Chapter 5　非線性時變系統的穩定性

一般動態系統的變數(如位置、速度等)都會隨時間變化。然而時變系統所指的『時變』不是指『系統變數』隨時間的變化，而是指『系統參數』隨時間的變化。譬如考慮 RLC 電路方程式:$RLC\ddot{V}+L\dot{V}+RV=0$，其中電阻$R$、電感$L$、電容$C$是系統的參數，電壓$V(t)$是系統的變數。當$R$、$L$、$C$參數都是常數時，則稱此 RLC 電路為非時變系統。上一章所討論的主題即為非時變系統的穩定性分析。當 RLC 電路操作時間拉長，此時電阻R會隨溫度而變化，不再能視為定值，而是一個隨時間緩慢變化的參數，則相對應的 RLC 電路方程式變成:$R(t)LC\ddot{V}+L\dot{V}+R(t)V=0$，此即所謂的時變系統。時變系統所對應的方程式為變係數的微分方程式，其解的困難度遠高於常係數微分方程式。時變與非時變系統有時是很難區分的，甚至同一個系統，可以既是時變系統又是非時變系統，端看觀察時間的長短。一朵花在 1 分鐘的觀察尺度內，幾乎沒有變化，可視為非時變系統；但在 24 小時的觀察時間內，花的成長或凋謝過程即會呈現，此時花必須視為時變系統。

5.1 時變系統的穩定性

上一章我們討論了非時變系統(time-invariant systems)：$\dot{x}=f(x)$的穩定性，這一章將針對時變系統(time-varying systems)：$\dot{x}=f(x,t)$做討論。時變系統的解和初始時間t_0有關，其穩定性的判斷和非時變系統有如下的區別。

(A) 平衡點

$x=0$為$\dot{x}=f(t,x)$之平衡點，若滿足

$$f(t,0)=0,\forall t\geq 0 \tag{5.1.1}$$

注意上式(5.1.1)中，須對任意$t\geq 0$均要成立，亦即平衡點的位置必須固定，不能隨時間而變。

<u>例題 5.1.1</u>

(a) $\dot{x}=-\frac{a(t)x}{1+x^2}\rightarrow x=0$時，$\dot{x}(t)\equiv 0,\forall t\geq 0$，故為平衡點。

(b) $\dot{x}=-a(t)x/(1+x^2)+b(t),b(t)\neq 0$，當$x=0$時，$\dot{x}(t)$不恒為 0，因此$x=0$不為平衡點；若令$\dot{x}=0$，所解得的$x$隨時間$t$而變，代表此時變系統沒有平衡點的存在。

□

(B) Lyapunov 穩定性

平衡點$x=0$為 Lyapunov 穩定，若其滿足下列條件：對$\forall\varepsilon>0$，$\forall t_0\geq 0$，恒存在$\delta=\delta(\varepsilon,t_0)$使得

$$\|x(t_0)-0\|<\delta(\varepsilon,t_0)\Rightarrow\|x(t)-0\|<\varepsilon,\forall t\geq t_0 \tag{5.1.2}$$

白話翻譯：只要起始值$x(t_0)$取得夠接近原點，則恆可將$x(t)$的全部軌跡控制在任意給定的ε半徑內。注意(5.1.2)式中，δ同時為ε和t_0之函數。

<u>例題 5.1.2</u>

考慮下列之時變系統[4]:

$$\dot{x} = (6t\sin t - 2t)x \tag{5.1.3}$$

利用分離變數法，上式的解可求得為

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0)\exp\left[\int_{t_0}^{t}(6\tau\sin\tau - 2\tau)\,d\tau\right] \\ &= x(t_0)\exp(6\sin t - 6t\cos t - t^2 - 6\sin t_0 + 6t_0\cos t_0 + t_0^2) \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

在上式中，與時間t有關的項為$e^{6\sin t - 6t\cos t - t^2}$，當時間$t \to \infty$時，$e^{6\sin t - 6t\cos t - t^2} \to e^{-t^2} \to 0$，也就是與時間有關的項，其值隨時間遞減，而其他項則與初始時間t_0有關，其值設為$c(t_0)$。因此由(5.1.4)式可得到$x(t)$的上界為

$$|x(t)| < |x(t_0)|c(t_0) \tag{5.1.5}$$

在(5.1.2)式中，若取

$$\delta(\varepsilon, t_0) = \varepsilon / c(t_0) \tag{5.1.6}$$

則(5.1.2)式可化成

$$|x(t_0)| < \delta(\varepsilon, t_0) = \varepsilon / c(t_0) \Rightarrow |x(t_0)|c(t_0) < \varepsilon \tag{5.1.7}$$

再結合(5.1.5)式與(5.1.7)式，即可得$|x(t)| < \varepsilon$之 Lyapunov 穩定條件。從這個例題可以看到，對於該時變系統而言，保證$x(t)$為 Lyapunov 穩定的初始偏離半徑$\delta(\varepsilon, t_0)$是由初始時間t_0所決定，如(5.1.6)式所示。圖 5.1.1a 顯示在不同的釋放時間點t_0，但相同的釋放位置$x(t_0) = 1$的條件下，$x(t)$對時間t的響應圖。此圖說明$x(t)$對t_0的變化非常敏感，t_0的稍微變化，將導致$|x(t)| \le \varepsilon$的包絡區間有很大的變化，這是時變系統普遍具有的特性。圖 5.1.1b 則顯示在不同的釋放位置$x(0)$，但相同的釋放時間點$t_0 = 0$的條件下，$x(t)$對時間t的響應圖。此圖說明初始區間$|x(t_0)| \le \delta$的微小變化，將導致$|x(t)| \le \varepsilon$的包絡區間有很大的變化。結合兩者則表明軌跡偏離半徑ε同時是初始偏離半徑δ和初始時間t_0的函數，亦即$\varepsilon = \varepsilon(\delta, t_0)$；反之，如果先給定軌跡偏離半徑$\varepsilon$的話，則初始偏離半徑$\delta$可用軌跡偏離半徑$\varepsilon$和初始時間$t_0$來表示，亦即$\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$。

□

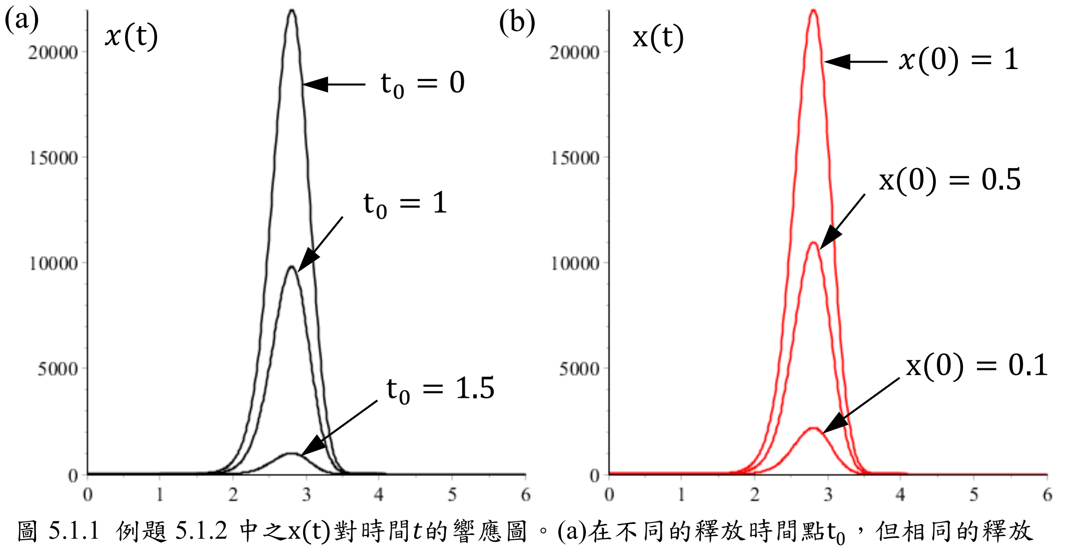

圖 5.1.1 例題 5.1.2 中之x(t)對時間t的響應圖。(a)在不同的釋放時間點t_0，但相同的釋放位置$x(t_0) = 1$的條件下，x(t)對時間t的響應圖。(b)在不同的釋放位置x(0)，但相同的釋放時間點$t_0 = 0$的條件下，x(t)對時間t的響應圖。

