

楊憲東◎著

非線性系統與控制 I

系統分析

楊憲東◎著



成大出版社

$$\oint_C \vec{B} d\vec{\ell} = \mu_0 \sum I_i$$

$$E = mc^2$$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$$



# 非線性系統與控制 I 系統分析



成大出版社

楊憲東◎著

非線性系統與控制Ⅱ

控制設計

楊憲東◎著



成大出版社

$$\oint_C \vec{B} d\vec{\ell} = \mu_0 \sum I_i$$

$$E = mc^2$$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{e}}$$

# 非線性系統與控制Ⅱ 控制設計



成大出版社

# 非線性系統與控制:課程簡介

## 書序言:回『家』

- 非線性系統中的『家』被稱為平衡點(equilibrium point)，這些家有些是穩定的，有些則是不穩定的。
- 穩定的家建築在山谷的最低處，重力位能會自動帶我們回家，此時回家是必然，不須人為控制力量的介入。不穩定的家建築在山頂的最高處，稍不小心即會滾落山坡，離家越來越遠，此時回家需要有工具的協助及策略的運用。
- 非線性系統是一門分析人與『家』關係的學問，而非線性控制則是在探討回家的方法。
- 如果現在你只有一個家或者是未曾遠離家，則你仍然是處於線性系統的領域，此時回家的工具靠的是線性代數與拉氏轉換(Laplace transfer)。
- 如果現在你有多個家，那麼你已從線性系統進入了非線性系統的領域。
- 如果更進一步，你已是四海為家，進入了『處處無家，處處是家』的境界，則你將是非線性系統的典範。在非線性系統中，線性代數與拉氏轉換已不能適用，我們必須學一些新的方法才能回家。
- 這門課即在介紹非線性系統的『家』，以及回『家』的各種方法。



# 線性系統只有一個家：一個平衡點

- 在生活上，家是一個可以穩定下來休息的地方，在科學上這個地方叫做平衡點。
- 在平衡點附近操作的系統稱為線性系統。平衡點就像是山谷中的村落，四面是高山，村落正位於四周圍最低的地方。村落中的人們日出而作、日落而息，四周圍高聳的山巒迫使人們在一天的工作後，終又回到山谷中的家。
- 依科學上的解釋，山谷中的人們是一個典型的線性系統，像是一個與世隔絕的桃花源，不管偏離平衡點(家)多遠，每天都有回到平衡點(家)的趨勢。



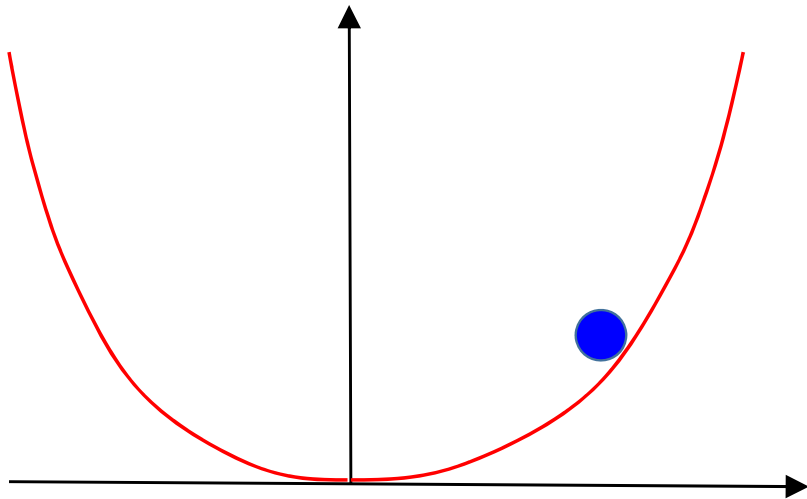
# 非線性系統:越過山頭到另一個家

- 直到有一天，有村民越過高山，出了山谷，來到了山外的世界。看到山外更富饒的村落，定居下來而有了第二個家。
- 這個遠離故鄉的村民這次離開了原來的平衡點，不再回去，而進入了另一個新的平衡點，其所表現的行為即是非線性系統。
- 讀者們當你們從線性系統的領域，進入了非線性系統，就像是這位越過高山的村民，遠離了故鄉熟悉的情境，將要面對山谷外不曾見過的奇異的世界。



