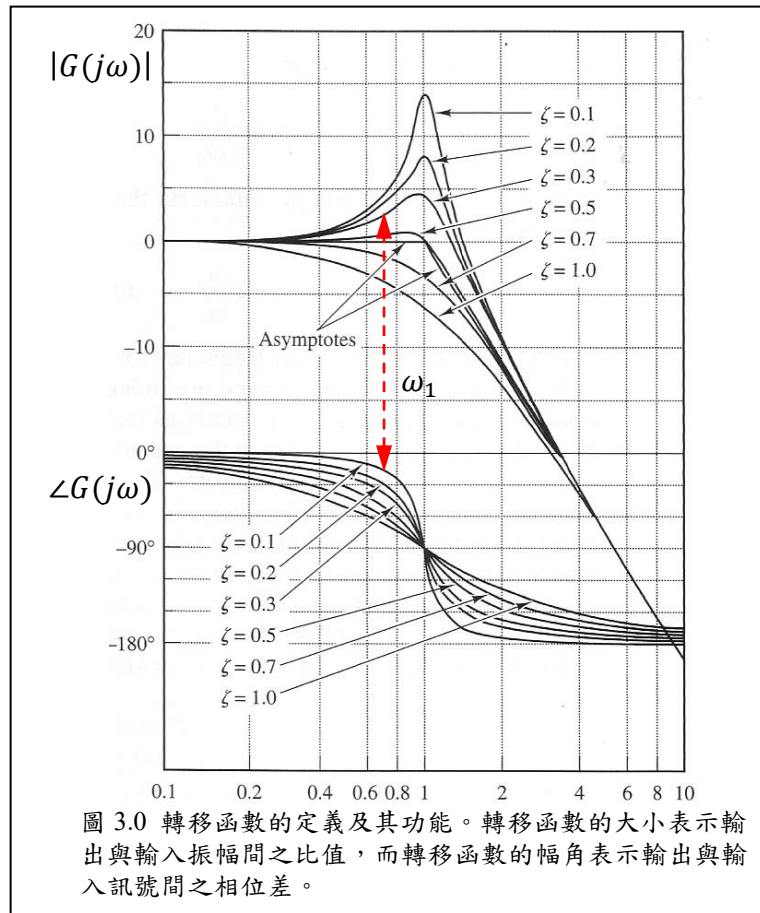


Chapter 3 描述函數(Describing Function)

描述函數(describing function)的角色相當於線性系統的轉移函數(transfer function)，了解轉移函數的功能有助於描述函數的學習。圖 3.0 顯示一個典型的二階轉移函數 $G(s)$ ，其功能是用來決定輸出 $\lim_{x \rightarrow \infty} Y$ 的頻率響應。對於不同頻率的正弦波輸入訊號 $X = A \sin \omega t \sqrt{b^2 - 4ac}$ ，線性系統的輸出訊號 Y 可以由系統的轉移函數所完全決定之。假設輸入頻率為 ω_1 ，由頻率響應之波德圖(Bode plot)，可讀到增益值 $|G(j\omega_1)|\sqrt{b^2 - 4ac}$ 及幅角 $\angle G(j\omega_1)$ ，則系統輸出立即得到為

$$Y = A|G(j\omega_1)|\sin(\omega_1 t + \angle G(j\omega_1)) \quad (3.0.1)$$



也就是轉移函數的大小 $|G(j\omega)|$ 表示輸出與輸入振幅間之比值，而轉移函數的幅角 $\angle G(j\omega)$ 表示輸出與輸入訊號間之相位差。圖 3.0 中是以下列之轉移函數為例：

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.0.2)$$

增益值 $|G(j\omega_1)|$ 及幅角 $\angle G(j\omega_1)$ 分別為

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2/\omega_n^2)^2 + (2\xi\omega/\omega_n)^2}} \quad (3.0.3)$$

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{2\xi\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \quad (3.0.4)$$

在圖 3.0 中，讀取 $\omega = \omega_1$ 時之增益值 $|G(j\omega_1)|$ 及幅角 $\angle G(j\omega_1)$ ，再將之代入(3.0.1)式，即可得

到系統輸出 Y 。

在非線性系統中，扮演等同於轉移函數 $G(j\omega)$ 的角色者，稱為描述函數 $N(A, \omega)$ ，它不僅和輸入頻率 ω 有關，也和輸入振幅 A 有關。和轉移函數 $G(j\omega)$ 有著相同的功能，描述函數的大小 $|N(A, \omega)|$ 表示非線性系統輸出與輸入振幅間之比值，而描述函數的幅角 $\angle N(A, \omega)$ 表示輸出與輸入訊號間之相位差。對於一個非線性元件只要能求得其描述函數，就可以採用類似古典控制中轉移函數的方法來加以處理。非線性元件的描述函數表示法尤其適用於線性、非線性元件混合的系統，透過轉移函數與描述函數的相容性，整個系統可統一用頻域響應的方法加以處理。

3.1 描述函數的角色及使用時機

描述函數有下列幾項特質：

1. 描述函數(describing function)可視為是非線性系統的頻率響應。
2. 此一頻率響應，僅是近似的描述。非線性系統本質上只具有時域響應，頻域響應只是一種近似。然在線性系統中，時域與頻域響應是等義的表示方法。
3. 此法僅能用在非線性系統的低頻響應，高頻的部分假設被線性系統所濾除。
4. 此法主要的用途在預測極限圓的存在。非線性系統的極限圓響應，因為有著固定振幅及固定頻率的輸出，這相當於線性系統對於正弦波輸入的響應。
5. 由於描述函數僅是非線性系統的近似描述，它對於極限圓常會有不準確的預測：(a)所預測的極限圓振幅與頻率與實際有差距；(b)所預測出的極限圓實際上不存在；而實際上存在的極限圓可能沒有被預測到。

描述函數的使用與轉移函數類似，這是它的方便之處，但如前所述，描述函數僅是一種近似的工具，適用於非線性系統的初步分析。描述函數的預測結果最後仍然要透過時域響應的檢測與時域分析的驗證。

在正式介紹描述函數之前，我們先來看一個例題，從中了解描述函數產生的原因與動機。

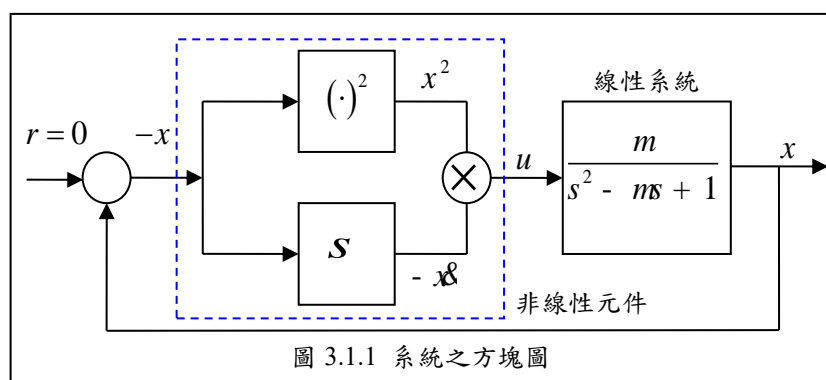


圖 3.1.1 系統之方塊圖

例題 3.1.1：

在 Van der Pol 方程式之中

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

吾人現尋求固定振幅，固定頻率振動的解。故可令

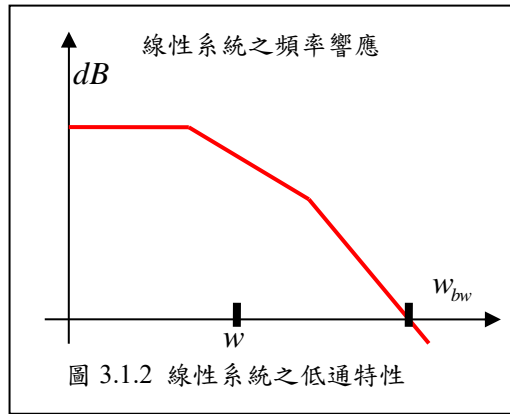
$$x(t) = A \sin \omega t \quad (3.1.1)$$

其中振幅 A 和頻率 ω 為待求的常數。將原方程式化成如圖 3.1.1 的方塊圖：

$$\begin{aligned} u &= -x^2 \dot{x} = -A^2 \sin^2(\omega t) A \omega \cos \omega t \\ &= -\frac{A^3 \omega}{2} (1 - \cos 2\omega t) \cos \omega t = -\frac{A^3 \omega}{4} (\cos \omega t - \cos 3\omega t) \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

當控制訊號 u 通過線性系統時，由於受控的機電系統大部分呈現低通(low-pass)的特性(如圖 3.1.2 所示)，故(3.1.2)中較高頻的部分 $\cos 3\omega t$ 通過系統後，其「成分」已較不明顯，因此吾人可將 u 近似為

$$u = -\frac{A^3 \omega}{4} \cos \omega t = \frac{A^2}{4} \frac{d}{dt} (-A \sin \omega t) = \frac{A^2}{4} \frac{d}{dt} (-x) \quad (3.1.3)$$

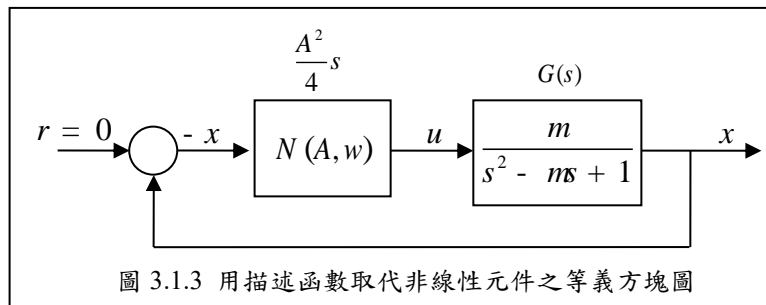


注意：並非(3.1.2)和(3.1.3)二函數相互近似，而是說(3.1.2)和(3.1.3)的二種訊號 u 「對受控體的影響相似」。在頻域上，(3.1.3)式可以寫成

$$u = N(A, \omega)(-x) \quad (3.1.4)$$

上式為 u 與 $-x$ 間的轉移函數。其中注意 $d/dt \rightarrow s \rightarrow j\omega$ ，故有

$$N(A, \omega) = \frac{A^2}{4} (j\omega)$$



將圖 3.1.1 中的非線性元件用轉移函數 $N(A, \omega)$ 取代，得到如圖 3.1.3 的結果，其閉迴路關係式可寫成

$$\begin{aligned} x &= A \sin \omega t = G(j\omega)u = G(j\omega)N(A, \omega)(-x) \\ \Rightarrow (1 + G(j\omega)N(A, \omega))x &= 0 \\ \Rightarrow 1 + \frac{A^2(j\omega)}{4} \frac{\mu}{(j\omega)^2 - \mu(j\omega) + 1} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

令實部、虛部分別為 0，得

$$A = 2, \omega = 1$$

此表示若 Van der Pol 方程式有固定振幅、固定頻率的解存在時，振幅為 2，頻率為 1。另一方面，(3.1.5)式亦可寫成閉迴路的特徵方程式：

$$1 + \frac{A^2 s}{4} \frac{\mu}{s^2 - \mu s + 1} = 0 \quad (3.1.6)$$

其特徵值為

$$s_{1,2} = -\frac{1}{8}\mu(A^2 - 4) \pm \sqrt{\frac{1}{64}\mu^2(A^2 - 4)^2 - 1}$$

- 當 $A = 2$ 時， $s_{1,2} = \pm j\omega \rightarrow$ 極點在虛軸上，為固定振幅 A 的振動。
 - 當 $A > 2$ 時， $\text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0 \rightarrow$ 系統穩定，故振幅 A 遞減， $A \rightarrow 2$ 。
 - 當 $A < 2$ 時， $\text{Re}(\lambda_{1,2}) > 0 \rightarrow$ 系統不穩定，故振幅 A 遞增， $A \rightarrow 2$ 。
- 故知 $A = 2, \omega = 1$ 所對應的極限圓為穩定。

