非線性控制
Nonlinear Control

第九章作業 (適應性控制)

學　　號：P46071204

研 究 生：蔡 旻 哲

授課教授：楊 憲 東

Department of Aeronautics and Astronautics

National Cheng Kung University

Tainan, Taiwan, R.O.C.

中 華 民 國 110 年 1 月 9 日

目錄

第1題. 適應性控制設計

本題延續範例 9.6.2 的討論，但是考慮不同的非線性系統:

$$\dot{y}+a_p y+c_p \sin y=b_p u \tag{1.1}$$

現在要設計適應性控制u，使得在系統參數未知的情況下，非線性系統的輸出能夠追隨以下的線性參考模式:

$$\dot{y}_m+4y_m=4r \tag{1.2}$$

Question (a) 控制律設計

將控制訊號表成如下型式

$$u=K_y y+K_f \sin y+K_r r \tag{1.3}$$

並假設受控體參數a_p、b_p、c_p為已知的情況下，求出控制律參數K_y^*、K_f^*、K_r^*，使得$r\to y$間的轉移函數與$r\to y_m$間的轉移函數完全一致。

Answer

考慮非線性受控系統(1.1)內的參數a_p、b_p、c_p皆為已知，並將待設計的控制律(1.3)代入得出

$$\dot{y}+a_p y+c_p \sin y=b_p K_y y+b_p K_f \sin y+b_p K_r r \tag{1.4}$$

在控制律當中，$K_f \sin y$是非線性回授項，目的是要去除(1.4)左側的非線性項，為了使其完全抵消受控系統的非線性項，因此非線性補償增益必須取為以下數值

$$K_f=K_f^*=\frac{c_p}{b_p} \tag{1.5}$$

透過非線性補償項增益值K_f的設計，(1.4)可以被整理為

$$\dot{y}+\left(a_p-b_p K_y\right)y=b_p K_r r \tag{1.6}$$

得出參考命令r以及受控系統輸出y之間的轉移函數為

$$y=\frac{b_p K_r}{s+\left(a_p-b_p K_y\right)}r \tag{1.7}$$

由於要求受控系統輸出y以及參考輸出y_m要一致，因此比較(1.7)與以下參考模式的轉移函數

$$y_m=\frac{4}{s+4}r \tag{1.8}$$

剩下的控制律參數可以被決定為

$$K_r=K_r^*=\frac{4}{b_p},\ \ K_y=K_y^*=\frac{a_p-4}{b_p} \tag{1.9}$$

如此選擇之K_f^*、K_r^*及K_y^*即可保證在相同參考命令下系統輸出$y\to y_m$。

Question (b) 參數調變律 (Adaptation law) 設計

其次假設受控體參數a_p、b_p、c_p為未知的情況下，求出控制律參數的估測值$\hat{K}_y$、$\hat{K}_f$及$\hat{K}_r$所要滿足的調變律，以保證追蹤誤差$e = y(t) - y_m(t) \to 0$。

<u>Answer</u>

上一小題假設系統參數a_p、b_p、c_p為已知的情況，真實的控制器參數容易透過反算從而求得，然而本小題考慮在實際情況下a_p、b_p、c_p為未知，因此控制器參數的實際值K_f^*、K_r^*及K_y^*也是未知，需要一個調整的機制，來隨時估測K_f^*、K_r^*及K_y^*。

將(1.3)的控制律改變成

$$u = \hat{K}_y y + \hat{K}_f \sin y + \hat{K}_r r \tag{1.10}$$

其中$\hat{K}_y(t)$、$\hat{K}_f(t)$及$\hat{K}_r(t)$分別是K_y^*、K_f^*及K_r^*的估測值，並且進一步在(1.1)式中，做如下的改寫

$$\dot{y} + a_p y + c_p \sin y = b_p\left[\left(K_y^* y + K_f^* \sin y + K_r^* r\right) - \left(K_y^* y + K_f^* \sin y + K_r^* r\right) + u\right] \tag{1.11}$$

因此(1.11)可以再整理為

$$\dot{y} = -4y + 4r - b_p\left[\left(K_y^* y + K_f^* \sin y + K_r^* r\right) - u\right] \tag{1.12}$$

將(1.10)代入(1.12)當中，得出

$$\dot{y} = -4y + 4r - b_p\left[\left(K_y^* - \hat{K}_y\right)y + \left(K_f^* - \hat{K}_f\right)\sin y + \left(K_r^* - \hat{K}_r\right)r\right] \tag{1.13}$$

定義輸出追蹤誤差

$$e = y - y_m \tag{1.14}$$

以及參數誤差

$$\begin{aligned} \tilde{K}_y &= \hat{K}_y - K_y^* \\ \tilde{K}_f &= \hat{K}_f - K_f^* \\ \tilde{K}_r &= \hat{K}_r - K_r^* \end{aligned} \tag{1.15}$$

