響應圖，並分析這二種誤差是否可同時趨近於零？

#### 9.10.4 考慮如下的三階系統

$$a_3 \ddot{y} + a_2 \dot{y} + a_1 y + a_0 y = u \quad (9.10.10)$$

其中 $a_i$ 為未知的參數。假設 $y$ 及其各階導數均可測量到，本題的目的是要設計控制律 $u$ 使得 $y$ 對參考指令 $r$ 的響應能夠追蹤以下參考模式的響應：

$$\ddot{y}_m + 6\dot{y}_m + 11y_m = r(t) \quad (9.10.11)$$

仿照 9.7.1 節的步驟，將適應性控制 $u$ 設計成如下的形式：

$$u = \hat{a}_3 z + \hat{a}_2 \dot{y} + \hat{a}_1 y + \hat{a}_0 y \quad (9.10.12)$$

其中訊號 $z$ 是由 $e(t) = y - y_m$ 及其各階導數所疊加而成

$$z(t) = \ddot{y}_m(t) - \ddot{e}(t) - \dot{e}(t) - e(t) \quad (9.10.13)$$

- (a) 列出(9.7.14)式中的 $\mathbf{A}$ 矩陣。
- (b) 求解 Lyapunov 方程式 $\mathbf{PA} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} = -\mathbf{Q}$ ，令 $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ ，求得矩陣 $\mathbf{P}$ 。
- (c) 根據(9.7.19)式，分別列出 $\hat{a}_i$ ， $i = 0, 1, 2, 3$ ，所要滿足的參數調變律。
- (d) 結合(9.7.14)式與(9.7.19)式進行數值模擬，畫出 $e(t)$ 及 $\hat{a}_i(t)$ 隨時間的響應圖，其中(9.10.12)式中的系統輸出值 $y(t)$ 求解自(9.10.10)式，並設定系統的真實參數為 $a_3 = a_1 = 1$ ， $a_2 = a_0 = -1$ 。驗證追蹤誤差 $e(t) = y(t) - y_m(t)$ 及參數估測誤差 $\bar{a}_i(t) = \hat{a}_i(t) - a_i$ 的收斂性。
- (e) 討論(10.7.19)式中，權重參數 $\Gamma = \text{diag}[\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4]$ 的不同選擇對於 $\hat{a}_i$ 收斂速度的影響。例如比較 $\Gamma = \text{diag}[1111]$ 與 $\Gamma = \text{diag}[10111]$ 二種不同選擇所得到的結果。

#### 9.10.5 考慮二階非線性的滑塊-彈簧-阻尼系統

$$m\ddot{y} + cf_1(\dot{y}) + kf_2(y) = u \quad (9.10.14)$$

其中函數 $f_1$ 表示非線性阻尼項 $f_1(\dot{y}) = (y^2 - 1)\dot{y}$ ，函數 $f_2$ 表示非線性彈簧作用力 $f_2(y) = y + y^3$ ，參數 $m$ 、 $c$ 與 $k$ 為未知。定義追蹤誤差 $e(t) = y(t) - y_m(t)$ ，其中 $y_m$ 是標準二階模式的輸出：

$$\ddot{y}_m + 2\zeta\omega_n\dot{y}_m + \omega_n^2 y_m = \omega_n^2 r(t) \quad (9.10.15)$$

本題的目的是要設計控制律 $u$ 使得 $e(t) \rightarrow 0$ 。

- (a) 首先將(9.10.14)式改寫成如下型式：

$$a_0 \dot{y} + a_1 f_1(y, \dot{y}) + a_2 f_2(y, \dot{y}) = u \quad (9.10.16)$$

其中 $a_i$ 均為未知參數，但假設 $a_0$ 的正負號為已知。

(b) 定義追蹤誤差 $e(t)$ 所組成的滑動面(sliding surface):

$$S = \dot{e} + e = \dot{y} - \dot{y}_r, \quad y_r = y_{\text{ref}} - e \quad (9.10.17)$$

將控制訊號 $u$ 表成

$$u = \hat{a}_0 \dot{y} - kS + \hat{a}_1 f_1(y, \dot{y}) + \hat{a}_2 f_2(y, \dot{y}) \quad (9.10.18)$$

