非線性控制
Nonlinear Control

第四章作業

學　　號：P46071204

研 究 生：蔡 旻 哲

授課教授：楊 憲 東

Department of Aeronautics and Astronautics

National Cheng Kung University

Tainan, Taiwan, R.O.C.

中 華 民 國 109 年 11 月 6 日

目錄

第1題.

利用 Lyapunov 直接定理分析下列非線性方程式在原點處之穩定性

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1)\\ \dot{x}_2 &= (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1)\end{aligned} \tag{1.1}$$

Question:

(a) 採用 Lyapunov 函數$V(x) = x_1^2 + x_2^2$，求出滿足$\dot{V} < 0$的(x_1, x_2)收斂範圍。

Answer:

首先，針對非線性系統(1.1)的平衡點$x_e = (0,0)$，選擇 Lyapunov 函數$V(x) = x_1^2 + x_2^2$，觀察 Lyapunov 函數，我們可以知道，Lyapunov 函數只有在位於平衡點x_e的地方為$V(x_e) = 0$，並且，除了在x_e之外，Lyapunov 函數皆滿足$V(x) > 0$，將 Laypunov 函數對時間做一次導數，並將系統(1.1)代入如下

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2\\ &= 2x_1(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) + 2x_2(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1)\\ &= 2(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 1)\\ &= -2(x_1^2 + x_2^2)\left[1 - (x_1^2 + x_2^2)\right]\end{aligned} \tag{1.2}$$

由(1.2)式可以知道，若初始狀態x_1、x_2滿足$x_1^2 + x_2^2 < 1$，則 Lyapuov 函數對時間一次導數為$\dot{V} < 0$，這個結果所代表的意義為，若系統的初始狀態滿足$x_1^2 + x_2^2 < 1$時，則系統狀態會以漸進穩定的方式收斂到平衡點x_e上，這也說明了此非線性系統(1.1)在平衡點$x_e = (0,0)$時，為局部漸進穩定。

Question:

(b) 在此範圍內選 3 個初始點，用 Matlab 畫出相平面軌跡確認穩定性的預測。同時在確保穩定的範圍之外也任選 3 個初始點，是否由這些點出發的軌跡都為不穩定? 解釋其原因。

Answer:

由(a)小題的穩定性分析當中，我們可以得出結論，當系統初始釋放的點滿足$x_1^2 + x_2^2 < 1$時，系統軌跡會呈現漸進穩定，而當系統初始狀態滿足$x_1^2 + x_2^2 = 1$時，則$\dot{V} = 0$，也就是說系統狀態並不收斂，也不發散，而當系統初始狀態滿足$x_1^2 + x_2^2 > 1$時，則 Lyapunov 對時間一次導數為$\dot{V} > 0$，以能量的觀點來看，是會發散的。

在 Matlab 數值模擬的部分，首先我們將系統初始值$(x_1(0), x_2(0))$分別設置為$(0.5, 0.5)$、$(0.6, -0.7)$以及$(-0.6, -0.2)$，並且這三組初始值皆滿足$x_1^2 + x_2^2 < 1$，而這三

組初始值釋放的軌跡，分別代表 圖 1.1 中的藍色軌跡，在圖中可以看到，藍色軌跡由於初始值都滿足 Lyapunov 穩定性所推導出來的範圍，因此皆會收斂到平衡點 $(0,0)$ 上，而在 圖 1.1 中，綠線軌跡的初始值 $(x_1(0),x_2(0))$ 設置分別為 $(1,0.5)$、$(0.5,-1)$ 以及 $(-0.9,-0.7)$，這三個初始值條件皆不滿足由 Lyapunov 穩定性所推導出來的範圍: $x_1^2+x_2^2<1$，因此是為發散的。

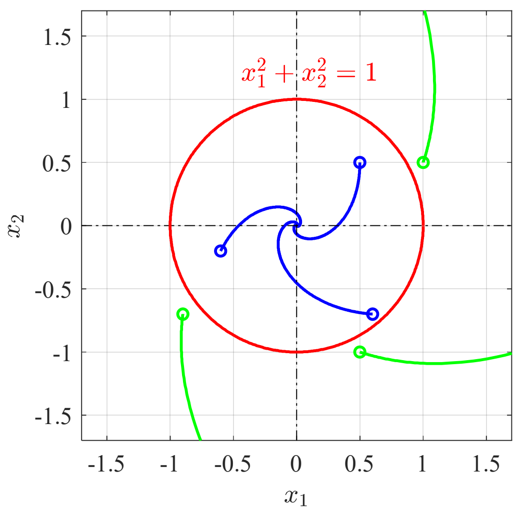

圖 1.1、非線性系統於任意初始值釋放之相平面軌跡

Question:

(c) 不同 $V(x)$ 函數所對應的收斂範圍均不同，最精確的收斂範圍必須由(1.1)式本身決定。透過座標轉換 $(x_1,x_2)\rightarrow(r,\theta)$，求得使得 $\dot{r}<0$ 的 r 範圍，比較由(a)以條件 $\dot{V}<0$ 所得到的範圍有何不同?

Answer:

考慮系統(1.1)，並且定義新的坐標狀態為

$$r=\left(x_1^2+x_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.3}$$

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \tag{1.4}$$

其中 $r>0$，將(1.3)式對時間微分一次，並將(1.1)代入如下

$$\begin{aligned}\dot{r}&=\left(x_1^2+x_2^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(x_1\dot{x}_1+x_2\dot{x}_2\right)\\&=\left(x_1^2+x_2^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left[x_1\left(x_1-x_2\right)\left(x_1^2+x_2^2-1\right)+x_2\left(x_1+x_2\right)\left(x_1^2+x_2^2-1\right)\right]\\&=\left(x_1^2+x_2^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(x_1^2+x_2^2-1\right)\\&=r\left(r^2-1\right)\end{aligned} \tag{1.5}$$

同理，將(1.4)式對時間微分一次，並將(1.1)代入如下可得

$$
\begin{aligned}
\dot{\theta} &= \frac{1}{1+\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2}\frac{\dot{x}_2 x_1 - x_2 \dot{x}_1}{x_1^2} \\
&= \frac{1}{x_1^2+x_2^2}\Big[x_1\left(x_1+x_2\right)\left(x_1^2+x_2^2-1\right)-x_2\left(x_1-x_2\right)\left(x_1^2+x_2^2-1\right)\Big] \qquad (1.6) \\
&= \frac{1}{x_1^2+x_2^2}\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(x_1^2+x_2^2-1\right) \\
&= r^2-1
\end{aligned}
$$

因此，非線性系統(1.1)透過座標轉換(1.3)、(1.4)，可以轉成以下二條等效動態方程式

$$\dot{r} = r\left(r^2-1\right) \tag{1.7}$$

$$\dot{\theta} = r^2-1 \tag{1.8}$$

接著，我們觀察(1.7)可以發現，當$r^2>1$時，$\dot{r}>0$，$r^2=1$時，$\dot{r}=0$以及$r^2<1$時$\dot{r}<0$，因此我可以得出結論，當系統初始狀態滿足$r^2>1$時，則系統會發散，而系統初始狀態滿足$r^2<1$時，則系統會呈現漸進穩定收斂，而又根據於r的定義(1.3)，因此這樣的結果可以與(a)小題，透過 Lyapunov 直接穩定定理所推導出來的穩定範圍相符合，且由於滿足 Lyapunov 直接穩定定理只是一個充分條件，而本小題透過座標轉換的方式分析系統，可以直接掌握整個系統收斂與發散的全貌。

第2題.

利用可變梯度法求下列非線性系統的 Lyapunov 函數V

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + 2x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2\end{aligned} \tag{2.1}$$

假設V 的梯度可表成

$$\nabla V = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & a_{21}x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

不同的係數a_{ij}可得到不同的 Lyapunov 函數V 。考慮下列二種不同的a_{ij}選擇，分別求得對應的 Lyapunov 函數V ，並求出其可確保穩定的區域範圍:

<u>Question</u>:

(a) $a_{11} = 1,\ a_{21} = a_{12} = 0$

<u>Answer</u>:

本題令$a_{11} = 1$且$a_{21} = a_{12} = 0$ ，因此 Lyapunov 函數的梯度可以表示為

$$\nabla V = \begin{bmatrix} x_1 & 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla V_1 & \nabla V_2 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

根據參數的選擇，式(2.3)必須滿足以下梯度函數

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_2} = \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \tag{2.4}$$