將(1.13)與(1.2)相減並利用(1.14)、(1.15)的關係，得出追蹤誤差動態方程式為

$$\dot{e} = -4e + b_p\left(\tilde{K}_y y + \tilde{K}_f \sin y + \tilde{K}_r r\right) \tag{1.16}$$

上面這個式子將參數誤差和追蹤誤差間之關係建立起來。現在有四個時間變數e、$\tilde{K}_y$、$\tilde{K}_f$及$\tilde{K}_r$，但只有一個方程式(1.16)，因此我們還需要三個關於$\tilde{K}_y$、$\tilde{K}_f$及$\tilde{K}_r$之微分方程式，也就是要建立增益值的調變機制，其一般化的型式假設為

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{K}}_y &= \dot{\hat{K}}_y = f_1\left(e, \tilde{K}_y, \tilde{K}_f \tilde{K}_r\right) \\ \dot{\tilde{K}}_f &= \dot{\hat{K}}_f = f_2\left(e, \tilde{K}_y, \tilde{K}_f \tilde{K}_r\right) \\ \dot{\tilde{K}}_r &= \dot{\hat{K}}_r = f_3\left(e, \tilde{K}_y, \tilde{K}_f \tilde{K}_r\right) \end{aligned} \tag{1.17}$$

其中f_1、f_2與f_3是待定的函數，目的是要讓追蹤誤差為漸進穩定，亦即$e(t) \to 0$。f_1、

f_2 即 f_3 的選擇需要透過 Lyapunov 穩定定理。茲採用一般的二次式 Lyapunov 函數如下

$$V\left(e,\tilde{K}_y,\tilde{K}_f,\tilde{K}_r\right)=\frac{e^2}{2}+\frac{\tilde{K}_y^2}{2\gamma_1}\left|b_p\right|+\frac{\tilde{K}_f^2}{2\gamma_2}\left|b_p\right|+\frac{\tilde{K}_r^2}{2\gamma_3}\left|b_p\right|>0 \tag{1.18}$$

其中 $\gamma_i>0$ 是自由選定的參數，取 V 沿著(1.16)、(1.17)對時間的一次導數得

$$\begin{aligned}\dot{V}&=e\dot{e}+\frac{1}{\gamma_1}\tilde{K}_y\dot{\tilde{K}}_y\left|b_p\right|+\frac{1}{\gamma_2}\tilde{K}_f\dot{\tilde{K}}_f\left|b_p\right|+\frac{1}{\gamma_3}\tilde{K}_r\dot{\tilde{K}}_r\left|b_p\right|\\&=-4e^2+b_p\left(\tilde{K}_y y+\tilde{K}_f\sin y+\tilde{K}_r r\right)e+\left|b_p\right|\left(\frac{1}{\gamma_1}\tilde{K}_y f_1+\frac{1}{\gamma_2}\tilde{K}_f f_2+\frac{1}{\gamma_3}\tilde{K}_r f_3\right)\end{aligned} \tag{1.19}$$

f_1 、 f_2 及 f_3 的選擇是要確保 $\dot{V}\le 0$。在上式中注意 $\left|b_p\right|$ 可改寫如下

$$\left|b_p\right|=b_p\cdot\mathrm{sgn}\left(b_p\right),\quad \mathrm{sgn}\left(b_p\right)=\begin{cases}1, & b_p>0\\-1, & b_p<0\end{cases} \tag{1.20}$$

因此當吾人選取

$$\begin{aligned}\dot{\hat{K}}_y&=\dot{\tilde{K}}_y=f_1=-\gamma_1\cdot e\cdot y\cdot\mathrm{sgn}\left(b_p\right)\\\dot{\hat{K}}_f&=\dot{\tilde{K}}_f=f_2=-\gamma_2\cdot e\cdot\sin\left(y\right)\cdot\mathrm{sgn}\left(b_p\right)\\\dot{\hat{K}}_r&=\dot{\tilde{K}}_r=f_3=-\gamma_3\cdot e\cdot r\cdot\mathrm{sgn}\left(b_p\right)\end{aligned} \tag{1.21}$$

此時 $\dot{V}$ 可化簡成

$$\dot{V}=-4e^2\le 0 \tag{1.22}$$

當 $\dot{V}=0$ 時，必有 $e=0$，但無法保證參數估測誤差 $\tilde{K}_y$ 、 $\tilde{K}_f$ 、 $\tilde{K}_r$ 為零。這說明(1.21)式所採用的增益調整機制可以達到模式追蹤的目的 $e\left(t\right)=y\left(t\right)-y_m\left(t\right)\to 0$，但無法保證完美的參數估測。通常若參考命令 $r\left(t\right)$ 為步階輸入，將導致參數估測誤差的存在，因為步階輸入無法激起系統高頻的響應。若取參考命令 $r\left(t\right)$ 為弦波輸入，則有助於消除參數估測誤差。

Question (c) 數值模擬

最後進行數值模擬驗證，$a_p=b_p=1$，$c_p=-1$，參考指令分別討論 $r(t)=1$ 與 $r(t)=\sin t$ 的情形。畫出追蹤誤差與 3 個參數估測誤差隨時間的響應圖，並分析在二種不同參考指令之下，這二種誤差是否可同時趨近於零?