(C) 一致穩定性(uniform stability)

當一時變系統的響應收斂速度與t_0無關時，稱為一致系統(uniform system)。一個非線性時變系統在任意初始時間t_0釋放，都具有 Lyapunov 穩定性，則稱其具有一致穩定性；亦即在(5.1.2)式中的δ值和t_0無關。

(D) 一致漸進穩定性

一個非線性時變系統具有一致穩定性，同時又具有$\|x(t)\| \to 0$的特性，則稱其具有一致漸進穩定性。更嚴謹的說法是，存在$\delta > 0$且δ和t_0無關，使得

$$\|x(t_0) - 0\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - 0\| \to 0, t \to \infty \tag{5.1.8}$$

(E) 指數穩定性

$\dot{x} = f(t, x)$的平衡點$x = 0$為指數穩定，若存在二個與t_0無關的正數α和λ使得$x(t)$滿足

$$\|x(t)\| \le \alpha \|x_0\| e^{-\lambda(t-t_0)}，\forall t \ge t_0$$

(5.1.9)

(F) 全域漸進穩定

$\dot{x} = f(t, x)$的平衡點$x = 0$為全域漸近穩定，若對於任意起始點$x(t_0)$，$x(t)$恒趨近於0，當$t \to \infty$時。

<u>**例題 5.1.3**</u>

試考慮一階非線性時變系統[5]

$$\dot{x} = -\frac{x}{1+t}$$

其通解為

$$x(t) = \frac{1+t_0}{1+t} x(t_0)$$

當t_0越大時，$x(t) \to 0$所需的時間也越長⇒不一致(non-uniform)系統

□

(G) 時變 Lyapunov 函數

證明非線性時變系統的穩定性須要用到時變 Lyapunov 函數的操作。對於時變 Lyapunov 函數$V(x, t)$，其為正定的條件是：

$$V(x, t) > 0 \Rightarrow V(x, t) \ge V_0(x) > 0，\forall t \ge t_0 \tag{5.1.10}$$

其中$V_0(x) > 0$為一非時變的正定函數。而$V(x, t)$對時間的微分則變為

$$\dot{V} = \frac{dV(x,t)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial V}{\partial t} + \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} \tag{5.1.11}$$

若存在 Lyapunov 函數滿足(1)$V(0, t) = 0$，(2)$V(x, t) > 0$，(3)$\dot{V} \le 0$，則非線性時變系統$\dot{x} = f(t, x)$在的平衡點$x = 0$處，具有 Lyapunov 穩定性。

5.2 一致穩定性定理

時變非線性系統$\dot{x} = f(x, t)$的解的穩定性通常和初始時間t_0有關。一致穩定性要求

Lyapunov 穩定的收斂區間$\|x(t_0)\| < \delta(\varepsilon, t_0)$必須與初始時間$t_0$無關。為了滿足此一額外的要求，Lyapunov 函數除了要滿足$V > 0$與$\dot{V} \le 0$之外，還要多滿足一個條件。

<u>一致穩定性定理</u>:

若存在 Lyapunov 函數$V(x,t)$滿足

(1)$V(0,t) = 0, \forall t \ge t_0$

(2)$V(x,t) \ge V_0(x) > 0, \forall t \ge t_0$

(3)$\dot{V}(x,t) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} \le 0, \forall t \ge t_0$

(4)$V(x,t) \le V_1(x) > 0, \forall t \ge t_0$

則非線性時變系統$\dot{x} = f(t,x)$在平衡點$x = 0$處，具有 Lyapunov 一致穩定性。

□

滿足條件(4)的函數V又稱為 decrescent 函數。結合條件(2)及條件(4)，這相當於一致穩定條件要求$V(x,t)$的值被包夾在二個正定函數$V_0(x)$與$V_1(x)$之間，

$$0 < V_0(x) \le V(x,t) \le V_1(x), \forall t \ge t_0 \tag{5.2.1}$$

如圖 5.2.1 所示。特別注意$V_0(x)$與$V_1(x)$的函數值與時間t無關。

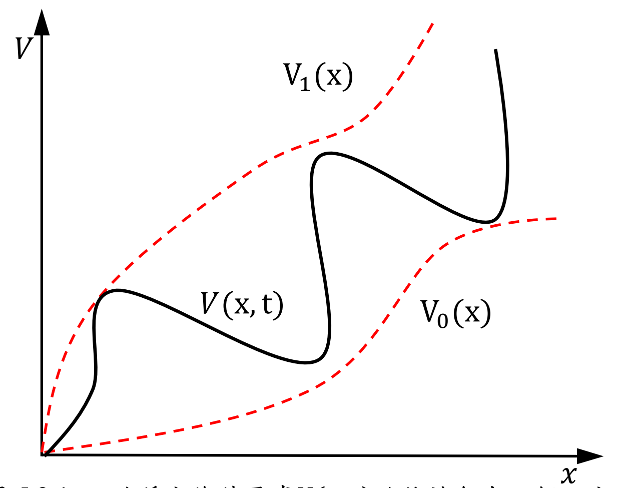

圖 5.2.1 一致穩定條件要求$V(x,t)$的值被包在二個正定函數$V_0(x)$與$V_1(x)$之間。

<u>例題 5.2.1</u>

對於時變函數

$$V(x,t) = (1 + \sin^2 t)(x_1^2 + x_2^2)$$

注意$V(x,t)$可用二個函數左右包住：

$$x_1^2 + x_2^2 \le V(x,t) \le 2(x_1^2 + x_2^2)$$

因此

$$V(x,t) \ge V_0(x) = x_1^2 + x_2^2 > 0 \rightarrow V \text{為正定}$$
$$V(x,t) \le V_1(x) = 2(x_1^2 + x_2^2) \rightarrow V \text{為 decrescent}$$

□

<u>例題 5.2.2</u>

試考慮二階線性時變系統[5]

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) - e^{-2t}x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t)\end{aligned} \tag{5.2.2}$$

選擇 Lyapunov 函數如下

$$V(x,t) = x_1^2 + (1+e^{-2t})x_2^2 \tag{5.2.3}$$

因為$0 \le e^{-2t} \le 1$，故知V滿足下列不等關係

$$x_1^2 + x_2^2 \le V(x,t) \le x_1^2 + 2x_2^2 \tag{5.2.4}$$

另一方面

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} = -2[x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2(1+2e^{-2t})]\\ &\le -2(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)\\ &= -(x_1-x_2)^2 - x_1^2 - x_2^2 < 0, \forall x \ne 0\end{aligned}$$

故$x=0$具有一致漸進穩定，且為全域的。($\because \|x\| \to \infty$，$V(x) \to \infty$)

□

<u>例題 5.2.3</u>

考慮(5.2.3)式的廣義化情形[4]:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) - g(t)x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t)\end{aligned} \tag{5.2.5}$$

