（裝　　訂　　線）

國立成功大學 111 學年度第 一 學期考試試卷　　111 年 11 月 1 日

National Cheng Kung University Examination Sheet for Academic Year: Semester:　　Year Month Day

姓名 Name	楊亞勳	科目名稱 Subject Name	非線性控制	教師簽章 Signature of Instructor	92
學號 Student No.	P46104285				
院系 College	工 學院 College　航太 系 Department　年 Year　班 Class	評閱成績 Score			

1. 加成性與比例放大性為線性系統的充份必要條件，若有任一不符則為非線性。

10

可用以下實驗分辨系統為 linear or nonlinear.

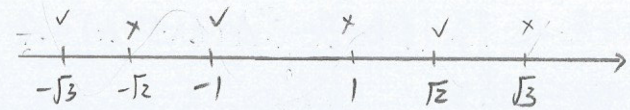
1. 用 signal generator 產生訊號 x_1（輸入系統），用示波器量測輸出為 $L(x_1)$
2. 用 signal generator 產生訊號 x_2（輸入系統），用示波器量測輸出為 $L(x_2)$
3. 用 signal generator 產生訊號 ax_1+bx_2，a, b 為常數，量測系統輸出為 $L(ax_1+bx_2)$
4. 對任意常數 a, b 檢測式子 $aL(x_1)+bL(x_2)=L(ax_1+bx_2)$ 是否成立

成立 ⇒ 系統為線性，不成立 ⇒ 系統非線性 #

4. 令 $\dot{x}=0$（速度 $=0$）

$$\dot{x}=(x+1)(x-1)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$$

10



平衡點：$x=\pm1,\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{3}$，可分7區間討論

區間	$\dot{x}=(x+\sqrt{3})(x+\sqrt{2})(x+1)(x-1)(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})$	
$x<-\sqrt{3}$	$\dot{x}>0$	$x\to-\sqrt{3}$
$-\sqrt{3}<x<-\sqrt{2}$	$\dot{x}<0$	$x\to-\sqrt{3}$
$-\sqrt{2}<x<-1$	$\dot{x}>0$	$x\to-1$
$-1<x<1$	$\dot{x}<0$	$x\to-1$
$1<x<\sqrt{2}$	$\dot{x}>0$	$x\to\sqrt{2}$
$\sqrt{2}<x<\sqrt{3}$	$\dot{x}<0$	$x\to\sqrt{2}$
$x>\sqrt{3}$	$\dot{x}>0$	$x\to\infty$

$x=-\sqrt{3}$，兩邊相軌跡趨近 ⇒ 穩定平衡點

2. 利用系統狀態方程 $\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2) \end{cases}$ (非時變)

而相平面軌跡斜率為 $\Rightarrow \dfrac{dx_2}{dx_1} = \dfrac{f(x_1, x_2)}{f(x_1, x_2)}$

10

$\Rightarrow$ 斜率由(x_1, x_2)決定唯一值，故相平面上同一點，不可能有2個斜率，故相平面軌跡不相交。#

對時變系統：$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1, x_2, t) \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2, t) \end{cases}$

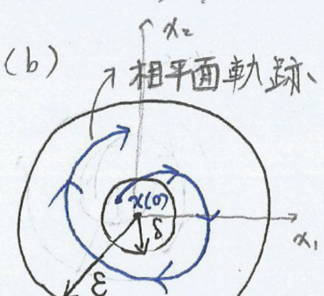
斜率為：$\dfrac{dx_2}{dx_1} = \dfrac{f(x_1, x_2, t)}{f(x_1, x_2, t)}$ 可知斜率除座標點 (x_1, x_2) 還可由不同的 t 決定，故同一點可有2種 or 以上的斜率 $\Rightarrow$ 軌跡可能相交 #

3 (a) 若一平衡點 $x=0$ 為 Lyapunov 穩定，當下列條件滿足時，對任 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta = \delta(\varepsilon)$，當初始值滿足 $\|x(0) - 0\| < \delta$，則有 $\|x(t) - 0\| < \varepsilon,\ \forall t \geq 0$.

