國立成功大學
National Cheng Kung University

National Cheng Kung University

Department of Aeronautics and Astronautics

非線性控制第八章作業

Author:

Chen, Guan-Shiun (陳冠勳)

Supervisor:

Prof Yang

Student ID No.:

P18091026

An Assignment submitted for the NCKU:

【*P4-065*】非線性控制

December 23, 2020

Contents

1. Problem Statement

8.1 考慮下列之二階非線性系統

$$\dot{x}_1 = x_2 + \theta_1 x_1 \sin x_2 \tag{1a}$$

$$\dot{x}_2 = \theta_2 x_2^2 + x_1 + u \tag{1b}$$

其中 u 是控制訊號；θ_1 和 θ_2 是不確定的參數，但滿足

$$|\theta_1| \le a, \quad |\theta_2| \le b \tag{2}$$

本題的目的是要設計滑動控制使得系統 (1) 相對於以下的滑動曲面爲 Lyapunov 穩定

$$S = (1+a)x_1 + x_2 \tag{3}$$

(a) 試證明在不確定性參數 θ_1、θ_2 的作用下，能確保 $S\dot{S} < 0$ 的滑動控制 u 爲

$$u = u_{eq} - \beta(x)\text{sgn}(S) \tag{4}$$

其中

$$u_{eq} = -x_1 - (1+a)x_2 \tag{5}$$

$$\beta(x) = a(1+a)|x_1| + bx_2^2 + b_0, \quad b_0 > 0 \tag{6}$$

提示：參考 8.4.3 節的證明方法，先求出 $\dot{S}$ 的表示式（利用 (1) 式），將 (4) 式的 u 代入 $\dot{S}$，再求 $\dot{S}S$ 的表示式，利用不等式層層化簡，得到關係式 $\dot{S}S \le -\eta|S|$ ，其中 η 可用常數 a、b、b_0 表示之。

(b) 用 Matlab 模擬以上滑動控制律的正確性。設定 $a = b = 1$ ，並使 θ_1 和 θ_2 在區間 $[-1, 1]$ 內任意變化，每次模擬均取不一樣的 θ_1 和 θ_2 ，例如 $\theta_1 = \sin t$ ，$\theta_1 = \cos t$，或是取成 ± 1 之間的任意隨機亂數（利用 Matlab 的隨機亂數產生器）。用數值模擬驗證，當 θ_1 和 θ_2 區間 $[-1, 1]$ 內任意變化時，滑動控制律 (4) 都可確保相平面軌跡進入滑動曲面 $S = 0$ ，同時觀察是否有顫動現象伴隨發生。

(c) 設定 $a = b = 2$，重覆上面步驟的模擬，並觀察顫動的情況有何改變。

2. Answer to Problem 8.1 (a)

滑動模式控制的精神在於透過控制 $S(\mathbf{x},t)$ 此單一變數的運動行爲進一步達到控制 $\mathbf{x}=[x_1,x_2,\ldots,x_n]^T$ 運動行爲的目的。對於非線性系統 (1) 而言，選擇滑動面 $S=(1+a)x_1+x_2$，若欲使系統相對於滑動曲面爲 Lyapunov 穩定，吾人首先可得其沿著系統軌跡的時間導數爲

$$\begin{aligned}\dot{S}&=(1+a)\dot{x}_1+\dot{x}_2\\&=(1+a)(x_2+\theta_1x_1\sin x_2)+\theta_2x_2^2+x_1+u\\&=\Big(x_1+(1+a)x_2\Big)+\Big((1+a)\theta_1x_1\sin x_2+\theta_2x_2^2\Big)+u\end{aligned}\tag{7}$$

值得注意的是，在 (7) 當中吾人將含有結構不確定性參數 θ_1,θ_2 項與未含有結構化不確定性參數項分離。

對於 (7) 而言，由於受控體含有 θ_1,θ_2 之結構不確定性參數，因此無法準確求得 $\dot{S}=0$ 的控制律 u。對於此問題，吾人可將含有結構不確定性參數 θ_1,θ_2 項與未含有結構化不確定性參數項分開處理，意即選擇 $u=u_{eq}-\beta(x)\mathrm{sgn}(S)$，其中 u_{eq} 抑制未含有結構化不確定性參數項對系統帶來的影響，而 $-\beta(x)\mathrm{sgn}(S)$ 則抑制含有結構不確定性參數 θ_1,θ_2

項對系統帶來的影響，最終使得系統滿足

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}S^2 \le -\eta|S|$$

之總體目標 。觀察 (7) 右手邊第一項，吾人可首先選擇

$$u_{eq} = -x_1 - (1+a)x_2$$

則 (7) 可被改寫成

$$\begin{aligned}\dot{S} &= \Big(x_1 + (1+a)x_2\Big) + \Big((1+a)\theta_1 x_1 \sin x_2 + \theta_2 x_2^2\Big) + u \\ &= \Big((1+a)\theta_1 x_1 \sin x_2 + \theta_2 x_2^2\Big) - \beta(x)\mathrm{sgn}(S) \qquad (8)\end{aligned}$$

再者，由於 $|\theta_1| \le a, |\theta_2| \le b$，吾人可對 (8) 右手邊第一項進行估計：

$$\begin{cases} (1+a)\theta_1 x_1 \sin x_2 \le \Big|(1+a)\theta_1 x_1 \sin x_2\Big| \le a(1+a)|x_1| \\ \theta_2 x_2^2 \le \Big|\theta_2 x_2^2\Big| \le b x_2^2 \end{cases} \qquad (9)$$

因此，結合 (8)–(9) 及選擇

$$\beta(x) = a(1+a)|x_1| + b x_2^2 + b_0, \quad b_0 > 0$$

吾人可得

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}S^2 = S\dot{S} &= \Big((1+a)\theta_1 x_1 \sin x_2 + \theta_2 x_2^2\Big)S - \beta(x)|S| \\
&\leq \Big(a(1+a)|x_1| + bx_2^2\Big)|S| - \Big(a(1+a)|x_1| + bx_2^2 + b_0\Big)|S| \\
&= -b_0|S| \qquad (10)
\end{aligned}
$$

此時系統滿足

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}S^2 \leq -b_0|S| =: -\eta|S|, \quad \eta = b_0 > 0 \qquad (11)
$$

意即在控制律 $u = u_{eq} - \beta(x)\mathrm{sgn}(S)$ 的作用下能夠在有限時間確保系統軌跡達到滑動面，且到達時間 $t = t_f$ 可被表示成

$$
t_f \leq t_0 + \frac{|S_0|}{\eta}
$$

$\square$

3. Answer to Problem 8.1 (b)

在此階段，吾人以 Matlab 模擬以上滑動控制律的正確性，其中選擇結構化不確定參數 θ_1, θ_2 的界 $a = b = 1$，並且選擇

(i) $\theta_1 = \theta_2 = \sin(t)$。

(ii) $\theta_1 = \theta_2 = \cos(t)$。

(iii) θ_1, θ_2 爲 $[-1, 1]$ 之間隨機時變亂數。

及選擇 8 組初始狀態滿足

第幾組	初始狀態	第幾組	初始狀態
$(x_1^1(0), x_2^1(0))$	$(1, 0)$	$(x_1^2(0), x_2^2(0))$	$(0, 1)$
$(x_1^3(0), x_2^3(0))$	$(-1, 0)$	$(x_1^4(0), x_2^4(0))$	$(0, -1)$
$(x_1^5(0), x_2^5(0))$	$(1, 1)$	$(x_1^6(0), x_2^6(0))$	$(-1, 1)$
$(x_1^7(0), x_2^7(0))$	$(-1, -1)$	$(x_1^8(0), x_2^8(0))$	$(1, -1)$

模擬結果如圖 1–3 所示，從圖中吾人發現儘管系統含有不確定性參數 θ_1, θ_2，然而只要兩者的上下界已知，即可透過滑動模式控制使得系統軌跡能夠在有限時間內相對於滑動面爲 Lyapunov 穩定 (意即 $S \to 0$)；

然而， 因爲不確定性的存在，將無法設計一滑模控制使系統軌跡維持在滑動面上。因此，透過切換控制可有效地將狀態軌跡趕回滑動面，形成一個在滑動面兩邊不停跳耀的狀況，意即系統眞實軌跡將落在以滑動面 $S = 0$ 爲中心的帶狀區域，而帶狀區域的大小將由系統不確定性直接影響，而此也是導致產生顫動效應 (chattering effect) 的主因。

