

非線性控制 NONLINEAR CONTROL

姓名:黃鎧寧 學號: P46114303 系級:航太所

CH2-HW2-1

2.1 考慮(2.4.3)式，選取 6 種不同的 (a, b) 值，使得特徵方程式 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ 所求得到的 2 個特徵值的位置剛好對應到圖 2.4.1 的 6 種情形。針對這 6 種不同的 (a, b) 值，畫出(2.4.3)式的相平面軌跡，並比較圖 2.4.1 的軌跡，驗證所得結果的正確性。

首先選取 6 種不同的 (a, b) 值，使得出的兩個特徵值會對應到課本的六個情況。

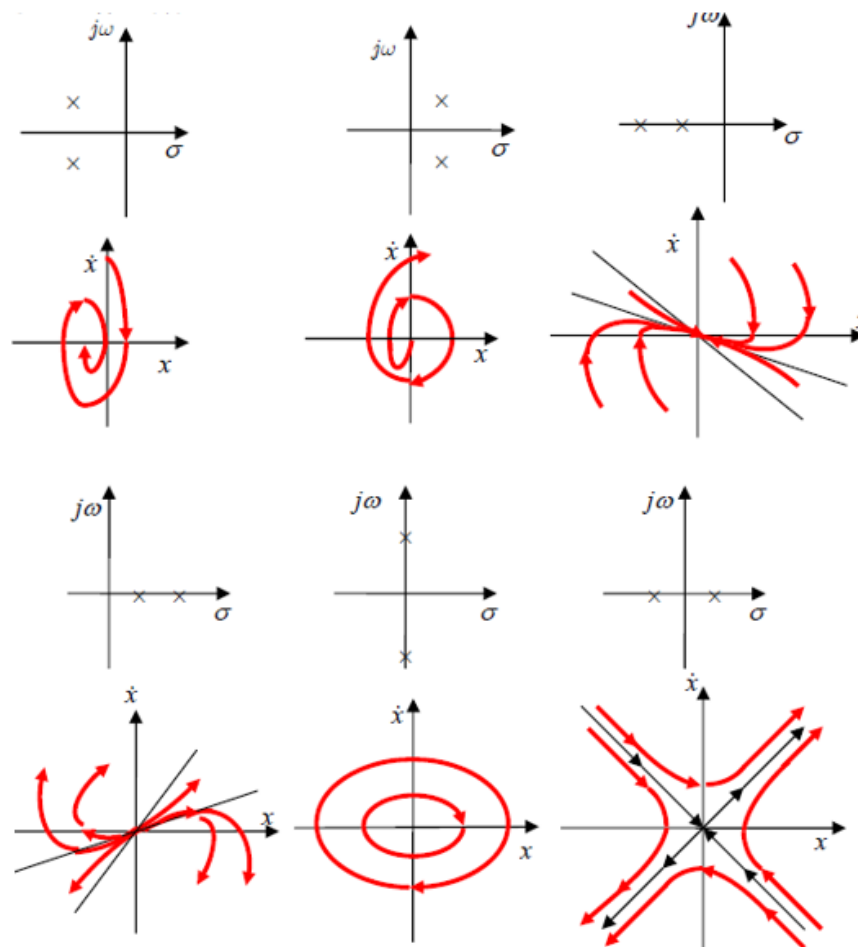


圖 1 課本的六個情況

以下為課本中的(2.4.3)式與其特徵方程式：

$$\text{微分方程式: } \ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0 \quad (1)$$

$$\text{特徵方程式: } \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad (2)$$

情況一：穩定焦點(stable focus)

特徵方程式的解為共軛複數根，實部為負，故假設特徵值 $=-3\pm 3i$

$$\begin{aligned}(\lambda + 3 + 3i)(\lambda + 3 - 3i) &= \lambda^2 + 6\lambda + 18 = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 + 6\lambda + 18 = 0 \\ \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 18 \end{cases}\end{aligned}\quad (3)$$

將非線性的 ODE 化簡成一階的 ODE 聯立方程式，首先定義以下狀態變數(state)：

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases}, \text{ 則 } \ddot{x} + 6\dot{x} + 18x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -18x_1 - 6x_2 \end{cases}\quad (4)$$

利用 MATLAB 畫出系統的根軌跡圖、相平面圖：

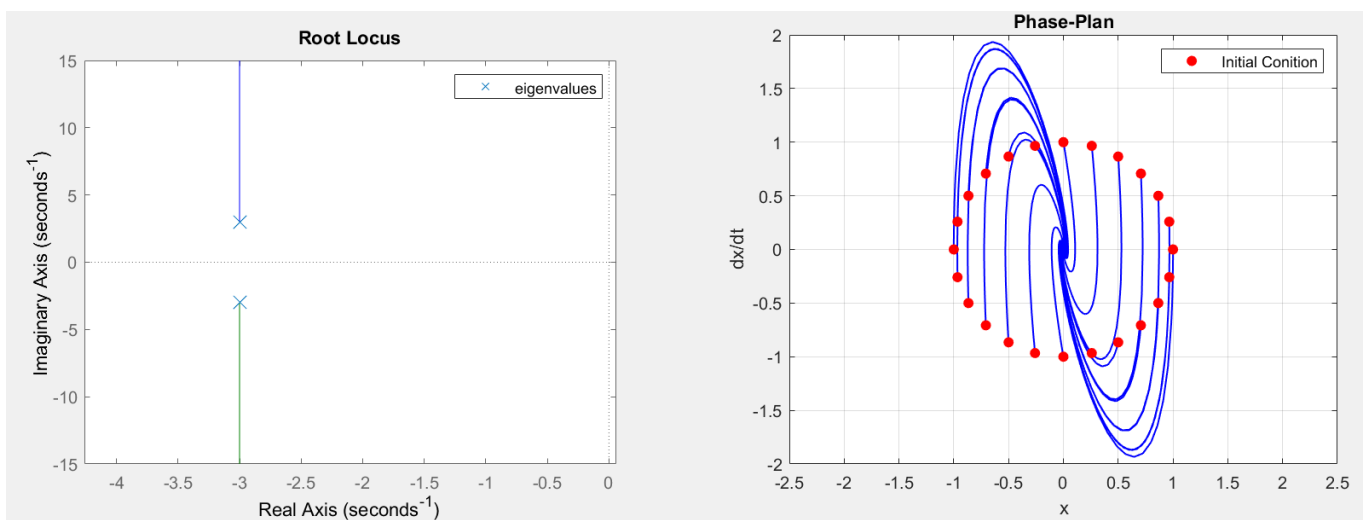


圖 2 系統的根軌跡圖、相平面圖_情況一

結果討論：

圖 1 (左)為特徵值的落點，(右)為系統的相平面圖，利用指定特徵值來得出系統二階微分方程式，將其化成一階 ODE 透過 MATLAB 畫出相平面圖，並對照課本中的結果(圖 2)，初始值設定在各象限以原點為圓心的半徑為 1 的圓上(圖中的紅點)，可以發現無論初始值在哪，都會以順時鐘的方向漸漸收斂至原點，與課本對照無誤。

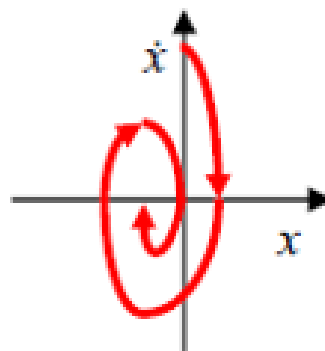
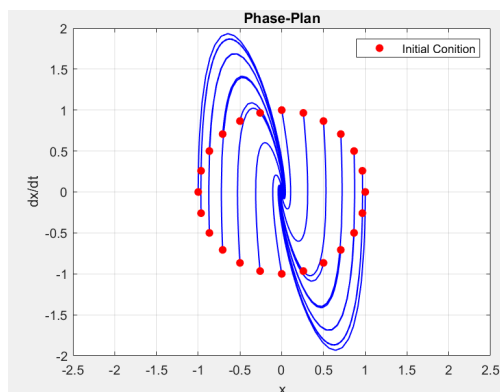


圖 3 對照課本中的相平面圖結果_情況一

其實相平面圖的結果可以從解析解的角度進行分析，其實 eigenvalue 是可以跟解析解相互參照對應的，依據情況一的特徵方程式 $\lambda^2 + 6\lambda + 18 = 0$ ，可得知其解析解為：

$$\text{特徵方程式: } \lambda^2 + 6\lambda + 18 = 0 \quad (5)$$

$$\text{特徵值: } = -3 \pm 3i \quad (6)$$

$$\text{解析解: } x = e^{-3t} [C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t)] = Ce^{-3t} \cos(3t + \theta) \quad (7)$$

其中 C 跟 θ 是常數，是由初始值決定的，而 $\cos(3t + \theta)$ 就是造成 x 來回震盪的原因，而 e^{-3t} 造成震盪的幅度越來越小，圖 3 為輸入步階訊號所得到的時域圖，起始給個小擾動在 $t=2$ 時就收斂，此情況也可以從根軌跡圖中觀察根皆在左半平面，又因為有虛部所以有震盪，就如動的相平面圖那樣，來回震盪但最終皆會逐漸收斂至原點。

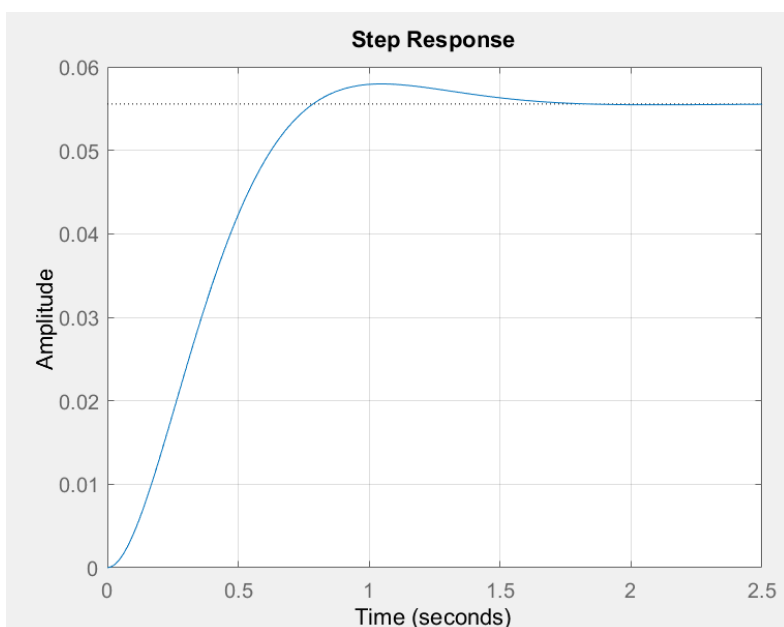


圖 4 時域圖_情況一

情況二：不穩定焦點(unstable focus)

特徵方程式的解為共軛複數根，實部為正，故假設特徵值 $= 3 \pm 3i$

$$\begin{aligned} (\lambda - 3 + 3i)(\lambda - 3 - 3i) &= \lambda^2 - 6\lambda + 18 = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 - 6\lambda + 18 = 0 \\ \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = 18 \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

將非線性的 ODE 化簡成一階的 ODE 聯立方程式，首先定義以下狀態變數(state)：

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases}, \text{ 則 } \ddot{x} - 6\dot{x} + 18x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -18x_1 + 6x_2 \end{cases} \quad (9)$$

利用 MATLAB 畫出系統的根軌跡圖、相平面圖：

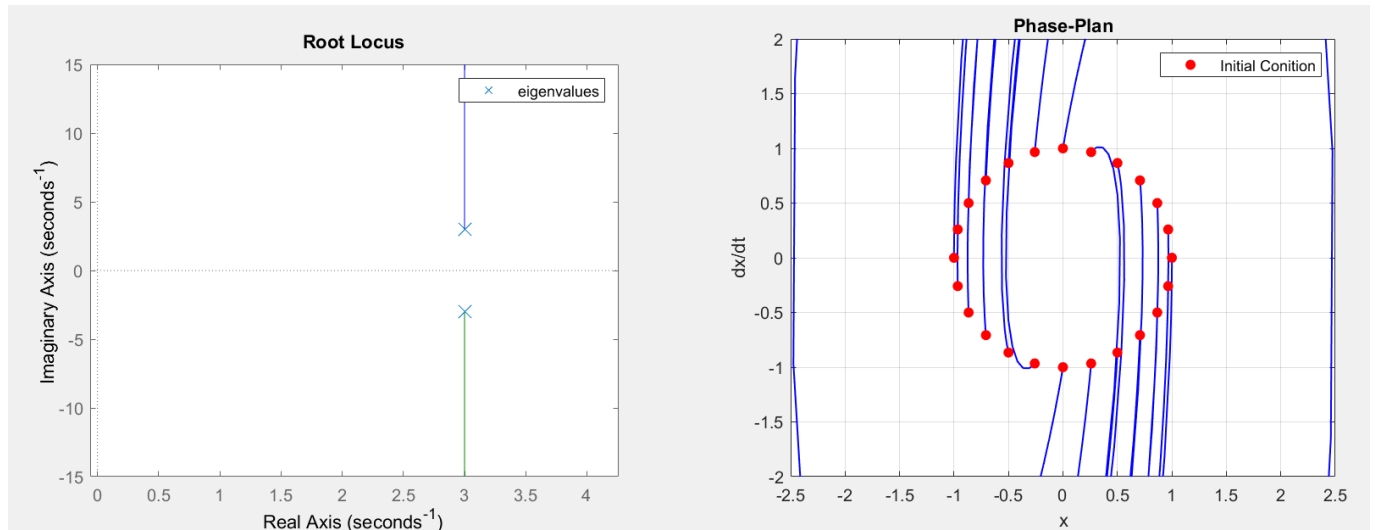


圖 5 系統的根軌跡圖、相平面圖_情況二

結果討論：

圖 5 (左)為特徵值的落點，(右)為系統的相平面圖，利用指定特徵值來得出系統二階微分方程式，將其化成一階 ODE 透過 MATLAB 畫出相平面圖，並對照課本中的結果(圖 6)，初始值設定在各象限以原點為圓心的半徑為 1 的圓上(圖中的紅點)，可以發現無論初始值在哪，都會以順時鐘的方向往外發散至無窮遠處，與課本對照無誤，此處只考慮區域性的不穩定，不考慮全域，在未知的全域可能會收斂在無窮遠處的某個平衡點，但這無從得知。