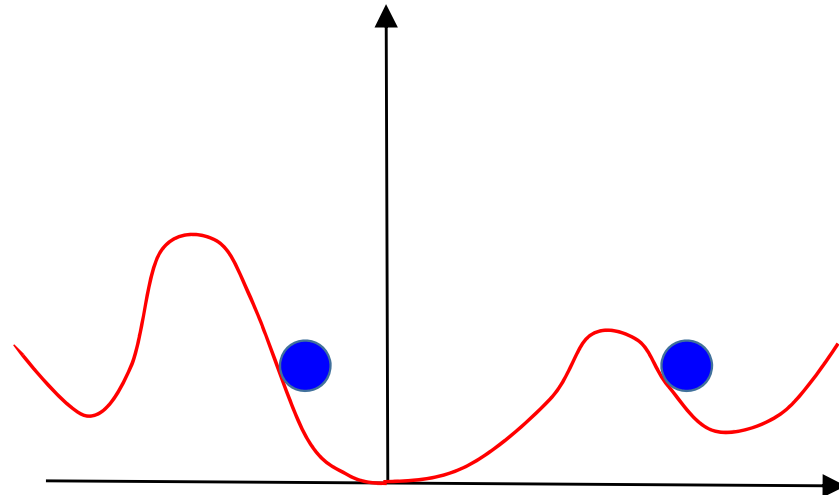
## 線性系統

線性系統假設這個世界只有一個平衡點，一個『家』；家鄉的四周環繞無窮高的山巒，不管攀爬多高，最後仍將盪回山谷中最低的平衡位置。**線性系統是一個虛擬的世界，它只是真實世界的一種近似描述。**當村民不曾越過高山，山谷中規律的生活確實像是線性系統。



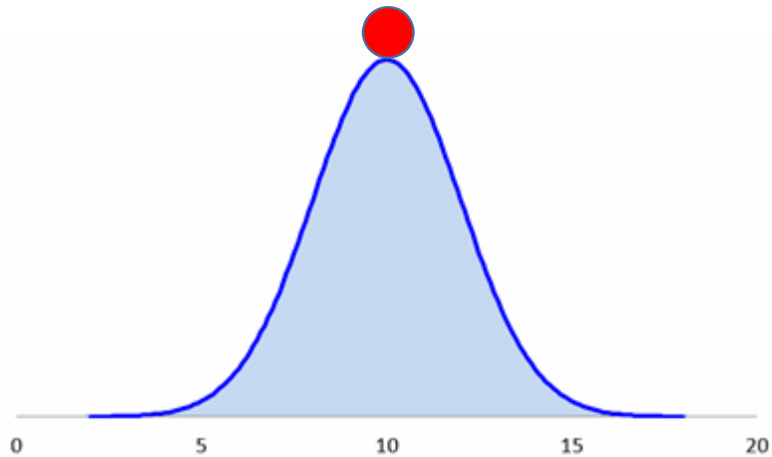
## 非線性系統

越過高山遠離山谷的村民才見識到真實的世界。真實的世界才是非線性系統，它有許多個平衡點，山谷之外另有山谷，高山之外另有高山。相當於**線性系統所看到的是某個山谷內的局部特寫，而非線性系統看到的則是峰巒層疊、溝壑相連的3D環繞全景。**