<u>Answer</u>

考慮本題所給定的受控系統

$$\dot{y}+a_p y+c_p \sin y=b_p u \tag{1.23}$$

並給定系統參數為 $a_p=b_p=1$，$c_p=-1$，適應性控制律由(b)小題設計為

$$u=\hat{K}_y y+\hat{K}_f \sin y+\hat{K}_r r \tag{1.24}$$

其中控制器的參數增益由透過以下的調變律所隨時間更新

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{K}}_y &= -\gamma_1\cdot e\cdot y\cdot \operatorname{sgn}(b_p),\ \ \hat{K}_y(0)=0\\
\dot{\hat{K}}_f &= -\gamma_2\cdot e\cdot \sin(y)\cdot \operatorname{sgn}(b_p),\ \ \hat{K}_f(0)=0\\
\dot{\hat{K}}_r &= -\gamma_3\cdot e\cdot r\cdot \operatorname{sgn}(b_p),\ \ \hat{K}_r(0)=0
\end{aligned} \tag{1.25}$$

期望受控系統的輸出 y 可以追隨以下期望的參考模式輸出 y_m

$$\dot{y}_m+4y_m=4r \tag{1.26}$$

在模擬中，受控系統輸出以及參考模式輸出的初始值設定為 $y(0)=0,\ y_m(0)=0$，且在以下的所有模擬當中，(1.25)內的控制器參數調變律增益值皆固定為 $\gamma_1=20$、$\gamma_2=10$、$\gamma_3=20$。

首先，將參考命令設定為 $r(t)=1$，並且在上述所設計的控制律以及其參數調變律輸入受控系統當中，可以模擬出其輸出響應如 圖 1.1 所示，在 圖 1.1 內，紅色虛線為參考模式的輸出，藍色實線為受控系統的輸出，可以在圖中看到最終受控系統輸出可以追隨到參考模式的輸出，達成本題所要求的控制目標。

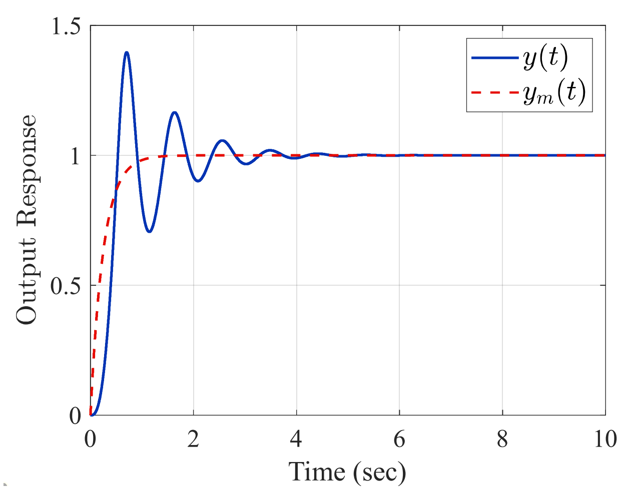

圖 1.1、在參考命令 $r(t)=1$ 下，受控系統輸出與參考模式輸出響應比較。

根據以上敘述，進一步繪出受控系統及參考模式兩者輸出之間的誤差時間響應如 圖 1.2 所示，由 圖 1.2 較可明顯的看出兩者的誤差會隨時間以漸進穩定的方式趨於零，而透過模擬出的追蹤誤差時間響應，亦驗證了由(b)小題 Lyapunov 穩定性分析(1.22)所推導出的結論。