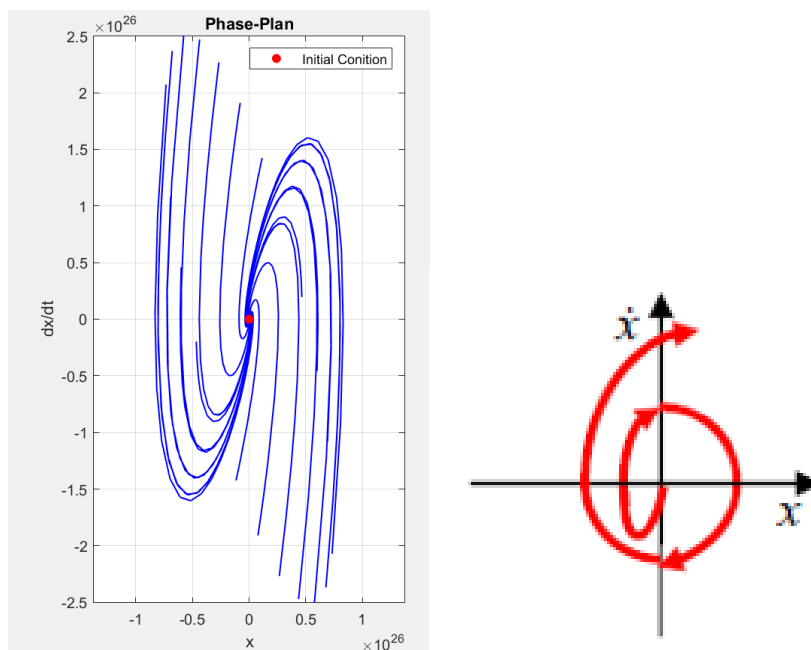


圖 6 對照課本中的相平面圖結果_情況二

其實相平面圖的結果可以從解析解的角度進行分析，其實 eigenvalue 是可以跟解析解相互參照對應的，依據情況二的特徵方程式 $\lambda^2 - 6\lambda + 18 = 0$ ，可得知其解析解為：

$$\text{特徵方程式: } \lambda^2 - 6\lambda + 18 = 0 \quad (10)$$

$$\text{特徵值: } = 3 \pm 3i \quad (11)$$

$$\text{解析解: } x = e^{3t} [C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t)] = Ce^{3t} \cos(3t + \theta) \quad (12)$$

其中 C 跟 θ 是常數，是由初始值決定的，而 $\cos(3t + \theta)$ 就是造成 x 來回震盪的原因，而 e^{3t} 造成震盪的幅度越來越大，圖 7 為輸入步階訊號所得到的時域圖，在 $t=250$ 時發生震盪且發散至無窮遠，此情況也可以從根軌跡圖中觀察根皆在右半平面(不穩定)，又因為有虛部所以有震盪，就如動的相平面圖那樣，來回震盪最終發散至無窮遠處。

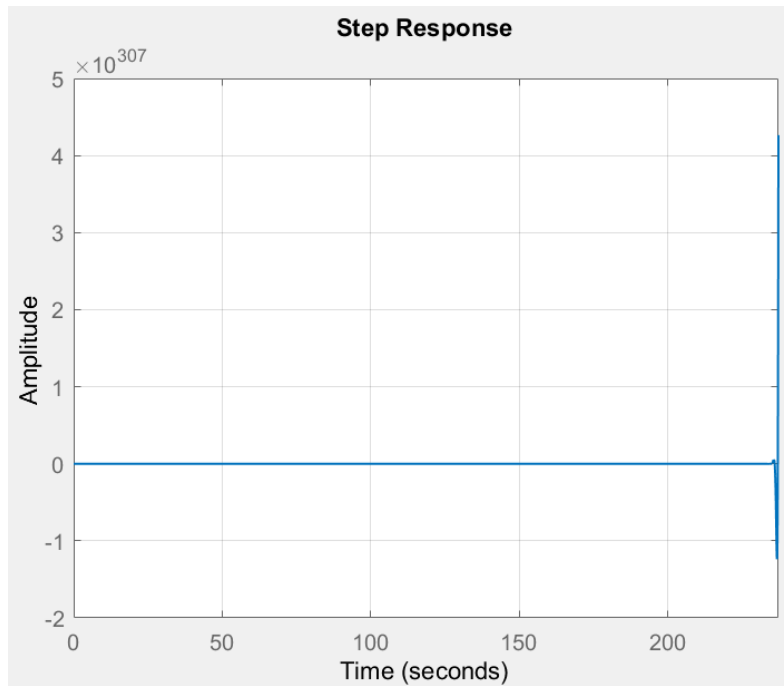


圖 7 時域圖_情況二

情況三：穩定節點(stable node)

特徵方程式的解為兩個負實根，故假設特徵值 $= -3$ 、 -2

$$\begin{aligned} (\lambda + 3)(\lambda + 2) &= \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \\ \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 6 \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

將非線性的 ODE 化簡成一階的 ODE 聯立方程式，首先定義以下狀態變數(state)：

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases}, \text{ 則 } \ddot{x} + 5\dot{x} + 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -6x_1 - 5x_2 \end{cases} \quad (14)$$

利用 MATLAB 畫出系統的根軌跡圖、相平面圖：

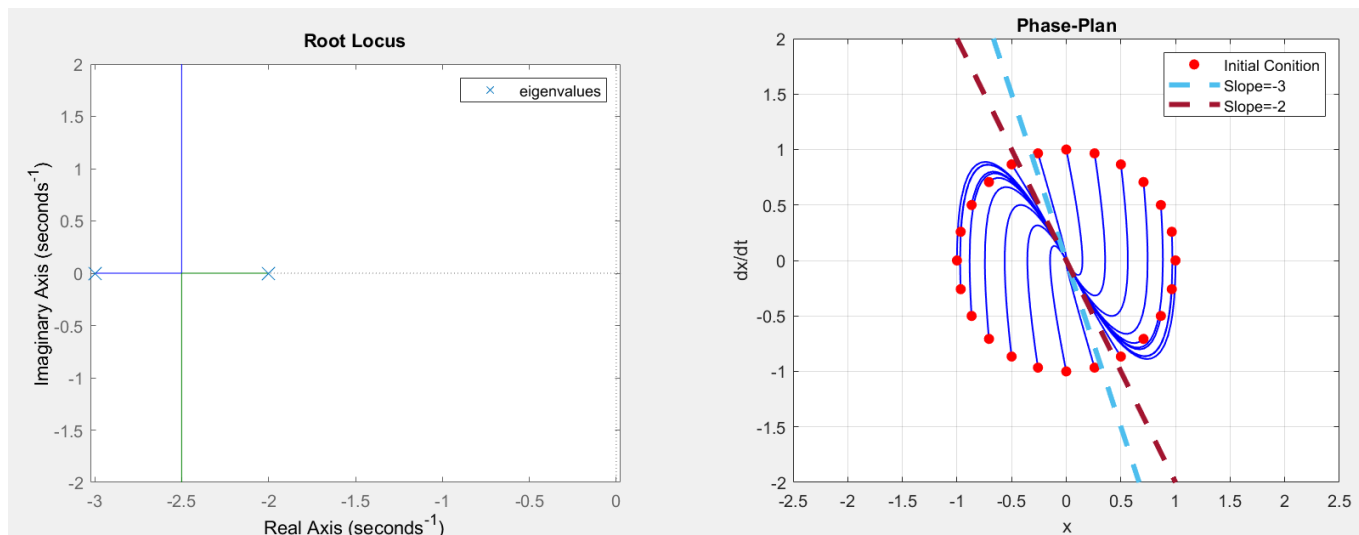


圖 8 系統的根軌跡圖、相平面圖_情況三

結果討論：

圖 8 (左)為特徵值的落點，(右)為系統的相平面圖，利用指定特徵值來得出系統二階微分方程式，將其化成一階 ODE 透過 MATLAB 畫出相平面圖，並對照課本中的結果(圖 9)，初始值設定在各象限以原點為圓心的半徑為 1 的圓上(圖中的紅點)，可以發現無論初始值在哪，都會以順時鐘的方向並沿著漸進線收斂至原點，與課本對照無誤。

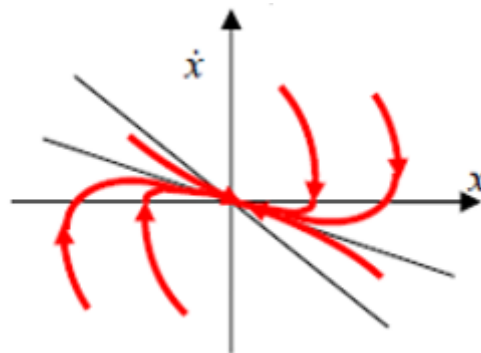
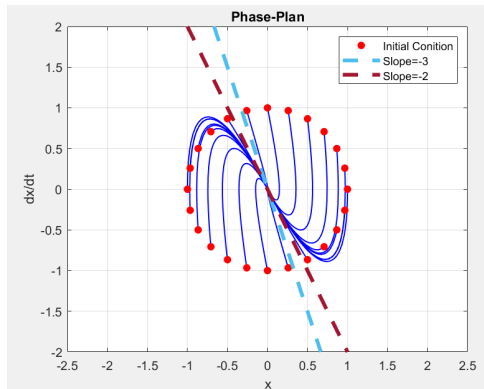


圖 9 對照課本中的相平面圖結果_情況三

其實相平面圖的結果可以從解析解的角度進行分析，其實 eigenvalue 是可以跟解析解相互參照對應的，依據情況二的特徵方程式 $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$ ，可得知其解析解為：

$$\text{特徵方程式: } \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \quad (15)$$

$$\text{特徵值: } = -3 \text{ 、 } -2 \quad (16)$$

$$\text{解析解: } x = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-2t} \quad (17)$$

而 C_1 跟 C_2 ，是由初始值決定的，從 17 式可以看到所有項都是收斂項(e^{-3t} 、 e^{-2t})，且無 cosine 或 sine 會造成震盪的函數項，接著來討論圖中的兩條特殊軌跡，選定特殊的初值導致 $C_1=0$ ，這時的解析解等於：

$$\begin{cases} x = C_2 e^{-2t} \\ \dot{x} = -2C_2 e^{-2t} \end{cases} \quad (18)$$

進一步可以求出當 $C_1=0$ 時，phase plane 的解析軌跡線：

$$2x + \dot{x} = 0 \quad (19)$$

而這條就是圖中的深紅線(斜率=-2)，同理也可以選定特殊的初值導致 $C_2=0$ ，而求出當 $C_2=0$ 時，phase plane 的解析軌跡線：

$$3x + \dot{x} = 0 \quad (20)$$

而這條就是圖中的淺藍線(斜率=-3)，而我們知道 $C_2 e^{-2t}$ 收斂速度比 $C_1 e^{-3t}$ 慢，也就是任何軌跡到最後都偏向 $C_1=0$ 的特殊軌跡線(式 19)，這也可以從圖 9 軌跡中看出來最後都偏向深紅線(斜率=-2)，而利用解析解方式也可以看到如此現象。

圖 10 為輸入步階訊號所得到的時域圖，可以發現在 $t=3.5$ 時就穩定且無發生震盪，此情況也可以從根軌跡圖中觀察根皆在左半平面(穩定)，無虛部所以沒有震盪，也可以對比情況一的震盪情形(圖 11)，明顯幅度比較小，觀察虛部對於系統軌跡的影響。