再根據 Lyapunov 函數對時間一次導數的定義，並且將系統(2.1)代入，因此 Lyapunov 函數對時間一次導數可以被推導為

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \begin{bmatrix} \nabla V_1 & \nabla V_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & 2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \\ &= x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= -x_1^2 + 2x_1^3 x_2 - 2x_2^2 \\ &= -x_1^2\left(1 - 2x_1x_2\right) - 2x_2^2\end{aligned} \tag{2.5}$$

在(2.5)當中，若將x_1 、x_2限制在$1 - 2x_1x_2 > 0$的範圍，則有$\dot{V} < 0$;其相對應的V 為

$$\begin{aligned}V(x) &= \int_0^x \nabla V dx = \int_0^{x_1} \nabla V_1 dx_1 + \int_0^{x_2} \nabla V_2 dx_2 = \int_0^{x_1} x_1 dx_1 + \int_0^{x_2} 2x_2 dx_2 \\ &= \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2\end{aligned} \tag{2.6}$$

因此若取$V(x) = x_1^2/2 + x_2^2$，被證明出此系統在$1 - 2x_1x_2 > 0$之範圍內為局部穩定

<u>Question</u>:

(b) $a_{11} = \dfrac{2}{\left(1 - x_1x_2\right)^2},\ a_{12} = \dfrac{-x_1^2}{\left(1 - x_1x_2\right)^2},\ a_{21} = \dfrac{x_1^2}{\left(1 - x_1x_2\right)^2}$

Answer:

透過本題的係數設置，因此 Lyapunov 函數的梯度可以表示為

$$\nabla V=\begin{bmatrix}\dfrac{2x_1}{(1-x_1x_2)^2}+\dfrac{-x_1^2x_2}{(1-x_1x_2)^2} & \dfrac{x_1^3}{(1-x_1x_2)^2}+2x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\nabla V_1 & \nabla V_2\end{bmatrix} \tag{2.7}$$

根據參數的選擇，式(2.7)必須滿足以下梯度函數

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_2}=\frac{\partial V_2}{\partial x_1} \tag{2.8}$$

再根據 Lyapunov 函數對時間一次導數的定義，並且將系統(2.1)代入，因此 Lyapunov 函數對時間一次導數可以被推導為

$$\begin{aligned}
\dot{V}&=\begin{bmatrix}\nabla V_1 & \nabla V_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{2x_1}{(1-x_1x_2)^2}+\dfrac{-x_1^2x_2}{(1-x_1x_2)^2} & \dfrac{x_1^3}{(1-x_1x_2)^2}+2x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}\\
&=\frac{2x_1}{(1-x_1x_2)^2}\dot{x}_1+\frac{-x_1^2x_2}{(1-x_1x_2)^2}\dot{x}_1+\frac{x_1^3}{(1-x_1x_2)^2}\dot{x}_2+2x_2\dot{x}_2\\
&=\frac{-2x_1^2+4x_1^3x_2}{(1-x_1x_2)^2}+\frac{x_1^3x_2-2x_1^4x_2^2}{(1-x_1x_2)^2}+\frac{-x_1^3x_2}{(1-x_1x_2)^2}-2x_2^2\\
&=\frac{-2x_1^2+4x_1^3x_2-2x_1^4x_2^2}{(1-x_1x_2)^2}-2x_2^2\\
&=-\frac{2x_1^2(1-x_1x_2)^2}{(1-x_1x_2)^2}-2x_2^2\\
&=-2(x_1^2+x_2^2)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

在(2.9)當中，不論 x_1 、 x_2 為何，皆有 $\dot{V}<0$;其相對應的 V 為

$$\begin{aligned}
V(x)&=\int_0^x \nabla V dx=\int_0^{x_1}\nabla V_1(x_1,0)dx_1+\int_0^{x_2}\nabla V_2(x_1,x_2)dx_2\\
&=\int_0^{x_1}\left[\frac{2x_1}{(1-x_1x_2)^2}+\frac{-x_1^2x_2}{(1-x_1x_2)^2}\right]_{x_2=0}dx_1+\int_0^{x_2}\left[\frac{x_1^3}{(1-x_1x_2)^2}+2x_2\right]dx_2\\
&=\int_0^{x_1}2x_1dx_1+\int_0^{x_2}\left[\frac{x_1^3}{(1-x_1x_2)^2}+2x_2\right]dx_2\\
&=\frac{x_1^2}{(1-x_1x_2)}+x_2^2
\end{aligned} \tag{2.10}$$