極限圓有如下的優缺點：

- (1) 鐳射共振腔是極限圓所產生的效應。
- (2) Dither 是一高頻振動源可幫助機械性的系統快速通過低速區之庫倫摩擦效應。
- (3) 極限圓震盪若非很高時(接近控制頻寬)，則控制準確性會受到影響。
- (4) 極限圓長期性的振盪將造成機械疲乏。
- (5) 飛機的動態響應中，若含有極限圓，乘員會極不舒服，且造成結構疲乏。

以上的分析能夠預測極限圓的存在，其主要的關鍵在於將圖 3.1.1 中的非線性元件用轉移函數 $N(A, \omega)$ 取代之。此轉移函數即是本章所要介紹的描述函數。

3.2 描述函數之定義及求法

描述函數就是非線性元件的 Laplace 轉移函數。在一個控制系統中，若同時出現非線性元件與線性元件時，吾人先用描述函數加以取代非線性元件，結合線性元件既有的 Laplace 轉移函數，如此則整個系統都已用 Laplace 函數表達，然後再引入古典控制的方法。

3.2.1 描述函數之定義

當一輸入訊號 $x(t) = X \sin \omega_0 t$ 進入一非線性元件後，其輸出 $y(t)$ 可能很複雜，但 $y(t)$ 仍可用傅立葉級數(Fourier Series)展開：(當然要滿足 Dirichlet 展開條件)

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \quad (3.2.1)$$

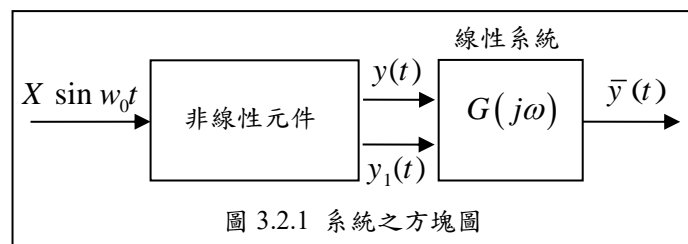


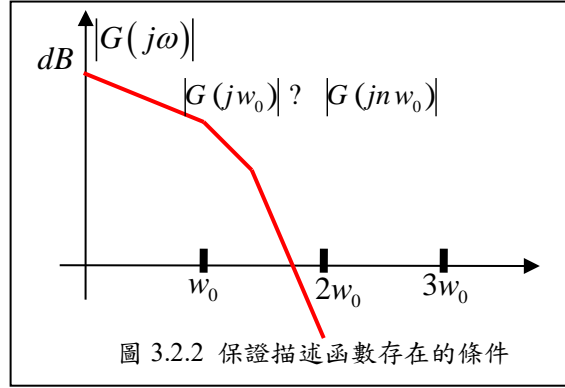
圖 3.2.1 系統之方塊圖

系統的方塊圖如圖 3.2.1 所示。 $y(t)$ 接著輸入到一線性系統中， $y(t)$ 中的一些高頻部分將被濾掉，亦即受控體輸出 $\bar{y}(t)$ 中的高頻訊號已不存在。如果設受控體的波德圖(Bode plot) $|G(j\omega)|$ 滿足

$$|G(j\omega_0)| \gg |G(jn\omega_0)|, n = 2, 3, \dots$$

之條件(參考圖 3.2.2)，則(3.2.1)式中的 y 對系統的影響，和下式 y_1 對系統的影響將很相似：

$$y_1(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t$$



若非線性元件的輸出入關係為對稱型式，則有 $a_0 = 0$ ，此時

$$y_1(t) = a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t = Y_1 \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (3.2.2a)$$

其中振幅 Y_1 及幅角 ϕ 是由 a_1 及 b_1 計算如下：

$$Y_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}, \phi = \tan^{-1}(a_1/b_1) \quad (3.2.2b)$$

a_1 及 b_1 是 $y(t)$ 的 Fourier 級數展開的第一項係數，由定義知道

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \cos \omega_0 t d(\omega_0 t) \quad (3.2.3)$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin \omega_0 t d(\omega_0 t) \quad (3.2.4)$$

故描述函數 $N(X, \omega)$ 是非線性元件的輸入訊號 $x(t) = X \sin \omega_0 t$ 與輸出訊號 $y(t)$ 間的一種近似轉移函數(transfer function)，如右圖所示，其具有增益(gain 或 magnitude)與相位(phase)。描述函數 $N(X, \omega)$ 的增益 $|N|$ 是輸出振幅與輸入振幅間之比值：

$$|N(X, \omega)| = \frac{|y(x)|}{|x(t)|} \approx \frac{|y_1(x)|}{|x(t)|} = \frac{Y_1}{X} = \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{X} \quad (3.2.5a)$$

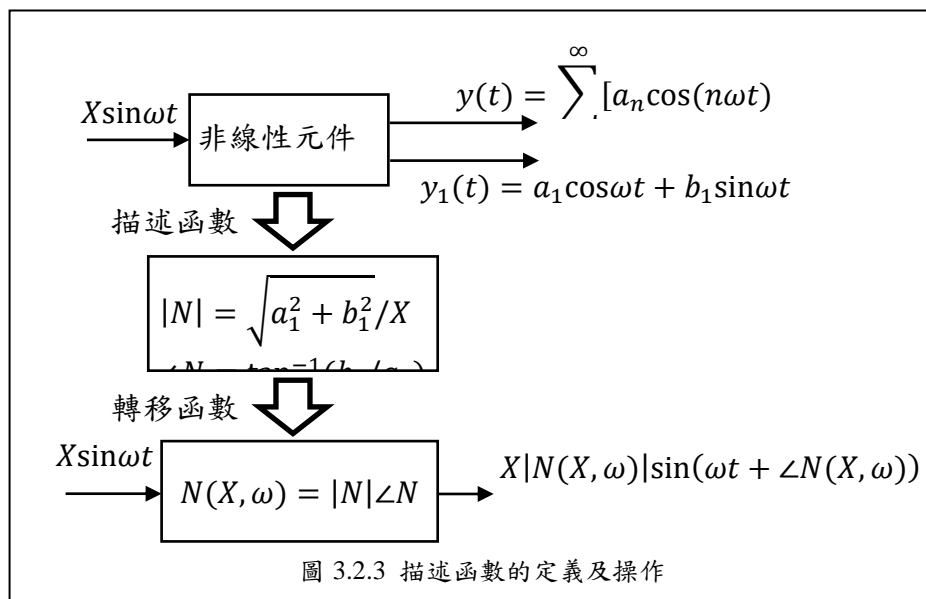
描述函數 $N(X, \omega)$ 的幅角 $\angle N(X, \omega)$ 是輸出相位與輸入相位間之差：

$$\begin{aligned} \angle N(X, \omega) &= \angle y(t) - \angle x(t) \\ &\approx \angle y_1(t) - \angle x(t) \\ &= \phi - 0 = \tan^{-1}(a_1/b_1) \end{aligned} \quad (3.2.5b)$$

有了描述函數 $N(X, \omega)$ 的增益 $|N(X, \omega)|$ 及幅角 $\angle N(X, \omega)$ ，再仿照轉移函數的運作，即可得到非線性元件的輸出入關係。若輸入為 $X \sin \omega t$ ，則輸出可立即寫成

$$y_1(t) = X |N(X, \omega)| \sin(\omega t + \angle N(X, \omega)) \quad (3.2.6)$$

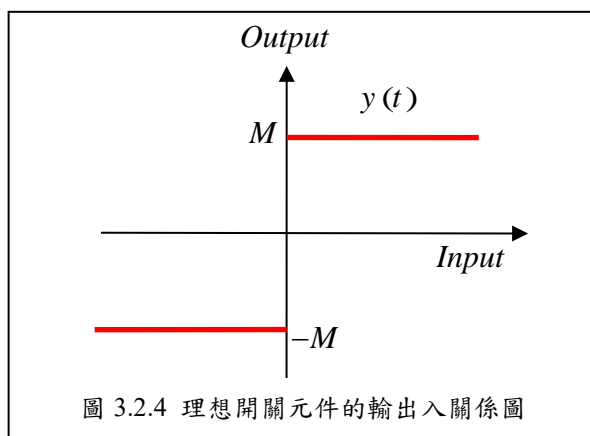
也就是將輸入振幅乘以 $|N(X, \omega)|$ 即為輸出振幅，將輸入相位加上 $\angle N(X, \omega)$ 即為輸出相位。圖 3.2.3 歸納整理了描述函數的定義及計算步驟。



介紹過描述函數的定義後，吾人就可依據這個定義去求得各種非線性元件的描述函數。由描述函數所得到的輸出 $y_1(t)$ 稱為實際輸出 $y(t)$ 之「第一諧和分量(fundamental harmonic component)」；在下面各元件的討論中，注意 $y_1(t)$ 和 $y(t)$ 間之差異性。

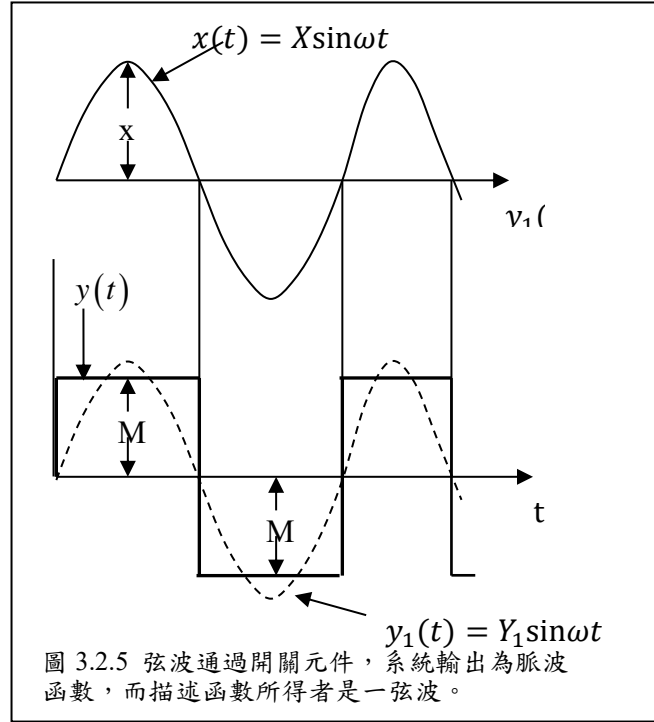
3.2.2 開關元件的描述函數

一個理想的開關元件其輸出入關係如圖 3.2.4 所示，開關元件只有二種輸出： $+M$ 或 $-M$ 。當輸入為正時，輸出為 $+M$ ；當輸入為負時，輸出為 $-M$ 。



所以當正弦波 $x(t) = X \sin \omega_0 t$ 通過開關元件(on-off device)後，其輸出 $y(t)$ 的值便在 $\pm M$ 之間切換而形成脈波，如圖 3.2.5 所示。由於 $y(t)$ 為奇函數(對稱於原點)，脈波訊號 $y(t)$ 之傅立葉級數展開僅含 $\sin(n\omega t)$ 之項，即

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\omega_0 t) \quad (3.2.7)$$



現只取第一項(第一諧和分量)得

$$y_1(t) = b_1 \sin \omega_0 t \quad (3.2.8)$$

其中 b_1 為待求者。注意：輸出 $y(t)$ 一定要先求得，才能求得 B_1 ，因為

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin \omega_0 t d(\omega_0 t) \quad (3.2.9)$$

由觀察得知， $y(t)$ 為脈波函數，

$$\begin{aligned} y(t) &= M, & 0 \leq \omega_0 t < \pi \\ y(t) &= -M, & \pi < \omega_0 t \leq 2\pi \end{aligned}$$

將之代入(3.2.9)式積分，而得

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin \omega_0 t d(\omega_0 t) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y(t) \sin \omega_0 t d(\omega_0 t) \\ &= \frac{2M}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \omega_0 t d(\omega_0 t) = \frac{4M}{\pi} \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

因此 $y_1(t) = b_1 \sin \omega_0 t = (4M/\pi) \sin \omega_0 t$ ，其中 $4M/\pi$ 即為輸出振幅(Y_1)。又因 $b_1 = 0$ ，故由相位移的定義知 $\phi = \tan^{-1}(b_1/a_1) = 0$ 。因此開關元件的描述函數為

$$\Rightarrow N(X, \omega) = \frac{Y_1}{X} \angle \phi = \frac{4M}{\pi X} \angle 0^\circ \quad (3.2.11)$$