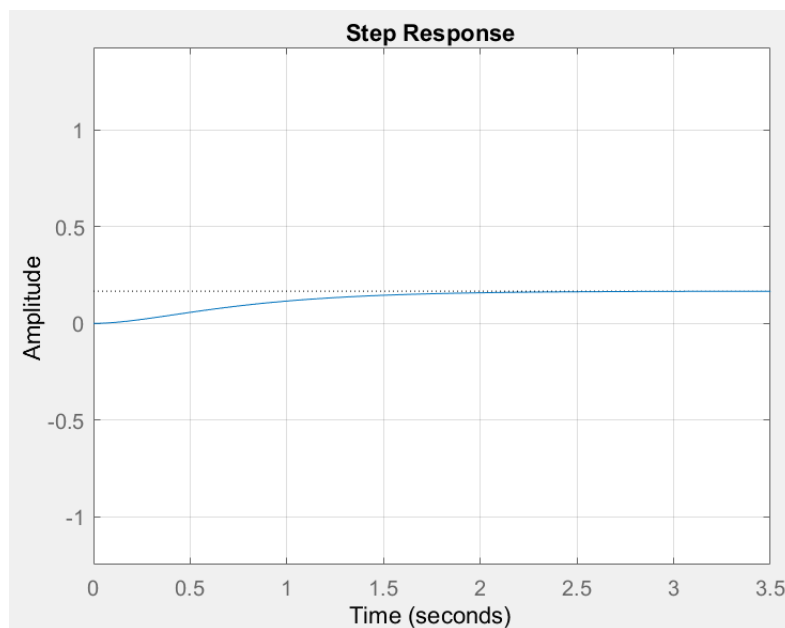


圖 10 時域圖_情況三

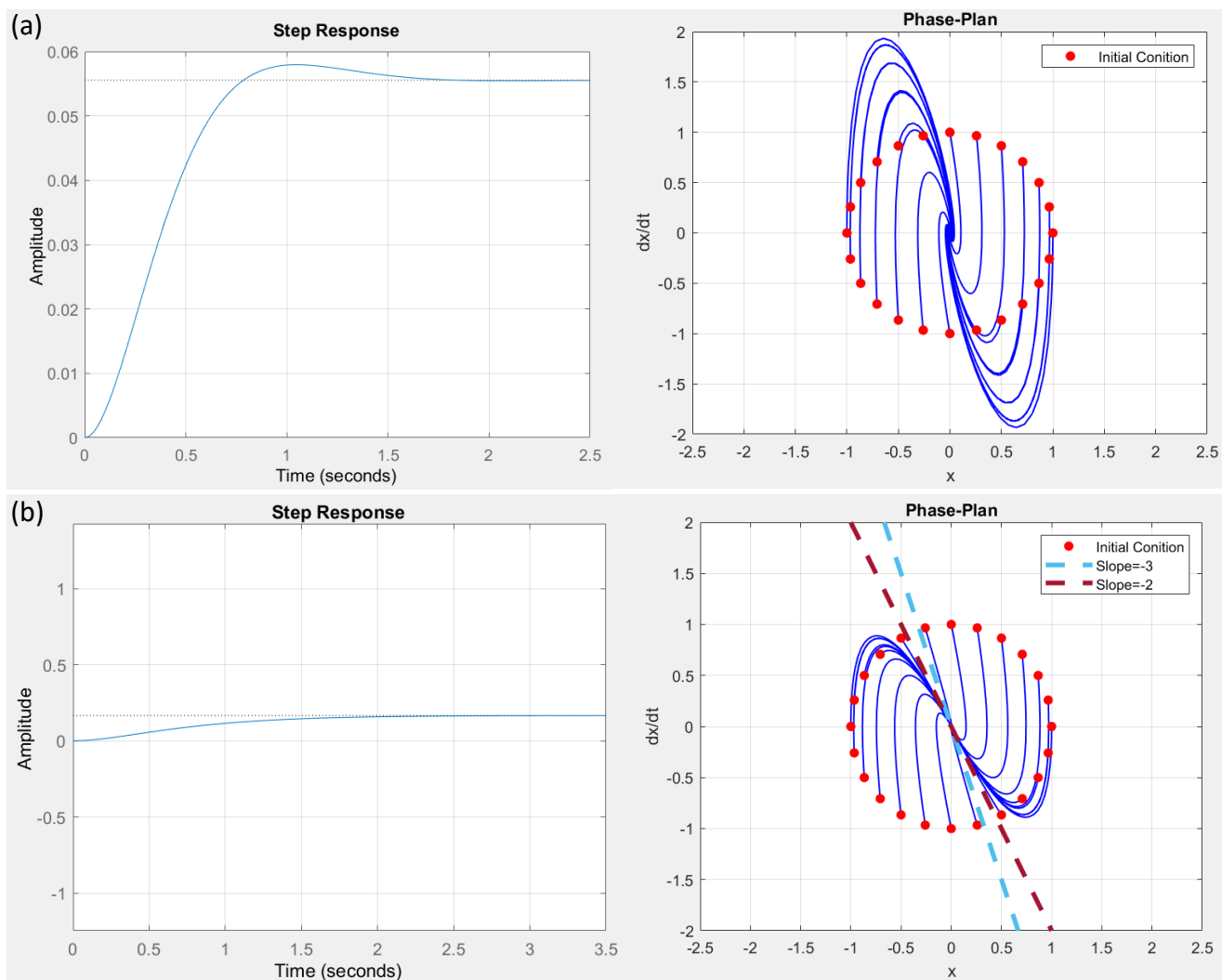


圖 11 到達穩定前的震盪情形比較_情況一(a) 情況三(b)

情況四：不穩定節點(unstable node)

特徵方程式的解為兩個正實根，故假設特徵值=3、2

$$\begin{aligned}
 (\lambda - 3)(\lambda - 2) &= \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \\
 \Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \\ \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 6 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{21}$$

將非線性的 ODE 化簡成一階的 ODE 聯立方程式，首先定義以下狀態變數(state)：

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases}, \text{ 則 } \ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -6x_1 + 5x_2 \end{cases} \tag{22}$$

利用 MATLAB 畫出系統的根軌跡圖、相平面圖：

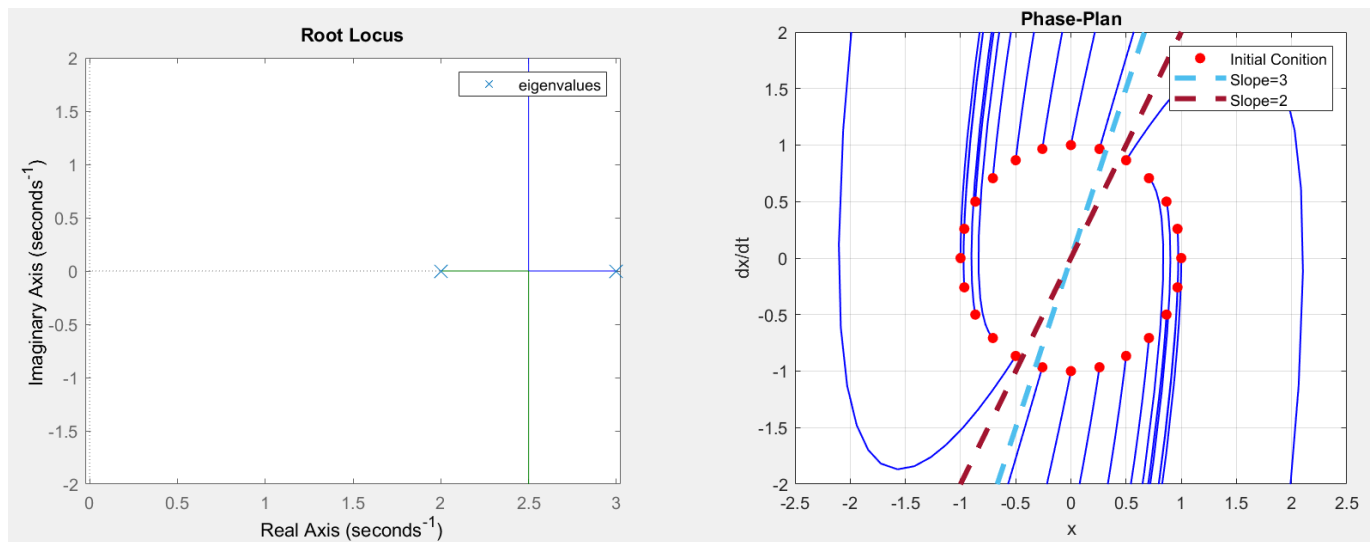


圖 12 系統的根軌跡圖、相平面圖_情況四

結果討論：

圖 12(左)為特徵值的落點，(右)為系統的相平面圖，利用指定特徵值來得出系統二階微分方程式，將其化成一階 ODE 透過 MATLAB 畫出相平面圖，並對照課本中的結果(圖 13)，初始值設定在各象限以原點為圓心的半徑為 1 的圓上(圖中的紅點)，可以發現無論初始值在哪，都會以順時鐘的方向往外發散至無窮遠處，與課本對照無誤，此處只考慮區域性的不穩定，不考慮全域，在未知的全域可能會收斂在無窮遠處的某個平衡點，但這無從得知。

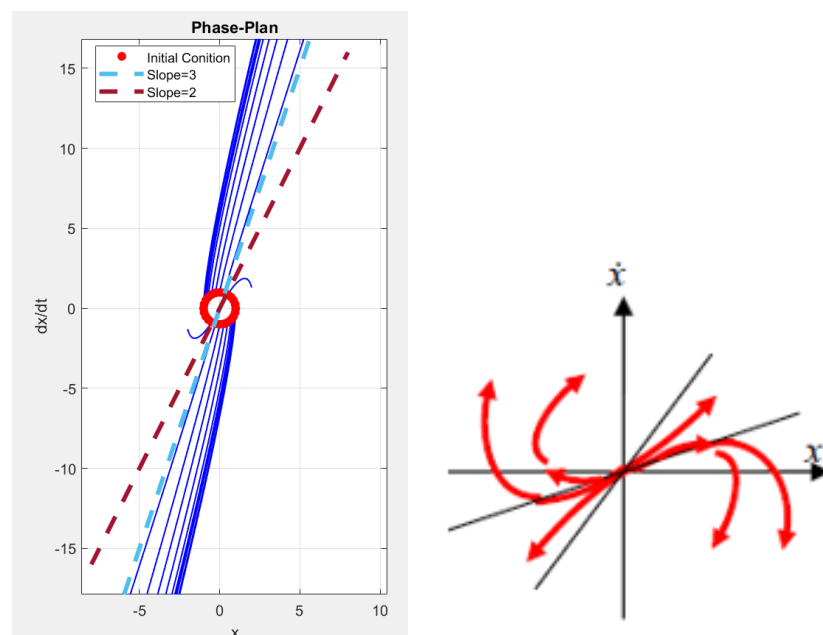


圖 13 對照課本中的相平面圖結果_情況四

其實相平面圖的結果可以從解析解的角度進行分析，其實 eigenvalue 是可以跟解析解相互參照對應的，依據情況二的特徵方程式 $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ ，可得知其解析解為：

$$\text{特徵方程式: } \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad (23)$$

$$\text{特徵值: } = 3, 2 \quad (24)$$

$$\text{解析解: } x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{2t} \quad (25)$$

而 C_1 跟 C_2 ，是由初始值決定的，從 25 式可以看到所有項都是發散項(e^{3t} 、 e^{2t})，且無 cosine 或 sine 會造成震盪的函數項，接著來討論圖中的兩條特殊軌跡，選定特殊的初值導致 $C_1 = 0$ ，這時的解析解等於：

$$\begin{cases} x = C_2 e^{2t} \\ \dot{x} = 2C_2 e^{2t} \end{cases} \quad (26)$$

進一步可以求出當 $C_1 = 0$ 時，phase plane 的解析軌跡線：

$$-2x + \dot{x} = 0 \quad (27)$$

而這條就是圖中的深紅線(斜率=-2)，同理也可以選定特殊的初值導致 $C_2 = 0$ ，而求出當 $C_2 = 0$ 時，phase plane 的解析軌跡線：

$$-3x + \dot{x} = 0 \quad (28)$$

而這條就是圖中的淺藍線(斜率=-3)，而我們知道 $C_2 e^{2t}$ 發散速度比 $C_1 e^{3t}$ 慢，也就是任何軌跡到最後都偏向 $C_2 = 0$ 的特殊軌跡線(式 28)，這也可以從圖 13 軌跡中看出來最後都偏向淺藍線(斜率=3)，而利用解析解方式也可以看到如此現象。

圖 14 為輸入步階訊號所得到的時域圖，在 $t=20$ 時就發散至無窮遠且無震盪，此情況也可以從根軌跡圖中觀察根皆在右半平面(不穩定)，無虛部所以沒有震盪，也可以對比情況二的震盪情形(圖 15)，明顯幅度比較小，觀察虛部對於系統軌跡的影響。

