

## Chapter 10

### 非線性 $H_\infty$ 強健控制

強健控制的理念與上一章介紹的適應性控制剛好相反。以做事策略來看，前者是『以不變應萬變』，後者是『以動制動』；以商業設計來看，前者是『通用型』設計，後者是『客製化』設計。簡單地講，如果我們要設計『通用型』的控制器，那麼就要採用強健控制的理念；反之，如果要設計『客製化』的控制器，那麼就要採用適應控制的理念。

譬如我們要為一班學生設計帽子，帽子的大小至少要让每個學生都能戴。則設計帽子的方法有三種：

- (1) 強健性設計(robust design)：只針對頭最大的學生設計帽子即可，其他人不管。連頭最大的學生，都戴得下的帽子，其他學生自然都戴得下。所以強健設計又稱為最惡劣情況下的設計(Worst-case design, Yeh, F. B. and Yang, C. D., 1991)。這頂帽子最強健，因為適用於每個學生。當然人人都可戴的帽子，人人都戴得不舒服(除了頭最大的那個學生)。而這正是強健性設計的特徵，它不是針對一個人(一個系統)設計，而是針對一群人(一群系統)做設計，也就是所謂的『通用型』設計。
- (2) 適應性設計(adaptive design)：為每個學生設計一頂專屬的帽子(客製化設計, customized design)，花費最多，但學生戴得最舒服。專屬的帽子適應性佳，但強健性最差，因為專屬於某一個學生的帽子，另外一些學生可能都戴不下。
- (3) 合成型設計：將學生的頭圍大小分成四類，再將帽子設計成四段式的扣孔，每一段扣孔剛好適用於某一類頭圍的學生。相較於無段式設計(適應性設計)，四段式設計花費較少，但能同時兼顧到強健性與適應性。合成型設計就是上一章中提到的增益排程設計(Gain-scheduling design)，帽子的四段式設計就是一種四段式的增益排程。

非線性 $H_\infty$ 控制是強健控制的一種，又稱為 $L_2$ -gain 控制。符號 $L_2$ 與 $H_\infty$ 都是代表函數空間，所以本章一開始將先介紹函數空間的定義。在另一方面， $L_2$ -gain 控制是透過輸入與輸出間的關係來定義穩定性，亦即所謂的 input-output stability，此與第四、五章介紹的 Lyapunov stability 有明顯的不同，後者是在討論當輸入為零時，平衡點相對於不同初始條件位置的穩定性，而前者在討論當初始條件為零時，輸出相對於不同輸入的穩定性。因此在介紹非線性 $L_2$ -gain 控制之前，我們必須先了解何謂 input-output 穩定性。本章最後幾節介紹非線性 $H_\infty$ 控制在人造衛星、飛彈導引與自走車的應用。

#### 10.1 度量向量與矩陣的長度大小

實數的大小用絕對值表示，對於向量 $x = [x_1 x_2 \cdots x_n]^T \in \mathbb{C}^n$ 的大小，一般所熟知的定義是取其分量的平方和再開根號，此定義稱為向量的 2-norm：

$$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2} \quad (10.1.1)$$

這就是我們所熟知的卡式直角坐標系內的距離公式。然而向量的 2-norm 只是眾多定義向量長度的度量之一，更為廣義的向量長度定義稱為 p-norm (Abdallah, 1999)：

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}, 1 \leq p \leq \infty \quad (10.1.2)$$

“norm”可翻譯成中文的『範數』，不過以下我們仍以“norm”保留其英文原意。(10.1.1)式對應到

$p = 2$  的特例。當  $p = 1$  時，我們得到向量長度的 1-norm 定義：

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \quad (10.1.3)$$

因此向量的 1-norm 長度是每個分量的絕對值相加。當  $p \rightarrow \infty$  時，我們得到向量長度的  $\infty$ -norm 定義：

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad (10.1.4)$$

因此一個向量若取其  $\infty$ -norm 當成長度，即是取其分量中的最大絕對值。

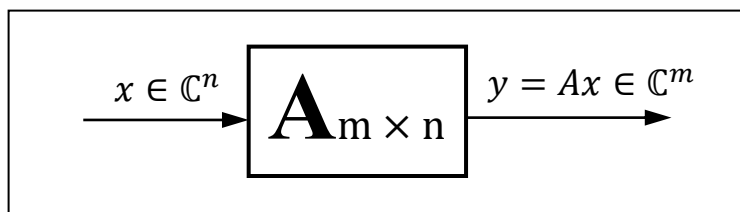


圖 10.1.1 矩陣是輸出入訊號間的一種映射關係

向量可以定義長度，那麼矩陣是否也可以定義長度？因為矩陣是不同向量間的一種映射關係，透過向量長度的定義，我們確實可以定義矩陣的長度。參考圖 10.1.1，考慮矩陣  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ，它的作用是將一個向量  $x \in \mathbb{C}^n$  映射到另一個向量  $y = Ax \in \mathbb{C}^m$ 。如果輸入向量  $x$  與輸出向量  $y$  的長度都以  $p$ -norm 表示之，則矩陣  $A$  的  $p$ -norm 定義成輸出與輸入比的最大增益值：

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|y\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p, 1 \leq p \leq \infty \quad (10.1.5)$$

其中的“sup”稱為最小上限(least upper bound)。一個集合的最小上限通常會等於其最大值，此時上式中的“sup”可用“max”加以取代。但有時一個集合只存在最小上限，而沒有最大值，例如以下的集合

$$\left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{k}{k+1}, \dots \right\}$$

此集合中的無窮數列遞增收斂到 1，但 1 卻不是該集合的一個元素，所以不能說該集合的最大元素是 1，只能說 1 是該集合的最小上限。

(10.1.5) 式中的  $\|A\|_p$  稱為  $A$  矩陣的 induced  $p$ -norm，亦即是由向量長度的  $p$ -norm 定義所衍生的矩陣  $p$ -norm 定義。根據以上的定義，如果將矩陣視為一個系統，則此系統的最大增益值(輸出與輸入的最大比值)即為矩陣的  $p$ -norm。對於不同的  $p$  值，矩陣的大小度量也就不同。依據數學上的習慣寫法，當向量或矩陣用 2-norm 表示其長度大小時，下標“2”可以省略，即

$$\|x\| \triangleq \|x\|_2, \|A\| \triangleq \|A\|_2 \quad (10.1.6)$$

因為矩陣的  $p$ -norm 牽涉到最小上限的計算，其值通常沒有簡單的表示方法。但是對於幾個常用的  $p$ -norm， $\|A\|_p$  的計算則相當容易：

$$\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \quad (10.1.7a)$$

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \sigma_{\max}(A) = \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)} \quad (10.1.7b)$$

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (10.1.7c)$$

其中以 2-norm 為度量的  $\|A\|_2$  具有特別的幾何意義，如圖 10.1.2 所示，並說明如下。對(10.1.7b)式中的 2 維向量  $x$  而言， $\|x\|_2 = 1$  代表  $x$  平面上的單位圓，而  $y = Ax$  的映射則是將  $x$  平面上的單位圓映射到  $y$  平面上的橢圓，如圖 10.1.2 所示。求  $\|y\|_2 = \|Ax\|_2$  的最大值即是在求橢圓上一點離中心點(原點)的最大距離，亦即橢圓的半長軸長。進一步的分析可以證明，橢圓的半長軸長即是矩陣  $A$  的最大奇異值(singular value):  $\sigma_{\max}(A)$ 。奇異值的定義類似於特徵值，但前者適用於所有類型的矩陣，而後者只能用於方陣。

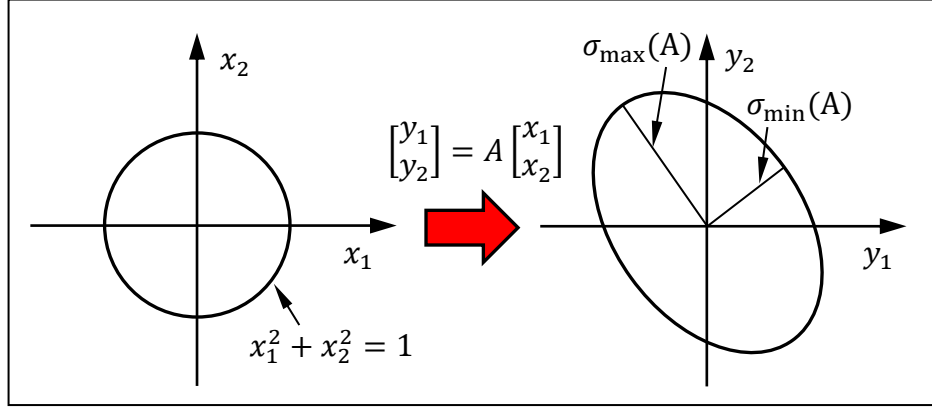


圖 10.1.2 矩陣的映射關係  $y = Ax$  是將  $x$  平面上的單位圓映射到  $y$  平面上的橢圓，而矩陣  $A$  的 2-norm 即是橢圓的半長軸。

### 定義 10.1: 奇異值分解(singular value decomposition)

對於任意矩陣  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ，其奇異值分解定義成

$$A = U \Sigma V^*, \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.1.8)$$

其中  $U$  與  $V$  都是么正矩陣(unitary matrix，滿足  $UU^* = U^*U = I$ ， $VV^* = V^*V = I$ )， $\Sigma_1$  是對角陣，分別定義成

$$U = [u_1, u_2, \dots, u_m] \in \mathbb{C}^{m \times m}, V = [v_1, v_2, \dots, v_n] \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_p \end{bmatrix}, \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0, p = \min\{m, n\}$$

其中  $\sigma_i$  稱為矩陣  $A$  的奇異值(singular value)， $u_i$  與  $v_i$  分別稱為矩陣  $A$  的左奇異向量(left singular vector)與右奇異向量(right singular vector)。

□

依據(10.1.8)的定義， $u_i$  與  $v_i$  滿足下列的關係式：

$$Av_i = \sigma_i u_i, A^* u_i = \sigma_i v_i \quad (10.1.9)$$

在上面的二個式子中，分別從左側乘以  $A^*$  和  $A$ ，得到

$$A^* A v_i = \sigma_i^2 v_i, A A^* u_i = \sigma_i^2 u_i \quad (10.1.10)$$

這說明  $\sigma_i^2$  是  $A^*A$  或  $AA^*$  的特徵值，而  $v_i$  是  $A^*A$  的特徵向量， $u_i$  是  $AA^*$  的特徵向量。奇異值的大小排列習慣上是從大排到小： $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$ ，其中最大與最小的奇異值有特別的符號表示之：

- $\bar{\sigma}(A) = \sigma_{\max}(A) = \sigma_1$  = 最大的奇異值。
- $\underline{\sigma}(A) = \sigma_{\min}(A) = \sigma_p$  = 最小的奇異值。

(10.1.7)式說明矩陣 $A$ 的 2-norm 就是 $A$ 的最大的奇異值： $\|A\|_2 = \bar{\sigma}(A) = \sigma_{\max}(A)$ 。

量度矩陣的大小除了用上述的 induced p-norm 之外，另一個常用的度量稱為 Frobenius norm，定義成

$$\|A\|_F = \sqrt{\text{trace}(A^*A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} \quad (10.1.11)$$

Frobenius norm 簡稱為 F-norm，所以矩陣 $A$ 的 F-norm 相當於是取該矩陣所有元素的平方和相加。矩陣 $A$ 的 F-norm 和 $A$ 的奇異值也有密切的關連性：

$$\|A\|_F^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_p^2 \quad (10.1.12)$$

與(10.1.7)式中的 $\|A\|_2^2 = \sigma_1^2$ 比較，說明矩陣的 2-norm 是取 $A$ 的最大奇異值，而矩陣的 F-norm 則是取 $A$ 的所有奇異值的平方相加。同時注意矩陣的 F-norm 並不由向量的 p-norm 所衍生而來。

### 例題 10.1.1

以 Matlab 進行奇異值分解 $A = U\Sigma V^*$ ，其指令為： $[U, \Sigma, V] = \text{svd}(A)$ 。以下列的 $3 \times 2$ 矩陣為例子，進行奇異值分解的結果為

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{6}/3 & 0 & -\sqrt{3}/3 \\ -\sqrt{6}/6 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{3}/3 \\ \sqrt{6}/6 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = U\Sigma V^*$$

對應的奇異值為

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [\Sigma_1], \Sigma_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

對應的左奇異向量為

$$U = [u_1, u_2, u_3], u_1 = \frac{\sqrt{6}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, u_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

對應的右奇異向量為

$$V = [v_1, v_2], v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

可以驗算確認三維左奇異向量 $u_i$ 同時也是 $3 \times 3$ 矩陣 $AA^*$ 的特徵向量，

$$AA^*u_i = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} u_i = \lambda_i u_i, i = 1, 2, 3$$

其中特徵值分別為 $\lambda_1 = 3$ ， $\lambda_2 = 1$ ， $\lambda_3 = 0$ 。二維右奇異向量 $v_i$ 同時也是 $2 \times 2$ 矩陣 $A^*A$ 的特徵向量：

$$A^*Av_i = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} v_i = \lambda_i v_i, i = 1, 2$$

其中特徵值分別為 $\lambda_1 = 3$ ， $\lambda_2 = 1$ 。可以看到不管是 $AA^*$ 或是 $A^*A$ ，其不為零的特徵值都剛好是 $A$ 的奇異值的平方 $\sigma_1^2$ 與 $\sigma_2^2$ 。

□

## 10.2 函數空間

就像是實數空間是指實數所成的集合，向量空間是向量所形成的集合，函數空間即是函數所成的集合。本節將定義與強健控制相關連的幾個函數空間，解釋其物理含意以及其與系統穩定性的關係。

### 10.2.1 $L_2$ 與 $L_\infty$ 函數空間

非線性系統的輸、出入訊號都是時間的函數，所以這裡要定義的函數是指時間的函數。最常見的函數空間是 $L_2[0, \infty)$ ，它是滿足下列條件的所有函數 $u(t)$ 所形成的集合

$$\|u(t)\|_{L_2} = \sqrt{\int_0^\infty |u(t)|^2 dt} < \infty \quad (10.2.1)$$

其中 $\|u(t)\|_{L_2}$ 稱為函數 $u(t)$ 的 $L_2$ -norm。滿足以上條件的函數又稱為平方可積函數(Desoer and Vidyasagar, 1975)。

**定義 10.2.1:**  $L_2[0, \infty)$ 函數空間

$L_2[0, \infty)$ 函數空間是滿足下列條件的所有時間 $u(t)$ 函數所形成的集合:

$$\int_0^\infty |u(t)|^2 dt < \infty \quad (10.2.2)$$

記做 $u(t) \in L_2[0, \infty)$ 。

□

類似 $L_2$ 空間的定義，同理我們可以定義廣義的 $L_p$ -norm 如下:

$$\|u(t)\|_{L_p} = \left( \int_0^\infty |u(t)|^p dt \right)^{1/p} < \infty \quad (10.2.3)$$

在上式中，令 $p \rightarrow \infty$ ，得到 $L_\infty$ -norm 的定義:

$$\|u(t)\|_{L_\infty} = \lim_{p \rightarrow \infty} \left( \int_0^\infty |u(t)|^p dt \right)^{1/p} = \sup_{t \geq 0} |u(t)| < \infty \quad (10.2.4)$$

因此求一個函數的 $L_\infty$ -norm，即是在求該函數在時間軸上的最大值，如果此最大值為有限，則稱此函數屬於 $L_\infty$ 函數空間。

以上的 $L_p$ 函數空間是定義在純量函數 $u(t)$ 之上，我們可將之擴展到向量函數。考慮 $n$ 維向量

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}$$

其向量函數空間 $L_2^n$ 定義如下:

**定義 10.2.2:**  $L_2^n$ 向量函數空間

$L_2^n$ 向量函數空間是包含滿足下列條件的所有 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的向量函數

$$\|u\|_{L_2^n} = \sqrt{\int_0^\infty [|u_1(t)|^2 + |u_2(t)|^2 + \cdots + |u_n(t)|^2] dt} < \infty \quad (10.2.5)$$

□

注意上式的 $L_2$ -norm 與(10.1.1)式的 2-norm 二者之間的差別，前者是向量函數空間的範數，而

後者是向量空間的範數。(10.1.1)式中的 2-norm 指的是

$$\|u(t)\|_2 = \sqrt{u^*u} = \sqrt{|u_1(t)|^2 + |u_2(t)|^2 + \cdots + |u_n(t)|^2} \quad (10.2.6)$$

因此(10.2.5)式可以改寫成

$$\|u(t)\|_{L_2^n} = \sqrt{\int_0^\infty \|u(t)\|_2^2 dt} = \sqrt{\int_0^\infty \|u(t)\|^2 dt} < \infty \quad (10.2.7)$$

比較(10.2.1)與(10.2.7)二式的定義，可知只要將絕對值 $|\cdot|$ 改成範數 $\|\cdot\|$ ，純量與向量的 $L_2$ 函數空間即可化為一致。因此 $L_p$ 函數空間從純量擴展至向量的定義即成：

### 定義 10.2.3:

對於 $1 \leq p < \infty$ 範圍內的任意 $p$ 值，定義 $L_p^n$ 向量函數空間是滿足下列條件的所有向量函數 $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 所形成的集合

$$\|u\|_{L_p^n} = \left( \int_0^\infty \|u(t)\|_p^p dt \right)^{1/p} < \infty \quad (10.2.8)$$

□

函數空間除了定義在時間軸上，也可以透過 Fourier 轉換將之定義在頻率軸上。對於時間函數 $u(t)$ ，首先我們注意其 Fourier 函數的轉換關係：

$$U(j\omega) = \int_0^\infty u(t)e^{-j\omega t} dt \quad (10.2.9)$$

再利用 Parseval 定理得到如下恆等式：

$$\|u(t)\|_{L_2}^2 = \int_0^\infty |u(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |U(j\omega)|^2 d\omega < \infty \quad (10.2.10)$$

因此原先沿著時間軸的積分，現在可以換成沿著頻率軸的積分。為了區別起見，我們將時間函數 $u(t)$ 所形成的 $L_2$ 空間註記為 $L_2[0, \infty)$ ；而將 Fourier 函數 $U(j\omega)$ 所形成的 $L_2$ 空間註記為 $L_2(j\mathbb{R})$ ：

### 定義 10.2.4: $L_2(j\mathbb{R})$ 函數空間

$L_2(j\mathbb{R})$ 函數空間是滿足下列條件的所有頻率函數 $U(j\omega)$ 所形成的集合：

$$\int_{-\infty}^\infty |U(j\omega)|^2 d\omega < \infty \quad (10.2.11)$$

我們稱滿足(10.2.10)式的 $u(t)$ 函數及滿足(10.2.11)式的 $U(j\omega)$ 函數為平方可積函數，而 $L_2$ 即是所有平方可積函數所形成的集合。

□

同樣是定義於頻率軸上的另一函數空間記做 $L_\infty(j\mathbb{R})$ ，此空間內的函數在頻率軸上取值並須為有限。

### 定義 10.2.5: $L_\infty(j\mathbb{R})$ 函數空間

$L_\infty(j\mathbb{R})$ 函數空間是滿足下列條件的所有頻率函數 $U(j\omega)$ 所形成的集合：

$$\|U(j\omega)\|_{L_\infty} = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |U(j\omega)| < \infty \quad (10.2.12)$$

亦即屬於 $L_\infty(j\mathbb{R})$ 空間的函數必須在虛軸上為可解析。對於 $U$ 是向量的情況，則將 $|U(j\omega)|$ 改成向量的長度 $\|U(j\omega)\| = \sqrt{U^*(j\omega)U(j\omega)}$ 即可。

□

### 10.2.2 $H_2$ 與 $H_\infty$ 函數空間

如果以複數平面的觀點來看， $L_2(j\mathbb{R})$ 與 $L_\infty(j\mathbb{R})$ 函數空間的定義被限制在虛數軸上，一個自然的想法是如何將之擴展到複數平面上。這樣的擴展就衍生了 $H_2(z)$ 與 $H_\infty(z)$ 函數空間的定義(Zhou and Doyle, 1998; Tsai and Gu, 2014)。

#### 定義 10.2.6: $H_2$ 函數空間

$H_2$ 函數空間是滿足下列條件的所有複變函數 $U(z)$ 所成的集合

$$\|U(z)\|_{H_2}^2 = \sup_{\sigma > 0} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |U(\sigma + j\omega)|^2 d\omega \right\} < \infty \quad (10.2.13)$$

其中 $\|U(z)\|_{H_2}$ 稱為複變函數 $U(z)$ 的 $H_2$ -norm。

□

依據(10.2.13)式的定義， $H_2$ -norm 的計算需要先對虛部 $\omega$ 積分後，再對正實部 $\sigma$ 求取最小上限。因此所得到的 $H_2$ -norm 若要為有限，必須是複變函數 $U(z)$ 在右半平面不能有奇異點(singular point)，亦即複變函數 $U(z)$ 在右半平面必須為可解析(analytic)。對於可解析的複變函數，我們可利用最大模定理(maximum modulus theorem)來簡化(10.2.13)式的計算。

#### 定理 10.2.1: 最大模定理

設複變函數 $f(z)$ 在區域 $S$ 內為可解析，則 $|f(z)|$ 的最大值必發生在區域 $S$ 的邊界線 $\delta S$ 之上。

□

對於 $U(z) \in H_2$ ， $U(z)$ 必須在右半平面為可解析，則由最大模定理，知 $|U(z)| = |U(\sigma + j\omega)|$ 的最大值必發生在右半平面的邊界上，亦即在虛軸上。利用此一結果，(10.2.13)式可化簡成

$$\|U(z)\|_{H_2}^2 = \sup_{\sigma > 0} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |U(\sigma + j\omega)|^2 d\omega \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |U(j\omega)|^2 d\omega < \infty \quad (10.2.14)$$

此時 $H_2$ -norm 的計算不必牽涉到求最小上限的過程，只需沿著虛軸積分即可。

比較(10.2.10)式與(10.2.14)式，可以發現 $U$ 的 $L_2$ -norm 與 $H_2$ -norm 的計算式變成完全相同：

$$\|U\|_{L_2} = \|U\|_{H_2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |U(j\omega)|^2 d\omega \quad (10.2.15)$$

然而我們要注意二個空間內的函數有基本上的不同， $L_2$ 函數只要求在虛軸上為可解析，而 $H_2$ 函數則要求在整個右半平面上為可解析。

$H_2$ 函數是將 $L_2$ 函數的定義從虛軸擴展到右半平面，利用相同的操作，將 $L_\infty$ 函數的定義從虛軸擴展到右半平面，即得到 $H_\infty$ 函數空間：

#### 定義 10.2.7: $H_\infty$ 函數空間

$H_\infty$ 函數空間是滿足下列條件的所有複變函數 $U(z)$ 所成的集合

$$\|U(z)\|_{H_\infty} = \sup_{\text{Re}(z) > 0} |U(z)| < \infty \quad (10.2.16)$$

其中 $\|U(z)\|_{H_\infty}$ 稱為複變函數 $U(z)$ 的 $H_\infty$ -norm。

□

可見 $H_\infty$ -norm 是在求取 $|U(z)|$ 在右半平面的最大值，當此最大值為有限時，才有 $U(z) \in H_\infty$ 。因此 $H_\infty$ 空間內的函數也必須在右半平面為可解析。再一次利用最大模定理，可將 $|U(z)|$ 在右半平面的求值化成在虛數軸上的求值：

$$\|U(z)\|_{H_\infty} = \sup_{\operatorname{Re}(z)>0} |U(z)| = \sup_{\omega} |U(j\omega)| \quad (10.2.17)$$

比較(10.2.12)式與(10.2.17)式，可以發現 $U$ 的 $L_\infty$ -norm 與 $H_\infty$ -norm 的計算式變成完全相同：

$$\|U\|_{L_2} = \|U\|_{H_2} = \sup_{\omega} |U(j\omega)| \quad (10.2.18)$$

然而我們要注意二個空間內的函數有基本上的不同， $L_\infty$ 函數只要求在虛軸上為可解析，而 $H_\infty$ 函數則要求在整個右半平面上為可解析。本章後面所要討論的 $H_\infty$ 控制就是操作在 $H_\infty$ 函數空間的控制理論。

由此可見 $H_2$ 與 $H_\infty$ 函數都是在右半平面為可解析的複變函數 $U(z)$ 。在控制的領域中，複變函數的出現是因為 Laplace 轉換的結果。對於時間函數 $u(t)$ ，其 Laplace 轉換函數定義成

$$U(s) = \int_0^\infty u(t)e^{-st} dt \quad (10.2.19)$$

其中 $s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$ 。因此對於控制問題而言，複變函數 $U(z) = U(s)$ 是得自 $u(t)$ 的 Laplace 轉換函數。

