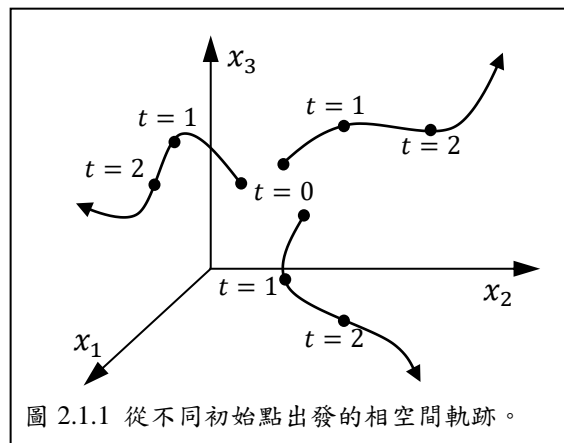


Chapter 2 相平面(Phase-Plane)分析

由狀態變數 x_1, x_2, \dots, x_n 所張成的空間稱為狀態空間(state space)或相空間(phase space)。在給定初始條件下，非線性方程式

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), i = 1, 2, \dots, n$$

的解 $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ ，在每個瞬間 t 對應到狀態空間的一個座標點。隨著時間 t 的增加，這些座標點會在狀態空間中連成一條曲線，此曲線即稱為狀態空間(相空間)軌跡，參見圖 2.1.1。狀態空間軌跡的特點是不會自我相交，已於 1.4 節討論過。當 $n = 2$ 時，相空間即變成相平面，相平面是一種圖解法用以分析二階(且僅適用於二階)線性或非線性系統的動態響應(包含穩定度與性能表現)。在電腦還未出現前，非線性系統的分析相當困難，大部分的系統均無法求解，只能針對低階系統以手繪圖的方式求出近似解，此即現在所看到的相平面分析法，其角色有點類似線性系統中的根軌跡法。



電腦出現後，以手繪製相平面軌跡的方法已無甚價值，但以電腦繪製相平面或相空間軌跡仍是非線性系統分析不可欠缺的手段。因為它不需要甚麼系統理論基礎，單單是觀察相平面軌跡的走向(例如利用 Matlab 繪製)，我們即可判斷非線性系統是否穩定，是否有混沌行為，是否存在極限圓。所以相平面或相空間軌跡可說是電腦輔助分析非線性系統的利器，而且簡單易學。

描述函數(describing function，將於下一章提到)分析法與相平面分析法，此二種分析法的比較如下：

- 描述函數分析法**：類似線性系統的轉移函數，屬於頻域響應法，適用於任意階的非線性系統，但僅是一種近似方法，會產生預測上的誤差。
- 相平面分析法**：傳統上只適用於二階之非線性系統，但透過電腦輔助計算，可求出任意階數非線性系統的解 $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ 隨時間的變化情形。不過限於空間軌跡只能顯示三個維度，所以必須從 n 個變數中，每次選出 3 個變數對應到三個垂直的座標軸來畫圖。

2.1 相平面軌跡的定義

相平面軌跡其實在高中物理課程中已學過，簡單的說，它就是位置-速度圖(S-V 圖)。只

是以前學的位置-速度都是線性關係，這裡要介紹的是一般性的位置-速度關係。對於任意的二階非線性系統，將其表成如下的一般形式：

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0 \quad (2.1.2)$$

或寫成狀態空間方程式，令 $x_1 = x$ 、 $x_2 = \dot{x}$ ，則上式可以寫成：

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -f(x_1, x_2) \quad (2.1.3)$$

其中 x_1 是位置， x_2 是速度，所以 $x_1 - x_2$ 平面上的軌跡圖就是位置相對於速度的變化軌跡，或稱為相平面圖(phase-plane portrait)，如圖 2.1.2 所示。對於三階之非線性方程式，則令三個垂直座標為 $x_1 = x$ 、 $x_2 = \dot{x}$ 、 $x_3 = \ddot{x}$ ，再畫出座標點 $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ 隨時間變化的軌跡，即得相對應之相空間軌跡圖。

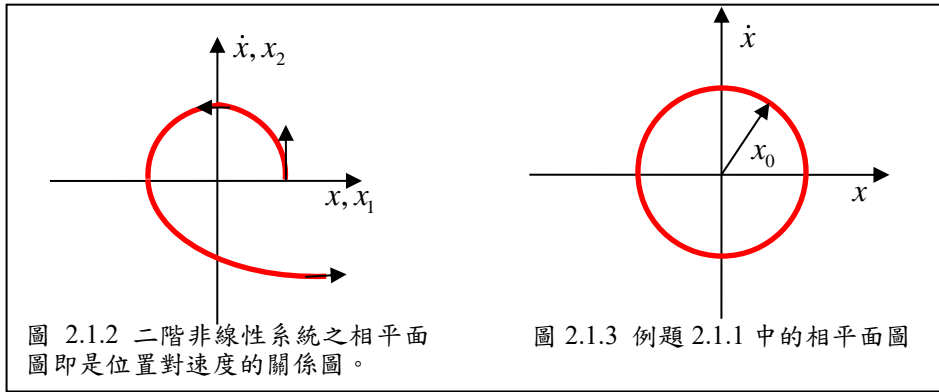


圖 2.1.2 二階非線性系統之相平面圖即是位置對速度的關係圖。

圖 2.1.3 例題 2.1.1 中的相平面圖

例題 2.1.1：

試畫出 $\ddot{x} + x = 0$ 之相平面軌跡圖，初始條件為 $x(0) = x_0$ 、 $\dot{x}(0) = 0$ 。此方程式的解可馬上寫出為

$$x(t) = x_0 \cos t, \dot{x}(t) = -x_0 \sin t \quad (2.1.4)$$

消去 t 可得 x 和 \dot{x} 之關係式

$$x^2 + \dot{x}^2 = x_0^2 \rightarrow x^2 + y^2 = x_0^2 \quad (2.1.5)$$

圖形如圖 2.1.3 所示，相平面軌跡為一個圓。

相平面軌跡中雖然沒有直接顯示出時間變數，但透過速度的變化趨勢，仍可間接看出系統運動之方式以及穩定之情形，茲考慮下面例題。

例題 2.1.2：由相平面軌跡判斷穩定性

考慮一非線性系統之動態方程式如下

$$\dot{x} = -x + x^3 \rightarrow y = \dot{x} = -x + x^3 \quad (2.1.6)$$

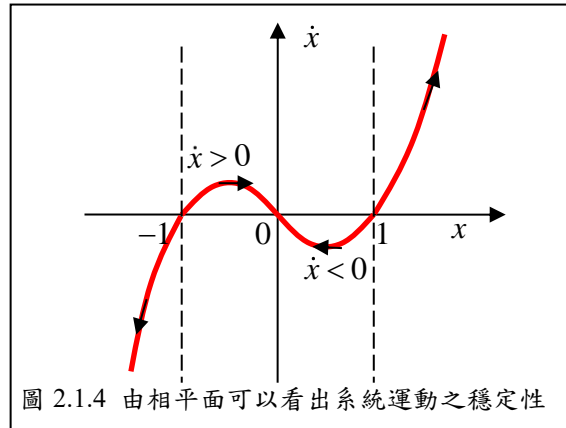
其相平面軌跡 $y(x)$ 如圖 2.1.4 所示。特別注意此軌跡上的箭頭方向，它是由 y 座標(亦即速度 \dot{x}) 的正負所決定。首先我們檢測(2.1.6)式的平衡點。令速度 $\dot{x} = -x + x^3 = 0$ ，得到三個平衡點： $x = 0$ ， $x = 1$ 及 $x = -1$ ，此三點即為相平面軌跡與 x 軸的交點，如圖 2.1.4 所示。我們可以由相平面軌跡的走向，判斷這三個平衡點的穩定性。

1. $0 < x < 1$ 區間內： $y = \dot{x} < 0 \rightarrow$ 速度為負代表 x 遞減，沿軌跡向左運動，漸漸趨近於原點。
2. $-1 < x < 0$ 區間內： $y = \dot{x} > 0 \rightarrow$ 速度為正代表 x 遞增，沿軌跡向右運動，漸漸趨近原點。

故知在 $-1 < x < 1$ 範圍內，軌跡都有向原點運動的趨勢，亦即原點是一穩定的平衡點。

3. $x > 1$ 區間內： $y = \dot{x} > 0 \rightarrow$ 速度為正代表 x 遞增，系統沿軌跡向右運動，離 $x = 1$ 越來越遠，故知 $x = 1$ 為不穩定的平衡點。
4. $x < -1$ 區間內： $y = \dot{x} < 0 \rightarrow$ 速度為負代表 x 遞減，系統沿軌跡向左運動，離 $x = -1$ 越來越遠，故知 $x = -1$ 為不穩定的平衡點。

綜合以上各種情形，我們可以畫出系統沿相平面軌跡的運動方向如圖 2.1.4 之箭頭所示。



2.2 相平面軌跡的建構

2.2.1 解析法(analytical method)

解析法是相對於圖解法而言，是透過微分方程式的求解，而獲得相平面軌跡。對於任意二階微分方程式，可令 $x_1 = x$ ， $x_2 = \dot{x}$ ，而改寫成二個一階方程式的聯立：

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2), \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) \quad (2.2.1)$$

第一章已提過，平衡點就是滿足 $f_1(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2) = 0$ 的點，而相平面軌跡可用以判斷平衡點的穩定性。以解析的方法或數值的方法求解(2.2.1)式，可以求得 $x_1(t)$ 及 $x_2(t)$ ，然後再畫出 x_1 對時間 t 的變化曲線，此即所謂的 $s-t$ 圖，即位置-時間曲線圖；另外畫出 x_2 對時間 t 的變化曲線，此即所謂的 $v-t$ 圖，即速度-時間曲線圖。在 $s-t$ 圖及 $v-t$ 圖中，消去時間 t ，就是 $s-v$ 圖，亦即相平面軌跡圖。

既然時間不直接出現在相平面軌跡中，我們可以一開始就從(2.2.1)式中，將時間 t 消去，而得到

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} \quad (2.2.2)$$

然後再畫出 $x_1 - x_2$ 的關係曲線，即是所要求的相平面軌跡。如此可以避開求解 $x_1(t)$ 及 $x_2(t)$ 的中間過程。

例題 2.2.1：

畫二階線性系統 $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$ 的相平面軌跡圖，初始條件為 $x(0) = 0$ 、 $\dot{x}(0) = 10$ 。令 $x_1 = x$ ， $x_2 = \dot{x}$ ，則原方程式可改寫成

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \quad (2.2.3)$$

將上面二式相除，消去 dt 而得到

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_1+x_2}{x_2} \quad (2.2.4)$$

為求解(2.2.4)式，並令 $x_1(0) = 0$ 及 $x_2(0) = 10$ ，得到相平面 $x - y$ 軌跡如圖 2.2.1 所示。

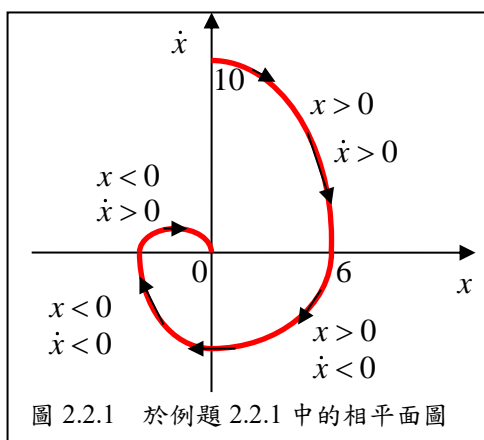


圖 2.2.1 於例題 2.2.1 中的相平面圖

例題 2.2.2：

以二種方法畫二階線性系統 $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ 的相平面軌跡。第一種方法是直接求解線性微分方程式而得

$$x(t) = A \cos(\omega t + \alpha) \Rightarrow \dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \alpha) \quad (2.2.5)$$

然後再消去 t 得到 x 與 \dot{x} 的關係式

$$\dot{x}^2/\omega^2 + x^2 = A^2 \Rightarrow y^2/\omega^2 + x^2 = A^2 \quad (2.2.6)$$

故知相平面軌跡是一橢圓。第二種方法是先由原來的微分方程式消去 dt 之項。令 $x_1 = x$ ， $x_2 = \dot{x}$ ，則原方程式可改寫成

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 \quad (2.2.7)$$

二式相除而消去 dt 得到

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\omega^2 \frac{x_1}{x_2} \Rightarrow x_2 dx_2 + \omega^2 x_1 dx_1 = 0$$

再積分得

$$x_1^2 + x_2^2/\omega^2 = A^2 \quad (2.2.8)$$

此和(2.2.6)式的結果一致。對於線性系統而言，因為 $x_1(t)$ 及 $x_2(t)$ 的求解很容易，所以以上二種求相平面軌跡的方法差別不大。但對於非線性系統而言， $x_1(t)$ 及 $x_2(t)$ 通常沒有解析解，無法將之表成時間 t 的顯函數，以致時間 t 的對消變成不可能。此時唯一可行的方法是透過(2.2.2)式，直接求解 x_1 與 x_2 的關係式。

2.2.2 圖解法(graphical methods)：

圖解法是電腦出現之前，以手繪製相平面軌跡的方法。最常用的圖解法是等斜率近似法(isocline method)。手繪軌跡極為費時，所以在畫圖之前，必先注意圖形有無對稱性，如此則只要畫一半甚至四分之一的圖即可。對於二階非線性系統(2.2.2)：

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} \quad (2.2.9)$$

將上式中之 x_2 改成 $-x_2$ ，而得到

$$\frac{-dx_2}{dx} = \frac{f_2(x_1, -x_2)}{f_1(x_1, -x_2)} \Rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{f_2(x_1, -x_2)}{f_1(x_1, -x_2)} \quad (2.2.10)$$