在數值模擬的部分，吾人亦繪出系統的控制輸入時間響應 圖 1.3，這裡的控制輸入是將透過調變律所估測的參數，於時間在每一刻的增益值代入其中所得出的結果。

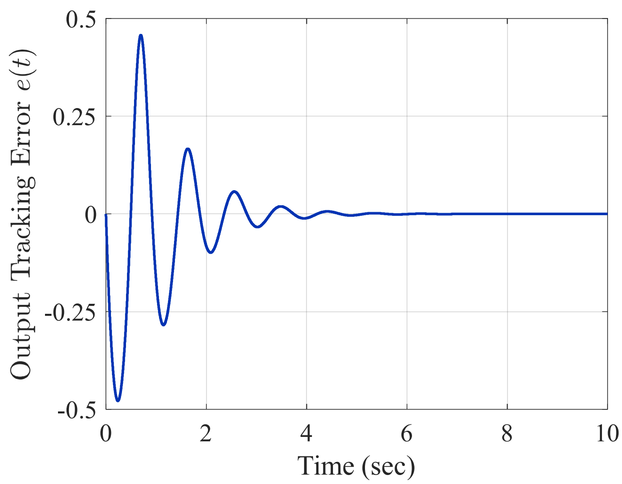

圖 1.2、在參考命令$r(t)=1$下，受控系統與參考模式輸出追蹤誤差響應。

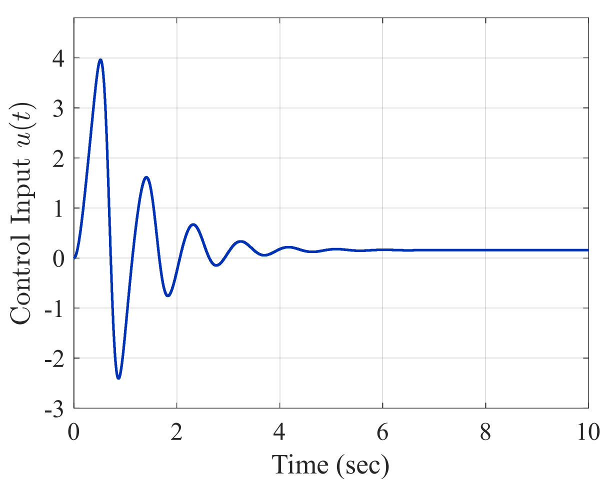

圖 1.3、在參考命令$r(t)=1$下，控制輸入訊號時間響應。

在本題中的適應性控制是透過控制器參數適應律(1.25)，估測出隨時間變化的控制器參數，而我們也繪出三個受估測參數的時間響應如 圖 1.4，在 圖 1.4 當中，紅色虛線代表著由(a)小題所計算出的正確控制器參數，而藍色時間分別代表著各個參數的估測值，在圖中也可以很明顯地看到，雖然受控系統的輸出可以完美的追蹤到參考模式的輸出，然而控制器估測參數卻無法準確的估測到正確的控制器參數，而這個結論我們亦可以透過(b)小題的 Lyapunov 穩定性分析所解釋，由於在(1.22)式中，$\dot{V} \le 0$ 只包含了追蹤誤差 e 的項，並沒有包含任何一個參數估測誤差項，因此當追蹤誤差 $e=0$ 時則 $\dot{V}=0$，因此這個 Lyapunov 穩定性分析結果僅能保證追蹤誤差漸進穩定到零，然而參數估測誤差僅能保證 Lyapunov 穩定，因此我們也可以在 圖 1.4 發現，控制器的估測參數也趨於一個界限當中。

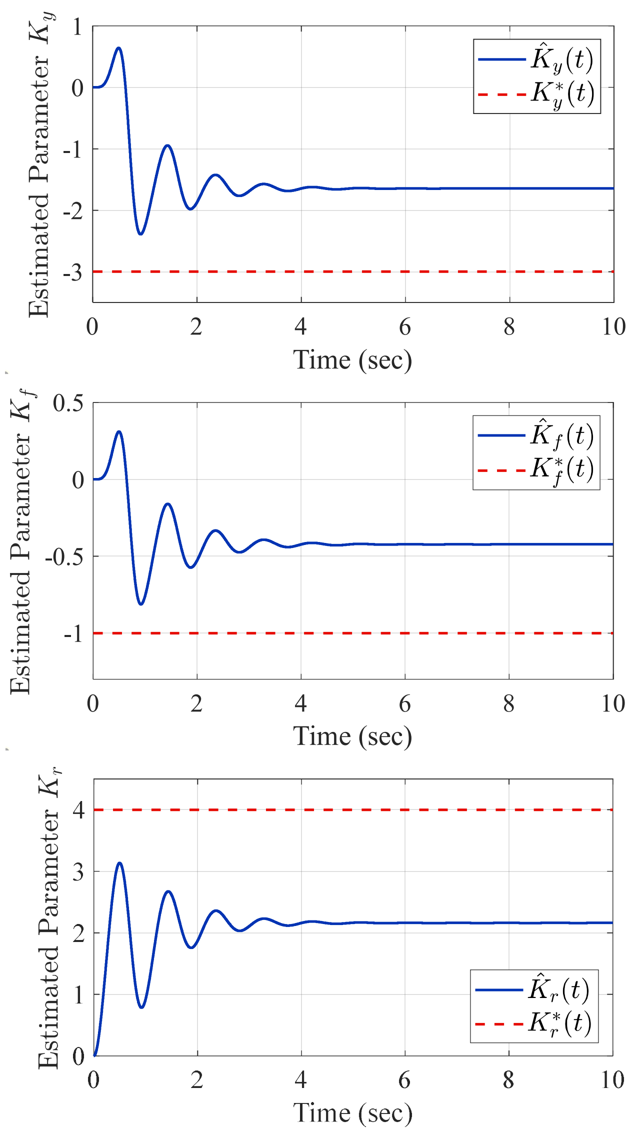

圖 1.4、在參考命令 $r(t)=1$ 下，控制器參數估測之時間響應。

接著，將參考命令重新設定為$r(t)=\sin(t)$，其他不改變，並且重複上述的模擬步驟，這樣的目的是為了了解在不同的參考命令之下，追蹤性能是否會有所改變，首先，受控系統的輸出響應如 圖 1.5 所示，在 圖 1.5 內，紅色虛線為參考模式的輸出，藍色實線為受控系統的輸出，可以在圖中看到儘管參考命令改變設定為$r(t)=\sin(t)$，受控系統輸出亦可以追隨到參考模式的輸出。