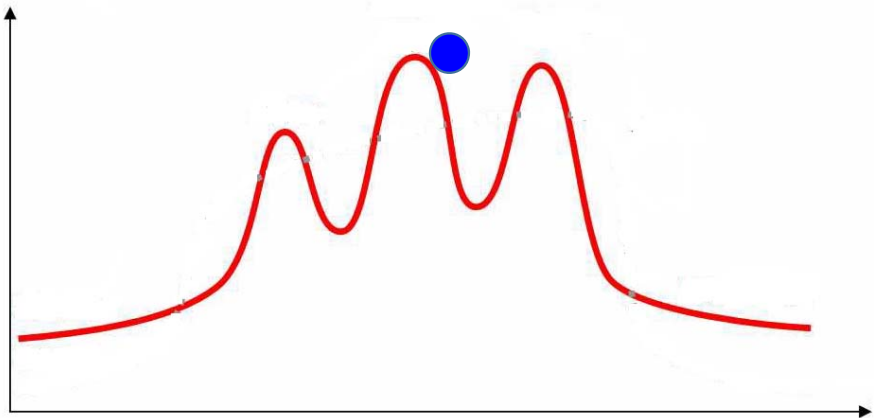
## 線性系統的不穩定為全域性

由於線性系統只能有一個家，所以這個家的特性代表了整個系統的特性，也就是線性系統的穩定性是全域的：只要是這個家(這個平衡點)是穩定的，則線性系統處處是穩定收斂；只要是這個家是不穩定的，則線性系統處處是發散。



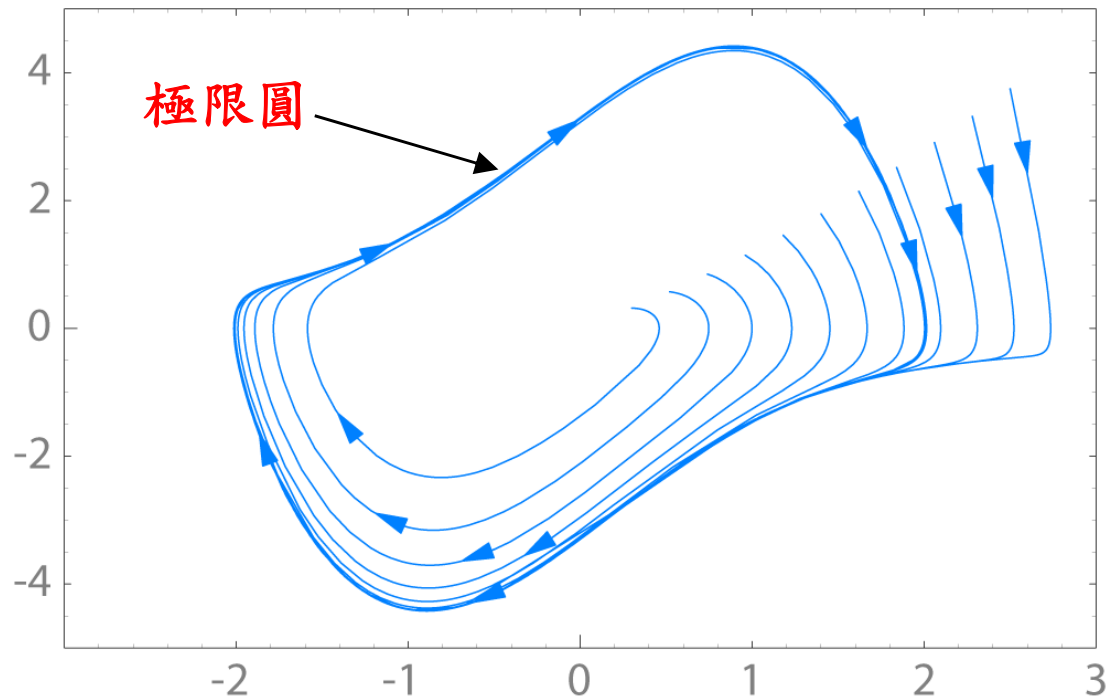
## 非線性系統的不穩定為區域性

非線性系統有好多個『家』(多平衡點)，離開了一個家(即對某一平衡點為發散)，卻可進入另外一個家(即對另一個平衡點為收斂)。所以非線性系統的穩定性是區域性的，當其對某一個平衡點為發散時，卻可能對另一區域的平衡點為收斂。