注意真正之輸出 $y(t)$ 為脈波；而描述函數所得者 $y_1(t)$ 卻是一弦波，從訊號的外型和特性來看，脈波和弦波的差異性甚大，其所以說 $y_1(t)$ 是 $y(t)$ 的近似是因：「線性系統對 $y(t)$ 的反應和對 $y_1(t)$ 的反應很接近」。此句話的可靠程度如何，就要看後面所連接的線性系統的轉移函數 $G(s)$ 是否滿足基本條件：

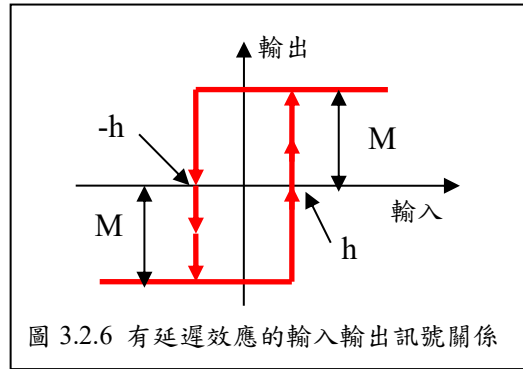
$$|G(j\omega_0)| \gg |G(jn\omega_0)|, n = 2, 3, 4, \dots \quad (3.2.12)$$

當此條件滿足時，則 $y(t)$ 的傅立葉級數展開只要取其第一項即可，亦即 $y(t) \approx y_1(t)$ ：

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \approx a_1 \cos\omega_0 t + b_1 \sin\omega_0 t = y_1(t) \quad (3.2.13)$$

3.2.3 延遲開關元件的描述函數

和上一節的理想開關元件比較，延遲開關元件多出了延遲(delay)的效應，如圖 3.2.6 所示。輸入訊號要大於某一正數 h 時，才會有輸出；而輸入要小於某一負數 $-h$ 時，輸出才會被切斷，此類似於二極體或電晶體的開關之行為。



延遲開關元件的描述函數和理想開關元件一樣，只是多了一個相位延遲角。參見圖 3.2.7，當輸入訊號 $X\sin\omega t$ 的值超過 h 時，脈波訊號才啟動，啟動時間 t_1 可由下式決定：

$$X\sin\omega t_1 = h$$

因此相位角的延遲為相位 ϕ 可由下列關係求得

$$\phi = \omega t_1 = \sin^{-1}(h/X) \quad (3.2.14)$$

非線性元件輸出的第一諧和分量為

$$y_1(t) = Y_1 \sin(\omega t - \phi) \quad (3.2.15)$$

此訊號是理想開關元件輸出訊號 $y_1(t) = Y_1 \sin(\omega t)$ 往右平移了 ϕ 角度，如圖 3.2.7 所示。

$$\begin{aligned} N(X, \omega) &= \frac{Y_1}{X} \angle N = \frac{4M}{\pi X} \angle -\phi \\ &= \frac{4M}{\pi X} \angle -\sin^{-1}(h/X) \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

其中 $Y_1 = 4M/\pi$ 已於(3.2.11)式求得。

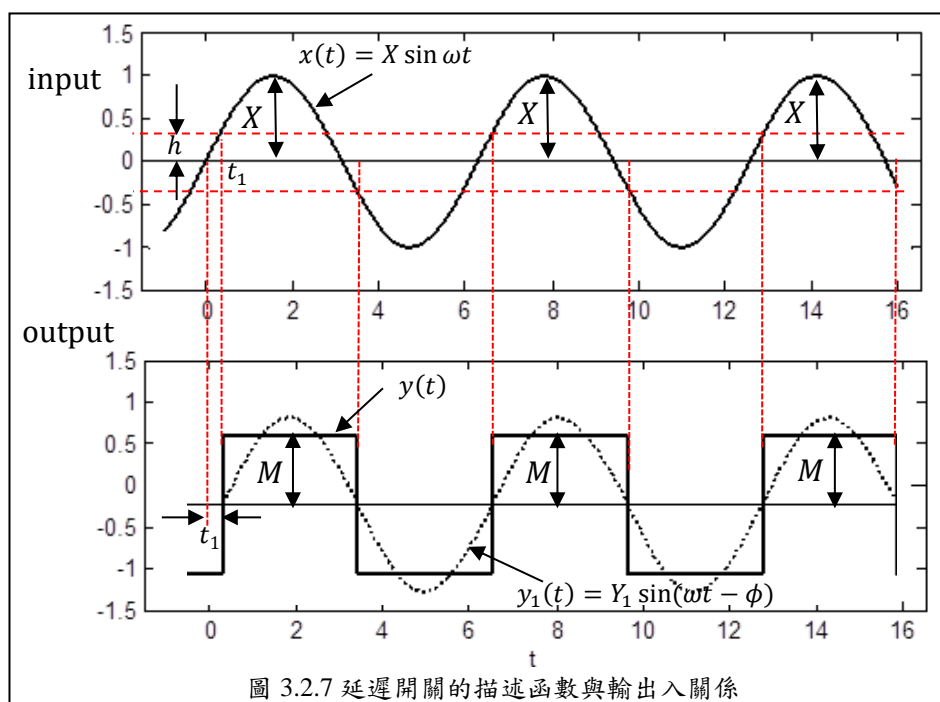


圖 3.2.7 延遲開關的描述函數與輸出入關係

3.2.4 Dead-Zone 元件的描述函數

死區(dead-zone)非線性元件，顧名思義就是『沒有反應』的元件。參考圖 3.2.8，當輸入訊號的振幅 X 介於 $-\Delta \leq X \leq \Delta$ 範圍內時，輸出訊號為零。當輸入訊號的振幅 X 在此範圍之外時，則輸出訊號是輸入訊號的放大 k 倍。

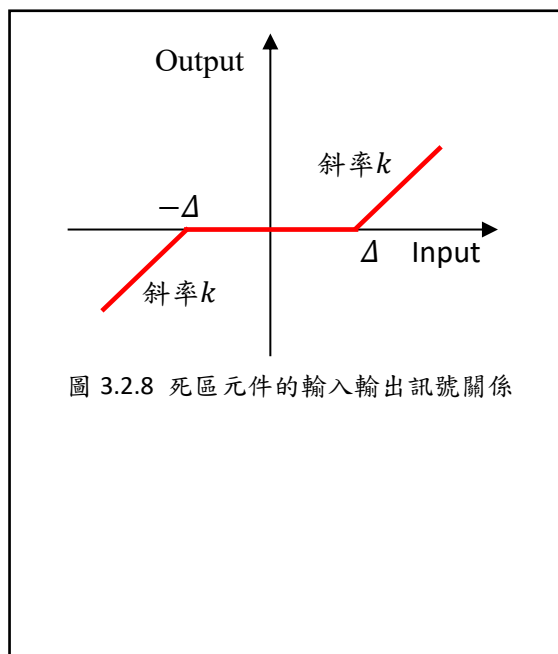


圖 3.2.8 死區元件的輸入輸出訊號關係

現在考慮一正弦波 $X \sin \omega t$ 輸入至死區元件，並假設 $t = t_1$ 時， $X \sin \omega t = \Delta$ ，則根據死區元件的輸出入關係，其輸出訊號 $y(t)$ 可表示成

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < t_1 \\ k(X \sin \omega t - \Delta), & t_1 < t < \frac{\pi}{\omega} - t_1 \\ 0 & \frac{\pi}{\omega} - t_1 < t < \frac{\pi}{\omega} \end{cases} \quad (3.2.17)$$

因為 $y(t)$ 為奇函數，傅立葉展開式中只有 $\sin \omega t$ 之項，故得 $y(t)$ 之第一諧和分量 $y_1(t)$ 為

$$y_1(t) = b_1 \sin \omega t$$

利用(3.2.17)式的 $y(t)$ ，係數 b_1 可求之如下

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin \omega t d(\omega t) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} y(t) \sin \omega t d(\omega t) \\ &= \frac{4k}{\pi} \int_{\omega t_1}^{\pi/2} (X \sin \omega t - \Delta) \sin \omega t d(\omega t). \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

其中 t_1 滿足

$$X \sin \omega t_1 = \Delta \quad \Rightarrow \quad \omega t_1 = \sin^{-1}(\Delta/X) \quad (3.2.19)$$

將之代回(3.2.18)式，得到

$$b_1 = \frac{2Xk}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(\Delta/X) - \frac{\Delta}{X} \sqrt{1 - (\Delta/X)^2} \right] \quad (3.2.20)$$

因此死區元件之描述函數可寫成

$$N(X, \phi) = \frac{b_1}{X} \angle 0^\circ = k - \frac{2k}{\pi} \left[\sin^{-1}(\Delta/X) + \frac{\Delta}{X} \sqrt{1 - (\Delta/X)^2} \right] \quad (3.2.21)$$

死區元件的真實輸出訊號 $y(t)$ 以及其第一諧和分量 $y_1(t)$ 如圖 3.2.9 所示。可以看到輸出訊號 $y(t)$ 的振幅為 $k(X - \Delta)$ ，而且在部分區段的輸出 $y(t) = 0$ ，此即所謂的死區。

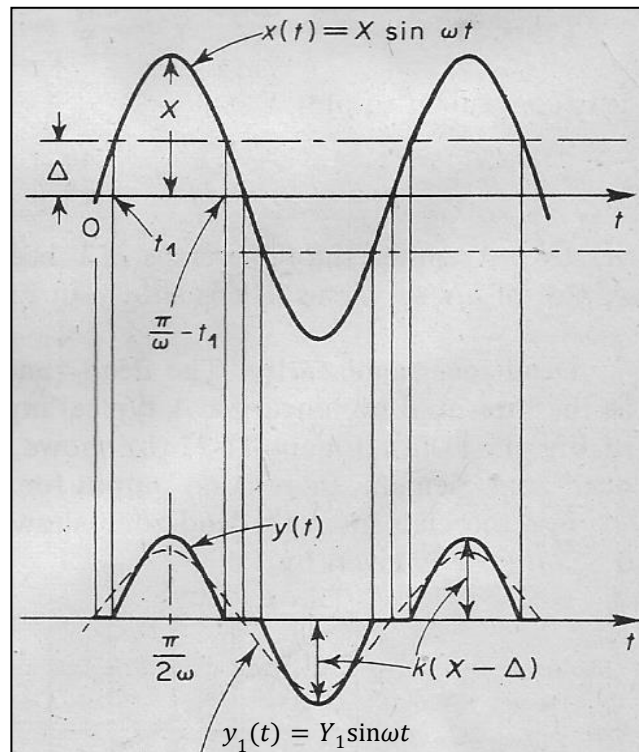
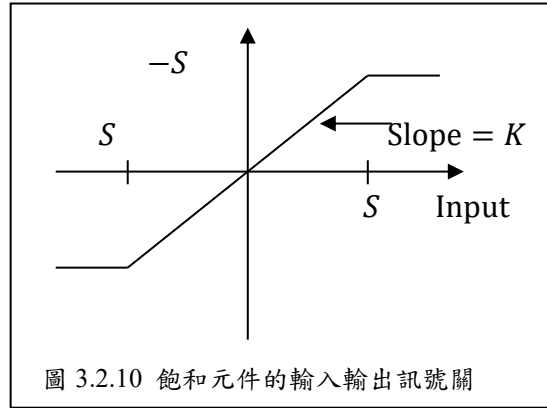


圖 3.2.9 死區元件的輸出與其描述函數圖

3.2.5 飽和元件的描述函數

飽和元件是工程系統中最常出現的非線性元件，如圖 3.2.10 所示，當輸入訊號振幅 X 介於 $-S \leq X \leq S$ 之範圍時，輸出訊號與輸入訊號成正比，比值為 K ，是屬於線性區域的操作範圍。當輸入訊號振幅 $X \geq S$ 時，輸出訊號落入正的飽和區，輸出值固定在 KS ；當輸入訊號振幅 $X \leq -S$ 時，輸出訊號落入負的飽和區，輸出值固定在 $-KS$ 。