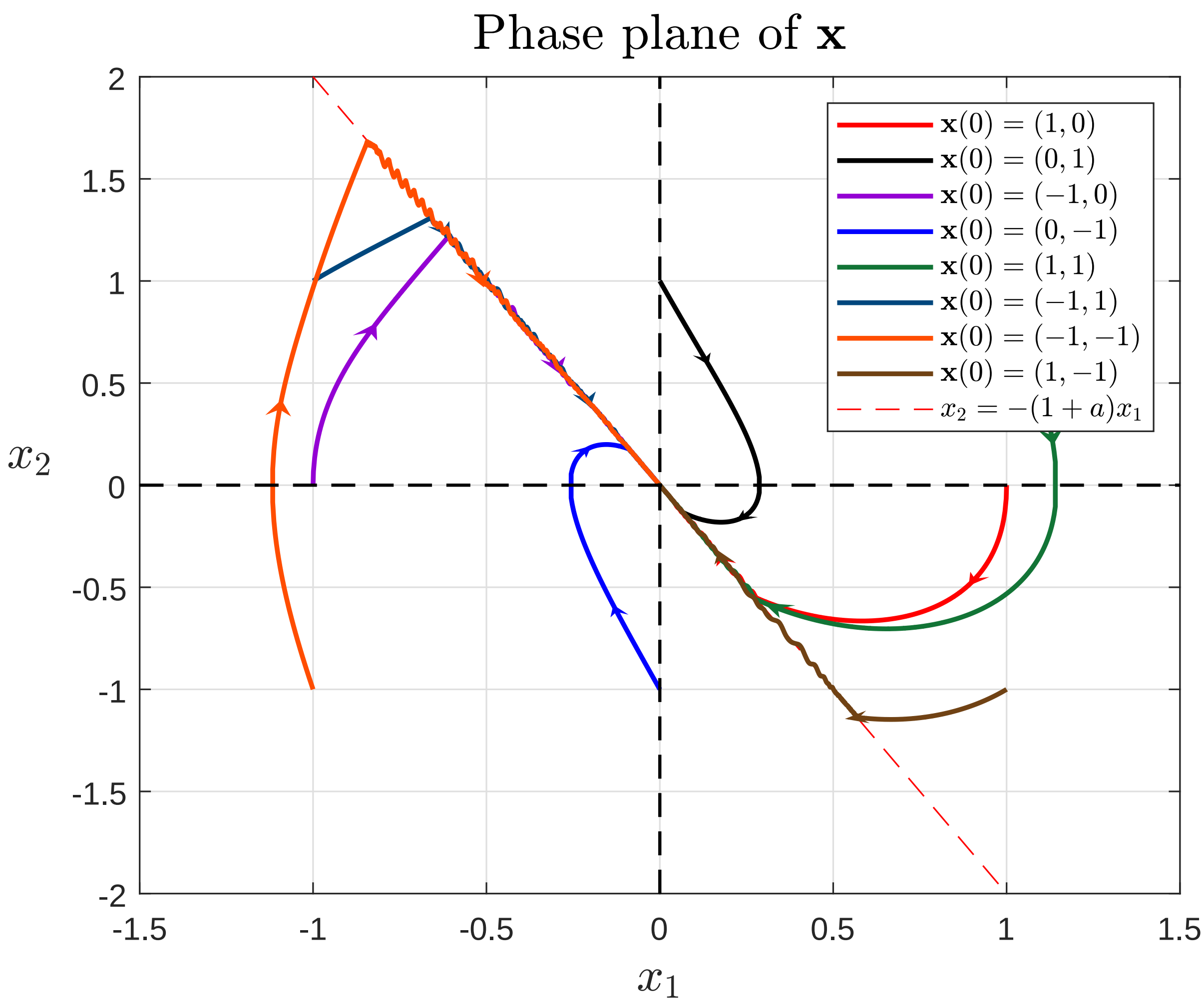

Figure 1: 相平面 $x_1 - x_2$，$\theta_1 = \theta_2 = \sin(t)$

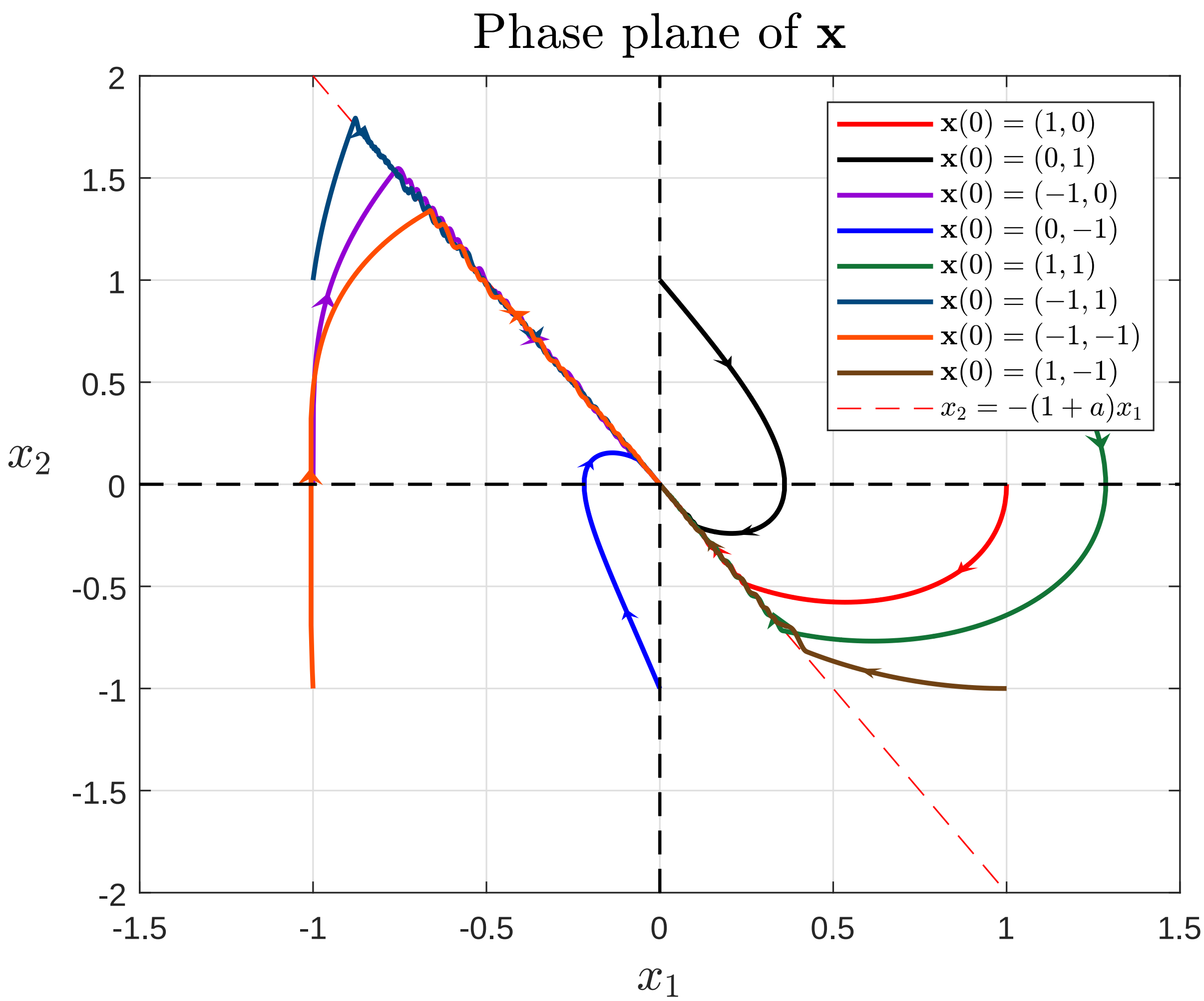

Figure 2: 相平面 $x_1 - x_2$，$\theta_1 = \theta_2 = \cos(t)$

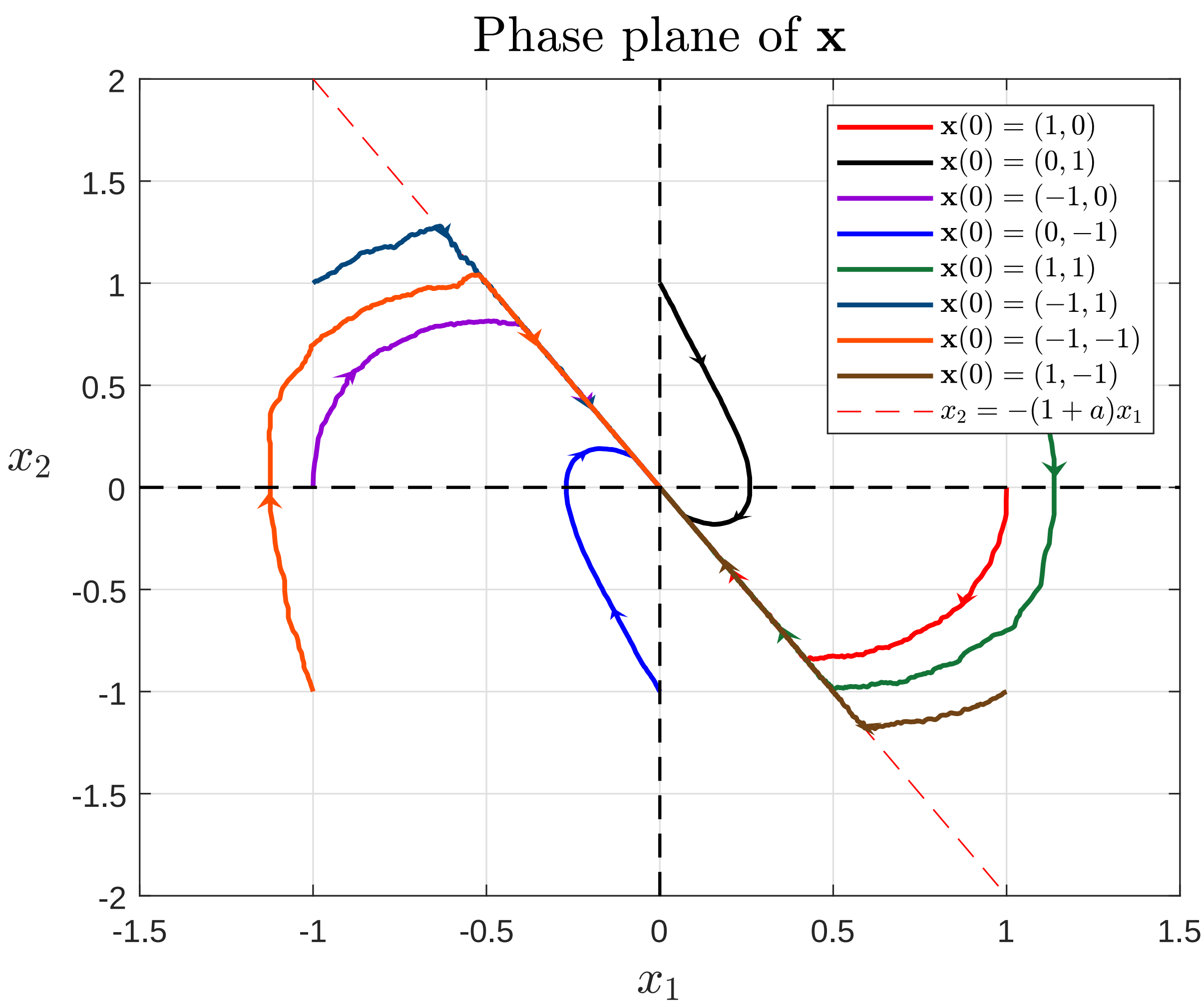

Figure 3: 相平面 $x_1 - x_2$，θ_1, θ_2 爲 $[-1, 1]$ 間隨時間改變的亂數

4. Answer to Problem 8.1 (c)

透過上述分析，吾人成功設計一滑動模式控制使得系統狀態能夠在有限時間內抵達以 $S=0$ 為中心所圍成的帶狀區域內，意即系統相對於滑動曲面為 Lyapunov 穩定。因此，在此階段吾人欲知道系統參數對於系統顫動效應的影響，因此吾人考慮初始狀態為 $[1,1]^T$ 及 $\theta_1=\theta_2=\sin(t)$，並且有以下分析

