非線性控制
Nonlinear Control

第四章作業

學號 : P46104285

研究生 : 楊亞勳

授課教授 : 楊憲東

Department of Aeronautics and Astronautics

National Cheng Kung University

Tainan, Taiwan, ROC

中華民國 111 年 10 月 29 日

目錄

第一題

Question:

利用 Lyapunov 直接定理分析下列非線性方程式在原點處之穩定性:

$$\dot{x}_1 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) \tag{1.1a}$$

$$\dot{x}_2 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) \tag{1.1b}$$

(a) 採用 Lyapunov $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ 函數，求出滿足 $\dot{V} < 0$ 的 $(x_1,\ x_2)$ 收斂範圍

(b) 在此範圍內選 3 個初始點，用 MATLAB 畫出相平面軌跡確認穩定性的預測。同時在確保穩定的範圍之外也任選 3 個初始點，是否由這些點出發的軌跡都為不穩定? 解釋其原因。

(c) 不同 $V(x)$ 函數所對應的收斂範圍均不同，最精確的收斂範圍必須由(1)式本身決定。透過座標轉換 $(x_1,\ x_2) \rightarrow (r,\ \theta)$，求得使得 $\dot{r} < 0$ 的 r 範圍，比較由(a)以條件 $\dot{V} < 0$ 所得到的範圍有何不同?

Answer:

(a)

根據 Lyapunov 直接穩定定理，若設 $x = 0$ 為 $\dot{x} = f(x)$ 之平衡點，D 為 $x = 0$ 之一臨域，$V: D \rightarrow R$ 在 D 上市一連續可微的函數，若 V 滿足

(1) $V(0) = 0$

(2) $D - \{0\}$，$V(x) > 0$

(3)在 D 上，$\dot{V}(x) \le 0$ 為 Lyapunov 穩定

(4) $D - \{0\}$，$\dot{V}(x) < 0$ 為漸進穩定

根據題目所提供之 Lyapunov 函數 $V(x) = x_1^2 + x_2^2$，第一項條件 $V(0) = 0$ 在 $x_1 = 0$、$x_2 = 0$ 時滿足條件。第二項條件為除了原點之外，$V(x)$ 要大於 0，題目所選擇之 Lyapunov 函數因為兩項狀態的平方相加，故也滿足此條件。為了驗證第三和第四項條件，需要將 $V(x)$ 對狀態微分並將(1.1a)和(1.1b)代入，如下:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\
&= 2x_1(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) + 2x_2(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\
&= (2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\
&= (2x_1^2 + 2x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\
&= 2(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 1)
\end{aligned} \tag{1.2}$$

由(1.2)的推導中可以得知，若要滿足 $\dot{V} < 0$ 條件，則需

$$\left(x_1^2+x_2^2-1\right)<0 \Rightarrow x_1^2+x_2^2<1 \tag{1.3}$$

由上式觀察可知，不等式左邊為一正圓方程式，此結果代表滿足$\dot{V}<0$ 的$\left(x_1,\, x_2\right)$之收斂範圍在一個圓心為圓點，半徑為 1 的正圓內，如圖 1.1 所示。這個結果代表當系統之初始值落入這個範圍內，此相平面軌跡會呈現漸進穩定。

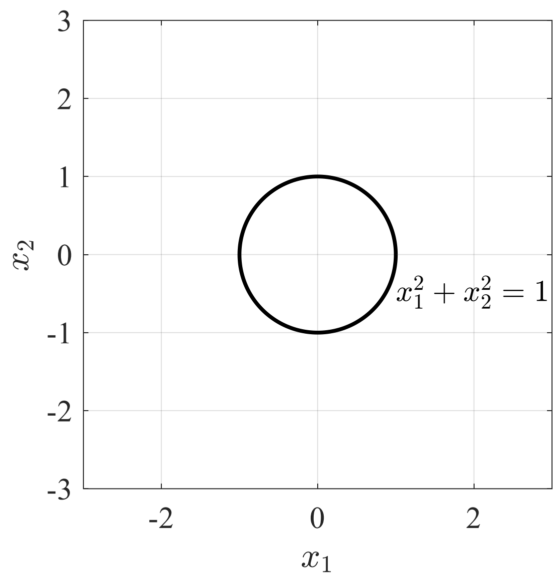

圖 1.1、$\dot{V}<0$ 之$\left(x_1,\, x_2\right)$收斂範圍

(b)