根據(9.7.34)式，列出 $\hat{a}_0$ 與 $\hat{a}_i$ 所要滿足的參數調變律。

- (c) 最後進行數值模擬驗證，聯立求解 $\hat{a}_0$ 與 $\hat{a}_i$ 所對應的微分方程式，其中(9.10.18)式的系統輸出 $y(t)$ 求解自(9.10.14)式，並設定 $m = 1$ 、 $c = 2$ 、 $k = 3$ 。另外模式輸出 $y_m(t)$ 則求解自(9.10.15)式，並設定 $z = 0.7$ ， $w = 1$ ，輸入指令 $r(t) = 2 \sin 3t$ 。畫出 $S(t)$ 與 $\bar{a}_i(t)$ 對時間的響應圖，並分析它們是否都為漸進穩定？另外畫出模式追蹤誤差 $e(t) = y(t) - y_m(t)$ 對時間的響應，確認 $e(t) \rightarrow 0$ 是否完全達到？
- (d) 將輸入指令 $r(t)$ 換成單位步階輸入，重複問題(c)的討論，此時參數估測誤差 $\bar{a}_i(t)$ 是否仍為漸進穩定？

## 參考文獻(References)

- 有關適應性控制的專書及教科書繁多，以下針對適應性控制的不同主題，取其中幾個較具代表性者分類如下：
  - 通論(General): Gupta, 1986; Kokotovic, 1991; Slotine and Li, 1991; Marino and Tomei, 1995; Feng and Lozano, 1999; Tao, 2003.
  - 文獻回顧:Astrom and Eykko, 1971; Ortega and Yu, 1989; Fradkov, 1992; Ioannou and Kosmatopoulos, 1999;
  - 穩定性(Stability): Egardt, 1979; Anderson, et al., 1986; Sastry and Bodson, 1989;
  - 技術與應用(Technique and Applications): Narendra and Monopoli, 1980; Unbehauen, 1980; Harris and Billings, 1981; Narendra, 1986; Chalam, 1987;
  - 強健性(Robustness): Sastry and Bodson, 1989; Ioannou and Sun, 1996;
  - 非線性(Nonlinearity): Krstic, Kanellakopoulos and Kokotovic, 1995; Tao and Kokotovic, 1996;
  - 自我調整(Self-tuning): Gawthrop, 1987; Harris and Billings, 1981; Johnson, 1988; Astrom and Wittenmark, 1989.
  - 參考模式(Model reference): Landau, 1979; Narendra and Annaswamy, 1989.
  - 最佳化(Optimal): Kalman, 1958; Tsytkin, 1971; Bitmead, Gevers and Wertz, 1990;
  - 離散系統(Discrete Systems): Goodwin and Sin, 1984;

- 時變系統(Time-varying systems): Tsakalis and Ioannou, 1993;
- 模糊-類神經建模(Fuzzy-Neuro Modelling): Brown and Harris, 1994; Boutalis, et al., 2014.
- Anderson, B. D. O., et al, Stability of Adaptive Systems: Passivity and Averaging Analysis, MIT Press, 1986.
- Astrom, K. J., and Wittenmark, B., Adaptive Control, Addison-Wesley, 1989; 2<sup>nd</sup> edition, Dover, 2008.
- Astrom, K. J. and Eykho, P., System Identification: A Survey, Automatica, 7, pp. 123-162, 1971.
- Bechlioulis, C. P. and Rovithakis, G. A., Robust Adaptive Control of Feedback Linearizable MIMO Nonlinear Systems With Prescribed Performance, IEEE Trans. On Automatic Control, 53, pp. 2090-2099, 2008.
- Bitmead, R. R., Gevers, M. and Wertz, V., Adaptive Optimal Control, Prentice Hall, 1990.
- Boutalis, Y., Theodoridis, D., Kottas, T. and Christodoulou, M. A., System Identification and Adaptive Control: Theory and Applications of the Neuro-fuzzy and Fuzzy Cognitive Network Models, Springer, 2014.
- Brown, M. and Harris, C., Neuro-Fuzzy Adaptive Modelling and Control, Prentice-Hall, 1994.
- Calise, A. J., Hovakimyan, N., and Idan, M., Adaptive output feedback control of nonlinear systems using neural networks, Automatica, 37, pp. 1201-1211, 2001.
- Chalam, V. V., Adaptive Control Systems: Techniques and Applications, Marcel Dekker, 1987.
- Chen, B. S., Lee, C. H. and Chang, Y. C.,  $H_{\infty}$  Tracking Design of Uncertain Nonlinear SISO Systems: Adaptive Fuzzy Approach, IEEE Trans. On Fuzzy Systems, 4, pp. 32-43, 1996.
- Datta, A. and Ioannou, P. A., Performance Improvement Versus Robust Stability in Model Reference Adaptive Control, Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control, pp. 1082-1087, 1991.
- Downing, D. R. and Bryant, W. H., Flight Test of a Digital Controller Used in a Helicopter Autoland System, Automatica, 23, pp. 295-300, 1987.
- Egardt, B., Stability of Adaptive Controllers, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 20, Springer-Verlag, 1979.
- Feng, G. and Lozano, R., Adaptive Control Systems, Elsevier, 1999.
- Fradkov, A. L., Continuous-Time Model Reference Adaptive Systems: An East-West Review, Proceedings of the IFAC Symposium on Adaptive Control and Signal Processing, Grenoble, France, 1992.
- Freeman, R. A., Krstic, M. and Kokotovic, P. V., Robustness of Adaptive Nonlinear Control to Bounded Uncertainties, Automatica, 34, pp. 1227-1230, 1998.
- Gawthrop, P. J., Continuous-Time Self-Tuning Control, Volume I: Design, John Wiley & Sons, 1987.
- Ge, S. S. and Wang, C., Adaptive Neural Control of Uncertain MIMO Nonlinear Systems, IEEE Trans. On Neural Networks, 15, pp. 674-692, 2004.
- Goodwin, G. C. and Sin, K. C., Adaptive Filtering Prediction and Control, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1984.