然而，進一步繪出受控系統及參考模式兩者輸出之間的誤差時間響應如 圖 1.6 所示，從中看出兩者的誤差並無法與前面相同隨時間以漸進穩定的方式趨於零，這樣的現象與 Lyapunov 穩定性分析互相衝突，雖然在圖中看到追蹤誤差隨著時間幾乎等於零了，然而仔細看其實還是會有些微的追蹤誤差，吾人猜測這是由於參考輸入激起了系統的高頻響應導致其存在微小的誤差。

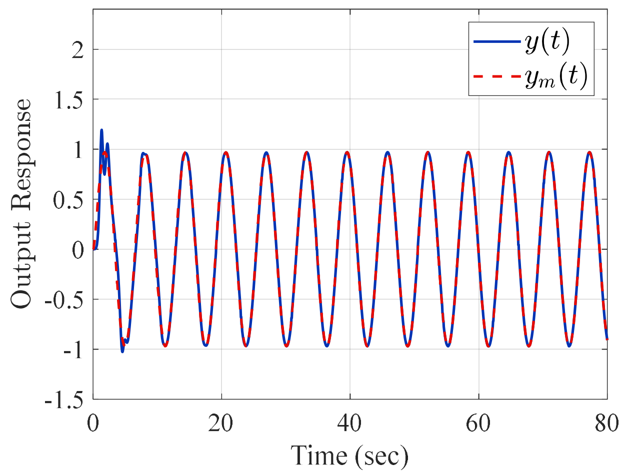

圖 1.5、在參考命令$r(t)=\sin(t)$下，受控系統輸出與參考模式輸出響應比較。

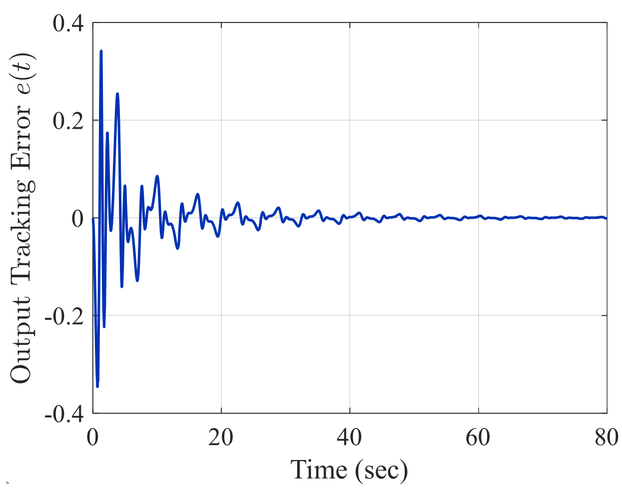

圖 1.6、在參考命令$r(t)=\sin(t)$下，受控系統與參考模式輸出追蹤誤差響應。

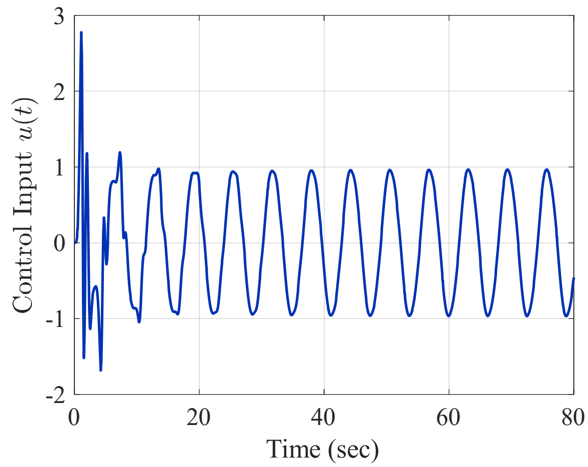

圖 1.7、在參考命令 $r(t) = \sin(t)$ 下，控制輸入訊號時間響應。

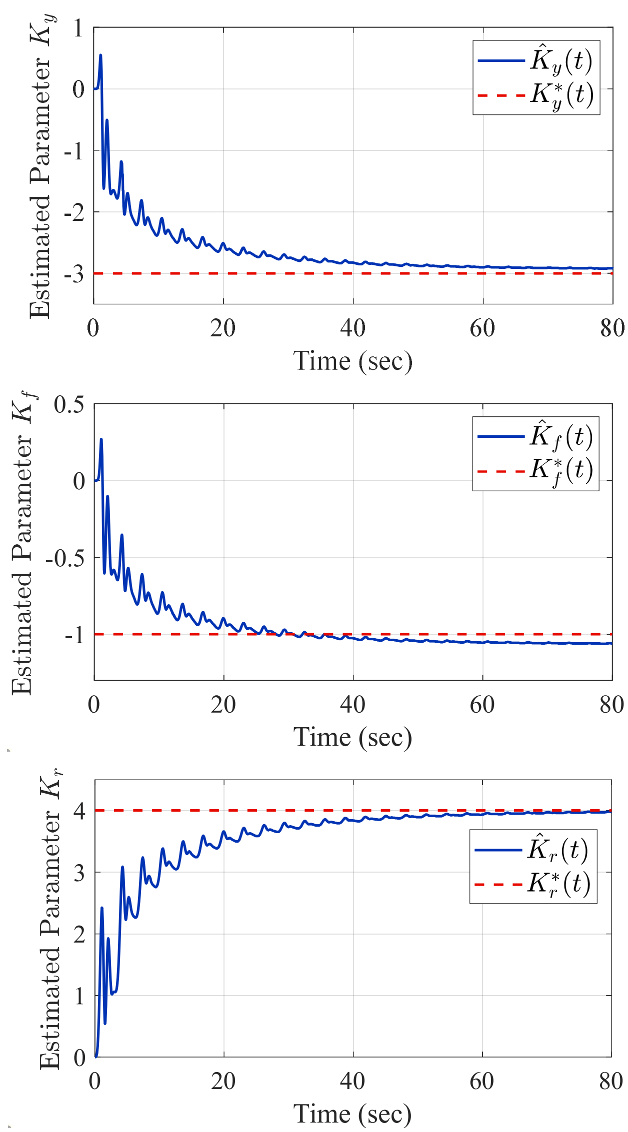

圖 1.8、在參考命令 $r(t) = \sin(t)$ 下，控制器參數估測之時間響應。