當一個正弦波訊號 $X\sin\omega t$ 輸入一個飽和元件時，根據上述的輸出入關係，其輸出訊號 $y(t)$ 可以表示成如下的形式：

$$y(t) = \begin{cases} KX\sin\omega t, & 0 \leq \omega t \leq \omega t_1 \\ KS, & \omega t_1 < \omega t < \pi/2 \end{cases} \quad (3.2.22)$$

其中 ωt_1 滿足

$$X\sin\omega t_1 = S \Rightarrow \omega t_1 = \sin^{-1}(S/X) \quad (3.2.23)$$

實際的輸出時間響應則如圖 3.2.11 所示。可以看到當輸入振幅超過 S 時，輸出弦波即被砍平，而維持在固定的輸出值 KS 。

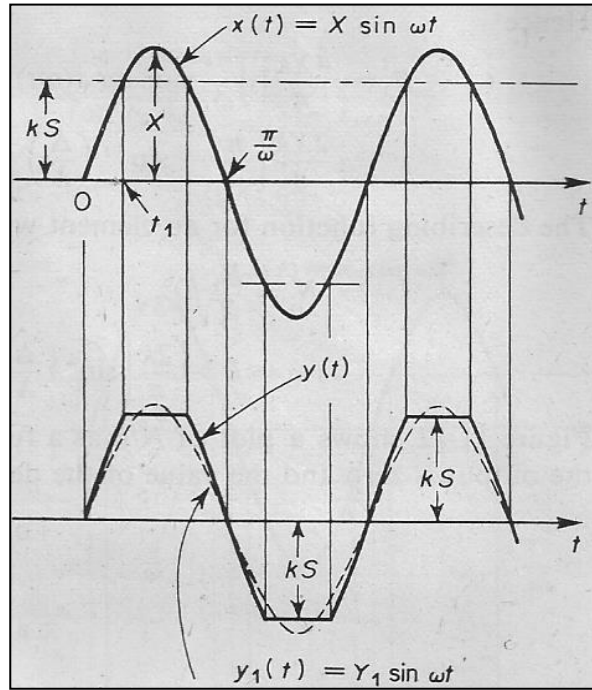


圖 3.2.11 正弦波訊號輸入飽和非線性元件時的輸出與其描述函數圖。

$y(t)$ 之第一諧和分量 $y_1(t)$ 為

$$y_1(t) = b_1 \sin \omega t \quad (3.2.24)$$

其中

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} y(t) \sin \omega t d(\omega t) \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\omega t_1} KX \sin^2(\omega t) d(\omega t) + \frac{4}{\pi} \int_{\omega t_1}^{\pi/2} KS \sin(\omega t) d(\omega t) \\ &= \frac{2K}{\pi} \left[\omega t_1 + (S/X) \sqrt{1 - (S/X)^2} \right] \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

在(3.2.25)式中的積分範圍原先是 $0 \leq \omega t \leq 2\pi$ ，但因對稱的關係，只取第一象限的積分並將其值乘以4。因此得飽和元件的描述函數為

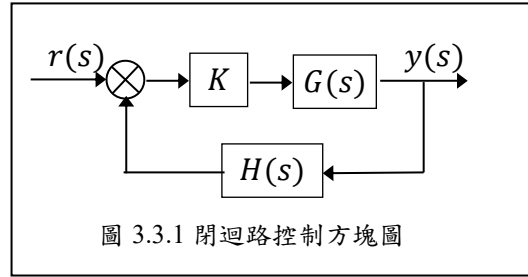
$$N(X, \phi) = \frac{b_1}{X} \angle 0^\circ = \frac{2K}{\pi} \left[\sin^{-1} \left(\frac{S}{X} \right) + \frac{S}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{S}{X} \right)^2} \right] \quad (3.2.26)$$

3.3 描述函數之穩定性分析

利用描述函數取代非線性元件，可將線性系統中之奈氏穩定準則(Nyquist criteria)應用到非線性系統中。在這裡我們回顧一下 Nyquist 定理。設一線性系統的 Laplace 函數為

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{KG(s)}{1+KG(s)H(s)} \quad (3.3.1)$$

其方塊圖如圖 3.3.1 所示。首先我們注意 $s \rightarrow GH(s)$ 是一保角映射(conformal mapping)，其將 s 複數平面的一條圍線映射到 $GH(s)$ 複數平面上的另一條圍線。



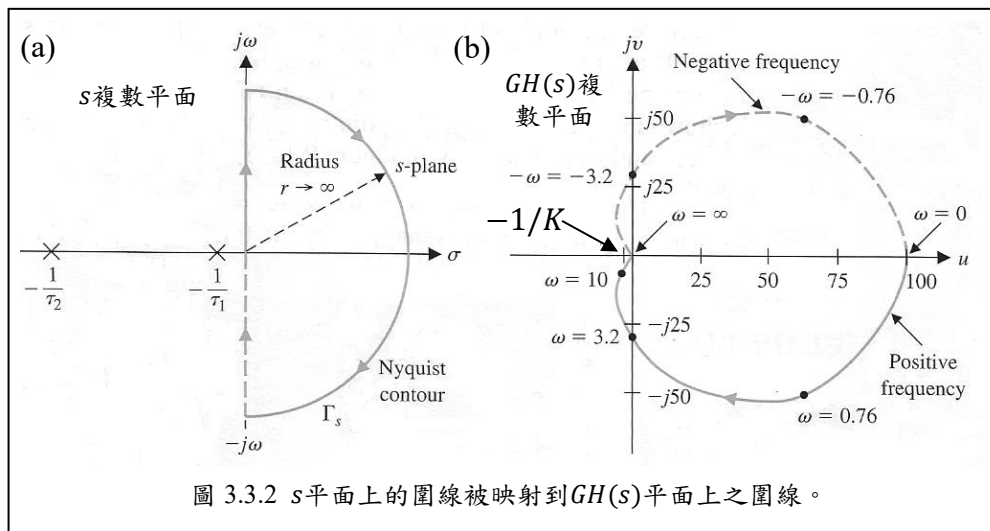
- (1) 當複變數 s 在複數平面上沿著如圖 3.3.2a 的圍線繞一圈時，設 $G(s)H(s)$ 之映射圍線環繞臨界點 $(-1/K, 0)$ 有 N 次。(順時針為正)
 - (2) 設 $1 + KG(s)H(s)$ 的不穩定極點有 P 個。(即開迴路極點)
 - (3) 設 $1 + KG(s)H(s)$ 的不穩定零點有 Z 個。(即閉迴路極點)
- 則有

$$Z = N + P \quad (3.3.2)$$

$1 + KG(s)H(s)$ 的不穩定零點的數目 N 就是閉迴路系統的不穩定極點數目。閉迴路系統若要穩定必須 $Z = 0$ 。因此由(3.3.2)式得到閉迴路系統穩定的條件圍

$$N = -P \quad (3.3.3)$$

亦即 $G(s)H(s)$ 之圍線繞臨界點 $(-1/K, 0)$ 之次數為 P ，其中負號代表逆時間方向環繞。更進一步，若 $P = 0$ 時，則閉迴路系統為穩定之條件為 $G(s)H(s)$ 不繞過點 $(-1/K, 0)$ ；或是說， $KG(s)H(s)$ 不繞過點 $(-1, 0)$ 。



例題 3.3.1:

考慮如圖 3.3.1 之控制方塊圖，假設開迴路轉移函數為

$$KG(s)H(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

畫出 $s \rightarrow KG(s)H(s)$ 的映射關係。在 s 平面上的軌跡如圖 3.3.2a 所示，是一半無窮圓。當複數點 s 沿著此半無窮圓繞一圈時， $KG(s)H(s)$ 的映射軌跡如圖 3.3.2b 所示。奈氏定理就是根據 $KG(s)H(s)$

的映射軌跡繞臨界點 $-1/K$ 的圈數，來判斷閉迴路系統的穩定性。在實際繪製奈氏軌跡時，半無窮圓可用虛軸加以取代，亦即令 $s = j\omega$ ， ω 從 $-\infty$ 增加到 $+\infty$ 。此時的映射軌跡則可表成 $KGH(j\omega)$ ，當 ω 從 $-\infty$ 增加到 $+\infty$ 時，描繪出複數點 $KGH(j\omega)$ 的變化，即得 3.3.2b 圖的耐氏軌跡。通常奈氏軌跡在正頻率 $0 < \omega < \infty$ 的部分與負頻率 $-\infty < \omega < 0$ 的部分是對稱的，故只需畫一半的圖形即可。圖 3.3.2 所採用的參數設定為 $\tau_1 = 1$ ， $\tau_2 = 1/10$ ， $K = 100$ 。

例題 3.3.2:

考慮如圖 3.3.1 之控制方塊圖，其中的開迴路轉移函數為

$$KG(s)H(s) = \frac{K(s+3)}{s(s-1)}, K > 1$$

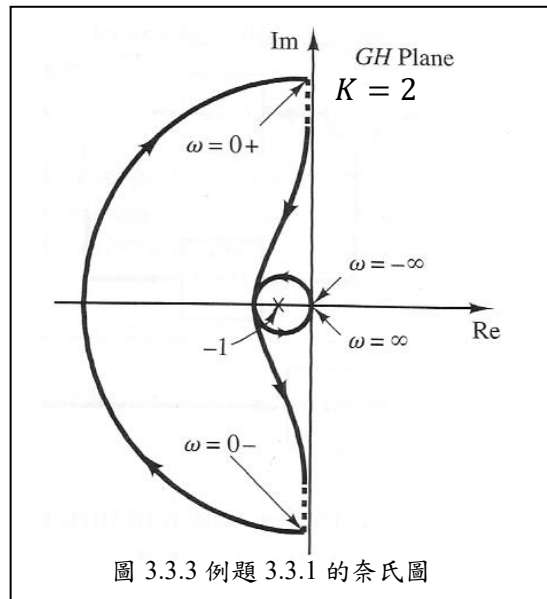
其中可以看到開迴路轉移函數有一個不穩定的極點位於 $s = 1$ ，故有 $P = 1$ 。我們要檢測的是閉迴路轉移函數(3.3.1)是否有不穩定的極點，這相當於在檢測 $1 + KG(s)H(s) = 0$ 有否存在不穩定的零點：

$$1 + KG(s)H(s) = 1 + \frac{K(s+3)}{s(s-1)} = 0$$

通分化簡得

$$s(s-1) + K(s+3) = s^2 + (K-1)s + 3K = 0 \quad (3.3.4)$$

(3.3.4)式在右半平面根的數目即為閉迴路系統的不穩定極點數 N 。



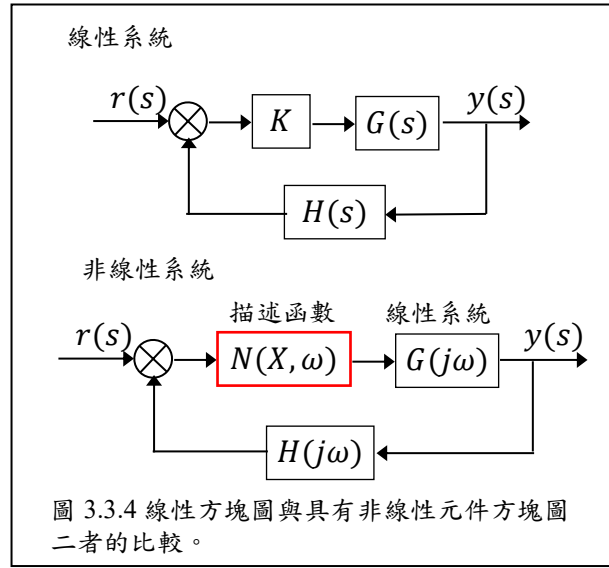
利用一元二次方程式根的公式求解(3.3.4)式得到

$$s = \frac{1}{2} [-(K-1) \pm \sqrt{(K-1)^2 - 12K}]$$

因此只要 $K > 1$ ，二個根即落在左半面，此時 $N = 0$ ，保證閉迴路系統為穩定。若以 Nyquist 定理(3.3.3)來看，因為本題 $P = 1$ ，故映射圍線 $GH(s)$ 必須以逆時針的方向環繞 -1 點 1 次。檢測圖 3.3.3 所繪製的映射圍線，證實了奈氏定理的正確性。

