

2017 非線性控制期中考

2017/11/30

Closed-book Test (10:10~12:10)

1. (10%)如果我們不知道一個系統的數學模式，如何以實驗的方法判斷這個系統是線性還是非線性系統？提示：假設以訊號 u 輸入這個系統，可以量到輸出訊號 y ，說明如何只用輸入訊號與輸出訊號，判斷這個系統是否為非線性系統。
2. (a) (5%)解釋為何同一系統，有時其行為像是線性系統，有時卻又像是非線性系統？
(b) (5%)解釋為何同一系統，有時其行為像是非時變系統，有時卻又像是時變系統？
(c) (5%)解釋在甚麼情況之下，一個系統會同時呈現非線性及時變的行為？
3. (10%)給定一個非線性系統： $\dot{x} = f(x, t)$ ，如何確定它是穩定或是不穩定？如果確定是穩定的話，又如何決定它的穩定範圍？
4. (10%)何謂相平面軌跡？如何判斷其運動方向？如何由其運動方向判斷其在平衡點附近的穩定性？以非線性系統 $\dot{x} = -2x + x^3$ 為例，先求出其平衡點，大略描繪出其相平面軌跡，再由軌跡的運動方向決定每個平衡點的穩定性。
5. (10%)考慮下列的線性系統：

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

- (a) 給定常數 a_{ij} 的值，使得系統的相平面軌跡為穩定焦點型軌跡。
- (b) 給定常數 a_{ij} 的值，使得系統的相平面軌跡為鞍點型軌跡。
6. (10%)考慮一個非線性元件，已知當輸入為 $X \sin \omega t$ 時，輸出為 $y(t)$ ；試求出此非線性元件的描述函數 $N(X, \omega)$ 。描述函數僅是非線性元件的近似表示法，說明在何種情況下，此種近似表示法的誤差較小。
7. 若以登山步道比擬相平面軌跡，以山谷的最低點比擬平衡點，並假設登山步道 x 處之高度為 $V(x)$ 。說明如何由登山步道的前進過程中所觀察到的等高線變化，決定 Lyapunov 定理中的三種穩定性：
 - (a) (5%)Lyapunov 穩定性。
 - (b) (5%)漸進穩定性。
 - (c) (5%)全域穩定性。
8. (10%)對於一個線性非時變系統： $\dot{x} = Ax$ ，其中 A 為一常數矩陣，利用 Lyapunov 直接定理推導出此線性非時變系統為穩定的條件。
9. 決定下列非線性系統是否存在極限圓：

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 2), \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 2)$$

- (a) (5%)將上面方程式轉成極座標 (r, θ) 形式的微分方程式。(提示：令 $x_1 = r \cos \theta$ ， $x_2 = r \sin \theta$)
- (b) (5%)依據上面的 (r, θ) 微分方程式決定極限圓的軌跡，並討論此極限圓是穩定，還是不穩定，亦或是半穩定。