若(2.2.9)式的解對稱於 x_1 軸，則將式中之 x_2 改成 $-x_2$ ，所得之新方程式與原方程式應相同。比較(2.2.9)式與(2.2.10)式，可知對稱於 x_1 軸之條件為

$$\frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} = -\frac{f_2(x_1, -x_2)}{f_1(x_1, -x_2)} \quad (2.2.11)$$

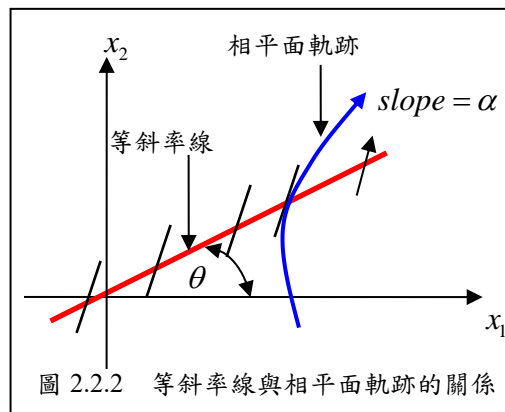
同理，若(2.2.9)式之曲線對稱於 x_2 軸，則將式中之 x_1 改成 $-x_1$ ，(2.2.9)式應不變，故得

$$\frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} = -\frac{f_2(-x_1, x_2)}{f_1(-x_1, x_2)} \quad (2.2.12)$$

知道軸的對稱性後，即可進行相平面軌跡的繪製。等斜率近似法(isocline method)畫軌跡圖是在相平面上，先畫出一些等斜率的背景曲線：

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} = \alpha = \text{constant} \quad (2.2.13)$$

所謂等斜率線就是滿足上式的所有 $x_1 - x_2$ 曲線，所以等斜率線不一定是直線。每指定一個斜率 α ，就可得到一條等斜率線。然後在此等斜率線上，畫上許多平行的短線段，這些短線段的斜率都是 α 。注意等斜率線一般都是曲線，所以是在曲線上畫許多平行的短線段。在某些特殊情形下，等斜率線可能是直線，此時要注意的是，斜率 α 指的是等斜率線上，那些平行短線段的斜率，而不是等斜率線本身的斜率。例如在圖 2.2.2 中，等斜率線本身的斜率是 $\tan\theta$ ，此值不等於平行短線的斜率 α 。



平行短斜線的功能是在導引相平面軌跡的走向。參考圖 2.2.2，當相平面軌跡和等斜率線交會時，其交會的角度要等於平行短線的斜角，也就是相平面軌跡於交點處，要相切於平行短線。一條等斜率線提供一個導引方向，所以等斜率線如果畫的越多，越密集，那就相當於處處都能指引相平面軌跡的走向，對於相平面軌跡的導引也就愈精確。

例題 2.2.3：

考慮線性常微分方程式 $\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = 0$ ，先將其表成二個一階方程式的聯立：

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2\xi\omega x_2 - \omega^2 x_1 \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

將二式相除，得到軌跡切線斜率的表示式

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-2\xi\omega x_2 - \omega^2 x_1}{x_2} = \alpha$$

其中令斜率 dx_2/dx_1 為常數 α ，而求得等斜率曲線方程式為

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{-\omega^2}{2\xi\omega + \alpha} = \tan\theta \quad (2.2.15)$$

此代表在相平面上，斜率為常數 α 之曲線是通過原點之直線，其斜角是 θ ，如圖 2.2.2 所示。現在出現了二種斜率， α 是相平面軌跡的斜率， $\tan\theta$ 是等斜率線的斜率，注意二者的不同。若取 $\xi = 0.5$ ， $\omega = 1$ ，則等斜率線的方程式為

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{-1}{\alpha + 1} = \tan\theta \quad (2.2.16)$$

- 軌跡切線斜率 $\alpha = -1$ 時， $\tan\theta = \infty$ ， $\theta = 90^\circ$ ，代表等斜率線是 x_2 軸，也就是說相軌跡通過 x_2 軸時，其切線斜率必須是 -1 ，如圖 2.2.3 所示。
- 軌跡切線斜率 $\alpha = \infty$ 時， $\tan\theta = 0$ ， $\theta = 0^\circ$ ，代表等斜率線是 x_1 軸，也就是說相軌跡通過 x_1 軸時，其切線斜率必須是 ∞ ，如圖 2.2.3 所示。
- 軌跡切線斜率 $\alpha = 0$ 時， $\tan\theta = -1$ ， $\theta = -45^\circ$ ，也就是說相軌跡通過斜角為 -45° 的直線時，其切線斜率必須是 0 (即水平)，如圖 2.2.3 所示。圖 2.2.3 佈滿了等斜率線，每一條線上都標示了斜率 α 。

設系統的初始值為 $x_1(0) = 0$ ， $x_2(0) = 10$ ，即 A 點。當系統動態從 A 出發後，以 -45° 的傾角外插(注意 -45° 是等斜率線在 y 軸上所規定的斜率)，當到達 $\alpha = -1.2$ 時，傾角又變成 $\tan^{-1}(-1.2)$ ，故在 $\alpha = -1$ 與 $\alpha = -1.2$ 間，曲線之平均斜率為 $(-1 - 1.2)/2 = -1.1$ 。因此可取 A 為起點，做斜率為 -1.1 的直線，設與 $\alpha = -1.2$ 的輻射線相交於 B 點，則 \overline{AB} 線段即為介於 $\alpha = -1$ 與 $\alpha = -1.2$ 之區間內，相平面軌跡的近似直線。

同理 \overline{BC} 線段之平均斜率為 $(-1.2 - 1.4)/2 = -1.3$ ，以此類推。如圖 2.2.3 所示，輻射線(即等斜率線)畫的越密，兩輻射線間之連接線越短，不但容易用手繪製，且平均斜率越接近真實斜率。但我們同時發現，後一個連接線段的位置取決於前一線段的位置，所以只要前面的連接線有一點小誤差，此誤差即會一直累積下去。

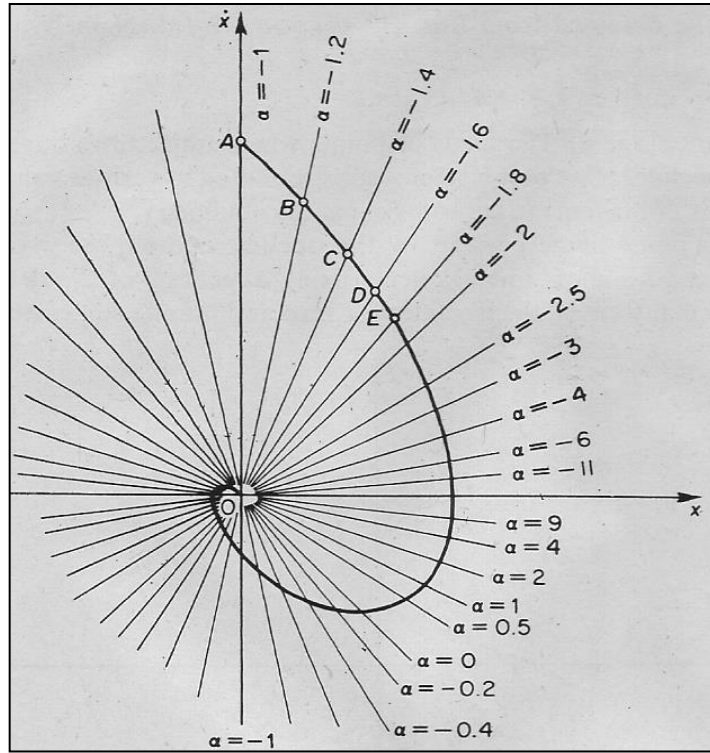


圖 2.2.3 以等斜率近似法得到相平面圖[7]。

例題 2.2.4：等斜率線不一定是直線

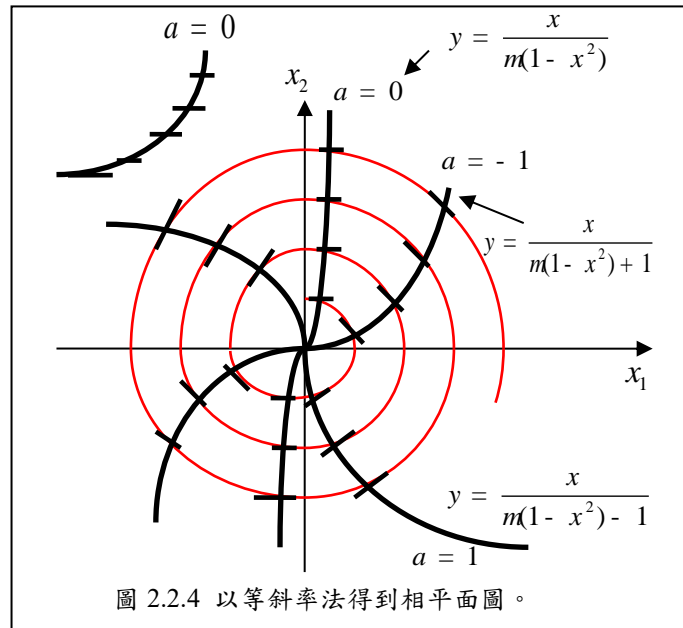
試以等斜率法畫二階非線性 Van Der pol 微分方程式 $\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$ 的相平面軌跡。首先列出等斜率曲線的方程式

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-\mu(x_1^2 - 1)x_2 - x_1}{x_2} = \alpha \quad (2.2.17)$$

再求解出 x_1 與 x_2 的關係式

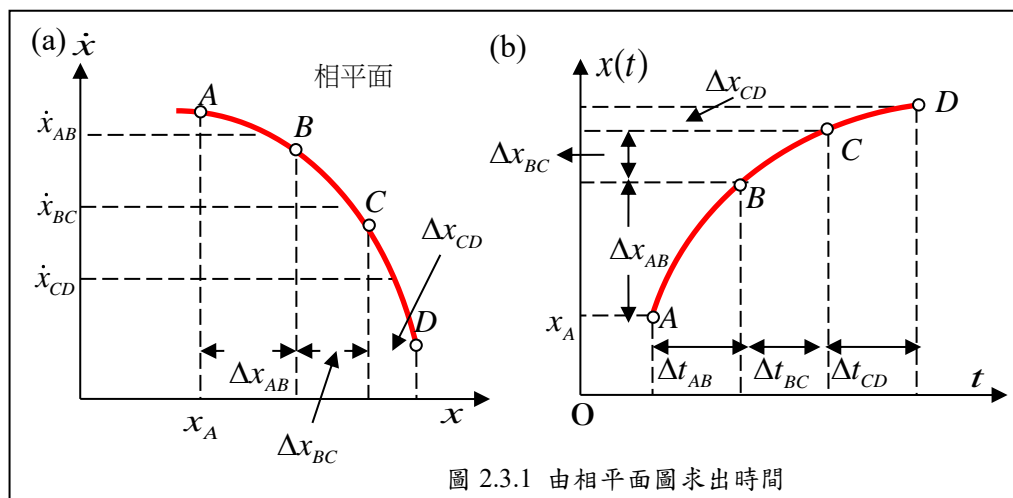
$$x_2 = \frac{x_1}{\mu(1 - x_1^2) - \alpha} \quad (2.2.18)$$

這是一個曲線方程式，說明等斜率線不一定是直線。其中斜率 $\alpha = 0$ 之等斜線方程式為 $x_2 = x_1/(\mu(1 - x_1^2))$ ；斜率 $\alpha = -1$ 之等斜線方程式為 $x_2 = x_1/(\mu(1 - x_1^2) + 1)$ ；斜率 $\alpha = 1$ 之等斜線方程式為 $x_2 = x_1/(\mu(1 - x_1^2) - 1)$ 。如圖 2.2.4 所示。



2.3 由相平面軌跡求時間

在相平面軌跡中，時間變數已被消除，所以圖形本身是靜態的，而非動態響應。不過時間 t 仍可間接求出，而在某些情況下求出 $x(t)$ 或 $\dot{x}(t)$ 是有必要的。主要求時間 t 的方法有二：



(1) 由 $\Delta t = \Delta x / \dot{x}$:

如圖 2.3.1a 中，欲求由A運動到B所需的時間 t_{AB} ，可先求A、B間之平均速度 Δt_{AB}

$$\dot{x}_{ave} = (v_A + v_B)/2 = (\dot{x}_A + \dot{x}_B)/2 \quad (2.3.1)$$

(A、B越接近， \dot{x}_{ave} 越接近真實 \dot{x})，而A、B間之距離 $\Delta x_{AB} = x_A - x_B$ ，故得

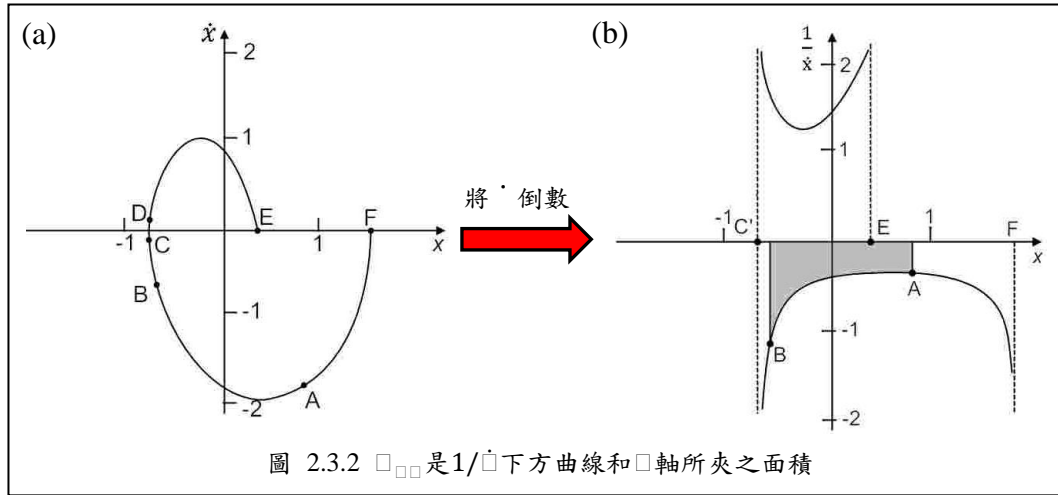
$$\Delta t_{AB} = \Delta x_{AB} / \dot{x}_{ave} \quad (2.3.2)$$