其中若取$g(t)=e^{-2t}$，則(5.2.5)式即化為(5.2.2)式的特例。這裡我們所感興趣的是滿足甚麼條件的$g(t)$函數才能使得(5.2.5)的系統為一致漸進穩定。仿照(5.2.3)式的 Lyapunov 函數的設定，對於(5.2.5)式的 Lyapunov 函數，可以推論為下列之形式:

$$V(x,t) = x_1^2 + (1+g(t))x_2^2 \tag{5.2.6}$$

為了使得此一$V(x,t)$滿足如(5.2.4)之限制條件，$g(t)$函數必須被限制在某一正區間之內:

$$0 \le g(t) \le k \tag{5.2.7}$$

在此一條件下，$V(x,t)$的值被二正定函數所包夾:

$$x_1^2 + x_2^2 \le V(x,t) \le x_1^2 + (1+k)x_2^2 \tag{5.2.8}$$

同時$g(t)$函數也必須滿足$\dot{V} \le 0$的條件，其中V對t的全微分可計算如下:

$$\dot{V} = 2x_1\dot{x}_1 + 2(1+g(t))x_2\dot{x}_2 + \dot{g}x_2^2$$

將(5.2.5)式的$\dot{x}_1$與$\dot{x}_2$代入上式化簡，得到

$$\dot{V} = -x_1^2 - (x_1-x_2)^2 + (\dot{g} - 2g - 1)x_2^2 \tag{5.2.9}$$

為了確保$\dot{V} \le 0$條件的成立，$g(t)$函數並須使得$\dot{g} - 2g - 1 \le 0$，亦即

$$\dot{g} \le 2g + 1 \tag{5.2.10}$$

同時滿足(5.2.7)式與(5.2.10)式的$g(t)$函數可保證(5.2.5)式的時變系統為全域一致漸進穩定，其中的一致性是源自(5.2.8)式的條件；漸進穩定是因為在(5.2.9)式中，除了平衡點$x_1 = x_2 = 0$之外，恆有$\dot{V} < 0$；全域性是因為(5.2.6)式中的V滿足 radially unbounded 的條件，即當$x \to \infty$時，$V \to \infty$。例題 5.2.2 是考慮$g(t) = e^{-2t}$的特殊情形，此一$g(t)$確實能同時滿足(5.2.7)式與(5.2.10)式的限制條件。

□

在一致穩定的條件中，除了原有的 Lyapunov 穩定條件，$V(x,t) > 0$，$\dot{V} \le 0$之外，還必須加上 decrescent 條件$V(x,t) \le V_1(x)$，才能確保收斂性不會受到初始條件t_0的影響。下面我們舉一個反例說明若 decrescent 條件沒被滿足，則將失去一致穩定的特性。

例題 5.2.4

考慮以下的時變系統

$$\dot{x} = \frac{\dot{g}(t)}{g(t)} x \tag{5.2.11}$$

其中$g(t)$函數如圖 5.2.2 中的定義。可以看到$g^2(t)$隨時間遞減，其行為類似指數遞減函數e^{-t}，但不同的地方在於時間t等於正整數時，$g^2(t)$的值會突升到 1，然後又迅速降回到e^{-t}。

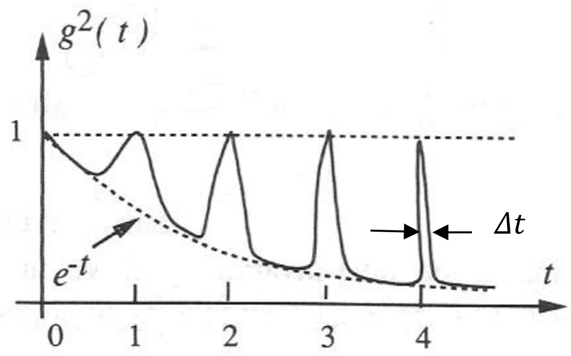

圖 5.2.2 在例題 5.1.5 中所定義的$g(t)$函數。

假設$g^2(t)$的函數值在$t = n$時，突升到 1 的時間脈衝寬度滿足$\Delta t \le (1/2)^n$之條件。在此假設下，$g^2(t)$與時間軸所圍的面積可估算如下:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty g^2(\tau)d\tau < \int_0^\infty e^{-\tau}\, d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot 1 \\ &= [-e^{-\tau}]_0^\infty + \frac{1/2}{1-(1/2)} = 2 \end{aligned} \tag{5.2.12}$$

利用以上的特性，我們選取如下的 Lyapunov 函數

$$V(x,t) = \frac{x^2}{g^2(t)}\left[3 - \int_0^t g^2(\tau)\, d\tau\right] \tag{5.2.13}$$

由(5.2.12)式，可以證明此$V(x,t)$函數必為正定:

$$V(x,t) \ge \frac{x^2}{g^2(t)}\left[3 - \int_0^\infty g^2(\tau)\, d\tau\right] > \frac{x^2}{g^2(t)} \ge x^2 > 0$$

也就是滿足(5.2.1)之正定條件:$V(x,t) \ge V_0(x) > 0$。同時也可證明V滿足$\dot{V} < 0$之條件，對(5.2.13)式取對時間的全微分，得到

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} \\ &= -\frac{2x^2\dot{g}(t)}{g^3(t)}\left[3 - \int_0^t g^2(\tau)\, d\tau\right] - x^2 + \frac{2x\dot{x}}{g^2(t)}\left[3 - \int_0^t g^2(\tau)\, d\tau\right] \end{aligned} \tag{5.2.14}$$

將(5.2.11)式的$\dot{x}$代入上式化簡，可得如下簡單結果:

$$\dot{V} = -x^2 < 0$$

至此我們證明了(5.2.13)中的 Lyapunov 函數滿足$V > 0$且$\dot{V} < 0$的條件，亦即系統(5.2.11)為 Lyapunov 穩定。在另一方面，觀察(5.2.13)式中，因為$g^2(t)$依時間的指數函數遞減，$V(x,t)$的值則依時間的指數函數遞增，且$V(x,t) \to \infty$，當$t \to \infty$，所以不存在一個與時間無關的上限函數可以包住$V(x,t)$，亦即滿足條件$V(x,t) \le V_1(x)$之$V_1(x)$函數不存在。這說明(5.2.13)中的 Lyapunov 函數並不滿足 decrescent 條件，故依據一致穩定性定理，此 Lyapunov 函數不能保證系統具有一致穩定的特性。

實際上(5.2.11)式具有解析解，利用變數分離並積分，可得此式的解為

$$x(t) = \frac{g(t)}{g(t_0)} x(t_0) \tag{5.2.15}$$

首先確認$x(t)$具有 Lyapunov 穩定性。從圖 5.2.2 可看到函數$g(t)$滿足$|g(t)| \le 1$之條件，因此由(5.2.15)式可得到

$$|x(t)| = \left| \frac{g(t)}{g(t_0)} x(t_0) \right| \le |x(t_0)|/|g(t_0)|, \forall t \ge t_0$$

因此若要得到$|x(t)| \le \varepsilon$的 Lyapunov 穩定條件，只須令$|x(t_0)|/|g(t_0)| \le \varepsilon$即可，從而得到初始位置$x(t_0)$所要滿足的條件:

$$|x(t_0)| \le \varepsilon |g(t_0)| = \delta(\varepsilon, t_0)$$

比對(5.1.2)式的定義，可知系統確為 Lyapunov 穩定，但是由於收斂半徑$\delta(\varepsilon, t_0)$是初始時間t_0的函數，故不具有一致性收斂的特性。這也正是先前我們為何找不到 decrescent Lyapunov 函數的原因。以上例題說明 decrescent 條件的重要性，一個 Lyapunov 函數若不滿足 decrescent 條件，則不能保證系統具有一致收斂的特性。

5.3 線性時變系統的穩定性

上一節所介紹的是透過 Lyapunov 直接定理，利用 Lyapunov 函數V的存在性判斷一個非線性時變系統$\dot{x} = f(x,t)$是否為穩定。在另一方面，我們亦可透過 Lyapunov 間接定理，先將$\dot{x} = f(x,t)$線性化成$\dot{x} = A(t)x$，再利用此一線性化時變系統的穩定性來判斷原來非線性時變系統$\dot{x} = f(x,t)$的穩定性。因此為了使用 Lyapunov 間接定理，我們必須先學會判斷線性時變系統的穩定性。

對於一個線性時變系統

$$\dot{x} = A(t)x \tag{5.3.1}$$

我們可以利用矩陣$A(t)$的特徵值來判斷系統的穩定性嗎?直覺的想法應該是可以的，因為對於線性非時變系統$\dot{x} = Ax$，我們確實可以透過常數A矩陣的特徵值的正負，來判斷$\dot{x} = Ax$的穩定性。然而對於(5.3.1)式的時變系統而言，在不同的瞬間t，$A(t)$之特徵值可能不相同，也就是特徵值$\lambda(t)$變成是時間的函數。因為特徵值$\lambda(t)$有時候為正，有時候為負，難道系統(5.3.1)有時候是穩定，有時候是不穩定嗎?更有甚者，如果特徵值$\lambda(t)$在所有時間均為負值，就可以保證系統(5.3.1)為穩定嗎?