根據(2.10)的推導，此系統必須在 $1-x_1x_2>0$ 的情況下，Lyapunov 函數 $V(x)$ 才會恆大於 0，在本小題我們證明出，此系統必須在 $1-x_1x_2>0$ 之範圍內為才會滿足 $V(x)>0$ 且 $\dot{V}<0$，也就是說在這個範圍內系統在平衡點 $x_e=(0,0)$ 為局部漸進穩定。

Question:

(c) 系統(2.1)可穩定的範圍是以上二個範圍的交集或聯集?在保證穩定的範圍內選幾個初始點，以 Matlab 求解(3)式，證實平衡點為穩定;在穩定範圍之外也選幾個初始點，Matlab 求解所得之相平面軌跡是否必為發散?

Answer:

透過以上(a)、(b)小題的推導，選擇兩種不同的 Lyapunov 函數所得出，對於平衡點 $x_e=(0,0)$ 局部穩定的初始範圍條件各不同，(a)小題所得出的結論為，初始條件 $(x_1(0),x_2(0))$ 必須滿足 $1-2x_1x_2>0$，方使得系統會以漸進穩定的方式收斂到平衡點，而(b)小題所得出的結論為，初始條件 $(x_1(0),x_2(0))$ 須滿足 $1-x_1x_2>0$，系統會以漸進穩定的方式收斂到平衡點，由以上兩者結論我們可以知道，條件 $1-x_1x_2>0$ 包含了條件 $1-2x_1x_2>0$，因此我們將兩者條件取聯集，得出結論為當系統(2.1)的初始條件滿足 $1-x_1x_2>0$ 時，則系統必會以漸進穩定的方式收斂到平衡點 $x_e=(0,0)$，當然 Lyapunov 直接定理只是一個充分條件，因此我們儘管已經選擇兩種的 Lyapunov 函數，並不能保證我們所推導出滿足收斂的條件皆能涵蓋所有可收斂的範圍，因此一般來說，通常會盡量多選擇幾種 Lyapunov 函數，並且將其滿足穩定的收斂範圍取聯集，使得由穩定性分析所決定的收斂區間並不那麼保守，這樣我們所得出的初始值收斂區間，將可以越接近實際的收斂區間大小。

在 Matlab 數值模擬的部分，首先我們繪出 $x_1x_2=1$ 的雙曲線，在 圖 2.1 中以綠線表示，而在綠線以內的淺綠色區域為 $x_1x_2<1$，根據(a)、(b)小題的 Lyapunov 直接穩定性分析，系統狀態初始值若在這個區域內，則系統軌跡會以漸進穩定的方式收斂到系統平衡點 x_e，在圖中此區內的系統運動軌跡以藍線表示;而在綠線以外的區域為 $x_1x_2>1$，由(a)、(b)小題穩定性分析的收斂區域取聯集後，我們知道在這個區域的外部並無法保證系統收斂，因此在 圖 2.1 中，我們也可以看出系統軌跡以紅色線表示，且軌跡是為發散的。

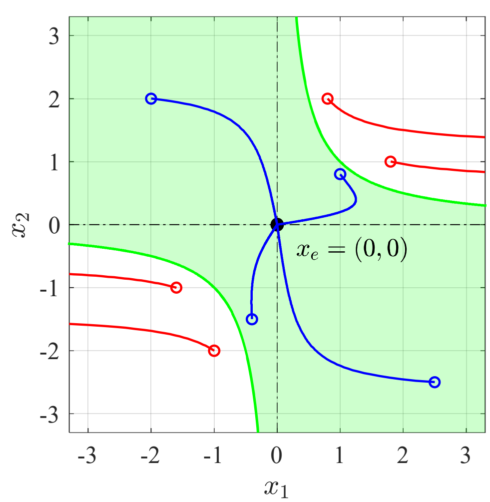

圖 2.1、非線性系統基於平衡點周圍之相平面軌跡運動圖

第3題.