8

此為 Lyapunov 穩定性。

(b)



此軌跡在 $\|x(0)\| < \delta$ 釋放後，軌跡在 ε 的範圍內移動不超出 ε，也不趨進原點 (續寫轉背頁)

符合 Lyapunov 穩定性

$x = -\sqrt{2}$，兩邊相軌跡遠離 $\Rightarrow$ 不穩定平衡點

$x = -1$，兩邊相軌跡趨近 $\Rightarrow$ 穩定平衡點

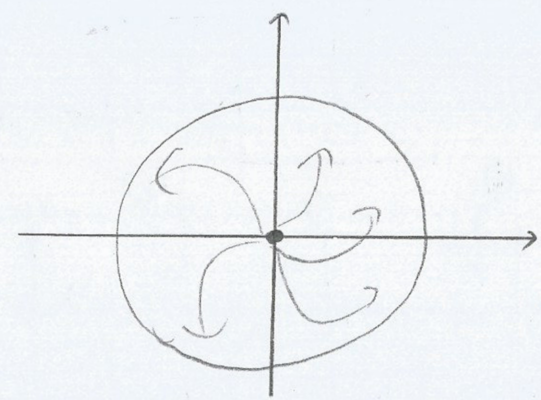
$x = 1$，兩邊相軌跡遠離 $\Rightarrow$ 不穩定平衡點

$x = \sqrt{2}$，兩邊相軌跡趨近 $\Rightarrow$ 穩定平衡點

$x = \sqrt{3}$，兩邊相軌跡遠離 $\Rightarrow$ 不穩定平衡點 #

5.

10



平衡點穩定性：
- 穩定 $\Rightarrow$ 向 $x=0$ 收斂
- 不穩定 $\Rightarrow$ 向外發散

極限圓穩定性：
- 穩定 $\Rightarrow$ 內外收斂至 limit cycle
- 半穩定 $\Rightarrow$ 一邊收斂，一邊遠離
- 不穩定 $\Rightarrow$ 內外遠離 limit cycle

由上面的分類來看，

平衡點穩定 $\Rightarrow$ 極限圓不穩定 or 半穩定

平衡點不穩定 $\Rightarrow$ 極限圓穩定 or 半穩定

$\Rightarrow$ 兩者不可能同時穩定 or 不穩定。

6. 漸進：$\dot{V}(x)<0$.

8

若此登山步道，不論起點在山谷何處，開始行走後，GPS的高度一定會持續下降（$\dot{V}(x)<0$），且到最後一定會抵達山谷最低點，則此山谷具全域漸進穩定. $x\to\infty$, $V(x)\to\infty$

7.
$$\begin{cases}\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2\end{cases} \Rightarrow \dot{x} = Ax \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$$

找出此系統之特徵根 $\Rightarrow \det(\lambda I - A) = 0$

10

$$\Rightarrow \det\left(\begin{bmatrix}\lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22}\end{bmatrix}\right) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a_{11}+a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}{2}$$

此時，給定不同的 a_{ij}，會有6種情形

① $\lambda_{1,2}$ 為共軛複數，實部為負

→ 相平面軌跡為穩定焦點

② $\lambda_{1,2}$ 為共軛複數實部為正

→ 相平面軌跡為不穩定焦點.

③ $\lambda_{1,2}$ 為二負實根 ⇒ 相平面軌跡為穩定節點

9. 一致穩定定理：
$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_1 - x_2 - x_2\sin t \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2\end{cases}$$

① $V(0,t) = 0$, $\forall t \geq t_0$

② $\dot{V}(x,t) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} \leq 0$, $\forall t \geq t_0$

③ $0 < V_0(x) \leq V(x,t) \leq V_1(x)$, $\forall t \geq t_0$

若滿足上三條件 $\dot{x} = A(t)x$ 具一致穩定性.

10

$V(x,t) = x_1^2 + (2+\sin t)x_2^2$

① $V(0,t) = 0 + (2+\sin t)\cdot 0 = 0$, $\forall t \geq t_0$ ✓

② $\dot{V}(x,t) = x_2^2\cos t + 2x_1\dot{x} + 2(2+\sin t)x_2\dot{x}_2$

$= x_2^2\cos t - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_2\sin t + 2(2+\sin t)x_2(x_1 - x_2)$

$= x_2^2\cos t - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_2\sin t + 2x_2(2x_1 - 2x_2 + x_1\sin t - x_2\sin t)$

$= x_2^2\cos t - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - \cancel{2x_1x_2\sin t} + 4x_1x_2 - 4x_2^2 + \cancel{2x_1x_2\sin t} - 2x_2^2\sin t$

$= x_2^2\cos t - 2x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_2^2 - 2x_2^2\sin t$

$= \underbrace{\boxed{\cos t - 2\sin t - 3}}_{\text{最大}=0} x_2^2 - x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 < 0 \quad \forall t \geq t_0$

③ 因 $-1 \leq \sin t \leq 1$，故 $V(x,t) = x_1^2 + (2+\sin t)x_2^2$ 可被 $V_0(x) = x_1^2 + x_2^2$, $V_1(x) = x_1^2 + 3x_2^2$ 包圍