再畫出 Δx_{AB} 對 Δt_{AB} 之圖形如圖 2.3.1b 所示。此即高中物理所提到的，將位置-速度($s-v$ 圖)轉成位置-時間($s-t$ 圖)。

(2) 由 $t = \int (1/\dot{x}) dx$:

此乃因

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dt = \frac{dx}{\dot{x}} \Rightarrow t_2 - t_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\dot{x}} dx \quad (2.3.3)$$



若能畫出 $1/\dot{x}$ 相對於 x 之圖形，則 Δt 則代表 x_1 和 x_2 間之斜線面積。注意當 $\dot{x} = 0$ 時， $1/\dot{x} \rightarrow \infty$ 。於圖 2.3.2a 中有三點處於 $\dot{x} = 0$ ，即 C' 、 E 、 F 。在 C' 上方的點倒數後跑到 $+\infty$ ；而在下方的點倒數後跑到 $-\infty$ 。而 t_{AB} 是下方曲線和 x 軸所夾之面積，如圖 2.3.2b 所示。

2.4 平衡點附近的相軌跡

考慮二階非線性系統

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \quad (2.4.1)$$

若 (x_1^*, x_2^*) 為平衡點，則可設新變數 $\bar{x}_1 = x_1 - x_1^*$, $\bar{x}_2 = x_2 - x_2^*$ ，如此則對新座標 (\bar{x}_1, \bar{x}_2) 而言，平衡點在原點 $(0,0)$ 處。因此透過座標平移，吾人恒可設平衡點在 $(0,0)$ ，亦即在原點處，各階微分均為零： $f_1(0,0) = f_2(0,0) = 0$ 。現對(2.4.1)式在 $(0,0)$ 處，做泰勒級數展開得

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(0,0) + a_1(x_1 - 0) + a_2(x_2 - 0) + a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + g_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(0,0) + b_1(x_1 - 0) + b_2(x_2 - 0) + b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 + g_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

在平衡點附近， x_1 與 x_2 值很小，故可略去高次方項而得

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1x_1 + a_2x_2 \\ \dot{x}_2 &= b_1x_1 + b_2x_2 \end{aligned} \Rightarrow \ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0 \quad (2.4.3)$$

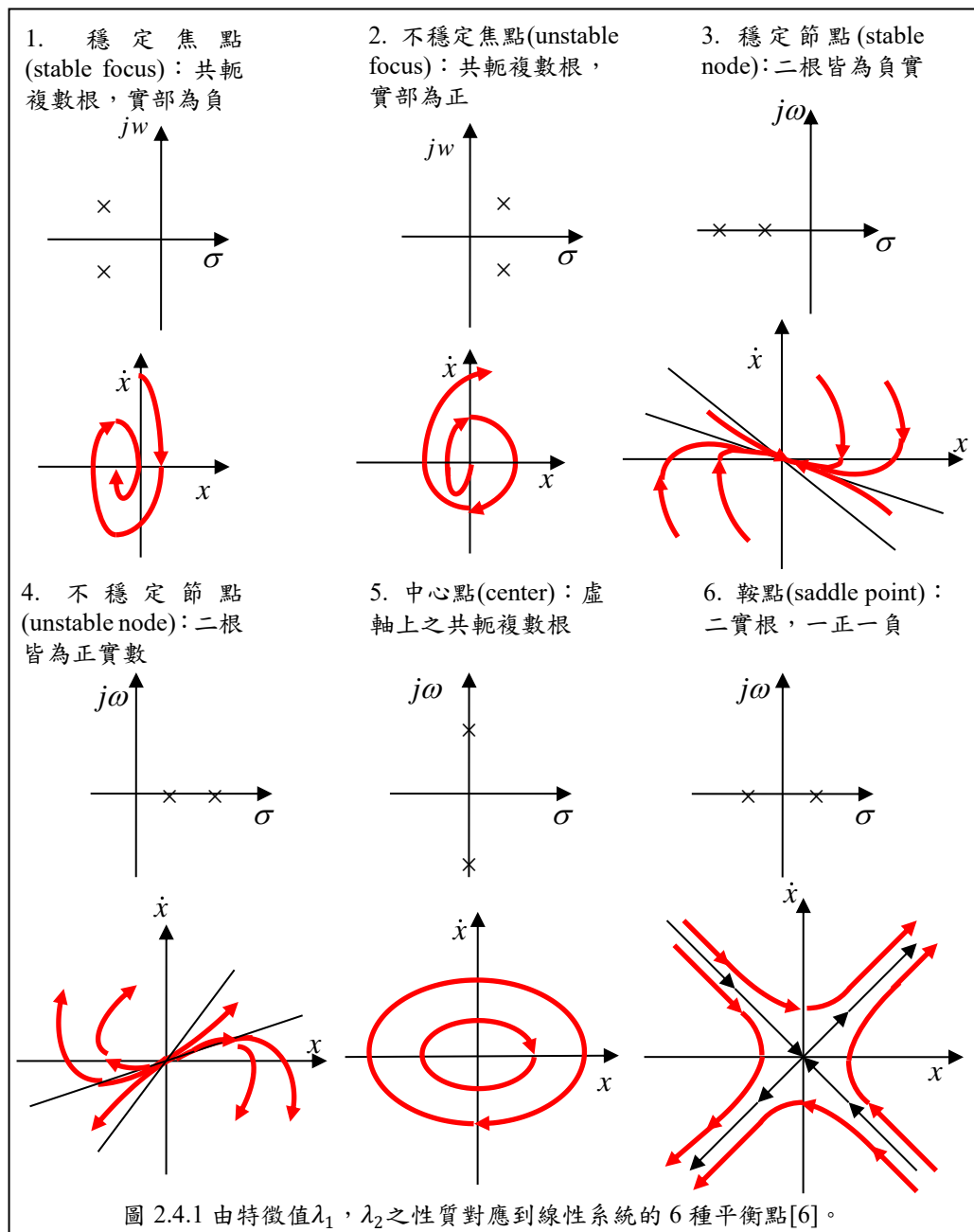
其中 $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $a = -a_1 - b_2$, $b = a_1b_2 - a_2b_1$ 。(2.4.3)式之特徵方程式為

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad (2.4.4)$$

由特徵值 λ_1, λ_2 之性質可對應到平衡點 $(0,0)$ 之性質；按照 λ_1, λ_2 之數值，平衡點可分成 6 種情形，如圖 2.4.1 所示。圖內的相平面軌跡是由下式的積分而得到：

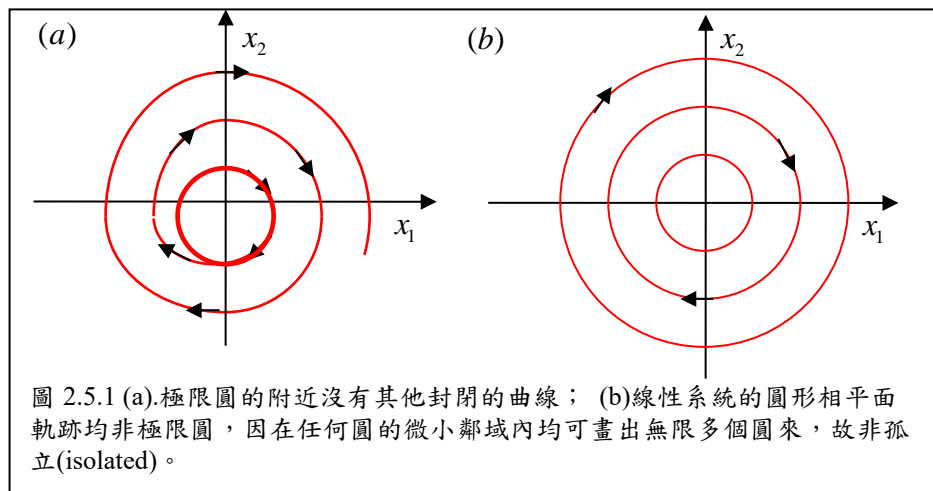
$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{b_1x_1 + b_2x_2}{a_1x_1 + a_2x_2} \quad (2.4.5)$$

但注意由上式所決定的相平面軌跡只能描述非線性系統(2.4.1)在平衡點附近的行為，亦即所謂的局部特寫。在遠離平衡點之處，圖 2.4.1 及(2.4.5)式是不適用的。



2.5 非線性系統特有的相平面軌跡：極限圓

圖 2.4.1 中的六種相平面軌跡是非線性系統相平面軌跡在平衡點附近的局部特寫，但這六種軌跡卻不是相平面軌跡的全部。非線性系統有一種特殊的相平面軌跡，是線性系統所沒有的，所以在圖 2.4.1 中找不到其蹤跡。此種特殊的相平面軌跡稱為極限圓(limit cycle)，已在 1.5 節中介紹過。極限圓在相平面中是一個封閉且孤立(isolated)的曲線。孤立是指在極限圓附近之任意微小鄰域內，找不到其他之封閉曲線。線性系統 $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ 所畫出之相平面軌跡圖含有許多同心圓，則均非極限圓，參考圖 2.5.1，因為這些圓不是孤立的。



若根據穩定性來區分，極限圓可分成三種類：

- (a) 穩定的極限圓：圓內、外之軌跡均漸趨近於極限圓，如圖 2.5.2a 所示。
- (b) 半穩定的極限圓：圓內之軌跡漸遠離於極限圓；而圓外之軌跡則趨近於極限圓，如圖 2.5.2b 所示。
- (c) 不穩定的極限圓：圓內、外之軌跡均漸遠離極限圓，如圖 2.5.2c 所示。

例題 2.5.1：考慮圖 2.5.2a 中的例子

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1), \dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) \quad (2.5.1)$$

引入極座標變數 $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\theta = \tan^{-1}(x_2/x_1)$ ，則(2.5.1)式可化成

$$\dot{r} = -r(r^2 - 1), \dot{\theta} = -1 \quad (2.5.2)$$

- 若一開始 $r = 1$ ，則 $dr/dt = 0$ ，此說明若一旦進入極限圓 $r = 1$ ，則將一直維持在極限圓之上。
- 若一開始 $r < 1$ 時，則有 $\dot{r} > 0$ ，代表 r 將一直增加到 1，而後進入極限圓。
- 若一開始 $r > 1$ 時，則有 $\dot{r} < 0$ ，表示 r 將一直遞減到 1，而後進入極限圓。

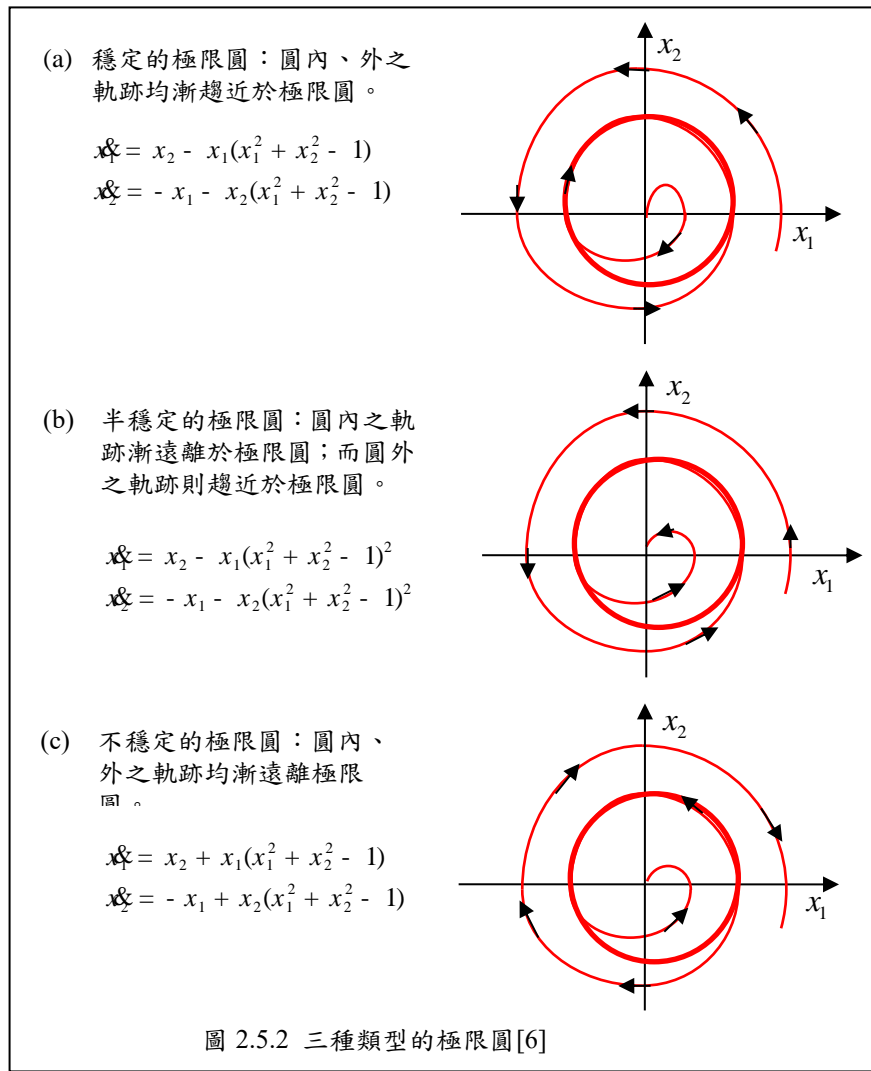
由以上三個特徵知道非線性系統(2.5.1)所具有的極限圓是穩定的，因為其圓內、外的軌跡最後都進入極限圓之上。實際上，(2.5.2)式有解析解的存在，其解可表之如下：

$$r(t) = (1 + C_0 e^{-2t})^{-1/2}, C_0 = 1/r_0^2 - 1, \theta(t) = \theta_0 - t \quad (2.5.3)$$