考慮一個二階非線性系統

$$\dot{x}_1 = -\frac{6x_1}{\left(1+x_1^2\right)^2} + 2x_2$$
$$\dot{x}_2 = \frac{-2\left(x_1+x_2\right)}{\left(1+x_1^2\right)^2} \tag{3.1}$$

本題是要測試(3.1)式相對於原點是否為全域穩定。

<u>Question</u>:

(a) 若取$V(x)=x_1^2/\left(1+x_1^2\right)+x_2^2$，證明$V(x)>0,\ \dot{V}(x)<0,\ \forall x\in\mathbb{R}^2-\{0\}$。亦即原點為漸進穩定。

<u>Answer</u>:

首先，觀察本題題目所給定的 Lyapunov 函數，當x_1、x_2不等於 0 時，Lyapunov 函數皆會滿足$V(x)>0$，而當x_1、x_2皆為 0 時，則 Lyapunov 函數$V(x)=0$;接著，對 Lyapunov 函數$V(x)=x_1^2/\left(1+x_1^2\right)+x_2^2$對時間做一次導數，並且將系統(3.1)帶入，其推導如下

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= \frac{2x_1\left(1+x_1^2\right)}{\left(1+x_1^2\right)^2}\dot{x}_1 - \frac{2x_1^3}{\left(1+x_1^2\right)^2}\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\
&= \left[\frac{2x_1}{\left(1+x_1^2\right)^2}\right]\left[-\frac{6x_1}{\left(1+x_1^2\right)^2}+2x_2\right] + 2x_2\left[\frac{-2\left(x_1+x_2\right)}{\left(1+x_1^2\right)^2}\right] \\
&= \frac{-12x_1^2}{\left(1+x_1^2\right)^4} + \frac{4x_1x_2}{\left(1+x_1^2\right)^2} + \frac{-4x_2\left(x_1+x_2\right)}{\left(1+x_1^2\right)^2} \\
&= -\frac{12x_1^2}{\left(1+x_1^2\right)^4} - \frac{4x_2^2}{\left(1+x_1^2\right)^2}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

根據(3.2)的推導結果，我們可以知道當$\left(x_1,x_2\right)\neq(0,0)$時，$\dot{V}$恆小於 0，然而只有在$\left(x_1,x_2\right)=(0,0)$時，才會滿足$\dot{V}=0$，因此從這個推導結果可以得知，系統的原點$\left(x_1,x_2\right)=(0,0)$為一個穩定的平衡點，且原點附近的收斂性呈現漸進穩定收斂。

<u>Question</u>:

(b) 測試$V(x)$是否滿足 radially unbounded 條件(參考講義 4.4 節)?也就是當x離原點無窮遠處時，$V(x)$的值是否也必定趨近於無窮大?

Answer:

引入本大題所給定的 Lyapunov 函數

$$V(x)=\frac{x_1^2}{\left(1+x_1^2\right)}+x_2^2 \tag{3.3}$$

觀察(3.3)式，對於這個 Lyapunov 函數，如果有 $|x_1|\to\infty$ 則 $V(x)\to 1+x_2^2$，但此時的 x_2 可以為任何有限的值，使得 $V(x)$ 也為一個有限的值，即 $V(x)$ 不一定趨近於 ∞，也就是說這個 Lyapunov 函數不滿足 $\|x\|\to\infty$，$V(x)\to\infty$，故 growth condition 不滿足，當 x 離原點無窮遠處時，$V(x)$ 的值不一必定趨近於無窮大，這個結果使得我們知道本題的 Lyapunov 函數不滿足 radially unbounded 條件。

Question:

(c) 畫出 $V(x)$ 的等高線圖(令 $V(x)=$ 不同的常數值，從大排到小，取約 10 個數值)，並以此等高線圖為背景，畫出該系統的相平面軌跡。證明從某些點出發的相平面軌跡，其切割等高線圖的方式雖然滿足 $\dot{V}(x)<0$ 的條件，然而這些軌跡最後卻不進入平衡點，亦即此系統不為全域漸進穩定(參照講義的圖 4.4.2)。從數值上求出該系統可保證漸進穩定的初始值範圍。

Answer:

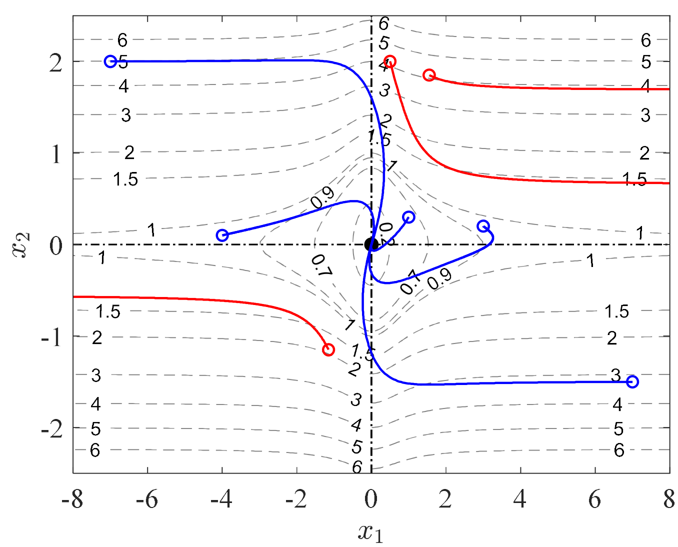

圖 3.1、非線性系統 Lyapunov 函數及系統相平面軌跡運動圖

在 圖 3.1 當中，底部灰色虛線為本題所訂定的 Lyapunov 函數(3.3)於相平面的等高線圖，在這裡我們取了 10 個 Lyapunov 函數值，從大到小排序分別為 $V_1(x)=6$、$V_2(x)=5$、$V_3(x)=4$、$V_4(x)=3$、$V_5(x)=2$、$V_6(x)=1.5$、$V_7(x)=1$、$V_8(x)=0.9$、

$V_9(x)=0.7$ 及 $V_{10}(x)=0.2$，而從圖中可以發現當 $V(x)<1$ 時，系統 Lyapunov 函數曲線皆為封閉曲線，由 growth condition 可以知道，儘管 Lyapunov 函數對時間一次導數 $\dot{V}<0$，但也只有在當 Lyapunov 函數曲線為封閉曲線時，才能保證系統在此區域為漸漸穩定的，根據這個理論，我們也從圖中驗證了這個結果，在圖中系統初始值若在這個區域中 $(V(x)<1)$，則系統軌跡會以漸近穩定(切割 Lyapunov 函數等高線)的方式收斂到平衡點。在 圖 3.1 中，系統軌跡相對於平衡點收斂以藍實線表示，系統軌跡相對於平衡點發散以紅實線表示。在 圖 3.1 中，部分藍線雖然是收斂到平衡點上的，但是它的初始點，卻部位於我們所定義的 Lyapunov 函數等高線內，這個結果也呼應了 Lyapunov 值皆定理只是一個充分條件，我們只能證明在等高線 $V(x)=1$ 的區間內釋放初始點，系統皆會收斂到原點，卻不能保證在這個區間外系統不會收斂到原點，而這樣的結果也告訴了我們，選擇 Lyapunov 函數的重要性，一般來說是可以多選擇幾組的，這樣最後所找到的收斂區間會更接近真實的收斂區間。

Question:

(d) 證明實際上(3.1)式的平衡點有 2 個:(1) $x_1=x_2=0$, (2) $x_1=\pm\infty,\ x_2=0$。因此原點並非全域穩定。確認在(c)的 10 條軌跡中，應該有些軌跡趨近於原點，即平衡點(1)，另外有一些軌跡則趨近於平衡點(2)。

Answer:

考慮非線性系統(3.1)，所謂系統的平衡點，也就是當系統在變化過程中，狀態處於不變的點(值)，因此若要找此非線性系統的平衡點，則首先會令系統的微分為零，如下

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=-\frac{6x_1}{\left(1+x_1^2\right)^2}+2x_2=0\\ \dot{x}_2&=\frac{-2\left(x_1+x_2\right)}{\left(1+x_1^2\right)^2}=0\end{aligned}\tag{3.4}$$

在本系統當中，使得系統微分為零時，共會有兩種情況，分別為，當 (x_1,x_2) 分別處在 $(0,0)$ 時，則滿足(3.4)式，以及當 (x_1,x_2) 分別處在 $(\pm\infty,0)$ 時，也就是說，在非線性系統(3.1)內，總共含有 3 個平衡點，因此我們由(a)小題所證明出對於原點 $(x_1,x_2)=(0,0)$ 的穩定性，只是區域穩定的，系統在任意初始值釋放並非會一致進入原點，這個結果也可以(c)小題的 圖 3.1 中觀察到。