(i) 吾人在此階段討論調變參數 "a" 對於系統的影響，因此固定 $b=1,\ b_0=0.01$，比較 $a=1, a=2, a=4$ 的差異。相平面模擬如圖 4 所示，時域響應分析如圖 5–6 所示。從圖中可以看到雖然透過理論分析吾人僅能保證系統軌跡在有限時間進入滑動面附近的區域，然而在模擬階段可以發現系統軌跡有進一步朝原點這一 trivial solution 前進的趨勢，且由於滑動面選擇為 $S=(1+a)x_1+x_2$，因此不同的 a 將對應到不同的滑動面。從相平面可以發現，當將 a 放大時，將導致系統顫動效應增加；然而，從時域響應上可以看到 a 的上升有加速系統收斂到原點的趨勢，在降低 $x_1(t)$ 的最大超越量同時反而大幅提升了 $x_2(t)$ 的最大

超越量。

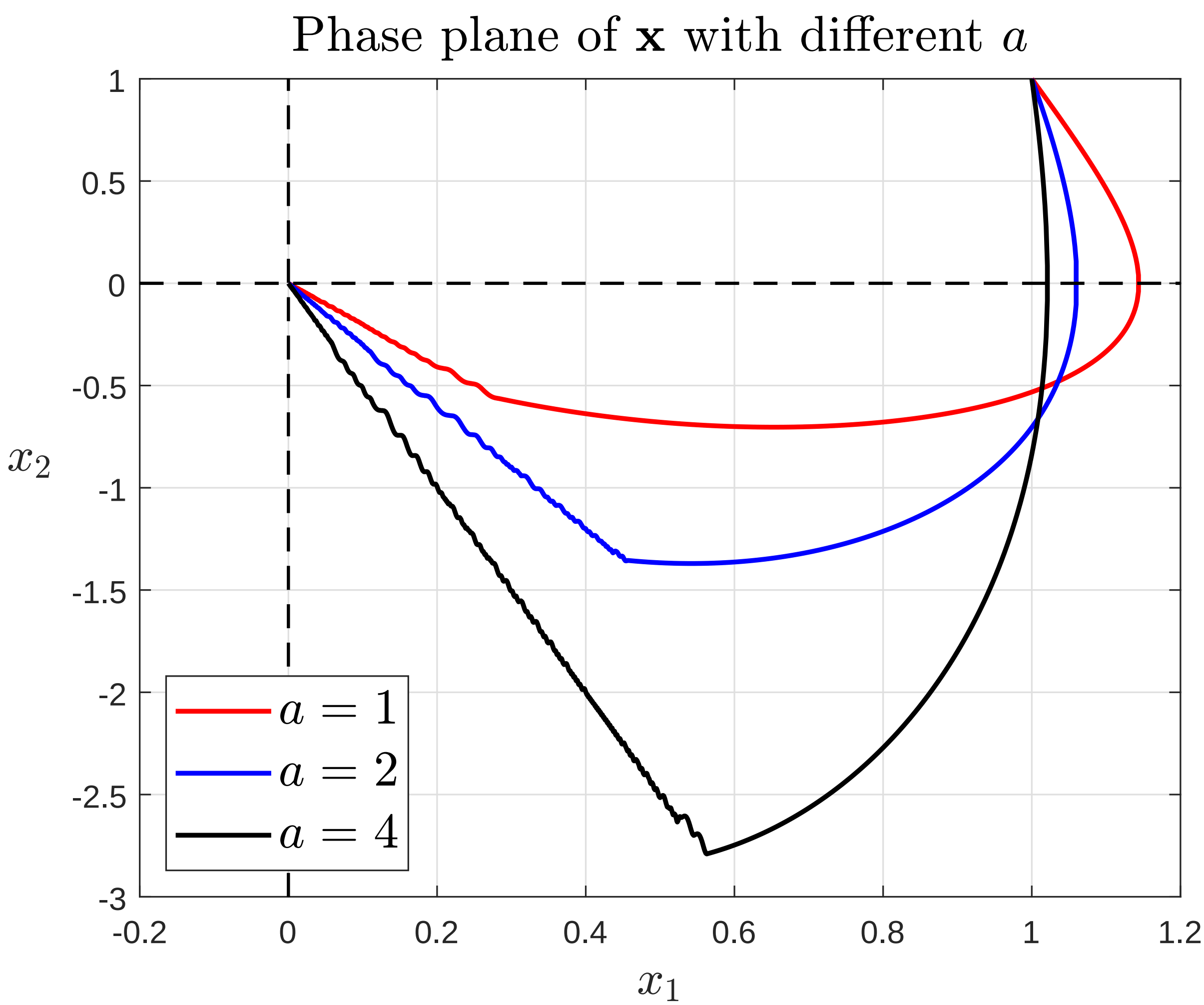

Figure 4: 相平面 $x_1 - x_2$，調變 a

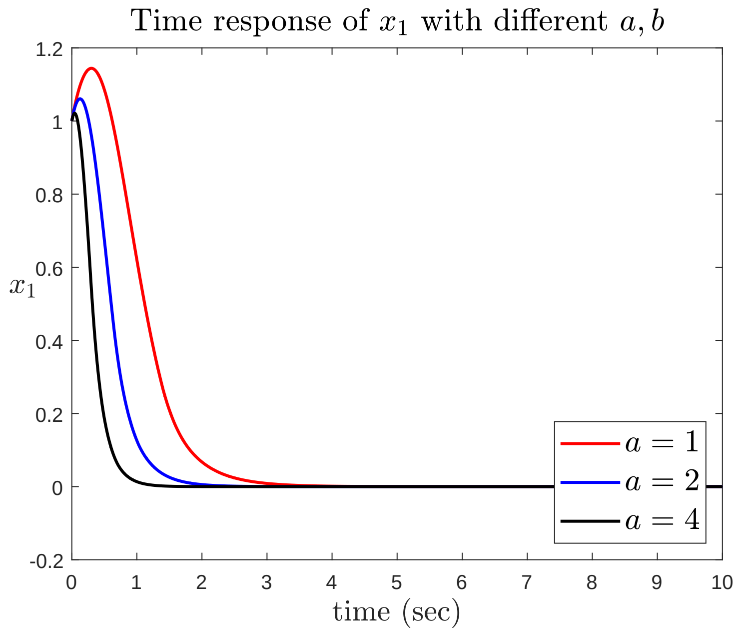

Figure 5: 時域響應 $x_1 - t$，調變 a

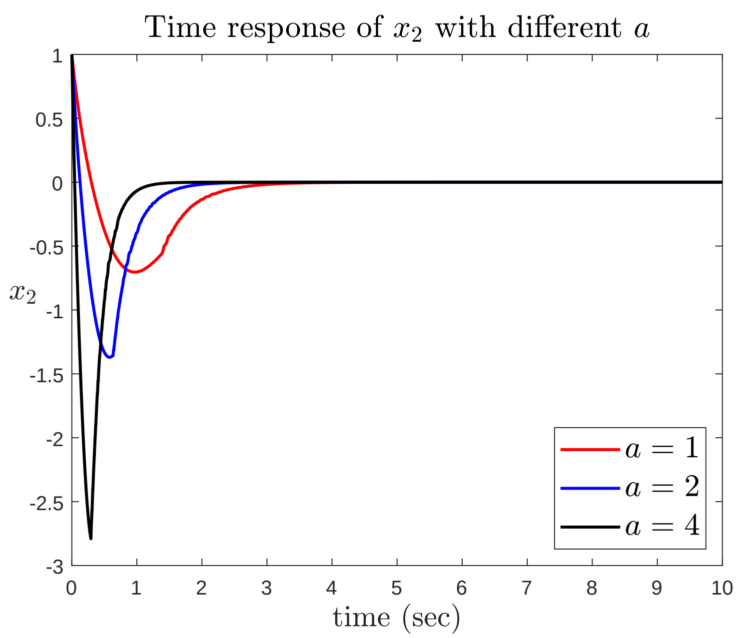

Figure 6: 時域響應 $x_2 - t$，調變 a

(ii) 吾人在此階段討論調變參數 “b” 對於系統的影響，因此固定 $a = 1,\ b_0 = 0.01$，比較 $b = 1$,$b = 2$,$b = 4$ 的差異。相平面模擬如圖 7 所示，時域響應分析如圖 8–9 所示。從圖中可以看到雖然透過理論分析吾人僅能保證系統軌跡在有限時間進入滑動面附近的區域，然而在模擬階段可以發現系統軌跡有進一步朝原點這一 trivial solution 前進的趨勢。