## 非線性系統的家不一定是平衡點 而是一條封閉曲線:極限圓(Limit cycle)

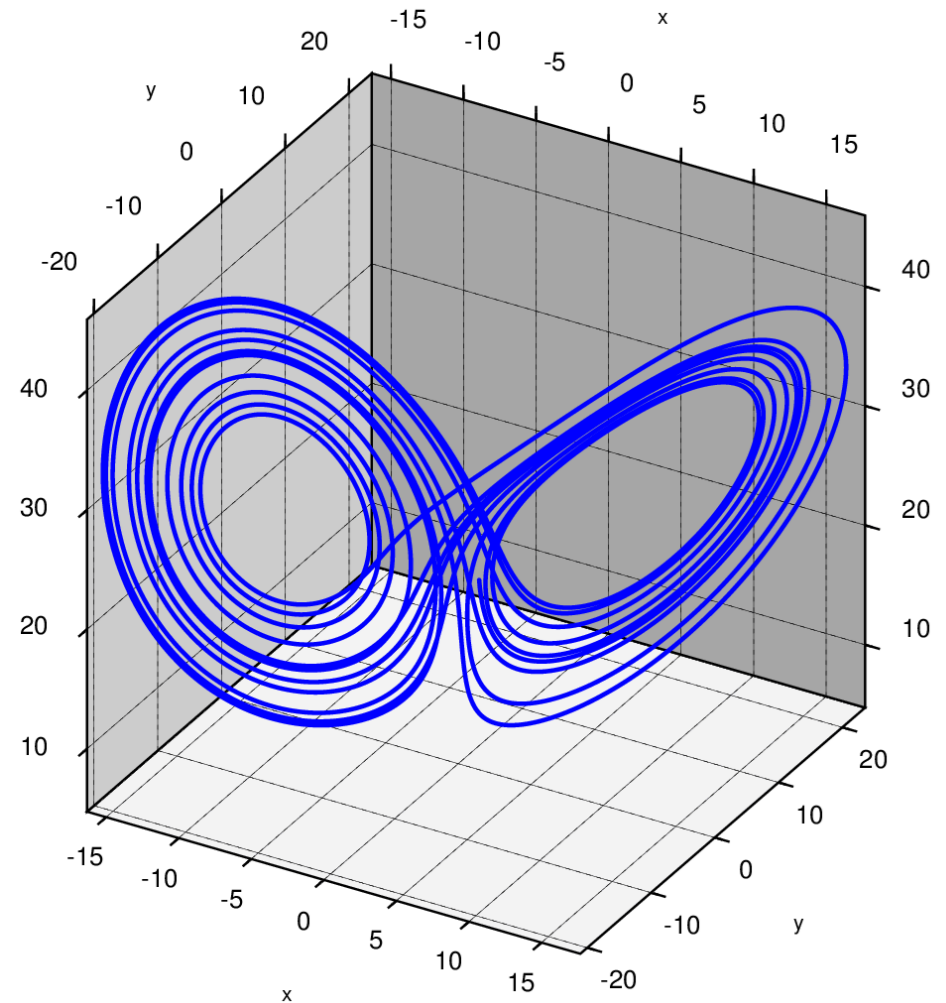
- 非線性系統的『家』不一定是固定的居所，家可能沿著一條固定的軌跡在移動著，這一條『家的移動軌跡』稱為極限圓(limit cycle)。
- 游牧民族逐水草而居，他們的家隨季節而遷徙，到明年的春天，又回到當初遷徙的起點。以一年為週期，游牧民族的家沿著極限圓而移動。