不幸的是我們先前對於非時變系統$\dot{x} = Ax$的穩定性判斷準則無法直接用在時變系統$\dot{x} = A(t)x$之上。也就是說，儘管對$\forall t \ge 0$，$A(t)$之特徵值均為負，也無法保證平衡點為穩定，亦即下列的判斷

$$\lambda_i(A(t)) < 0 \to \lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

對於時變系統(5.3.1)是不成立的。

例如考慮下面之時變系統：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & e^{2t}\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

(5.3.2)

$A(t)$之特徵值可由關係式$\det(\lambda I - A) = 0$，求得為

$$\begin{vmatrix}\lambda+1 & -e^{2t}\\ 0 & \lambda+1\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda+1)^2 = 0, \lambda = -1, \forall t \geq 0 \tag{5.3.3}$$

亦即$A(t)$之特徵值恆為$\lambda = -1$且與時間無關。線性非時變分析給我們的直覺是該系統應為穩定，結果卻不然。(5.3.2)式的解可直接求得為

$$x_1(t) = C_1 e^{-t} + \frac{1}{2}C_2 e^{t}, x_2(t) = C_2 e^{-t}$$

吾人發現$t \to \infty$時，$x_1(t) \to \infty$。因此單純由$A(t)$之特徵值無法判斷$A(t)$的穩定性。這說明時變系統的特徵值已不再具有絕對的影響性，其值的正負不再能表示系統的穩定性。下面再舉一例凸顯這樣的事實。

例題 5.3.1

考慮線性時變系統[4]

$$\dot{x} = A(t)x \tag{5.3.4}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix}-1+1.5\cos^2 t & 1-1.5\sin t\cos t\\ -1-1.5\sin t\cos t & -1+1.5\sin^2 t\end{bmatrix} \tag{5.3.5}$$

其解$x(t)$可寫成

$$x(t) = \Phi(t,0)x(0) = \begin{bmatrix}e^{0.5t}\cos t & e^{-t}\sin t\\ -e^{0.5t}\sin t & e^{-t}\cos t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix} \tag{5.3.6}$$

其中$\Phi(t,0)$稱為時間0到t之間的狀態傳輸函數(State Transition Matrix)。由於發散項$e^{0.5t}$的存在，上式表示當$t \to \infty$時，$x(t) \to \infty$。但是如果計算A的特徵值，我們發現

$$|\lambda I - A| = 0 \to \lambda_{1,2} = -0.25 \pm 0.25\sqrt{7}i$$

此二特徵值不隨時間改變，且位於左半面，若以線性系統的角度而言，$x(t)$應為穩定，但實際上不然。(5.3.4)式的相平面軌跡如圖 5.3.1 式所示，說明原點為一不穩定的平衡點。可見時變系統的穩定性無法單獨藉由特徵值的正負來加以判斷。

□

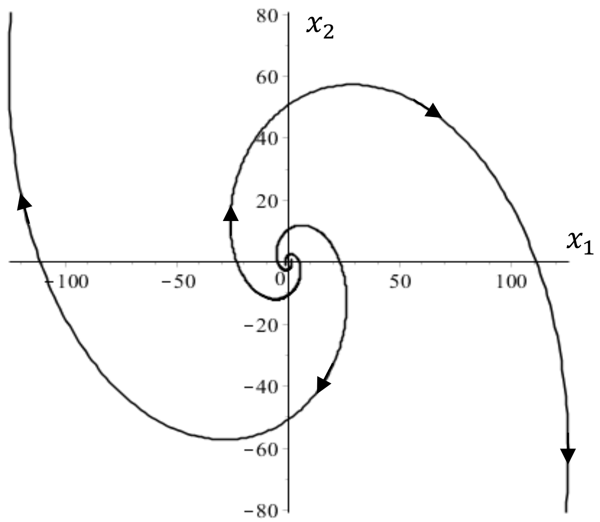

圖 5.3.1 範例 5.3.1 中的相平面軌跡圖，顯示原點為一不穩定的平衡點，雖然其特徵值均為負值。

下面我們介紹幾種判斷線性時變系統穩定性的常用方法。

- **線性時變系統穩定定理 1(充分條件)**

對於線性時變系統$\dot{x} = A(t)x$，若$A(t) + A^T(t)$的所有特徵值在任意時間下均為負值，亦即

$$\lambda_i(A(t) + A^T(t)) < 0\text{，}\forall t \geq 0 \tag{5.3.7}$$

則$x = 0$具有一致漸進穩定性，又因為是線性系統，所以此穩定也是全域的。

證明：

茲選擇 Lyapunov 函數$V = x^T x$，並設$\lambda_i(A(t) + A^T(t)) < -\lambda_{\min} < 0$。注意：因為對稱，所以$A(t) + A^T(t)$之特徵值恒為實數。此時

$$\dot{V} = x^T\dot{x} + \dot{x}^T x = x^T(A(t) + A^T(t))x \leq -\lambda_{\min} x^T x = -\lambda_{\min} V \tag{5.3.8}$$

因此

$$x^T x = V(t) \leq V(0)e^{-\lambda_{\min} t}, \forall t \geq 0 \tag{5.3.9}$$

故知原系統為漸進穩定且為指數穩定，收斂速度為$\lambda_{\min}$。

□

例題 5.3.2

再一次考慮例題 5.2.2 中之時變系統:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) - e^{-2t}x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t) \end{aligned} \tag{5.3.10}$$

在例題 5.2.2 中，我們已經用 Lyapunov 直接定理證明此一系統為穩定。由於這是一個線性時變系統，我們可以利用(5.3.7)式的新條件來重新測試此系統的穩定性。首先將(5.3.10)式表成矩陣的形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -e^{-2t} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Ax$$

故得

$$A + A^T = \begin{bmatrix} -1 & -e^{-2t} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -e^{-2t} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 - e^{-2t} \\ 1 - e^{-2t} & -2 \end{bmatrix}$$

其次計算$A + A^T$的特徵值如下:

$$|\lambda I - (A + A^T)| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -(1 - e^{-2t}) \\ -(1 - e^{-2t}) & \lambda + 2 \end{vmatrix} = 0$$

求解得到$A + A^T$的特徵值為

$$\lambda_1(t) = -1 - e^{-2t}, \lambda_2(t) = -3 + e^{-2t}, \forall t \geq 0$$

因為二個特徵值均為負，故由(5.3.7)式的定理知時變系統(5.3.10)為一致漸進穩定，此一結論與用 Lyapunov 直接定理所得到者相同，如例題 5.2.2 中的討論。同時又因$\lambda_i(t) \leq -\lambda_{\min} = -1$，$\forall t \geq 0$，故由(5.3.9)式可知該系統亦為指數穩定，指數收斂速度為$\lambda_{\min} = 1$。以上的理論預測結果可與(5.3.10)式的實際求解互相驗證比較。求解得到的相平面軌跡如圖 5.3.2a 所示，可以看到軌跡從四面八方以螺旋的方式收斂到平衡點(即原點)，證實平衡點為全域漸進穩定。(b)、(c)、(d)三圖顯示在三個不同初始時間下，$x_1(t)$與$x_2(t)$對時間的響應圖。結果說明系統的收斂性與t_0無關，代表該系統具有一致穩定的特性。在圖 5.3.2b 中同時比較了$x_1(t)$與$x_2(t)$的收斂速度與指數函數$2e^{-t}$的收斂速度。如同上面的預測，$x_1(t)$與$x_2(t)$遵循指數函數e^{-t}的趨勢遞減到零，相當於系統的收斂速度約為$\lambda_{\min} = 1$。

除了與數值計算的結果比較外，實際上(5.3.10)式具有解析解的形式

$$x_1(t) = C_1 e^{-2t} Y(1, e^{-t}) + C_2 e^{-2t} J(1, e^{-t})$$
$$x_2(t) = C_1 e^{-t} J(0, e^{-t}) + C_2 e^{-t} Y(0, e^{-t})$$

其中$J(0, x)$與$J(1, x)$分別是零階與一階的J型 Bessel(貝索)函數，$Y(0, x)$與$Y(1, x)$分別是零階與一階的Y型 Bessel(貝索)函數。待定常數C_1和C_2則是由初始條件$x_1(0)$與$x_2(0)$所決定。解析解顯示$x_1(t)$與$x_2(t)$均是e^{-t}的函數，這正說明了為何該系統具有指數函數e^{-t}的遞減趨勢。