故當時間 $t \rightarrow \infty$ 時， $r(t) \rightarrow 1$ ，即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 1 \quad (2.5.4)$$

此式說明了所謂的極限圓是指時間趨近於無窮大的『極限』情形下，相平面軌跡最終所進入的『圓』。



並非每一個非線性系統都具有極限圓。極限圓的存在通常是要將非線性系統的相平面軌跡畫出來以後，才會知道。因此若能不必求解微分方程式，就能檢測出極限圓的存在，將具有很大的價值。目前學術上已發展出一些檢測極限圓存在的條件。

(a) 極限圓存在的必要條件：Poincare 定理

若有二階系統具有極限圓之特性，則此極限圓內所含有節點、中心點、焦點之平衡點總數 N ，與鞍點之總數為 S ，必須滿足以下條件[4]

$$N = S + 1 \quad (2.5.5)$$

其中有關各類平衡點的定義，參考圖 2.4.1。

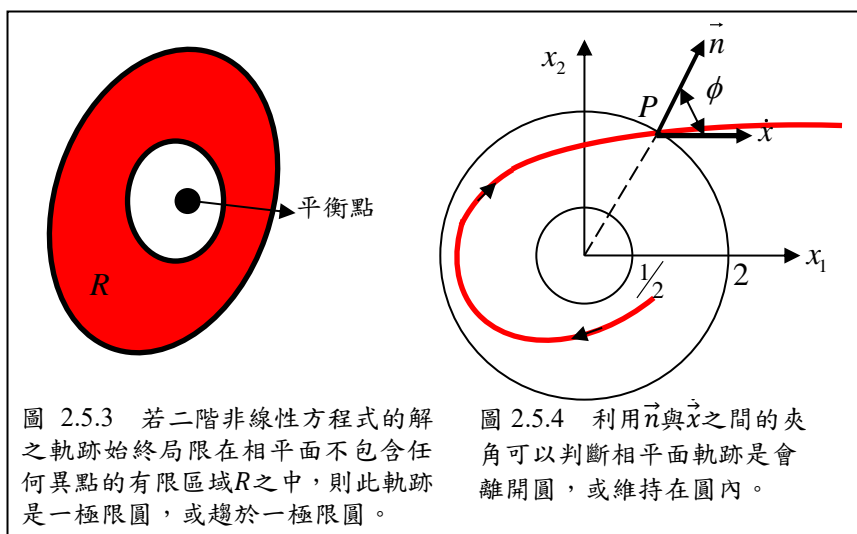
(b) 極限圓存在的充分條件：Poincare-Bendixson 定理

若二階非線性系統之相平面內有一軌跡「自始至終」($\forall t > 0$)均在一有限區域 Ω 內運動，則此軌跡有下列三種可能：

- (1) 是漸趨於一平衡點的曲線。
- (2) 是漸趨於一穩定極限圓的曲線。
- (3) 本身即為一極限圓。

對於三階以上的非線性系統，有可能存在另一種軌跡，其既不收斂至平衡點或極限圓，也不

發散，但也不重覆先前走過的軌跡，此即混沌軌跡，第一章中提到的奇異吸子即是混沌軌跡的例子。



例題 2.5.2：

本題將利用 Poincare-Bendixon 定理檢測下列之 Van der Pol 方程式是否具有極限圓的存在：

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_2 - (x_1^2 + 3x_2^2/2)x_1, \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - (x_1^2 + x_2^2/2)x_2 \quad (2.5.6)$$

此系統的平衡點在 $(0,0)$ ，對 $(0,0)$ 展開，得到線性方程式

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_2, \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \quad (2.5.7)$$

依據(2.4.3)式之特徵方程式的判斷，知原點是不穩定的焦點(unstable focus)，因此軌跡會離開原點，但還不能肯定原點之外是否有極限圓的存在。為了應用 Poincare-Bendixon 定理，茲以原點為圓心，作一圓，設交軌跡於 P 點。令向量 $\vec{n} = [x_1, x_2]$ 表在 P 點處，圓之法向量(向外)；向量 $\vec{\dot{x}} = [\dot{x}_1, \dot{x}_2]$ 表在 P 點處，沿軌跡之切線速度。則二個向量 \vec{n} 和 $\vec{\dot{x}}$ 之夾角 ϕ ：

$$\cos\phi = \frac{\vec{n} \cdot \vec{\dot{x}}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{\dot{x}}|}$$

- 當 $\vec{n} \cdot \vec{\dot{x}} > 0$ 時， $\phi < \pi/2$ ，指軌跡跑出圓外。
- 當 $\vec{n} \cdot \vec{\dot{x}} < 0$ 時， $\phi > \pi/2$ ，指軌跡進入圓內。
- 當 $\vec{n} \cdot \vec{\dot{x}} = 0$ 時， $\phi = \pi/2$ ，指軌跡進入圓內。

則由(2.5.6)兩式知

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{\dot{x}} &= x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1^2 + x_2^2 - x_1^4 - x_2^4/2 - 5x_1^2x_2^2/2 \\ &= r^2 - r^4 + x_2^2(x_2^2 - x_1^2)/2 = r^2 - r^4(4 + \cos 2\theta - \cos^2 2\theta)/4 \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

對於圓 $r = 2$ ，因為 $\vec{n} \cdot \vec{\dot{x}} < 0$ 對於任意 θ 均成立，故知軌跡必進入此圓內；對於 $r = 1/2$ 之圓，因為 $\vec{n} \cdot \vec{\dot{x}} > 0$ 對於任意 θ 均成立，故軌跡必跑出此圓外(參考圖 2.5.4)。因此當軌跡進入 $1/2 < r < 2$ 之區域後，將從此被限制在此區域之內(因為軌跡必在 $r = 1/2$ 之圓外，而在 $r = 2$ 之圓內)。故由 Poincare-Bendixon 定理知，在 $1/2 < r < 2$ 之區域內，必有極限圓存在，因為此範圍內沒有其他平衡點。

(c) 極限圓不存在的充分條件：Bendixson 定理

在一封閉區域 Ω 內，若 $\partial f_1/\partial x_1 + \partial f_2/\partial x_2$ 不為 0 且不變號，則於 Ω 內不存在極限圓。

證明：由 $\dot{x}_2/\dot{x}_1 = f_2(x_1, x_2)/f_1(x_1, x_2)$ 可得 $f_2 dx_1 - f_1 dx_2 = 0$ 。採用反證法，若設 Ω 內存在極限圓曲線 C ，則利用平面 Stokes 定理(或稱 Green 定理)，可得

$$0 = \int_C (f_1 dx_2 - f_2 dx_1) = \iint_S \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \quad (2.5.9)$$

但因 $\partial f_1/\partial x_1 + \partial f_2/\partial x_2$ 不恒為零，且不變號，故知

$$\iint_S \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \neq 0 \quad (2.5.10)$$

此與(2.5.9)式矛盾，因此在區域 Ω 內，不可能有極限圓存在。

例題 2.5.3：仍考慮 Van der Pol 方程式

$$\dot{x}_1 = x_2 = f_1(x_1, x_2), \dot{x}_2 = \mu(1 - x_1^2)x_2 - x_1 = f_2(x_1, x_2) \quad (2.5.11)$$

由於 $\partial f_1/\partial x_1 + \partial f_2/\partial x_2 = \mu(1 - x_1^2)$ ，因此在 $|x_1| < 1$ 的區間內， $\partial f_1/\partial x_1 + \partial f_2/\partial x_2$ 不為 0 且不變號。故由 Bendixson 定理知在 $|x_1| < 1$ 的範圍內，不可能有極限圓存在。

□

(d) 二階非線性系統極限圓之一般判斷準則

工程中最常見的二階非線性系統可表達如下：

$$m\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0 \quad (\text{Lienard 方程式}) \quad (2.5.12)$$

其中的特例如：

- Van der Pol 方程式：阻尼力 f 有非線性項

$$m\ddot{x} + \alpha(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \rightarrow f(x, \dot{x}) = \alpha(x^2 - 1), g(x) = x \quad (2.5.13)$$

- Duffing 方程式：恢復力 g 有非線性項

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \kappa x + \mu x^3 = 0 \rightarrow f(x, \dot{x}) = \alpha, g(x) = \kappa x + \mu x^3 \quad (2.5.14)$$

如果恢復力 g 是屬於保守力，則存在位勢能

$$U(x) = \int_0^x g(u) du \quad (2.5.15)$$

系統之總能量 E 可表成

$$E = K + U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \int_0^x g(u) du \quad (2.5.16)$$

對總能量 E 微分可得

$$\dot{E} = \frac{1}{2} m (2\dot{x}\ddot{x}) + g(x)\dot{x} = -f(x, \dot{x})\dot{x}^2 \quad (2.5.17)$$

根據阻尼 f 的正負號，可分為三種總能量變化的系統

- (1) $f(x, \dot{x}) > 0$ ：此時的系統具有正的阻尼，且 $\dot{E} < 0$ ，即總能量 E 遞減，直至 $E = 0$ ，即靜止在平衡點上不動。
- (2) $f(x, \dot{x}) = 0$ ：此時 $\dot{E} = 0$ ，即系統總能量不變(能量守恆系統)，維持週期運動。
- (3) $f(x, \dot{x}) < 0$ ：此時 $\dot{E} > 0$ ，即系統由外界獲得能量，使得總能量越來越大，呈現發散的行為。

通常極限圓的發生，是在 f 的符號不固定時。例如 Van der Pol 方程式(2.5.13)中， $|x| > 1$ 時， $f > 0$ ； $|x| < 1$ 時， $f < 0$ ； $|x| = 1$ 時， $f = 0$ 。由此而衍伸出系統(2.5.12)式有極限圓存在的條件：

定理：

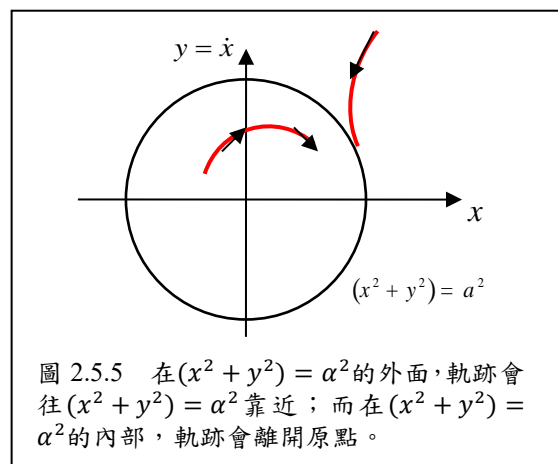
在 Lienard 方程式中，若 $f(x, \dot{x})$ 及 $g(x)$ 為連續且可微，且

- (1) 存在 $\alpha > 0$ ，當 $(x^2 + y^2)^{1/2} > \alpha$ 時， $f(x, y) > 0$ ；
- (2) $f(0,0) < 0$ ，從而在原點 $(0,0)$ 的鄰域，也有 $f(x, y) < 0$ ；
- (3) $\forall x > 0$ ， $g(x)$ 是 x 的奇函數，且 $g(x) > 0$ ；
- (4) 當 $x \rightarrow \infty$ ， $U(x) = \int_0^x g(u) du \rightarrow \infty$

則 Lienard 方程式有極限圓的存在。

證明：

由前面的分析知，在 $x^2 + y^2 > \alpha^2$ 的區域，系統總能量遞減，故振幅和速度均減小；反之在原點附近，因為 $f < 0$ ，故原點為不穩定的平衡點，系統總能量增加。綜合以上兩者情形，知在 $x^2 + y^2 = \alpha^2$ 的外面，軌跡會往 $(x^2 + y^2) = \alpha^2$ 靠近；而在 $x^2 + y^2 = \alpha^2$ 的內部，軌跡會離開原點，如圖 2.5.5 所示。因此在 $x^2 + y^2 = \alpha^2$ 附近，必存在穩定的封閉軌跡→極限圓。

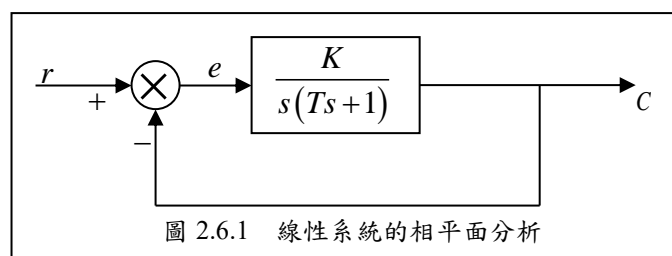
**例題 2.5.4：考慮非線性系統**

$$\ddot{x} + \alpha(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \ddot{x} + \alpha(x^2 + \dot{x}^2 - 1)\dot{x} + x^3 = 0$$

其皆滿足定理中的四個條件，故極限圓必存在。

2.6 線性控制系統之相平面分析

因大部分的控制系統其非線性均為訊號相依(signal-dependent)的型式，此種非線性可以化為多個片段線性系統的合成，因此有必要對線性控制系統的相平面分析做一些瞭解。相平面軌跡隨輸入訊號而異，吾人根據輸入訊號的種類作分類：



(A) 步階輸入(step input)