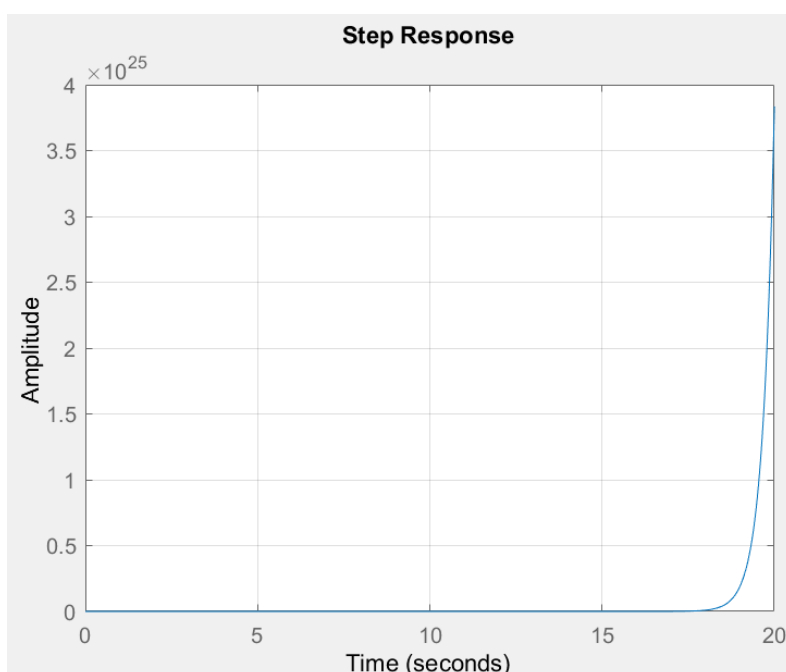


圖 14 時域圖_情況四

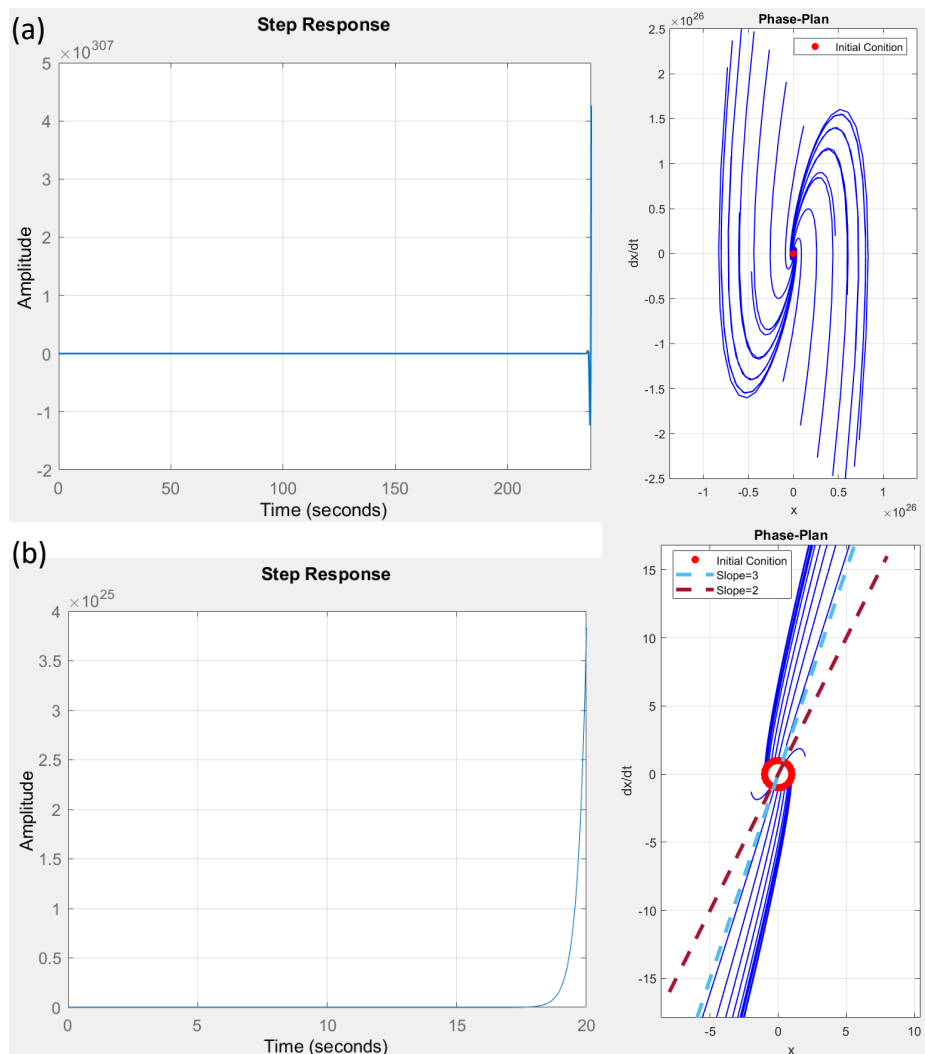


圖 15 到達穩定前的震盪情形比較_情況二(a) 情況四(b)

情況五：中心點(center)

特徵方程式的解為虛軸上的共軛複數根，故假設特徵值 $= \pm 3i$

$$\begin{aligned}
 (\lambda - 3i)(\lambda + 3i) &= \lambda^2 + 9 = 0 \\
 \Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 + 9 = 0 \\ \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 9 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{29}$$

將非線性的 ODE 化簡成一階的 ODE 聯立方程式，首先定義以下狀態變數(state)：

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases}, \text{ 則 } \ddot{x} + 9x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -9x_1 \end{cases} \tag{30}$$

利用 MATLAB 畫出系統的根軌跡圖、相平面圖：

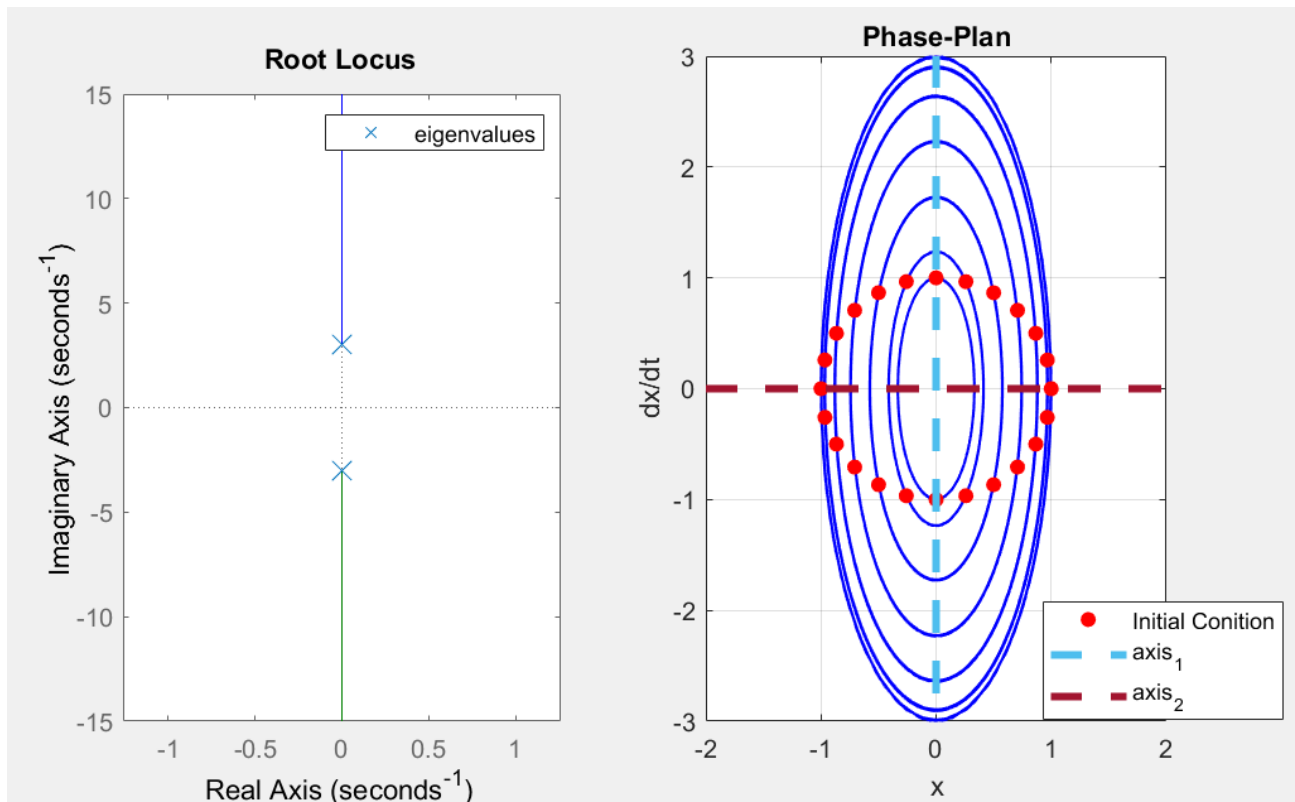


圖 16 系統的根軌跡圖、相平面圖_情況五

結果討論：

圖 16(左)為特徵值的落點，(右)為系統的相平面圖，利用指定特徵值來得出系統二階微分方程式，將其化成一階 ODE 透過 MATLAB 畫出相平面圖，並對照課本中的結果(圖 13)，初始值設定在各象限以原點為圓心的半徑為 1 的圓上(圖中的紅點)，可以發現無論初始值在哪，都會以順時鐘的方向走在特殊的橢圓軌跡(極限圓)上，且初始值不同會收斂在不同的極限圓，與課本對照無誤。

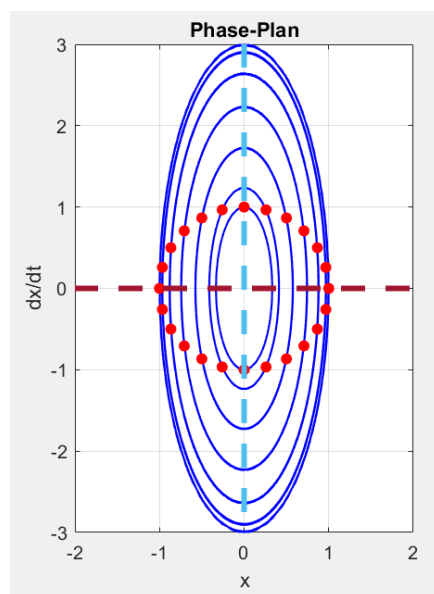


圖 17 對照課本中的相平面圖結果_情況五

其實相平面圖的結果可以從解析解的角度進行分析，其實 eigenvalue 是可以跟解析解相互參照對應的，依據情況二的特徵方程式 $\lambda^2 + 9 = 0$ ，可得知其解析解為：

$$\text{特徵方程式: } \lambda^2 + 9 = 0 \quad (31)$$

$$\text{特徵值: } = \pm 3i \quad (32)$$

$$\text{解析解: } x = C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t) = C [\cos(3t + \theta)] \quad (33)$$

直接對解析解微分，進一步去求解解析解型態的解析軌跡線：

$$\dot{x} = -3C [\sin(3t + \theta)] \quad (34)$$

我們可以進行平方相加求得解析軌跡線(對 \dot{x} 先除 3，以方便結合)：

$$\begin{aligned} x^2 + \left(\frac{\dot{x}}{3}\right)^2 &= (C [\cos(3t + \theta)])^2 + (-C [\sin(3t + \theta)])^2 \\ \Rightarrow x^2 + \left(\frac{\dot{x}}{3}\right)^2 &= C^2 \Rightarrow \left(\frac{x}{C}\right)^2 + \left(\frac{\dot{x}}{3C}\right)^2 = 1 \end{aligned} \quad (35)$$

這個方程式就是橢圓形系的方程式，而 C 是由初始值所決定，也就是說當以不同的初值下去運算的時候，他們軌跡都會是一個橢圓形系的樣子，只是橢圓軸的長度不一樣，分別為 C 與 $3C$ ，這個我們可以從圖 13 看出來，其中 3 為特徵值的虛部，所以若初始值不同就會收斂在不同的極限圓。

圖 18 為輸入步階訊號所得到的時域圖，在一開始給予擾動就持續震盪不停，此情況也可以從根軌跡圖中觀察根皆在虛軸上，故呈現週期震盪，就如同的相平面圖那樣，來回震盪收斂於極限圓。

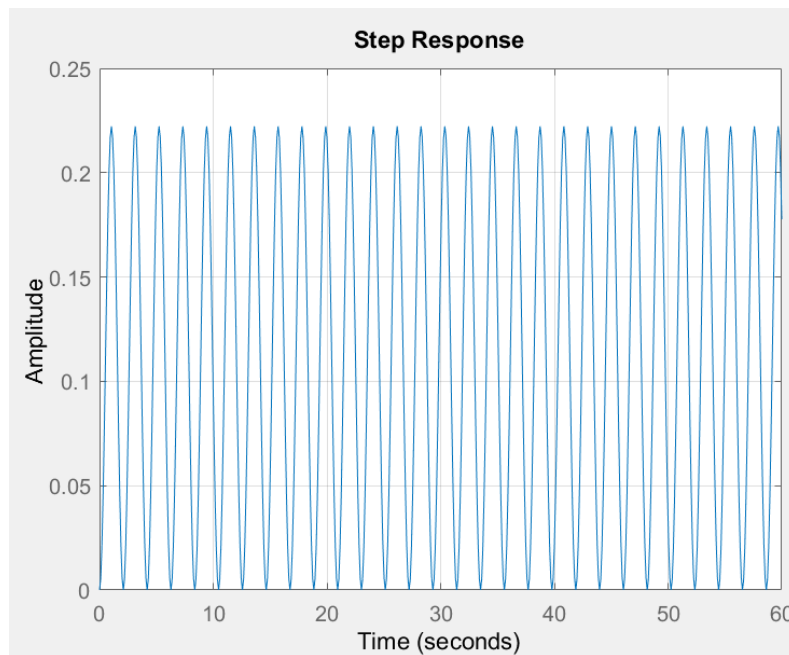


圖 18 時域圖_情況五

情況六：鞍點(saddle point)

特徵方程式的解為兩實根，一正一負，故假設特徵值 $=-3$ 、 3

$$\begin{aligned}(\lambda-3)(\lambda+3) &= \lambda^2 - 9 = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 + 9 = 0 \\ \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -9 \end{cases} \end{aligned} \quad (36)$$

將非線性的 ODE 化簡成一階的 ODE 聯立方程式，首先定義以下狀態變數(state)：

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases}, \text{ 則 } \ddot{x} - 9x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 9x_1 \end{cases} \quad (37)$$