□

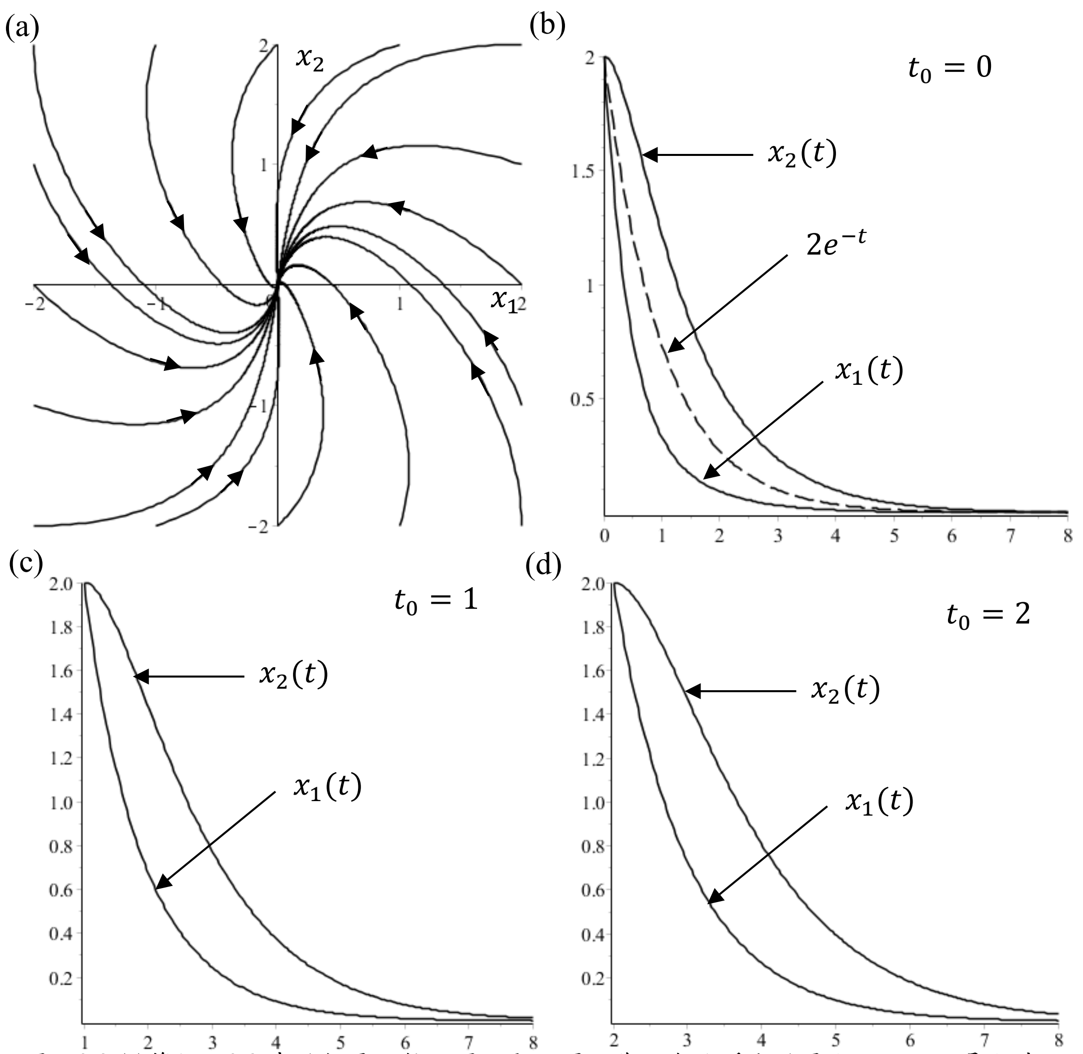

圖 5.3.2 (a)範例 5.3.2 中的相平面軌跡圖，顯示原點為一漸進穩定的平衡點，而且是全域穩定。(b)、(c)、(d)三圖顯示在三個不同初始時間下，$x_1(t)$與$x_2(t)$對時間的響應圖。結果顯示系統的收斂性與t_0無關，代表該系統具有一致性穩定。

由以上的定理與例題，我們了解到對於時變系統$\dot{x} = A(t)x$而言，決定穩定性的關鍵不是$A(t)$的特徵值，而是$A(t) + A^T(t)$的特徵值。在另一方面我們也要注意，(5.3.7)式的定理只是充分條件，而非必要條件。亦即如果$A(t) + A^T(t)$的特徵值為正值時，不代表時變系統$\dot{x} = A(t)x$就是不穩定。以下例題剛好可以反映此一事實。

例題 5.3.3

考慮下列之變係數常微分方程式[3]

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + (2 + \sin t)x(t) = 0 \tag{5.3.11}$$

判斷其是否為一致性漸進穩定。首先我們利用(5.3.7)式的判斷準則，先將上式表成線性時變系統的形式，令$x_1 = x$，$x_2 = \dot{x}$，得到

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(2 + \sin t) & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Ax \tag{5.3.12}$$

計算$A + A^T$的特徵值如下:

$$|\lambda I-(A+A^T)|=0\rightarrow\begin{vmatrix}\lambda & 1+\sin t\\ 1+\sin t & \lambda+2\end{vmatrix}=0$$

求解得到$A+A^T$的特徵值為

$$\lambda^2+2\lambda-(1+\sin t)^2=0\rightarrow\lambda=-1\pm\sqrt{1+(1+\sin t)^2}$$

發現有一正根，有一負根，不滿足(5.3.7)式的判斷條件$\lambda_i(A(t)+A^T(t))<0$。然則此一條件僅是充分條件，條件不滿足並不表示系統就是不穩定。

注意導致條件(5.3.7)的 Lyapunov 函數為$V(x)=x^Tx$，所以我們只能說此一 Lyapunov 函數無法確認系統(5.3.12)式的穩定性。有可能存在其他形式的 Lyapunov 函數可使得(5.3.12)式為穩定。我們嘗試另一種可能的 Lyapunov 函數如下:

$$V(x_1,x_2,t)=x_1^2+\frac{x_2^2}{2+\sin t}\tag{5.3.13}$$

容易看到此一 Lyapunov 函數為二個正定函數所包圍:

$$x_1^2+x_2^2/3\le V(x,t)\le x_1^2+x_2^2\tag{5.3.14}$$

因此V滿足正定及 decrescent 的條件。其次對(5.3.13)式取對時間t的微分，得到

$$\dot{V}(x,t)=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}\dot{x}=\frac{-x_2^2\cos t}{(2+\sin t)^2}+2x_1\dot{x}_1+\frac{2x_2\dot{x}_2}{2+\sin t}$$

將(5.3.12)式中的$\dot{x}_1$與$\dot{x}_2$代入上式化簡，得到

$$\begin{aligned}\dot{V}(x,t)&=\frac{-x_2^2\cos t}{(2+\sin t)^2}+2x_1x_2+\frac{2x_2}{2+\sin t}[-x_2-(2+\sin t)x_1]\\&=-\frac{4+2\sin t+\cos t}{(2+\sin t)^2}x_2^2\le 0\end{aligned}\tag{5.3.15}$$

結合(5.3.14)式與(5.3.15)式，我們證實(5.3.12)式的系統具有一致性的 Lyapunov 穩定性，雖然特徵值條件$\lambda_i(A(t)+A^T(t))<0$在此系統中並沒有被滿足。數值計算結果如圖 5.3.3 所示，相平面軌跡圖以螺旋的方式進入原點，顯示原點為一漸進穩定的平衡點，而且是全域穩定。(b)、(c)、(d)三子圖顯示在三個不同初始時間下，$x_1(t)$與$x_2(t)$對時間的響應圖。結果說明系統的收斂性與t_0無關，代表該系統具有一致性穩定。圖 5.3.3b 同時展示$x_1(t)$與$x_2(t)$的遞減趨勢與指數函數$e^{-t/2}$相同，此說明該系統的遞減速度為$1/2$。