另一方面，由於滑動面選擇 $S = (1 + a)x_1 + x_2$ 與參數 b 無關，因此不同的 b 將對應到相同的滑動面。從相平面可以發現，當將 b 放大時，將導致系統顫動效應增加，且與上一部份放大 a 相比更加明顯；從時域響應上可以看到 b 的上升雖然有加速系統收斂到原點的趨勢，在降低 $x_1(t)$ 的最大超越量同時只是小幅提升了 $x_2(t)$ 的最大超越量，但是在收斂速度與上一部份放大 a 相比調變 b 對於提升系統收斂速度並沒有顯著的增加。

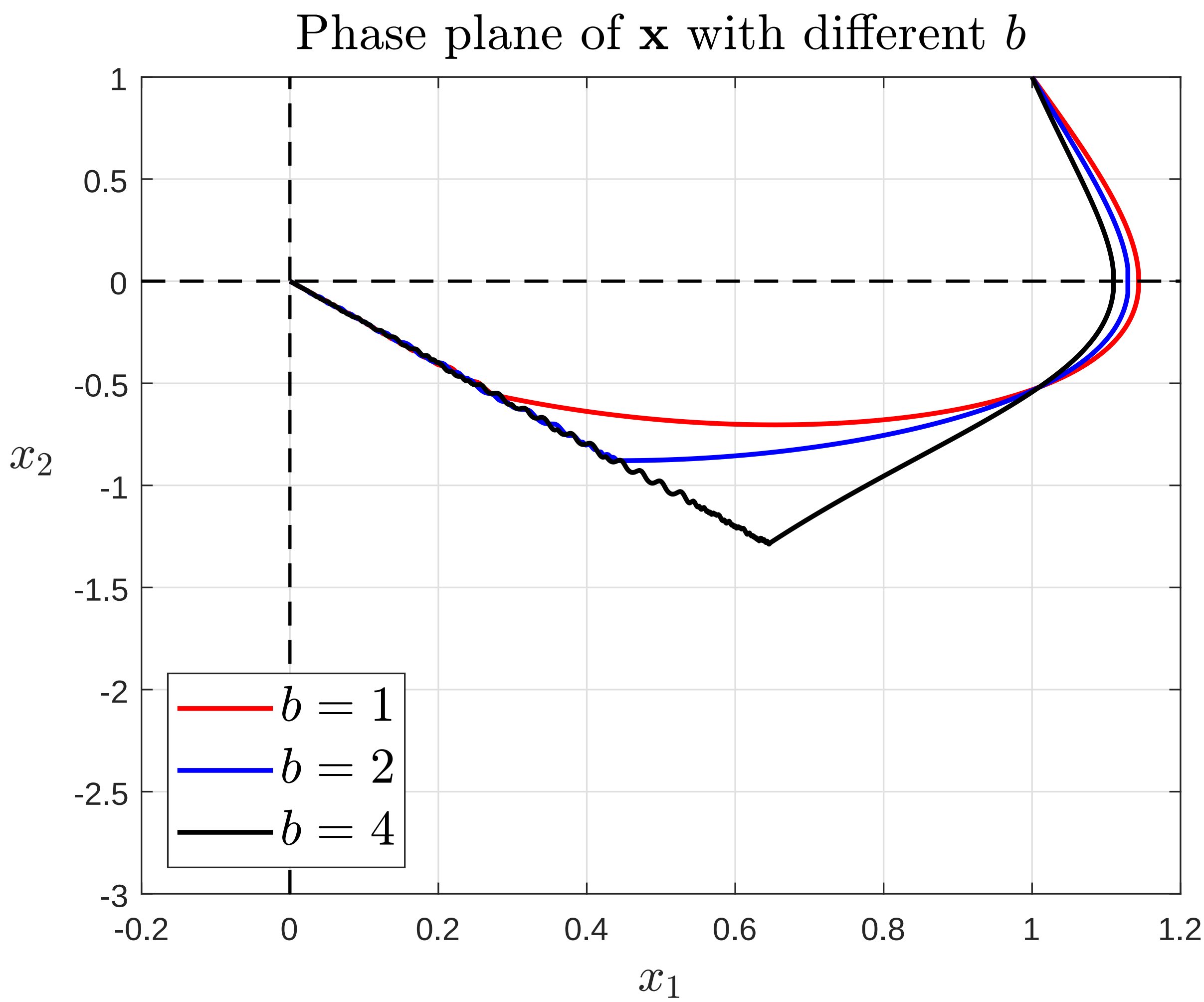

Figure 7: 相平面 $x_1 - x_2$，調變 b

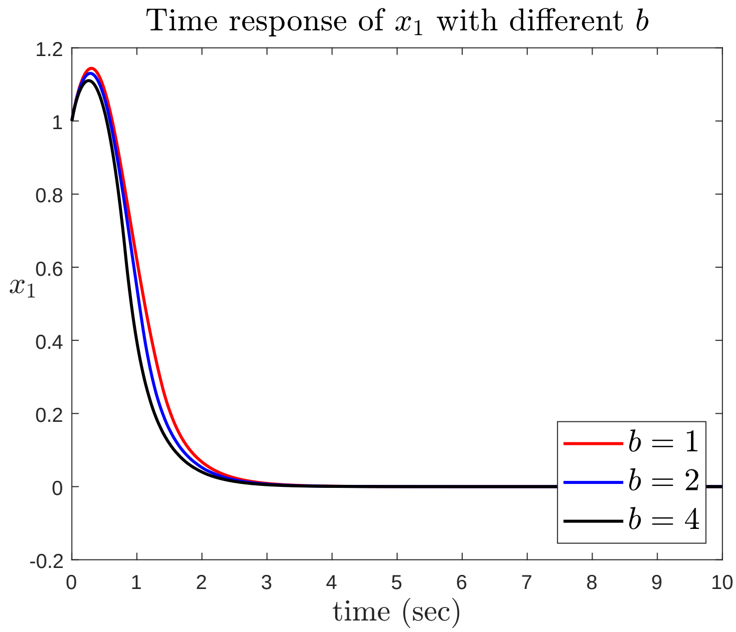

Figure 8: 時域響應 $x_1 - t$，調變 b

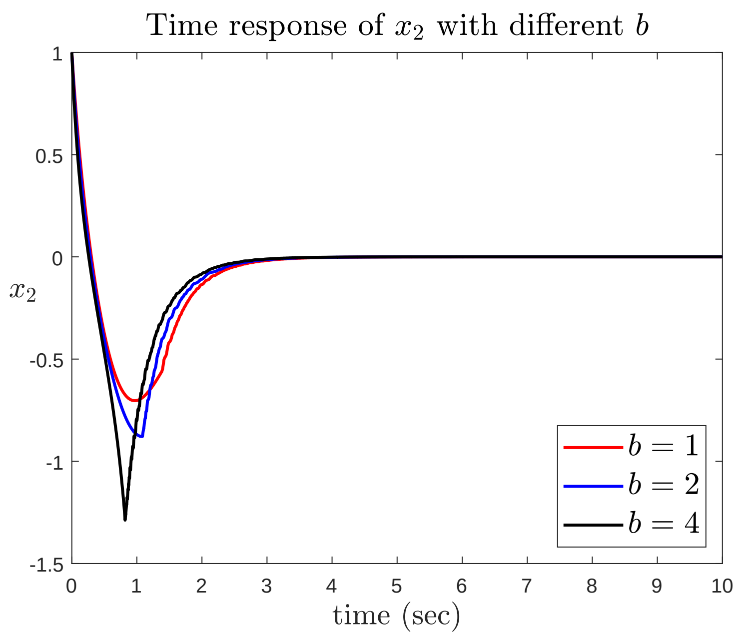

Figure 9: 時域響應 $x_2 - t$，調變 b

(iii) 吾人在此階段討論同時調變參數 "a" 和 "b" 對於系統的影響，因此固定 $b_0 = 0.01$，比較 $a = b = 1,\ a = b = 2,\ a = b = 4$ 的差異。相平面模擬如圖 10 所示，時域響應分析如圖 11–12 所示。從圖中同樣可以看到雖然透過理論分析吾人僅能保證系統軌跡在有限時間進入滑動面附近的區域，然而在模擬階段可以發現系統軌跡有進一步朝原點這一 trivial solution 前進的趨勢。

另一方面，由於滑動面選擇 $S = (1 + a)x_1 + x_2$，不同的 a 將對應到不同的滑動面。

值得注意的是，同時改變 a, b 可視爲 改變 a 及改變 b 的疊加情形。從相平面可以發現，當將 a, b 放大時，將導致系統顫動效應增加，與上一部份放大 b 相比效果類似，只是對應到不同的滑動面；從時域響應上可以看到 a, b 的上升有加速系統收斂到原點的趨勢，在降低 $x_1(t)$ 的最大超越量同時只是更大幅度提升了 $x_2(t)$ 的最大超越量 (與僅調變 a 相比)，因此同時調變 a, b 對於系統性能並沒有改善。