以上繪出在參考命令改變為$r(t)=\sin(t)$下，系統的控制輸入時間響應 圖 1.7，這裡的控制輸入亦為將透過調變律所估測的參數，於時間在每一刻的增益值代入其中所得出的結果，而其控制參數增益的調變律如 圖 1.8 所示，在 圖 1.8 中可以看出參考命令改變為正弦訊號時，控制器參數估測的準確度也會提高，在圖中可以看出 3 個控制器參數皆有往正確值靠近的趨勢。

吾人進一步繪出參考命令為步階輸入訊號以及正弦輸入訊號，對於輸出追蹤誤差的比較如 圖 1.9，圖 1.9 中的藍色實線為設定正弦訊號參考命令的輸出追蹤誤差，紅色虛線設定參考命令步階訊號的輸出追蹤誤差，在圖中可以很明確地看出，參考命令為步階輸入訊號時，則輸出追蹤穩態誤差會為零，然而參考命令為正弦輸入訊號時，則輸出追蹤穩態誤差會趨近於零而不為零，因此可以得出結論，參考命令越單純，並且沒有高頻的影響，則輸出追蹤誤差越穩定。

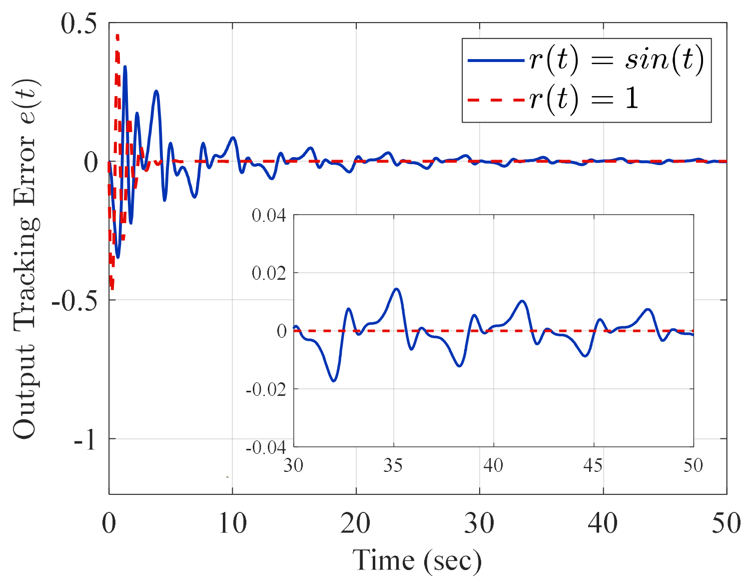

圖 1.9、比較不同參考命令下，受控系統與參考模式輸出之追蹤誤差。

雖然說參考命令設定為正弦訊號輸出追蹤誤差，其性能會來的比參考命令設定為步階訊號差，然而由於參考命令設定為正弦訊號可以激發出系統的高頻響應，因此可以由 圖 1.10 看出，參考命令設定為正弦訊號，對於控制參數估測的準確度越高，因此我們最後可以得出結論，若是參考命令設計的越是複雜，則控制器參數調變律對於控制器參數估測的準確度可以越準確。

