

## 2020 非線性控制期中考

2020/11/03

Closed-book Test (10:10~12:10)

1. (10%) 給定一個非線性系統:  $\dot{x} = f(x)$ , 說明它有哪幾種可能形式的解?
2. (10%) 何謂相平面軌跡? 如何判斷其運動方向? 以非線性系統  $\dot{x} = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$  為例, 先求出其平衡點, 大略描繪出其相平面軌跡, 再由軌跡的運動方向決定每個平衡點的穩定性。
3. (10%) 對於非線性系統(以極座標表示):  $\dot{r} = r(\mu - r^2)$ ,  $\dot{\theta} = 1$ , 說明該系統在參數  $\mu = 0$  有分岔現象(bifurcation)。
4. (10%) 給定一個非線性系統:  $\dot{x} = f(x)$ , 如何確定它的某個平衡點是穩定或是不穩定? 如果確定是穩定的話, 又如何決定它的穩定範圍?
5. 若以登山步道比擬相平面軌跡, 以山谷的最低點比擬平衡點, 並假設登山步道  $x$  處之高度為  $V(x)$ 。說明如何由登山步道的前進過程中所觀察到的等高線變化, 決定 Lyapunov 定理中的三種穩定性:
  - (a) (5%) Lyapunov 穩定性。
  - (b) (5%) 漸進穩定性。
  - (c) (5%) 全域穩定性。
6. (10%) 對於非線性系統:  $\dot{x} = -x^3$ , 利用 Lyapunov 定理證明這個系統在原點處為全域漸進穩定。
7. (10%) 對於一個線性系統:  $\dot{x} = Ax$ , 其中  $A$  為一常數矩陣, 利用 Lyapunov 直接定理推導出此線性非時變系統穩定的條件, 並且證明若線性系統為穩定的話, 則必為全域穩定。
8. (10%) 對於一個線性時變系統:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \alpha(t) \\ -\alpha(t) & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

其中  $\alpha(t)$  為任意的連續函數, 利用 Lyapunov 直接定理證明該線性時變系統為指數穩定。

9. 參考下圖:

1. (5%) 解釋為何 A、B 二點是極限圓發生的地點?
2. (5%) 說明從圖中如何決定極限圓發生時的振幅及頻率?
3. (5%) 判斷 A、B 二點的極限圓是穩定還是不穩定。