## 非線性系統的『處處無家，處處是家』：混沌(Chaos)

- 觀察都市遊民的遷徙行為，我們學習到一種廣義的『家』的定義。這個家的新定義打破了既有的家框架，它既不是固定的點，也非沿著固定的軌跡而移動，而是『處處無家，處處是家』的行為模式。
- 遊民居無定所的隨機移動行為，看來稀鬆平常，但是科學家直到20世紀的70年代才知道非線性系統存在著一種如遊民般移動的行為響應。在上一世紀的70年代，藉由電腦的協助，科學家發現了非線性方程式的一種特殊的解。這種解既不會收斂到任何的平衡點，不會發散到無窮大，也不會沿固定的軌跡震盪(極限圓)。
- 這種解的行為就像遊民一般，在某一特定區域內，永無止盡地迂迴纏繞，而且走過的地方絕不重複再走。科學家把這種非線性的特殊行為稱作**混沌**(chaos)。而由混沌軌跡衍生出**碎形幾何體**(fractal geometry)，也是非線性科學的重大發現。



# 非線性系統與控制第一部：系統分析

Part I: 非線性系統分析，主要在介紹非線性系統的特徵與現象，建立非線性系統的分析工具，並討論非線性系統的穩定性。

- 第一章是**非線性系統概論**，此章點出了非線性系統的主要特徵，以及其與線性系統的不同之處。本章將非線性系統歸納成四個『**五種類**』來加以介紹：(A)非線性系統的五種來源，(B)非線性系統的五種解答，(C)非線性系統的五種特性，(D)非線性系統的五種現象：(1)極限圓(limit cycle)、(2)分岔(bifurcation)、(3)遽變(catastrophe)、(4)混沌(chaos)、(5)碎形(fractal)。這是本書獨創的劃分方法，分門別類不會混淆，又方便於記憶。
- 第二章介紹**相平面分析法**(phase plane analysis)，這是**非線性系統的時域響應**(time response)法。前面用『回家』的概念來比擬非線性系統的變化，就是時域響應分析的結果。非線性系統在某一時刻的狀態可表成狀態空間(state space，又稱相空間，phase space)內的一個點，當系統狀態隨時間連續變化時，即在空間中連成一條狀態空間軌跡。前面提到的『回家』或『離家』，指的就是狀態空間軌跡進入平衡點或離開平衡點的現象。非線性系統如遊民般移動的行為響應，指的就是狀態空間軌跡隨時間迂迴纏繞的混沌現象。現在透過Matlab程式，任何非線性系統的複雜行為，都可在狀態空間中顯露無遺。

# 非線性系統與控制第一部：系統分析

- 第三章介紹**描述函數法**(describing function)，這是**非線性系統的頻域響應**(time response)法。描述函數的角色相當於線性系統的轉移函數(transfer function)，對於一個非線性元件只要能求得其描述函數，就可以採用類似線性控制中轉移函數的方法來加以處理。非線性元件的描述函數表示法尤其適用於線性、非線性元件混合的系統，透過轉移函數與描述函數的相容性，整個系統可統一用頻域響應的方法加以分析。
- 第四章是關於**非線性系統的穩定性分析**。非線性系統收斂時，不一定是收斂到平衡點，它可能是收斂到一條軌跡，如極限圓，或是收斂到一個區域之內，但既不進入平衡點也不進入極限圓，而是在此區域內不停地迂迴纏繞。所以當我們說某一非線性系統為穩定，必須同時說明它是相對於平衡點的穩定，還是相對於軌跡的穩定？亦或是相對於區域的穩定？同時非線性系統既無特徵值(eigenvalue)亦無極點(pole)可用以判斷穩定性，所以需要針對非線性系統建立新的判斷穩定性的準則。本章將介紹其中最常用的準則，稱為**Lyapunov定理**，此定理實際上是利用等高線遞減法去搜尋『回家』的路徑。
- 第五章是關於**時變(time-varying)非線性系統的穩定性分析**。一朵花在1分鐘的觀察尺度內，幾乎沒有變化，可視為非時變系統；但在24小時的觀察時間內，花的成長或凋謝過程即會呈現，此時花必須視為時變系統。所以**非時變與時變之分在於經歷時間的長或短，而非線性與線性之分在於空間涵蓋範圍的大或小**。時變非線性系統所描述的是系統在長時間、大範圍空間區域的動態變化，所對應的方程式是屬於變係數非線性微分方程式。時變系統的性質與非時變系統有很大的不同，而且其穩定性分析較為複雜，故將其獨立出來，放在第五章詳加分析。