綜合本節的討論，我們將各個函數空間及其所對應的函數型式整理如下：

- 對於一個時間函數 $u(t) \in L_p[0, \infty)$ ，我們可以定義在時域 $t$ 上的 $L_2$ -norm  $\|u(t)\|_{L_2}$ 及 $L_\infty$ -norm  $\|u(t)\|_{L_\infty}$ 。
- 對於 $u(t)$ 的 Fourier 轉換 $U(j\omega) \in L_p(j\mathbb{R})$ ，我們可以定義在頻域 $\omega$ 上的 $L_2$ -norm  $\|U(j\omega)\|_{L_2}$ 及 $L_\infty$ -norm  $\|U(j\omega)\|_{L_\infty}$ 。
- 對於 $u(t)$ 的 Laplace 轉換 $U(s) \in H_p$ ，我們可以定義在複數平面 $s$ 的 $H_2$ -norm  $\|U(s)\|_{H_2}$ 及 $H_\infty$ -norm  $\|U(s)\|_{H_\infty}$ 。

表格 10.2.1 比較了三種不同函數型式 $u(t)$ 、 $U(j\omega)$ 及 $U(s)$ 所對應的函數空間，以及它們所使用的範數定義式。

表 10.2.1 比較不同函數空間的範數(norm)定義式

	Time domain	Frequency domain	Laplace domain
函數型式	$u(t)$	$U(j\omega)$ $= \int_0^\infty u(t)e^{-j\omega t} dt$	$U(s) = \int_0^\infty u(t)e^{-st} dt$
$L_2[0, \infty]$ -norm	$\sqrt{\int_0^\infty  u(t) ^2 dt}$	*	*
$L_\infty[0, \infty]$ -norm	$\sup_{t \geq 0}  u(t) $	*	*
$L_2(j\omega)$ -norm	*	$\sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty  U(j\omega) ^2 d\omega}$	*



$L_\infty(j\omega)$ -norm	*	$\sup_{\omega \in \mathbb{R}}  U(j\omega)  d\omega$	*
$H_2(z)$ -norm	*	*	$\sqrt{\sup_{\sigma > 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}  U(\sigma + j\omega) ^2 d\omega}$
$H_\infty(z)$ -norm	*	*	$\sup_{\text{Re}(s) > 0}  U(s) $

### 10.2.3 有限時間近似的 $L_p$ 空間函數

根據(10.2.1)式的定義，對於一個時間訊號 $u(t) \in L_2$ ，其值平方後再對時間積分，結果必須為有界(bounded)。對於每一個有界的 $L_2$ 訊號輸入，非線性系統的輸出也都是 $L_2$ 有界時，這個非線性系統即被稱為具有 $L_2$ 穩定性。Lyapunov 穩定性是探討沒有外界輸入時，平衡點相對於初始擾動的穩定性。 $L_2$ 穩定性則是探討當輸入訊號為(平方積分)有界時，輸出訊號是否也是(平方積分)有界?此種穩定性稱為輸入-輸出穩定性。

考慮非線性系統 $G$

$$G: \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)w \\ z = h(x) \end{cases} \quad (10.2.20)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 為狀態變數， $w(t) = [w_1(t) \ w_2(t) \ \cdots \ w_m(t)]^T$ 是外界輸入訊號， $z$ 是系統輸出訊號。假設 $w \in L_2^m$ ，則根據 $L_2$ 函數空間的定義

$$\|w\|_{L_2} = \left[ \int_0^\infty \|w(t)\|_2^2 dt \right]^{1/2} = \left[ \int_0^\infty w^*(t)w(t) dt \right]^{1/2} < \infty \quad (10.2.21)$$

若將 $w^T w$ 視為每單位時間的輸入能量(即輸入功率)，則 $w^T w$ 對時間的積分即是代表輸入總能量。因此當 $w \in L_2$ ，代表 $w$ 是一總能量為有限的輸入訊號。 $L_2$ 穩定性即是要求有限能量的輸入，必須產生有限能量的輸出，亦即 $z \in L_2$ 。

在(10.2.1)式中，輸入函數 $w(t)$ 是定義在時間趨近於無窮大的範圍內，然而實際系統的輸入訊號通常是操作在有限的時間範圍。為了反映真實的情況，我們定義輸入函數 $w(t)$ 的有限時間近似如下：

$$w_\tau(t) = \begin{cases} w(t), & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases} \quad (10.2.22)$$

其中 $\tau$ 是給定的有限時間。 $w(t)$ 是理論上的訊號， $w_\tau(t)$ 則是實際操作的訊號。舉例而言，我們經常使用的步階輸入 $w(t) = 1$ ，斜坡輸入 $w(t) = t$ ，正弦波輸入 $w(t) = \sin t$ ，若取其絕對值的平方或 $p$ 次方，然後對時間從 0 積分到無窮大，都將得到無窮大的結果(與時間軸所夾的面積為無限大)。因此依據理論上的定義，這些熟悉的訊號都不屬於任何 $L_p$ 函數空間。然而這些訊號的有限時間近似函數 $w_\tau(t)$ 則都屬於 $L_p$ 函數空間。當 $w(t)$ 的有限時間近似函數 $w_\tau \in L_p$ 時，我們稱 $w(t)$ 屬於 extended  $L_p$ 函數空間。

**定義 10.2.8:** extended 函數空間 $L_{pe}^n$

Extended 函數空間 $L_{pe}^n$ 是由下列函數所形成的集合：

$$L_{pe}^n = \{w \mid w_\tau \in L_p^n, \forall \tau \geq 0\} \quad (10.2.23)$$

□

因此 $L_{pe}^n$ 擴大了函數空間 $L_p^n$ 的定義， $L_{pe}^n$ 空間內的元素 $w$ 不要求必須 $w \in L_p^n$ ，只要 $w$ 的有限時間近似函數 $w_\tau \in L_p^n$ 即可。依此定義，步階輸入函數、斜坡輸入函數、正弦波函數均是屬於 $L_{pe}^n$ 函數空間。

### 例題 10.2.1:

求步階輸入 $w(t) = 1$ 及斜坡輸入 $w(t) = t$ 的有限時間 $L_p$ -norm。

如圖 10.2.1 所示，這二個訊號與時間軸所夾面積為無窮大，所以不屬於 $L_p$ 函數空間。但它們的有限時間近似函數 $w_\tau(t)$ 分別為

$$w_\tau(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases}, w_\tau(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases} \quad (10.2.24)$$

與時間軸所夾面積則為有限值，所以 $w_\tau(t)$ 所對應的 $L_p$ -norm 都存在，且分別等於

$$\|w_\tau(t)\|_{L_p} = \tau^{1/p} < \infty, \|w_\tau(t)\|_{L_p} = \left(\frac{\tau^{p+1}}{p+1}\right)^{1/p} < \infty \quad (10.2.25)$$

所以二者的有限時間近似函數 $w_\tau(t)$ 都是屬於 $L_p$ 函數空間。在上式中的一個有趣結果是當 $p \rightarrow \infty$ 的情形，首先觀察有限時間的步階輸入：

$$\|w_\tau(t)\|_{L_\infty} = \lim_{p \rightarrow \infty} \tau^{1/p} = 1 = \sup_{0 \leq t \leq \tau} |w_\tau(t)|$$

所得到的極限值與(10.2.4)式計算所得的 $L_\infty$ 範數 $\|w_\tau(t)\|_{L_\infty}$ 一致。斜坡輸入也可得到相同的結果：

$$\|w_\tau(t)\|_{L_\infty} = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{\tau^{p+1}}{p+1}\right)^{1/p} = \tau = \sup_{0 \leq t \leq \tau} |w_\tau(t)|$$

可見令 $\|w_\tau(t)\|_{L_p}$ 中的 $p$ 值趨近於無窮大，所得到的極限值 $\|w_\tau(t)\|_{L_\infty}$ ，與由 $\|w_\tau(t)\|_{L_\infty}$ 的原始定義式(10.2.4)所得到的結果相等。

□

利用(10.2.22)式的有限時間近似函數，我們可以對系統所要滿足因果律下一個正式的數學定義。因果律指出，在時刻 $t$ 之時的系統輸出，只和 $t$ 時刻之前的輸入有關，和 $t$ 時刻之後的輸入無關。換句話說，因果律要求現在時刻的輸出與未來的輸入無關，即未來的因不會影響現在的果。一個實際存在的系統必須滿足因果律。

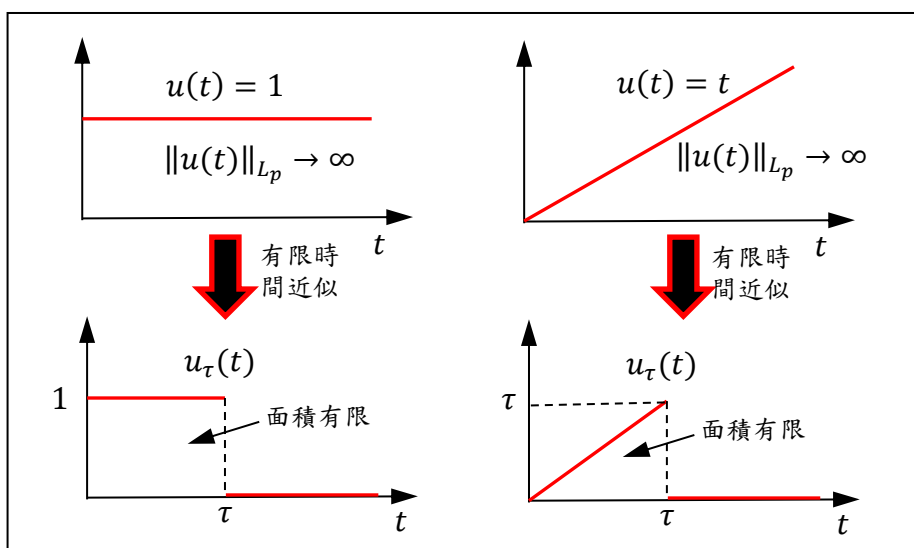


圖 10.2.1 步階訊號與斜坡訊號的有限時間近似。

## 定義 10.2.9: 因果律(causality)

任何非線性系統  $H: u \in L_{pe}^n \rightarrow y \in L_{pe}^m$  的輸出入關係  $y = Hu$  都必須滿足因果律:

$$(Hu)_\tau(t) = (Hu_\tau)_\tau(t) \quad (10.2.26)$$

□

(10.2.26)式的驗證步驟如圖 10.2.2 所示。左側的三個圖顯示  $(Hu)_\tau(t)$  的輸出結果，也就是在時間  $t = \tau$  時，所觀察到的系統輸出響應。依據因果律，時間  $t = \tau$  以前的輸出響應必須不受到  $t = \tau$  以後的輸入訊號  $u$  的影響。因此在圖(b1)中，只取時間  $t = \tau$  以前的輸入訊號  $u_\tau(t)$ ，再將  $u_\tau(t)$  輸入到系統中，得到的輸出響應記做  $Hu_\tau(t)$ ，如圖(b2)所示。最後再截取  $Hu_\tau(t)$  在時間  $t = \tau$  以前的波形  $(Hu_\tau)_\tau(t)$ ，如圖(b3)所示。如果圖(a3)與圖(b3)完全一致，即代表時間  $t = \tau$  以前的輸出，不受到  $t = \tau$  以後的輸入訊號  $u$  的影響。

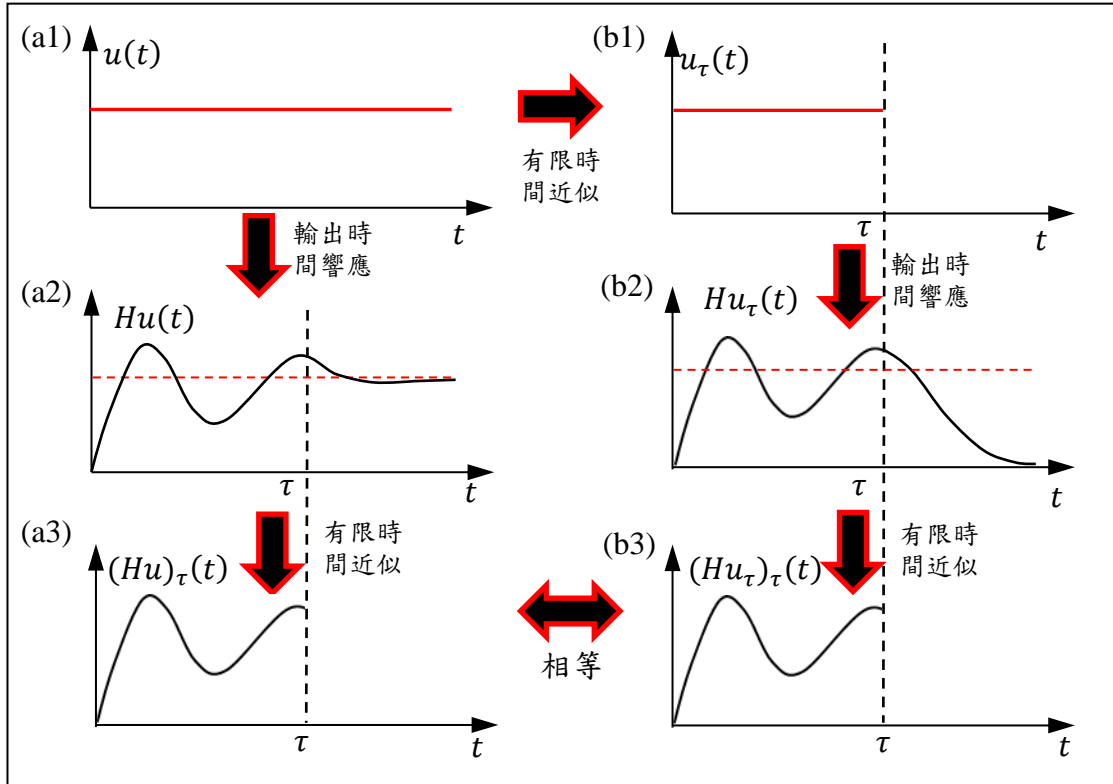


圖 10.2.2 依據(10.2.26)式的因果律檢測步驟。左側的三個圖顯示  $(Hu)_\tau(t)$  的輸出結果；右側的三個圖顯示  $(Hu_\tau)_\tau(t)$  的輸出結果。當兩者完全一致時，表示該系統滿足因果律(Marquez, 2003)。

10.2.4 非線性系統的  $L_p$  穩定性

考慮輸入與輸出訊號都是有限時間的近似函數，我們即可以定義有限時間的  $L_p$  穩定性如下。

定義 10.2.10:  $L_p$  穩定性

考慮如(10.2.20)式所示的非線性系統  $G$ ，如果對於任意輸入訊號  $w_\tau \in L_p^m$ ， $G$  所產生的輸出訊號必有  $z_\tau \in L_p^n$ ，則稱非線性系統  $G$  為  $L_p$  穩定。

□

$L_p$  穩定只保證了有界的輸入必可產生有界的輸出，但是有界的輸出也只保證了輸出訊號的不發散，我們需要更強烈的穩定性條件，用以縮小對輸出訊號的篩選範圍，其中一個較常用的篩選條件是要求非線性系統  $L_p$ -gain 必須為有限。

**定義 10.2.11:** 有限增益 $L_p$ 穩定性(finite-gain  $L_p$  stable)

對於一個非線性系統 $G: L_p^n \rightarrow L_p^m$ ，我們稱其為有限增益 $L_p$ 穩定，如果存在常數 $\gamma$ 與 $\beta$ 滿足

$$\|(Gw)_\tau(t)\|_{L_p} \leq \gamma \|w_\tau(t)\|_{L_p} + \beta \quad (10.2.27)$$

並對於所有 $w(t) \in L_p^n$ 及 $\tau \in [0, \infty)$ 都成立(Khalil, 1996)。

□

(10.2.27)式中的常數項 $\beta$ 稱為系統的 bias，它的加入是考慮到當輸入訊號 $w(t) = 0$ 時，輸出訊號 $Gw$ 不為零的情形。滿足(10.2.27)式的最小 $\gamma$ 值稱為非線性系統 $G$ 的 $L_p$ -gain。在一般的情況下， $\beta = 0$ ，此時系統 $G$ 的 $L_p$ -gain 可以定義成系統輸出與輸入的最大比值：

$$\gamma_p(G) = \sup_{w_\tau \in L_p} \frac{\|z_\tau\|_{L_2}}{\|w_\tau\|_{L_2}} \quad (10.2.28)$$

當 $\gamma_p(G)$ 為有限值時，則稱 $G$ 為 $L_p$ -gain 穩定。

可以證明 $L_p$ -gain 穩定性的要求比 $L_p$ 穩定性的要求強烈，亦即 $L_p$ -gain 穩定必定為 $L_p$ 穩定，但是 $L_p$ 穩定不一定保證 $L_p$ -gain 穩定；換句話說，當系統的輸出入訊號均為有界時，不一定保證其最大增益為有界。本章後面所要探討的 $H_\infty$ 控制就是保證非線性系統具有 $L_2$ 穩定性的一種控制方法。 $H_\infty$ 控制不僅要保證非線性系統具有 $L_2$ 穩定性，並且要使得其 $L_2$ -gain 小於某一給定的值： $\gamma_2(G) < \gamma_0$ 。

**例題 10.2.2:** (Khalil, 1996)

考慮一個非線性系統 $G: z \rightarrow w$ ，其輸出與輸入的關係為

$$z = a + b \tanh(cw) = a + b \frac{e^{cw} - e^{-cw}}{e^{cw} + e^{-cw}} \quad (10.2.29)$$

其中 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 為非負常數。首先注意以下的關係式：

$$\tanh'(cw) = \frac{4c}{(e^{cw} + e^{-cw})^2} \leq c, \forall u \in \mathbb{R}$$

這說明函數 $\tanh(cw)$ 的斜率小於 $c$ ，亦即 $|\tanh(cw)| \leq c|w|$ 。將此不等關係代入(10.2.29)式中，可得輸出入訊號間的大小關係為

$$|z| \leq bc|w| + a \quad (10.2.30)$$

再對兩側各取最小上限的運算，得到

$$\sup_{t \geq 0} |z| \leq bc \cdot \sup_{t \geq 0} |w| + a \Rightarrow \|z\|_{L_\infty} \leq bc \cdot \|w\|_{L_\infty} + a \quad (10.2.31)$$

與(10.2.27)式比較，得知該系統為 $L_\infty$ -gain 穩定。對於常數 $a = 0$ 的情形，則可得到進一步的結果。此時對(10.2.30)式的二邊取 $p$ 次方，並對時間積分，得到

$$\int_0^\infty |z(t)|^p dt \leq (bc)^p \int_0^\infty |w(t)|^p dt \Rightarrow \|z\|_{L_p} \leq bc \|w\|_{L_p} \quad (10.2.32)$$

這代表系統為 $L_p$ -gain 穩定，而且所對應的 $L_p$ -gain  $\gamma_p(G) = bc$ 。

□

**例題 10.2.3:** 線性系統的 $L_p$ -gain 穩定性(Khalil, 1996)

考慮線性系統 $G: u \rightarrow y$

$$G: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, x(0) = x_0 \\ y = Cx + Dx \end{cases} \quad (10.2.33)$$

並假設 $A$ 的所有特徵值都在左半平面。本題的目的是要探討這一穩定的線性系統是否同時也是 $L_p$ -gain 穩定?

首先由線性系統理論知(10.2.33)式的輸出可表成

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \quad (10.2.34)$$

上式表達了線性系統輸入 $u(t)$ 與輸出 $y(t)$ 間之關係。由於 $A$ 的特徵值均為負， $e^{A(t-\tau)}$ 滿足下列的不等關係：

$$\|e^{A(t-\tau)}\| \leq ke^{-at}, \forall t \geq 0$$

其中 $a$ 與 $k$ 為非負整數。將上式代入(10.2.34)式，可得輸出 $y$ 的範圍限制：

$$\|y(t)\| \leq k_1e^{-at} + k_2 \int_0^t e^{-a(t-\tau)} \|u(\tau)\|d\tau + k_3\|u(t)\| \quad (10.2.35)$$

其中各別常數定義如下：

$$k_1 = k\|C\| \cdot \|x_0\|, k_2 = k\|B\| \cdot \|C\|, k_3 = \|D\|$$

其次求取(10.2.27)右邊三項時間函數的 $L_p$ -norm，將此三項依次記作 $y_1(t)$ 、 $y_2(t)$ 與 $y_3(t)$ ，則可證明如下的不等關係式：

$$\|y_{1\tau}\|_{L_p} \leq k_1\rho, \|y_{2\tau}\|_{L_p} \leq \frac{k_2}{a} \|u_\tau\|_{L_p}, \|y_{3\tau}\|_{L_p} \leq k_3\|u_\tau\|_{L_p} \quad (10.2.36)$$

其中 $\rho = (1/ap)^{1/p}$ 。將上式代回(10.2.35)式，得到最後的結果

$$\|y_\tau\|_{L_p} \leq (k_3 + k_2/a)\|u_\tau\|_{L_p} + k_1\rho = \gamma\|u_\tau\|_{L_p} + \beta \quad (10.2.37)$$

與(10.2.27)式比較，證實線性系統的輸出入關係確實滿足 $L_p$ -gain 穩定性的條件。我們特別注意(10.2.37)式的 bias 項 $\beta$ ， $\beta$ 起因於當輸入為零時，系統的輸出。對於以上的線性系統而言，我們得到 $\beta = k_1\rho = k\rho\|C\| \cdot \|x_0\|$ ，亦即線性系統的 bias 起源於不為零的初始條件。這個結果如我們所預期，因為在外界輸入 $u = 0$ 的情況下，初始條件 $x_0$ 的單獨作用仍然會產生不為零的輸出 $y$ 。

□

## 10.3 非線性系統的 $L_2$ -Gain

討論了一般性的 $L_p$ 函數空間之後，從現在開始我們將針對討論定義在 $L_2$ 空間內的非線性系統。非線性系統的 $L_2$ -gain 控制，習慣上又稱為非線性系統 $H_\infty$ 控制，其目的是要透過控制的方法使得一個非線性系統之 $L_2$ -gain 小於或等於某一指定的 $\gamma$ 值。在未討論控制律的設計之前，我們要先解使得 $L_2$ -gain 小於或等於 $\gamma$ 值的條件是甚麼。考慮一個非線性系統 $G$ ，其將輸入 $w \in L_2^p$ 映射到輸出 $z \in L_2^q$ ：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)w, x(0) = x_0 \\ z &= h(x) \end{aligned} \quad (10.3.1)$$

其中 $f \in \mathbb{R}^n$ ， $h \in \mathbb{R}^q$ 為向量函數， $g(x)$ 為 $n \times p$ 矩陣向量函數。 $x_0$ 為系統的平衡點，滿足條件 $f(x_0) = h(x_0) = 0$ 。這裡的輸出入函數都假設是時間有限函數，如 11.2.3 節的定義，亦即只有在 $0 \leq t \leq \tau$ 的範圍內有值，範圍外的函數值為零。

系統 $G$ 的 $L_2$ -gain 如(10.2.28)式的定義：

$$\gamma_2(G) = \sup_{w \in L_2} \frac{\|z\|_{L_2}}{\|w\|_{L_2}} \quad (10.3.2)$$

以下的定理將給出系統函數 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $h(x)$ 所要滿足的條件以使得 $\gamma_2(G) \leq \gamma$ 。

**定理 10.3.1**： $L_2$ -gain 定理(van der Schaft, 1992; Helton, 1999)

若存在一連續可微的函數 $V(x) \geq 0$ 滿足 $V(x_0) = 0$ ，且

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x} g(x) g^T(x) \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T + \frac{1}{2} h^T(x) h(x) \leq 0 \quad (10.3.3)$$

則系統(10.3.1)之 $L_2$ -gain 必小於或等於 $\gamma$ 。

證明：

首先引用下列恆等式：

$$\begin{aligned} V_x f(x) + V_x g(x) w &= -\frac{\gamma^2}{2} \left\| w - \frac{1}{\gamma^2} g^T(x) V_x^T \right\|_2^2 + V_x f(x) \\ &+ \frac{1}{2\gamma^2} V_x g(x) g^T(x) V_x^T + \frac{\gamma^2}{2} \|w\|_2^2 \end{aligned} \quad (10.3.4)$$

其中符號 $V_x$ 定義成

$$V_x = \frac{\partial V}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

上式的成立很容易證明，只要將右邊的第一項的平方展開(利用定義 $\|u\|_2^2 = u^T u$ )，再與右邊的其餘各項合併，即可得到與左邊相同的結果。在 $V(x)$ 滿足(10.3.3)式的條件下，由(10.3.4)式可得到以下的不等關係：

$$\begin{aligned} V_x f(x) + V_x g(x) w &\leq \frac{1}{2} \gamma^2 \|w\|_2^2 - \frac{1}{2} \|z\|_2^2 - \frac{1}{2} \gamma^2 \left\| w - \frac{1}{\gamma^2} g^T(x) V_x^T \right\|_2^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \gamma^2 \|w\|_2^2 - \frac{1}{2} \|z\|_2^2 \end{aligned}$$

注意上式的左邊即為函數 $V(x)$ 對時間的微分，故得

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} = V_x (f(x) + g(x)w) \leq \frac{1}{2} \gamma^2 \|w\|_2^2 - \frac{1}{2} \|z\|_2^2$$

上式兩邊對時間積分得

$$V(x(\tau)) - V(x(0)) \leq \frac{1}{2} \gamma^2 \int_0^\tau \|w(t)\|_2^2 dt - \frac{1}{2} \int_0^\tau \|z(t)\|_2^2 dt \quad (10.3.5)$$