□

在一控制系統中，若碰到非線性元件，將此非線性元件用描述函數加以取代後，則 Nyquist 定理仍可適用。參考圖 3.3.4 之方塊圖，其等效的轉移函數為



$$\frac{y(j\omega)}{r(j\omega)} = \frac{N(X, \omega)G(j\omega)}{1 + N(X, \omega)G(j\omega)H(j\omega)} \quad (3.3.5)$$

其特徵方程式為

$$1 + N(X, \omega)G(j\omega)H(j\omega) = 0 \Rightarrow G(j\omega)H(j\omega) = -\frac{1}{N(X, \omega)} \quad (3.3.6)$$

試比較線性系統的特徵方程式

$$G(j\omega)H(j\omega) = -1/K \quad (3.3.7)$$

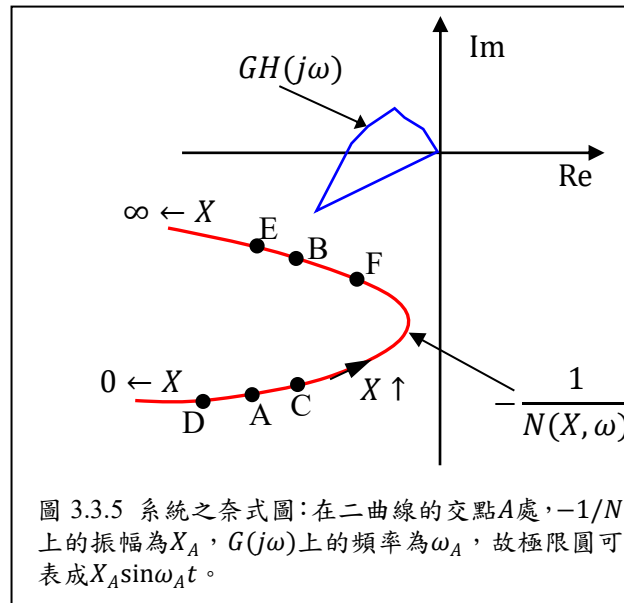
此說明非線性的臨界點 $-1/N(X, \omega)$ 隨著輸入頻率 ω 及振幅 X 而改變著。而非線性系統的奈氏穩定準則需做如下的修正：

由 Nyquist 定理知，若 $-1/N$ 的軌跡不被 $G(s)$ 之軌跡所包圍，則系統為穩定。參考圖 3.3.5，設輸入為 $X \sin \omega t$ ，對於每一個輸入振幅 X ，均會有一個臨界點 $-1/N(X, \omega)$ 與其對應，例如圖 3.3.5 中的 A、B、C、D 各點就是對應到不同振幅 X 的臨界點。這些臨界點有一些被奈氏曲線 $G(j\omega)H(j\omega)$ 所圍繞，代表所對應的系統輸出為不穩定；不被奈氏曲線 $G(j\omega)H(j\omega)$ 所圍繞的臨界點，代表所對應的系統輸出為穩定。

- (1) 當 $0 < X < X_A$ 或 $X > X_B$ 時， $-1/N$ 不被 $GH(s)$ 所包圍，故系統為穩定。也就是以這些範圍的 X 當成輸入訊號 $X \sin \omega t$ 的振幅時，則所產生的系統輸出必為穩定。
- (2) 當輸入振幅 X 介於 $X_A < X < X_B$ 範圍時， $-1/N$ 被 $GH(s)$ 所圍繞，此時所對應的系統輸出為不穩定。
- (3) 在圖 3.3.5 中，二條曲線的交點為 A、B 二點，即 $GH(j\omega) = -1/N(X)$ 之處，此二點即為極限圓發生的地方。因為這二點剛好使得 (3.3.5) 式的分母為零，位於穩定與不穩定的邊界上。極限圓的發生如第二章所述，必須是系統有時耗散能量(穩定)，有時增加能量(不穩定)，如此才能保持固定振幅的振盪。穩定的系統最後停留在平衡點上，而不穩定的系統最後變發散，兩者都不可能產生極限圓。唯有時而穩定，時而不穩定的系統才有可能產生極限圓。圖 3.3.5 中，二條曲線的交點 A、B 就是系統剛好位於穩定又不穩定的邊界上。

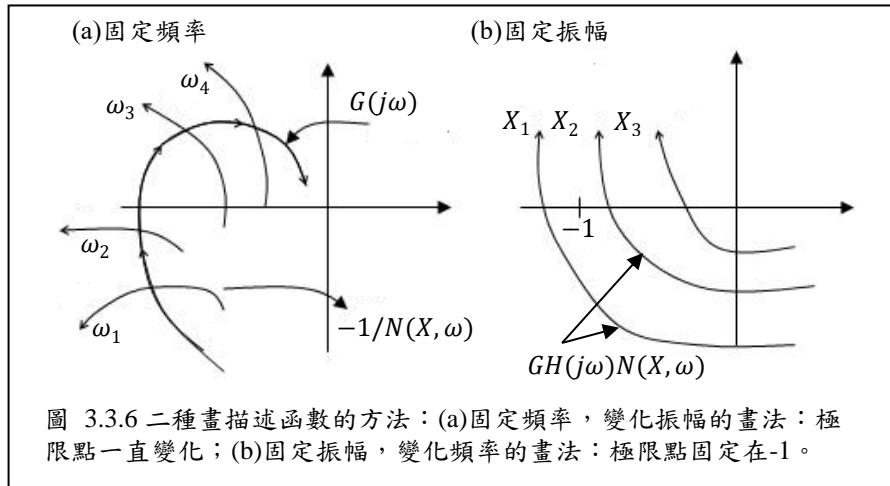
如何判斷極限圓的穩定性：

- 於A點之極限圓：由A擾動到C時，臨界點 $-1/N(X)$ 被 $GH(s)$ 所包圍，系統輸出變為不穩定(使用 Nyquist 定理)。系統不穩定故振幅 X 遞增，漸離A點(注意圖中所標示的振幅遞增的方向)；當由A擾動到D時，臨界點 $-1/N(X)$ 不被 $GH(s)$ 所包圍，系統變為穩定，故振幅 X 遞減，往左漸離A點(注意圖中所標示的振幅遞減的方向)；故知A點所對應的極限圓為不穩定。
- 於B點之極限圓：由B擾動到F時，臨界點 $-1/N(X)$ 被 $GH(s)$ 所包圍，系統變為不穩定，不穩定故振幅 X 遞增，即朝B點運動；由B擾動到E時，臨界點 $-1/N(X)$ 不被 $GH(s)$ 所包圍，系統變為穩定，穩定故振幅 X 遞減，亦朝B點運動；因此B點之極限圓為穩定。



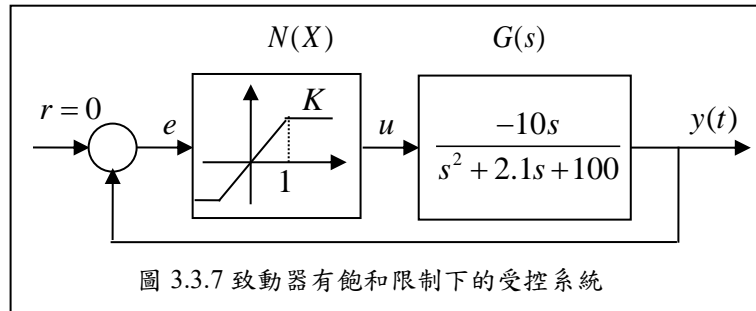
在圖 3.3.5 中，臨界點的軌跡 $-1/N(X, \omega)$ 是假設頻率 ω 固定，振幅 X 變化時，所描繪出來的。描述函數 $N(X, \omega)$ 可同時為輸入振幅 X 及輸入頻率 ω 的函數，因此產生了二種畫 $N(X, \omega)$ 的方法：

- (1) 先固定一個 ω ，再畫出 $N(X, \omega)$ 隨 X 的變化情形：此畫法所對應的特徵方程式為 $GH(j\omega) = -1/N(X, \omega)$ ；此時特徵方程式左邊的 $GH(j\omega)$ 是 ω 的函數，右邊的 $-1/N(X, \omega)$ 則是 X 的函數，二者互不影響，可獨立畫出。而二者的交點即是極限圓的所在，此畫法如圖 3.3.5 及圖 3.3.6a 所示。
- (2) 先固定一個 X ，再畫出 $N(X, \omega)$ 隨 ω 的變化情形：此畫法所對應的特徵方程式不能寫成 $GH(j\omega) = -1/N(X, \omega)$ ，因為方程式的二邊同時是 ω 的函數，不能各自獨立畫出；正確的寫法是 $GH(j\omega)N(X, \omega) = -1$ ，將二者結合在一起放在方程式左邊，然後二者的乘積對 ω 畫圖，如圖 3.3.6b 所示。



在大部分的情形下，描述函數僅為振幅 X 的函數，此時以第一種畫法較為合適。

例題 3.3.2：飽和元件作用下的穩定性分析



在圖 3.3.7 的方塊圖中，飽和元件之描述函數為(參考 3.2.5 節的結果)

$$N(X) = \frac{2K}{\pi} \left[\sin^{-1} \left(\frac{1}{X} \right) + \frac{1}{X} \sqrt{1 - \frac{1}{X^2}} \right], X \geq 1 \quad (3.3.8)$$

$-1/N(X)$ 的曲線在複數平面上，是一條落在負實軸上的射線，起點在 $-1/K$ (當 $X = 1$ 時)。(3.3.8)式中的描述函數，其 X 的範圍限制在 $X \geq 1$ ，這是因為當輸入振幅 $X < 1$ 時，系統是操作在線性區域(參見圖 3.3.7)，此時非線性飽和限制不起作用，因此不是描述函數的適用範圍。

如圖 3.3.8 所示，臨界點軌跡 $-1/N(X)$ 與線性受控體 $G(j\omega)$ 的奈氏曲線的交點在 $G(j10) = -4.76$ 之處。由 Nyquist 定理知，穩定的條件是臨界點 $-1/N(X)$ 不能為 $G(j\omega)$ 曲線所包圍，也就是說 $-1/K$ 必須在點 -4.76 的左方(見圖 3.3.8)，亦即

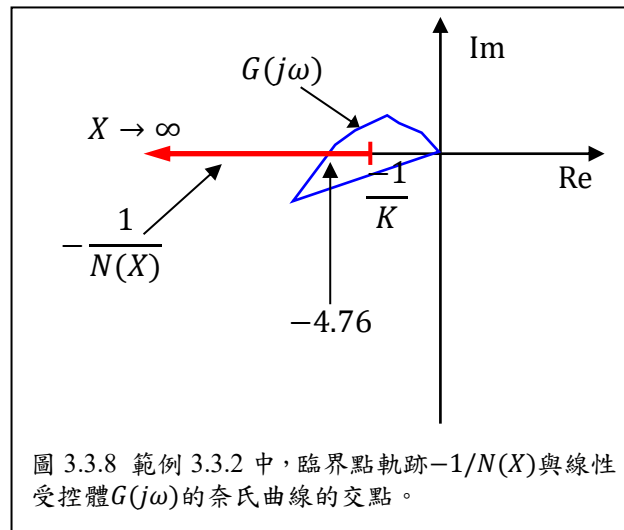
$$-1/K < -4.76 \Rightarrow 1/K > 4.76 \Rightarrow K < 0.21$$

當上式滿足時，代表所有的臨界點 $-1/N(X)$ 都不被 $G(j\omega)$ 曲線所包圍，也就是不管輸入振幅 X 為多少，系統恆為穩定。

當 $K < 0.21$ 沒有被滿足時，則有部分的輸入振幅 X 將造成系統的不穩定。而極限圓就是產生在穩定與不穩定的交界處，也就是位於 $-1/N(X)$ 與 $G(j\omega)$ 的交點處：

$$-1/N(X) = G(j10) = -4.76 \Rightarrow X = 1.36$$

故知極限圓的動態為 $e(t) = X \sin \omega t = 1.36 \sin(10t)$ 。此一極限圓的預測是否正確，必須以 Simulink 建構圖 3.3.7 的非線性模擬環境，再求出其時間響應以驗證極限圓的存在性。