# 非線性系統與控制第二部：控制設計

當我們分析非線性系統的行為並確認其為不穩定之後，接下來的工作即是施加控制的手段，使其穩定下來並達到預期的動態響應。針對非線性系統的不同特質，必須選對控制方法才能發揮控制的效果。本課程的第二部介紹了控制非線性系統的各種不同方法，分析其適用時機，並討論其優缺點。

- 第6章介紹**回授線性化**(feedback linearization)，這是本書所介紹非線性控制的第一個方法。控制的目的有很多，如命令追蹤、雜訊排除等，但本章所提到的回授控制的目的則是為了線性化。也就是說，**透過控制的手段，將非線性系統控制成線性系統**。一旦變成線性系統，即可利用已知的方法來加以控制。回授線性化不是傳統上捨去高階項的線性化，它是採用訊號回授和補償的方式將非線性系統轉換成「同義」的線性系統。然後再針對所得到的線性系統進行線性控制，最後將線性控制施予逆轉換，即可得到所需要的非線性控制設計。
- 第7章介紹**逆向步進控制**(backstepping control)，這個方法直接對非線性系統進行控制，不施以線性化的過程。回授線性化的控制方法雖然簡單，但卻要付出雙倍的代價，因為此法要求內、外迴路的雙重控制：內迴路的控制進行回授線性化，外迴路的控制達成控制目標(如指令追蹤)。這種雙重控制迴路的設計理念引發新的質疑：為何我們不能直接對非線性系統進行控制，一次就達到控制目標，而要透過線性化的中間過程？**本章解釋『線性化』這個中間過程有時候非絕對必要，直接針對非線性系統設計控制律反而更有效率、更容易實現**。逆向步進控制(backstepping control)正是基於這樣的理念而被提出來。



# 非線性系統與控制第二部：控制設計

- 第8章介紹**滑動模式控制**(sliding mode control)，這是一種實用又簡易的非線性控制法則。顧名思義，**滑動控制的目的就是要驅使系統進入一個滑動面**(sliding surface)，它是相平面上的一條曲線或曲面，代表了控制系統最後所要進入的狀態。一旦系統進入滑動面，則控制的規格與目標即自動被滿足。滑動控制就是幫助系統進入滑動面所採取的一切控制行為，它是藉由持續的切換動作來滿足下列二項要求：(1)不管系統動態位於相平面的哪一點，均有往滑動面運動的趨勢。(2)一旦系統進入滑動面，滑動控制能確保系統一直維持在滑動面內，而不致離開。
- 第9章介紹**適應性控制**。適應性控制，顧名思義即是能**適應環境的改變，而隨時更新控制策略**。適應性控制的理想與強健控制(如第8章的滑動模式控制，第10章的 $H_\infty$ 控制)剛好相反。以做事策略來看，強健控制是『以不變應萬變』，適應性控制則是『以動制動』；以商業設計來看，強健控制是『通用型』設計，適應性控制是『客製化』設計(customized design)。適應性控制的表現一定比強健控制好，但相對的，付出的成本也高。它必須具有可變的控制器結構，也必須具有足夠的感測元件，用以感測外界環境的多樣性變化。
- 第10章介紹 **$H_\infty$ 強健控制**。強健控制的理想和適應性控制完全相反，它的**控制器參數與結構是固定的，不因外在環境的變化而做改變**。所以這是一通用型的控制器，實現的成本低廉。 $H_\infty$ 強健控制是針對最惡劣情況做設計(Worst-case design)。如果最惡劣情況都可以控制了，其他情況自然也就沒問題。當然處處都以最惡劣情況來考量，會造成過分保守的控制設計，這是 $H_\infty$ 強健控制的內在缺點。