其中注意輸入函數 $w(t)$ 與輸出函數 $y(t)$ 均是時間有限函數，其值只有在 $0 \leq t \leq \tau$ 的範圍內才不為零，所以上式只取0到 $\tau$ 的積分範圍。同時引用條件 $V(x(0)) = 0$ 及 $V(x(\tau)) \geq 0$ ，而將(10.3.5)式化成

$$\frac{1}{2} \gamma^2 \int_0^\tau \|w(t)\|_2^2 dt - \frac{1}{2} \int_0^\tau \|z(t)\|_2^2 dt \geq V(x(\tau)) \geq 0$$

最後引用 $L_2$ -norm 的定義式，得到所要證明的結果

$$\int_0^\tau \|z(t)\|_2^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^\tau \|w(t)\|_2^2 dt \Rightarrow \|z\|_{L_2}^2 \leq \gamma^2 \|w\|_{L_2}^2, \forall w \in L_2$$

上式說明對於每一個輸入函數 $w(t)$ ，系統的輸出與輸入的比值(即增益)都比 $\gamma$ 小，自然連同最大可能的增益也都要比 $\gamma$ 小，故得系統的 $L_2$ -gain 小於 $\gamma$ 的結果：

$$\gamma_2(G) = \sup_{w \in L_2} \frac{\|z\|_{L_2}}{\|w\|_{L_2}} \leq \gamma \quad (10.3.6)$$

□

(10.3.3)式稱為 Hamilton-Jacobi 不等式，此式為 $V(x)$ 的偏微分不等式，要判斷一個非線性系統是否為 $L_2 - \text{gain} \leq \gamma$ ，就須求得此偏微分不等式的一個非負的解 $V(x) \geq 0$ 。我們可以證明 $V(x)$ 為一 Lyapunov 函數，因此若 $V(x)$ 存在的話，即表示此系統至少為 Lyapunov 穩定。Lyapunov 穩定性不同於 $L_2$ 穩定性，它是在檢測外界輸入為零的情況下，系統平衡點相對於初始位置的穩定性。

### 定理 10.3.2：

設存在函數 $V$ 滿足 $V(x) \geq 0$ ， $V(x_0) = 0$ ，且滿足 Hamilton-Jacobi 不等式(10.3.3)，則 $\dot{x} = f(x)$ 為 Lyapunov 穩定。更有甚者，若使 $h(x) = 0$ 的 $x$ ，除了平衡點 $x(t) = x_0$ 外，無其他可能，則 $\dot{x} = f(x)$ 為漸進穩定。

### 證明：

Lyapunov 穩定是在考慮沒有外界輸入 $w$ 的情形下， $\dot{x} = f(x)$ 相對於平衡點 $x_0$ 之穩定性。因此在(10.3.3)式中，令 $g(x) = 0$ ，得

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq -\frac{1}{2} h^T(x) h(x) \leq 0 \quad (10.3.7)$$

又因 $V(x) > 0$ ， $\forall x \neq x_0$ ，故知 $V(x)$ 為一合格的 Lyapunov 函數，即 $\dot{x} = f(x)$ 為 Lyapunov 穩定。若要進一步證明 $\dot{x} = f(x)$ 為漸進穩定，則由第四章的 LaSalle 定理知，只要再額外加一個條件：「除了 $x(t) \equiv x_0$  (即在平衡點)外，沒有其他 $x(t)$ 的軌跡可以使得 $\dot{V} = 0$ 」。由(10.3.7)式知使得 $\dot{V} = 0$ 的 $x$ 必須滿足 $h(x) = 0$ ，所以只要使得 $h(x) = 0$ 的 $x$ ，除了平衡點 $x(t) = x_0$ 外，無其他可能，則 $\dot{x} = f(x)$ 即為漸進穩定。

□

雖然滿足 Hamilton-Jacobi PDE 不等式的解 $V(x)$ 一定是 $\dot{x} = f(x)$ 的 Lyapunov 函數，但是 $\dot{x} = f(x)$ 的 Lyapunov 函數卻不見得都可以滿足 Hamilton-Jacobi 不等式。在通常的情況下，Hamilton-Jacobi PDE 不等式不容易求解，而 Lyapunov 函數則相對容易獲得。我們可以將 Lyapunov 函數視為 Hamilton-Jacobi PDE 不等式的初始猜測解，進而加速解的收斂過程。下面的例題將說明如何由 Lyapunov 函數為基礎，求得 Hamilton-Jacobi PDE 不等式的解。

### 例題 10.3.1 (Khalil, 1996)

考慮非線性系統

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -ax_1^3 - Kx_2 \quad (10.3.8)$$

利用第四章介紹過的可變梯度法，可建立一個合格的 Lyapunov 函數：

$$V(x) = \frac{1}{4} ax_1^4 + \frac{1}{2} x_2^2 \quad (10.3.9)$$

滿足 $V > 0$ 且 $\dot{V} < 0$ ，從而證明(10.3.8)式的系統為全域漸進穩定。現將(10.3.8)加入輸入 $w$ 及輸出 $z = x_2$ 而成為一個輸入-輸出系統 $G$ 如下：

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -ax_1^3 - Kx_2 + w \\ z &= x_2 \end{aligned} \quad (10.3.10)$$

這時我們想要判斷此系統的 $L_2$ -gain 是否小於某一給定的值 $\gamma$ 。直接求解其相對應之 Hamilton-Jacobi PDE 不等式(10.3.3)是相當困難的，但我們可以把順序顛倒一下，先假設 $V(x)$ 為某種待

定的型式，然後將其代入(10.3.3)式中，再求出滿足條件的待定參數範圍。(10.3.9)式的 Lyapunov 函數可視為 Hamilton-Jacobi PDE 不等式解的一個起始猜測值。藉由(10.3.9)式，我們將 Hamilton-Jacobi 不等式的解「猜成」

$$V(x) = \alpha \left( \frac{1}{4} a x_1^4 + \frac{1}{2} x_2^2 \right) \quad (10.3.11)$$

其中 $\alpha$ 為待定係數。再將(10.3.11)式的 $V(x)$ 代入(10.3.3)式中，化簡得

$$\left( -\alpha K + \frac{\alpha^2}{2\gamma^2} + \frac{1}{2} \right) x_2^2 \leq 0 \quad (10.3.12)$$

要保證上式的成立只要係數為負即可

$$\alpha^2 - 2\gamma^2 K \alpha + \gamma^2 \leq 0 \quad (10.3.13)$$

滿足上式範圍的 $\alpha$ 都可使得(10.3.11)式的 $V(x)$ 為 Hamilton-Jacobi PDE 不等式的解。換句話說，若要保證非線性系統(10.3.10)的 $L_2 - gain \leq \gamma$ ，只要(10.3.13)式存在有 $\alpha$ 的實數解。利用判別式大於等於零的條件，得知(10.3.13)式有實數解 $\alpha$ 的條件為 $\gamma \geq 1/K$ 。

□

Hamilton-Jacobi PDE 不等式是一個非線性的 PDE，不具有解的疊加特性，也沒有一般性的解法。還好這個不等式只要確認存在一個解 $V(x) \geq 0$ 即可，無須求得其通解，而且不等式不管小於或等於均成立，所以也可當成一般等式型的 PDE 來求解。當解析解不能獲得時，只能訴諸於近似解法，最常見的方法是以不同階數的多項式相加去近似展開 $V(x)$ 。尤其是當(10.3.1)式中的系統函數 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $h(x)$ 是以 $x$ 的多項式型式出現時， $V(x)$ 的多項式展開是求解 Hamilton-Jacobi PDE 不等式的一個很好的初始猜測解。

### 例題 10.3.2

考慮非線性系統

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 x_2 - 2x_1 x_2^2 - x_1^3 + \beta x_1 w, \beta > 0 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 - x_2^3 + \beta x_2 w \\ z &= x_1^2 + x_2^2 \end{aligned} \quad (10.3.14)$$

判斷此系統是否滿足 $L_2$ -gain:  $\|z\|_{L_2}/\|w\|_{L_2} \leq \gamma$ 的條件?首先將(10.3.14)式改寫成(10.3.1)的標準形式，得到

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 x_2 - 2x_1 x_2^2 - x_1^3 \\ -x_1^3 - x_2^3 \end{bmatrix}, g(x) = \beta \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, h(x) = x_1^2 + x_2^2 \quad (10.3.15)$$

再將以上的系統函數代入(10.3.3)式中，即得待求解的 Hamilton-Jacobi PDE 不等式

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial V}{\partial x_1} \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} \right] \begin{bmatrix} x_1^2 x_2 - 2x_1 x_2^2 - x_1^3 \\ -x_1^3 - x_2^3 \end{bmatrix} + \frac{\beta^2}{2\gamma^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 \\ x_1 x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial V / \partial x_1 \\ \partial V / \partial x_2 \end{bmatrix} \\ & + \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2)^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (10.3.16)$$

由於自變數 $x_1$ 與 $x_2$ 都是以多項式的形式出現，上式的解 $V(x_1, x_2)$ 判斷可以表成 $x_1$ 與 $x_2$ 的多項式形式。經過幾次的嘗試，發現二次多項式即可滿足 PDE 不等式：

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2)$$

將此 $V(x_1, x_2)$ 代入(10.3.16)式中，可將 PDE 不等式化簡成



$$\left(-1 + \frac{\beta^2}{2\gamma^2} + \frac{1}{2}\right)(x_1^2 + x_2^2)^2 \leq 0$$

因此只要取  $\gamma \geq \beta$ ，Hamilton-Jacobi PDE 不等式即可滿足，亦即可使得該系統的  $L_2$ -gain  $\leq \gamma$ ，而  $\gamma$  的最小值為  $\beta$ 。

□

## 10.4 耗散系統與被動系統

非線性  $H_\infty$  控制的目的是要使得系統的  $L_2$ -gain  $\leq \gamma$ ，而上一節的定理 10.3.1 已經推導出非線性系統的  $L_2$ -gain 小於或等於  $\gamma$  的條件。本節想要繼續探討使系統的  $L_2$ -gain 小於某一值的背後物理含意是什麼。這一節我們將看到這背後的物理含意原來是與系統的能量耗散特性有關。

### 10.4.1 能量耗散系統

首先我們先定義何謂耗散系統(dissipative system)。考慮非線性系統

$$G: \begin{cases} \dot{x} = f(x, w), x \in \mathbb{R}^n, w \in \mathbb{R}^q \\ z = h(x, w), z \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (10.4.1)$$

其中  $x \in \mathbb{R}^n$  是系統的狀態， $w \in \mathbb{R}^q$  是系統的輸入， $z \in \mathbb{R}^p$  是系統的輸出。假設外界對該系統的能量淨供應率(net supply rate)記做  $S(t) = S(w(t), z(t))$ ，則定義耗散系統如下(Marquez, 2003):

#### 定義 10.4.1: 耗散系統

在能量供應率  $S(t)$  的作用下，非線性系統  $G$  被稱為耗散(dissipative)，若存在能量儲存函數(storage function)  $\phi(x) > 0$  滿足以下條件:

$$\phi(x_1) - \phi(x_0) \leq \int_{t_0}^{t_1} S(t) dt \quad (10.4.2)$$

□

$S(t)$  是能量淨供應率，亦即是每單位時間被系統所吸收的淨能量，因此上式的右邊代表系統在時間  $t_0 \leq t \leq t_1$  的範圍內，所吸收的總能量。而左邊項則代表系統在這段時間內系統儲存能量的增加量。(10.4.2)式的成立代表系統儲存能量的增加小於或等於系統所吸收的能量，這相當於有部分的能量被耗散掉了，故稱滿足(10.4.2)式的系統為能量耗散系統。

依照能量耗散系統的這一定義，當一個系統的  $L_2$ -gain 小於  $\gamma$  時，則該系統正是能量耗散系統。因為當一個系統的  $L_2$ -gain 小於  $\gamma$  時，從上一節的(10.3.5)式知道，此時存在函數  $V(x) > 0$  滿足

$$L_2\text{-gain} \leq \gamma \Rightarrow V(x(\tau)) - V(x(0)) \leq \frac{1}{2}\gamma^2 \int_0^\tau \|w(t)\|_2^2 dt - \frac{1}{2} \int_0^\tau \|z(t)\|_2^2 dt \quad (10.4.3)$$

比較(10.4.2)式與(10.4.3)式，我們發現(10.4.3)式滿足能量耗散系統的定義，並且  $V(x)$  就是能量儲存函數  $\phi(x)$ ，而所對應的能量淨供應率函數  $S$  為

$$S(w, z) = \frac{1}{2}(\gamma^2 \|w\|_2^2 - \|z\|_2^2) = \frac{1}{2}(\gamma^2 w^T w - z^T z) \quad (10.4.4)$$

因為  $w$  是系統的輸入，而  $z$  是系統的輸出，所以上式可以解釋成

『能量的淨供應率 $S$ 等於能量的流入率 $w^T w$ 減去能量的流出率 $z^T z$ 』

(10.4.3)式所表示的 $L_2$ -gain 小於 $\gamma$ 的條件則可解釋成系統儲存能量的增加小於能量流入量與流出量的相減，也就是有部分能量被耗散掉了。因此要求一個系統的 $L_2$ -gain 小於 $\gamma$ ，就是要求該系統必須是一個能量耗散系統。

我們可以進一步改寫能量耗散系統的定義式，對(10.4.2)式的左右二邊除以 $t_1 - t_0$ ，得到

$$\frac{\phi(x_1) - \phi(x_0)}{t_1 - t_0} \leq \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} S(t) dt \quad (10.4.5)$$

並令 $t_1 \rightarrow t_0$ 得到微分的結果

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} f(x, z) \leq S(w, z) \quad (10.4.6)$$

此式可以解釋成系統能量的儲存率小於或等於系統能量的淨供應率。因此定義 10.4.1 可改寫成微分的形式。

**定義 10.4.2:** 耗散系統的微分型定義

非線性系統(10.4.1)為耗散系統，若存在正定函數 $\phi(x) > 0$ 滿足以下條件

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x, w) \leq S(w, z), \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall w \in \mathbb{R}^q, \forall z \in \mathbb{R}^p \quad (10.4.7)$$

□

上式的成立取決於所依據的能量供應率函數 $S(w, z)$ ，因此不同的能量耗散系統所對應的能量供應率函數也可能都不同。

**例題 10.4.1** (Marquez, 2003)

考慮如圖 10.4.1 所示的彈簧-滑快-阻尼系統，其運動方程式是標準形式的二階 ODE:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \quad (10.4.8)$$

其中 $F$ 是施加外力。本題是要判斷此系統是否為滿足(10.4.7)式的能量耗散系統。首先定義狀態變數 $x_1 = x$ 、 $x_2 = \dot{x}$ ，系統輸出 $z$ 取為滑塊的速度 $x_2 = \dot{x}$ ，而施加外力 $F$ 即為系統的輸入 $w$ 。因此系統的狀態方程式變成

$$G: \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{F}{m} \\ z = x_2 \end{cases} \quad (10.4.9)$$

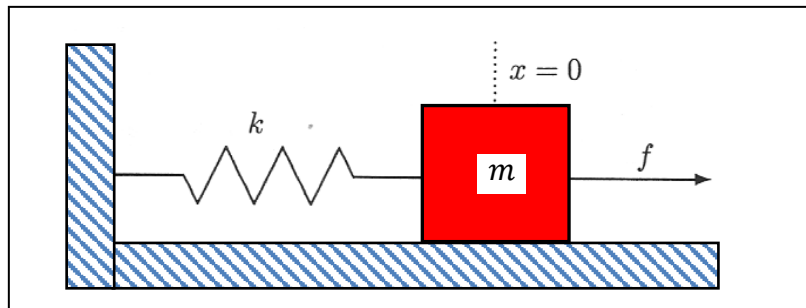


圖 10.4.1 步階訊號與斜坡訊號的有限時間近似。

儲存在該系統的能量為滑塊的動能及彈簧的彈性能：

$$\phi(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mx_2^2 + \frac{1}{2}kx_1^2$$

儲存能量 $\phi$ 對時間的變化率可求得為

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = [kx_1 \quad mx_2] \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{F}{m} \end{bmatrix} \\ &= -cx_2^2 + Fx_2\end{aligned}$$

因此該系統的能量供應率函數 $S(F, z)$ 為

$$S = -cx_2^2 + Fx_2 = F\dot{x} - c\dot{x}^2$$

其中 $F\dot{x}$ 是外力 $F$ 對系統所輸入的功率， $c\dot{x}^2$ 是系統阻尼的耗散功率，因此 $S$ 代表實際被系統所吸收的功率。關係式 $\dot{\phi} = S(F, z)$ 滿足(10.4.7)式，故為能量耗散系統。

□

## 10.4.2 被動系統

耗散系統所對應的能量供應率函數 $S$ 有不同的選擇，而被動系統(passive system)就是對應於某種特殊選擇的能量供應率函數 $S$ 的耗散系統。簡而言之，被動系統就是某種特殊型的能量耗散系統，其所對應的能量供應率函數 $S$ 定義成

$$S(w, z) = w^T z - \varepsilon w^T w - \delta z^T z - \rho \psi(x) \quad (10.4.10)$$

因此被動系統滿足下列的能量耗散條件

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x, w) \leq S(w, z) = w^T z - \varepsilon w^T w - \delta z^T z - \rho \psi(x) \quad (10.4.11)$$

在電路理論中，被動元件是指本身不會產生能量的元件。所以電阻、電容、電感都是屬於被動元件，它們可以儲存或耗散能量，但不會產生能量。這裡所定義的被動系統是廣義化的被動元件，其特性同樣符合可以儲存或耗散能量，但不會產生能量的原意。

**定義 10.4.3:** 被動系統的定義(Khalil, 1996)

非線性系統(10.4.1)稱為是被動系統，若存在正定函數 $\phi(x) > 0$ 滿足

$$w^T z \geq \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x, w) + \varepsilon w^T w + \delta z^T z + \rho \psi(x) \quad (10.4.12)$$

其中 $\varepsilon$ 、 $\delta$ 、 $\rho$ 均為非負常數；函數 $\psi(x) \geq 0$ ，且 $\psi(x(t)) = 0 \rightarrow x(t) \equiv 0$ 。

□

(10.4.12)的各項含意說明如下：(1) $w^T z$ 是系統輸入功率，(2) $\dot{\phi} = (\partial \phi / \partial x) f(x, w)$ 是系統能量儲存率，(3) $\varepsilon w^T w$ 是輸入端阻抗所產生的耗散功率，(4) $\delta z^T z$ 是輸出端阻抗所產生的耗散功率，(5) $\rho \psi(x)$ 是系統狀態所產生的耗散功率。將各項結合起來，(10.4.12)式表示當系統的輸入功率大於系統能量儲存率與各項耗散功率的總和時，該系統稱為被動系統。根據不同的耗散來源，被動系統又細分為四大類：

- 無損系統(lossless system): 當 $\varepsilon = \delta = \rho = 0$ ，且(10.4.12)式的等號成立時，即

$$w^T z = \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x, w)$$

此時系統的輸入功率剛好等於系統能量的儲存率，沒有任何能量耗損，故稱系統為無損

(lossless)。

- 輸入型嚴格被動系統(input strictly passive system): 當  $\varepsilon > 0$  時，亦即當系統存在有因輸入端阻抗所產生的能量耗散。
- 輸出型嚴格被動系統(output strictly passive system): 當  $\delta > 0$  時，亦即當系統存在有因輸出端阻抗所產生的能量耗散。
- 狀態型嚴格被動系統(state strictly passive system): 當  $\rho > 0$  時，亦即當系統存在有因狀態所產生的能量耗散。

下面的例題以實際的電路元件說明以上各種情形發生的時機。

#### 例題 10.4.2

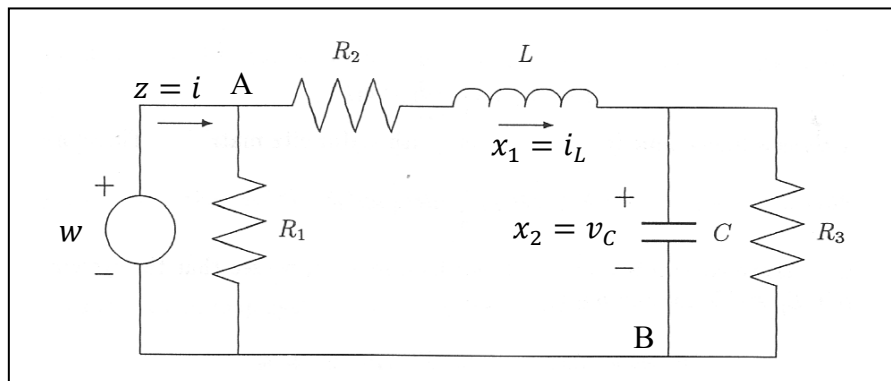


圖 10.4.2 由 RLC 電路所組成的被動系統(Khalil, 1996)。

考慮圖 10.4.2 所示之 RLC 電路，其中輸入訊號  $w$  是電源電壓，輸出  $z$  是流出電源的電流  $i$ ，並設狀態變數  $x_1$  是流過電感元件的電流  $i_L$ ， $x_2$  是跨越電容二端的電壓差。利用電路基本原理可得  $x_1$  與  $x_2$  所要滿足的方程式：

$$\dot{x}_1 = w - R_2 x_1 - x_2 \quad (10.4.13a)$$

$$C \dot{x}_2 = x_1 - x_2 / R_3 \quad (10.4.13b)$$

$$z = x_1 + w / R_1 \quad (10.4.13c)$$

其中(10.4.13a)式源自 A、B 二點的電壓差，(10.4.13b)式源自流過電容的電流，(10.4.13c)式源自流經 A 點的電流守恆。

此電路系統的輸入功率為電源電壓  $w(t)$  乘以流過電源的電流  $z(t) = i(t)$ 。假設儲存在電路中的能量為  $\phi(x)$ ，則此系統為耗散的條件為輸入功率大於儲存功率，亦即

$$w(t)z(t) \geq \dot{\phi}(x(t)) \quad (10.4.14)$$

在本電路系統中，會儲存能量的元件為電容及電感，因此  $\dot{\phi}$  是電容功率與電感功率的總和：

$$\dot{\phi} = L x_1 \dot{x}_1 + C x_2 \dot{x}_2 \quad (10.4.15)$$

再將(10.4.13)式代入上式化簡，得到

$$\dot{\phi} = wz - \frac{1}{R_1} w^2 - R_2 x_1^2 - \frac{1}{R_3} x_2^2 \quad (10.4.16)$$

或移項改寫成

$$wz = \dot{\phi} + \frac{1}{R_1} w^2 + R_2 x_1^2 + \frac{1}{R_3} x_2^2 \geq \dot{\phi} \quad (10.4.17)$$

滿足(10.4.14)式的條件，故該系統確實為能量耗散系統。同時(10.4.17)式也滿足(10.4.12)式的條件，故該系統也可稱為被動系統。以下分幾種特例來討論該系統被動性的來源有哪幾種。

- 特例(A):  $R_1 = R_3 = \infty, R_2 = 0$   
在此情況下，(10.4.17)式化成

$$wz = \dot{\phi}$$

亦即系統的輸入功率剛好等於系統能量的儲存率，此即前面所提的無損(lossless)系統。

- 特例(B):  $R_2 = 0, R_3 = \infty$   
在此情況下，(10.4.17)式化成

$$wz = \dot{\phi} + \frac{1}{R_1} w^2$$

此時系統存在有因輸入 $w$ 所產生的能量耗散，故此情況下的系統即為前面所提的輸入型嚴格被動系統(input strictly passive system)。

- 特例(C):  $R_1 = R_3 = \infty$   
在此情況下，(10.4.17)式化成

$$wz = \dot{\phi} + R_2 x_1^2$$

從圖 10.4.2 可觀察到此時通過電感的電流即為通過電源的電流，亦即 $x_1 = z$ ，故上式可改寫成 $wz = \dot{\phi} + R_2 z^2$ 。此時系統存在有因輸出 $z$ 所產生的能量耗散，故此情況下的系統即為前面所提的輸出型嚴格被動系統(output strictly passive system)。

- 特例(D):  $R_1 = \infty$   
在此情況下，(10.4.17)式化成

$$wz = \dot{\phi} + R_2 x_1^2 + \frac{1}{R_3} x_2^2$$

此時系統存在有因狀態 $x_1$ 與 $x_2$ 所產生的能量耗散，故此情況下的系統即為前面所提的狀態型嚴格被動系統(state strictly passive system)。

□

### 10.4.3 被動性與 $L_2$ -gain 穩定性

被動性系統是能量耗散系統的一種形式，因為能量的耗散使得被動性系統所能儲存的能量受到限制，而讓系統達致某種穩定性。考慮一個非線性系統

$$G: \begin{cases} \dot{x} = f(x, w), x \in \mathbb{R}^n, w \in \mathbb{R}^q \\ z = h(x, w), z \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (10.4.18)$$