利用 MATLAB 畫出系統的根軌跡圖、相平面圖：

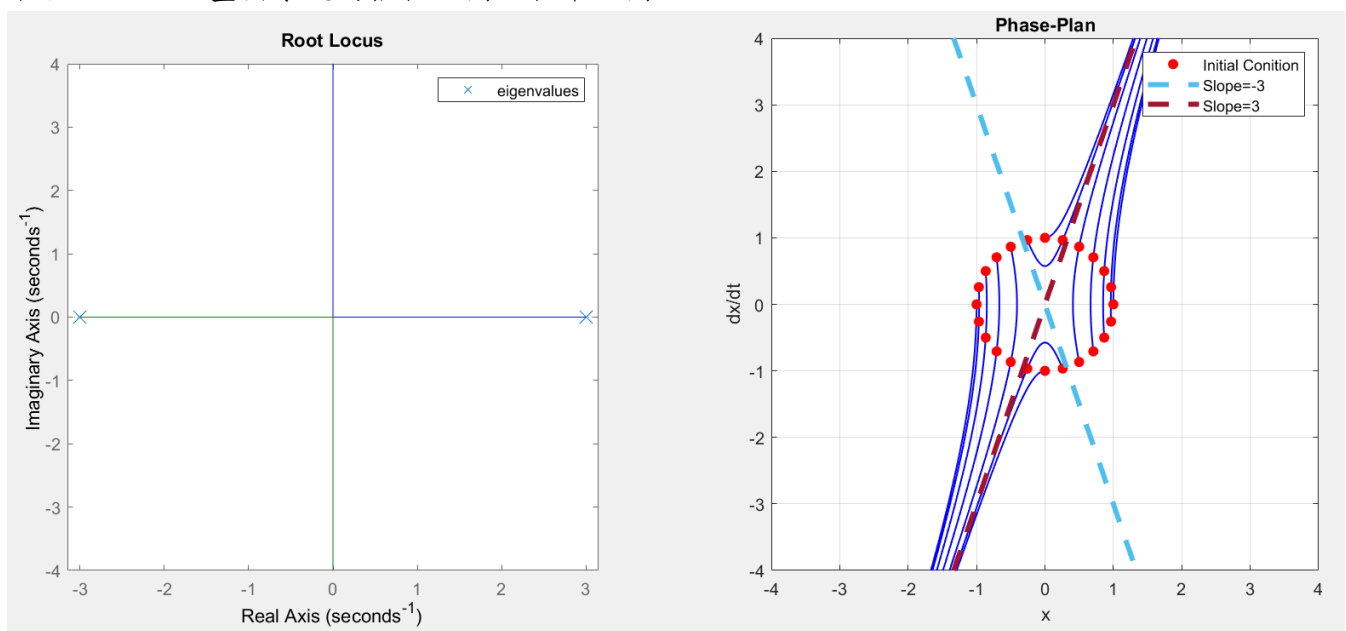


圖 19 系統的根軌跡圖、相平面圖_情況六

結果討論：

圖 19(左)為特徵值的落點，(右)為系統的相平面圖，利用指定特徵值來得出系統二階微分方程式，將其化成一階 ODE 透過 MATLAB 畫出相平面圖，並對照課本中的結果(圖 21)，初始值設定在各象限以原點為圓心的半徑為 1 的圓上(圖中的紅點)，以圖中的淺藍線與深紅線為邊界，分成四個區塊來討論，如圖 20 所示：

- (1) **橘色區域**：較靠近斜率 $=-3$ (淺藍線)的初始點會先收斂再發散，最終與其餘區域內的起始點皆以順時針方向且漸漸趨近斜率 $=3$ (深紅線)，沿著漸近線發散至無窮遠處。
- (2) **藍色區域**：較靠近斜率 $=-3$ (淺藍線)的初始點會先收斂再發散，最終與其餘區域內的起始點皆以逆時針方向且漸漸趨近斜率 $=3$ (深紅線)，沿著漸近線發散至無窮遠處。
- (3) **綠色區域**：較靠近斜率 $=-3$ (淺藍線)的初始點會先收斂再發散，最終與其餘區域內的初始點皆以順時針方向且漸漸趨近斜率 $=3$ (深紅線)，最後沿著漸近線發散至無窮遠處。

- (4) **黃色區域**：較靠近斜率 $=-3$ (淺藍線)的初始點會先收斂再發散，最終與其餘區域內的起始點皆以逆時針方向且漸漸趨近斜率 $=3$ (深紅線)，沿著漸近線發散至無窮遠處。

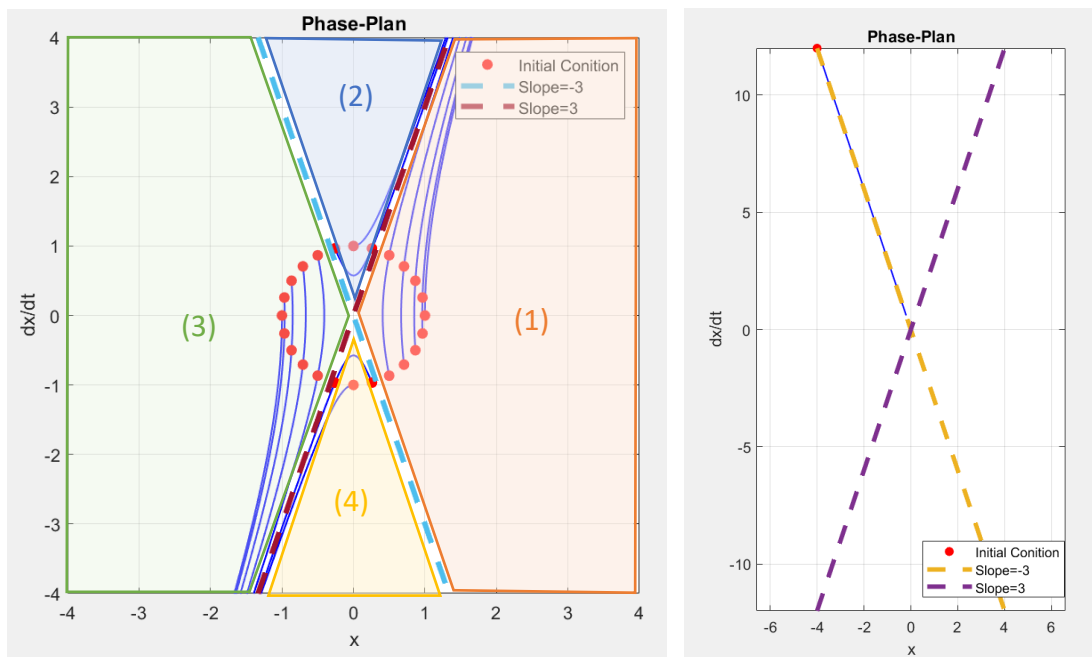


圖 20 相平面圖分析_(a)常態分佈 (b)特例

圖 20 (a)中可以發現無論初始值在哪，最終都會趨近於斜率 $=3$ (深紅線)，並沿著此漸近線發散至無窮遠處；過程中初始值較接近斜率 $=-3$ (淺藍線)的會先收斂再同其餘的初始點發散至無窮遠處，但收斂不會收斂於原點就發散了，與課本對照無誤。但在圖 20 (b)中顯示例外的初始點，如果初始點是落斜率 $=-3$ (淺藍線)上，就會直接收斂至原點，後面也可以利用解析解說明此現象。在此處只考慮區域性的不穩定，不考慮全域，在未知的全域可能會收斂在無窮遠處的某個平衡點，但這無從得知。

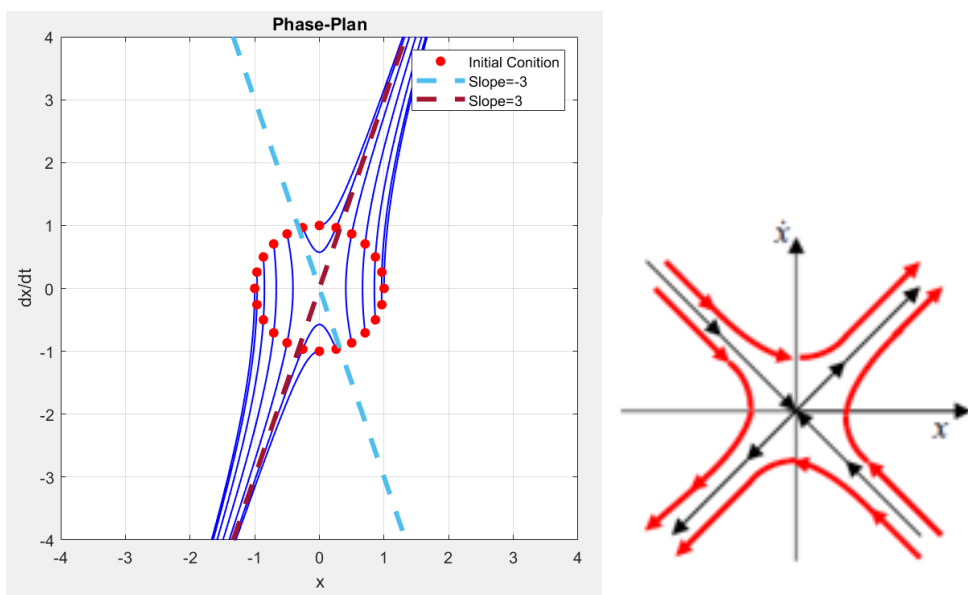


圖 21 對照課本中的相平面圖結果_情況六

其實相平面圖的結果可以從解析解的角度進行分析，其實 eigenvalue 是可以跟解析解相互參照對應的，依據情況二的特徵方程式 $\lambda^2 - 9 = 0$ ，可得知其解析解為：

$$\text{特徵方程式: } \lambda^2 - 9 = 0 \quad (38)$$

$$\text{特徵值: } = -3, 3 \quad (39)$$

$$\text{解析解: } x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t} \quad (40)$$

與情況三和情況四同理，一樣可以選定特殊初值，分別 $C_1 = 0$ 和 $C_2 = 0$ ，進一步求出兩條特殊的軌跡線：

$$\begin{cases} 3x + \dot{x} = 0, C_1 = 0 \\ -3x + \dot{x} = 0, C_2 = 0 \end{cases} \quad (41)$$

因為有 $C_1 e^{3t}$ ，所以基本上是會發散的，除非 $C_1 = 0$ 的時候，也就式 41 中的第 1 式或圖 7 的淺藍線(斜率 = -3)，我們知道 $C_2 e^{-3t}$ 發散速度比 $C_1 e^{3t}$ 慢，導致最後軌跡都會偏向 $C_2 = 0$ 的特殊軌跡線，也就是式 41 中的第 2 式，而就是圖 21 的深紅線(斜率 = 3)，一路發散至無窮遠處，除非初始值落在 $C_1 = 0$ 的特殊軌跡線(淺藍線)，才會一路沿著淺藍線收斂到 0，如圖 22 所示。

圖 22 為輸入步階訊號所得到的時域圖，在 $t=20$ 時就發散至無窮遠且無震盪，此情況也可以從根軌跡圖中觀察在右半平面有存在根(不穩定)，無虛部所以沒有震盪。

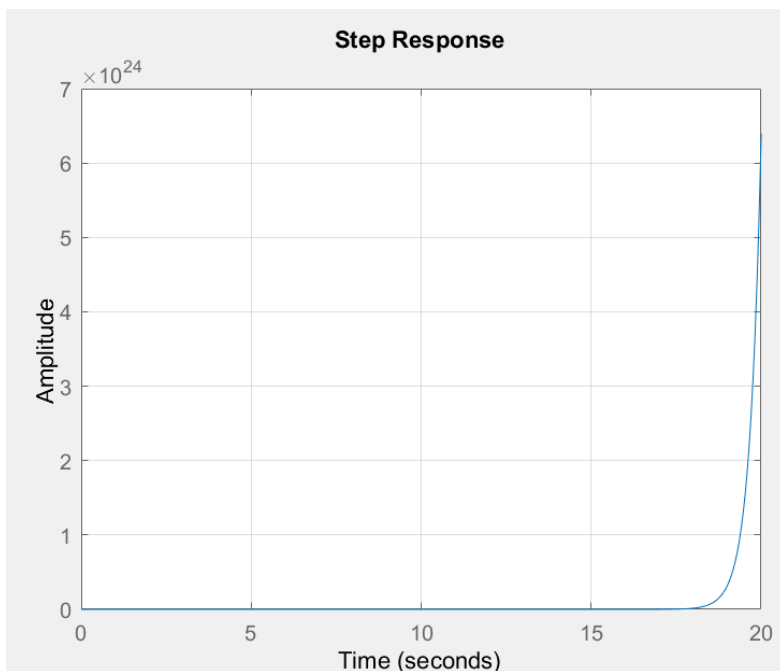


圖 22 時域圖_情況六

2.2 試以座標變換

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \text{ 和 } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \quad (42)$$

求下列三組非線性系統的解析解

$$(a) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{cases}$$

由所得到的極座標方程式預測各個系統是否存在極限圓，其穩定性如何(穩定? 半穩定? 不穩定?)。其次再以 MATLAB 分別畫出以上三組方程式的相平面軌跡圖(每個象限約取 5 個初始點)，驗證解析解的預測是否正確性。

將題目中的三組一階 ODE 聯立方程式轉換座標，求其解析解，判斷穩定性，並劃出像平面軌跡圖，驗證解析解的預測是否正確性。定義以下通式：

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \theta, x_2 = r \sin \theta \\ r = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \end{cases} \quad (43)$$

情況(a)