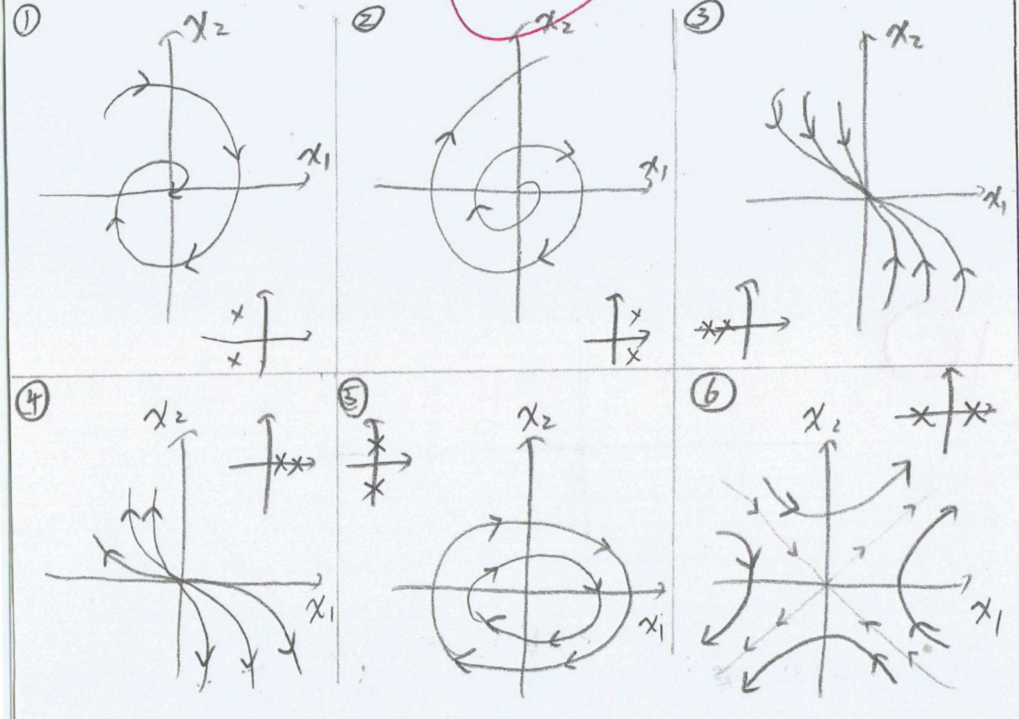
$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 \leq V(x,t) \leq x_1^2 + 3x_2^2 \quad \forall t \geq t_0$

⇒ 三條件符合，此系統有一致穩定性

④ $\lambda_{1,2}$ 為二正實根 ⇒ 相平面軌跡為不穩定節點

⑤ $\lambda_{1,2}$ 為2虛根,一正一負 ⇒ 相平面軌跡為中心點

⑥ $\lambda_{1,2}$ 為2實根一正一負 ⇒ 相平面軌跡 鞍點



8. 平衡點範圍為 $\underline{D_1 \cup D_2}$ #

10

滿足Lyapunov直接定理之條件為"充份條件",代表可使平衡點穩定的Lyapunov函數不唯一,故其求出之範圍也不唯一.故收斂範圍為不同Lyapunov函數求出範圍之"聯集"

10.

6

$$V(x) = x^T x = [x_1\ \ x_2]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = x_1^2+x_2^2$$

① $V(0)=0 \quad \forall t \ge t_0$

$\dot V = x^T(A^T+A)x < 0$

② $\dot V(x) = 2x_1\dot x_1 + 2x_2\dot x_2$

$\Rightarrow \lambda_i(A^T+A^T)<0$

$$= 2x_1(-x_1-x_2-x_2\sin t)+2x_2(x_1-x_2)$$

$A=\begin{bmatrix}-1 & -1-\sin t\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

$$= -2x_1^2 - \cancel{2x_1x_2} - 2x_1x_2\sin t + \cancel{2x_1x_2} - 2x_2^2$$

$$= \underbrace{-2(x_1^2+x_2^2)}_{負} - 2x_1x_2\sin t$$

$-2x_1x_2 \le 2x_1x_2\sin t \le 2x_1x_2$

且 $x_1^2+x_2^2 \ge x_1x_2$

$\Rightarrow \dot V(x) \le 0$

③ $V(x) = x_1^2+x_2^2 \Rightarrow$

一致穩定的需求: Lyapunov的收斂區間 $\|x(t_0)-0\| < \delta(\varepsilon,t_0)$ 不受 t_0 影響.

一致穩定性: 不論系統釋放時間 t_0, 皆具Lyapunov穩定性.

由①②知此系統具Lyapunov穩定性,且此系統 $V(x)$ 和 t 無關

⇒ 此系統具一致穩定性