Matlab Code

第一題 - (b)

```
%% Nonlinear Control HW4 - Q1 - (b)
clear ; clc ; close all ;
t_final = 10 ;
dT = 0.01 ;
t = 0 : dT : t_final ;
X0(:,:,1) = [ 0.5 ; 0.5 ] ; X0(:,:,2) = [ 0.6 ; -0.7 ] ; X0(:,:,3) = [ -0.6 ; -0.2 ] ;
X0(:,:,4) = [ 1 ; 0.5 ] ; X0(:,:,5) = [ 0.5 ; -1 ] ; X0(:,:,6) = [ -0.9 ; -0.7 ] ;
r_margin = 1 ;
theta = 0 : 0.01 : 2*pi ;
x_margin = r_margin*cos(theta) ;
y_margin = r_margin*sin(theta) ;

LW = 1.6 ;
FS_ax = 15 ;
col = ['b','b','b','g','g','g'] ;
colm = ['bo';'bo';'bo';'go';'go';'go'] ;
f1 = figure() ;
for i = 1:length(X0(1,1,:))
[ t , X ] = RK4(@Nonlinear_func,[0 t_final],X0(:,:,i),dT) ;
plot(X(:,1),X(:,2),col(i),'LineWidth',LW) ; hold on
plot(X(1,1),X(1,2),colm(i,:),'LineWidth',LW) ;
end
plot([-2 2],[0 0],'k-.') ;
plot([0 0],[-2 2],'k-.') ;
plot(x_margin,y_margin,'r','LineWidth',LW) ;
text(-0.44,1.2,'$x_1^2+x_2^2 = 1$','Interpreter','latex','FontSize',16,'Color','r') ;
axis equal
ax(1) = gca ;
ax(1).XLim = [-1.6 1.6];
ax(1).YLim = [-1.6 1.6];
xlabel('$x_1$','Interpreter','Latex') % x label
ylabel('$x_2$','Interpreter','Latex') % y label
grid on
```

```
for i = length(ax)
    set(ax(i),'FontSize',FS_ax,'FontName','Times New Roman')
end

function dX = Nonlinear_func(t,X)
%       x1 = X(1) ; x2 = X(2) ;
%       dX =    zeros(2,1) ;
%       dX(1) = ( x1 - x2 )*( x1^2 + x2^2 -1 ) ;
%       dX(2) = ( x1 + x2 )*( x1^2 + x2^2 -1 ) ;
    x1 = X(1) ; x2 = X(2) ;
    dx1 = ( x1 - x2 )*( x1^2 + x2^2 -1 ) ;
    dx2 = ( x1 + x2 )*( x1^2 + x2^2 -1 ) ;
    dX = [ dx1 ; dx2 ] ;
end
```

第二題 - (c)

```
%% Nonlinear Control HW4 - Q2 - (c)
clear ; clc ; close all ;
t_final = 10 ;
dT = 0.01 ;
t = 0 : dT : t_final ;
X0(:,:,1) = [ 1 ; 0.8 ] ; X0(:,:,2) = [ 2 ; -2 ] ; X0(:,:,3) = [ -0.4 ; -1.5 ] ; X0(:,:,4) = [ -1.5 ; 2 ] ;
X0(:,:,5) = [ 0.8 ; 2 ] ; X0(:,:,6) = [ 1.8 ; 1 ] ; X0(:,:,7) = [ -1.6 ; -1 ] ; X0(:,:,8) = [ -1 ; -2 ] ;

x_m_p = 0.01 : 0.01 : 10 ;
y_m_p = 1./x_m_p ;
x_m_n = -0.01 : -0.01 : -10 ;
y_m_n = 1./x_m_n ;
X_m = [x_m_p,x_m_n];
Y_m=[y_m_p,y_m_n ];

LW = 1.4 ;
FS_ax = 14.5 ;
patch(X_m,Y_m,'g','linewidth',1.5,'facecolor','g','edgecolor','g','facealpha',0.2) ;
hold on
plot([-5 5],[0 0],'k-.') ;
plot([0 0],[-5 5],'k-.') ;
plot(0,0,'k.','MarkerSize',25) ;
```

```
text(0.3,-0.4,'$x_e = (0,0)$','Interpreter','latex','FontSize',15,'Color','k') ;
x_c = ['b','b','b','b','r','r','r','r'] ;
x_mc = ['bo';'bo';'bo';'bo';'ro';'ro';'ro';'ro'] ;
for i = 1:length(X0(1,1,:))
    [ t , X ] = RK4(@Nonlinear_func,[0 t_final],X0(:,:,i),dT) ;
    plot(X(:,1),X(:,2),x_c(i),'LineWidth',LW)
    plot(X(1,1),X(1,2),x_mc(i,:),'LineWidth',LW)
end
axis equal
xlabel('$x_1$','Interpreter','Latex') % x label
ylabel('$x_2$','Interpreter','Latex') % y label
axis([-3.5 3.5 -3.5 3.5])
grid on
ax(1) = gca ;

for i = 1:length(ax)
    set(ax(i),'FontSize',FS_ax,'FontName','Times New Roman')
end

function dX = Nonlinear_func(t,X)
%       x1 = X(1) ; x2 = X(2) ;
%       dX =    zeros(2,1) ;
%       dX(1) = -x1 + 2*(x1^2)*x2 ;
%       dX(2) = -x2 ;
    x1 = X(1) ; x2 = X(2) ;
    dx1 = -x1 + 2*(x1^2)*x2 ;
    dx2 = -x2 ;
    dX = [ dx1 ; dx2 ] ;
end
```