首先將直角座標 (x, y) 轉成極座標 (r, θ) ，並將上式用 r, θ 表示之，將 43 式代入聯立方程式得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = r \sin(\theta) + r(r^2 - 1)\cos(\theta) \\ \dot{x}_2 = -r \cos(\theta) + r(r^2 - 1)\sin(\theta) \end{cases} \quad (44)$$

將 $r = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)}$ 對時間微分得

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \Rightarrow \dot{r} = \frac{2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

$$\dot{r} = \frac{2r \cos(\theta)[r \sin(\theta) + r(r^2 - 1)\cos(\theta)] + 2r \sin(\theta)[-r \cos(\theta) + r(r^2 - 1)\sin(\theta)]}{2r}$$

$$\dot{r} = r(r^2 - 1)$$

將 $\theta = \tan^{-1}(\frac{x_2}{x_1})$ 對時間微分得

$$\theta = \arctan(\frac{x_2}{x_1}) \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\dot{x}_2 x_1 - x_2 \dot{x}_1}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\dot{\theta} = \frac{r[-r \cos(\theta) + r(r^2 - 1) \sin(\theta)] \cos(\theta) - r[r \sin(\theta) + r(r^2 - 1) \cos(\theta)] \sin(\theta)}{r^2}$$

$$\dot{\theta} = -1$$

合併兩個結果得

$$\begin{cases} \dot{r} = r(r^2 - 1) \\ \dot{\theta} = -1 \end{cases} \quad (45)$$

利用 45 式判斷穩定性：

其中 r 必大於等於 0，故 \dot{r} 的結果需要根據 $(r^2 - 1)$ 的變化來討論，即 $r < 1$ 、 $r > 1$ 、 $r = 1$

1. $r < 1$ ， \dot{r} 必然小於 0， r 減少，導致軌跡往內收斂至原點（初始點在半徑為 1 的圓內）
2. $r > 1$ ， \dot{r} 必然大於 0， r 增加，導致軌跡往外發散至無窮遠處（初始點在半徑為 1 的圓外）
3. $r = 1$ ， \dot{r} 必然等於 0， r 不變，維持在原軌跡上（初始點在半徑為 1 的圓上）

也可以對其進行解解析解，會利用到微積分中的變數轉換：

$$\text{令 } z = \frac{1}{r} \Rightarrow \dot{z} = -\frac{\dot{r}}{r^2}$$

$$\dot{r} = r(r^2 - 1) \Rightarrow -\frac{\dot{r}}{r^2} = -\frac{r^2 - 1}{r} \Rightarrow \dot{z} = -z(r^2 - 1) \Rightarrow \dot{z} = -z(r^2 - 1) = -z[(\frac{1}{z})^2 - 1] = \frac{z^2 - 1}{z}$$

$$\Rightarrow \frac{z}{z^2 - 1} dz = dt \Rightarrow \int_{z_0}^z \frac{z}{z^2 - 1} dz = \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \ln(z^2 - 1) = t + \frac{1}{2} \ln(z_0^2 - 1) \Rightarrow z^2 - 1 = e^{2t} (z_0^2 - 1) \Rightarrow z^2 - 1 = C_0 e^{2t}$$

$$\Rightarrow z^2 = 1 + C_0 e^{2t}$$

$$\Rightarrow r = (1 + C_0 e^{2t})^{-1/2} \quad \text{、} \quad C_0 = \frac{1}{r_0^2} - 1$$

$$\dot{\theta} = -1 \Rightarrow d\theta = -dt \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t -dt$$

$$\Rightarrow \theta = \theta_0 - t$$

合併兩個結果得

$$\begin{cases} r = (1 + C_0 e^{2t})^{-1/2} \quad \text{、} \quad C_0 = \frac{1}{r_0^2} - 1 \\ \theta = \theta_0 - t \end{cases} \quad (46)$$

故當 $t \rightarrow \infty$ 時， $r(t) \rightarrow 0$ ，即遠離原本軌跡，為不穩定的極限圓。

接著利用 MATLAB 驗證

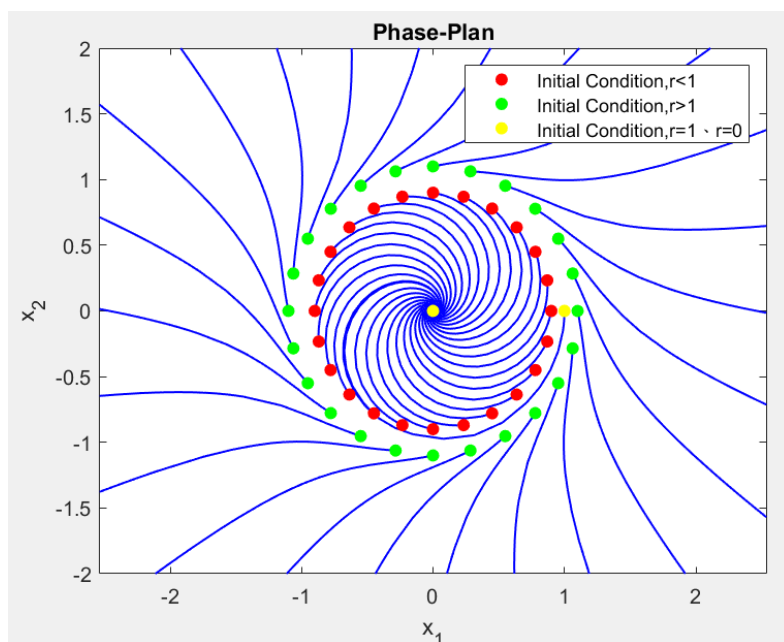


圖 23 相平面軌跡圖_情況(a)

結果討論：

圖 23 為題目中提供的一階 ODE 透過 MATLAB 所畫出的相平面圖，初始值設定在各象限以原點為圓心的圓上，其半徑以 $r=1$ 為界線分成三種情況： $r < 1$ (圖中的紅點)、 $r > 1$ (圖中的綠點)、特例 $r=1/r=0$ (圖中的黃點)。從圖中可以觀察到軌跡與上述推導公式的結果幾乎相符，當 $r < 1$ 時就會往內收斂至原點；當 $r > 1$ 時就會往外發散至無窮遠處；但在 $r=1$ 時卻和理論不相符，理論推導結果應該是維持在原軌上，不收斂也不發散($\dot{r}=0$)，故再次於 $r=1$ 附近假設初始值，並觀察其軌跡變化(如圖 24)。

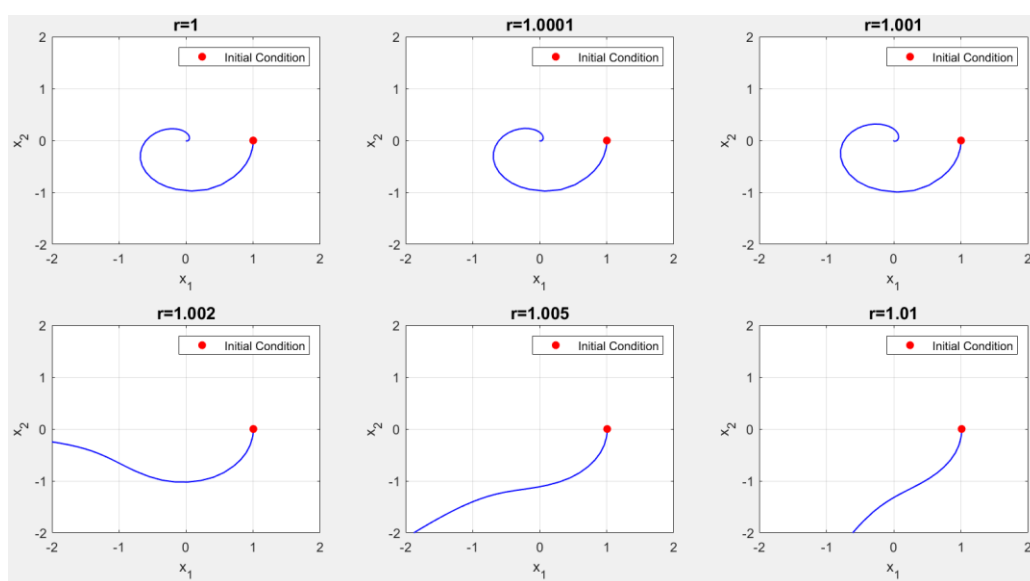


圖 24 比較情況(a)中的 $r=1$ 附近情形

可以發現 r 從 1.001 到 1.002 時軌跡發生改變，從原本收斂至原點的軌跡變成發散至無窮遠處，雖然不能確定是否為計算誤差，但可以判斷在 $r=1$ 這個理論推倒的結果是無法確定的，但僅僅是微觀的討論。在討論整體的軌跡變化，可以分類成以半徑 $r=1$ 的圓為邊界，初始點在圓內的會逐漸遠離極限圓，收斂於原點；而在圓外的也會逐漸遠離極限圓，不過是向外發散至無窮遠處，總結不論初始點在哪裡，皆是遠離極限圓，此情況稱為不穩定的極限圓。

情況(b)

首先將直角座標 (x, y) 轉成極座標 (r, θ) ，並將上式用 r, θ 表示之，將 43 式代入聯立方程式得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = r \sin(\theta) - r(r^2 - 1)^2 \cos(\theta) \\ \dot{x}_2 = -r \cos(\theta) - r(r^2 - 1)^2 \sin(\theta) \end{cases} \quad (47)$$

將 $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ 對時間微分得

$$\begin{aligned} r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} &\Rightarrow \dot{r} = \frac{2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\ \dot{r} &= \frac{2r \cos(\theta)[r \sin(\theta) - r(r^2 - 1)^2 \cos(\theta)] + 2r \sin(\theta)[-r \cos(\theta) - r(r^2 - 1)^2 \sin(\theta)]}{2r} \\ \dot{r} &= -r(r^2 - 1)^2 \end{aligned}$$

將 $\theta = \tan^{-1}(\frac{x_2}{x_1})$ 對時間微分得

$$\begin{aligned} \theta = \arctan(\frac{x_2}{x_1}) &\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\dot{x}_2 x_1 - x_2 \dot{x}_1}{x_1^2 + x_2^2} \\ \dot{\theta} &= \frac{r[-r \cos(\theta) - r(r^2 - 1)^2 \sin(\theta)] \cos(\theta) - r[r \sin(\theta) - r(r^2 - 1)^2 \cos(\theta)] \sin(\theta)}{r^2} \\ \dot{\theta} &= -1 \end{aligned}$$

合併兩個結果得

$$\begin{cases} \dot{r} = -r(r^2 - 1)^2 \\ \dot{\theta} = -1 \end{cases} \quad (48)$$

利用 48 式判斷穩定性：

其中 r 必大於等於 0，故 \dot{r} 的結果需要根據 $(r^2 - 1)$ 的變化來討論，即 $r < 1$ 、 $r > 1$ 、 $r = 1$

1. $r < 1$ ， \dot{r} 必然小於 0， r 減少，導致軌跡往內收斂至原點（初始點在半徑為 1 的圓內）
2. $r > 1$ ， \dot{r} 必然小於 0， r 減少，導致軌跡往內收斂至極限圓上（初始點在半徑為 1 的圓外）
3. $r = 1$ ， \dot{r} 必然等於 0， r 不變，維持在原軌跡上（初始點在半徑為 1 的圓上）

此外這題並沒有解析解，我們利用 MATLAB 的 symbolic toolbox 幫我們求看看解析解，以此來驗證此題沒有解析解，解出來都是 trivial solution(無意解)，代表此題並沒有解析解。

接著利用 MATLAB 驗證

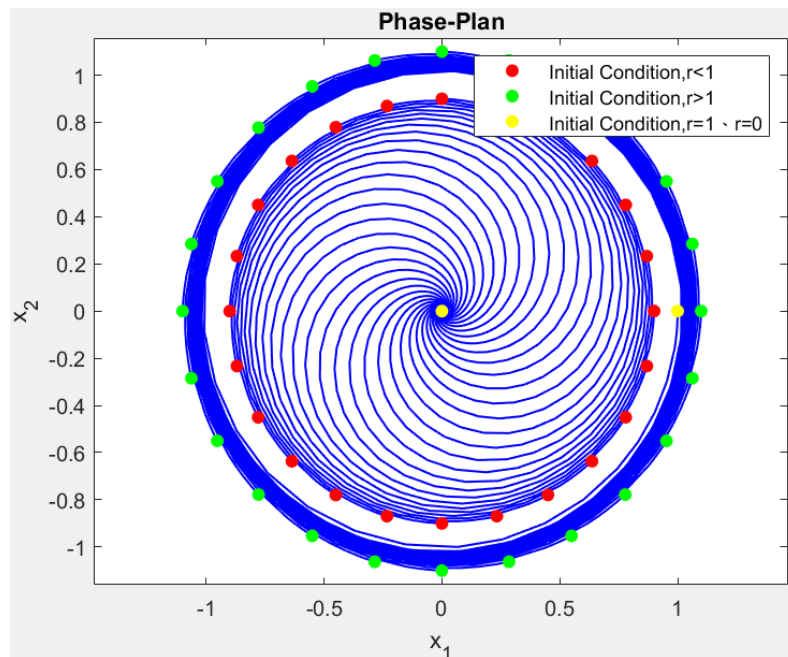


圖 25 相平面軌跡圖_情況(b)