□

本例題再一次說明條件$\lambda_i(A(t)+A^T(t))<0$只是系統穩定的一個充分條件，當此條件不滿足時，我們無法獲得任何結論，必須再配合其他測試穩定性的條件，才能知道系統穩定與否。

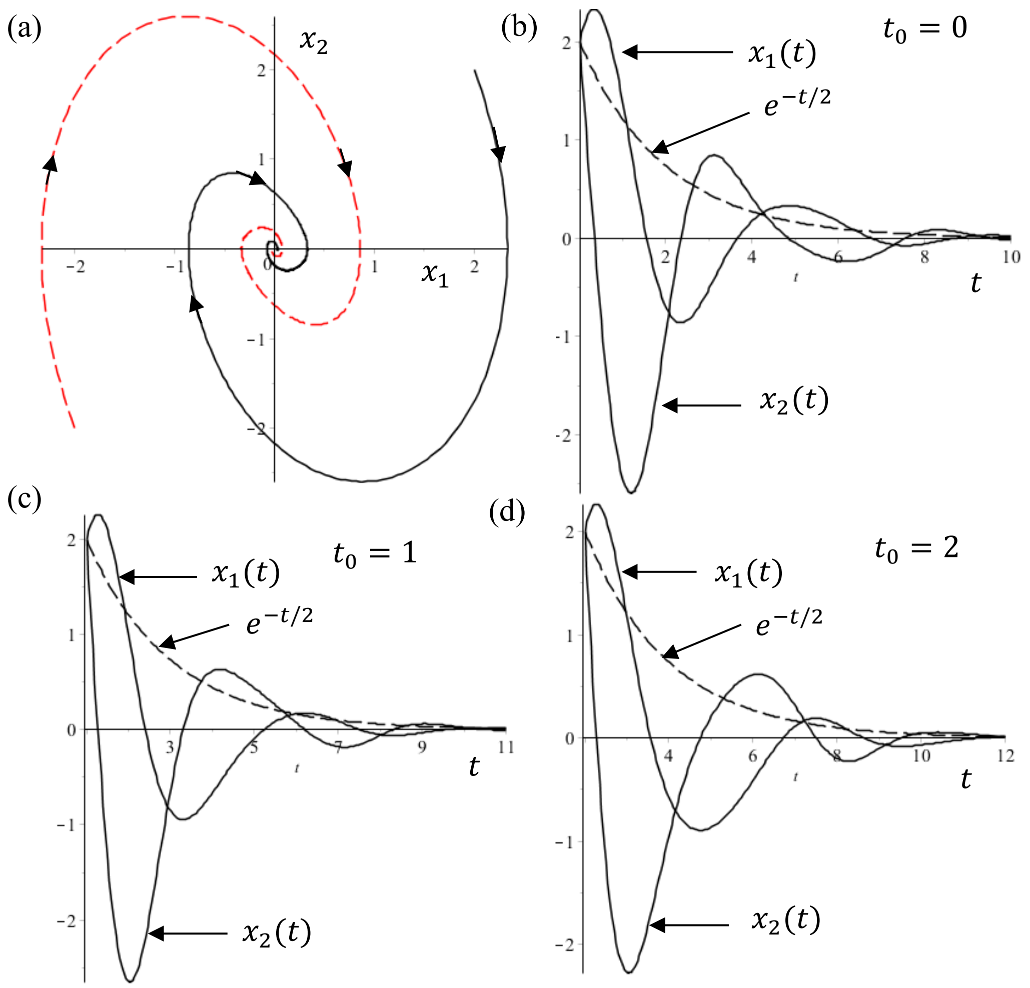

圖 5.3.3 範例 5.3.3 中的相平面軌跡圖以螺旋的方式進入原點，顯示原點為一漸進穩定的平衡點，而且是全域穩定。(b)、(c)、(d)三圖顯示在三個不同初始時間下，$x_1(t)$與$x_2(t)$對時間的響應圖。結果顯示系統的收斂性與t_0無關，代表該系統具有一致性穩

對於線性非時變系統$\dot{x} = Ax$的穩定性判斷而言，除了測試矩陣A的特徵值正負外，也可透過 Lyapunov 矩陣方程式$PA + A^T P + Q = 0$的求解，由P、Q矩陣的正定性來確認系統的穩定性。基於相同的道理，對於線性時變系統$\dot{x} = A(t)x$而言，除了特徵值$\lambda_i(A(t) + A^T(t)) < 0$的判斷外，也有類似 Lyapunov 矩陣方程式的判斷準則。

- **線性時變系統穩定定理 2(充分條件)**

線性時變系統$\dot{x} = A(t)x$在$x = 0$為一致漸進穩定，若存在P滿足

$$0 < C_1 I \le P(t) \le C_2 I，\forall t \ge 0 \tag{5.3.16a}$$

$$-\dot{P}(t) = P(t)A(t) + A^T(t)P(t) + Q(t) \tag{5.3.16b}$$

其中$Q(t)$為連續，對稱且正定之矩陣：

$$Q(t) \ge C_3 I > 0 \tag{5.3.17}$$

(5.3.16b)稱為時變 Lyapunov 矩陣方程式。當$P(t)$達到穩態時，$P(t) \to P$，此時$\dot{P} = 0$，則(5.3.16b)式即趨近於非時變 Lyapunov 矩陣方程式$PA + A^T P + Q = 0$。

證明：

可取 Lyapunov 函數如下

$$V(t,x) = x^T P(t)x \quad (5.3.18)$$

對(5.3.16a)式從左、右側各乘以x^T及x，可得

$$V_0(x) = C_1 x^T x \le V(t,x) \le C_2 x^T x = V_1(x) \quad (5.3.19)$$

故知$V(t,x)$為正定且 decrescent，且$V(t,x)$為徑向無界(radially unbounded)，因為當$x \to \infty$時，$\alpha(x) \to \infty$。現在只剩下$\dot{V} < 0$之證明：

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,x) &= x^T \dot{P}(t)x + x^T P(t)\dot{x} + \dot{x}^T P(t)x \\ &= x^T\left[\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t)\right]x \\ &= -x^T Q x \le -C_3\|x\|_2^2 < 0\end{aligned} \quad (5.3.20)$$

綜合以上各點知，滿足(5.2.10)之線性時變系統$\dot{x} = A(t)x$在$x = 0$處為(全域)漸進一致穩定。

□

- **線性時變系統穩定定理 3(充分條件)**

線性時變系統$\dot{x} = A(t)x$在$x = 0$處為指數穩定，若

$$\lambda_i\big(A(t)\big) < 0，\forall t \ge 0 \quad (5.3.21)$$

且

$$\int_0^\infty A^T(t)\,A(t)dt < \infty \quad (5.3.22)$$

□

- **線性時變系統穩定定理 4(充分必要條件)**

線性時變系統$\dot{x} = A(t)x$在$x = 0$為全域一致漸進穩定，若且唯若$A(t)$之傳輸矩陣$\Phi(t,t_0)$滿足

$$\|\Phi(t,t_0)\| \le Ke^{-\gamma(t-t_0)}，K,\gamma > 0，\forall t \ge t_0 \ge 0$$

(5.3.23)

□

其中傳輸矩陣$\Phi(t,t_0)$定義成$x(t) = \Phi(t,t_0)x(t_0)$。當$A(t) = A$是常數矩陣時，傳輸矩陣即化成以矩陣為次方的指數函數:$\Phi(t,t_0) = e^{A(t-t_0)}$。

- **線性時變系統小擾動定理**

在大部分的情形下，一個系統中的時變動態$A_2(t)$相對於非時變動態A_1而言，可視為是一微小的擾動，而將其表為

$$\dot{x}(t) = (A_1 + A_2(t))x \quad (5.3.24)$$

其中A_1為常數矩陣且$\lambda_i(A_i) < 0$(即A_1代表穩定的非時變系統)，此時若滿足以下兩條件：

(a) 當$t \to \infty$時，$A_2(t) \to 0$ (5.3.25a)

(b) $\int_0^\infty \|A_2(t)\|\,dt < \infty$ (5.3.25b)