如圖 2.6.1 中， $r(t) = R$ ， $\ddot{r} = \dot{r} = 0$ ， $\forall t > 0$

$$C = \frac{K}{s(Ts+1)} e \Rightarrow T\ddot{C} + \dot{C} = Ke \quad (2.6.1)$$

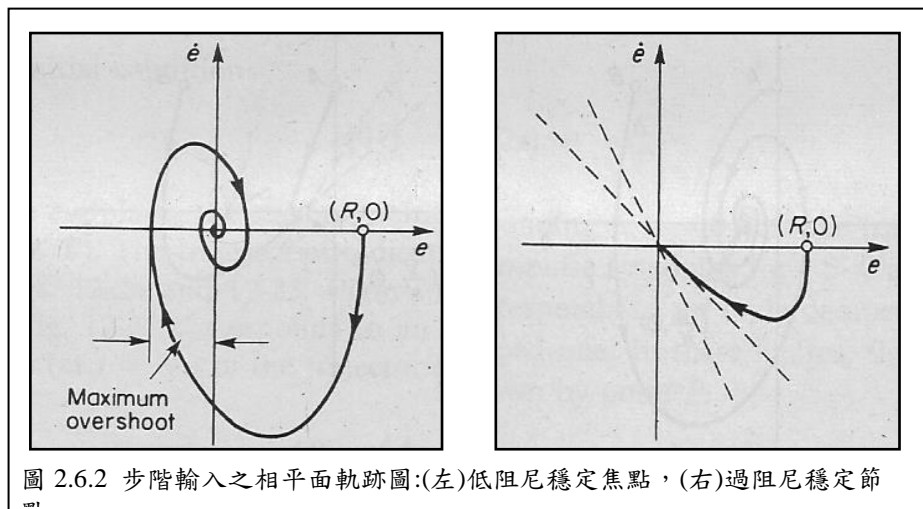
利用關係式 $e = r - C \Rightarrow C = r - e$ 代入(2.6.1)式得

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Ke = T\ddot{r} + \dot{r} = 0 \quad (2.6.2)$$

初始條件為： $e(0) = r(0) - C(0) = R$ ， $\dot{e}(0) = \dot{r}(0) - \dot{C}(0) = 0$ 。其特徵方程式：

$$T\lambda^2 + \lambda + K = 0 \quad (2.6.3)$$

增益 K 之選擇必須使特徵值為負，而為穩定焦點或穩定節點，如下圖 2.6.2 所示。



(B) 斜坡響應

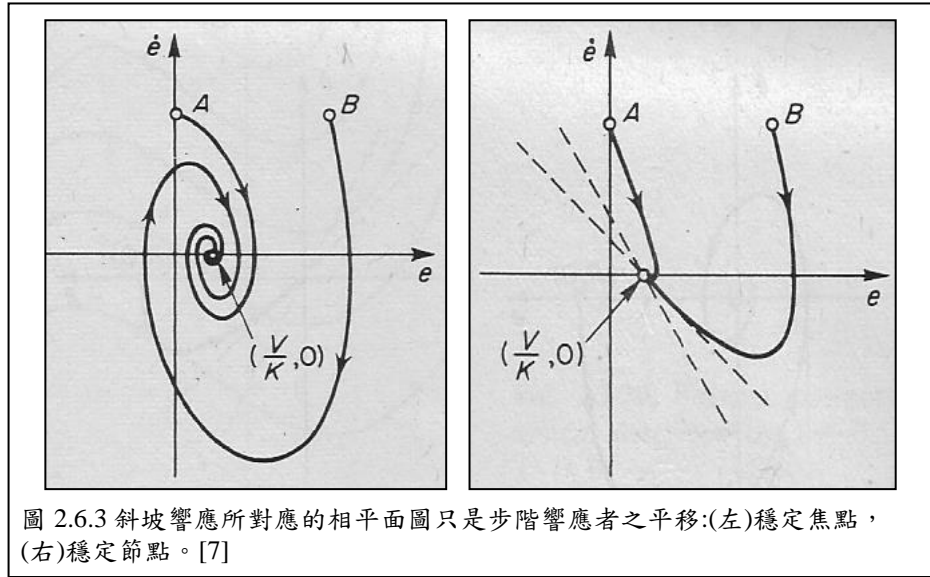
$r(t) = Vt \rightarrow \dot{r} = V$ ， $\ddot{r} = 0$ 代入(2.6.2)式，得

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Ke = V \quad (2.6.4)$$

令新變數 x 為 $x = e - V/K$ ，將之代入(2.6.4)式，得

$$T\ddot{x} + \dot{x} + Kx = 0 \quad (2.6.5)$$

可看出(2.6.5)式和(2.6.3)式完全一樣，因此斜坡響應所對應的相平面圖只是步階響應者之平移。但若一非線性系統同時具有兩個以上的平衡點時，平移的方法不再適用，需針對步階和斜坡各畫一個圖。



2.7 非線性控制系統之相平面分析

很多非線性控制系統，其非線性都是訊號相依型態，此型態之非線性可用幾個片段線性系統之合成來近似[7]。圖 2.7.1 表示一系統具有分段線性的增益 G_N ：

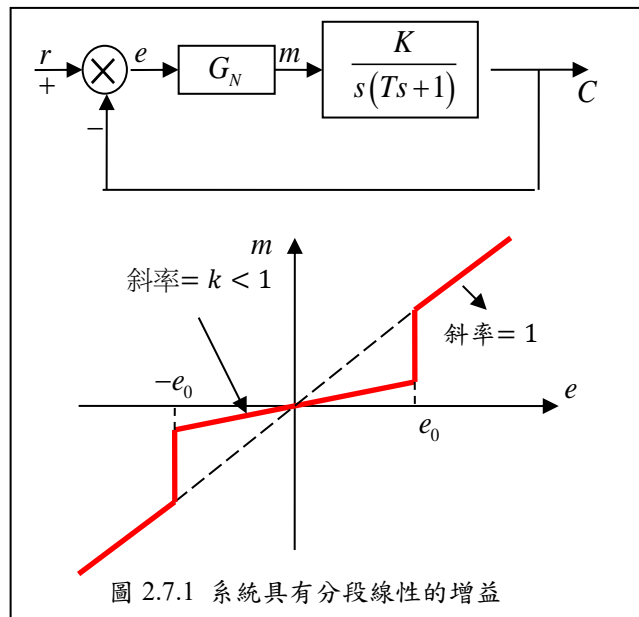
$$G_N : m = e, |e| \geq e_0 ; \quad m = ke, |e| < e_0 , \quad (2.7.1)$$

系統輸入 m 和輸出 C 之關係可以寫成

$$T\ddot{C} + \dot{C} = Km \quad (2.7.2)$$

代入 $e = r - C$ 得

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Km = T\ddot{r} + \dot{r} \quad (2.7.3)$$



2.7.1 分段線性增益的步階輸入

先考慮步階輸入的情形 $r(t) = R$ ，此時

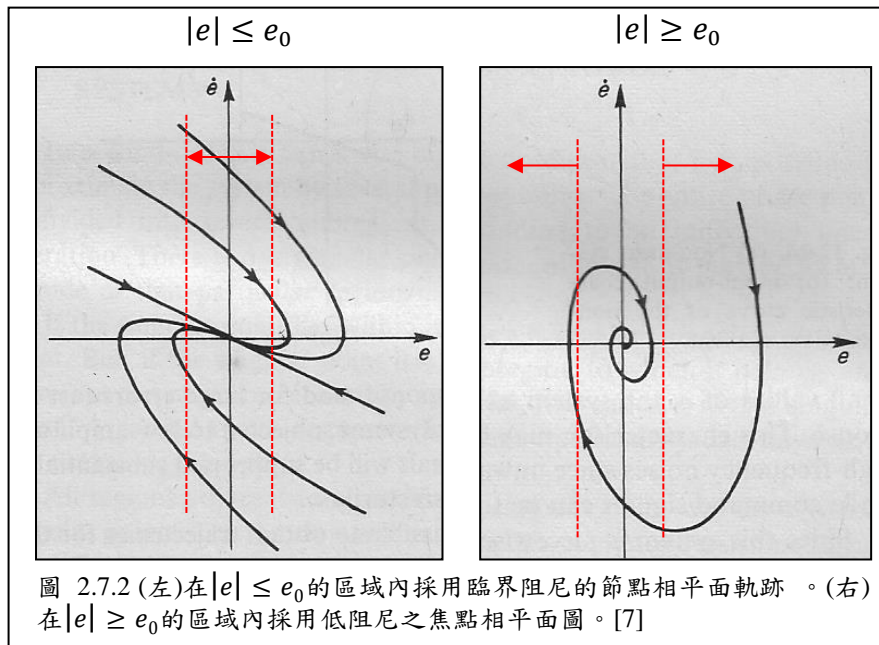
$$\dot{r} = r = 0 \Rightarrow T\ddot{e} + \dot{e} + Km = 0 \quad (2.7.4)$$

結合(2.7.1)和(2.7.4)可得片段線性響應如下：

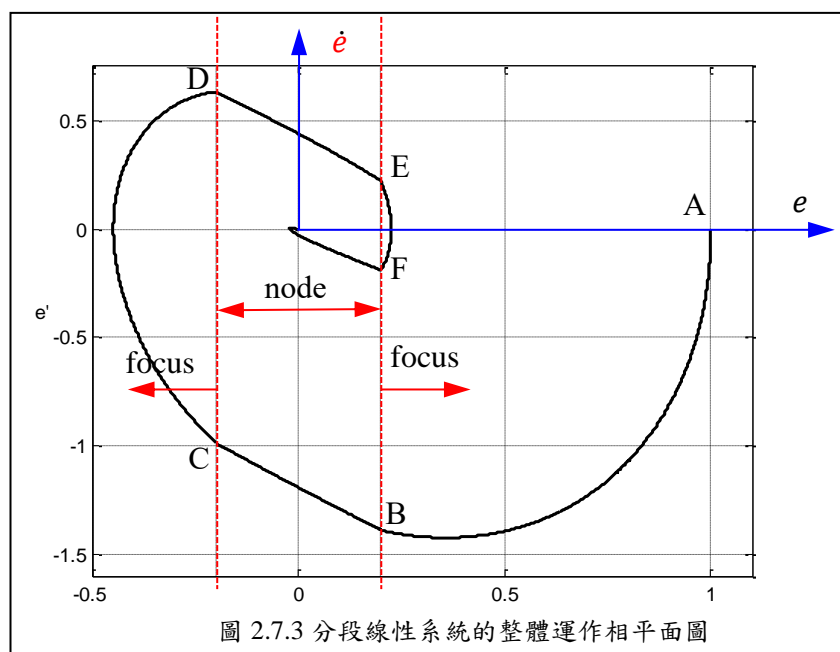
$$T\ddot{e} + \dot{e} + Ke = 0, |e| > e_0; T\ddot{e} + \dot{e} + kKe = 0, |e| < e_0 \quad (2.7.5)$$

其中 k 的選擇是任意的，只要保證穩定即可。這裡我們假設 k 值的選擇是使得

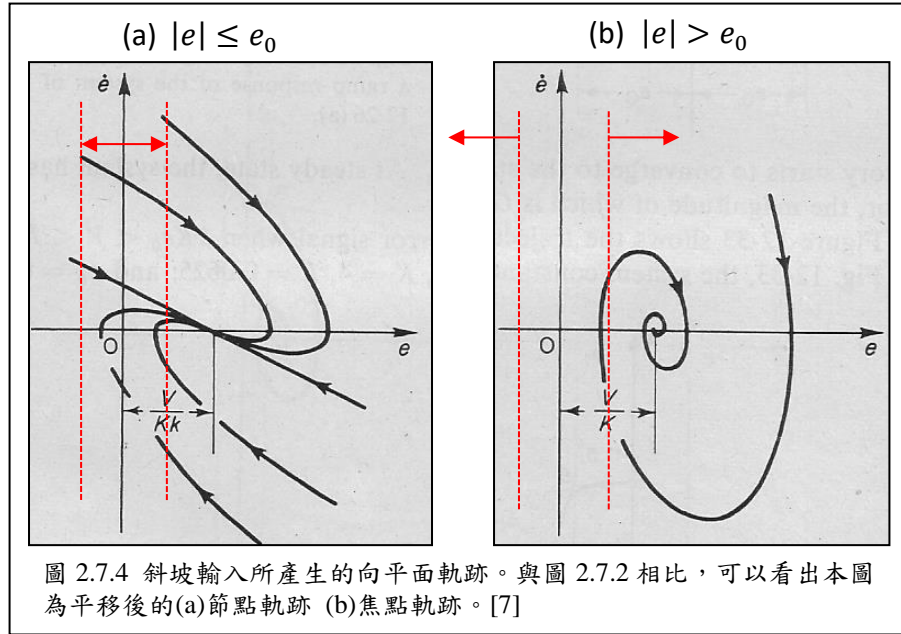
- $|e| < e_0$ 範圍內為臨界阻尼，即 $1 = 4TkK$ ，此時特徵方程式具有重根，平衡點為穩定節點。
- $|e| > e_0$ 範圍內為低阻尼，特徵方程式具有共軛複數根，平衡點為穩定焦點。其個別之相平面軌跡如圖 2.7.2 所示。



實際參數的設定值如下： $T = 1, K = 4, k = 0.0625, e_0 = 0.2$ ；初始條件： $e(0) = 1, \dot{e}(0) = 0$ 。整體相平面軌跡如圖 2.7.3 所示，其中在 $|e| < 0.2$ 的範圍內取節點軌跡，而在 $|e| > 0.2$ 的範圍內取焦點軌跡。



軌跡從A點出發後，往下運動(為何不往上?)，又由於滿足 $e > e_0$ ，故在到達B點之前，相平面的圖和圖 2.7.2b 一致，即為穩定之焦點，其奇異點在原點，但此部分的圖形不能一直延伸到原點，此時之原點稱為虛擬奇異點。在B、C間之曲線，因在 $|e| < e_0$ 之間，故應為圖 2.7.2a 即節點圖形之一部分；C、D間又回到焦點圖；如此到F之後已完全落入 $|e| < e_0$ 之區間，故節點型態曲線是唯一可能。