已知其滿足(10.4.12)式的被動性條件，則該非線性系統具有下列之穩定特性：

**定理 10.4.1** (Khalil, 1996)

- (A) 若該系統存在正定之儲存函數 $\phi(x) > 0$ ，則在輸入 $w = 0$ 的情況下， $\dot{x} = f(x, 0)$ 相對於平衡點為 Lyapunov 穩定。
- (B) 若該系統為 output strictly passive (輸出型嚴格被動)，則該系統為 $L_2$ -gain 穩定。
- (C) 若該系統為 output strictly passive (輸出型嚴格被動)，且存在正定之儲存函數 $\phi(x) > 0$ ，則在輸入 $w = 0$ 的情況下， $\dot{x} = f(x, 0)$ 相對於平衡點為漸進穩定。

**證明：**

- (A) 由(10.4.11)式知 $\dot{\phi} \leq w^T z$ ，當輸入 $w = 0$ 時，得 $\dot{\phi} \leq 0$ 。再加上條件 $\phi(x) > 0$ ，故知 $\phi(x)$ 為合格的 Lyapunov 函數，亦即該系統為 Lyapunov 穩定。

(B) 當系統為 output strictly passive，則由定義 10.4.3 知

$$\begin{aligned}
 \dot{\phi} &\leq w^T z - \delta z^T z \\
 &= -\frac{1}{2\delta} (w - \delta z)^T (w - \delta z) + \frac{1}{2\delta} w^T w - \frac{\delta}{2} z^T z \\
 &\leq \frac{1}{2\delta} w^T w - \frac{\delta}{2} z^T z
 \end{aligned} \tag{10.4.19}$$

對上式的二邊積分得

$$\int_0^\tau z^T(t)z(t) dt \leq \frac{1}{\delta^2} \int_0^\tau w^T(t)w(t) dt - \frac{2}{\delta} [\phi(x(\tau)) - \phi(x(0))]$$

利用條件  $\phi(x) \geq 0$  及不等關係式:  $\sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b, \forall a > 0, b > 0$ ，上式可續化簡成

$$\|z_\tau\|_{L_2} \leq \frac{1}{\delta} \|z_\tau\|_{L_2} + \sqrt{\frac{2}{\delta} \phi(x(0))}$$

上式與(10.2.27)式比較，證明系統滿足  $L_2$ -gain 穩定的條件，且  $\gamma_2(G) \leq 1/\delta$ 。

(C) 這一情況與(B)類似，但是只考慮輸入  $w = 0$  的情形，此時(10.4.19)式化成

$$\dot{\phi} \leq w^T z - \delta z^T z = -\delta z^T z = -\delta h^T(x, 0)h(x, 0) \leq 0$$

如果輸出函數能夠滿足條件  $h(x, 0) > 0, \forall x \neq 0$ ，則有  $\dot{\phi} < 0, \forall x \neq 0$ ，此時即可保證系統為漸進穩定。

□

如前所述，非線性系統的穩定性分成二種，一種是分析平衡點的穩定性(輸入為零)，稱為 Lyapunov 穩定性；另一種是分析輸入-輸出之間的穩定性，如  $L_2$ -gain 穩定性。定理 10.4.1 揭露一個重要的訊息，告訴我們非線性系統的被動特性(passivity)是 Lyapunov 穩定性與  $L_2$ -gain 穩定性的橋樑，它可以一方面做為平衡點的穩定性分析，也可用來進行輸入-輸出之間的穩定性分析。由於被動特性的重要性，以下定理告訴我們如何判斷一個非線性系統具有被動性。

#### 定理 10.4.2

對於非線性系統

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= f(x) + g(x)w \\
 z &= h(x)
 \end{aligned} \tag{10.4.20}$$

若存在  $\phi(x) \geq 0$  滿足

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} f(x) \leq 0, \frac{\partial \phi}{\partial x} g(x) = h^T(x) \tag{10.4.21}$$

則此系統為被動(passive)。若存在  $\phi(x) \geq 0$  滿足

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x) &\leq -kh^T(x)h(x), \quad k > 0 \\
 \frac{\partial \phi}{\partial x} g(x) &= h^T(x)
 \end{aligned} \tag{10.4.22}$$

則此系統為輸出型嚴格被動(output strictly passive)。

**證明：**

我們要證明滿足(10.4.21)式或(10.4.22)式的系統確實具有(10.4.12)式所定義的被動性質。首先由(10.4.21)式出發，可得如下結果：

$$\begin{aligned}
w^T z - \dot{\phi} &= w^T z - \frac{\partial \phi}{\partial x} [f(x) + g(x)w] \\
&= w^T h(x) - \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x) - h^T(x)w \\
&= -\frac{\partial \phi}{\partial x} f(x) \geq 0
\end{aligned}$$

故由(10.4.12)式的定義知系統為被動。同理由(10.4.22)式出發，可得如下結果：

$$w^T z - \dot{\phi} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} f(x) \geq kz^T z$$

由(10.4.12)式的定義知系統為被動。

□

由定理 10.4.1 知系統若為輸出型嚴格被動，則該系統為 $L_2$ -gain 穩定；另一方面，由定理 10.4.2 知，滿足(10.4.22)式的系統必為輸出型嚴格被動。現在結合這二個定理。我們得到一個新的結論：滿足(10.4.22)式的系統必為 $L_2$ -gain 穩定的系統。

同時在定理 10.3.1 中，我們已推導出 $L_2$ -gain 穩定的系統必須滿足 Hamilton-Jacobi PDE 不等式：

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x} g(x) g^T(x) \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T + \frac{1}{2} h^T(x) h(x) \leq 0 \quad (10.4.23)$$

因此 $L_2$ -gain 穩定的系統必須同時滿足(10.4.22)式及(10.4.23)式，這說明我們可以利用(10.4.22)式的解 $\phi(x)$ 來獲得(10.4.23)式的 PDE 不等式的解。設 $\phi(x)$ 是(10.4.22)式的一個解，則對應的 Hamilton-Jacobi PDE 不等式的解恆可表成

$$V(x) = \alpha \phi(x) \quad (10.4.24)$$

其中 $\alpha$ 為待定之常數。茲將(10.4.24)式代入 Hamilton-Jacobi 不等式(10.4.23)式中，並利用(10.4.22)式的條件，可得

$$\left( -\alpha k + \frac{\alpha^2}{2\gamma^2} + \frac{1}{2} \right) h^T(x) h(x) \leq 0$$

因此只需選取 $\alpha$ 值滿足

$$\alpha^2 - 2k\gamma^2\alpha + \gamma^2 \leq 0 \quad (10.4.25)$$

則 $V(x) = \alpha \phi(x)$ 即為 Hamilton-Jacobi 不等式的解。利用判別式大於等於零的條件，得知(10.4.25)式有實數解 $\alpha$ 的條件為 $\gamma \geq 1/k$ ，這說明系統的 $L_2$ -gain  $\gamma_2(G) \geq 1/k$ 。

## 10.5 線性系統的 $L_2$ -Gain: $H_\infty$ -norm

### 10.5.1 $H_\infty$ -norm 的時域表示式

對於非線性系統

$$G: \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)w \\ z = h(x) \end{cases} \quad (10.5.1)$$

前面我們已經定義系統 $G$ 的 $L_2$ -gain 為

$$\gamma_2(G) = \sup_{w \in L_2} \frac{\|z\|_{L_2}}{\|w\|_{L_2}} \quad (10.5.2)$$

亦即 $\gamma_2(G)$ 是輸出能量比上輸入能量的最大值。在定理 10.3.1 中，我們已推導出 $\gamma_2(G) < \gamma$ 時，

非線性系統所要滿足的條件即為 Hamilton-Jacobi PDE 不等式(10.4.23)必須存在正定的解  $V(x) > 0$ :

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x} g(x) g^T(x) \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T + \frac{1}{2} h^T(x) h(x) \leq 0 \quad (10.5.3)$$

而  $\gamma_2(G)$  就是上式存在有正定解的最小  $\gamma$  值。所以  $\gamma_2(G)$  的求得必須經過數值疊代的步驟，每一次的疊代都要求解一遍上面的 PDE 不等式。

對於線性系統而言，(10.5.3)式的求解變得容易許多。考慮線性系統

$$G: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bw \\ z = Cx \end{cases} \quad (10.5.4)$$

其中  $A$  的特徵值都在左半平面。就像是線性系統的 Lyapunov 函數恆可選成二次式的形式，線性系統的 Hamilton-Jacobi PDE 不等式的解也是恆可選成二次式的形式

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T P x, P > 0 \quad (10.5.5)$$

其中  $P$  為待定之正定矩陣。將(10.5.5)式代入(10.5.3)式中化簡得

$$x^T \left( PA + \frac{1}{2\gamma^2} PB^T B P + \frac{1}{2} C^T C \right) x \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

上式對於任意的  $n$  維向量  $x$  都必須成立，因此必須括號內的矩陣為負定：

$$PA + A^T P + \frac{1}{\gamma^2} PB^T B P + C^T C \leq 0 \quad (10.5.6)$$

此即所謂的 Riccati 不等式。因此對於線性系統而言，其  $L_2$ -gain 小於  $\gamma$  的條件即是以上的 Riccati 不等式要存在正定的解  $P$ 。(10.5.6)式的求解在 Matlab 中已有既定程式可使用，呼叫指令就是 "Riccati"。而線性系統的  $L_2$ -gain  $\gamma_2(G)$  就是使得 Riccati 不等式有正定解的最小  $\gamma$  值。

## 10.5.2 $H_\infty$ -norm 的頻域表示式

對於線性系統而言，還有一個更簡便的方法求  $L_2$ -gain  $\gamma_2(G)$ ，就是透過頻率響應。(10.5.4)式的線性系統  $G$  可表成拉式轉換的形式

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \Rightarrow Z(s) = G(s)W(s) \quad (10.5.7)$$

則輸出  $z$  的  $L_2$ -norm 可用頻域響應表示之(參見(10.2.10)式):

$$\begin{aligned} \|z\|_{L_2}^2 &= \int_0^\infty z^T(t)z(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty Z^*(j\omega)Z(j\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty W^*(j\omega)G(-j\omega)G(j\omega)W(j\omega) d\omega \\ &\leq \sup_{\omega} |G(j\omega)|^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty W^*(j\omega)W(j\omega) d\omega \\ &= \left( \sup_{\omega} |G(j\omega)| \right)^2 \|w\|_{L_2}^2 \end{aligned} \quad (10.5.8)$$

二邊開根號得到輸出入的比值

$$\frac{\|z\|_{L_2}}{\|w\|_{L_2}} \leq \sup_{\omega} |G(j\omega)| \Rightarrow \gamma_2(G) \leq \sup_{\omega} |G(j\omega)| \quad (10.5.9)$$

進一步的證明顯示上式只成立在等式發生的時候，亦即我們確切得到  $L_2$ -norm 的最小上限：

$$\gamma_2(G) = \sup_{w \in L_2} \frac{\|z\|_{L_2}}{\|w\|_{L_2}} = \sup_{\omega} |G(j\omega)| \quad (10.5.10)$$



在另一方面，因為 $G$ 是一個穩定的線性系統， $G(s)$ 在右半平面為可解析，則由最大模定理(定理 10.2.1)知道， $|G(s)|$ 在右半平面的最大值發生在虛軸 $j\omega$ 上：

$$\sup_{\omega} |G(j\omega)| = \sup_{\operatorname{Re}(s) > 0} |G(s)| = \|G(s)\|_{H_{\infty}} \quad (10.5.11)$$

其中我們使用了(10.2.17)式中的 $H_{\infty}$ -norm 的定義。結合(10.5.10)式與(10.5.11)式，得到下列重要結論：

$$\gamma_2(G) = \|G(s)\|_{H_{\infty}} = \sup_{\omega} |G(j\omega)| \quad (10.5.12)$$

這表示一個線性系統 $G$ 的 $L_2$ -gain 剛好等於其轉移函數 $G(s)$ 的 $H_{\infty}$ -norm，而 $H_{\infty}$ -norm 的意義就是波德圖中 $|G(j\omega)|$ 的最大值，如圖 10.5.1 所示。

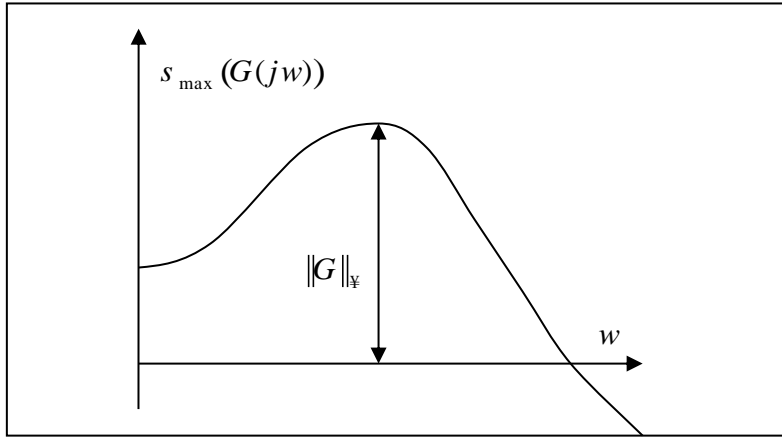


圖 10.5.1 多變量系統的波德圖是用 $\sigma_{\max}(G(j\omega))$ 取代 $|G(j\omega)|$ 。

由於線性系統 $G$ 的 $L_2$ -gain 剛好等於其轉移函數 $G(s)$ 的 $H_{\infty}$ -norm，因此當我們講線性系統的 $L_2$ -gain 控制時，所指的就是線性系統的 $H_{\infty}$ 控制。然而對於非線性系統 $G$ 而言，由於 $G$ 沒有Laplace 函數的表示法，所以並沒有相對應 $H_{\infty}$ -norm 的定義，因此也就沒有所謂的非線性 $H_{\infty}$ 控制。但是習慣上，我們仍然沿用線性系統的說法，將非線性系統的 $L_2$ -gain 控制稱作是非線性 $H_{\infty}$ 控制。

當(10.5.4)式代表一個多輸入多輸出的線性系統(Multi-Input Multi-Output system, MIMO)時， $G(s)$ 不是純量函數而是矩陣函數，這時(10.5.12)式中的絕對值 $|G(j\omega)|$ 必須改成矩陣的範數 $\|G(j\omega)\|_2$ 表示，而矩陣的範數根據(10.1.7b)式的定義為

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \sigma_{\max}(A) = \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)} \quad (10.5.13)$$

因此對於 MIMO 線性系統，(10.5.12)式變成

$$\gamma_2(G) = \|G\|_{\infty} = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega)) = \sup_{\omega} \sqrt{\lambda_{\max}(G^T G(j\omega))} \quad (10.5.14)$$

其中 $\bar{\sigma}(G) = \sigma_{\max}(G)$ 是指 $G$ 的最大奇異值(參見 11.1 節的定義)。 $G$ 的特徵值 $\lambda$ 與奇異值 $\sigma$ 有下列的關係：

$$\sigma_i(G) = \sqrt{\lambda_i(G^T G)} \quad (10.5.15)$$

只有方陣(行的數目要等於列的數目)才能定義特徵值，但從(10.5.15)式的定義可知，對於任意矩陣 $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ，其奇異值恆存在，因為 $G^T G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 必為方陣。對比純量系統的波德圖 $|G(j\omega)|$ ，

$\sigma_{\max}(G(j\omega))$ 對頻率 $\omega$ 所畫的圖相當於是 MIMO 線性系統的波德圖。因此不管是採用 $|G(j\omega)|$ 或 $\sigma_{\max}(G(j\omega))$ ，波德圖的最高點就是系統的 $H_{\infty}$ -norm。

根據(10.5.14)式的定義， $\|G\|_{\infty}$ 的計算即是在頻率軸上進行搜尋，使得 $\bar{\sigma}(G(j\omega))$ 的值達到最大。實際的作法是在頻率軸上取 $n$ 個點：

$$\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$$

在每一個頻率點上計算 $\bar{\sigma}(G(j\omega_i))$ ，則 $\|G\|_{\infty}$ 的值可近似為

$$\|G(s)\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \bar{\sigma}(G(j\omega_i)) \quad (10.5.16)$$

此一近似值的準確性和所取的頻率點的個數 $n$ 有關， $n$ 值越大，準確度越高，但所費的計算時間也越多。

Matlab 採用另一個計算 $\|G\|_{\infty}$ 更有效率的方法，稱為 $\gamma$ -iteration，它是根據以下的定理而來：

#### 定理 10.5.1

線性系統 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ 滿足 $\|G(s)\|_{\infty} < \gamma$ 之條件，若且唯若

- (1)  $\bar{\sigma}(D) < \gamma$
- (2) Hamiltonian 矩陣 $H$

$$H = \begin{bmatrix} A + BR^{-1}D^*C & BR^{-1}B^* \\ -C^*(I + DR^{-1}D^*)C & -(A + BR^{-1}D^*C)^* \end{bmatrix} \quad (10.5.17)$$

不具有在虛軸上的特徵值。

□

以上定理的證明可參閱相關線性 $H_{\infty}$ 控制的專書，例如 Zhou and Doyle, 1998。。利用這個定理，我們只要計算一次 $H$ 的特徵值，檢查有無在虛軸上的特徵值，即可知 $\|G\|_{\infty} < \gamma$ 的條件是否成立。如果 $\|G\|_{\infty} < \gamma$ 成立的話，可再進一步減小 $\gamma$ 的值，直到 $\|G\|_{\infty} < \gamma$ 不再滿足為止，此時的 $\gamma$ 值即是所能允許的最小 $\gamma$ 值。此一過程稱為 $\gamma$ -iteration，其數值步驟整理如下：

1. 先任意選擇 $\|G\|_{\infty}$ 的上下界使得 $\gamma_l \leq \|G\|_{\infty} \leq \gamma_u$ 。
2. 設定 $\gamma = (\gamma_l + \gamma_u)/2$ 。
3. 檢查 $H$ 是否有虛軸上的特徵值。
4. 如果有，代表 $\|G\|_{\infty} > \gamma$ ，此時設定 $\gamma_l = \gamma$ ；如果無，代表 $\|G\|_{\infty} < \gamma$ ，此時設定 $\gamma_u = \gamma$ 。並回到步驟 2。
5. 重複以上的疊代過程，直到上、下界的差小於某一設定值為止： $(\gamma_u - \gamma_l)/\gamma_l < \varepsilon$ 。

以上的疊代過程實際上就是數值分析中的半間距法(bisection algorithm)，該法的特性是每經過一次疊代，上界與下界的間距 $\gamma_u - \gamma_l$ 就減半；在經過 $n$ 次疊代後，間距縮成 $(\gamma_u - \gamma_l)/2^n$ ，所以只要 $n$ 足夠大， $\|G\|_{\infty}$ 值的計算誤差即可被壓縮在指定的 $\varepsilon$ 範圍內。

#### 例題 10.5.1 (Zhou and Doyle, 1998)

考慮一個 2 輸入、2 輸出的系統

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10(s+1)}{s^2+0.2s+100} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{s+2}{s^2+0.1s+10} & \frac{5(s+1)}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix} \quad (10.5.18)$$

本題要分別使用二種方法：頻率軸搜尋法及 $\gamma$ 疊代法，計算 $\|G\|_{\infty}$ 值。首先在 Matlab 程式環境下

建立轉移函數 $G(s)$ :

- $G11 = \text{nd2sys}([10,10], [1,0.2,100])$ :輸入函數 $G_{11}(s)$
- $G12 = \text{nd2sys}(1, [1,1])$ :輸入函數 $G_{12}(s)$
- $G21 = \text{nd2sys}([1,2], [1,0.1,10])$ :輸入函數 $G_{21}(s)$
- $G22 = \text{nd2sys}([5,5], [1,5,6])$ :輸入函數 $G_{22}(s)$
- $G = \text{sbs}(\text{abv}(G11, G21), \text{abv}(G12, G22))$ :合成矩陣轉移函數 $G(s)$
- 以頻率軸搜尋法求 $\|G\|_\infty$ 的值，先在頻率軸上選取 $n$ 個頻率點 $\omega_i$ 。
- $w = \text{logspace}(0,2,200)$ :在頻率範圍 $10^0 \leq \omega \leq 10^2$ 內選取 200 個頻率點 $\omega_i$ 。
- $Gf = \text{frsp}(G, w)$ :計算 $G(j\omega_i), i = 1, 2, \dots, 200$ 。
- $[u, s, v] = \text{svsd}(Gf)$ :計算在每個頻率點上的奇異值分解(SVD)。
- $\text{Vplot}('liv,lm',s), \text{grid}$ :畫出奇異值 $\sigma(\omega_i)$ 對頻率的響應圖。
- $\text{Pkvnorm}(s)$ :求奇異值 $\sigma(\omega_i)$ 的最大值。

以上 Matlab 程式執行的結果如圖 10.5.2 所示，圖中二條曲線分別代表 $\sigma_1(G(j\omega))$ 及 $\sigma_2(G(j\omega))$ ， $\|G\|_\infty$ 範數的值為 $\sigma_1(G(j\omega))$ 曲線的最高點，計算結果為 $\|G\|_\infty = 32.861$ 。

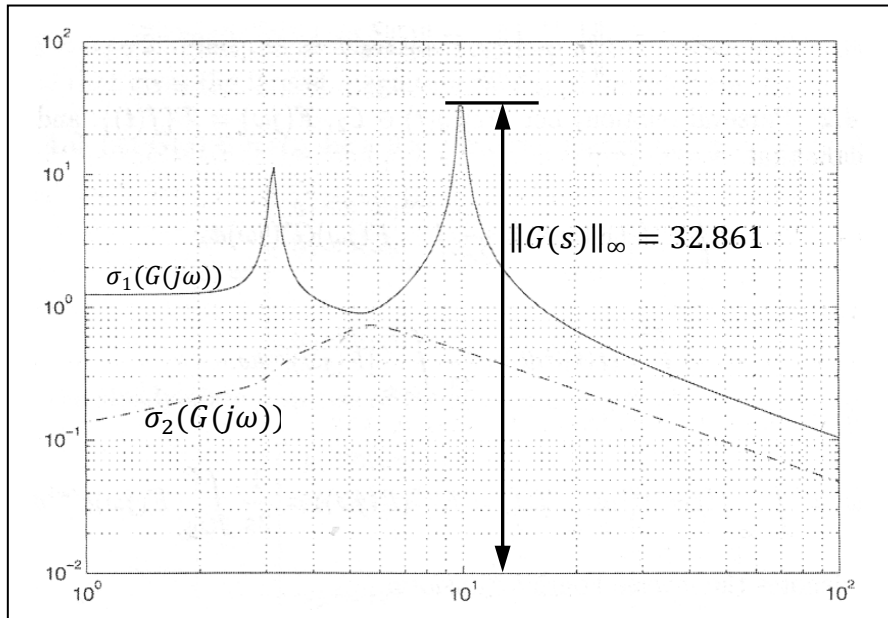


圖 10.5.2 例題 10.5.1 中的線性系統，其奇異值的頻率響應圖(Zhou and Doyle, 1998)。

其次我們利用 $\gamma$ 疊代法，計算 $\|G\|_\infty$ 值。此法在 Matlab 中有現成的呼叫程式：

$$\text{Hinfnorm}(G, 0.0001)$$

其中  $G$  是由(10.5.18)式所給定， $\varepsilon = 0.0001$ 是給定的允許誤差。利用 $\gamma$ 疊代法得到 $\|G\|_\infty = 50.25$ 。比較以上二種方法所得到的 $\|G\|_\infty$ 數值有很大的差距，這是因為頻率軸搜尋法本質上是一種圖解法，當奇異值的頻率響應曲線精確度不夠時，將會影響曲線最大值的判讀。為了增加圖形的精確度，在頻率範圍 $10^0 \leq \omega \leq 10^2$ 內，原先是選取 200 個頻率點 $\omega_i$ ，現在分別增加至 400、800、1600 個頻率點，所得到的 $\|G\|_\infty$ 值分別為 43.525、48.286、49.737。可以發現當頻率點取得越來越多時，由頻率響應的最高點所得到的 $\|G\|_\infty$ 值，越來越接近由 $\gamma$ 疊代法所得到的值 $\|G\|_\infty = 50.25$ 。

□

### 10.5.3 線性 $H_\infty$ 控制器的設計與求解

Riccati 方程式(10.5.6)表示了在没有控制介入的情况下，线性系统的 $H_\infty$ -norm 小于 $\gamma$ 的条件。线性 $H_\infty$ 控制的目的是要透过控制力的介入，使得闭回路系统的 $H_\infty$ -norm(亦即 $L_2$ -gain)小于设定值 $\gamma$ 。考虑如下的线性输出回授系统

$$G: \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \end{cases} \quad (10.5.19)$$

其中 $w$ 是外界输入的干扰力， $u$ 是所要设计的控制力， $z$ 是性能输出指标， $y$ 是感测器的量测输出讯号。对于任意输入干扰力 $w \in L_2$ ，线性 $H_\infty$ 控制的目的是要设计控制力 $u$ ，使得系统的 $L_2$ -gain 小于 $\gamma$ ，即 $\|z\|_2 / \|w\|_2 < \gamma$ 。(10.5.4)式的系统 $G$ 称为扩增系统(augmented system)，它具有二个输入 $w$ 与 $u$ ，及二个输出 $z$ 与 $y$ ，如图 10.5.1 所示。(10.5.4)式是扩增系统 $G$ 的状态空间表示式，其所对应的拉氏转换也有专属的表示法：