- Gupta, M. M. (Ed.), Adaptive Methods for Control System Design, IEEE Press, 1986.
- Harris, C. J. and Billings, S. A. (Eds), Self-Tuning and Adaptive Control: Theory and Applications, Peter Peregrinus, 1981.
- Isidori, A., Nonlinear Control Systems, Springer-Verlag, 2<sup>nd</sup> Edition, 1989, 3<sup>rd</sup> Edition, 1995.
- Ioannou, P. A. and Kokotovic, P. V., Adaptive Systems with Reduced Models, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 47, Springer-Verlag, 1983.
- Ioannou, P. A. and Kokotovic, P. V., Instability Analysis and Improvement of Robustness of Adaptive Control, Automatica, 20, pp. 583-594, 1984.
- Ioannou, P. A. and Sun, J., Robust Adaptive Control, Prentice-Hall, 1996; Dover, 2012.
- Ioannou, P. A. and Sun, J., Theory and Design of Robust Direct and Indirect Adaptive Control Schemes, Int. Journal of Control, 47, pp. 775-813, 1988.
- Ioannou, P. A. and Kosmatopoulos, E. B., Adaptive Control, Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering, 1999.
- Johnson, Jr., C. R., Lectures on Adaptive Parameter Estimation, Prentice Hall, 1988.
- Kalman, R. E., Design of a Self-Optimizing Control System, Transaction of the ASME, 80, pp. 468-478, 1958.
- Kanellakopoulos, I., Adaptive Control of Nonlinear Systems, Ph.D. Dissertation, University of Illinois, Urbana, 1991.
- Kanellakopoulos, I., Kokotovic, P. V. and Morse, A. S., Systematic Design of Adaptive Controllers for Feedback Linearizable Systems, IEEE Trans. On Automatic Control, 36, pp. 1241-1253, 1991.
- Kanellakopoulos, I., Kokotovic, P. V. and Marino, R., An Extended Direct Scheme for Robust Adaptive Nonlinear Control, Automatica, 27, pp. 247-255, 1991.
- Kanellakopoulos, I., Krstic, M. and Kokotovic, P. V.,  $\kappa$ -Adaptive Control of Output-Feedback Nonlinear Systems, Proceedings of 32<sup>nd</sup> IEEE Conference on Decision and Control, San Antonio, pp. 1061-1066, 1993.
- Khalil, H. K., Adaptive Output Feedback Control of Nonlinear Systems Represented by Input-Output Models, IEEE Trans. On Automatic Control, 41, pp.177-188, 1996.
- Kokotovic, P. V. (Ed.), Foundations of Adaptive Control, Springer-Verlag, 1991.
- Kosmatopoulos, E. B. and Ioannou, P. A., A switching adaptive controller for feedback Linearizable systems,” IEEE Trans. Automat. Control, 44, pp. 742–750, 1999.
- Kosmatopoulos, E. B. and Ioannou, Robust switching adaptive control of multi-input nonlinear systems, IEEE Trans. Automatic Control, 47, pp. 610–624, 2002.
- Kreisselmeier, G., Adaptive observers with Exponential Rate of Convergence, IEEE Trans. on Automatic Control, 22, pp. 2-8, 1977.
- Krstic, M., Adaptive Nonlinear Control, Ph.D. Dissertation, University of Clifornia, Santa Barbara, 1994.
- Krstic, M. and Kokotovic, P. V., Control Lyapunov functions for adaptive nonlinear stabilization, Systems & Control Letters, 26, pp. 17-23, 1995A.
- Krstic, M. and Kokotovic, P. V., Adaptive Nonlinear Design with Controller-Identifier



Separation and Swapping, IEEE Trans. on Automatic Control, 40, pp. 426–460, 1995B.