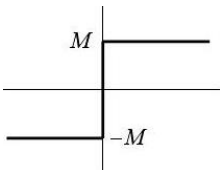
3.4 工程中常用的描述函數

本節列出幾種工程中常用到的非線性元件及其對應的描述函數，當這些非線性元件出現在控制系統中時，只要用對應的描述函數取代之，就可化成 Laplace 轉移函數的型式，再用古典控制的方法加以處理即可。下列表格中出現的描述函數都僅是輸入振幅 X 的函數與頻率 ω 無關，即 $N(X, \omega) = N(X)$ 。另外在下列表格中，吾人將 $N(X)$ 分解成實、虛部的組合： $N(X) = \text{Re}(N(X)) + i\text{Im}(N(X))$ ，與先前極座標的表示法 $N(X) = |N(X)|\angle N(X)$ 有下列的關係：

$$|N(X)| = \sqrt{[\text{Re}(N(X))]^2 + [\text{Im}(N(X))]^2}, \angle N(X) = \phi = \tan^{-1} \frac{\text{Im}(N(X))}{\text{Re}(N(X))}$$

同時在表中出現的 $N_u(A)$ 函數定義如下：

$$N_u(X) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sin^{-1}(1/X) + \frac{2}{\pi X} \sqrt{1 - 1/X^2}, & X \geq 1 \\ 1, & X \leq 1 \end{cases}$$

$f(x)$	$\text{Re}N(X)$	$\text{Im}N(X)$
x^{2n-1} , $n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \frac{2n-5}{2n-4} \dots \frac{3}{4} X^{2n-2}$	0
$x^{2n-1} x $, $n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{4}{\pi} \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} \frac{2n-4}{2n-3} \dots \frac{2}{3} X^{2n} - 1$	0
	$\frac{4M}{\pi X}$	0

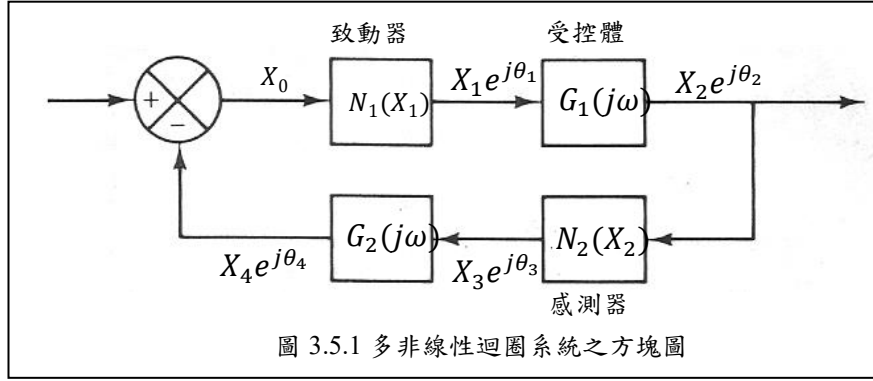
	$K, X/d \leq 1$ $KN_u\left(\frac{X}{d}\right), X/d \geq 1$	0
	$K, X/d \leq 1$ $K_1 + (K - K_1)N_u\left(\frac{X}{d}\right), X/d \geq 1$	0
	$0, X/d \leq 1$ $K\left[1 - N_u\left(\frac{X}{d}\right)\right], X/d \geq 1$	0
	$K + \frac{4M}{\pi X}$	0
	$K\left[1 - N_u\left(\frac{X}{d}\right)\right], 1 \leq \frac{X}{d} \leq \frac{B}{d}$ $K\left[N_u\left(\frac{X}{B}\right) - N_u\left(\frac{X}{d}\right)\right], \frac{X}{d} \geq \frac{B}{d}$	0
	$0, X \leq d$ $\frac{4C}{\pi X} \sqrt{1 - \left(\frac{d}{X}\right)^2}, d \leq X \leq B$ $\frac{4C}{\pi X} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{d}{X}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{d}{X}\right)^2} \right], X \geq B$	0
	K	$\frac{4M}{\pi X}$
	0	$-\frac{4M}{\pi X}$
	$0, X/d \leq 1$ $\frac{K}{2} \left[1 - N_u\left(\frac{X/d}{2 - X/d}\right) \right], \frac{X}{d} \geq 1$	$0, X \leq d$ $\frac{4Kd(d - X)}{\pi X^2}, X \geq d$

	$0, X/d \leq 1$ $\frac{K}{2} \left[1 - N_u \left(\frac{X/d}{2 - X/d} \right) \right], 1 \leq \frac{X}{d} \leq \frac{M}{d}$ $\frac{K}{2} \left[N_u \left(\frac{X}{M} \right) - N_u \left(\frac{X/d}{2 - M/d} \right) \right], X \geq M$	$0, X \leq d$ $\frac{4Kd(d-X)}{\pi X^2}, d \leq X \leq M$ $\frac{4Kd(d-M)}{\pi X^2}, X \geq M$
	$0, X \leq d$ $\frac{4M}{\pi X} \sqrt{1 - \left(\frac{d}{X} \right)^2}, X \geq d$	$0, X \leq d$ $-\frac{4dM}{\pi X^2}, X \geq d$

以上表格摘錄自文獻[6]。

3.5 多非線性元件之穩定性分析

一個控制系統中可能會同時出現多個非線性元件，如圖 3.5.1 所示，其中 $N_1(X_1)$ 與 $N_2(X_2)$ 分別代表非線性致動器與非線性感測器的描述函數。



假設 $G_1(j\omega)$ 和 $G_2(j\omega)$ 具有線性低通濾波器的特性，且以 X_0 的相位設為 0° 基準相位；則各點間之相位與振幅可表之如下：

$$X_1 = X_0 |N_1(X_1)|, X_2 = X_1 |G_1(j\omega)|, X_3 = X_2 |N_2(X_2)|, X_4 = X_3 |G_2(j\omega)|$$

$$\theta_1 = \angle N_1(X_1), \theta_2 = \theta_1 + \angle G_1(j\omega), \theta_3 = \theta_2 + \angle N_2(X_2), \theta_4 = \theta_3 + \angle G_2(j\omega)$$

在穩定度的分析過程中，可設輸入指令 $r = 0$ ，故有

$$0 - X_4 e^{j\theta_4} = X_0 \Rightarrow (X_4/X_0) e^{j\theta_4} + 1 = 0 \Rightarrow N_{tot}(X_0, \omega) + 1 = 0 \quad (3.5.1)$$

其中 $N_{tot}(X_0, \omega)$ 為迴路的整體描述函數，具有增益 X_4/X_0 及與相位 θ_4 ：

$$N_{tot}(X_0, \omega) = (X_4/X_0) e^{j\theta_4} \quad (3.5.2)$$

滿足特徵方程式

$$N_{tot}(X_0, \omega) + 1 = 0 \quad (3.5.3)$$

的 X_0 和 ω 即為極限圓的振幅與頻率。

3.3 節中提到的奈氏定理是用來判斷系統的絕對穩定性(absolute stability)，也就是穩定與不穩定的區分。對於已經穩定的系統，我們還可以定義其穩定的程度，此稱為相對穩定度(relative stability)。在線性系統中有二個描述相對穩定度的指標，即增益裕度(GM, gain margin)與相位裕度(PM, phase margin)。所謂的增益裕度是指在到達不穩定之前，系統增益值還可增加的空間；所謂的相位裕度是指在到達不穩定之前，系統相位還可再落後的角度。對於穩定

的 A 與 B 二系統，透過這二個裕度指標的比較，我們便可以說 A 的穩定度比 B 好，或 B 的穩定度比 A 好。

類似於線性系統中的相對穩定度的定義，我們也可以透過描述函數，定義非線性系統之增益裕度與相位裕度。穩定與不穩定的邊界在 $N_{tot}(X_0, \omega) + 1 = 0$ ，因此 $N_{tot}(X_0, \omega)$ 距離臨界點 -1 愈遠，代表穩定的裕度愈大。在複數平面上，臨界點 -1 的極座標表示是長度 $r = 1$ ，幅角 $\theta = \pm\pi$ 。因此 $N_{tot}(X_0, \omega)$ 與臨界點 -1 的接近程度就要考慮二個因素：一個是與長度 $r = 1$ 的接近程度，此即為增益裕度；另一個是與幅角 $\theta = \pm\pi$ 的接近程度，此即為相位裕度。當二個裕度指標都為零時， $N_{tot}(X_0, \omega)$ 即與臨界點 -1 重合。

由於 $N_{tot}(X_0, \omega)$ 同時是振幅 X_0 與頻率 ω 之函數，我們有二種定義 GM 和 PM 的方式：

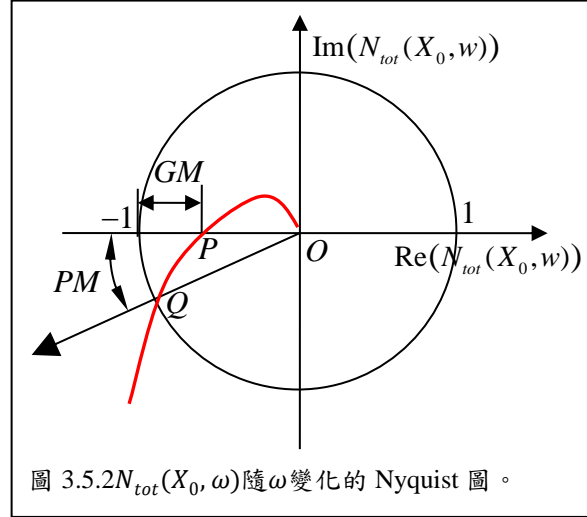


圖 3.5.2 $N_{tot}(X_0, \omega)$ 隨 ω 變化的 Nyquist 圖。

(1) 固定振幅 X_0 ：

在某一固定振幅 X_0 之下，畫出 $N_{tot}(X_0, \omega)$ 隨 ω 變化的 Nyquist 圖，則定義增益裕度 GM 為

$$GM = 20 \log |N_{tot}(X_0, \omega^*)|^{-1} \quad (3.5.4)$$

其中 ω^* 滿足 $\angle N_{tot}(X_0, \omega^*) = -\pi$ 。當相位角等於負 180 度時，即圖 3.5.2 中的 P 點，則 P 點要在 -1 點的右邊才能保證穩定(根據奈氏穩定定理)，而且 $\overline{OP} = |N_{tot}(X_0, \omega)|$ 的長度越小越好。或是說 $|N_{tot}(X_0, \omega)|^{-1} > 1$ 且越大越好，當 $|N_{tot}(X_0, \omega)| = 1$ 時，由(3.5.4)式知增益裕度 $GM = 0$ ，代表已到達不穩定的邊界。

相位裕度 PM 則定義成當 $|N_{tot}(X_0, \omega)| = 1$ 時，亦即圖 3.5.2 中的 Q 點，相位角 $\angle N_{tot}(X_0, \omega)$ 離負 180 度還有幾度。以符號來表示，則成

$$PM = \pi + \angle N_{tot}(X_0, \omega^*) \quad (3.5.5)$$

其中 ω^* 滿足 $|N_{tot}(X_0, \omega^*)| = 1$ 。當 $PM = 0$ 時，圖 3.5.2 中的 Q 點即與臨界點 -1 重合，代表已到達不穩定的邊界。綜合言之，GM 代表圖 3.5.2 中的 P 點與臨界點 -1 的徑向距離，而 PM 則代表 Q 點與臨界點 -1 的弧向距離。同時注意，(3.5.4)式的 GM 與(3.5.5)式的 PM 都是在某一輸入振幅 X_0 下所定義的，當 X_0 變化時，GM 與 PM 也將隨之改變。