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (10.5.20)$$

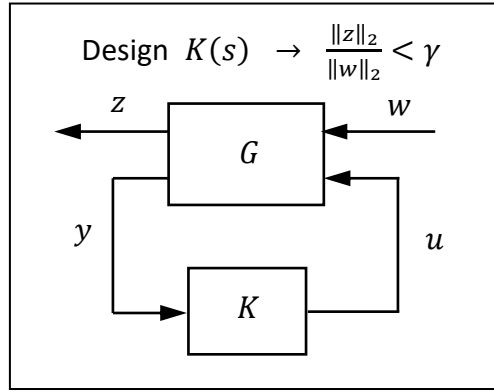


圖 10.5.3 扩增系统的输出入关系图

其中插入十字形间隔线的矩阵是代表拉氏转换，而非一般的矩阵，其定义如下：

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \triangleq C(sI - A)^{-1}B + D \quad (10.5.21)$$

线性 $H_\infty$ 控制律的求解，主要分成三个步骤，第一个步骤是指定控制系统的输出、入讯号，第二个步骤是将待求解的问题化成如图 10.5.3 所示的标准形式，并建立扩增系统矩阵 $G$ ；第三个步骤是呼叫 Matlab 程式，输入扩增系统矩阵 $G$ ，求出强健控制器 $K(s)$ 。

#### (1) 建立扩增系统矩阵 $G$

这一步骤是要将一般控制问题的输出入关系(参见图 10.5.4)，转换成如图 10.5.3 所示的广义控制方块图。这个步骤相当于是将图 10.5.4 中的控制器 $K(s)$ 以外的所有方块，全部纳入扩增系统矩阵 $G$ 之中。在图 10.5.4 之中，有 4 个正规化输入讯号 $\tilde{r}$ 、 $\tilde{d}_i$ 、 $\tilde{d}$ 、 $\tilde{n}$ ，分别透过 4 个比权函数(weighting function)产生 4 个实际的输入讯号 $\tilde{r}$ 、 $\tilde{d}_i$ 、 $\tilde{d}$ 、 $\tilde{n}$ ：

$$r = W_r \tilde{r}, d_i = W_i \tilde{d}_i, d = W_d \tilde{d}, n = W_n \tilde{n} \quad (10.5.22a)$$

同时有 2 个正规化的输出讯号 $\tilde{y}'$ 、 $\tilde{u}$ ，分别由实际的输出讯号 $y'$ 、 $u$ 透过 2 个比权函数所产生：

$$\tilde{y}' = W_y y', \tilde{u} = W_u u \quad (10.5.22b)$$

其中正規化的輸入、輸出訊號均滿足 2-norm 小於等於 1 的條件

$$\|\tilde{r}\|_2 \leq 1, \|\tilde{d}_i\|_2 \leq 1, \|\tilde{d}\|_2 \leq 1, \|\tilde{n}\|_2 \leq 1, \|\tilde{u}\|_2 \leq 1, \|\tilde{y}\|_2 \leq 1 \quad (10.5.23)$$

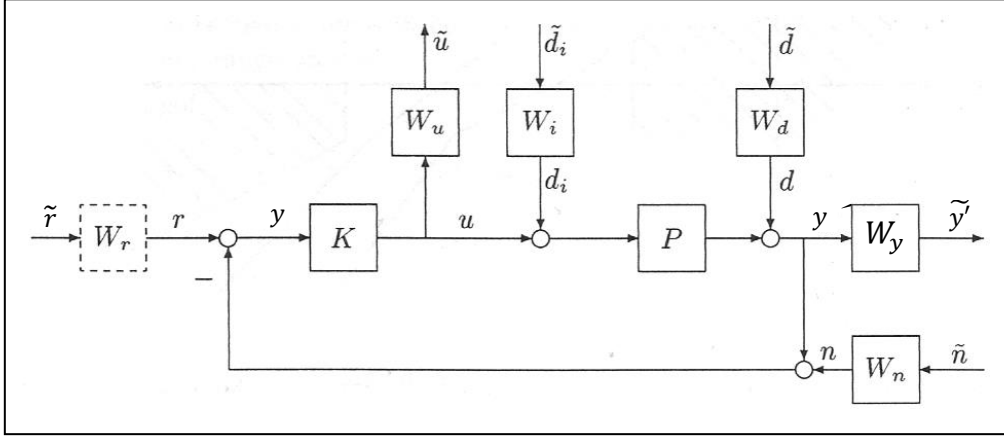


圖 10.5.4 一般控制問題的輸出入關係圖

強健控制不是針對某特定輸入訊號進行控制，而是針對一群訊號控制，就像是本章一開始所提到的比喻，強健設計是要設計一頂全班都可戴的帽子，而不是針對某個人設計帽子。以圖 10.5.4 為例，強健控制所要追蹤的指令  $r = W_r \tilde{r}$ ，不是單一步階訊號或是單一固定頻率的正弦波訊號，而是要追蹤一整群的指令訊號，這一群訊號的頻率分佈範圍從低頻到高频都有，而比權函數  $W_r(s)$  的功能就是指定了這一群指令訊號在頻率軸上的強度分布情形。同樣的道理，強健控制所要濾除的雜訊  $n = W_n \tilde{n}$ ，也不是單一雜訊，而是一整群雜訊，其中比權函數  $W_n(s)$  的功能就是指定了這一群雜訊在頻率軸上的分布情形。在圖 10.5.4 中的其他比權函數都具有類似的功能。關於比權函數的進一步討論可參閱(Yeh and Yang, 1991)。

依據  $H_\infty$ -norm 的定義，它是指輸出  $z$  與輸入  $w$  比值的最大值，：

$$\sup_{w \in L_2} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} = \sup_{\|w\|_2 \leq 1} \|z\|_2 = \|T_{zw}\|_\infty \quad (10.5.24)$$

其中  $T_{wz}(s)$  是  $z$  與  $w$  之間的拉氏轉移函數。 $H_\infty$  控制的目的是要設計控制器  $K(s)$  使得  $\|T_{wz}\|_\infty$  達到最小，或是小於某一指定的  $\gamma$  值，亦即：

$$\min_{K(s)} \|T_{zw}\|_\infty \text{ or } \|T_{zw}\|_\infty < \gamma \quad (10.5.25)$$

前者稱為  $H_\infty$  最佳控制(optimal control)，後者稱為  $H_\infty$  次佳控制(sub-optimal control)。簡而言之，如果我們要使得輸出  $z$  與輸入  $w$  比值的最大值小於  $\gamma$ ，就是要求  $z$  與  $w$  之間的拉氏轉移函數  $T_{zw}(s)$  滿足  $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ 。

### 例題 10.5.2

強健控制設計的第一步驟是要設定甚麼是輸入，甚麼是輸出。考慮如圖 10.5.4 的架構，假設強健控制的目的是要使得外部干擾  $\tilde{d}$  對系統輸出  $\tilde{y}$  的影響越小越好，此時輸入訊號  $w = \tilde{d}$ ，輸出訊號  $z = \tilde{y}$ ，而所要最小化的  $H_\infty$ -norm 為

$$\|T_{zw}\|_\infty < \gamma \rightarrow \sup_{\|\tilde{d}\|_2 \leq 1} \|\tilde{y}\|_2 = \|W_y S W_d\|_\infty < \gamma \quad (10.5.26)$$

$T_{zw} = W_y S W_d$  是輸入  $w = \tilde{d}$  與輸出  $z = \tilde{y}$  間之拉氏轉移函數，其中  $S = (I + PK)^{-1}$  稱為靈敏度函

數(sensitivity function)，而 $K(s)$ 是所要設計的控制器，目的是要滿足(10.5.26)式。

再考慮另一種情形，假設強健控制的目的是要使得外部干擾 $\tilde{d}$ 對控制能量 $\tilde{u}$ 的影響越小越好，此時輸入訊號 $w = \tilde{d}$ ，輸出訊號 $z = \tilde{u}$ ，而所要最小化的 $H_\infty$ -norm 為

$$\|T_{zw}\|_\infty < \gamma \rightarrow \sup_{\|\tilde{d}\|_2 \leq 1} \|\tilde{u}\|_2 = \|W_u K S W_d\|_\infty < \gamma \quad (10.5.27)$$

$T_{zw} = W_u K S W_d$ 是輸入 $w = \tilde{d}$ 與輸出 $z = \tilde{u}$ 間之拉氏轉移函數，而 $K(s)$ 是所要設計的控制器，目的是要滿足(10.5.26)式。

其次考慮第三種情形，輸入訊號仍然是 $w = \tilde{d}$ ，而輸出訊號是系統輸出 $\tilde{y}$ 與控制能量 $\tilde{u}$ 的混合：

$$\|T_{zw}\|_\infty < \gamma \rightarrow \sup_{\|\tilde{d}\|_2 \leq 1} \{\|\tilde{u}\|_2^2 + \rho^2 \|\tilde{y}\|_2^2\} = \left\| \begin{bmatrix} W_y S W_d \\ \rho W_u K S W_d \end{bmatrix} \right\|_\infty^2 < \gamma \quad (10.5.28)$$

$T_{zw} = [W_y S W_d, \rho W_u K S W_d]^T$ 是輸入 $w = \tilde{d}$ 與輸出 $z = [\tilde{y}, \rho \tilde{u}]^T$ 間之拉氏轉移函數，而 $K(s)$ 是所要設計的控制器，目的是要滿足(10.5.28)式。不管是以上的何種情形，我們可以看到每一個強健控制的問題，都有其對應的輸入訊號 $w$ 與輸出訊號 $z$ ，以及 $w$ 與 $z$ 之間的轉移函數 $T_{zw}$ 。

□

## (2) 建立擴增系統矩陣 $G$

這一步驟是要將一般控制問題的輸出入關係(參見圖 10.5.4)，轉換成如圖 10.5.3 所示的廣義控制方塊圖。這個步驟相當於是要將圖 10.5.4 中的控制器 $K(s)$ 以外的所有方塊，全部納入擴增系統矩陣 $G$ 之中。擴增系統 $G$ 具有二個輸入 $w$ 與 $u$ ，及二個輸出 $z$ 與 $y$ ，

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{zw}(s) & G_{zu}(s) \\ G_{yw}(s) & G_{yu}(s) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{zw}(s) & G_{zu}(s) \\ G_{yw}(s) & G_{yu}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (10.5.29)$$

在建立擴增系統矩陣 $G$ 的過程中，控制器 $K(s)$ 是被拉到方塊的外面，所以矩陣 $G$ 的元素與 $K(s)$ 無關，也就是在建立(10.5.29)式的輸出、入關係時，我們假設 $K(s)$ 的二端為斷路。在圖 10.5.3 中，除了(10.5.29)式的關係外，另一個關係為

$$u = Ky \quad (10.5.30)$$

將(10.5.29)與(10.5.30)二式聯立，消去 $y$ 與 $u$ ，即得 $w$ 與 $z$ 之間的閉迴路關係式 $z = T_{zw}(s)w$ ：

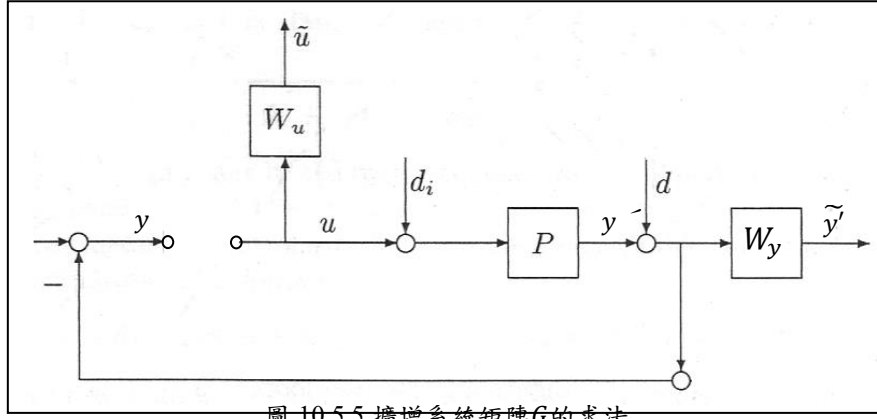
$$z = [G_{zw} + G_{zu}K(I - G_{yu}K)^{-1}G_{yw}]w = T_{zw}(s)w \quad (10.5.31)$$

其中 $K$ 是所要設計的控制器，目的是使得 $\|T_{zw}(s)\|_\infty$ 為最小，或是 $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$ 。不過透過 Matlab 求解線性 $H_\infty$ 控制器時，我們只需輸入(10.5.29)式的開迴的路擴增系統矩陣 $G$ ，Matlab 會自動輸出求解得到的閉迴路轉移函數 $T_{zw}(s)$ 。

### 例題 10.5.3

參見圖 10.5.5，假設強健控制的目的是要使得從輸入 $w = [dd_i]^T$ 到輸出 $z = [\tilde{y}'\tilde{u}]^T$ 間之 $H_\infty$ -norm 達到最小。我們要建立如(10.5.29)式的關係式，首先將控制器 $K(s)$ 所在的位置斷路如圖 10.5.5 所示，並從圖中讀取得到如下的關係：

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}' \\ \tilde{u} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_y & W_y P & W_y P \\ 0 & 0 & W_u \\ -I & -P & -P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ d_i \\ u \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{zw}(s) & G_{zu}(s) \\ G_{yw}(s) & G_{yu}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (10.5.32)$$

圖 10.5.5 擴增系統矩陣 $G$ 的求法

將(10.5.31)與(10.5.30)二式聯立，消去 $y$ 與 $u$ ，即得 $w$ 與 $z$ 的閉迴路關係式 $z = T_{wz}(s)w$ :

$$z = \begin{bmatrix} \tilde{y}' \\ \tilde{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_y(I + PK)^{-1} & W_y(I + PK)^{-1}P \\ -W_uK(I + PK)^{-1} & -W_uK(I + PK)^{-1}P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ d_i \end{bmatrix} = T_{wz}(s) \begin{bmatrix} d \\ d_i \end{bmatrix} \quad (10.5.33)$$

控制器 $K(s)$ 的設計是要使得 $\|T_{wz}(s)\|_\infty$ 達到最小。

□

### (3) 求解控制器 $K(s)$

建立了擴增系統矩陣 $G$ 之後，即可呼叫現有標準程式，例如 Matlab 強健控制工具箱(robust control toolbox)中的指令“hinfsyn”，求得控制器 $K(s)$ :

$$\ll [K, T_{zw}, \gamma_{\text{subopt}}] = \text{hinfsyn}(G, n_y, n_u, \gamma_{\min}, \gamma_{\max}, \text{tol}) \quad (10.5.34)$$

其中指令的輸入項包含: $G$ 是(10.5.29)式的擴增系統矩陣， $n_y$ 是輸出 $y$ 的維度， $n_u$ 是輸入 $u$ 的維度， $\gamma_{\min}$ 與 $\gamma_{\max}$ 是 $\gamma$ 值疊代的下界與上界， $\text{tol}$ 是 $\gamma$ 值疊代的收斂容忍誤差；指令的輸出項包含: $K$ 是求得的最佳 $H_\infty$ 控制器， $T_{zw}$ 是 $w$ 與 $z$ 之間的閉迴路轉移函數， $\gamma_{\text{subopt}}$ 是所求得的最小 $\gamma$ 值。輸出的最佳 $H_\infty$ 控制器具有狀態空間的實現如下

$$K(s) = \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} \triangleq C_K(sI - A_K)^{-1}B_K + D_K \quad (10.5.22)$$

其中係數矩陣 $A_K, B_K, C_K, D_K$ 的獲得是求解自二個類似(10.5.6)式的 Riccati 不等式(Tsai and Gu, 2014; Chou and Doyle, 1998; Doyle, et al, 1989)，而解此二不等式的方法是稱為線性矩陣不等式(Linear Matrix Inequality, LMI)的數值方法。Matlab 的工具箱 LMI toolbox 即是專門用來求解 LMI 不等式，其理論基礎可參閱 Boyd, et al, 1994。

### 例題 10.5.4

接續例題 10.5.3 的討論，並給定函數如下:

$$P(s) = \frac{50(s+1.4)}{(s+1)(s+2)}, W_y(s) = \frac{2}{s+0.2}, W_u(s) = \frac{s+1}{s+10}$$

呼叫 Matlab 指令“hinfsyn”，並輸入下列參數： $n_y = n_u = 1, \gamma_{\min} = 0, \gamma_{\max} = 10, \text{tol} = 10^{-4}$ ，以及

$$G(s) = \begin{bmatrix} W_y & W_y P & W_y P \\ 0 & 0 & W_u \\ -I & -P & -P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 20 & -20 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 30 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中插入十字形間隔線的矩陣是代表拉氏轉換如(10.5.21)式所定義。此時程式”hinfsyn”的輸出結果為 $\gamma_{\text{subopt}} = 0.7849$ ，所對應的最佳 $H_\infty$ 控制器為

$$K(s) = \frac{12.82(s/10+1)(s/7.27+1)(s/1.4+1)}{(s/32449447.67+1)(s/22.19+1)(s/1.4+1)(s/0.2+1)}$$

□

## 10.6 非線性狀態回授 $H_\infty$ 控制

前面我們討論了非線性系統在外界輸入 $w$ 的作用下，系統的 $L_2 - \text{gain} \leq \gamma$ 的條件，但並非所有的非線性系統都能自動滿足這個條件。非線性 $H_\infty$ 控制的目的是希望透過控制 $u$ 的介入，使得閉迴路控制系統的 $L_2 - \text{gain} \leq \gamma$ 。在這一節，我們將引入控制的動作，並且假設所有的狀態均可以測量得到。不像求解線性 $H_\infty$ 控制問題有現成的 Matlab 程式可資使用，目前並沒有任何商用軟體可用以求解非線性 $H_\infty$ 控制問題，所以讀者必須依據以下要介紹的學理，自己求解非線性 $H_\infty$ 控制律。

考慮如下之非線性系統

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g_1(x)w + g_2(x)u \\ z &= \begin{bmatrix} h_1(x) \\ u \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10.6.1)$$

其中 $w$ 是外界環境輸入的干擾訊號， $u$ 是控制訊號， $z$ 是輸出訊號，它是二個分量的組合：

$$z^T z = h_1^T(x)h_1(x) + u^T u \quad (10.6.2)$$

其中函數 $h_1^T h_1$ 用來量度與控制目標的偏差距離， $u^T u$ 則量度控制能量的花費。因此我們希望輸出能量

$$\|z\|_{L_2}^2 = \int_0^\infty z^T(t)z(t)dt \quad (10.6.3)$$

能夠越小越好。如果外界環境輸入的干擾訊號 $w$ 是固定的話，則可根據此一干擾訊號進行最佳化設計，使得(10.6.3)式的輸出能量 $\|z\|_{L_2}^2$ 為最小。然則強健控制所面臨的問題是干擾訊號 $w$ 沒有辦法事先預測，例如飛機飛行時，突然遇到的陣風，無法事先預測；又例如飛彈與目標物的追逐運動，無法事先預知目標物的轉彎方向。所以強健控制所要對付的外擾不是一個，而是一整群。非線性 $H_\infty$ 控制假設外擾訊號 $w(t)$ 是整個 $L_2$ 空間內的任何函數都有可能，亦即只要滿足

$$\|w\|_{L_2}^2 = \int_0^\infty w^T(t)w(t)dt < \infty \quad (10.6.4)$$

在 $L_2$ 空間內的任意外擾訊號 $w(t)$ 的作用下， $H_\infty$ 控制的目的是要設計控制律 $u$ 使非線性系統 $G$ 的 $L_2 - \text{gain}$ 小於某一指定的 $\gamma$ 值：



$$\gamma_2 G) = \sup_w \frac{\|z\|_{L_2}}{\|w\|_{L_2}} \leq \gamma \Rightarrow \frac{\|z\|_{L_2}}{\|w\|_{L_2}} \leq \gamma, \forall w \in L_2 \quad (10.6.5)$$

其中  $\sup$  代表最小上限，除了少數例外，最小上限可視為是最大值。(10.6.5)式所代表的物理意義是，外界輸入干擾訊號的能量  $\|w\|_{L_2}$ ，經過  $H_\infty$  控制器的衰減後，其在系統輸出端的能量  $\|z\|_{L_2}$  只有原先輸入能量  $\|w\|_{L_2}$  的  $\gamma$  倍 ( $\gamma < 1$ )，而且這個衰減的倍數對於任意  $w \in L_2$  都必須成立。也就是說，連在最惡劣的外界輸入干擾訊號  $w$  的攻擊下，其在輸出端所造成的放大倍率都要被控制在  $\gamma$  值之內。所以  $H_\infty$  控制又被稱為最惡劣情況下的設計 (Worst-case design)，如果連最惡劣的情況都可被控制，其他的情況自然就沒有問題 (Yeh, F. B. and Yang, C. D., 1991)。

假設所採用控制策略為狀態回授控制：

$$u = \alpha(x) \quad (10.6.6)$$

其中  $\alpha(x)$  為待定之函數。茲將 (10.6.6) 式代入 (10.6.1) 式中，而得閉迴路系統

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (f(x) + g_2(x)\alpha(x)) + g_1(x)w \\ z &= \begin{bmatrix} h_1(x) \\ \alpha(x) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10.6.7)$$

待定函數  $\alpha(x)$  的設計是要使得以上閉迴路系統的  $L_2$ -gain 小於  $\gamma$  值。定理 10.3.1 已經推導出對於非線性系統

$$G: \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)w \\ z = h(x) \end{cases} \quad (10.6.8)$$

滿足  $L_2$ -gain 小於  $\gamma$  值的條件為 PDE 不等式

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x} g(x) g^T(x) \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T + \frac{1}{2} h^T(x) h(x) \leq 0 \quad (10.6.9)$$

存在有正定解  $V(x) > 0$ 。比較 (10.6.7) 式與 (10.6.8) 二式，得知下列的對應關係

$$f(x) \rightarrow f(x) + g_2(x)\alpha(x), g(x) \rightarrow g_1(x), h(x) \rightarrow \begin{bmatrix} h_1(x) \\ \alpha(x) \end{bmatrix} \quad (10.6.10)$$

將以上的替換關係代入 (10.6.9) 式中，即可得到閉迴路系統 (10.6.7) 滿足  $L_2$ -gain 小於  $\gamma$  值的條件為

$$V_x(f + g_2\alpha) + \frac{1}{2\gamma^2} V_x g_1 g_1^T V_x^T + \frac{1}{2} (h_1^T h_1 + \alpha^T \alpha) \leq 0 \quad (10.6.11)$$

其中  $V_x$  是偏微運算的縮寫：

$$V_x = \frac{\partial V(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

(10.6.11) 式中的  $\alpha(x)$  是待求的回授控制律。為了使 (10.6.11) 式能夠有解， $\alpha(x)$  須盡其可能地，使得上式左邊的值越小越好，如此方能使其值小於零。利用「配成平方」的方法，將 (10.6.11) 式改寫成等義的型式 (楊憲東，葉芳栢，1997；van der Schaft, 1992)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\alpha^T + V_x g_2) (\alpha^T + V_x g_2)^T - \frac{1}{2} V_x g_2 g_2^T V_x^T + V_x f \\ & + \frac{1}{2\gamma^2} V_x g_1 g_1^T V_x^T + \frac{1}{2} h_1^T h_1 \leq 0 \end{aligned} \quad (10.6.12)$$

(10.6.12) 式左邊的值，其最小值是發生在平方項為零的地方，即

$$\alpha(x) = -(V_x g_2(x))^T = -\left( \frac{\partial V}{\partial x} g_2(x) \right)^T \quad (10.6.13)$$

此時 H-J 不等式則變成

$$V_x f + \frac{1}{2} V_x \left( \frac{1}{\gamma^2} g_1 g_1^T - g_2 g_2^T \right) V_x^T + \frac{1}{2} h_1^T h_1 \leq 0 \quad (10.6.14)$$

(10.6.14)式是(10.6.12)的左側取最小值得結果，如果最小值都無法小於零的話，其他值當然也無法小於零，因此(10.6.14)式是(10.6.12)式有解的必要條件。因此非線性 $H_\infty$ 狀態回授控制問題的主要工作在求得(10.6.14)式的一個正定解 $V(x) > 0$ ， $V(x)$ 求得後，再將其代入(10.6.13)式，即可得到狀態迴授策略 $u = \alpha(x)$ ，此控制律可以確保非線性系統的 $L_2$ -gain 小於某一指定的 $\gamma$ 值。(10.6.13)式所得到的回授控制律是假設狀態 $x$ 中的每一個分量均為已知，故稱為狀態回授控制律。在一般的情況下，僅有感測元件所量到的訊號可作為回授之用，此稱為輸出回授控制，對於非線性 $H_\infty$ 輸出回授控制問題，我們需要同時求解二個如(10.6.14)式的 PDE 不等式，細節請參閱文獻：楊憲東，葉芳栢(1997)或 Ball, Helton and Walker (1993)。