2.7.2 分段線性增益的斜坡輸入

$$r(t) = Vt \Rightarrow T\ddot{e} + \dot{e} + Km = V \quad (2.7.6)$$

綜合(2.7.1)、(2.7.6)二式可得

$$\text{焦點：} T\ddot{e} + \dot{e} + Ke = V, |e| > e_0 \quad (2.7.7)$$

$$\text{節點：} T\ddot{e} + \dot{e} + Kke = V, |e| < e_0 \quad (2.7.8)$$

比較上一節之結果，上式所對應的相平面軌跡只是把步階響應的圖形做一平移而已(移水平方向)。從圖 2.7.2 與 2.7.4，可以看出(2.7.7)式的平衡點從原點平移至 $(V/K, 0)$ ；而(2.7.8)式的平衡點從原點平移至 $(V/(kK), 0)$ 。

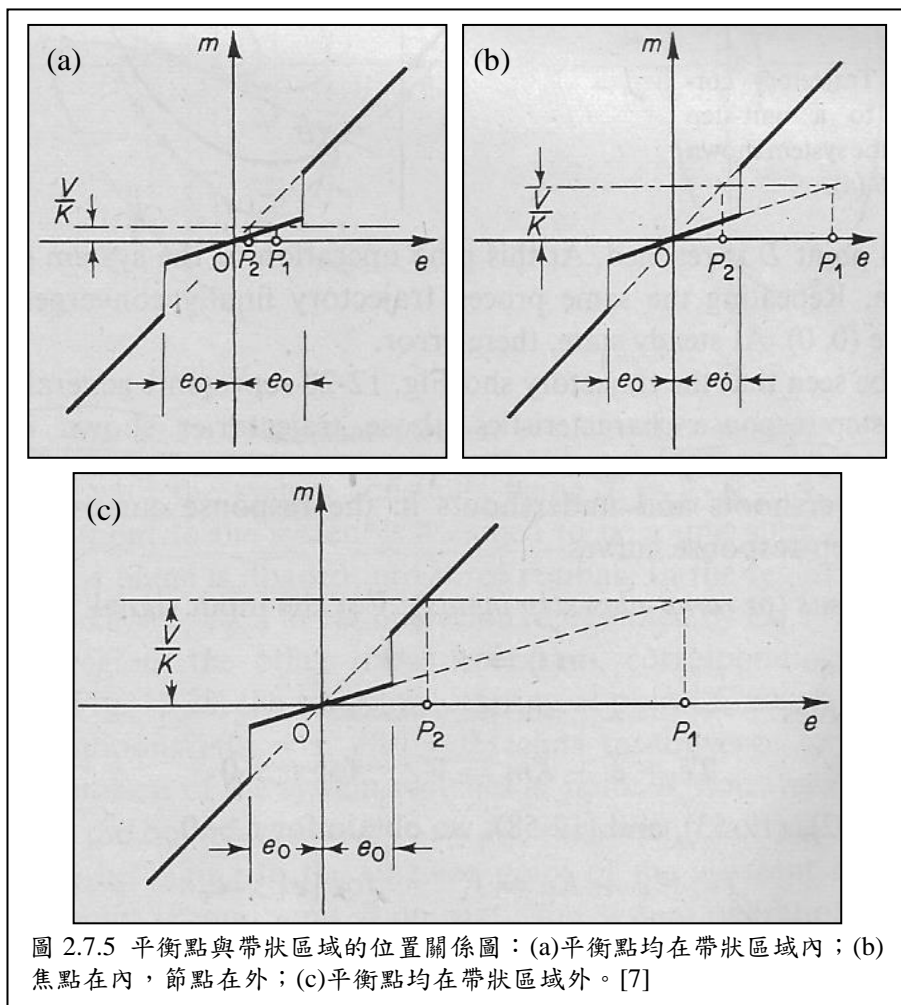


圖 2.7.5 平衡點與帶狀區域的位置關係圖：(a)平衡點均在帶狀區域內；(b)焦點在內，節點在外；(c)平衡點均在帶狀區域外。[7]

帶狀區域寬度 e_0 與二個平衡點之關係有三種：(a) $|V| < kKe_0 \rightarrow$ 平衡點均在帶狀區域內，(b) $kKe_0 < |V| < Ke_0 \rightarrow$ 焦點在內，節點在外，(c) $|V| > Ke_0 \rightarrow$ 平衡點均在帶狀區域外。圖 2.7.5 中， P_1 為節點， P_2 為焦點，可看出平衡點與帶狀區域之間的相對位置關係。而整體的相平面圖如下：

- (a) $|V| < kKe_0$ ：取 $T = 1, K = 4, k = 0.0625, e_0 = 0.2, R = 0.3 = e(0)V = \dot{e}(0) = 0.04$ ；由圖 2.7.6a 可以看出 P_1 ：節點， P_2 ：焦點，均在帶狀區域內。
- (b) $kKe_0 < |V| < Ke_0$ ：取 $T = 1, K = 4, k = 0.0625, e_0 = 0.2, R = 0.4$ ；由圖 2.7.6b 可以看出焦點 P_2 在帶狀區域內，而節點 P_1 在帶狀區域外。
- (c) $|V| > Ke_0$ ： $V = 1.2$ ，其他參數同上，從圖 2.7.6c 中可看出焦點與節點均在區域外。

不管焦點 P_2 與節點 P_1 在帶狀區域的內或外，帶狀區域內的軌跡一定是節點軌跡，而在帶狀區域之外的軌跡一定是焦點軌跡。

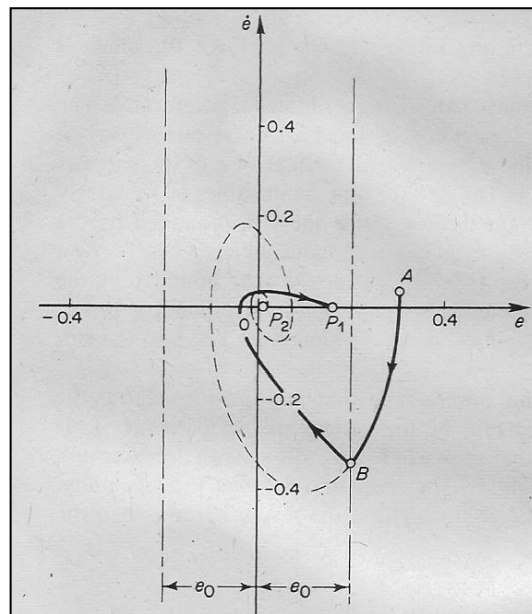


圖 2.7.6a 平衡點 P_1 、 P_2 均在帶狀區域內的相平面軌跡。實線代表真實軌跡，虛線代表焦點軌跡或是節點軌跡的延伸[7]。

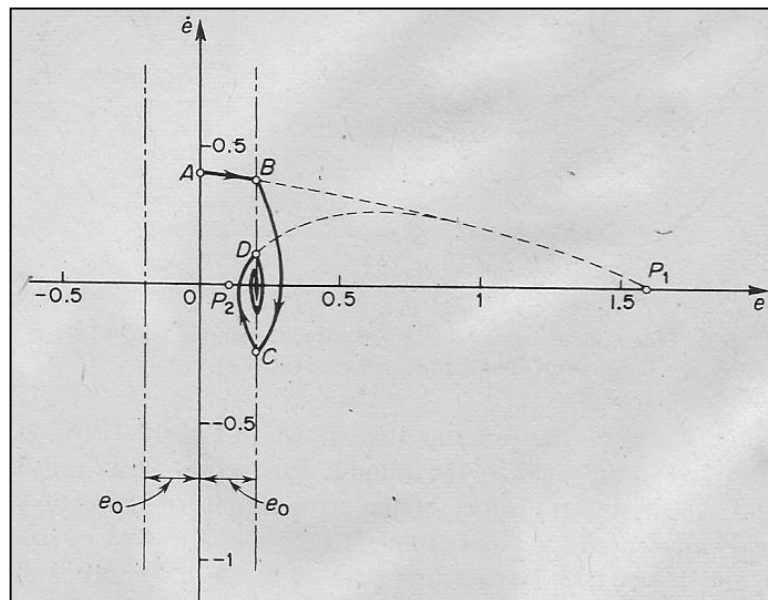


圖 2.7.6b 焦點 P_2 在內，節點 P_1 在外的相平面軌跡。實線代表真實軌跡，虛線代表焦點軌跡或是節點軌跡的延伸[7]。

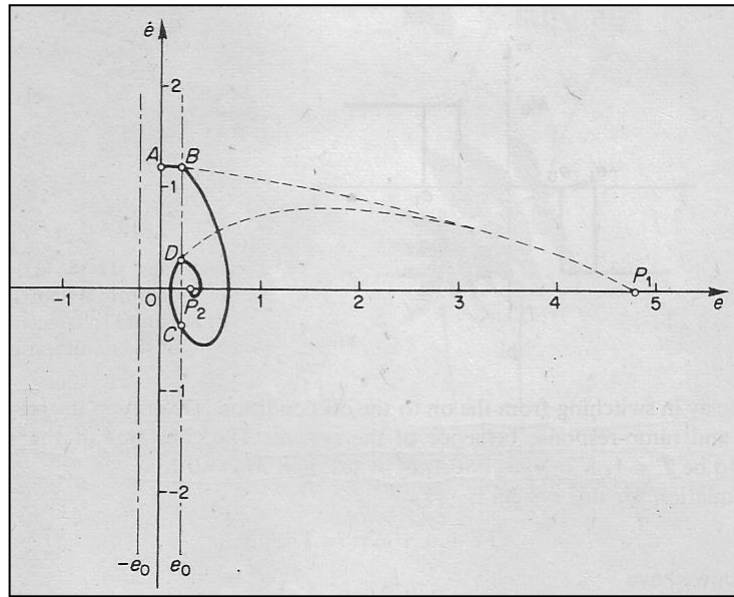


圖 2.7.6c 平衡點 P_1 、 P_2 均在帶狀區域外。實線代表真實軌跡，虛線代表焦點軌跡或是節點軌跡的延伸[7]。

2.7.3 飽和系統的步階輸入

一控制迴路中若有非線性元件，分析時先將此迴路在非線性元件的二端斷路，並由外迴路來看非線性元件兩端之數學關係式。如圖 2.7.7 所示，吾人由外迴路來看 m 和 e 之關係： m 和 e 間之內迴路是由非線性的定性決定； m 和 e 間之外迴路則是由系統中其他線性元件所決定。

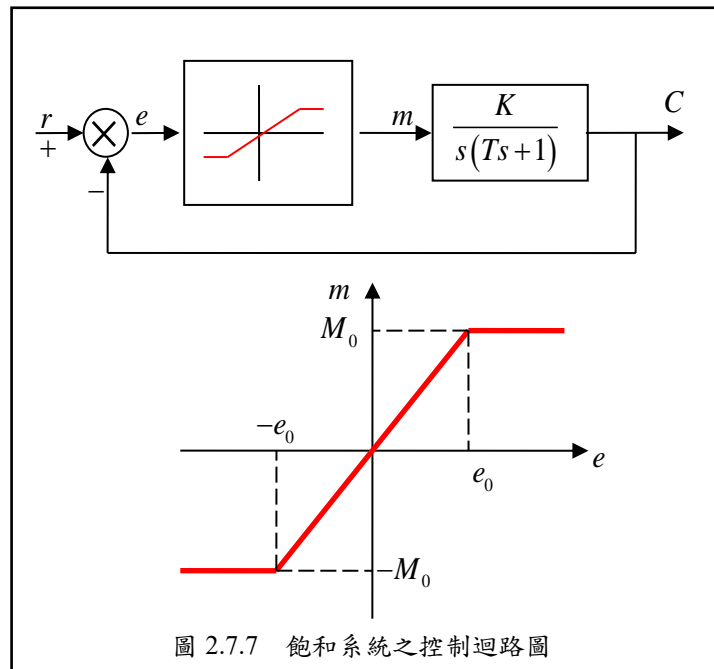


圖 2.7.7 飽和系統之控制迴路圖

內迴路：

$$m = e, |e| \leq e_0; m = M_0, e > e_0; m = -M_0, e < -e_0 \quad (2.7.9)$$

外迴路：

$$(s^2T + s)C(s) = Km \rightarrow T\ddot{C} + \dot{C} = Km \quad (2.7.10)$$

將 $e = r - C \rightarrow C = r - e$ 代入(2.7.10)中，得到

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Km = T\ddot{r} + \dot{r} \quad (2.7.11)$$

步階輸入： $\ddot{r} = \dot{r} = 0 \Rightarrow$ 由(2.7.11)式

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Km = 0 \quad (2.7.12)$$

(1) 線性區 $|e| \leq e_0$ ：此時(2.7.12)式可化為

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Ke = 0 \quad (2.7.13)$$

其相平面的圖形為平衡點在原點之焦點或節點。

(2) 飽和區 $|e| > e_0$ ：結合(2.7.9)式和(2.7.13)

$$T\ddot{e} + \dot{e} + KM_0 = 0, e > e_0; T\ddot{e} + \dot{e} - KM_0 = 0, e < -e_0 \quad (2.7.14)$$

(2.7.14)式之相平面圖可用等斜率法畫。但因(2.7.14)式很簡單，其解析解容易求得。幾種常見的非線性元件，都有解析畫法。現求解(2.7.14)式的第一式如下：令 $\dot{e} = y(t)$ ， $e = x(t)$

$$T\dot{y} + y + KM_0 = 0 \rightarrow y(t) = Ae^{-t/T} - KM_0 \quad (2.7.15)$$

由初始條件 $y(0) = \dot{e}(0) \rightarrow A = \dot{e}_0 + KM_0$ ，得

$$\dot{e}(t) = y(t) = (\dot{e}_0 + KM_0)e^{-t/T} - KM_0 \quad (2.7.16)$$

將上式再積分一次，並代入初始條件 $e(0) = e_0$ ，可得

$$e(t) = (1 - e^{-t/T})(TKM_0 + T\dot{e}_0) + e_0 - KM_0t \quad (2.7.17)$$

再由(2.7.16)、(2.7.17)兩式消去 t 得

$$e^{-t/T} = \frac{y + KM_0}{\dot{e}_0 + KM_0} \Rightarrow t = -T \ln \left(\frac{y + KM_0}{\dot{e}_0 + KM_0} \right) \quad (2.7.18)$$