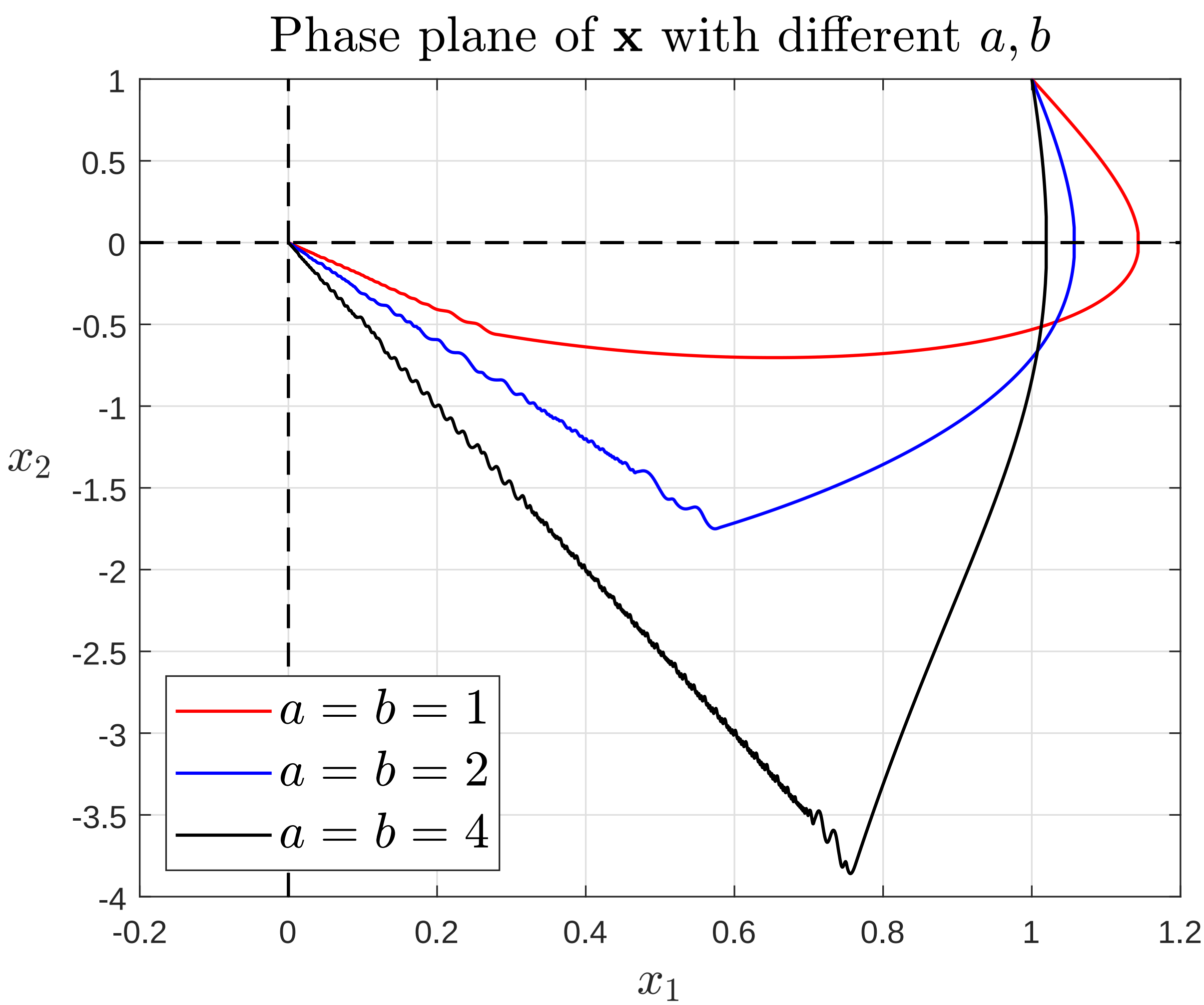

Figure 10: 相平面 $x_1 - x_2$，調變 a, b

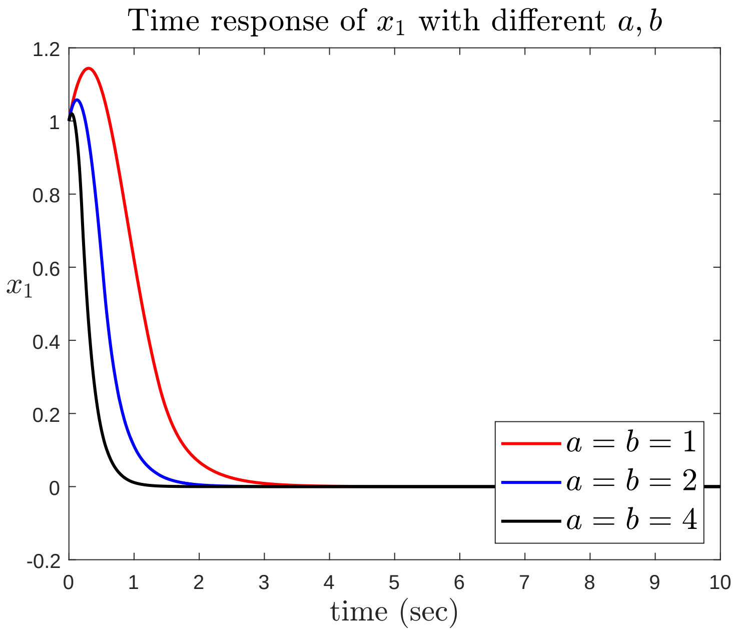

Figure 11: 時域響應 $x_1 - t$，調變 a, b

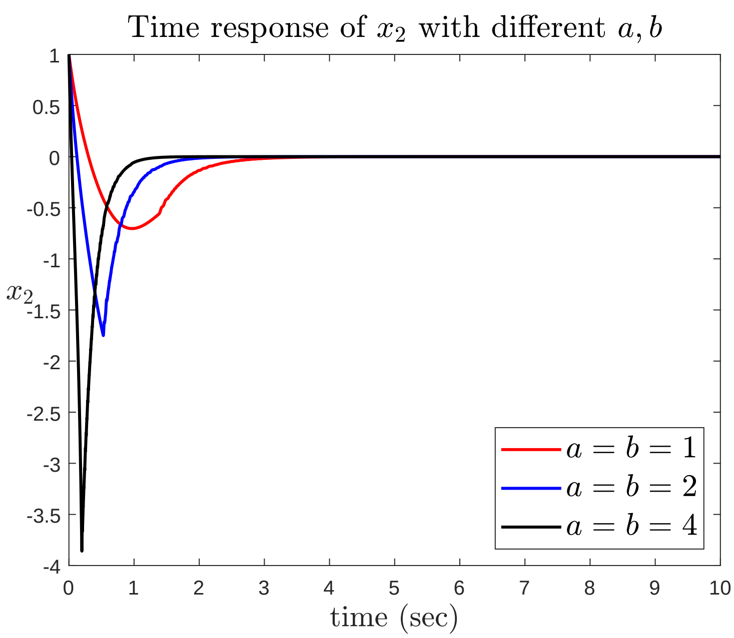

Figure 12: 時域響應 $x_2 - t$，調變 a, b

(iv) 最後一個部分，吾人討論調變參數 "b_0" 對於系統的影響，因此固定 $a = b = 1$，比較 $b_0 = 0.01,\ b_0 = 0.1,\ b_0 = 1$ 的差異。相平面模擬如圖 13 所示，時域響應分析如圖 14–15 所示。從圖中同樣可以看到雖然透過理論分析吾人僅能保證系統軌跡在有限時間進入滑動面附近的區域，然而在模擬階段可以發現系統軌跡有進一步朝原點這一 trivial solution 前進的趨勢。另一方面，由於滑動面選擇 $S = (1 + a)x_1 + x_2$，調變 b_0 不影響滑動面的建構。

值得注意的是，由於b_0 將決定系統軌跡第一次觸碰到滑動面的粗估保守有限時間，因此可以透過調變 b_0 調整系統暫態性能。

從時域響應中，吾人發現調變 b_0 對於性能的改善沒有想像中的大，在將 b_0 放大百倍後僅僅使得收斂時間略爲下降。然而，在相平面的局部放大可以發現，當 b_0 放大百倍後將造成顫動效應大幅度增加，對於實際應用的物理系統而言可能會因爲此效應造成疲勞進而降低工作生命，該如何選擇適當的 b_0則必須看應用的實際系統來決定。