## 10.7 人造衛星姿態控制的應用

本節的目的是在探討如何將非線性狀態回授 $H_\infty$ 控制理論應用在人造衛星的姿態控制問題上。人造衛星的基本要求之一是其上的天線需能隨時隨刻對準地表上的某一地區，如同步通訊衛星；或是其上的天文望遠鏡需能隨時對正太空中的某一恆星，如哈伯望遠鏡。因此，衛星的姿態不能稍有偏差。但是在衛星的軌道上，存在有許多的外擾力，如太陽風、微量的空氣阻力、重力、地磁力等等，這些外擾力，就是我們前面所講的環境干擾訊號 $w$ ，它會造成衛星姿態偏離所指定的姿態。控制的目的，就是希望在外界干擾力 $w$ 的作用下，衛星仍可回到其指定的姿態(即平衡點)，換句話說，在外擾力 $w$ 的作用之下，我們希望衛星為漸進穩定。

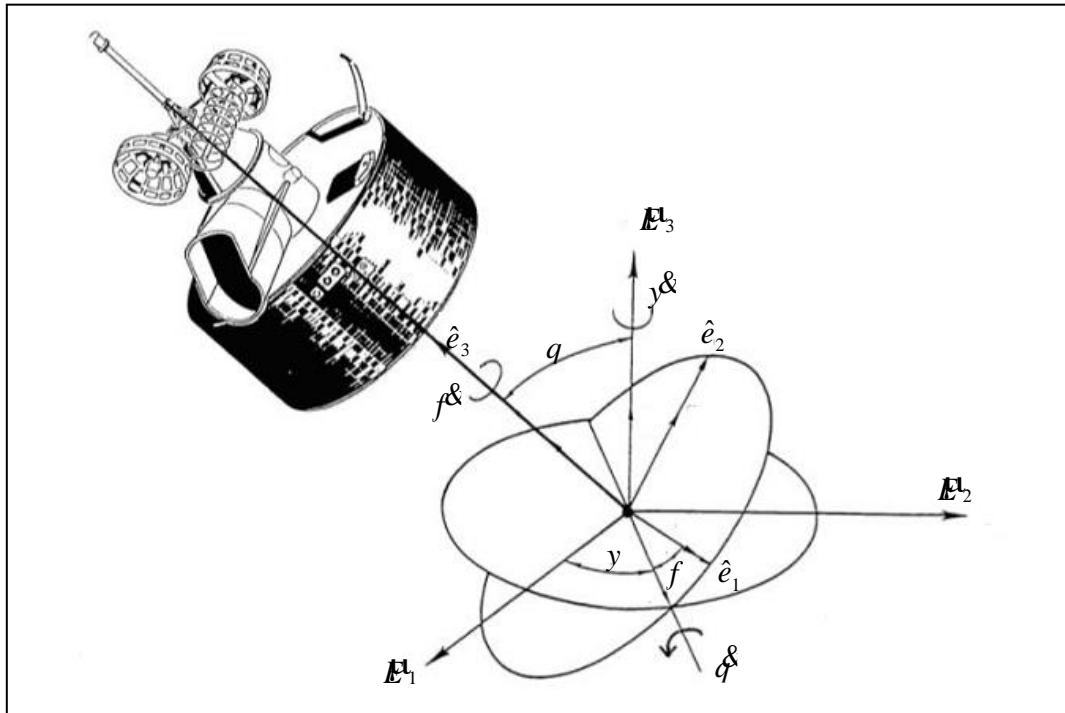


圖 10.7.1 衛星姿態控制座標示意圖

參考圖 10.7.1， $(\hat{E}_1, \hat{E}_2, \hat{E}_3)$ 為慣性座標系統， $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ 為固定在衛星上之旋轉座標。假設衛星在平衡點時之姿態是主軸(即對稱軸)沿著 $\hat{E}_1$ 軸，但由於外擾力 $w$ 的作用，使得主軸飄移至 $\hat{e}_3$ 之方向。

經過三個尤拉(Euler)角的旋轉 $\psi \rightarrow \theta \rightarrow \varphi$ 可將慣性座標 $(\hat{E}_1, \hat{E}_2, \hat{E}_3)$ 旋轉至與體軸座標 $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ 重合。三個連續的座標旋轉可表示如下：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c\varphi & s\varphi & 0 \\ -s\varphi & c\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & s\theta \\ 0 & -s\theta & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 \\ \hat{E}_3 \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} c\varphi c\psi - s\varphi c\theta s\psi & c\varphi s\psi + s\varphi c\theta c\psi & s\varphi s\theta \\ -s\varphi c\psi - c\varphi c\theta s\psi & -s\varphi s\psi + c\varphi c\theta c\psi & c\varphi s\theta \\ s\theta s\psi & -s\theta c\psi & c\theta \end{bmatrix}}_R \begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 \\ \hat{E}_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(10.7.1)

其中 $c\varphi = \cos\varphi$ ,  $s\psi = \sin\psi$ , 依此類推。矩陣 $R$ 表慣性座標與體座標間之旋轉矩陣, 控制的目的是希望 $R \rightarrow I$ , 也就是要衛星的姿態一直維持在慣性座標上, 不會漂移。

首先我們定義描述衛星姿態運動的幾個符號。對於一個向量 $V = [v_1, v_2, v_3]^T$ , 其相對應的反對稱矩陣 $S(V)$ 記作

$$S(V) = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.7.2)$$

沿著體軸(body axis)方向定義的旋轉角速度分量可用尤拉角速率 $\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$ 表示如下：

$$\omega_1 = \dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\psi, \omega_2 = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi, \omega_3 = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta \quad (10.7.3)$$

根據衛星姿態動力學, 衛星的旋轉運動可表示如下：

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} = RS(\Omega) \\ M\dot{\Omega} &= -S(\Omega)M\Omega + u + w \end{aligned}$$

(10.7.4)

其中 $\Omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$ ,  $M$ 是由慣性矩所形成的矩陣,  $u$ 表控制力矩,  $w$ 表外界干擾力矩。

控制的最終目的是要使得

$$R = I, \Omega = 0 \quad (10.7.5)$$

相當於要將衛星的姿態固定於慣性座標上, 不會漂移。衛星系統的輸入是外擾力矩 $w$ , 輸出訊號 $z$ 則取為

$$z = \begin{bmatrix} h(R, \Omega) \\ u \end{bmatrix} \quad (10.7.6)$$

$z$ 的值要越小越好。 $h$ 函數用以表示 $R \leftrightarrow I, \Omega \leftrightarrow 0$ 間之接近程度, 其定義為

$$h(R, \Omega) = [\rho_1 T(\Omega) + \rho_2 d^2(R, I)]^{1/2}$$

(10.7.7)

其中 $\rho_1, \rho_2$ 為比權常數,  $T(\Omega) \triangleq \Omega^T M \Omega / 2$ 為衛星的動能,  $d(R, I)$ 是用來量度 $R$ 與 $I$ 間之距離

$$d(R, I) \triangleq 2\arccos(\sqrt{1 + \text{Trace}(R)}/2)$$

稱做 geodesic metric, 其中 $\text{Trace}$ 代表對角線元素的和。當 $R = I$ 時,  $\text{Trace}(R) = 3$ , 故 $R$ 與 $I$ 的距離為 $d(R, I) = 2\arccos(\sqrt{1 + 3}/2) = 0$ 。當 $R$ 漂離 $I$ 時,  $d(R, I)$ 值則漸增。由 $h(R, \Omega)$ 的定義,

可知

$$h(R, \Omega) = 0 \Leftrightarrow (R, \Omega) = (I, 0) \quad (10.7.8)$$

其中 $R, \Omega$ 是系統(10.7.4)的狀態變數，而 $(R, \Omega) = (I, 0)$ 則表此系統的平衡點 $x_0$ 。

由於 $R$ 包含許多 $\theta, \varphi, \phi$ 之三角函數在內，增加運算的複雜度，下面我們將引入四元數(quaternions)的觀念(楊憲東，2002)，將 $R$ 表成較簡單的方式。四元數的觀念是說，將一個剛體依三個尤拉角的旋轉順序，轉至一新的姿態，其結果等效於將剛體繞著某一特定方向，旋轉某一角度，所得到之姿態。設此一特定方向為 $K = [K_1 \ K_2 \ K_3]^T$ ，而繞此方向所旋轉的角度為 $\delta$ ，則我們可以用四個參數 $K_1, K_2, K_3, \delta$ 來表示剛體在二個姿態間之旋轉矩陣 $R$ ，若用數學式子來表示則成

$$R = I + (\sin\delta)S(K) + (1 - \cos\delta)S^2(K) \quad (10.7.9)$$

其中 $S(K)$ 如(10.7.2)式之定義

$$S(K) = \begin{bmatrix} 0 & -K_3 & K_2 \\ K_3 & 0 & -K_1 \\ -K_2 & K_1 & 0 \end{bmatrix}$$

四元數法中的四個元素 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \eta$ 是定義成

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix}, \quad \eta = \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \quad (10.7.10)$$

且四者滿足正規化(normalization)的條件

$$\varepsilon^T \varepsilon + \eta^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \eta^2 = 1 \quad (10.7.11)$$

以 $\varepsilon_i$ 和 $\eta$ 來表示，(10.7.9)式的轉換矩陣 $R$ 可化成

$$R = (2\eta^2 - 1)I + 2\varepsilon\varepsilon^T + 2\eta S(\varepsilon) \quad (10.7.12)$$

從(10.7.11)和(10.7.12)式可以看出 $\varepsilon = 0 \rightarrow \eta = \pm 1$ ，且 $R = I$ 。因此當 $(\varepsilon, \eta) = (0, \pm 1)$ 時， $R = I$ ，亦即衛星姿態在平衡位置上，沒有漂移。運動方程式(10.7.4)可用四元數表示如下：

$$\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \eta I + S(\varepsilon) \\ -\varepsilon^T \end{bmatrix} \Omega, \quad M\dot{\Omega} = -S(\Omega)M\Omega + u + w \quad (10.7.13)$$

上式中包含 7 個狀態變數 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \eta, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ ，其中 $\varepsilon = [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3]^T$ ， $\Omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$ 。

接下來我們分析系統輸出 $h(R, \Omega)$ (見(10.7.7)式)如何用四元數 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \eta$ 加以表示。注意 $h(R, \Omega)$ 在(10.7.7)式中的定義。先計算 $\text{Trace}(R)$ 如下：由(10.7.12)式的展開得

$$R = \begin{bmatrix} 2\eta^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\eta^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\eta^2 - 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \varepsilon_1^2 & \varepsilon_1\varepsilon_2 & \varepsilon_1\varepsilon_3 \\ \varepsilon_2\varepsilon_1 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_2\varepsilon_3 \\ \varepsilon_3\varepsilon_1 & \varepsilon_3\varepsilon_2 & \varepsilon_3^2 \end{bmatrix} + 2\eta \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon_3 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 & 0 & -\varepsilon_1 \\ -\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \end{bmatrix}$$

再將矩陣 $R$ 的對角線元素相加

$$\text{Trace}(R) = 3(2\eta^2 - 1) + 2\varepsilon^T \varepsilon = 6\eta^2 - 3 + 2(1 - \eta^2) = 4\eta^2 - 1$$

(10.7.14)

因此

$$d(R, I) \triangleq 2\arccos(\sqrt{1 + \text{Trace}(R)}/2) = 2\arccos|\eta| \triangleq q(\eta) \quad (10.7.15)$$

現在我們將系統方程式(10.7.13)整理如下：

$$[\dot{\varepsilon} \quad \dot{\eta} \quad \dot{\Omega}]^T = f(\varepsilon, \eta, \Omega) + gu + gw \quad (10.7.16a)$$

$$z = \left[ \sqrt{\rho_1 \Omega^T M \Omega + \rho_2 q^2(\eta)} \right]_u = \left[ \begin{matrix} h(\eta, \Omega) \\ u \end{matrix} \right] \quad (10.7.16b)$$

控制的目的是在設計控制力矩  $u = \alpha(\varepsilon, \eta, \Omega) \triangleq \alpha(x)$ ，使得系統的  $L_2$ -gain  $\leq \gamma$

$$\frac{\|z\|_{L_2}}{\|w\|_{L_2}} \leq \gamma$$

由上節之(10.6.14)式知道，問題的關鍵在於求得  $V(x) \geq 0$  滿足 Hamilton-Jacobi PDE 不等式

$$H_V = \frac{\partial V}{\partial x} f + \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} \left( \frac{1}{\gamma^2} g_1 g_1^T - g_2 g_2^T \right) \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^T + \frac{1}{2} h^T h \leq 0 \quad (10.7.17)$$

其中  $h = [\rho_1 T(\Omega) + \rho_2 d^2(R, I)]^{1/2}$ ，且

$$f(x) = f(\varepsilon, \eta, \Omega) = \begin{bmatrix} \eta \Omega / 2 + S(\varepsilon) \Omega / 2 \\ -\varepsilon^T \Omega / 2 \\ -M^{-1} S(\Omega) M \Omega \end{bmatrix}, \quad g_1 = g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix}$$

一旦求得(10.7.17)式的一個解  $V(x) \geq 0$  後，則所需要的衛星控制力矩即可由(10.6.13)式獲得：

$$u(x) = -(V_x g_2(x))^T = -\left( \frac{\partial V}{\partial x} g_2(x) \right)^T \quad (10.7.18)$$

$V(x)$  解的型式，經過多次的反覆疊代測試後，發現可選成如下的組合：

$$V(x) = V(\varepsilon, \eta, \Omega) = aT(\omega) + bG(\varepsilon, \Omega) + cU(\eta) \quad (10.7.19)$$

其中  $a, b, c$  為待定之常數， $T(\Omega) = \Omega^T M \Omega / 2$  為衛星的轉動動能， $G(\varepsilon, \omega) = \Omega^T M \varepsilon$  為耦合項， $U(\eta) = 2(1 - \eta)$  相當於位能項。以下的步驟是要將(10.7.19)式代入(10.7.17)式中，以決定常數  $a, b, c$  所要滿足的條件。

(1) 首先進行偏微分  $\partial V(x) / \partial x$  的運算，其中  $V(x)$  包含三項，每一項的偏微分分別計算如下：

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial T}{\partial \eta} & \frac{\partial T}{\partial \Omega} \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad \Omega^T M]$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial G}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial G}{\partial \eta} & \frac{\partial G}{\partial \Omega} \end{bmatrix} = [\Omega^T M \quad 0 \quad \varepsilon^T M]$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial U}{\partial \eta} & \frac{\partial U}{\partial \Omega} \end{bmatrix} = [0 \quad -2 \quad 0]$$

(2) 將以上三項合併得到  $\partial V(x) / \partial x$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = a \frac{\partial T}{\partial x} + b \frac{\partial G}{\partial x} + c \frac{\partial U}{\partial x} = [b \Omega^T M, -2c, a \Omega^T M + b \varepsilon^T M]$$

(3) 進行  $(\partial V / \partial x) f$  的運算：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x} f &= [b\Omega^T M, -2c, a\Omega^T M + b\varepsilon^T M] \begin{bmatrix} \eta\Omega/2 + S(\varepsilon)\Omega/2 \\ -\varepsilon^T \Omega/2 \\ -M^{-1}S(\Omega)M\Omega \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} b\eta\Omega^T M\Omega + \frac{1}{2} b\Omega^T M S(\varepsilon)\Omega + c\varepsilon^T \Omega - (a\Omega^T + b\varepsilon^T)S(\Omega)M\Omega \\
&= \frac{1}{2} b\Omega^T M(\eta I + S(\varepsilon))\Omega - b\varepsilon^T S(\Omega)M\Omega + c\varepsilon^T \Omega
\end{aligned} \tag{10.7.20}$$

其中，注意 $\Omega^T S(\Omega) = 0$ ，因為

$$\Omega^T S(\Omega) = [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3] \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

(4) 進行 $(\partial V/\partial x)g$ 的運算：

$$\frac{\partial V}{\partial x} g = [b\Omega^T M, -2c, a\Omega^T M + b\varepsilon^T M] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix} = a\Omega^T + b\varepsilon^T$$

(5) 再將所得到的諸項 $\frac{\partial V}{\partial x} f$ ， $\frac{\partial V}{\partial x} g$ 及 $h(\eta, \Omega)$ 代入不等式(10.7.17)中，得到

$$\begin{aligned}
H_\gamma &= (1/2)b\Omega^T M(\eta I + S(\varepsilon))\Omega - b\varepsilon^T S(\Omega)M\Omega + c\varepsilon^T \Omega \\
&+ (1/2)(\gamma^{-2} - 1)(a^2\Omega^T \Omega + 2ab\Omega^T \varepsilon + b^2\varepsilon^T \varepsilon) + (1/2)(\rho_1\Omega^T M\Omega + \rho_2 q^2(\eta))
\end{aligned} \tag{10.7.21}$$

(6) 接下來的步驟在適當選擇 $a, b, c$ 之範圍使 $H_\gamma(\varepsilon, \eta, \Omega) \leq 0$ 。先結合含有 $\varepsilon^T \Omega$ 的二個項，並令其係數為零，得到常數 $c$ 為

$$c = ab(1 - 1/\gamma^2)$$

(7) 決定 $(b/2)\Omega^T M(\eta I + S(\varepsilon))\Omega$ 的範圍：利用關係式 $\|S(\Omega)\| = \|\Omega\|$ ， $\|\varepsilon\| \leq 1$ ， $\|\eta I + S(\varepsilon)\| = 1$ ，可得不等式

$$|\Omega^T M(\eta I + S(\varepsilon))\Omega| \leq \|M\|\|\Omega\|^2$$

(8) 決定 $b\varepsilon^T S(\Omega)M\Omega$ 的範圍：

$$|\varepsilon^T S(\Omega)M\Omega| \leq \|M\|\|\Omega\|^2$$

(9) 決定 $h^2(\eta, \Omega)$ 的範圍：利用關係式 $q(\eta) = 2\arccos|\eta| \leq \pi\|\varepsilon\|$ ，可得下列不等關係

$$h^2(\eta, \Omega) = \rho_1 T(\Omega) + \rho_2 q^2(\eta) \leq 0.5\rho_1\|M\|\|\Omega\|^2 + \rho_2\pi^2\|\varepsilon\|^2$$

(10) 將上面 4 項代入 $H_\gamma(\varepsilon, \eta, \Omega)$ 中得到不等式

$$H_\gamma(\varepsilon, \eta, \Omega) \leq \delta_\varepsilon(b)\|\varepsilon\|^2 + \delta_\Omega(a, b)\|\Omega\|^2$$

(10.7.22)

其中

$$\delta_\varepsilon(b) = -\frac{1}{2}b^2(1 - \gamma^{-2}) + \frac{1}{2}\pi^2\rho_2 \tag{10.7.23a}$$

$$\delta_\Omega(a, b) = -\frac{1}{2}a^2\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) + \frac{3}{2}b\|M\| + \frac{1}{4}\rho_1\|M\|$$

(10.7.23b)

(11) 決定常數 $a, b$ 的值，使得 $H_\gamma(\varepsilon, \eta, \Omega) \leq 0$ ：從(10.7.22)式可知，只要選取 $a, b$ 的值使 $\delta_\varepsilon(b) \leq 0$ ， $\delta_\Omega(a, b) \leq 0$ ，即可保證 $H_\gamma(\varepsilon, \eta, \Omega) \leq 0$ ，從而得到常數 $a, b$ 所要滿足的範圍：

$$b^2 \geq \frac{\pi^2 \gamma^2 \rho_2}{\gamma^2 - 1}, a^2 \geq \frac{\gamma^2 (3b + \rho_1/2) \|M\|}{\gamma^2 - 1} \quad (10.7.24)$$

(12) 決定常數 $a, b$ 的正負號: $a, b$ 的值另外要保證(10.7.19)式的 Lyapunov 函數必須為正, 即  $V(\varepsilon, \eta, \Omega) > 0$ , 其中 $V(\varepsilon, \eta, \Omega)$ 已由(10.7.19)式所給定。注意 $V(\varepsilon, \eta, \Omega)$ 的最後一項為 $U(\eta) = 2(1 - \eta)$ , 其滿足下列的不等關係:

$$2(1 - \eta) = 1 - 2\eta + 1 = 1 - 2\eta + \eta^2 + \varepsilon^T \varepsilon = (1 - \eta)^2 + \varepsilon^T \varepsilon \geq \varepsilon^T \varepsilon$$

故 $V(\varepsilon, \eta, \Omega)$ 的大小範圍滿足

$$V(\varepsilon, \eta, \Omega) \geq \frac{1}{2} a \Omega^T M \Omega + b \Omega^T M \varepsilon + c \varepsilon^T \varepsilon = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \varepsilon & \Omega^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2cI & bM \\ bM & aM \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \Omega \end{bmatrix}$$

因此 $V(\varepsilon, \eta, \Omega) > 0$ 的條件相當於

$$V(\varepsilon, \eta, \Omega) > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2cI & bM \\ bM & aM \end{bmatrix} > 0 \quad (10.7.25)$$

要判斷對稱矩陣的正定性, 可利用下列結果

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow A > 0, C - B^T A^{-1} B > 0 \text{ 或 } C > 0, A - B C^{-1} B^T > 0$$

根據上式, (10.7.25)式的成立, 常數 $a, b$ 必須滿足條件

$$a > 0, a c I > \frac{1}{2} b^2 M \quad (10.7.26)$$

(13) 求(10.7.24)式與(10.7.26)式的交集範圍, 得到常數 $a, b$ 最後所要滿足的條件

$$b \geq \sqrt{\frac{\pi^2 \gamma^2 \rho_2}{\gamma^2 - 1}}, a \geq \sqrt{\frac{\gamma^2 (3b + \rho_1/2) \|M\|}{\gamma^2 - 1}} \quad (10.7.27)$$

(14) 決定控制律: 常數 $a, b, c$ 值確定後, Lyapunov 函數 $V(\varepsilon, \eta, \Omega)$ 即可根據(10.7.19)式完全決定。最後由(10.7.18)式得到強健控制律

$$u(\varepsilon, \eta, \Omega) = -(V_x g)^T = -a \Omega - b \varepsilon \quad (10.7.28)$$

此控制律是屬於狀態回授的簡單型式 $u = -Kx = -[ab][\Omega \varepsilon]^T$ 。因此雖然經歷以上 14 個求解的冗長步驟, 但控制律的最後型式卻非常簡單, 容易以硬體實現。(10.7.28)式所得之衛星力矩可以確保, 太空環境干擾力 $w$ 的作用下, 衛星仍可回到其指定的平衡姿態。

關於 $H_\infty$ 強健控制理論在飛行控制的應用, 可參閱文獻 Adams, et al, 1994。

## 10.8 歸航飛彈(Homing Missile)的非線性 $H_\infty$ 導引律

本節將討論非線性 $H_\infty$ 控制在飛彈導引上的應用。飛彈導控系統的設計包含三個迴路(楊憲東, 2002), 如圖 10.8.1 所示:

- 外迴路為導引迴路(guidance loop): 此迴路告訴飛彈「往哪裡去」(where to go), 屬於產生決策的單位。
- 中迴路為導航迴路(navigation loop): 此迴路告訴飛彈「你在哪裡」(where you are), 屬於監控定位的單位。
- 內迴路為控制迴路(control loop): 此迴路告訴飛彈「怎麼去」(how to go), 屬於執行動作的單位。

本節所探討的是外層導引迴路的設計。導引迴路在告訴飛彈何去何從，並擬定追逐策略去攔截目標物。一個好的飛彈導引律可以使飛彈花費較短的時間和消耗較少的能量而將目標物擊落。在此之前，飛彈導引律的設計有下列幾項缺失：

- (1) 假設線性化的運動方程式：以致分析的結果只適用於微小的線性區域。
- (2) 近年雖已有一些研究使用非線性的運動方程式，但在分析上卻須假設被追擊目標的軌跡為已知(且大部分均假設目標物為直線飛行)。
- (3) 在分析導引律的性能好壞時，只能針對某幾種的目標物飛行軌跡作討論。導致導引律只能確保成功追擊某幾種固定飛行軌跡的目標物。

在實際的空對空追擊中，通常目標物會怎麼飛是無法事先估計或假設的，因此我們所碰到的問題是，在無法事先知道目標物的飛行路徑下，如何告訴飛彈「去哪裡」。我們有沒有可能設計一種強健(robust)導引律，不管目標物如何逃逸，飛彈均能保證某一程度以上的攔截性能(interception performance)？本節的目的即在於提出「強健導引律」(robust guidance law)的觀念(Yang and Chen, 1998)，這是一個創新的做法，因為在飛彈的設計中，在此之前只聽過強健控制迴路(robust control loop)或強健導航迴路(robust navigation loop)的設計理念，但強健導引律還未曾被提出。