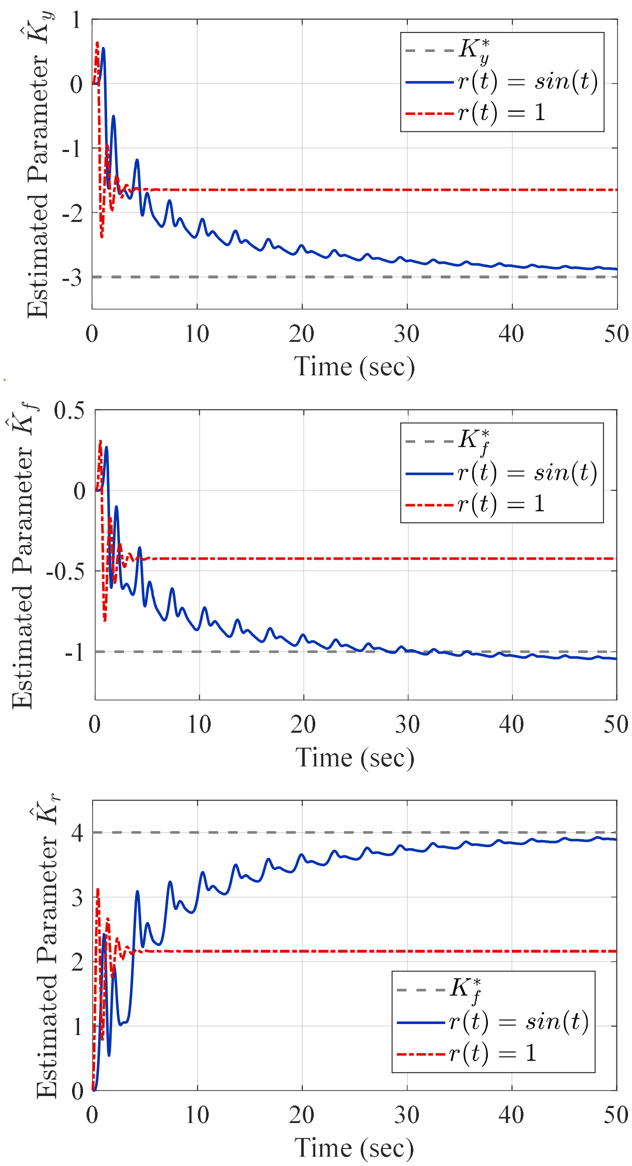

圖 1.10、比較不同參考命令下，控制器參數估測之時間響應。

Matlab Code

第一題 - (c)

```
%% Nonlinear Control HW9 - Q1 - (c)
clear ; clc ; close all
hz = 1000 ;
dt = 1/hz ; t_final = 50 ;
t = 0 : dt : t_final ;
y_0 = 0 ;    % Initial of x1
ym_0 =    0 ;
Ky_0 = 0 ;
Kf_0 = 0 ;
Kr_0 = 0 ;
X_0 = [ y_0 ; ym_0 ; Ky_0 ; Kf_0 ; Kr_0 ] ;
ap = 1 ; bp = 1 ; cp = -1 ;
gamma1 = 20 ; gamma2 = 10 ; gamma3 = 20 ;
syspara = struct('ap',ap,'bp',bp,'cp',cp,'gamma1',gamma1,'gamma2',gamma2,'gamma3',gamma3) ;
%% Plot 1
LW1 = 1.6 ;
LW2 = 1 ;
FS1 = 16 ;
FS_lg = 18 ;

% [ ts , Xt ] = ode45( @(t,X) NonlinearSystem(X,t,syspara) , t, X_0) ;
[ ts , Xt1 ] = RK4( @(t,X) NonlinearSystem1(X,t,syspara) , [0 t_final], X_0,dt) ;
[ ts , Xt2 ] = RK4( @(t,X) NonlinearSystem2(X,t,syspara) , [0 t_final], X_0,dt) ;
Xt1 = Xt1' ;
Xt2 = Xt2' ;

for i =1:length(ts)
    [dX1(:,i) , uc1(i) , r1(i) ] = NonlinearSystem1(Xt1(:,i),t(i),syspara) ;
end

f1 = figure ;
plot(ts,Xt1(1,:),'-','Color',[0 0.2 0.7],'LineWidth',LW1) ; hold on ;
plot(ts,Xt1(2,:),'--','Color',[0.9 0.04 0],'LineWidth',LW1) ;
hs1(1)=legend({'$y(t)$','$y_m(t)$'},'Interpreter','latex');
```

```
ax1(1) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('Output Response','Interpreter','Latex') % y label
axis([0 t_final 0 1.5])
axis normal
grid on

f2 = figure ;
plot(ts,Xt1(1,:)-Xt1(2,:),'-','Color',[0 0.2 0.7],'LineWidth',LW1) ; hold on ;
ax1(2) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('Output Tracking Error $e(t)$','Interpreter','Latex') % y label
axis normal
grid on

f3 = figure ;
plot(ts,uc1,'-','Color',[0 0.2 0.7],'LineWidth',LW1) ; hold on ;
ax1(3) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('Control Input $u(t)$','Interpreter','Latex') % y label
axis normal
grid on

f4 = figure ;
plot(ts,Xt1(3,:),'-','Color',[0 0.2 0.7],'LineWidth',LW1) ; hold on ;
plot(ts,(ap-4)/bp*ones(length(ts),1),'--','Color',[0.9 0.04 0],'LineWidth',LW1)
hs1(2)=legend({'$\hat{K}_y(t)$','$K_y^*(t)$'},'Interpreter','latex');
ax1(4) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('Estimated Parameter $K_y$','Interpreter','Latex') % y label
axis([0 t_final -3.5 1])
axis normal
grid on

f5 = figure ;
plot(ts,Xt1(4,:),'-','Color',[0 0.2 0.7],'LineWidth',LW1) ; hold on ;
plot(ts,cp/bp*ones(length(ts),1),'--','Color',[0.9 0.04 0],'LineWidth',LW1)
hs1(3)=legend({'$\hat{K}_f(t)$','$K_f^*(t)$'},'Interpreter','latex');
```

```