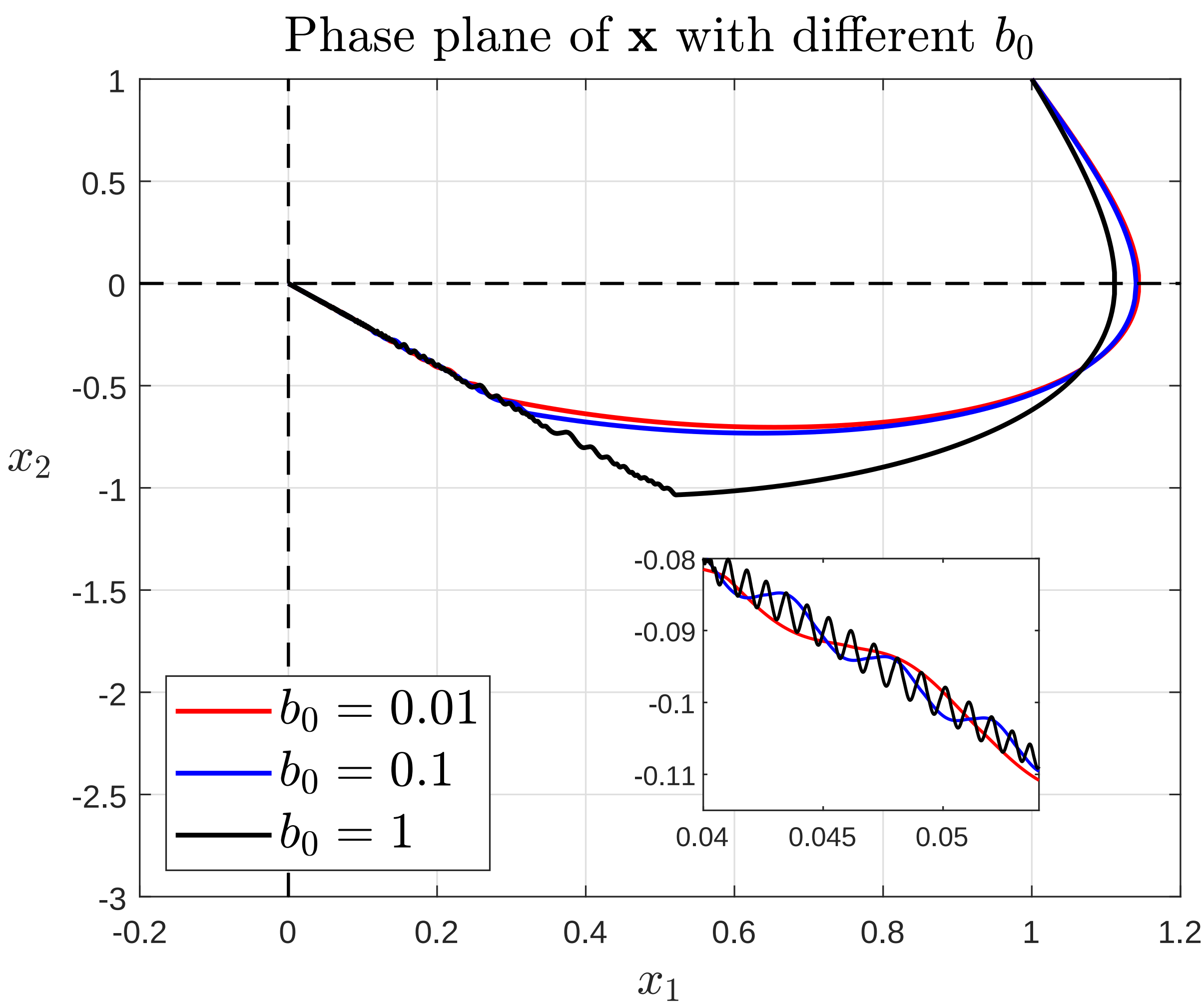

Figure 13: 相平面 $x_1 - x_2$，調變 b_0

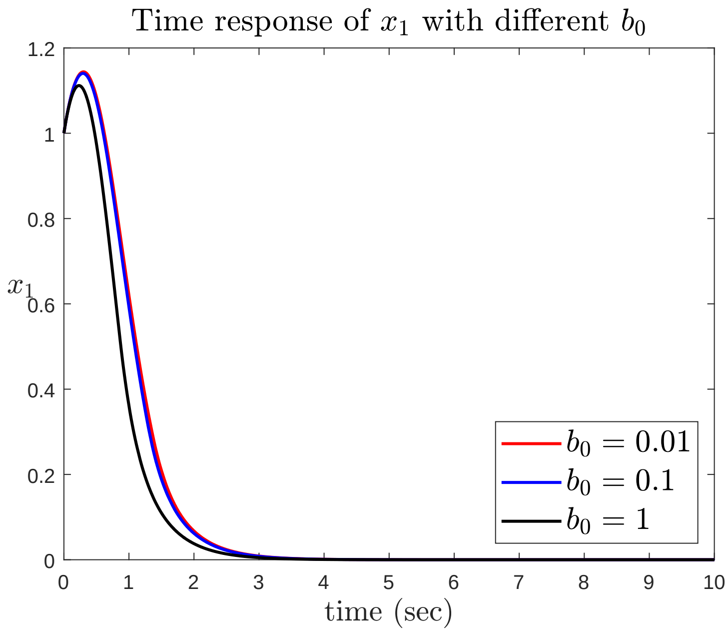

Figure 14: 時域響應 $x_1 - t$，調變 b_0

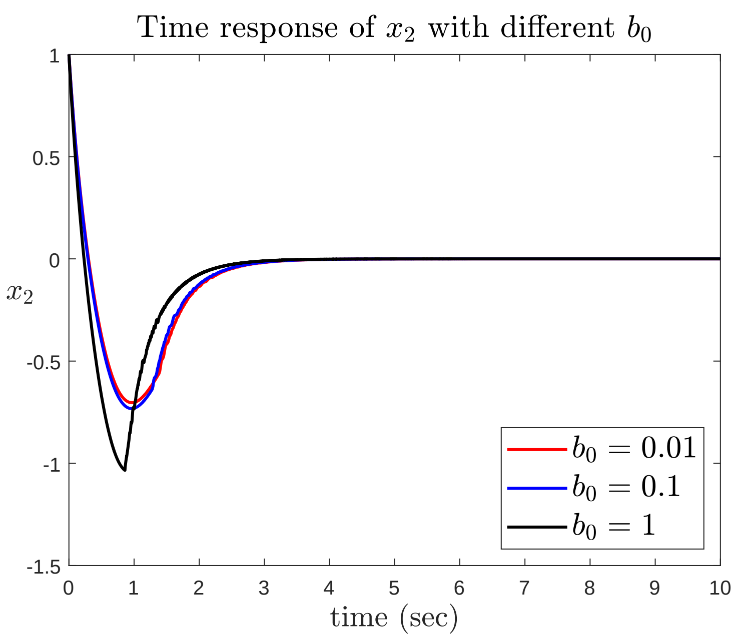

Figure 15: 時域響應 $x_2 - t$，調變 b_0

A. Appendix : Code for Problem 8.1 (b)

```
clear all;close all;clc;tspan=[0:0.0001:10]; % time intervaltspan1=linspace(0,10,100001);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% initial conditions
x01=[1;0];x02=[0;1];x03=[-1;0];x04=[0;-1];x05=[1;1];x06=[-1;1];x07=[-1;-1];x08=[1;-1];x0=[x01,x02,x03,x04,x05,x06,x07,x08];
% setting color for plotting
Color=zeros(8,3);Color(1,:)=[112,66,20]/255;Color(2,:)=[1,0,0];Color(3,:)=[0,0,0];Color(4,:)=[148,0,211]/255;Color(5,:)=[0,0,1];Color(6,:)=[18,116,54]/255;Color(7,:)=[0,71,125]/255;Color(8,:)=[255,77,0]/255;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%   Theta1=Theta2=sin(t)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure(1)
a=1;b=1;b0=0.01;
theta_1=sin(tspan1); theta_2=sin(tspan1);theta_1_sin=theta_1;theta_2_sin=theta_2;
s=plot([-5 5],[5*(a+1) -5*(a+1)],'color','r','LineStyle','--','LineWidth', 0.5);hold on
for i = 1:length(x0(1,:))
[t,x] = ode45(@(t,x) ode(t,x,a,b,b0,tspan1,theta_1,theta_2),tspan,x0(:,i));
x_1_sin(:,i)=x(:,1);x_2_sin(:,i)=x(:,2);p(i)=arrowPlot(x_1_sin(:,i),x_2_sin(:,i),'number', 2,'color', Color(mod(i,8)+1,:), 'LineWidth', 1.5, 'scale', 0.1, 'ratio', 'equal');hold on;
end
plot([-5 5],[0 0],'color','k','LineStyle','--','LineWidth', 1);hold on;plot([0 0],[-5 5],'color','k','LineStyle','--','LineWidth', 1);hold on;
xlim([-1.5 1.5]); ylim([-2 2]); grid on; axis normal;
ylabel({'$x_2~~~~$'},'Fontsize',15,'Rotation',0,'Interpreter','latex');xlabel({'$x_1$'},'Fontsize',15,'Interpreter','latex');
title({'Phase plane of $\bf x$'},'Fontsize',16,'Interpreter','latex');
legend([p(1),p(2),p(3),p(4),p(5),p(6),p(7),p(8),s],{'${\bf x}(0)=(1,0)$','${\bf x}(0)=(0,1)$','${\bf x}(0)=(-1,0)$','${\bf x}(0)=(0,-1)$','${\bf x}(0)=(1,1)$','${\bf x}(0)=(-1,1)$','${\bf x}(0)=(-1,-1)$','${\bf x}(0)=(1,-1)$','$x_2=-(1+a)x_1$'},'Interpreter','latex');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%   Theta1=Theta2=cos(t)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure(2)
a=1;b=1;b0=0.01;
theta_1=cos(tspan1);theta_2=cos(tspan1);theta_1_cos=theta_1;theta_2_cos=theta_2;
s=plot([-5 5],[5*(a+1) -5*(a+1)],'color','r','LineStyle','--','LineWidth', 0.5);hold on
for i = 1:length(x0(1,:))
[t,x] = ode45(@(t,x) ode(t,x,a,b,b0,tspan1,theta_1,theta_2),tspan,x0(:,i));
x_1_cos(:,i)=x(:,1);x_2_cos(:,i)=x(:,2);p(i)=arrowPlot(x_1_cos(:,i),x_2_cos(:,i),'number', 2,'color', Color(mod(i,8)+1,:), 'LineWidth', 1.5, 'scale', 0.1, 'ratio', 'equal');hold on;
end
plot([-5 5],[0 0],'color','k','LineStyle','--','LineWidth', 1);hold on;
plot([0 0],[-5 5],'color','k','LineStyle','--','LineWidth', 1);hold on;
xlim([-1.5 1.5]); ylim([-2 2]); grid on; axis normal;ylabel({'$x_2~~~~$'},'Fontsize',15,'Rotation',0,'Interpreter','latex');xlabel({'$x_1$'},'Fontsize',15,'Interpreter','latex');
title({'Phase plane of $\bf x$'},'Fontsize',16,'Interpreter','latex');
legend([p(1),p(2),p(3),p(4),p(5),p(6),p(7),p(8),s],{'${\bf x}(0)=(1,0)$','${\bf x}(0)=(0,1)$','${\bf x}(0)=(-1,0)$','${\bf x}(0)=(0,-1)$','${\bf x}(0)=(1,1)$','${\bf x}(0)=(-1,1)$','${\bf x}(0)=(-1,-1)$','${\bf x}(0)=(1,-1)$','$x_2=-(1+a)x_1$'},'Interpreter','latex');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%   Theta1=Theta2=random(t)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure(3)
a=1;b=1;b0=0.01;
theta_1=random('Uniform',-1,1,1,100001);theta_2=random('Uniform',-1,1,1,100001);theta_1_random=theta_1;theta_2_random=theta_2;
s=plot([-5 5],[5*(a+1) -5*(a+1)],'color','r','LineStyle','--','LineWidth', 0.5);hold on
for i = 1:length(x0(1,:))
[t,x] = ode45(@(t,x) ode(t,x,a,b,b0,tspan1,theta_1,theta_2),tspan,x0(:,i));
x_1_random(:,i)=x(:,1);x_2_random(:,i)=x(:,2);p(i)=arrowPlot(x_1_random(:,i),x_2_random(:,i),'number', 2,'color', Color(mod(i,8)+1,:), 'LineWidth', 1.5, 'scale', 0.1, 'ratio', '
```

```
    equal');hold on;
end
plot([-5 5],[0 0],'color','k','LineStyle','--','LineWidth', 1);hold on;plot([0 0],[-5 5],'color','k','LineStyle','--','LineWidth', 1);hold on;
xlim([-1.5 1.5]);  ylim([-2 2]); grid on; axis normal;
ylabel({'$x_2~~~~$'},'Fontsize',15,'Rotation',0,'Interpreter','latex');xlabel({'$x_1$'},'Fontsize',15,'Interpreter','latex');
title({'Phase plane of $\bf x$'},'Fontsize',16,'Interpreter','latex');
legend([p(1),p(2),p(3),p(4),p(5),p(6),p(7),p(8),s],{'${\bf x}(0)=(1,0)$','${\bf x}(0)=(0,1)$','${\bf x}(0)=(-1,0)$','${\bf x}(0)=(0,-1)$','${\bf x}(0)=(1,1)$','${\bf x}(0)=(-1,1)$','${\bf x}(0)=(-1,-1)$','${\bf x}(0)=(1,-1)$','$x_2=-(1+a)x_1$'},'Interpreter','latex');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%% Nonlinear system model
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function y = ode(t,x,a,b,b0,tspan1,theta_1,theta_2)
S=(1+a)*x(1)+x(2);
u=-x(1)-(1+a)*x(2)-(a*(1+a)*abs(x(1))+b*x(2)^2+b0)*sign(S);
theta_1 = interp1(tspan1, theta_1, t); % Interpolate the data set (tspan1, theta_1) at times t
theta_2 = interp1(tspan1, theta_2, t); % Interpolate the data set (tspan1, theta_2) at times t
y = zeros(2,1);
y(1) = x(2)+theta_1.*x(1)*sin(x(2));
y(2) = theta_2.*x(2)^2+x(1)+u;
end
```