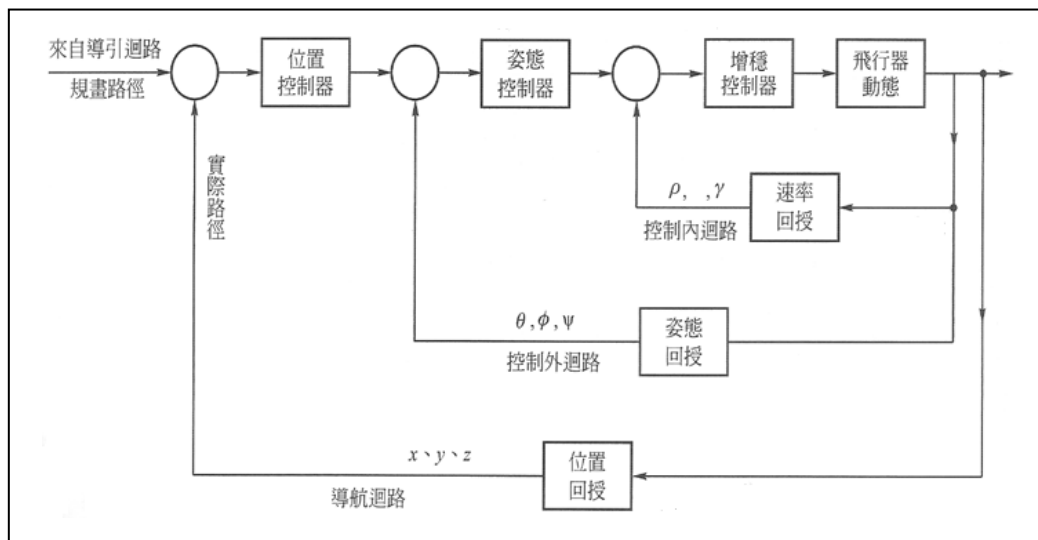


圖 10.8.1 飛彈導控系統設計的三個迴路。最內層是控制迴路負責執行飛彈姿態及運動方向的改變，中層是導航迴路負責飛彈的定位與軌跡的修正，最外層是導引迴路負責規劃最佳的飛行策略(楊憲東, 2002)。

### 10.8.1 運動方程式的建立

我們採用如圖 10.8.2 之極座標( $r, \theta$ )系統來表示飛彈與目標物之間的相對運動，其中座標之原點放在飛彈之上，隨飛彈而移動。圖中的各個符號及變數定義如下：

$r$ ：飛彈與目標物間之距離

$\theta$ ：視線與參考線之夾角

$\vec{e}_r$ ：沿視線之單位向量

$\vec{e}_\theta$ ：垂直視線之單位向量

$\vec{a}_T \triangleq w_r \vec{e}_r + w_\theta \vec{e}_\theta$  為目標物之加速度向量

$\vec{a}_M \triangleq u_r \vec{e}_r + u_\theta \vec{e}_\theta$  為飛彈之加速度向量



$V_r \triangleq \dot{r}$  為沿著視線之相對速度

$V_\theta \triangleq r\dot{\theta}$  為垂直於視線之相對速度

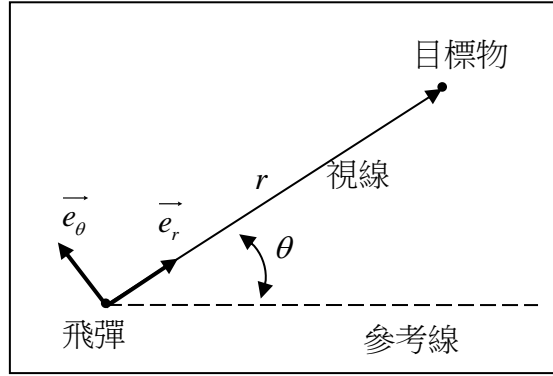


圖 10.8.2 飛彈飛行之極座標系統

飛彈與目標物間之相對運動方程式可寫成

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = w_r - u_r, r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = w_\theta - u_\theta \quad (10.8.1)$$

若以狀態變數  $(r, V_r, V_\theta)$  來表示，則成

$$\dot{r} = V_r, \dot{V}_r = \frac{V_\theta^2}{r} + w_r - u_r, \dot{V}_\theta = -\frac{V_r V_\theta}{r} + w_\theta - u_\theta \quad (10.8.2)$$

上式可進一步寫成標準型式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} r \\ V_r \\ V_\theta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} V_r \\ V_\theta^2/r \\ -V_r V_\theta/r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_r \\ w_\theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \end{bmatrix} \\ \downarrow \\ \dot{x} &= f(x) + g_1(x)w + g_2(x)u \end{aligned} \quad (10.8.3)$$

其中  $w = [w_r \ w_\theta]^T$  為目標物的加速度，是無法估測的訊號，亦即所謂的外界輸入干擾訊號；  
 $u = [u_r \ u_\theta]^T$  為導引律所要設計的飛彈加速度。而系統的輸出  $z$  定義為

$$z = \begin{bmatrix} \rho h(r, V_\theta) \\ u \end{bmatrix} \quad (10.8.4)$$

其中  $\rho$  為比權常數且

$$h(r, V_\theta) = \frac{V_\theta^2}{r} = r\dot{\theta}^2 \quad (10.8.5)$$

導引律設計的目的在於求得飛彈的加速度  $u$ ，使得不管目標物的加速度  $w$  為何，輸出  $z$  能夠盡量壓小。注意  $z$  的大小為

$$z^T z = \rho^2 h^2(r, V_\theta) + u^2 = \rho^2 r^2 \dot{\theta}^4 + u^2$$

因此  $z$  越小，代表  $h$  越小，且控制所需加速度  $u$  也越小。 $h = r\dot{\theta}^2$  很小所代表的物理意義有二：

- (1) 不管目標物如何飛，其與飛彈的相對距離  $r$  很小。
- (2)  $\dot{\theta}$  很小，代表目標物沒有橫向逃脫的速度。

所以  $z$  的值越小，代表攔截越成功。以控制的術語而言，我們要設計狀態回授控制器  $u(r, V_r, V_\theta)$  (即這裡的導引律)，使得在外界輸入干擾訊號  $w$  (即目標物的加速度) 的作用下，下式恆滿足

$$\int_0^T z^T(\tau) z(\tau) d\tau \leq \gamma^2 \int_0^T w^T(\tau) w(\tau) d\tau \quad (10.8.6)$$

亦即要使得飛彈導引迴路的  $L_2 - \text{gain} \leq \gamma$ 。雖然這裡是採用狀態回授的方式，但因為三個狀態變數  $r$ ,  $V_r = \dot{r}$ ,  $V_\theta = r\dot{\theta}$  都可以用飛彈上的感測器即時測量到，因此下面所推導出的導引律是可以被實現的。

### 10.8.2 Hamilton-Jacobi PDE 不等式

非線性  $H_\infty$  狀態回授控制器，依據前一節的推導結果，可得到為

$$u(r, V_r, V_\theta) = -(U_x g_2)^T \quad (10.8.7)$$

其中函數  $U$  滿足下列之 H-J PDE 不等式：

$$U_x f + \frac{1}{2} U_x \left( \frac{1}{\gamma^2} g_1 g_1^T - g_2 g_2^T \right) U_x^T + \frac{1}{2} h^T h \leq 0 \quad (10.8.8)$$

將(10.8.3)式中相對應的函數  $f(x)$ ,  $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$ ,  $h(x)$  代入上式得

$$\begin{bmatrix} U_r & U_{V_r} & U_{V_\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r \\ V_\theta^2/r \\ -V_r V_\theta/r \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\gamma^2} - 1 \right) \begin{bmatrix} U_r & U_{V_r} & U_{V_\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_r \\ U_{V_r} \\ U_{V_\theta} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \rho^2 h^2(r, V_\theta) \leq 0$$

進行向量相乘運算後，上式化簡成

$$V_r \left( \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{V_\theta^2}{r} \left( \frac{\partial U}{\partial V_r} \right) - \frac{V_r V_\theta}{r} \left( \frac{\partial U}{\partial V_\theta} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\gamma^2} - 1 \right) \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial V_r} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial V_\theta} \right)^2 \right] + \frac{\rho^2}{2} h^2(r, V_\theta) \leq 0 \quad (10.8.9)$$

要求得此非線性 PDE 不等式的解，恐非易事。然經過多方嘗試，及參考現役飛彈導引律所得到的靈感，我們發現(10.8.9)式存在一個簡單的解析解如下(Yang and Chen, 1998)：

$$U(r, V_r, V_\theta) = -\frac{NV_r V_\theta^2}{r} \geq 0, N > 0 \quad (10.8.10)$$

其中函數  $U(r, V_r, V_\theta)$  定義在  $r > 0, V_r < 0$  之範圍內。(10.8.10)式中之  $N$  為待定之常數，在以下的步驟中，我們將推導出導引常數(navigation constant)  $N$  所要滿足的條件，使得(10.8.10)式的  $U$  確實為(10.8.9)式的解。首先分別計算  $U$  對  $r, V_r, V_\theta$  之偏微分如下：

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{NV_r V_\theta^2}{r^2}, \frac{\partial U}{\partial V_r} = -\frac{NV_\theta^2}{r}, \frac{\partial U}{\partial V_\theta} = -2\frac{NV_r V_\theta}{r}$$

將以上各階偏導數代入(10.8.9)式化簡得

$$\begin{aligned} & \frac{NV_r^2 V_\theta^2}{r^2} - \frac{NV_\theta^4}{r^2} + \frac{2V_r^2 V_\theta^2}{r^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\gamma^2} - 1 \right) \left[ \frac{N^2 V_\theta^4}{r^2} + \frac{4N^2 V_r^2 V_\theta^2}{r^2} \right] + \frac{\rho^2}{2} \frac{V_\theta^4}{r^2} \\ & = [3N + 2N^2(1/\gamma^2 - 1)] \frac{V_r^2 V_\theta^2}{r^2} + [-N + N^2(1/\gamma^2 - 1)/2 + \rho^2/2] \frac{V_\theta^4}{r^2} \leq 0 \end{aligned}$$

上式要恆小於或等於 0，只要二項的係數皆為負，即  $N$  要滿足

$$3N + 2N^2(1/\gamma^2 - 1) \leq 0, -N + \frac{N^2}{2}(1/\gamma^2 - 1) + \frac{\rho^2}{2} \leq 0 \quad (10.8.11)$$

此二不等式的聯立，可求出導引常數  $N$  之範圍。而  $N$  要有解的條件是所設定的  $L_2 - \text{gain}$  需滿足條件

$$\gamma > 1 \quad (10.8.12)$$

在此條件下求解(10.8.11)式得到

$$N \geq \frac{3/2}{1-1/\gamma^2}, N \geq \frac{-1+\sqrt{1+\rho^2(1-1/\gamma^2)}}{1-1/\gamma^2} \quad (10.8.13)$$

根據比權常數 $\rho$ 之不同，上面二個不等式的聯立解具有不同的形式：

$$N \geq \begin{cases} \frac{3/2}{1-1/\gamma^2}, & \rho \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{21}{1-1/\gamma^2}} \\ \frac{-1+\sqrt{1+\rho^2(1-1/\gamma^2)}}{1-1/\gamma^2}, & \rho > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{21}{1-1/\gamma^2}} \end{cases} \quad (10.8.14)$$

注意系統輸出 $z$ 在(10.8.4)式中的定義： $h(r, V_\theta)$ 代表導引律之性能，而 $u$ 則表示付出之控制能量， $\rho$ 的大小則反應兩者間之相對重要性。我們分別考慮 $\rho \rightarrow 0$ 及 $\rho \rightarrow \infty$ 兩個極限情形：前者代表只考慮能量的花費，不顧導引性能的好壞；後者則只顧導引性能，不管能量花費多少。在此二極限情形下，導引常數 $N$ 的最小值分別求得為

$$N_{\min} = \begin{cases} \frac{3/2}{1-1/\gamma^2}, & \rho \rightarrow 0 \\ \frac{\rho}{\sqrt{1-1/\gamma^2}}, & \rho \gg 1 \end{cases} \quad (10.8.15)$$

另一個影響飛彈性能的指標是 $L_2 - \text{gain}$ ，由(10.8.6)式的定義式知， $\gamma$ 越大，外界干擾 $w$ 對飛彈性能的影響越大； $\gamma$ 越小，則導引系統濾除 $w$ 影響的能力越強。當 $\gamma \rightarrow \infty$ 時， $H_\infty$ 控制退化成 $H_2$ (LQG)控制(van der Schaft, 1992；Zhou and Doyle, 1998)，此時(10.8.14)式變成

$$N \geq \begin{cases} 3/2, & \rho \leq \sqrt{21/2} \\ -1 + \sqrt{1 + \rho^2}, & \rho > \sqrt{21/2} \end{cases}$$

(10.8.16)

在另一方面，當 $\gamma \rightarrow 1$ 時，雖然飛彈追蹤能力提升，但此時導引常數 $N \rightarrow \infty$ ，說明所要付出的控制能量將趨近於無窮大。

### 10.8.3 非線性 $H_\infty$ 導引律的分析

$N$ 的範圍確定後，將之代入(10.8.10)式即得 H-J PDE 不等式最後解之型式 $U(r, V_r, V_\theta)$ ，最後再經由(10.8.7)式，即得非線性 $H_\infty$ 飛彈導引律：

$$\begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \end{bmatrix} = -(U_x g_2)^T = -\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial U / \partial r \\ \partial U / \partial V_r \\ \partial U / \partial V_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial U / \partial V_r \\ \partial U / \partial V_\theta \end{bmatrix}$$

從中得到二個控制分量為

$$\begin{aligned} u_r(r, V_r, V_\theta) &= \frac{\partial U}{\partial V_r} = -\frac{NV_\theta^2}{r} = -Nr\dot{\theta}^2 \\ u_\theta(r, V_r, V_\theta) &= \frac{\partial U}{\partial V_\theta} = -2\frac{NV_r V_\theta}{r} = -2Nr\dot{\theta} \end{aligned} \quad (10.8.17)$$

有趣的是，在現有的飛彈導引律中，有一種非常接近上面所導出來的非線性 $H_\infty$ 導引律，此導引律稱為 ideal proportional navigation (IPN)。IPN 導引律的飛彈加速度命令為

$$\bar{u}_r(r, V_r, V_\theta) = Nr\dot{\theta}^2 = \frac{NV_\theta^2}{r}, \bar{u}_\theta(r, V_r, V_\theta) = -Nr\dot{\theta} = -\frac{NV_r V_\theta}{r} \quad (10.8.18)$$

但此導引律，並沒有 H-J PDE 不等式的解 $\bar{U}$ 與之對應，亦即不存在 $\bar{U}$ 使得

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial V_r} = \bar{u}_r = \frac{NV_\theta^2}{r}, \frac{\partial \bar{U}}{\partial V_\theta} = \bar{u}_\theta = \frac{NV_r V_\theta}{r} \quad (10.8.19)$$

雖然滿足(10.8.19)式的 $\bar{U}$ 不存在，但確有一個很接近的答案，就是

$$\bar{U} = \frac{-NV_r V_\theta^2}{r}$$

這也正是引發我們「猜」H-J PDE 的解長得如(10.8.10)式的原因，否則(10.8.9)式的解析解如大海撈針，怎麼去找呢？凡是困難棘手的事情，在未解決之前，總是毫無頭緒；但是當其被一簡單的方法解決後，可能我們又覺得理所當然，沒有新意。再如何困難的事情，總有不同層次的解決之道，越是聰明的人，越想一次全部加以解決，結果反而容易將問題複雜化，一點頭緒也沒有；愚笨的方法雖然考慮的層面不廣，但至少讓問題的求解開始動了起來，有了一點的突破，再來求面的突破就不難了。

現在我們把(10.8.17)式的導引律代入(10.8.2)式的飛彈運動方程式之中，得

$$\begin{aligned} \dot{V}_r &= (N+1) \frac{V_\theta^2}{r} + w_r, \quad V_r(0) = V_{r0} < 0 \\ \dot{V}_\theta &= (2N-1) \frac{V_r V_\theta}{r} + w_\theta, \quad V_\theta(0) = V_{\theta0} < 0 \end{aligned} \quad (10.8.20)$$

這時系統輸出的大小化為

$$\begin{aligned} z^T z &= \rho^2 h^2(r, V_\theta) + u^2 \\ &= \rho^2 \frac{V_\theta^4}{r^2} + N^2 \frac{V_\theta^4}{r^2} + 4N^2 \frac{V_r^2 V_\theta^2}{r^2} = (\rho^2 + N^2) \frac{V_\theta^4}{r^2} + 4N^2 \frac{V_r^2 V_\theta^2}{r^2} \end{aligned} \quad (10.8.21)$$

注意，不管目標物之加速度 $w_r, w_\theta$ 如何變化，亦即不管目標物如何飛，此 $H_\infty$ 導引律恆保證

$$\int_0^T z^T z d\tau \leq \gamma^2 \int_0^T w^T w d\tau$$

在某些固定的 $\gamma$ 值之下，我們可用數值的方法，測試不同種類的 $w_r, w_\theta$ ，並確認 $H_\infty$ 導引律確實具有強健的特性，使得目標物不管如何逃脫，都能確保飛彈某一程度以上的攔截性能。

在這裡我們僅考慮最簡單的目標物逃脫軌跡-直線飛行，對於其他目標物的逃脫軌跡，請參閱文獻 Yang and Chen (1998)的討論。此時 $w_r = w_\theta = 0$ ，(10.8.20)式化成

$$\dot{V}_r = (N+1) \frac{V_\theta^2}{r}, \dot{V}_\theta = (2N-1) \frac{V_r V_\theta}{r} \quad (10.8.22)$$

因 $V_{r0} < 0$ 又 $\dot{V}_r > 0$ ，故知 $|V_r| \rightarrow 0$ ；因 $V_{\theta0} < 0$ 又 $\dot{V}_\theta > 0$ ，故知 $|V_\theta| \rightarrow 0$ ，故此導引律有讓系統輸出 $z^T z$ (見(10.8.21)式)越來越小的趨勢。將(10.8.22)兩式相除得

$$\frac{dV_r}{dV_\theta} = \frac{N+1}{2N-1} \frac{V_\theta}{V_r}$$

經過分離變數並積分後，化成

$$V_r^2 - \frac{N+1}{2N-1} V_\theta^2 = C = V_{r0}^2 - \frac{N+1}{2N-1} V_{\theta0}^2 \quad (10.8.23)$$

另外從(10.8.22)式的第二式可得

$$\frac{dV_\theta}{dV_\theta} = (2N-1) \frac{dr}{r} \quad (10.8.24)$$

兩邊積分得到 $V_\theta = V_{\theta0} (r/r_0)^{2N-1}$ ，再將之代入(10.8.23)式得到

$$V_r^2 - V_{r_0}^2 = \frac{N+1}{2N-1} V_{\theta_0}^2 [(r/r_0)^{4N-2} - 1] \quad (10.8.25)$$

最佳的狀況是飛彈最後正中目標，沒有任何誤差距離(miss distance)，亦即 $r = 0$ 可以準確達到。在(10.8.25)式中，若令 $r = 0$ ：

$$V_{r_f}^2 = V_{r_0}^2 - \frac{N+1}{2N-1} V_{\theta_0}^2 \geq 0 \quad (10.8.26)$$

上式有解的條件是初始條件 $(V_{r_0}, V_{\theta_0})$ 必須滿足不等式

$$\frac{V_{r_0}}{V_{\theta_0}} \geq \sqrt{\frac{N+1}{2N-1}} \quad (10.8.27)$$

此不等式規範了直接命中目標時，飛彈與目標物所應滿足的空中相對幾何關係，在文獻上，此類的不等式稱為攔截區域(capture area)。

接近速度 $V_r = \dot{r}$ 與時間 $t$ 之關係可推導如下：先由(10.8.25)式求出 $\dot{r}$ 的表示式

$$\dot{r} = - \left( \frac{N+1}{2N-1} V_{\theta_0}^2 (r/r_0)^{4N-2} + V_{r_f}^2 \right)^{1/2} \quad (10.8.28)$$

其中 $V_{r_f}$ 如(10.8.26)式所示。再將上一式進一步積分得到 $r$ 與 $t$ 之關係為

$$t = \int_r^{r_0} \left( \frac{N+1}{2N-1} V_{\theta_0}^2 (r/r_0)^{4N-2} + V_{r_f}^2 \right)^{-1/2} dr \quad (10.8.29)$$

而最後的攔截時間 $t_f$ ，可由上式的積分中，令下限 $r = 0$ 而得到為

$$t_f = \int_0^{r_0} \left( \frac{N+1}{2N-1} V_{\theta_0}^2 (r/r_0)^{4N-2} + V_{r_f}^2 \right)^{-1/2} dr$$

反之，若(10.8.27)式不滿足，則飛彈無法命中目標，此時就會產生所謂的誤差距離(miss distance)。誤差距離是指飛彈和目標物間之最短距離，亦即當 $\dot{r} = 0$ 時所對應的 $r$ 值。於(10.8.25)式中，令 $V_r = \dot{r} = 0$ ，得

$$r_{\min} = \left[ \frac{2N-1}{(N+1)V_{\theta_0}^2} \left( \frac{N+1}{2N-1} V_{\theta_0}^2 - V_{r_0}^2 \right) \right]^{\frac{1}{4N-2}} \quad (10.8.30)$$

由上式知道導引常數 $N$ 越大，則 $r_{\min}$ 越小。

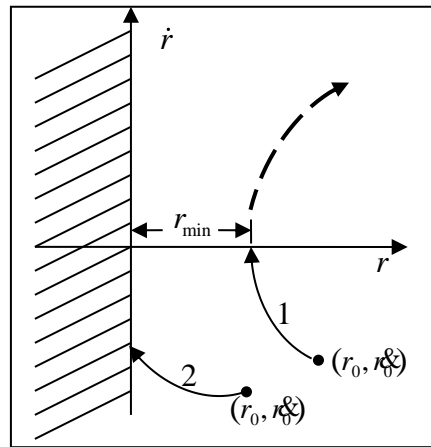


圖 10.8.3 飛彈飛行之相平面軌跡

參考圖 10.8.3 之相平面軌跡，斜線區域代表由(10.8.27)式所決定的攔截區域，軌跡 1 由於初始條件未落入攔截區域(10.8.27)式之內，故 $r_{\min} > 0$ 。飛彈彈頭通常在 $\dot{r} = 0, r = r_{\min}$ 的瞬間

引爆，因此只要 $r_{\min}$ 在彈頭爆炸威力半徑之內，雖未正中目標，仍可藉由爆炸的強力震波將目標物摧毀。軌跡 2 的起始條件落入攔截區域(10.8.27)式之內，因此可以無限接近目標物而且 $r = 0$ 時 $\dot{r} < 0$ 。

最後我們注意攔截(interception)與會合(rendezvous)兩種導引律的不同：

- (1) 對於攔截問題，只須要求 Lyapunov 穩定性，亦即只要保證在攔截終點， $r = 0$ 且 $\dot{r} < 0$ 即可，而不需進入平衡點 $(r, \dot{r}, V_\theta) = (0, 0, 0)$ ，因此漸進穩定是不需要的。
- (2) 對於太空會合(rendezvous)問題，則在會合終點，不僅相對距離 $r$ 要為 0，縱向相對速度 $\dot{r}$ 及橫向相對速度 $V_\theta = r\dot{\theta}$ 均須為 0。因此會合的導引律一定要保證漸進穩定。(10.8.10)式中的 H-JPDE 不等式的解，只適用於攔截問題。找出其他不同解之型式，使其滿足太空會合之漸進穩定條件，將是一個新的挑戰。

關於飛彈非線性 $H_\infty$ 導引律的完整分析，請參閱文獻(Yang and Chen, 1998)的討論，另外關於非線性 $H_\infty$ 控制在戰鬥機飛行控制上的應用，請參閱文獻(Yang and Kung, 2000)的討論。

## 10.9 無人自走車的非線性 $H_\infty$ 控制

我們曾在例題 4.9.1 中討論過無人自走車(mobile cart, mobile robot)的控制，那時是以二段式切換控制(非平滑)的策略來進行。在這裡我們想要用非線性 $H_\infty$ 狀態回授來設計控制器，所得結果將是一種平滑控制，無須切換。參考圖 10.9.1，無人自走車的簡化運動方程式為

$$\dot{x} = v \cos \theta + w_x \quad (10.9.1a)$$

$$\dot{y} = v \sin \theta + w_y \quad (10.9.1b)$$

$$\dot{\theta} = \omega \quad (10.9.1c)$$

其中 $\theta$ 為車身與 $x$ 軸方向的夾角(由方向盤控制)， $v$ 為車前進速度(由油門控制)， $\omega$ 為車身的旋轉角速率； $w_x$ ： $x$ 方向的地面阻力(如顛簸路面)； $w_y$ ： $y$ 方向的地面阻力。 $v$ 和 $\omega$ 是二個控制輸入，並設向量 $u = [v \ \omega]^T$ ； $w_x$ 和 $w_y$ 是二個外界干擾，並設向量 $w = [w_x \ w_y]^T$ 。