則微擾系統(5.2.18)為全域指數穩定。

□

例題 5.3.4

考慮與例題 5.2.2 相同的之時變系統:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) - e^{-2t}x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t)\end{aligned} \tag{5.3.26}$$

將之重新表成如(5.3.24)式的形式:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix}-1 & 0 \\ 1 & -1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & -e^{-2t} \\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} = (A_1 + A_2(t))x$$

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix}-1 & 0 \\ 1 & -1\end{bmatrix}, A_2(t) = \begin{bmatrix}0 & -e^{-2t} \\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

故求得A_1的特徵值為$\lambda(A_1) = -1 < 0$(重根)，而$A_2(t)$則滿足(5.3.25)式的二個條件:

(a) $A_2(t) = \begin{bmatrix}0 & -e^{-2t} \\ 0 & 0\end{bmatrix} \to 0, t \to \infty,$

(b) $\int_0^{\infty}\|A_2(t)\|\,dt = \int_0^{\infty}\left\|\begin{bmatrix}0 & -e^{-2t} \\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\|dt = \left\|\begin{bmatrix}0 & -1/2 \\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\| < \infty$

因此根據上述的小擾動定理，(5.3.26)式的系統為全域漸進穩定。

□

對於(5.3.26)式的時變系統，我們曾在例題 5.2.2、例題 5.3.2、例題 5.3.4 中，分別以不同的方法判斷其穩定性，均得到相同的結論:該系統為全域性一致漸進穩定。上面所提到的判斷時變系統穩定性的各種定理，大部分只是充分條件，每種定理只能適用於某類型的時變系統。對於給定的時變系統，如果 A 定理無法判斷其穩定性，就要改用 B 定理試試看。如果測試過各種定理後，仍無法判斷其穩定性，建議改採數值計算法直接求解該時變系統，畫出相平面(或相空間)軌跡，從軌跡的變化及走向判斷平衡點是否為穩定?是否為全域性?是否為一致性?是否為指數遞減?如果數值法確認系統具有某種形式的穩定性，則學理性的證明應可找得到。

表面上看起來似乎有許多定理可以判斷時變系統的穩定性，然而這些定理實際上都是由 Lyapunov 直接定理所推導出來的，而 Lyapunov 直接定理的核心步驟就是 Lyapunov 函數的選擇。關於這一點，最有系統的方法即是第 4.3 節所介紹的可變梯度法。在下面的例題中，我們將說明如何用可變梯度法決定時變系統的 Lyapunov 函數。

例題 5.3.5

考慮時變系統[6]

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ -\frac{1}{t+1} & -10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} = Ax, t \geq 0 \tag{5.3.27}$$

依據可變梯度法的原則，第一步驟是先選擇梯度的形式:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} = \begin{bmatrix}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2\end{bmatrix} \tag{5.3.28}$$

此時$\dot{V}$可寫成

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)x_2 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)\left(-\frac{1}{t+1}x_1 - 10x_2\right) \tag{5.3.29}$$

先設定$a_{12} = a_{21} = 0$，則有

$$\dot{V} = a_{11}x_1x_2 + a_{22}x_2\left(-\frac{1}{t+1}x_1 - 10x_2\right)$$

觀察上式為了使$\dot{V} < 0$，進一步設定$a_{11} = 1$，$a_{22} = t + 1$，此時$\dot{V}$化成

$$\dot{V} = -10(t+1)x_2^2 < 0, \forall t \ge 0 \tag{5.3.30}$$

$\dot{V} < 0$的條件滿足後，其次決定函數$V(x,t)$的形式。將所選擇的a_{ij}代入(5.3.28)式，得到

$$\nabla V = \begin{bmatrix} x_1 \\ (t+1)x_2 \end{bmatrix} \tag{5.3.31}$$

再進行線積分的動作求得$V(x,t)$:

$$\begin{aligned} V(x,t) &= \int dV = \int \nabla V \cdot dx = \int_0^{x_1} x_1 dx_1 + \int_0^{x_2} (t+1)x_2 dx_2 \\ &= \frac{1}{2}\left[x_1^2 + (t+1)x_2^2\right] > 0, \forall t \ge 0 \end{aligned} \tag{5.3.32}$$

所得到的 Lyapunov 函數$V(x,t)$滿足正定的條件，而其對時間的全微分為

$$\dot{V} = x_1\dot{x}_1 + \frac{1}{2}x_2\dot{x}_2 + (t+1)x_2\dot{x}_2 = -(10t + 9.5)x_2^2 < 0, \forall t \ge 0 \tag{5.3.33}$$

由於$V > 0$且$\dot{V} < 0$，故可判斷系統(5.3.27)為漸進穩定。不過在上述的推導過程中，細心的讀者會發現一個不相合的地方，亦即(5.3.30)式的$\dot{V}$與(5.3.33)式的$\dot{V}$有一點點的不同，到底哪一個所表示的$\dot{V}$才正確呢?(5.3.30)式的$\dot{V}$來自於(5.3.29)式，而(5.3.29)式的$\dot{V}$表示式並不完整，正確的$\dot{V}$應如(5.1.11)式所示:

$$\dot{V} = \frac{dV(x,t)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} \tag{5.3.34}$$

(5.3.29)式少考慮了$\partial V/\partial t$一項。因此(5.3.29)式或(5.3.30)式的結果只能說是一種近似。但這不影響最後的穩定性判斷，因為 Lyapunov 函數的解本就不存在標準答案，只要由(5.3.29)式出發，所得到的V可滿足$V > 0$且$\dot{V} < 0$的條件，如(5.3.32)式及(5.3.34)式所示，則可變梯度法的使用目的就達到了。至於我們為何要特意省略(5.3.34)式中的$\partial V/\partial t$一項，這也有其背後的道理。可變梯度法的原始精神是透過梯度$\nabla V = \partial V/\partial x$的指定，從而決定$\dot{V} = (\partial V/\partial x)\dot{x}$，再經由積分的過程決定$V$，然而這樣的過程並不適用於時變系統。從(5.3.34)式可以看到，指定V對x的偏微分$\nabla V = \partial V/\partial x$並不能完全決定$\dot{V}$，還要指定$V$對$t$的偏微分$\partial V/\partial t$才行。但是$V$對$t$的變化相當複雜且多樣化，無法事先預測指定其可能的形式。所以較可行的做法是在(5.3.34)式中，先忽略掉$\partial V/\partial t$這一項，然後再積分決定V。如此得到的V雖然只是一種近似解，但也是V的眾多選擇的其中之一，只要它能滿足$V > 0$且$\dot{V} < 0$的條件，就足以證明原時變系統為穩定了。能夠找到滿足條件的V才是最重要，至於V是用猜的，還是用近似法得到的，這中間的過程並不是那麼重要。

5.4 非線性時變系統的穩定性

在第四章所提到的 Lyapunov 間接定理中，對於非線性非時變系統$\dot{x} = f(x)$的區域穩定性，吾人可以透過其線性化系統$\dot{x} = Ax$的穩定性，來加以判斷；也就是說，透過A的特徵值的正負，就可以知道$\dot{x} = f(x)$在平衡點附近的穩定性。這一方法也可以適用於非線性時變系統$\dot{x} = f(x,t)$；亦即透過線性時變系統

$$\dot{x} = A(t)x, A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\Big|_{x=0} \tag{5.4.1}$$

之穩定性來推斷$\dot{x} = f(t,x)$之穩定性。而判斷上式穩定性的法則，吾人已在上一節介紹過。

第一步要先進行非線性時變系統的線性化，考慮

$$\dot{x} = f(t,x)，f: n \times 1，x: n \times 1 \tag{5.4.2}$$

若函數f滿足下列二條件：

(1) $f: [0,\infty) \times D \to R^n$，在範圍$D = \{x \in R^n | \|x\|_2 < r\}$之內，為連續可微。

(2) Jacobian 矩陣$\partial f / \partial x$在t內為有界且連續且一致，亦即

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right\|_2 \leq K，\forall x \in 0，\forall t \geq 0 \tag{5.4.3a}$$

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x_1) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_2)\right\|_2 \leq l\|x_1 - x_2\|_2，\forall x_1, x_2 \in D，\forall t \geq 0 \tag{5.4.3b}$$