B. Appendix : Code for Problem 8.1 (c)

```
clear all;close all;clc;tspan=[0:0.0001:10]; % time intervaltspan1=linspace(0,10,100001);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% initial conditions
x01=[1;0];x02=[0;1];x03=[-1;0];x04=[0;-1];x05=[1;1];x06=[-1;1];x07=[-1;-1];x08=[1;-1];x0=[
    x01,x02,x03,x04,x05,x06,x07,x08];
% setting color for plotting
Color=zeros(8,3);Color(1,:)=[112,66,20]/255;Color(2,:)=[1,0,0];Color(3,:)=[0,0,0];Color(4,:)
    =[148,0,211]/255;Color(5,:)=[0,0,1];Color(6,:)=[18,116,54]/255;Color(7,:)
    =[0,71,125]/255;Color(8,:)=[255,77,0]/255;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%   Changing Value of Both a,b
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure(4)  %phase plane with different a,b
theta_1=sin(tspan1); theta_2=sin(tspan1);theta_1_sin=theta_1;theta_2_sin=theta_2;
a=1;b=1;b0=0.01;[t,x] = ode45(@(t,x) ode(t,x,a,b,b0,tspan1,theta_1,theta_2),tspan,x05);
    x_1_ab_1(:,1)=x(:,1);x_2_ab_1=x(:,2);p(1)=plot(x_1_ab_1(:,1),x_2_ab_1(:,1),'r', '
    LineWidth', 1);hold on;
a=2;b=2;b0=0.01;[t,x] = ode45(@(t,x) ode(t,x,a,b,b0,tspan1,theta_1,theta_2),tspan,x05);
    x_1_ab_2(:,1)=x(:,1);x_2_ab_2=x(:,2);p(2)=plot(x_1_ab_2(:,1),x_2_ab_2(:,1),'b', '
    LineWidth', 1);hold on;
a=4;b=4;b0=0.01;[t,x] = ode45(@(t,x) ode(t,x,a,b,b0,tspan1,theta_1,theta_2),tspan,x05);
    x_1_ab_3(:,1)=x(:,1);x_2_ab_3=x(:,2);
p(3)=plot(x_1_ab_3(:,1),x_2_ab_3(:,1),'k', 'LineWidth', 1);hold on;plot([-5 5],[0 0],'color'
    ,'k','LineStyle','--','LineWidth', 1);hold on;
plot([0 0],[-5 5],'color','k','LineStyle','--','LineWidth', 1);hold on;
xlim([-0.2 1.2]);  ylim([-4 1]); grid on; axis normal;
ylabel({'$x_2~~~~$'},'Fontsize',15,'Rotation',0,'Interpreter','latex');xlabel({'$x_1$'},'
    Fontsize',15,'Interpreter','latex');
title({'Phase plane of $\bf x$ with different $a,b$'},'Fontsize',16,'Interpreter','latex');
legend([p(1),p(2),p(3)],{'$a=b=1$','$a=b=2$','$a=b=4$'},'Fontsize',16,'Interpreter','latex',
    'location','SouthWest');

figure(5)  %time response of x1 with different a,b
p(1)=plot(t,x_1_ab_1(:,1),'r', 'LineWidth', 1.5);hold on;
p(2)=plot(t,x_1_ab_2(:,1),'b', 'LineWidth', 1.5);hold on;
p(3)=plot(t,x_1_ab_3(:,1),'k', 'LineWidth', 1.5);hold on;
ylabel({'$x_1$'},'Fontsize',15,'Rotation',0,'Interpreter','latex');xlabel({'time (sec)'},'
    Fontsize',15,'Interpreter','latex');
title({'Time response of $x_1$ with different $a,b$'},'Fontsize',16,'Interpreter','latex');
legend([p(1),p(2),p(3)],{'$a=b=1$','$a=b=2$','$a=b=4$'},'Fontsize',16,'Interpreter','latex',
    'location','SouthEast');

figure(6)  %time response of x2 with different a,b
p(1)=plot(t,x_2_ab_1(:,1),'r', 'LineWidth', 1.5);hold on;
p(2)=plot(t,x_2_ab_2(:,1),'b', 'LineWidth', 1.5);hold on;
p(3)=plot(t,x_2_ab_3(:,1),'k', 'LineWidth', 1.5);hold on;
ylabel({'$x_2$'},'Fontsize',15,'Rotation',0,'Interpreter','latex');
xlabel({'time (sec)'},'Fontsize',15,'Interpreter','latex');
title({'Time response of $x_2$ with different $a,b$'},'Fontsize',16,'Interpreter','latex');
legend([p(1),p(2),p(3)],{'$a=b=1$','$a=b=2$','$a=b=4$'},'Fontsize',16,'Interpreter','latex',
    'location','SouthEast');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Changing Value of a
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure(7)  %phase plane with different a,b
theta_1=sin(tspan1); theta_2=sin(tspan1);theta_1_sin=theta_1;theta_2_sin=theta_2;
a=1;b=1;b0=0.01;[t,x] = ode45(@(t,x) ode(t,x,a,b,b0,tspan1,theta_1,theta_2),tspan,x05);
    x_1_a_1(:,1)=x(:,1);x_2_a_1=x(:,2);p(1)=plot(x_1_a_1(:,1),x_2_a_1(:,1),'r', 'LineWidth',
     1.5);hold on;
a=2;b=1;b0=0.01;[t,x] = ode45(@(t,x) ode(t,x,a,b,b0,tspan1,theta_1,theta_2),tspan,x05);
    x_1_a_2(:,1)=x(:,1);x_2_a_2=x(:,2);p(2)=plot(x_1_a_2(:,1),x_2_a_2(:,1),'b', 'LineWidth',
     1.5);hold on;
a=4;b=1;b0=0.01;[t,x] = ode45(@(t,x) ode(t,x,a,b,b0,tspan1,theta_1,theta_2),tspan,x05);
    x_1_a_3(:,1)=x(:,1);x_2_a_3=x(:,2);p(3)=plot(x_1_a_3(:,1),x_2_a_3(:,1),'k', 'LineWidth',
     1.5);hold on;
plot([-5 5],[0 0],'color','k','LineStyle','--','LineWidth', 1);hold on;plot([0 0],[-5 5],'
    color','k','LineStyle','--','LineWidth', 1);hold on;
```

```
xlim([-0.2 1.2]);  ylim([-3 1]); grid on; axis normal;
ylabel({'$x_2~~~~$'},'Fontsize',15,'Rotation',0,'Interpreter','latex');xlabel({'$x_1$'},'Fontsize',15,'Interpreter','latex');
title({'Phase plane of $\bf x$ with different $a$'},'Fontsize',16,'Interpreter','latex');
legend([p(1),p(2),p(3)],{'$a=1$','$a=2$','$a=4$'},'Fontsize',16,'Interpreter','latex','location','SouthWest');

figure(8)  %time response of x1 with different a
p(1)=plot(t,x_1_a_1(:,1),'r', 'LineWidth', 1.5);hold on;
p(2)=plot(t,x_1_a_2(:,1),'b', 'LineWidth', 1.5);hold on;
p(3)=plot(t,x_1_a_3(:,1),'k', 'LineWidth', 1.5);hold on;
ylabel({'$x_1$'},'Fontsize',15,'Rotation',0,'Interpreter','latex');xlabel({'time (sec)'},'Fontsize',15,'Interpreter','latex');
title({'Time response of $x_1$ with different $a,b$'},'Fontsize',16,'Interpreter','latex');
legend([p(1),p(2),p(3)],{'$a=1$','$a=2$','$a=4$'},'Fontsize',16,'Interpreter','latex','location','SouthEast');

figure(9)  %time response of x2 with different a
p(1)=plot(t,x_2_a_1(:,1),'r', 'LineWidth', 1.5);hold on;
p(2)=plot(t,x_2_a_2(:,1),'b', 'LineWidth', 1.5);hold on;
p(3)=plot(t,x_2_a_3(:,1),'k', 'LineWidth', 1.5);hold on;
ylabel({'$x_2$'},'Fontsize',15,'Rotation',0,'Interpreter','latex');xlabel({'time (sec)'},'Fontsize',15,'Interpreter','latex');
title({'Time response of $x_2$ with different $a$'},'Fontsize',16,'Interpreter','latex');
legend([p(1),p(2),p(3)],{'$a=1$','$a=2$','$a=4$'},'Fontsize',16,'Interpreter','latex','location','SouthEast');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Changing Value of b
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure(10)  %phase plane with different b