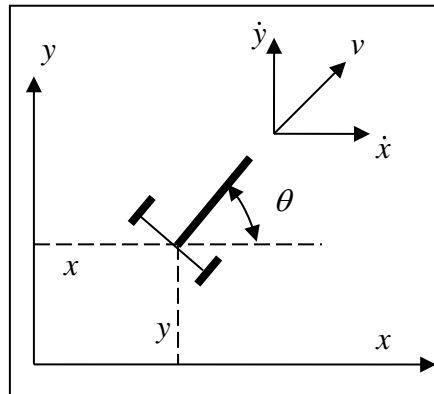


圖 10.9.1 無人自走車運動示意圖

首先我們要探討是否存在非線性 $H_\infty$ 狀態回授控制器 $u$ 使得

$$\int_0^T z^T z dt \leq \gamma^2 \int_0^T w^T w d\tau$$

首先將(10.9.1)式寫成 $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ 的標準型式：

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} = \underbrace{f(x)}_0 + \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{g_2(x)} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{g_1(x)} \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix} \quad (10.9.2)$$

其相對應之 H-J 不等式為

$$H_\gamma = \frac{1}{2} [U_x \quad U_y \quad U_\theta] \left( \frac{1}{\gamma^2} g_1 g_1^T - g_2 g_2^T \right) \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_\theta \end{bmatrix} + \frac{1}{2} h^T h \leq 0 \quad (10.9.3)$$

自走車最後之位置必須停在原點  $(x, y) = (0, 0)$  上，且車之主軸需與  $x$  軸重合，即  $\theta = 0$ ，故可取性能指標  $h$  之型式為

$$h = \rho \sqrt{x^2 + y^2 + \theta^2}$$

在(10.9.3)式中，因為  $h^T h \geq 0$ ，故  $H_\gamma \leq 0$  有解的必要條件為

$$\frac{1}{\gamma^2} g_1 g_1^T - g_2 g_2^T \leq 0 \quad (10.9.4)$$

現在將  $g_1, g_2$  代入(10.9.4)式，得到

$$\frac{1}{\gamma^2} g_1 g_1^T - g_2 g_2^T = \begin{bmatrix} 1/\gamma^2 - \cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta & 0 \\ -\sin\theta\cos\theta & 1/\gamma^2 - \sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (10.9.5)$$

亦即(10.9.5)式的矩陣不能有正的特徵值。上面的矩陣除了 -1 的特徵值外，另外二個特徵值  $\lambda_1, \lambda_2$  也必須為負值。 $\lambda_1, \lambda_2$  是下列二階矩陣的特徵值：

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\gamma^2 - \cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & 1/\gamma^2 - \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (10.9.6)$$

$A$  的特徵值是由特徵方程式  $|\lambda I - A| = 0$  求得：

$$\begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$$

特徵方程式的二個根同時為負值的條件：兩根之和為負，且兩根之積為正：

$$\text{兩根之和} = \lambda_1 + \lambda_2 = (a + d) = (1/\gamma^2 - \cos^2\theta) + (1/\gamma^2 - \sin^2\theta) = 2/\gamma^2 - 1 \quad (10.9.7)$$

$$\text{兩根之積} = \lambda_1 \lambda_2 = ad - bc = (1/\gamma^2 - \cos^2\theta)(1/\gamma^2 - \sin^2\theta) - \sin^2\theta\cos^2\theta \quad (10.9.8)$$

將(10.9.6)式中的矩陣元素代入以上兩根之和為負，兩根之積為正的條件，得到

$$\text{兩根之和} = \lambda_1 + \lambda_2 = (2 - \gamma^2)/\gamma^2 \leq 0 \Rightarrow \gamma \geq \sqrt{2} \quad (10.9.9)$$

$$\text{兩根之積} = \lambda_1 \lambda_2 = (1 - \gamma^2)/\gamma^4 \geq 0 \Rightarrow \gamma^2 \leq 1 \quad (10.9.10)$$

以上二個不等式沒有交集，故知(10.9.5)式之三特徵值不同時為負，亦即不存在  $U$  滿足(10.9.3)式。由於  $U(x, y, \theta)$  不存在，亦無狀態回授控制律

$$u = [v \quad \omega]^T = -(L_{g_2} U)^T \quad (10.9.11)$$

的存在。由此可知並非所有的控制問題都存在  $H_\infty$  控制的解。由(10.9.11)式所得之  $u$  均為連續可微(平滑)。現今因  $U$  的不存在，只是說明了沒有平滑狀態回授控制的存在，但我們仍有可能以非平滑的方式(如切換式的控制)達成自走車的控制目的。這一點我們已在例題 4.9.1 中討論過。

## 10.10 學習評量

10.10.1 假設向量  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ ，利用 10.1 節中關於向量 p-norm 的定義，證明下列二

個不等式成立：

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2, \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_2 \quad (10.10.1)$$

提示：先證明 $n = 1, 2$ 時的正確性，再利用數學歸納法證明在一般情形下也成立。

10.10.2 考慮時間函數 $u(t) = \sin t$ ，其中時間 $t$ 定義在有限範圍 $0 \leq t \leq 2\pi$ 之內。利用 $L_p$ -norm的定義，分別求出

$$\|u(t)\|_{L_1}, \|u(t)\|_{L_2}, \|u(t)\|_{L_p}, \|u(t)\|_{L_\infty}$$

並且證明以下關係式

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|u(t)\|_{L_p} = \|u(t)\|_{L_\infty}$$

10.10.3 考慮下列之輸出入關係

$$y = Ax \rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (10.10.2)$$

依據矩陣 $A$ 的 2-norm 的定義：

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 \quad (10.10.3)$$

本題的目的是要探討此定義背後的幾何含意。

- (a) 在 $x_1 - x_2$ 平面上，滿足 $\|x\|_2 = 1$ 的 $x$ 是單位圓上的點(參見圖 10.1.2)，經過(10.10.2)式的映射後，求出 $y_1$ 、 $y_2$ 所要滿足的橢圓方程式。
- (b) 畫出在 $y_1 - y_2$ 平面上的橢圓，並求出其長軸長，亦即橢圓上離圓點最遠的點。
- (c) 在另一方面，求 $A^T A$ 的最大特徵值 $\lambda_{\max}(A^T A)$ ，其中矩陣 $A$ 是由(10.10.2)式所給定。
- (d) 證明於(b)所得到的長軸長等於(c)所得到的 $\sqrt{\lambda_{\max}}$ ，亦即 $A$ 的最大奇異值 $\sigma_{\max}$ 。

10.10.4 考慮下列之非線性系統

$$G: \begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha x_1 - x_2 + w, \alpha > 0 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_1^2 x_2 \\ z = x_1 \end{cases} \quad (10.10.4)$$

- (a) 利用(10.4.21)式，證明系統 $G$ 是被動系統(提示：證明存在一個 $\phi(x) \geq 0$ 滿足(10.4.21)式)。
- (b) 利用(10.4.22)式，證明系統 $G$ 是輸出型嚴格被動系統(提示：證明存在一個 $\phi(x) \geq 0$ 滿足(10.4.22)式)。
- (c) 利用(b)的結果，估測出系統 $G$ 的 $L_2$ -gain 的大概範圍。

10.10.5 考慮線性系統

$$G(s) = \frac{1}{(s^2 + 2\xi s + 1)(s + 1)} \quad (10.10.5)$$

仿照例題 10.5.1 的步驟，分別使用二種方法：頻率軸搜尋法及 $\gamma$ 疊代法，計算 $\|G\|_\infty$ 值。分別討論 $\xi = 1, 0.1, 0.01, 0.001$ ，所對應的 4 種情形，分析阻尼係數 $\xi$ 的大小對於頻率軸搜尋法所產生的誤差有何影響。

10.10.6 一個有名的 $L_2$ -gain 穩定性的應用稱為小增益定理(small-gain theorem)。參考圖 10.10.1a 中的回授控制系統，假設系統 $H_1$ 與 $H_2$ 的 $L_2$ -gain 分別為 $\gamma_2(H_1)$ 與 $\gamma_2(H_2)$ ，則可以證明閉迴路系統為穩定的一個充分條件為



$$\gamma_2(H_1)\gamma_2(H_2) < 1 \quad (10.10.6)$$

現在已知 $H_1$ 為線性系統，其轉移函數為

$$H_1(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 4} \quad (10.10.7)$$

而 $H_2$ 為非線性系統，其輸入輸出關係如圖 10.10.1b 所示，其中的斜率 $k$ 可正亦可負。

本題的目的是要利用(10.10.4)式求出閉迴路系統為穩定的條件。

(a) 根據(10.5.12)式的定義， $\gamma_2(H_1) = \sup_{\omega} |H_1(j\omega)|$ 。利用解析的方法證明 $|H_1(j\omega)|$ 的最大值為 $1/\sqrt{12}$ ，且發生在 $\omega = 2$ 。

(b) 利用(10.10.4)式證明使得閉迴路系統為穩定的增益常數 $k$ ，必須滿足條件

$$|k| < \sqrt{12}$$

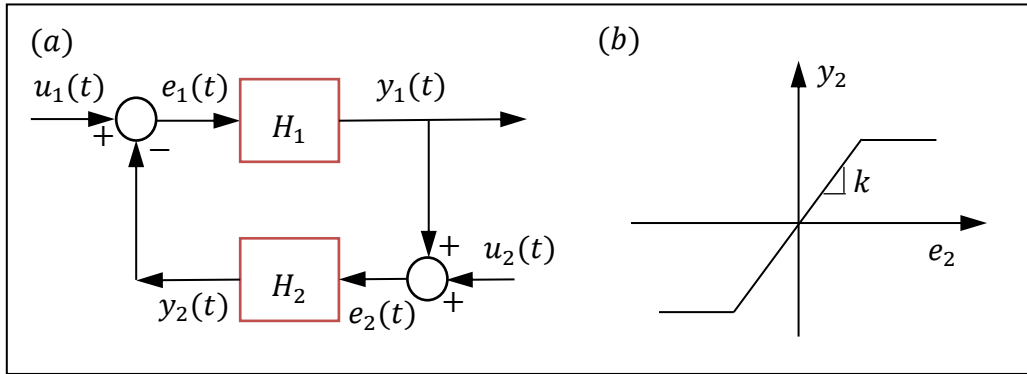


圖 10.10.1 評量 11.10.6 中的控制回授方塊圖。右圖是系統 $H_2$ 的輸入輸出關係。

### 10.10.7 考慮線性系統

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + w \\ z &= x \end{aligned} \quad (10.10.8)$$

本題的目的是要探討該系統的 $L_2$ -gain 是否可能小於 $\gamma$ 。

(a) 要滿足 $L_2$ -gain 小於 $\gamma$ 的條件必須是(10.3.3)式的 PDE 不等式有正定的解 $V(x)$ 。先列出(10.10.8)式所對應的 PDE 不等式，並代入

$$V(x) = \frac{1}{2}px^2, p > 0 \quad (10.10.9)$$

當不等式有解時，求出常數 $p$ 所要滿足的條件。

(b) 對於任意系統常數 $a$ ，是否恆存在 $p > 0$ ，使得(10.10.9)式的 $V(x)$ 為(10.3.3)式的解？

(c) 在 $p$ 有正數解的情形下，求出系統的 $L_2$ -gain  $\gamma$ 的最小可能值。

### 10.10.8 考慮非線性系統

$$G: \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)w \\ z = h(x) + k(x)w \end{cases} \quad (10.10.10)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n, w \in \mathbb{R}^m, z \in \mathbb{R}^q$ 。本題的目的是要導出當系統的 $L_2$ -gain 小於 $\gamma$ 時，系統所要滿足的條件。與(10.3.1)式相比較，(10.10.10)式多考慮了 $k(x) \neq 0$ 的情形。依照類似於定理 10.3.1 的步驟，證明(10.10.10)式的 $L_2$ -gain 小於 $\gamma$ 時，系統 $G$ 內的函數必須滿足以下的二個條件：

(a)  $\gamma^2 I - k^T(x)k(x) > 0$

(b) 存在  $V(x) > 0$  滿足 Hamilton-Jacobi PDE 不等式:

$$H = \frac{\partial V}{\partial x} f + \frac{1}{2} \left( h^T k + \frac{\partial V}{\partial x} g \right) (\gamma^2 I - k^T k)^{-1} \left( h^T k + \frac{\partial V}{\partial x} g \right)^T + \frac{1}{2} h^T h \leq 0 \quad (10.10.11)$$

當  $k(x) = 0$  時，上式即化簡成(10.3.3)式。提示:先定義以下二個函數

$$\begin{aligned} R(x) &= \gamma^2 I - k^T(x)k(x) = W^T(x)W(x) \\ L(x) &= -[W^T(x)]^{-1} \left[ h^T(x)k(x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(x) \right]^T \end{aligned}$$

並證明以下的恆等式

$$\frac{\partial V}{\partial x} f + \frac{\partial V}{\partial x} g w = -\frac{1}{2} (L + W w)^T (L + W w) + \frac{\gamma^2}{2} w^T w - \frac{1}{2} z^T z + H \quad (10.10.12)$$

其中  $H$  如(10.10.11)式的定義。將上式右邊項展開，並證明結果與左邊項相等。其次對(10.10.12)式積分，得到下列結果

$$V(x(\tau)) - V(x(0)) \leq \frac{1}{2} \gamma^2 \int_0^\tau \|w(t)\|_2^2 dt - \frac{1}{2} \int_0^\tau \|z(t)\|_2^2 dt \quad (10.10.13)$$

最後仿照定理 10.3.1 的步驟，證明系統的  $L_2$ -gain 小於等於  $\gamma$ 。

10.10.9 本題是上一題的結果在線性系統的應用。考慮以下的線性系統

$$G: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bw \\ z = Cx + Dw \end{cases} \quad (10.10.14)$$

(10.10.14)式是(10.10.10)式的特例，其中  $f(x) = Ax$ ， $g(x) = B$ ， $h(x) = Cx$ ， $k(x) = D$ 。系統的  $L_2$ -gain 小於  $\gamma$  的條件是存在  $X(x) > 0$  滿足(10.10.11)式的 PDE 不等式。採用如下  $V(x)$  的解

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T P x, P > 0 \quad (10.10.15)$$

將之代入(10.10.11)式，推導出矩陣  $P$  所要滿足的方程式。在此方程式中，令  $D = 0$ ，證明所得結果即為(10.5.6)式。

## 參考文獻(References)

- Abdallah, C. T., Input-Output Stability - Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering, John-Wiley & Sons, 1999.  
這篇回顧文章收納在 Wiley 出版的線上電機電子百科全書中，文中對於輸入-輸出穩定性分析(input-output stability)的發展過程及重要定理做了詳細的歸納整理，文後所附的參考文獻提供讀者對這個領域的全面性了解。
- Adams, R. J., Buffington, J. M., Sparks, A. G., and Banda, S. S., Robust Multivariable Flight Control, Springer-Verlag, 1994.  
這本書探討 F-16 戰鬥機及 F-18 向量推力(Thrust Vectoring)戰鬥機的強健控制，介紹如何設計  $H_\infty$  控制器用以對抗飛行動態的諸多不確定性。
- Ball J. A., Helton J. W., and Walker, M. L.,  $H_\infty$  Control for Nonlinear Systems with Output Feedback, IEEE Transactions on Automatic Control, 38, pp. 546-559, 1993.  
這篇文章進一步將非線性  $H_\infty$  狀態回授的結果推廣至輸出回授(output feedback)的情形，

探討如何利用輸出回授的方式將非線性系統控制成耗散系統。

- Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E., and Balakrishnan, V., Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, SIAM studies in Applied Mathematics, 1994.
- Dahleh, M. A. and Diaz-Bobillo, I. J., Control of Uncertainty Systems, Prentice Hall, 1995.

本書從不同的 $L_p$ -norm 函數空間，定義系統的不確定性，並推導出相對應的控制器以確保在 $L_p$ 不確定動態的作用下，仍能保持系統的穩定性。本書尤其對於 $L_1$ 強健控制理論的介紹與分析，是其他強健控制專書所沒有的。

- Desoer, C. A. and Vidyasagar, M., Feedback Systems: Input-Output Properties, Academic Press, 1975.

關於非線性系統的輸入-輸出穩定性分析(input-output stability)，這本書是早期的經典之作，書中對於如何利用 $L_p$ 範數(norm)來定義及分析輸入-輸出穩定性有很嚴謹的數學處理。

- Doyle, J. C., Glover, K., Khargonekar, B. A. and Francis, B. A., State-Space Solutions to Standard  $H_2$  and  $H_\infty$  Control Problems, IEEE Transactions on Automatic Control, 34, pp. 831-847, 1989.

這四位作者簡稱 DGKF，是當代強健控制領域的代表性人物，他們的這篇合著是線性 $H_\infty$ 控制理論的最具代表性作品，也是該領域的必讀文章。這篇文章透過線性代數的運算，以狀態空間(state space)的形式表達了 $H_2$ 與 $H_\infty$ 控制器的統一解法，更提供了求解強健控制律的簡便數值計算方法。

- Doyle, J. C., Francis, B. A., and Tannenbaum, A. R., Feedback Control Theory, Macmillan, 1992. 這是一本小巧(200 頁)又容易讀的書(相當於這個領域的白話文讀本)，它從基礎古典控制的觀點出發，針對單一輸入、單一輸出線性系統(SISO)，介紹 $H_\infty$ 控制理論，非常適合初學控制理論的讀者閱讀。

- Freeman, R. A. and Kokotovic, P. V., Robust Nonlinear Control Design: State-Space and Lyapunov Techniques, Birkhauser, 1996.

這本書專門探討非線性系統的強健控制，它將強健控制的設計理念與傳統非線性控制的各種方法結合，而形成強健 Lyapunov 控制，強健 Backstepping 控制，強健 PI 控制等等之非線性強健控制法則。

- Helton, J. W. and Merino, O., Classical Control Using  $H_\infty$  Method, SIAM, 1998.

這本書採用模組化的設計理念，將各種類型的古典控制問題轉成幾個標準化的 $H_\infty$ 控制模組，再利用現有的數值軟體加以求解，提供了線性 $H_\infty$ 控制的電腦輔助設計(CAD)方案。

- Helton, J. W. and James, M. R., Extending  $H_\infty$  Control to Nonlinear Systems, SIAM, 1999.

這本專書由淺入深完整討論了輸出回授形式的非線性 $H_\infty$ 控制理論，採用類似線性控制的分離原理，分別獨立設計狀態回授控制器(state-feedback controller)與狀態估測器(state estimator)，其中估測所得的狀態稱為 information state。然後結合兩者的設計，以估測所得的狀態當成系統的狀態，進行回授控制。

- Khalil, H. K., Nonlinear Systems, Prentice Hall, 1996.

這本書對於非線性系統的二種穩定性分析皆有介紹，其中第三、四、五章討論相對於平衡點的 Lyapunov 穩定性分析，第六章討論相對於輸入-輸出訊號的穩定性分析，第十章則討論了被動系統(passive systems)的穩定性及小增益原理(small-gain theorem)。這本書在各個章節的定理後都引入了許多例題配合解說，有助於讀者對於相關定理的了解，尤其

這本書在每一章的後面收錄大量的習題，增加了讀者練習的機會，其數量與種類之多是相同主題書籍所無法比擬。

- Marquez, H. J., Nonlinear Control Systems – Analysis and Design, John Wiley & Sons, 2003.  
這本書的特色是其中的第九章專門介紹耗散系統(dissipative system)，從輸出入關係定義耗散系統的穩定性，並建立耗散系統、被動系統與非線性 $H_\infty$ 控制三者之間的關聯性，讓讀者可以清楚了解非線性 $L_2$ -gain 控制的物理內涵與其背後的動機。
- Sastry, S., Nonlinear Systems - Analysis, Stability and Control, Springer-Verlag, 1999.  
這本書對於非線性系統的二種穩定性分析皆有介紹，其中第四章討論相對於輸入-輸出訊號的穩定性分析，第五章討論相對於平衡點的 Lyapunov 穩定性分析。
- Skogestad, S. and Postlethwaite, I., Multivariable Feedback Control: Analysis and Design, John Wiley & Sons, 1996.  
這本書是線性 $H_\infty$ 控制從理論分析過渡到工業應用的橋樑，著重在探討 $H_\infty$ 控制在實際應用時，所面臨的各種限制，同時提出各種因應解決之道。
- Tsai, M. C. and Gu, D. W., Robust and Optimal Control: A Two-port Framework Approach, Springer-Verlag, 2014.  
本書是強健控制領域的最新著作，以淺顯易懂的雙埠電路(two-port circuit)分析法，取代了原先艱澀數學的成分，使得工程背景的讀者能輕鬆了解並應用強健控制理論。本書對於每個定理及例題的解說，細節涵蓋到每一個小步驟，同時配合 Matlab 程式的對照，讓強健控制的學習變得簡單。
- van der Schaft, A. J.,  $L_2$ -Gain Analysis of Nonlinear systems and Nonlinear State Feedback  $H_\infty$  Control, IEEE Transactions on Automatic Control, 37, pp. 770-784, 1992.  
這一篇文章成功將線性 $H_\infty$ 控制理論擴展到非線性系統，推導出非線性系統的 $L_2$ -gain $< \gamma$ 所要滿足的條件。
- van der Schaft, A. J.,  $L_2$ -Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control, Springer-Verlag, 2000.  
這本書是該作者根據其 1992 年的文章(參見上一文獻)加以擴增而成書。該書完整討論了 $L_2$ -Gain 與被動性的關係，並依此關係推導出非線性 $H_\infty$ 控制的所有相關原理(包含狀態回授與輸出回授)。
- Weinmann, A., Uncertain Models and Robust Control, Springer-Verlag, 1991.  
 $H_\infty$ 強健控制理論所面對的是具有不確定性(uncertainty)的系統，這本專書以七百頁的篇幅完整介紹了各種系統模式的不確定性，並論述如何設計強健控制器來克服這些不確定動態所帶來的影響。
- Yang, C. D. and Chen, H. Y., Nonlinear  $H_\infty$  Robust Guidance Law for Homing Missiles, AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics, 21, pp. 882 -890, 1998.  
這一篇論文是國際上第一篇將非線性 $H_\infty$ 控制理論應用到飛彈導引律設計的文章，文中論述飛彈如何在目標物飛行狀況未知的情形下，達到攔截的任務。更詳細的理論推導及背景資料介紹可參閱第二作者的博士論文:陳杏圓，歸航飛彈非線性 $H_\infty$ 導引律之設計，國立成功大學航太研究所博士論文，2000。
- Yang, C. D. and Kung, C. C., Nonlinear  $H_\infty$  Flight Control of General Six Degree-of- Freedom Motions, AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 23, pp. 278 -288, 2000.

這一篇論文是國際上第一篇將非線性 $H_\infty$ 控制理論應用到飛行控制的文章，文中論述強健飛行控制如何在大氣擾流及陣風的作用下，保持飛行的狀態。更詳細的理論推導及背景資料介紹可參閱第二作者的博士論文：孔健君，非線性 $H_\infty$ 飛行控制與應用，國立成功大學航太研究所博士論文，2000。

- Yeh, F. B. (葉芳栢) and Yang, C. D. (楊憲東), Post Modern Control Theory and Design, Eurasian Book Company, 1991.

本書紀錄了線性 $H_\infty$ 控制理論發展初期的一些重要成果及文獻，尤其對於 $H_\infty$ 控制的強健特性以及其使用時機有深入的探討。

- 楊憲東，葉芳栢，線性與非線性 $H_\infty$ 控制理論-Game Theoretical Approach，全華科技圖書，1997.

這本書是作者的另一著作，內容是以博弈(game theory，又稱對局)的觀點闡述線性與非線性 $H_\infty$ 控制理論。強健控制系統的設計可以看成是甲乙雙方的對局，甲方是來自環境或系統內部的干擾，乙方則是來自控制系統的控制行為。甲方會惡化系統的操控性能，而乙方則是要強化系統的操控性能。線性與非線性 $H_\infty$ 控制理論(亦即乙方)的對局策略是先讓甲方造成系統的最惡劣情況(worst case)，然後再施以控制的手段，傾全力扭轉最惡劣的情況。如果在最惡劣的情況下，控制手段仍能恢復並保持系統在可接受的操控範圍，則在其他的情況下自然也都能滿足所要求的規格。因此對局理論又稱 min-max 理論，因為對局的雙方，一方要讓分數(性能指標)達到最低，而另一方則要讓分數達到最高。

- 楊憲東，自動飛行控制：原理與實務，全華科技圖書，2002。

本書的第 7 章詳細介紹了四元數的運作原理及其與飛行器姿態角的關係。本書分為『飛行原理講解』及『硬體實作』二個部分。在『原理講解』中，介紹了①電子學實作②飛行力學③流體力學④無線電通訊⑤自動控制⑥慣性導航⑦GPS 導航，等等各個領域的基本知識，並解說如何結合這些知識，以達致飛機自動飛行的目的。『硬體實作』的部分是針對一架無人飛行載具，詳細分析其自動駕駛儀的軟硬體製作過程。

- Zhou, K. and Doyle, J. C., Essentials of Robust Control, Prentice-Hall, 1998.

這本專書提供了閱讀 DGKF 文章(Doyle, et al, 1989)所需要的所有數學基礎，同時擴展了 DGKF 理論的適用性與應用範圍。尤其書後所收錄的二百多個文獻，涵蓋了線性 $H_\infty$ 控制理論的重要著作。每章後面附有大量習題，提供讀者練習熟悉線性 $H_\infty$ 控制的相關運算。