結果討論：

圖 25 為題目中提供的一階 ODE 透過 MATLAB 所畫出的相平面圖，初始值設定在各象限以原點為圓心的圓上，其半徑以 $r=1$ 為界線分成三種情況： $r<1$ (圖中的紅點)、 $r>1$ (圖中的綠點)、特例 $r=1/r=0$ (圖中的黃點)。從圖中可以觀察到軌跡與上述推導公式的結果幾乎相符，當 $r<1$ 時就會往內收斂至原點；當 $r>1$ 時就會往內收斂至極限圓上；但在 $r=1$ 時卻和理論不相符，理論推導結果應該是維持在原軌上，不收斂也不發散($\dot{r}=0$)，故再次於 $r=1$ 附近假設初始值，並觀察其軌跡變化(如圖 26)。

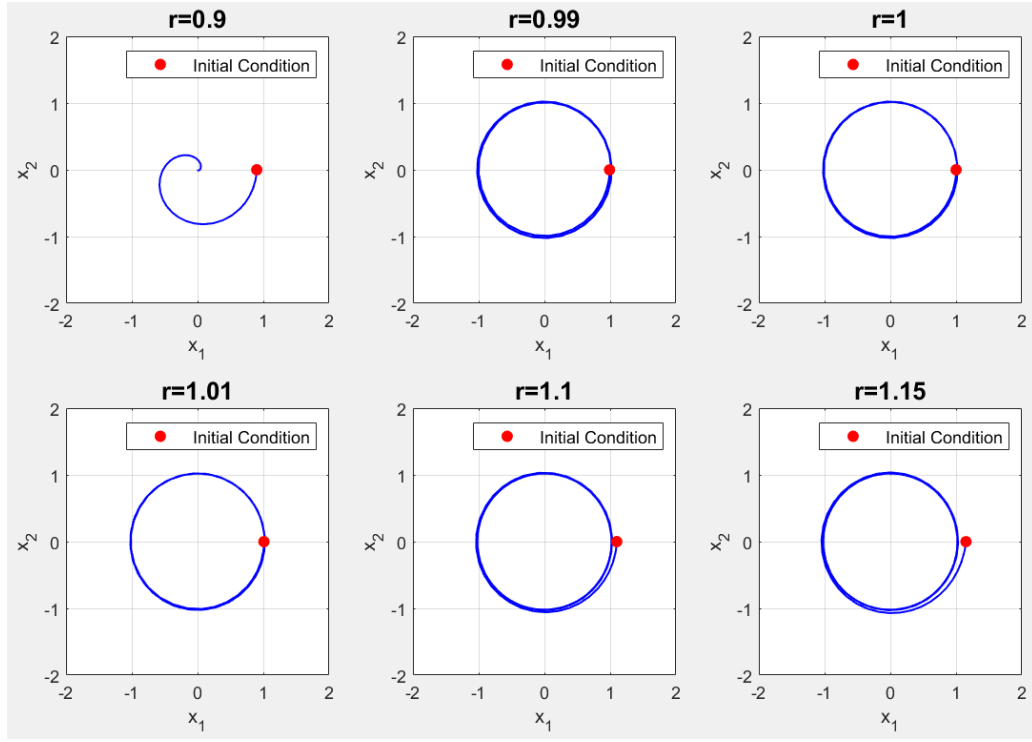


圖 26 比較情況(a)中的 $r=1$ 附近情形

可以發現當 r 從 0.9 到 0.99 時軌跡發生改變，從原本收斂至原點的軌跡變成往外收斂至極限圓上，且在 $r=1$ 或附近 $r>1$ 的初始點都會收斂於極限圓上，與公式推導的結果完全符合。在整體的軌跡變化，可以分類成以半徑 $r=1$ 的圓為邊界，初始點在圓內的會逐漸遠離極限圓，收斂於原點；而在圓外的會逐漸靠近極限圓，最終收斂於極限圓上，形成一半遠離一半靠近的軌跡結果，此情況稱為半穩定的極限圓。

情況(c)

首先將直角座標 (x, y) 轉成極座標 (r, θ) ，並將上式用 r, θ 表示之，將 43 式代入聯立方程式得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = r \sin(\theta) - r(r^2 - 1) \cos(\theta) \\ \dot{x}_2 = -r \cos(\theta) - r(r^2 - 1) \sin(\theta) \end{cases} \quad (49)$$

將 $r = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)}$ 對時間微分得

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \Rightarrow \dot{r} = \frac{2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

$$\dot{r} = \frac{2r \cos(\theta)[r \sin(\theta) - r(r^2 - 1) \cos(\theta)] + 2r \sin(\theta)[-r \cos(\theta) - r(r^2 - 1) \sin(\theta)]}{2r}$$

$$\dot{r} = -r(r^2 - 1)$$

將 $\theta = \tan^{-1}(\frac{x_2}{x_1})$ 對時間微分得

$$\theta = \arctan(\frac{x_2}{x_1}) \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\dot{x}_2 x_1 - x_2 \dot{x}_1}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\dot{\theta} = \frac{r[-r \cos(\theta) - r(r^2 - 1) \sin(\theta)] \cos(\theta) - r[r \sin(\theta) - r(r^2 - 1) \cos(\theta)] \sin(\theta)}{r^2}$$

$$\dot{\theta} = -1$$

合併兩個結果得

$$\begin{cases} \dot{r} = -r(r^2 - 1) \\ \dot{\theta} = -1 \end{cases} \quad (50)$$

利用 49 式判斷穩定性：

其中 r 必大於等於 0，故 \dot{r} 的結果需要根據 $(r^2 - 1)$ 的變化來討論，即 $r < 1$ 、 $r > 1$ 、 $r = 1$

1. $r < 1$ ， \dot{r} 必然大於 0， r 增加，導致軌跡往外發散，收斂至極限圓上（初始點在半徑為 1 的圓內）
2. $r > 1$ ， \dot{r} 必然小於 0， r 減少，導致軌跡往內收斂至極限圓上（初始點在半徑為 1 的圓外）
3. $r = 1$ ， \dot{r} 必然等於 0， r 不變，維持在原軌跡上（初始點在半徑為 1 的圓上）

也可以對其進行解解析解，會利用到微積分中的變數轉換：

$$\text{令 } z = \frac{1}{r} \Rightarrow \dot{z} = -\frac{\dot{r}}{r^2}$$

$$\dot{r} = -r(r^2 - 1) \Rightarrow -\frac{\dot{r}}{r^2} = \frac{r^2 - 1}{r} \Rightarrow \dot{z} = z(r^2 - 1) = z\left[\left(\frac{1}{z}\right)^2 - 1\right] = \frac{1 - z^2}{z}$$

$$\Rightarrow \frac{z}{1 - z^2} dz = dt \Rightarrow \int_{z_0}^z \frac{z}{1 - z^2} dz = \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \ln(1 - z^2) = t - \frac{1}{2} \ln(1 - z_0^2) \Rightarrow 1 - z^2 = e^{-2t} (1 - z_0^2) \Rightarrow z^2 = 1 + e^{-2t} (z_0^2 - 1)$$

$$\Rightarrow z^2 = 1 + C_0 e^{-2t}$$

$$\Rightarrow r = (1 + C_0 e^{-2t})^{-1/2} \quad , \quad C_0 = \frac{1}{r_0^2} - 1$$

$$\dot{\theta} = -1 \Rightarrow d\theta = -dt \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t -dt$$

$$\Rightarrow \theta = \theta_0 - t$$

合併兩個結果得

$$\begin{cases} r = (1 + C_0 e^{-2t})^{-1/2} \quad , \quad C_0 = \frac{1}{r_0^2} - 1 \\ \theta = \theta_0 - t \end{cases} \quad (51)$$

故當 $t \rightarrow \infty$ 時， $r(t) \rightarrow 1$ ，即最終皆會收斂於極限圓($r=1$)，為穩定的極限圓。

接著利用 MATLAB 驗證

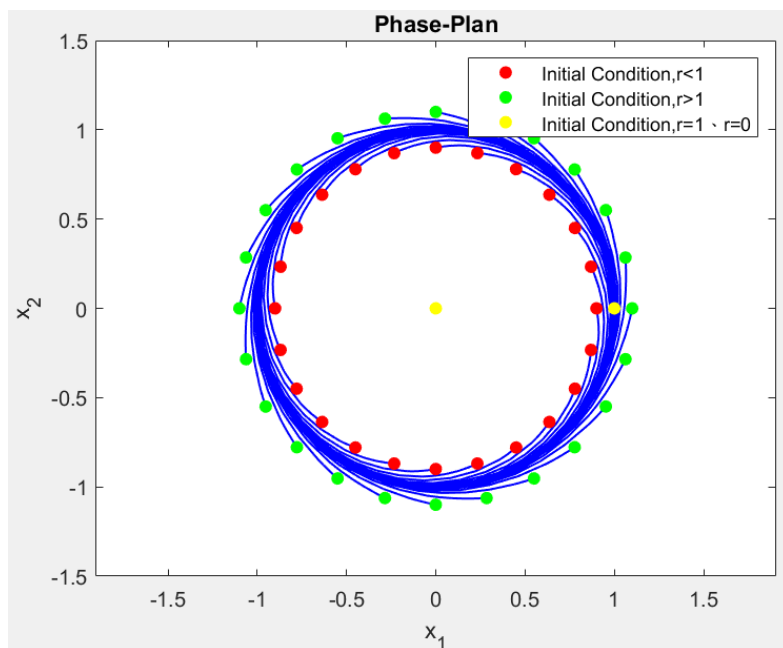


圖 27 相平面軌跡圖_情況(a)

結果討論：

從圖 27 可以觀察到軌跡與上述推導公式的結果幾乎相符，當 $r < 1$ 時就會往外發散，但收斂至極限圓上；當 $r > 1$ 時就會往內收斂至極限圓上；針對在 $r = 1$ 時較微觀，故再次於 $r = 1$ 附近假設初始值，並觀察其軌跡變化(如圖 28)。

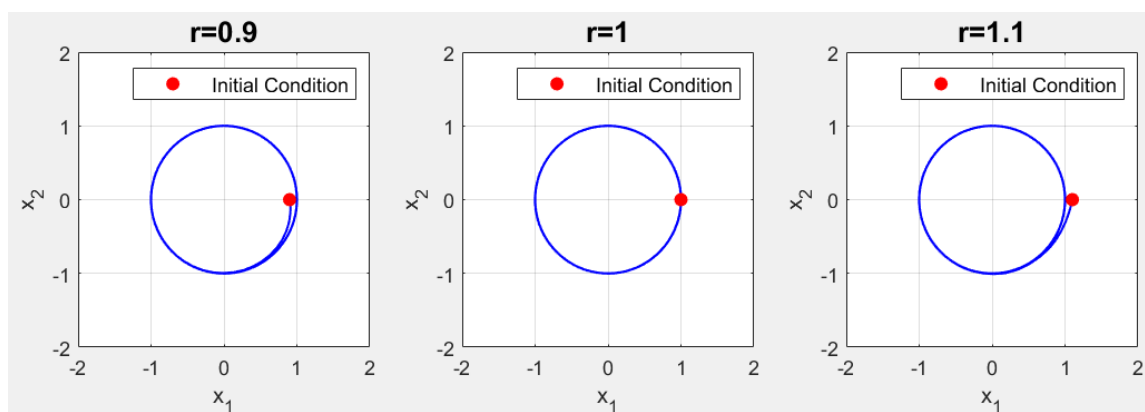


圖 28 比較情況(a)中的 $r=1$ 附近情形

可以發現在 $r = 1$ 附近的初始點最終也都收斂至極限圓上，在微觀上也符合上述公式所推導的結果。回歸討論整體的軌跡變化，不論初始點放在哪個地方，最終皆會收斂於極限圓上($r = 1$)，此情況稱為穩定的極限圓。

2.3 利用 Matlab 畫出圖 2.7.7 所示飽和系統的相平面軌跡圖，其中採用下列的參數設定： $T=1$ ， $K=4$ ， $M_0=0.2$ ， $e_0=0.2$ 。比較圖 2.7.8 的手繪圖以及圖 2.7.9 的電腦繪製圖，你所得到的軌跡圖是否與之相符？是否能得到比手繪圖更精確的結果？

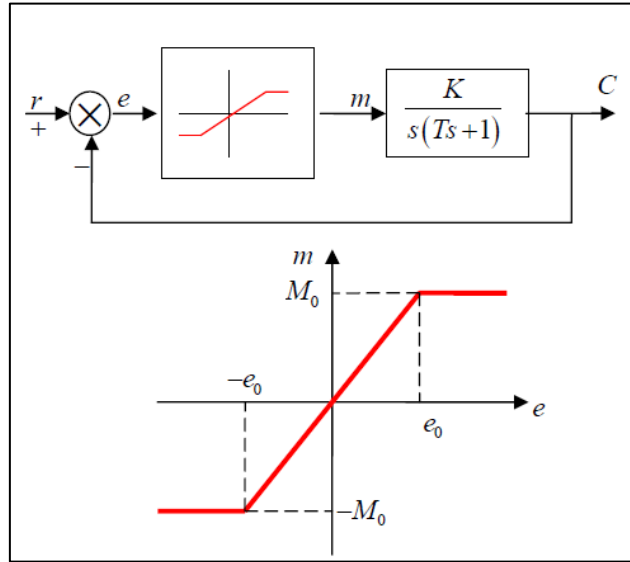


圖 29 課本範例之控制迴路圖

首先定義以下狀態變數(state)：

$$\begin{cases} e(t) = r(t) - c(t) \\ \dot{e}(t) = \dot{r}(t) - \dot{c}(t) \\ \ddot{e}(t) = \ddot{r}(t) - \ddot{c}(t) \end{cases} \quad (52)$$