第三題 - (c)

```
%% Nonlinear Control HW4 - Q3 - (c)
clear ; clc ; close all ;
t_final = 10 ;
dT = 0.01 ;
t = 0 : dT : t_final ;
X0(:,:,1) = [ -4 ; 0.1 ] ; X0(:,:,2) = [ 3 ; 0.2 ] ; X0(:,:,3) = [ 1 ; 0.3 ] ; X0(:,:,4) = [ -7 ; 2 ] ;
X0(:,:,5) = [ 7 ; -1.5 ] ; X0(:,:,6) = [ 1.55 ; 1.85 ] ; X0(:,:,7) = [ -1.15 ; -1.15 ] ; X0(:,:,8) = [ 0.5 ; 2 ] ;
```

```
x_ax = linspace(-8,8,240) ;
y_ax = linspace(-3,3,90) ;
[X_ax,Y_ax] = meshgrid(x_ax,y_ax) ;
V_xy = X_ax.^2./(1+X_ax.^2) + Y_ax.^2 ;
figure
surf(X_ax,Y_ax,V_xy)
f(1) = figure() ;
contour(X_ax,Y_ax,V_xy,[0.2,0.7,0.9,1,1.5,2,3,4,5,6],'--','LineColor',[0.5 0.5 0.5],'ShowText','on');
hold on
LW = 1.3 ;
FS_ax = 14.5 ;
plot([-8 8],[0 0],'k-.','LineWidth',1) ;
plot([0 0],[-8 8],'k-.','LineWidth',1) ;
plot(0,0,'k.','MarkerSize',25) ;
x_c = ['b','b','b','b','b','r','r','r'] ;
x_mc = ['bo';'bo';'bo';'bo';'bo';'ro';'ro';'ro'] ;
for i = 1:length(X0(1,1,:))
%       x_c(i,1) = ['b'] ;
%       x_mc(i,:) = ['bo'] ;
    [ t , X ] = RK4(@Nonlinear_func,[0 t_final],X0(:,:,i),dT) ;
    plot(X(:,1),X(:,2),x_c(i),'LineWidth',LW)
    plot(X(1,1),X(1,2),x_mc(i,:),'LineWidth',LW)
end

xlabel('$x_1$','Interpreter','Latex') % x label
ylabel('$x_2$','Interpreter','Latex') % y label
axis([-8 8 -2.5 2.5])
% grid on
ax(1) = gca ;

for i = 1:length(ax)
    set(ax(i),'FontSize',FS_ax,'FontName','Times New Roman','box','on')
end

function dX = Nonlinear_func(t,X)
%       x1 = X(1) ; x2 = X(2) ;
%       dX =    zeros(2,1) ;
```

```
%       dX(1) = -x1 + 2*(x1^2)*x2 ;
%       dX(2) = -x2 ;
    x1 = X(1) ; x2 = X(2) ;
    dx1 = -6*x1/((1+x1^2)^2) + 2*x2 ;
    dx2 = -2*(x1+x2)/((1+x1^2)^2) ;
    dX = [ dx1 ; dx2 ] ;
end
```