theta_1=sin(tspan1); theta_2=sin(tspan1);theta_1_sin=theta_1;theta_2_sin=theta_2;
a=1;b=1;b0=0.01;[t,x] = ode45(@(t,x) ode(t,x,a,b,b0,tspan1,theta_1,theta_2),tspan,x05);x_1_b_1(:,1)=x(:,1);x_2_b_1=x(:,2);p(1)=plot(x_1_b_1(:,1),x_2_b_1(:,1),'r', 'LineWidth', 1.5);hold on;
a=1;b=2;b0=0.01;[t,x] = ode45(@(t,x) ode(t,x,a,b,b0,tspan1,theta_1,theta_2),tspan,x05);x_1_b_2(:,1)=x(:,1);x_2_b_2=x(:,2);p(2)=plot(x_1_b_2(:,1),x_2_b_2(:,1),'b', 'LineWidth', 1.5);hold on;
a=1;b=4;b0=0.01;[t,x] = ode45(@(t,x) ode(t,x,a,b,b0,tspan1,theta_1,theta_2),tspan,x05);x_1_b_3(:,1)=x(:,1);x_2_b_3=x(:,2);p(3)=plot(x_1_b_3(:,1),x_2_b_3(:,1),'k', 'LineWidth', 1.5);hold on;
plot([-5 5],[0 0],'color','k','LineStyle','--','LineWidth', 1);hold on;plot([0 0],[-5 5],'color','k','LineStyle','--','LineWidth', 1);hold on;
xlim([-0.2 1.2]);  ylim([-3 1]); grid on; axis normal;
ylabel({'$x_2~~~~$'},'Fontsize',15,'Rotation',0,'Interpreter','latex');xlabel({'$x_1$'},'Fontsize',15,'Interpreter','latex');
title({'Phase plane of $\bf x$ with different $b$'},'Fontsize',16,'Interpreter','latex');
legend([p(1),p(2),p(3)],{'$b=1$','$b=2$','$b=4$'},'Fontsize',16,'Interpreter','latex','location','SouthWest');

figure(11)  %time response of x1 with different b
p(1)=plot(t,x_1_b_1(:,1),'r', 'LineWidth', 1.5);hold on;
p(2)=plot(t,x_1_b_2(:,1),'b', 'LineWidth', 1.5);hold on;
p(3)=plot(t,x_1_b_3(:,1),'k', 'LineWidth', 1.5);hold on;
ylabel({'$x_1$'},'Fontsize',15,'Rotation',0,'Interpreter','latex');xlabel({'time (sec)'},'Fontsize',15,'Interpreter','latex');
title({'Time response of $x_1$ with different $b$'},'Fontsize',16,'Interpreter','latex');
legend([p(1),p(2),p(3)],{'$b=1$','$b=2$','$b=4$'},'Fontsize',16,'Interpreter','latex','location','SouthEast');

figure(12)  %time response of x2 with different b
p(1)=plot(t,x_2_b_1(:,1),'r', 'LineWidth', 1.5);hold on;
p(2)=plot(t,x_2_b_2(:,1),'b', 'LineWidth', 1.5);hold on;
p(3)=plot(t,x_2_b_3(:,1),'k', 'LineWidth', 1.5);hold on;
ylabel({'$x_2$'},'Fontsize',15,'Rotation',0,'Interpreter','latex');xlabel({'time (sec)'},'Fontsize',15,'Interpreter','latex');
title({'Time response of $x_2$ with different $b$'},'Fontsize',16,'Interpreter','latex');
legend([p(1),p(2),p(3)],{'$b=1$','$b=2$','$b=4$'},'Fontsize',16,'Interpreter','latex','location','SouthEast');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%% Changing Value of b0
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure(13)  %phase plane with different b0
```

```
theta_1=sin(tspan1); theta_2=sin(tspan1);theta_1_sin=theta_1;theta_2_sin=theta_2;
a=1;b=1;b0=0.01;[t,x] = ode45(@(t,x) ode(t,x,a,b,b0,tspan1,theta_1,theta_2),tspan,x05);x_1_b0_1(:,1)=x(:,1);x_2_b0_1=x(:,2);p(1)=plot(x_1_b0_1(:,1),x_2_b0_1(:,1),'r', 'LineWidth', 1.5);hold on;
a=1;b=1;b0=0.1;[t,x] = ode45(@(t,x) ode(t,x,a,b,b0,tspan1,theta_1,theta_2),tspan,x05);x_1_b0_2(:,1)=x(:,1);x_2_b0_2=x(:,2);p(2)=plot(x_1_b0_2(:,1),x_2_b0_2(:,1),'b', 'LineWidth', 1.5);hold on;
a=1;b=1;b0=1;[t,x] = ode45(@(t,x) ode(t,x,a,b,b0,tspan1,theta_1,theta_2),tspan,x05);x_1_b0_3(:,1)=x(:,1);x_2_b0_3=x(:,2);p(3)=plot(x_1_b0_3(:,1),x_2_b0_3(:,1),'k', 'LineWidth', 1.5);hold on;
plot([-5 5],[0 0],'color','k','LineStyle','--','LineWidth', 1);hold on;
plot([0 0],[-5 5],'color','k','LineStyle','--','LineWidth', 1);hold on;
xlim([-0.2 1.2]);  ylim([-3 1]); grid on; axis normal;
ylabel({'$x_2~~~~$'},'Fontsize',15,'Rotation',0,'Interpreter','latex');xlabel({'$x_1$'},'Fontsize',15,'Interpreter','latex');
title({'Phase plane of $\bf x$ with different $b_0$'},'Fontsize',16,'Interpreter','latex');
legend([p(1),p(2),p(3)],{'$b_0=0.01$','$b_0=0.1$','$b_0=1$'},'Fontsize',16,'Interpreter','latex','location','SouthWest');
axes('Position',[0.55 0.2 0.25 0.25]);
plot(x_1_b0_1(:,1),x_2_b0_1(:,1),'r','LineWidth',1);hold on;plot(x_1_b0_2(:,1),x_2_b0_2(:,1),'b','LineWidth',1);hold on;plot(x_1_b0_3(:,1),x_2_b0_3(:,1),'k','LineWidth',1);hold on;
xlim([0.04,0.054]); ylim([-0.115,-0.08]);

figure(14)  %time response of x1 with different b0
p(1)=plot(t,x_1_b0_1(:,1),'r', 'LineWidth', 1.5);hold on;
p(2)=plot(t,x_1_b0_2(:,1),'b', 'LineWidth', 1.5);hold on;
p(3)=plot(t,x_1_b0_3(:,1),'k', 'LineWidth', 1.5);hold on;
ylabel({'$x_1$'},'Fontsize',15,'Rotation',0,'Interpreter','latex');xlabel({'time (sec)'},'Fontsize',15,'Interpreter','latex');
title({'Time response of $x_1$ with different $b_0$'},'Fontsize',16,'Interpreter','latex');
legend([p(1),p(2),p(3)],{'$b_0=0.01$','$b_0=0.1$','$b_0=1$'},'Fontsize',16,'Interpreter','latex','location','SouthEast');

figure(15)  %time response of x2 with different b
p(1)=plot(t,x_2_b0_1(:,1),'r', 'LineWidth', 1.5);hold on;
p(2)=plot(t,x_2_b0_2(:,1),'b', 'LineWidth', 1.5);hold on;
p(3)=plot(t,x_2_b0_3(:,1),'k', 'LineWidth', 1.5);hold on;
ylabel({'$x_2$'},'Fontsize',15,'Rotation',0,'Interpreter','latex');xlabel({'time (sec)'},'Fontsize',15,'Interpreter','latex');
title({'Time response of $x_2$ with different $b_0$'},'Fontsize',16,'Interpreter','latex');
legend([p(1),p(2),p(3)],{'$b_0=0.01$','$b_0=0.1$','$b_0=1$'},'Fontsize',16,'Interpreter','latex','location','SouthEast');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%% Nonlinear system model
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function y = ode(t,x,a,b,b0,tspan1,theta_1,theta_2)
S=(1+a)*x(1)+x(2);
u=-x(1)-(1+a)*x(2)-(a*(1+a)*abs(x(1))+b*x(2)^2+b0)*sign(S);
theta_1 = interp1(tspan1, theta_1, t); % Interpolate the data set (tspan1, theta_1) at times t
theta_2 = interp1(tspan1, theta_2, t); % Interpolate the data set (tspan1, theta_2) at times t
y = zeros(2,1);
y(1) = x(2)+theta_1.*x(1)*sin(x(2));
y(2) = theta_2.*x(2)^2+x(1)+u;
end
```

參考文獻

[1] 楊憲東，非線性系統與控制. I, 系統分析，成大出版社，2015

[2] Slotine, J.-J. E., and Weiping L.. *Applied Nonlinear Control.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice hall, 1991.