最後將(2.7.18)式代入(2.7.17)式中，得

$$x = (TKM_0 + T\dot{e}_0) \left(1 - \frac{y + KM_0}{\dot{e}_0 + KM_0} \right) + TKM_0 \ln \left(\frac{y + KM_0}{\dot{e}_0 + KM_0} \right) + e_0 \quad (2.7.19)$$

給定 e_0 、 \dot{e}_0 即可畫出(2.7.14)式之精確相平面圖，但僅限於 $e > e_0$ 之區域。圖 2.7.8a 即依據不同之 e_0 、 \dot{e}_0 用電腦所畫出之圖形。

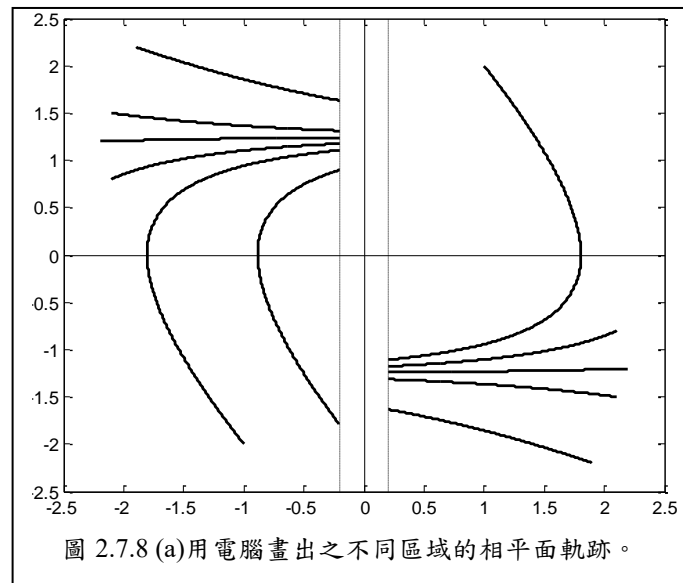


圖 2.7.8 (a)用電腦畫出之不同區域的相平面軌跡。

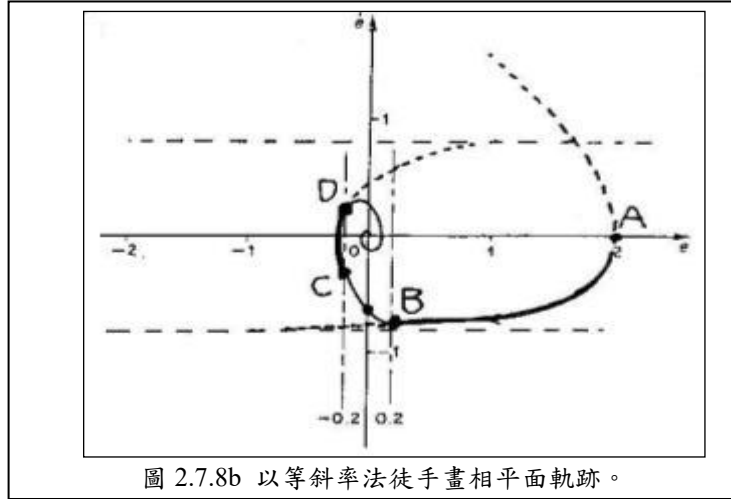


圖 2.7.8b 以等斜率法徒手畫相平面軌跡。

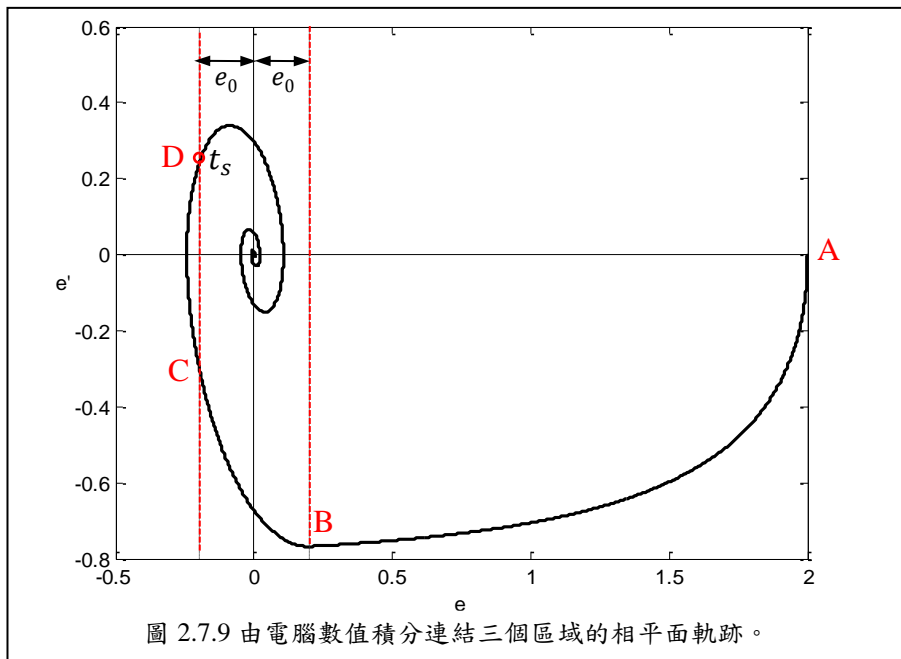
若用等斜率法近似時，可能精確性較差，但仍可得定性之特性。令斜率 $d\dot{e}/de = \alpha$ 則(2.7.14)式可化為

$$\dot{e} = \begin{cases} -\frac{KM_0/T}{\alpha+1/T}, e > e_0 \\ \frac{KM_0/T}{\alpha+1/T}, e < -e_0 \end{cases} \quad (2.7.20)$$

故等斜率曲線為平行之水平線。若各參數值取之如下： $T = 1, K = 4, M_0 = 0.2, e_0 = 0.2$

$$\dot{e} = \begin{cases} -0.8/(\alpha + 1), e > 0.2 \\ 0.8/(\alpha + 1), e < -0.2 \end{cases}$$

現結合 $|e| \leq e_0$ 和 $|e| > e_0$ 兩段之軌跡如圖 2.7.8b 所示(徒手畫)，其中 $e(0) = 2$ ， \widehat{AB} 弧線是 $e > e_0$ 區域的軌跡； \widehat{BC} 弧線是 $|e| < e_0$ 區域內的焦點軌跡； \widehat{CD} 弧線是 $e < -e_0$ 區域的軌跡； \widehat{DO} 弧線則是最後收斂至平衡點的焦點軌跡。圖 2.7.9 之相平面軌跡是電腦數值積分的結果，由此圖可以得到如下數據：(1)穩態誤差為 0，(2)超越量(overshoot)，(3)安定時間(settling time)，即進入 $|e| < e_0$ 所需要的時間。



2.7.4 飽和系統的斜坡輸入

此時 $r(t) = Vt$ ，且 $\dot{r} = V$ ；外迴路動態為

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Km = V \quad (2.7.21)$$

再結合(2.7.9)式之內迴路動態可得

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Ke = V, |e| < e_0 \quad (2.7.22a)$$

$$T\ddot{e} + \dot{e} + KM_0 = V, e > e_0 \quad (2.7.22b)$$

$$T\ddot{e} + \dot{e} - KM_0 = V, e < -e_0 \quad (2.7.22c)$$

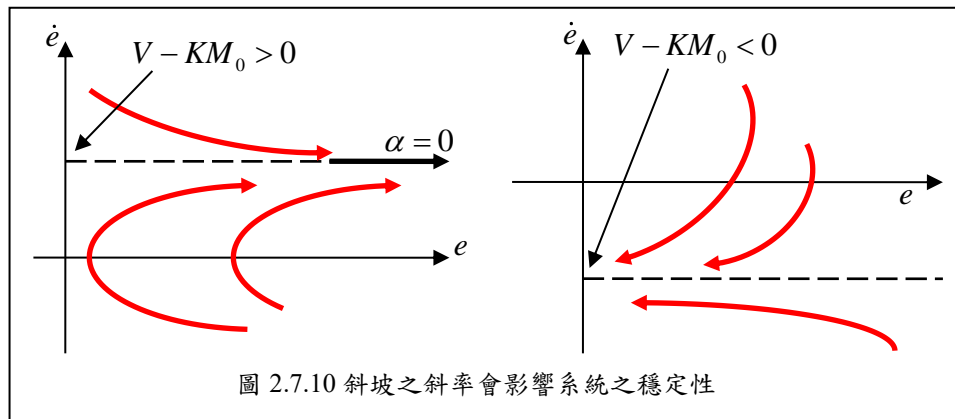
因系統內只有一個平衡點，斜坡輸入所對應的軌跡圖是步階輸入軌跡圖的平移(由 $(0,0) \rightarrow (V/K, 0)$)，(2.7.22)所對應之等斜率曲線方程式為

$$\dot{e} = \frac{(V - KM_0)/T}{\alpha + 1/T}, e > e_0; \dot{e} = \frac{(V + KM_0)/T}{\alpha + 1/T}, e < -e_0 \quad (2.7.23)$$

在(2.7.22b)中，當 $\ddot{e} = 0$ 時(即特解、穩態解)

$$\dot{e}_{ss} = V - KM_0; \dot{e}_{ss} = V + KM_0 \quad (2.7.24)$$

比較(2.7.23)式和(2.7.24)式，知當 $\dot{e} \rightarrow \dot{e}_{ss}$ 時 $\alpha \rightarrow 0$ ，此表示相平面軌跡要和水平線 $\dot{e} = V - KM_0$ 相交時其交點處之斜率為0；亦即軌跡以漸近之方向水平滑入穩態之水平線，如圖 2.7.10 所示。

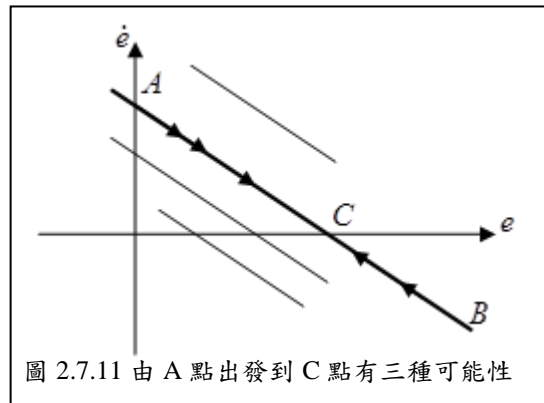


輸入斜坡之斜率 $V(R = Vt)$ 會影響系統之穩定性，如圖 2.7.10 所示。

- (1) $V - KM_0 > 0 \rightarrow$ 大坡度，穩態時 $e \rightarrow \infty$ 。
- (2) $V - KM_0 < 0 \rightarrow$ 小坡度，穩態($\ddot{e} = 0$)時 $e \rightarrow 0$ 。
- (3) $V - KM_0 = 0 \rightarrow$ 此臨界狀態可由(2.7.22b)式描述

$$T\ddot{e} + \dot{e} = 0 \rightarrow T\dot{e} \frac{d\dot{e}}{de} + \dot{e} = 0 \Rightarrow \dot{e} = 0, \dot{e} = -\frac{e}{T} + C$$

圖形為斜率 $-1/T$ 之直線。此直線與 e 軸之交點即為系統之最終狀態。為什麼呢？在圖 2.7.11 中，由A出發到達C點後，有下列三種可能性：



- (1) 沿著斜線繼續到 B 點。
- (2) 倒折而沿 e 軸向右或向左(因 $\dot{e} = 0$ 是其中一種解)。
- (3) 到 C 後即停住。

結合 $|e| \leq e_0$ 和 $|e| > e_0$ 之軌跡，整合後的相平面軌跡如圖 2.7.12 所示，顯示出三種不同斜坡輸入造成飽和系統不同的穩定性。