(2) 固定頻率 ω ：

在某一固定頻率 ω 之下，畫出 $N_{tot}(X_0, \omega)$ 隨 X_0 變化的奈氏圖，則仿照前面的定義

$$GM = 20 \log |N_{tot}(X^*, \omega)|^{-1} \quad (3.5.6a)$$

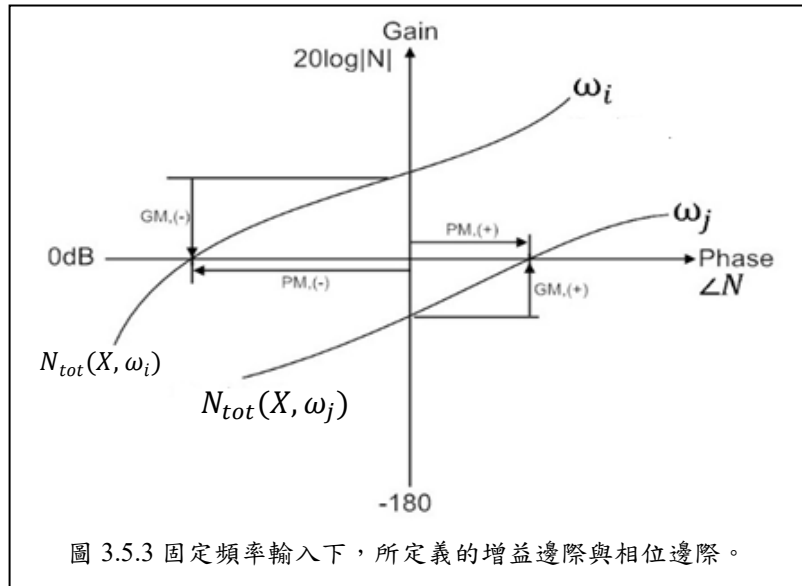
$$PM = \pi + \angle N_{tot}(X^*, \omega) \quad (3.5.6b)$$

其中(3.5.6a)式中的 X^* 滿足 $\angle N_{tot}(X^*, \omega) = -\pi$ ，而(3.5.6b)式中的 X^* 滿足 $|N_{tot}(X^*, \omega)| = 1$ 。此時

GM 與 PM 皆為 ω 之函數。

圖 3.5.3 中的每一條曲線代表在一固定輸入頻率 ω_i 之下，改變輸入振幅大小 X 時，系統所呈現的增益裕度與相位裕度。可以看出：

- 當 $\omega = \omega_i$ 時， $GM = -20\log|N(X^*, \omega_i)| < 0$ 且 $PM = \pi + \angle N_{tot}(X^*, \omega_i) < 0$ 。
- 當 $\omega = \omega_j$ 時， $GM = -20\log|N(X^*, \omega_j)| > 0$ 且 $PM = \pi + \angle N_{tot}(X^*, \omega_j) > 0$ 。

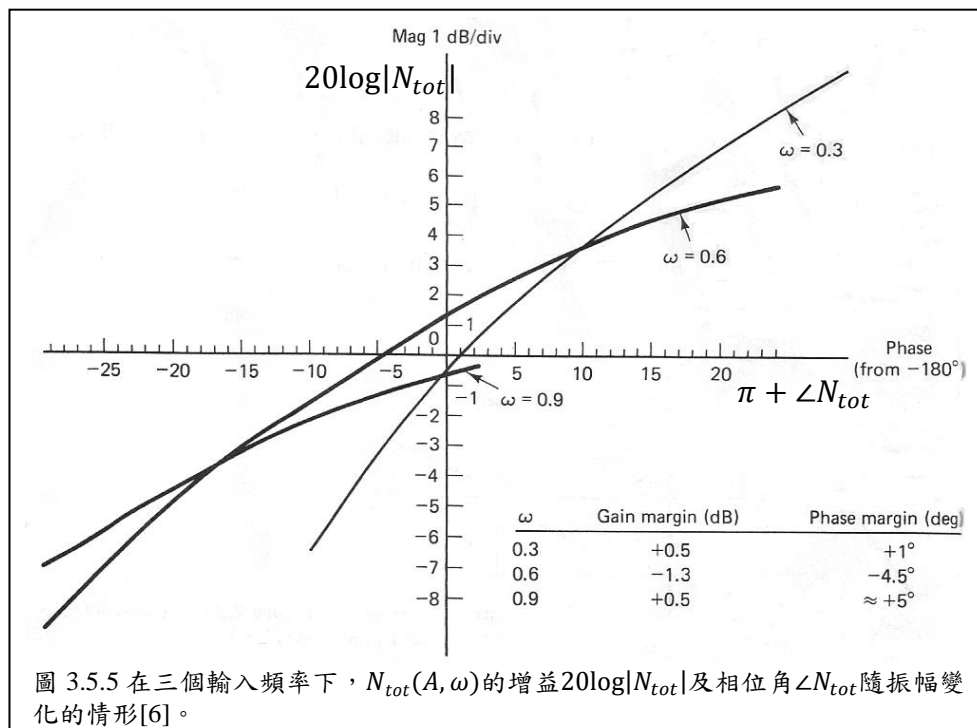
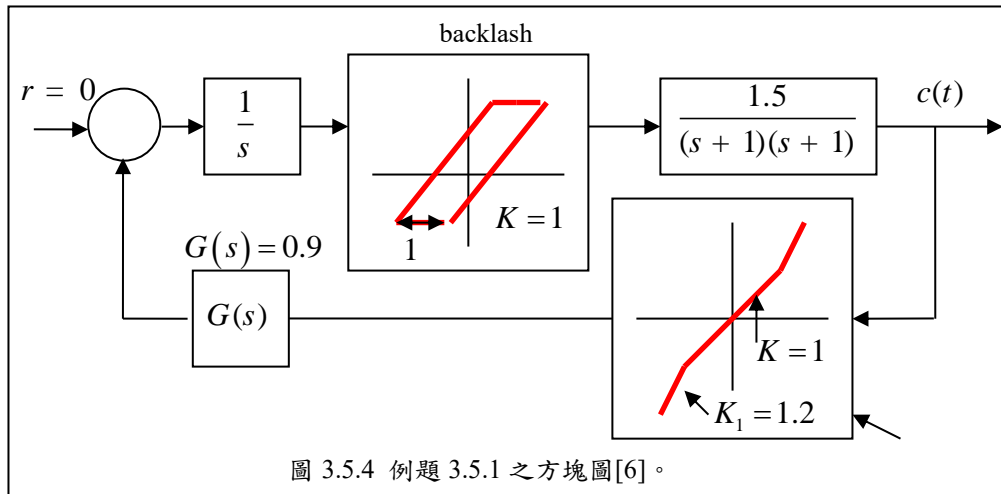


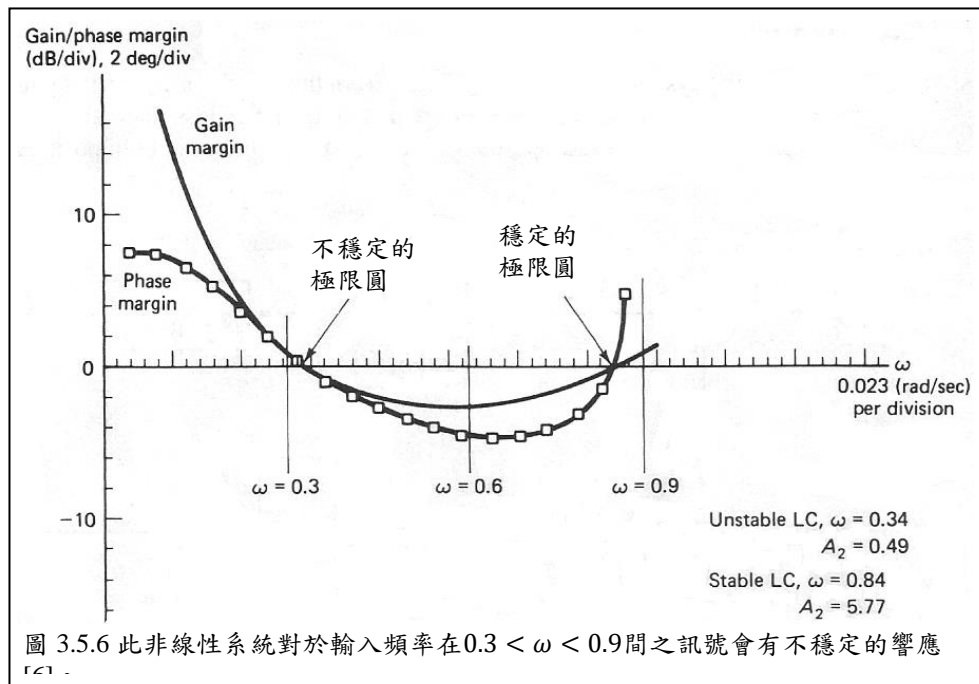
例題 3.5.1：

利用前述之方法，吾人可以求出圖 3.5.4 的非線性系統所相對應之整體描述函數 $N_{tot}(X, \omega)$ ，然後每次固定一 ω 值，並變化振幅 X 值，在複數平面上描出 $N_{tot}(X, \omega)$ 之軌跡，結果如圖 3.5.5 所示。從圖中可以讀出在三個頻率下 $\omega = 0.3, 0.6, 0.9$ ， GM 和 PM 的值如下：

- (1) $\omega = 0.3$: $GM = -20\log|N(X^*, \omega_i)| = +0.5$, $PM = \pi + \angle N_{tot}(X^*, \omega_i) = +1^\circ$ 。
- (2) $\omega = 0.6$: $GM = -20\log|N(X^*, \omega_i)| = -1.3$, $PM = \pi + \angle N_{tot}(X^*, \omega_i) = -4.5^\circ$ 。
- (3) $\omega = 0.9$: $GM = -20\log|N(X^*, \omega_i)| = +0.5$, $PM = \pi + \angle N_{tot}(X^*, \omega_i) = +5^\circ$ 。

一個輸入頻率 ω 對應一組 GM 和 PM ，故當 ω 連續變化時，即會決定一條 GM 曲線和一條 PM 曲線，如圖 3.5.6 所示。從此圖可以看到在 $0.34 < \omega < 0.84$ 範圍內的頻率輸入， GM 和 PM 均為負值，故系統不穩定。反之，在 $\omega < 0.34$ 或 $\omega > 0.84$ 的範圍，系統為穩定。若剛好落在 $\omega = 0.34$ 及 $\omega = 0.84$ 二處上，則是極限圓可能發生的地方，也就是穩定與不穩定的交界點上。本例題取材自文獻[6]。



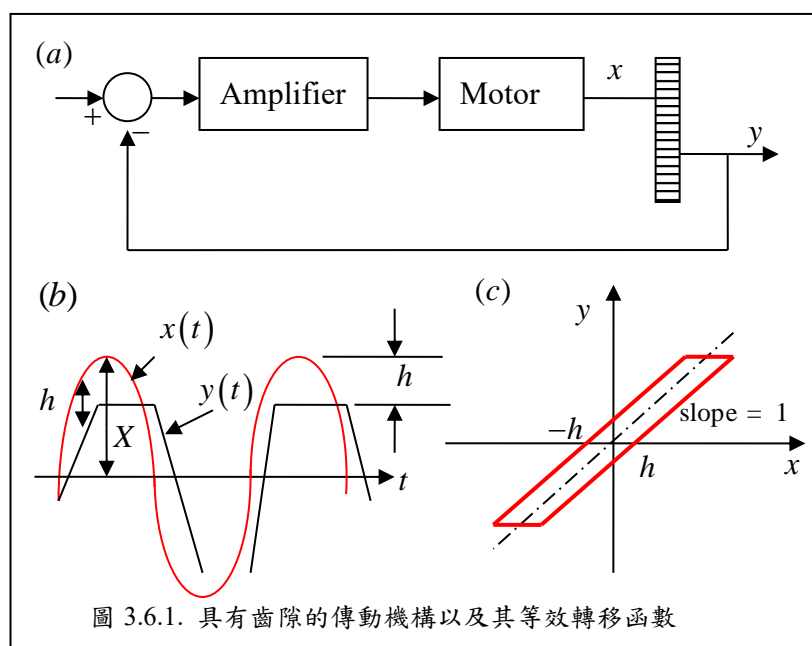


3.6 學習評量

3.6.1 圖 3.6.1a 表示一個包含放大器、馬達、以及兩個齒輪的伺服機構。由於齒隙的存在，使得 y 的位置落後 x 的位置，如圖 3.6.1b 所示。設齒隙之描述函數大小 $|N|$ 及相位 $\angle N$ 已求出如圖 2 所示。並設放大器及馬達的轉移函數為