# 非線性系統與控制第二部：控制設計

- 第11章介紹通用的控制法則：**最佳化控制**。不管受控系統是線性還是非線性，最佳化(optimization)控制設計均可適用。目前求得最佳控制解的方法有二種，第一種方法是根據變分原理(calculus of variation)，第二種方法是根據動態規劃(Dynamic Programming)原理；變分所得到的最佳控制是開迴路(open-loop)的型式，它是時間 $t$ 的函數，是透過常微分方程式的求解而得到；而動態規劃所得到的最佳控制則是閉迴路(closed-loop)的型式，它是位置 $x$ 的函數，是透過偏微分方程式的求解而得到。開迴路最佳控制告訴我們沿著某一特定軌跡上，在時間 $t$ 時，最佳控制策略是甚麼；閉迴路最佳控制則告訴我們，當在位置 $x$ 時(不管先前是如何到達 $x$ )，所要採用的最佳控制策略是甚麼。**最佳控制不僅可應用於人造的工程系統與人文社會系統，自然界的所有定律也都是老天爺最佳化的傑作**。我們所看到的、所測量到的所有自然現象與物理定律，都是被老天爺精心安排的最佳化設計。
- 第12章介紹**混沌控制**。作為本書的最後一章，本章的內容是前面各章的總結與應用，也是本書的核心精華所在。混沌控制是一個非常廣泛的綜合性題材，它涵蓋了本書part I的非線性系統分析與part II的非線性控制設計。現在我們一一將這些非線性控制的方法應用到混沌系統之中，進而發展出各種混沌控制理論。歸納而言，混沌控制結合了混沌現象的分析，混沌數學方程式的建立以及各種非線性控制理論的運用，而其實際的應用則在於通訊的加密與解密技術，這些主題都將在本章一一介紹。

# 非線性控制方法的簡單分類

譬如我們要為一班學生設計帽子，帽子的大小至少要让每個學生都能戴。則設計帽子的方法有三種：

- **強健性設計(robust design)**：只針對頭最大的學生設計帽子即可，其他人不管。連頭最大的學生，都戴的下，其他學生自然都戴的下。這頂帽子最強健，因為適用於每個學生。當然人人都可戴的帽子，人人都戴得不舒服(除頭最大的那個)。而這正是強健性控制的特徵，它不是針對一個人(一個系統)設計，而是針對一群人(一群系統)做設計，也就是所謂的『通用型』設計。本書第九章、第十一章均屬於強健性設計。
- **適應性設計(adaptive design)**是為每個學生設計一頂專屬的帽子，花費最多，但學生戴得最舒服。專屬的帽子適應性佳，但強健性最差，因為專屬於某一個學生的帽子，另外一些學生可能都戴不下。本書第十章即是屬於適應性設計。
- **合成型設計**：將學生的頭圍大小分成四類，再將帽子設計成四段式的扣孔，每一段扣孔剛好適用於某一類頭圍的學生。相較於無段式設計(適應性設計)，四段式設計花費較少，但能同時兼顧到強健性與適應性。合成型設計即是本書第十章所提到的增益排程設計(Gain-scheduling design)，帽子的四段式設計就是一種四段式的增益排程。

本課程所將介紹的**各種非線性控制理論其實沒有好壞、高下之分**。看來簡單的控制理論只要用對地方就是最好的控制理論；反之，再好的控制理論用錯了地方也是不好的理論。我們學習各種控制理論就好像是在學習各種不同的武功招式，最怕的是學得武功百百招，臨場卻不知要用哪一招。本課程的part II希望能讓修課同學深刻明瞭每一種控制理論的使用時機，並學會用在對的地方。