則$\dot{x} = f(t,x)$可以線性化如下：

$$f(t,x) = f(t,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(t,z)x \tag{5.4.4}$$

其中z為連接0和x線段上之任一點。又因設$x = 0$為其平衡點，故知$f(t,0) \equiv 0$，$\forall t \geq 0$。現將(5.4.4)式改寫如下：

$$\begin{aligned} f(t,x) &= \frac{\partial f}{\partial x}(t,z)x \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(t,0)x + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(t,z) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,0)\right]x \\ &= A(t)x + g(t,x) \end{aligned} \tag{5.4.5}$$

其中$g(t,x)$根據條件(5.4.3b)，需滿足

$$\|g(t,x)\|_2 \leq \left\|\frac{\partial f}{\partial x}(t,z) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,0)\right\|_2 \cdot \|x\|_2 \leq l\|x\|^2 \tag{5.4.6}$$

- **非線性時變系統穩定定理**

若線性時變系統$\dot{x} = A(t)x$，其中$A(t) = \partial f / \partial x(t,0)$在$x = 0$處為一致漸進穩定，則原來之非線性系統$\dot{x} = f(t,x)$在$x = 0$處亦為一致漸進穩定。

證明：

設$\dot{x} = A(t)x$為穩定，則由上一節的討論知，存在P滿足

$$-\dot{P}(t) = P(t)A(t) + A^T(t)P(t) + Q(t) \tag{5.4.7a}$$

其中

$$0 < C_1 I \leq P(t) \leq C_2 I, 0 < C_3 I \leq Q(t)，\forall t \geq 0 \tag{5.4.7b}$$

前已證明$x^T P(t)x$為$\dot{x} = A(t)x$之 Lyapunov 函數，而實際上吾人可進一步證明$V(t,x) = x^T P(t)x$亦為$\dot{x} = f(t,x)$之 Lyapunov 函數，因為其滿足

(a) V為正定且 decrescent：由(5.4.7b)式可得，$0 < C_1\|x\|^2 \leq V(t,x) \leq C_2\|x\|^2$。

(b) $\dot{V} < 0$：

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,x) &= x^T P(t) f(t,x) + f^T(t,x) P(t) x + x^T \dot{P}(t) x \\ &= x^T\left[P(t)A(t) + A^T(t)P(t) + \dot{P}(t)\right]x + 2x^T P(t) g(t,x) \\ &= -x^T Q x + 2x^T P(t) g(t,x)\end{aligned}$$

代入(5.4.7b)式的條件得

$$\dot{V} \le -C_3\|x\|_2^2 + 2C_2 l\|x\|^3 \le -(C_3 - 2C_3 l\rho)\|x\|^2, \forall \|x\| < \rho$$

因此若取$\rho < C_3/(2C_2 l)$，則有$\dot{V}(t,x) < 0$。結合以上條件知，若$\dot{x} = A(t)x$為穩定，則非線性時變系統$\dot{x} = f(t,x)$在$x = 0$處，為一致漸進穩定。

□

5.5 學習評量

5.5.1 考慮一個 RLC 電路

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{L(t)}x_2, \dot{x}_2 = -\frac{1}{C(t)}x_1 - \frac{R(t)}{L(t)}x_2$$

其中$L(t)$、$C(t)$、$R(t)$均為時間之連續可微分函數，且滿足下列不等式

$$K_1 \le L(t) \le K_2，K_3 \le C(t) \le K_4，K_5 \le R(t) \le K_6，\forall t \ge 0$$

嘗試下列之 Lyapunov 函數

$$V(x,t) = \left[R(t) + \frac{2L(t)}{R(t)C(t)}\right]x_1^2 + 2x_1x_2 + \frac{2}{R(t)}x_2^2$$

(a)證明$V(x,t)$為正定且 decrescent。

(b)求出$\dot{L}(t)$、$\dot{C}(t)$、$\dot{R}(t)$所要滿足的條件，使得系統在原點處可以保證為指數穩定。

5.5.2 有一非線性時變系統

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + \alpha(t)x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\alpha(t)x_1 - x_2^3$$

其中$\alpha(t)$是一連續可微函數。

(a)證明原點是全域一致漸進穩定。

(b)檢驗原點是否為指數穩定。

5.5.3 考慮非線性系統

$$\dot{x}_1 = -x_1 + (x_1^2 + x_2^2)\sin t$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 + (x_1^2 + x_2^2)\cos t$$

證明此系統在原點處為指數穩定，並估計吸引區(region of attraction)的區域。

5.5.4 有一單擺受到一隨時間的變化的摩擦力的作用，其運動方程式可表成

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\sin x_1 - g(t)x_2$$

其中$g(t)$是一時間之連續可微函數，並滿足下列條件

$$0 < a < \alpha \le g(t) \le \beta < \infty，\dot{g}(t) \le \gamma < 2$$

茲採用下列之 Lyapunov 函數

$$V(x,t) = \frac{1}{2}(a\sin x_1 + x_2)^2 + [1 + ag(t) - a^2](1 - \cos x_1)$$

(a)證明$V(t,x)$是正定且 decrescent。

(b)證明$\dot{V} \le -(\alpha - a)x_2^2 - a(2-\gamma)(1-\cos x_1) + O(\|x\|^3)$，其中$O(\|x\|^3)$表某些項，其值小於$K\|x\|^3$。

(c)證明原點為一致漸進穩定。

5.5.5 考慮如下之非線性時變系統

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - (1 + b\cos t)x_2$$

試求b^*的值，使得對任意$|b| < b^*$，上述系統對原點恆為指數穩定。

5.5.6 對於一階的線性時變系統

$$\dot{x}(t) = -a(t)x(t)$$

其解可表為

$$x(t) = x(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\right)$$

其穩定性是由函數$a(t)$所決定。不同的$a(t)$，系統的穩定性也不同。試由 5.2 節的定理證明以下事實：

(1)Lyapunov 穩定：$a(\tau) \ge 0$，$\forall \tau \ge t_0$。

實例：$\dot{x} = -\frac{x}{(1+t)^2}$

(2)漸進穩定：$\int_{t_0}^{\infty} a(\tau)\,d\tau = +\infty$

實例：$\dot{x} = -\frac{x}{1+t}$

(3)指數穩定：$\forall \gamma > 0$，存在T使得$\int_{t_0}^{t_0+T} a(\tau)\,d\tau \ge \gamma$，其中$\gamma$為收斂速率。

實例：$\dot{x} = -tx$

5.5.7 考慮如下的線性時變系統

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \alpha(t) \\ -\alpha(t) & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

其中$\alpha(t)$是任意的連續函數。證明該系統在原點處恆為指數穩定。

5.5.8 考慮如下的線性時變系統

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & g(t) \\ g(t) & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

其中$g(t)$為連續可微函數且滿足條件$|g(t)| \le 1$。證明該系統在原點處為一致漸進穩定。

本章文獻與註解

關於時變系統的 Lyapunov 穩定性分析在以下二本較早期的專書中有詳盡的討論:

[1] W. Hahn, Stability of Motion, Springer-Verlag, New York, 1967.

[2] N. Rouche, P. Habets, M. Laloy, Stability Theory by Lyapunov’s Direct Method, Springer-

Verlag, New York, 1977.

在 1990 年代以後的專書中，下列幾本均另闢有專章討論時變系統的 Lyapunov 穩定性:

[3] M. Vidyasagar, Nonlinear Systems Analysis, 2nd edition, chapter 5, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993。本章例題 5.3.3 中的時變系統引用自該書第 5 章的例題。

[4] H. K. Khalil, Nonlinear Systems, 2nd edition, chapter 3, Prentice Hall, New Jersey, 1996。本章的例題 5.1.2、例題 5.2.3、例題 5.3.1 及學習評量中的題目大部分取材自該書。

[5] J. J. E. Slotine, W. Li, Applied Nonlinear Control, chapter 4, Pearson, 2005。本章中的例題 5.1.3、例題 5.2.2、例題 5.2.4 及圖 5.2.2 取材自該書。

[6] K. Ogata, Modern Control Engineering, Prentice Hall, 1970。本章中的例題 5.3.5 取材自該書。