ax1(5) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('Estimated Parameter $K_f$','Interpreter','Latex') % y label
axis([0 t_final -1.3 0.5])
axis normal
grid on

f6 = figure ;
plot(ts,Xt1(5,:),'-','Color',[0 0.2 0.7],'LineWidth',LW1) ; hold on ;
plot(ts,4/bp*ones(length(ts),1),'--','Color',[0.9 0.04 0],'LineWidth',LW1)
hs1(4)=legend({'$\hat{K}_r(t)$','$K_r^*(t)$'},'Interpreter','latex');
ax1(6) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('Estimated Parameter $K_r$','Interpreter','Latex') % y label
axis([0 t_final 0 4.5])
axis normal
grid on

f7 = figure ;
plot(ts,Xt2(1,:)-Xt2(2,:),'-','Color',[0 0.2 0.7],'LineWidth',LW1) ; hold on ;
plot(ts,Xt1(1,:)-Xt1(2,:),'--','Color',[0.9 0.04 0],'LineWidth',LW1) ;
hs1(5)=legend({'$r(t) = sin(t)$','$r(t) = 1$'},'Interpreter','latex');
ax1(7) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('Output Tracking Error $e(t)$','Interpreter','Latex') % y label
% axis([0 t_final 0 1.5])
axis normal
grid on



for i = 1:length(ax1)
    set(ax1(i),'FontSize',FS1,'FontName','Times New Roman')
end

for i = 1:length(hs1)
    set(hs1(i),'FontSize',FS_lg,'FontName','Times New Roman')
end
```

```
%% Nonlinear System Function
function [dX , uc , r ] = NonlinearSystem1(X,t,syspara)
    ap = syspara.ap ;
    bp = syspara.bp ;
    cp = syspara.cp ;
    gamma1 = syspara.gamma1 ;
    gamma2 = syspara.gamma2 ;
    gamma3 = syspara.gamma3 ;
    y = X(1) ; ym = X(2) ;
    Ky = X(3) ; Kf = X(4) ; Kr = X(5) ;

    %===== Control Input
    r = 1 ;
    e = y-ym ;
    uc = Ky*y + Kf*sin(y) + Kr*r ;
    dKy = -gamma1*e*y*sign(bp) ;
    dKf = -gamma2*e*sin(y)*sign(bp) ;
    dKr = -gamma3*e*r*sign(bp) ;
    %===== Nonlinear System
    dy = -ap*y - cp*sin(y) + bp*uc ;

    %===== Referenc Model
    dym = -4*ym + 4*r ;

    dX = [ dy ; dym ; dKy ; dKf ; dKr ] ;
end

function [dX , uc , r ] = NonlinearSystem2(X,t,syspara)
    ap = syspara.ap ;
    bp = syspara.bp ;
    cp = syspara.cp ;
    gamma1 = syspara.gamma1 ;
    gamma2 = syspara.gamma2 ;
    gamma3 = syspara.gamma3 ;
    y = X(1) ; ym = X(2) ;
    Ky = X(3) ; Kf = X(4) ; Kr = X(5) ;

    %===== Control Input
```

```
    r = sin(t) ;
    e = y-ym ;
    uc = Ky*y + Kf*sin(y) + Kr*r ;
    dKy = -gamma1*e*y*sign(bp) ;
    dKf = -gamma2*e*sin(y)*sign(bp) ;
    dKr = -gamma3*e*r*sign(bp) ;
    %===== Nonlinear System
    dy = -ap*y - cp*sin(y) + bp*uc ;

    %===== Referenc Model
    dym = -4*ym + 4*r ;

    dX = [ dy ; dym ; dKy ; dKf ; dKr ] ;
end
```