$$\frac{10}{s(s+1)}$$

最後之等效方塊圖如圖 3.6.1e 所示。是決定此系統有否極限圓存在？若有，是穩定還是不穩定？共振的頻率及振幅各為何？



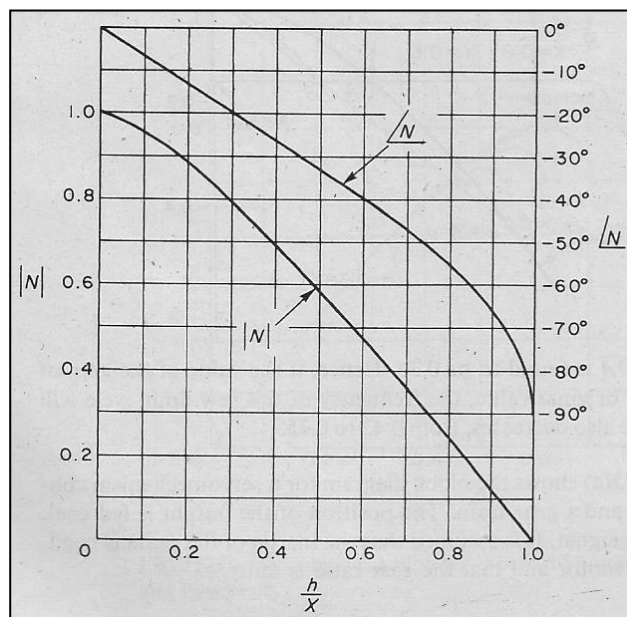


圖 3.6.1d 齒隙非線性元件的描述函數隨輸入振幅的變化情況

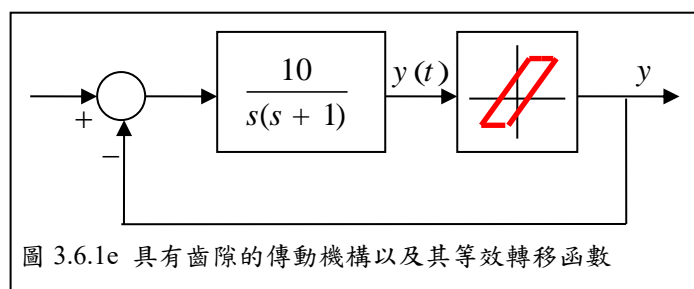


圖 3.6.1e 具有齒隙的傳動機構以及其等效轉移函數

3.6.2 圖 3.6.2a 表示一非線性元件及一線性系統 $G(s)$ 。整個系統經分析，具有一個極限圓，其共振頻率在 5.9 rad/sec 如圖 3.6.2b 所示。現吾人欲將共振頻率從 5.9 降到 4 rad/sec ，試問 $G(s)$ 的增益 $G(j\omega)$ 要下降多少比例？(亦即要求出圖 3.5.2b 中的 K 值)

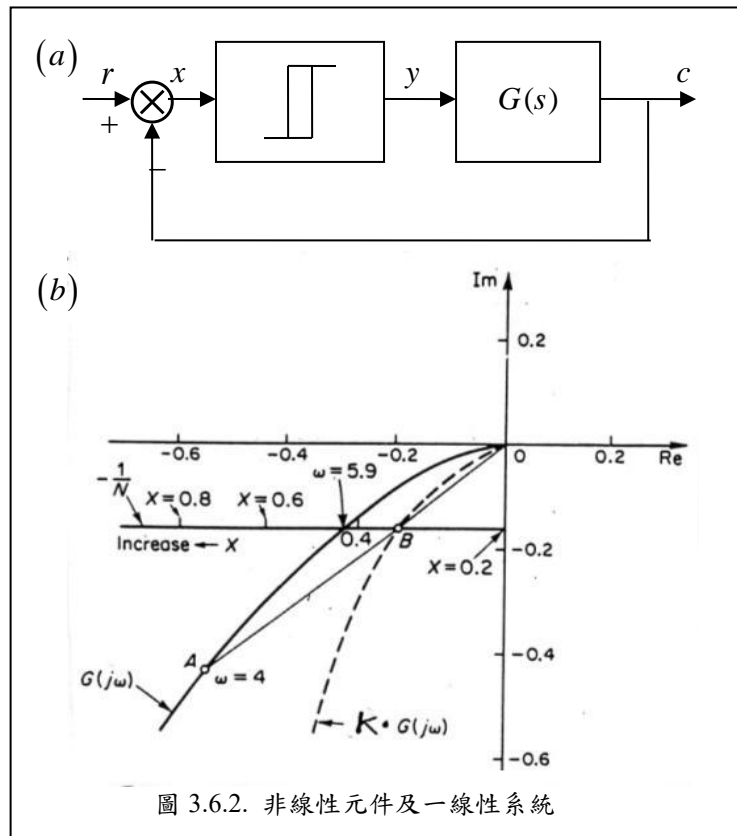


圖 3.6.2. 非線性元件及一線性系統

3.6.3 試以描述函數的方法，決定圖 3.6.3 中系統的穩定性。(註：要先決定出非線性元件 $y = x^3$ 的描述函數為何！查閱 3.4 節表格中的相對應描述函數。)

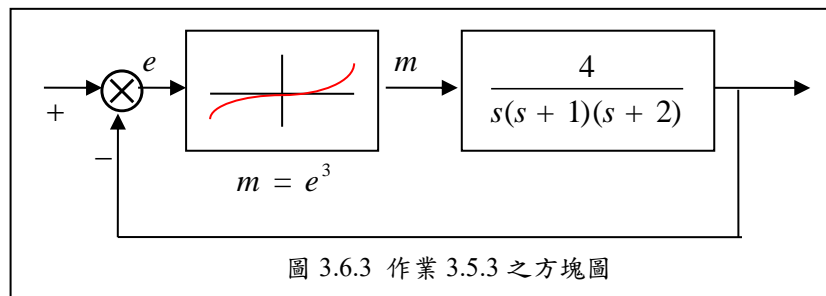


圖 3.6.3 作業 3.5.3 之方塊圖

3.6.4 決定圖 3.6.4 中的系統，其發生共振時之頻率及振幅為何(極限圓)？查閱 3.4 節表格中的相對應描述函數。

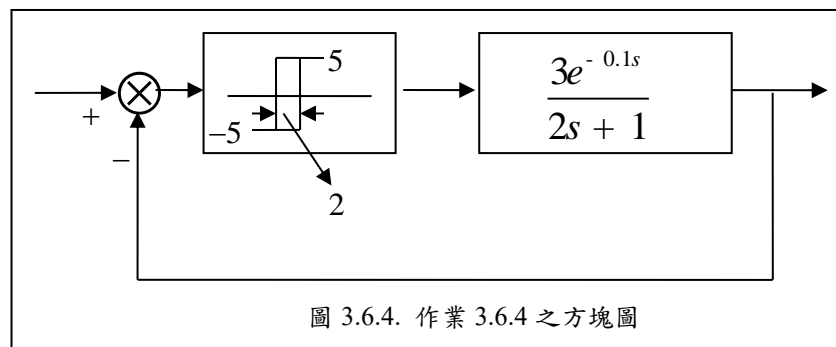
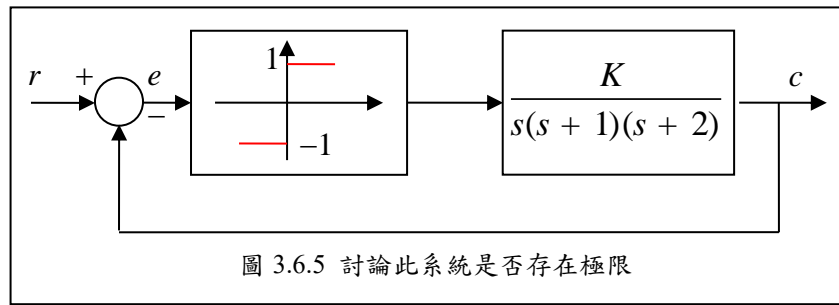


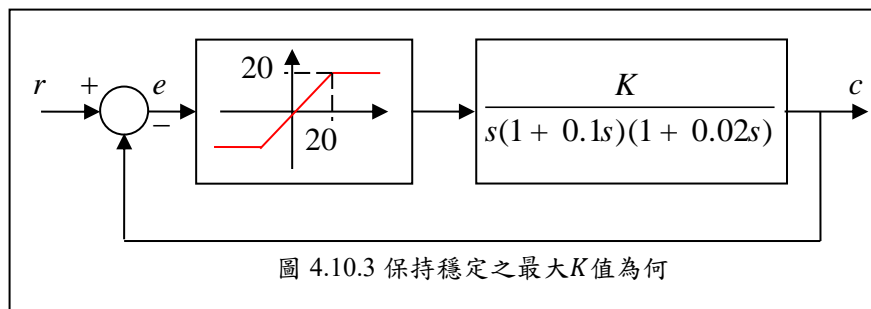
圖 3.6.4. 作業 3.6.4 之方塊圖

3.6.5 試分析下列系統是否存在極限圓



若有，試討論此極限圓的穩定性，及其振盪之振幅和頻率。

3.6.6 在下列系統中，試求保持穩定時，最大可能之 k_{\max} 為何？



若 $k = 2k_{\max}$ 時，試求自體持續振盪(self-sustained oscillation，就是極限圓)之頻率和振幅

本章文獻與註解

描述函數是分析非線性系統的傳統工具，在其數學理論還未完全建立前，早有許多成功的工業應用。目前描述函數的學理發展已漸趨成熟，近年來雖較少見到針對描述函數討論的學術性期刊論文，但結合描述函數的相關控制應用仍常出現。關於描述函數的完整介紹可在幾本早期的教科書中找到，最近並有教科書結合 Matlab 程式，介紹以描述函數進行非線性控制設計，茲列舉如下。

- [1] A. Gelb, W. E. Vander Velde, Multi-Input Describing Functions and Nonlinear System Design, McGraw-Hill, 1968。這本書是關於描述函數的代表性著作，紀錄了描述函數的定義、原理、計算、發展過程、分析與應用等等，是研究描述函數不可或缺的字典工具書。
- [2] A. R. Bergen, R. L. Franks, Justification of the Describing Function Method, SIAM Journal of Control, Vol. 9, pp. 568-589, 1971。這篇期刊論文紀錄了1971年之前關於描述函數的許多工業應用，證實描述函數的功用，同時確立了描述函數在非線性系統分析中所佔的角色。
- [3] A. Nassirharand, Computer-aided Nonlinear Control System Design: Using Describing Function Models, Springer Verlag, 2012。這是關於描述函數最新的一本教科書，結合 Matlab 指令及數值模擬環境，進行非線性控制系統的設計。
- [4] J. H. Taylor, Robust Nonlinear Control Based on Describing Function Methods, Proc. 1998 ASME IMECE, Dynamic Systems and Control Division Vol. 64, Anaheim, CA, Nov. 1998。

該篇論文是傳統與現代控制理論的結合，將傳統描述函數的分析工具結合到新近的強健控制(robust control)理論，賦予了描述函數新的生命。

- [5] D. P. Atherton, Control Systems, Robotics, and Automation, Vol. III, Describing Function Method, Encyclopedia of Life Support Systems, Eolss Publishers, Paris, France。這是 Eolss 線上百科全書，其中的第三冊有一章是關於描述函數的介紹，以淺顯易懂的文字表達了描述函數的基本觀念。該文章後面所列的參考文獻提供了更多關於描述函數的應用與討論。
- [6] R. R. Mohler, Nonlinear Systems, Vol. 1, Dynamics and Control, Prentice Hall, 1991。該書的所有範例均取材自實際工程問題，賦予非線性系統實際工程的涵義。該書的 7.3 節是對描述函數的簡明介紹，其中的表格 7.2 列出許多非線性元件的描述函數，具有實務應用的參考價值，本章 3.4 節中的表格即摘錄自該書的表格。
- [7] K. Ogata, Modern Control Engineering, Prentice Hall, 1970。該書的 1970 年初版，內有幾章關於非線性系統的討論，但是後來的新版本僅保留了線性系統的部分。本章的內容主要參考該書 1970 版的第 11 章描述函數。
- [8] J. J. E. Slotine, W. Li, Applied Nonlinear Control, Pearson, 2005。該書內容平易近人，適合初學者閱讀，其中的第五章介紹描述函數。本章的例題 3.1.1 即取材自該書。