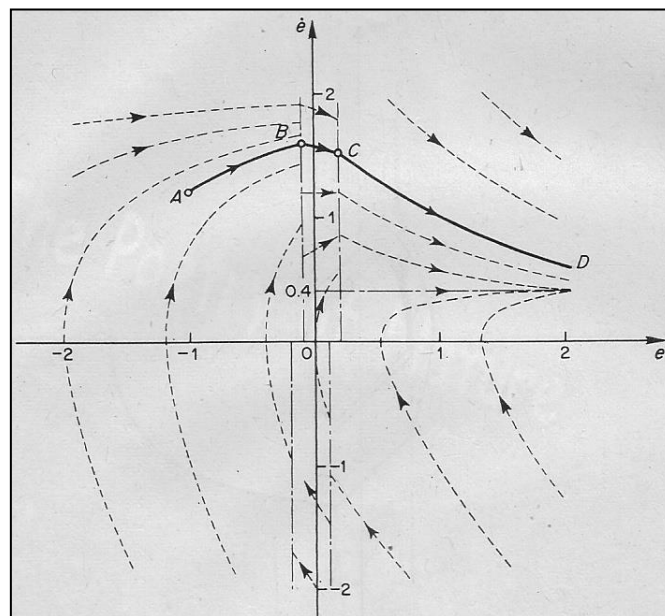


圖 2.7.12a $V - KM_0 > 0$ ，大斜坡輸入造成系統不穩定， $e \rightarrow \infty$ [7]。

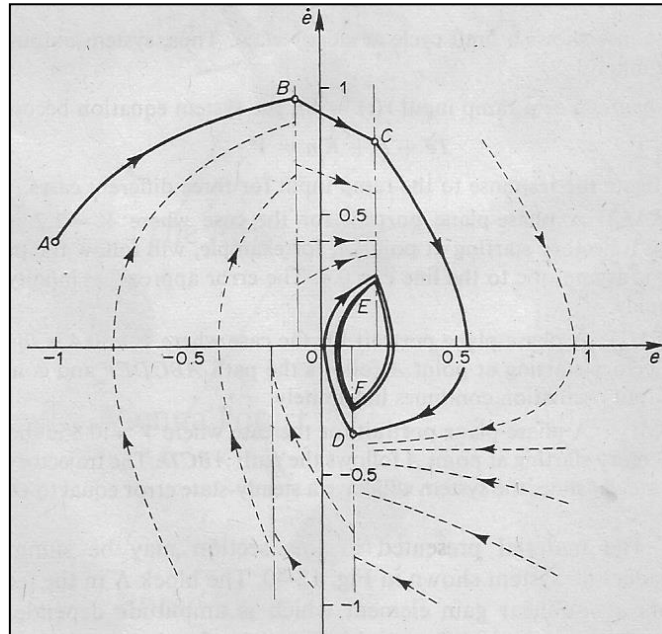


圖 2.7.12 b $V - KM_0 < 0$ ，小斜坡輸入，系統穩定， $e \rightarrow 0$ [7]。

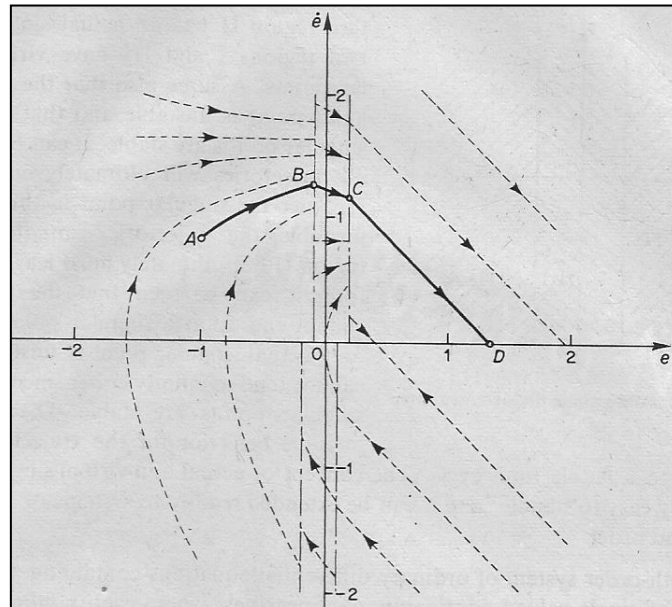
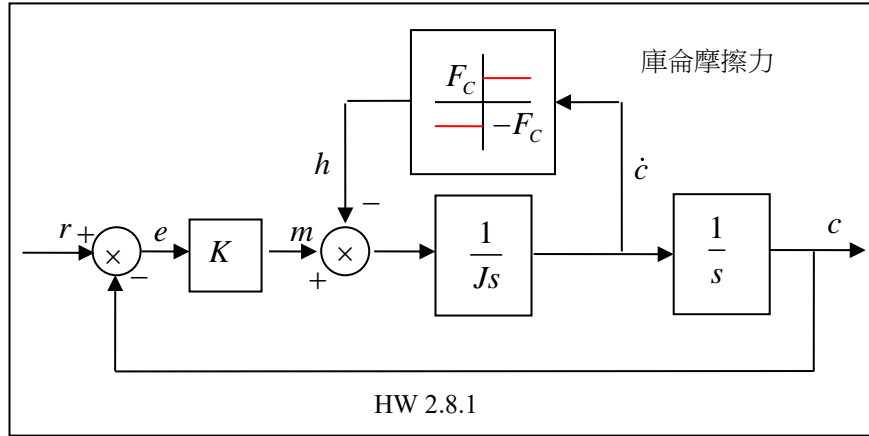


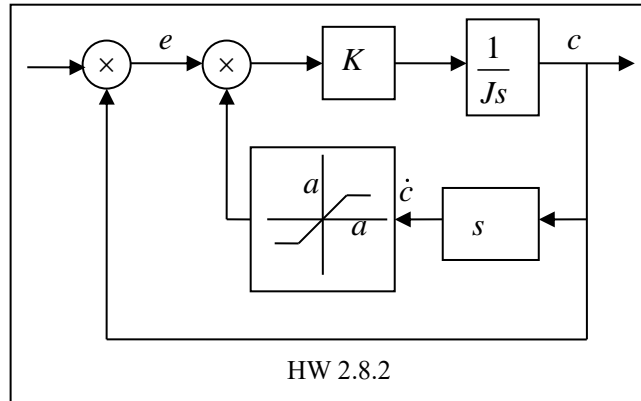
圖 2.7.12 c $V - KM_0 = 0$ ，臨界斜坡輸入，系統存在穩態誤差 $e \rightarrow \varepsilon_{ss}$ [7]。

2.8 學習評量

- 2.8.1 圖 HW2.8.1 表示一個二階伺服機構的方塊圖，其受到庫侖摩擦力的作用，而為非線性系統，試畫出該系統 e 對 \dot{e} 的相平面圖，並考慮兩種初始條件：(i) $e(0) = 2.2$, $\dot{e}(0) = 0$ ，(ii) $e(0) = 2.2$, $\dot{e}(0) = 0$ ；並說明在正比例放大器 K 的作用下，會有穩態誤差存在，且將此誤差求出。各常數值如下： $K = 1$, $J = 1$, $F_c = 1$ (此題有解析解，亦可使用電腦數值計算)。



2.8.2 試以電腦畫出圖 HW2.8.2 之相平面軌跡 (e, \dot{e}) ，採用 $K = 5, J = 1, a = 1$ 。另外討論不同的 K 值，對系統性能的影響。(如穩定性、超越量、穩態誤差等等)



2.8.3 具有摩擦作用的單擺運動方程式為

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{K}{m} x_2$$

試畫出相平面軌跡 (x_1, x_2) ，其中 $|x_1| \leq 10$ ， $g/l = 1$ ， $K/m = 0.5$ ，採用數種不同的初始條件，從中觀察是否有平衡點存在？這些平衡點穩定或是不穩定？

2.8.4 (a) 參考圖 HW2.8.4，一飛彈的簡化運動方程式為 $I\ddot{\theta} = u$ ，其中 I 為轉動慣量， u 為控制力矩。控制的目的是，要使 θ 趨近於 θ_T ，而採用的策略為砰砰(bang-bang)控制，即

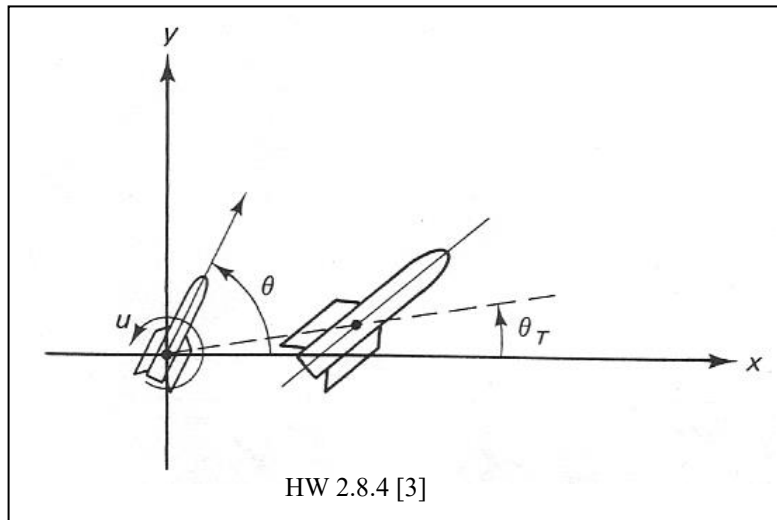
$$u = K \cdot \text{sgn}(\theta - \theta_T)$$

其中 $\text{sgn}(\theta - \theta_T)$ 表示 $\theta - \theta_T$ 的正負號，即

$$\text{sgn}(\theta - \theta_T) = \begin{cases} 1 & \theta > \theta_T \\ -1 & \theta < \theta_T \end{cases}$$

試畫出 θ 對 $\dot{\theta}$ 的相平面軌跡，並從中說明當 $t \rightarrow \infty$ 時， $\theta \rightarrow \theta_T$ 是否可達到？又常數 K 對響應有何影響？響應是否有超越量？上升時間與安定時間為何？

(b) 若將控制策略改成 $u = -K \cdot \text{sgn}(\theta - \theta_T + K_d \dot{\theta})$ ，其中 K_d 是常數。試討論引入微分項之回授後，對飛彈的性能有否提升？



2.8.5 試以座標變換

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \theta = \tan^{-1}(x_2/x_1)$$

求下列非線性系統的解析解

- (a) $\dot{x}_1 = x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1)$, $\dot{x}_2 = -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)$
 (b) $\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2$, $\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2$
 (c) $\dot{x}_1 = -x_2 + x_1[(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} - 1][(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} - 2]$
 $\dot{x}_2 = x_1 + x_2[(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} - 1][(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} - 2]$

說明個別是否存在極限圓，其穩定性如何？

2.8.6 續上題，考慮下列系統

$$\dot{x} = y + x(x^2 + y^2 - 1)\sin \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$$

$$\dot{y} = -x + y(x^2 + y^2 - 1)\sin \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$$

此系統共有幾個極限圓？其穩定性各如何？

2.8.7 用 Poincare-Bendixson 定理決定下列非線性系統

$$\dot{x}_1 = x_2 - \mu x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1), \dot{x}_2 = -x_1 - \mu x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

不可能出現極限圓的 (x_1, x_2) 範圍。

2.8.8 利用 Matlab 畫出圖 2.7.7 所示飽和系統的相平面軌跡圖，其中採用下列的參數設定：
 $T = 1$, $K = 4$, $M_0 = 0.2$, $e_0 = 0.2$ 。比較圖 2.7.9 的手繪圖，你所得到的軌跡圖是否與之相符？是否能得到比手繪圖更精確的結果？

2.8.9 以下的幾個非線性系統有些具有極限圓，有些則無。先以 Matlab 畫出各個系統的相平面軌跡圖，從而判斷出那幾個具有極限圓。

- (a) $\dot{x}_1 = x_1^3 + x_2, \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + x_2^3$
 (b) $\dot{x}_1 = 2x_1x_2 + x_1^3, \dot{x}_2 = -x_1^2 + x_2 - x_2^2 + x_2^3$
 (c) $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -x_1 - (1 + x_1^2 + x_1^4)x_2$
 (d) $\dot{x}_1 = x_1 + x_2 + x_1^3/3 - x_1x_2^2, \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 + x_1^2x_2 + 2x_2^3/3$
 (e) $\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + x_1^3, \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_2^3$

利用本章 2.5 節所提到的各種關於極限圓存在與不存在的定理，驗證上面 Matlab 所畫

出來的結果。

2.8.10 有一非線性系統是由下列方程式所描述

$$\ddot{x} = (\mu \cos x - 1) \sin x, -\pi/2 < x < \pi/2$$

- (a) 求此系統的平衡點，並指出其穩定性。
- (b) 找出系統發生分岔行為時，參數 μ 的臨界值，並分析此系統分岔的性質。

本章文獻與註解

本章的內容是非線性系統分析的入門知識，在一般講授非線性系統的教科書上均會提及。以下列舉幾本代表性的著作，提供讀者進一步的研習。

- [1] 劉秉正，非線性動力學與混沌基礎，徐氏基金會出版，1998。該書第一章對於各類非線性系統的相平面(相空間或狀態空間)軌跡有詳細的討論。
- [2] H. K. Khalil, Nonlinear Systems, Prentice Hall, 1996。該書的重點雖然是非線性系統的穩定性分析，但其第一章對於非線性系統的狀態空間分析，相當嚴謹且簡潔，值得閱讀。
- [3] R. R. Mohler, Nonlinear Systems, Vol. 1, Dynamics and Control, Prentice Hall, 1991。大部份講授非線性系統的教科書偏向於數學上的討論，該書提到的非線性系統均是取材自工程實例，是少數以工程應用為主軸，討論非線性系統的教科書。
- [4] S. Sastry, Nonlinear Systems – Analysis, Stability, and Control, Springer, 1999。該書的第2章標題為”Planar Dynamical System”，即是在講授相平面分析與相平面軌跡。本章在(2.5.5)式中提到的極限圓存在的必要條件稱為指標定理(index theorem)，可用於任意封閉軌跡存在性的判斷，進一步的討論可參閱該書的2.4節。
- [5] W. M. Haddad, V. Chellaboina, Nonlinear Dynamical Systems and Control – A Lyapunov- Based Approach, Princeton University Press, 2008。該書著重在非線性系統的數學理論，以定理及證明的方式勾勒出非線性系統的特性，適合於從事非線性系統論文寫作的讀者。
- [6] J. J. E. Slotine, W. Li, Applied Nonlinear Control, Pearson, 2005。該書的內容特性介於文獻[3]與[5]之間，工程應用性不若[3]強，但也不像[5]的數學定理化鋪陳，是一本能兼顧理論與應用的著作。該書的第2章介紹相平面分析，本章多個例題係引用自該書。
- [7] K. Ogata, Modern Control Engineering, Prentice Hall, 1970。該書目前已編修至第3版(1997)，藉由 Matlab 程式的輔助，介紹線性系統與控制。這裡要提及的是該書的第1版(1970)，此版雖不若第3版平易近人，但題材包含甚廣，難有其他教科書能與其相比。該版第1到第10章講授線性系統，第11章描述函數(describing function)，第12章相平面分析，第15章 Lyapunov 穩定性分析，則是屬於非線性系統的範圍。第13章講授數位控制與 z 轉換，第14章講授控制系統的狀態空間表示法，第16章講授最佳控制與適應性控制。目前控制系統的教科書主題性愈來愈強，少有能像 Ogata 第1版對控制系統做全面性的介紹。該書第1版在市面上已絕跡，但各大學的圖書館應都能借閱到。本章2.7節的討論主要參考自 Ogata, 1970 的版本。
- [8] D. Graham, D. McRuer, Analysis of Nonlinear Control Systems, John Wiley & Sons, 1961。相平面分析在較早期的非線性控制系統設計中，佔有重要的地位。該書是較早期的著作，特別倚重相平面分析法的使用，完整記錄了相平面分析法的特色。