- Krstic, M., Kanellakopoulos, I. and Kokotovic, P. V., Nonlinear and Adaptive Control Design, Wiley, 1995.
- Krstic, M., Kanellakopoulos, I. and Kokotovic, P. V., Adaptive Nonlinear Control without Overparametrization, Systems & Control Letters, 19, pp. 177-185, 1992.
- Landau, I. D. Adaptive Control: The Model Reference Approach, Marcel Dekker, Inc., 1979.
- Li, Y., Qiang, S., Zhuang, X. and Kaynak, O., Robust and Adaptive Backstepping Control for Nonlinear Systems Using RBF Neural Networks, IEEE Trans. On Neural Networks, 15, pp. 693-701, 2004.
- Lin, Y., Songtag, E. and Wang, Y., Recent Results on Lyapunov-Theoretic Techniques for Nonlinear Stability, Proceedings of the 1994 American Control Conference, Baltimore, pp. 1771-1775.
- Ljung, L., Systems Identification: Theory for the User, Prentice-Hall, 1987.
- Marino, R. and Tomei, P., Global Adaptive Output-Feedback Control of Nonlinear Systems, Part I: Linear Parameterization, IEEE Trans. On Automatic Control, 38, pp.17-32, 1993.
- Marino, R. and Tomei, P., Nonlinear Control Design; Geometric, Adaptive and Robust, Prentice-Hall, 1995.
- Narendra, K. S. (Ed.), Adaptive and Learning Systems: Theory and Applications, Plenum Press, 1986.
- Narendra, K. S. and Annaswamy, A. M., Stable Adaptive Systems, Prentice Hall, 1989.
- Narendra, K. S. and Monopoli, R. V. (Eds.), Applications of Adaptive Control, Academic Press, 1980.
- Ortega, R. and Yu, T., Robustness of Adaptive Controllers: A Survey, Automatica, 25, pp. 651-678, 1989.
- Parks, P. D., Lyapunov Redesign of Model Reference Adaptive Control Systems, IEEE Trans. On Automatic Control, 11, pp. 362-367, 1966.
- Rohrs, C. E., Valavani, L. S., Athans, M. and Stein, G., Robustness of Continuous-Time Adaptive Control Algorithms in the Presence on Unmodeled Dynamics, IEEE Trans. On Automatic Control, 30, pp. 881-889, 1985.
- Rosenbrock, H. H., State-space and Multivariable Theory, Wiley-Interscience, 1970.
- Sastry, S., and Bodson, M., Adaptive Control: Stability, Convergence, and Robustness, Prentice Hall, 1989.
- Sastry, S. and Isidori, A., Adaptive Control for Linearizable Systems, IEEE Trans. On Automatic Control, 34, pp. 1123-1131, 1989.
- Seto, D., Annaswamy, A. M. and Baillieul, J., Adaptive control of nonlinear systems with a triangular structure, IEEE Trans. Automat. Control, 39, pp. 1411–1428, 1994.
- Slotine, J.-J. E. and Coetsee, J. A., Adaptive Sliding Controller Synthesis for Nonlinear Systems, International Journal of Control, 43, pp. 1631-1651, 1986.
- Slotine, J.-J. E. and W. Li, Applied Nonlinear Control, Prentice-Hall, 1991.
- Tao, G. and Kokotovic, P. V., Adaptive Control of Systems with Actuators and Sensor

Nonlinearities, John Wiley & Sons, 1996.

- Tao, G., Adaptive Control Design and Analysis, John Wiley & Sons, 2003.
- Taylor, D. G., Kokotovic, P. V., Marino, R. and Kanellakopoulos, I., Adaptive Regulation of Nonlinear Systems with Unmodeled Dynamics, IEEE Tran. On Automatic Control, 34, pp. 405-412, 1989.
- Taylor, L. W. and Adkins, E. J., Adaptive Control and the X-15, Proceedings of Princeton University Conference on Aircraft Flying Qualities, Princeton University Press, 1965.
- Tsakalis K. S. and Ioannou, P. A., Linear Time Varying Systems: Control and Adaptation, Prentice Hall, 1993.
- Tsytkin, Y. Z., Adaptation and Learning in Automatic Systems, Academic Press, 1971.
- Unbehauen, H., (Ed.) Methods and Applications in Adaptive Control, Springer-Verlag, 1980.
- Whitaker, H. P., Yamron, J. and Kezer, A., Design of Model Reference Adaptive Control Systems for Aircraft, Report R-164, Instrumentation Laboratory, M. I. T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1958.
- Xu, H. and Ioannou, P. A., Robust adaptive control for a Class of MIMO Nonlinear Systems with Guaranteed Error Bounds, IEEE Trans. Automatic Control, 48, pp. 728–742, 2003.