計算系統外迴圈並簡化得

$$m(s) \frac{K}{s(Ts+1)} = C(s)$$

$$\Rightarrow Km(s) = s(Ts+1)C(s) \Rightarrow Km(s) = Ts^2C(s) + sC(s)$$

$$\Rightarrow Km(t) = T\ddot{c}(t) + \dot{c}(t)$$

將 51 式代入 $Km(t) = T\ddot{c}(t) + \dot{c}(t)$ 並簡化得

$$Km(t) = T\ddot{c}(t) + \dot{c}(t) \Rightarrow Km(t) = T(\ddot{r}(t) - \ddot{e}(t)) + \dot{r}(t) - \dot{e}(t)$$

$$\Rightarrow Km(t) = T(\ddot{r}(t) - \ddot{e}(t)) + \dot{r}(t) - \dot{e}(t)$$

$$\Rightarrow -T\ddot{e}(t) - \dot{e}(t) + T\ddot{r}(t) + \dot{r}(t) = Km(t)$$

由於要讓 MATLAB 幫忙畫圖，需把 ODE 全化簡成一階的 ODE 聯立方程式，定義以下狀態變數 (state)：

$$\begin{cases} x_1 = e(t) \\ x_2 = \dot{e}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{-1}{T}[Km(t) + x_2 - T\ddot{r}(t) - \dot{r}(t)] \end{cases} \quad (53)$$

根據系統的內迴圈進行討論：(模擬真實馬達運作輸出會被限制的情況)

$$\begin{cases} e > e_0, m = M_0 = 0.2 \\ -e_0 < e < e_0, m = e \\ e < -e_0, m = -M_0 = -0.2 \end{cases} \quad (54)$$

輸入步階訊號與條件：($r = \text{constant}$ ，故 $\dot{r}(t) = \ddot{r}(t) = 0$ ； $T=1$ ， $K=4$ ， $M_0=0.2$ ， $e_0=0.2$)

$$\begin{cases} x_1 = e(t) \\ x_2 = \dot{e}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{-1}{T}[Km(t) + x_2] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -[4m(t) + x_2] \end{cases} \quad (55)$$

進行 MATLAB 模擬：

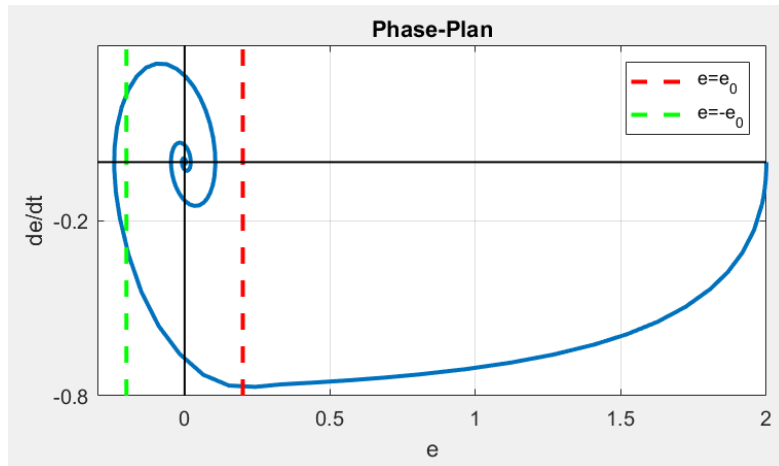


圖 30 相平面軌跡圖_MATLAB

結果討論：

將圖 30 與課本的圖 2.7.8 的手繪圖以及圖 2.7.9 的電腦繪製圖(圖 31)做比較後，整體趨勢幾乎相符，但細節的部分，由於手繪是事先將等斜率線一一畫出來，若等斜率線的數量太少就會越不準確，相對地相平面軌跡圖要越準確，線的分布就要越密集，但是手繪要畫到與電腦繪圖一樣的精細程度是十分考驗專注與細心的，所以電腦繪圖與手繪圖相較，只會更加精確。

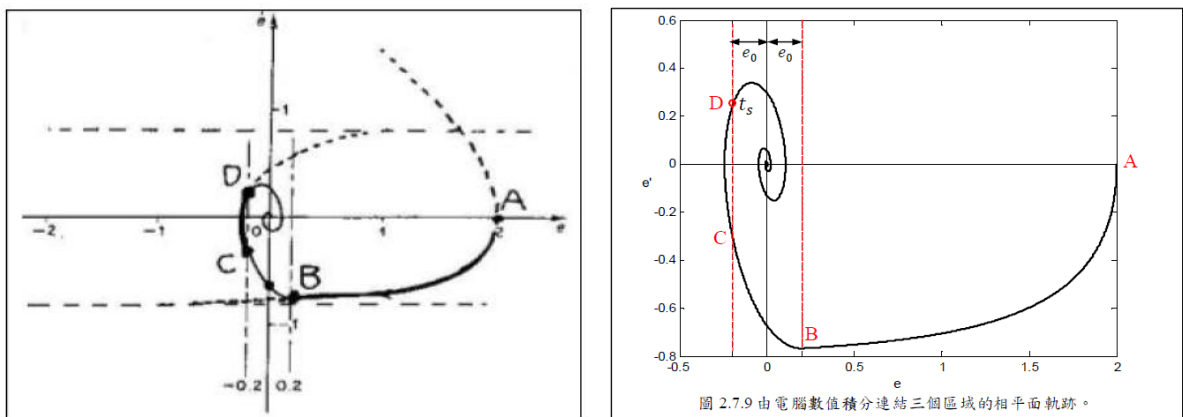


圖 31 相平面軌跡圖_課本(左)手繪圖、(右)電腦繪製圖

附錄 MATLAB 程式碼

2-1

```
%% NONLINEAR CONTROL HW2-1

clc

clear

%% initial condition

HW2_1_1=@(t,x) [x(2);-18*x(1)-6*x(2)];
HW2_1_2=@(t,x) [x(2);-18*x(1)+6*x(2)];
HW2_1_3=@(t,x) [x(2);-6*x(1)-5*x(2)];
HW2_1_4=@(t,x) [x(2);-6*x(1)+5*x(2)];
HW2_1_5=@(t,x) [x(2);-9*x(1)];
HW2_1_6=@(t,x) [x(2);9*x(1)];

r=1;
x0=[-4;12];

% x0=[1,1,-1,-1,2,2,-2,-2,3,3,-3,-3,4,4,-4,-4,6;1,-1,1,-1,2,-2,2,-2,3,-3,3,-3,4,-4,4,-4,0];

%% solve ODE & figure(Phase-Plane)

HW2_1=HW2_1_6

subplot(1,2,2)

% for i=0:15:360

%     x_temp=[r*cosd(i);r*sind(i)]
%     x0=[x0,x_temp]
% end

for i=1:size(x0,2)

    [ts,xs]=ode45(HW2_1,[0,1],x0(:,i))

    plot(xs(:,1),xs(:,2),'b','LineWidth',1)

    hold on
end

% show initial condition

p=scatter(x0(1,:),x0(2:,:), 'filled','r')

grid on

title("Phase-Plan", "FontSize",11)

xlabel("x")

ylabel("dx/dt")

% slope

% p3=plot([-1,-1;1,1],[3,2;-3,-2], '--', "LineWidth",3);      %Slope=-3", "Slope=-2
% p4=plot([-8,-8;8,8],[-24,-16;24,16], '--', "LineWidth",3);  %Slope=3", "Slope=2
% p5=plot([0,-4;0,4],[3,0;-3,0], '--', "LineWidth",3)        % axis_{1}" , "axis_{2}
p6=plot([-4,-4;4,4],[12,-12;-12,12], '--', "LineWidth",3);   %Slope=-3", "Slope=3

% legend

legend([p;p6],{ "Initial Conition", "Slope=-3", "Slope=3" })

% legend(p,{ "Initial Conition" })
```

```

%% axis equal
% axis([-4,4,-4,4])
axis equal
%% root
% initial condition
% sys_1=tf([1],[1 6 18]);x=[-3;3];y=[-3;-3]; %stable focus
% sys_2=tf([1],[1 -6 18]);x=[3;3];y=[3;-3]; %unstable focus
sys_3=tf([1],[1 5 6]);x=[-3;-2];y=[0;0]; %stable node
sys_4=tf([1],[1 -5 6]);x=[3;2];y=[0;0]; %unstable node
% sys_5=tf([1],[1 0 9]);x=[0;0];y=[3;-3]; %center
sys_6=tf([1],[1 0 -9]);x=[-3;3];y=[0;0]; %saddle point
sys=sys_6;
subplot(1,2,1)
rlocus(sys);
hold on
scatter(x(:,1),y(:,1),120,'x')
legend('','eigenvalues')
%% Time Response
figure
step(sys)
%axis equal
grid on

```

2-2

```

%% NONLINEAR CONTROL HW2-2
clc
clear
%% initial condition
% ODE
HW2_2_a=@(t,x) [x(2)+x(1)*(((x(1))^2))+((x(2))^2))-1;-x(1)+x(2)*(((x(1))^2))+((x(2))^2))-1)];
HW2_2_b=@(t,x) [x(2)-x(1)*(((x(1))^2))+((x(2))^2))-1^2);-x(1)-x(2)*(((x(1))^2))+((x(2))^2))-1^2)];
HW2_2_c=@(t,x) [x(2)-x(1)*(((x(1))^2))+((x(2))^2))-1;-x(1)-x(2)*(((x(1))^2))+((x(2))^2))-1]
% radius
r1=0.9; %case1:<1
x1=[];
r2=1.1; %case2:>1
x2=[];
x0=[0,1;0,0]; %case3:=0,=1
for i=0:15:360
    x_temp=[r1*cosd(i);r1*sind(i)]
    x1=[x1,x_temp]
end
for i=0:15:360

```

```

    x_temp=[r2*cosd(i);r2*sind(i)]
    x2=[x2,x_temp]

end

x0=[x0,x1,x2];

%% solve ODE & figure(Phase-Plane)

for i=1:size(x0,2)

    [ts,xs]=ode45(HW2_2_c,[0,60],x0(:,i))

    plot(xs(:,1),xs(:,2),'b','LineWidth',1)

    hold on

end

p1=scatter(x1(1,:),x1(2:,:), "filled", 'r')
p2=scatter(x2(1,:),x2(2:,:), "filled", 'g')
p3=scatter([0,1],[0,0], "filled", 'y')
axis([-1.5,1.5,-1.5,1.5])
axis equal
title("Phase-Plan", "FontSize",11)
xlabel("x_{1}")
ylabel("x_{2}")
legend([p1;p2;p3],{"Initial Condition,r<1","Initial Condition,r>1","Initial Condition,r=1;Br=0"})

```

2-2 $r \rightarrow 1$

```

%% NONLINEAR CONTROL HW2-2-around r=1

clc

clear

%% initial condition

% ODE

HW2_2_a=@(t,x) [x(2)+x(1)*(((x(1))^2))+((x(2))^2))-1;-x(1)+x(2)*(((x(1))^2))+((x(2))^2))-1];
HW2_2_b=@(t,x) [x(2)-x(1)*(((x(1))^2))+((x(2))^2))-1^2;-x(1)-x(2)*(((x(1))^2))+((x(2))^2))-1^2]]
HW2_2_c=@(t,x) [x(2)-x(1)*(((x(1))^2))+((x(2))^2))-1;-x(1)-x(2)*(((x(1))^2))+((x(2))^2))-1]

% radius

x0=[0.9,1,1.1;0,0,0];

% x0=[1,1.0001,1.001,1.002,1.005,1.01;0,0,0,0,0];    %case3:=0,=1,->1(around)

%% solve ODE & figure(Phase-Plane)

for i=1:size(x0,2)

    [ts,xs]=ode45(HW2_2_c,[0,60],x0(:,i))

    subplot(1,3,i)

    plot(xs(:,1),xs(:,2),'b','LineWidth',1)

    hold on

    p=scatter(x0(1,i),x0(2,i), "filled", 'r')

    axis([-2,2,-2,2])

    title(strcat('r= ',num2str(x0(1,i))), "FontSize",13)

    xlabel("x_{1}")

    ylabel("x_{2}")

```

```

        legend(p,{"Initial Condition"}, "FontSize",9)
    hold on
    grid on
end

```

2-3

```

% NONLINEAR CONTROL HW2-3

clc

clear

% initial condition
HW2_3=@(t,x) [x(2);-4*sature(x(1))-x(2)]

% solve ODE & figure(Phase-Plane)
[ts,xs]=ode45(HW2_3,[0,60],[2;0])
plot(xs(:,1),xs(:,2), "LineWidth",2)
hold on
grid on
p1=plot([0.2;0.2],[-0.8;0.4], 'r--', "LineWidth",2)
p2=plot([-0.2;-0.2],[-0.8;0.4], 'g--', "LineWidth",2)
plot([-0.3,0;2,0],[0,0.4;0,-0.8], 'k', "LineWidth",1)
title("Phase-Plan", "FontSize",11)
xlabel("e")
ylabel("de/dt")
legend([p1,p2],{"e=e_{0}", "e=-e_{0}"})
axis equal
axis([-0.3,2,-0.8,0.4])

```

2-3 function

```

%NONLINEAR CONTROL HW2-3

function u=sature(x)

if x>=0.2
    u=0.2
elseif x<0.2 & x>=-0.2
    u=x
else
    u=-0.2
end

```