此題要分析(a)小題中使用的 Lyapunov 函數所解出來之初使值收斂範圍內外的行為。這是因為 Lyapunov 直接穩定定理為一充分條件，代表符合直接定理之 Lyapunov 函數範圍外，也就是$\mathbb{R}-D$ 範圍內的初始值，”不一定”會使系統發散。

根據(a)小題之穩定性分析，我們可以知道當系統初始值範圍滿足 $x_1^2+x_2^2<1$ 時，系統會呈現漸進穩定。而透過(1.2)推導結果觀察，當初始值範圍滿足 $x_1^2+x_2^2=1$ 時，$\dot{V}\left(x\right)=0$，因總能量不變，代表此系統既不發散，也不收斂。而當 $x_1^2+x_2^2>1$ 時，$\dot{V}\left(x\right)>0$，總能量不斷增加，代表此系統會發散。

為了印證以上推論，可利用 MATLAB 進行數值模擬。模擬方法為先選定收斂範圍內和收斂範圍外之初始值各三點，再利用 ODE45 數值求解器計算並繪製出相平面圖，結果如圖 1.2 所示。收斂範圍內之初始值$\left(x_1\left(0\right),\, x_2\left(0\right)\right)$選定為$\left(0.5,0.5\right)$、$\left(-0.5,0.5\right)$和$\left(0,-0.707\right)$，此三點皆滿足 $x_1^2+x_2^2<1$，呈現出之相平面軌跡為途中紅色軌跡。從初始值釋放後，此軌跡以穩定震盪的方式進入原點收斂，此推論和(a)小題中相符。收斂範圍外之初始值$\left(x_1\left(0\right),\, x_2\left(0\right)\right)$選定為$\left(1.1,1.1\right)$、$\left(-1.1,1.1\right)$和

$(0,-1.556)$，此三點不滿足 $x_1^2+x_2^2<1$，呈現出之相平面軌跡為途中藍色軌跡。從初始值釋放後，此軌跡向外發散，因初始值條件不滿足 Lyapunov 直接定理所推導出之收斂範圍。由上述分析可知，Lyapunov 直接定理之推導結果和模擬結果相符。

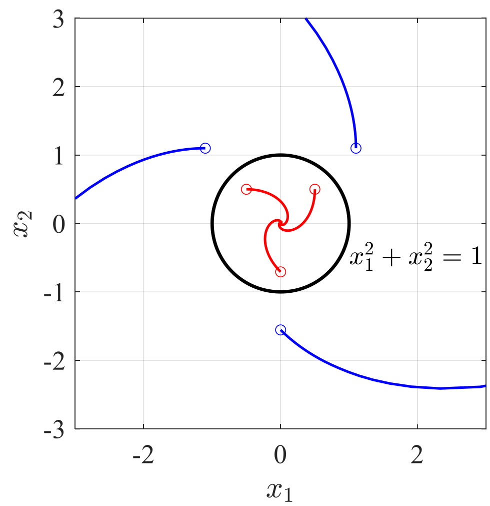

圖 1.2、收斂範圍內和收斂範圍外初始值之相平面軌跡

(c)

此題需要將(1.1a)和(1.1b)非線性方程式轉換為極座標表示法。直角坐標表示式如下:

$$r=\sqrt{x_1^2+x_2^2} \tag{1.4}$$

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \tag{1.5}$$

其中 r 恆大於 0。若將(1.4)和(1.5)對時間微分，則得到式(1.6)和(1.7)，如下:

$$\dot{r}=\frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2\right) \tag{1.6}$$

$$\dot{\theta}=\left(1+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2\right)^{-1}\left(\frac{\dot{x}_2x_1-x_2\dot{x}_1}{x_1^2}\right) \tag{1.7}$$

此時再將式(1.1a)和(1.1b)帶入式(1.6)和式(1.7)中，如下

$$
\begin{aligned}
\dot{r} &= \frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right)^{\frac{-1}{2}}\left(2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right)^{\frac{-1}{2}}\left(2x_1\left(\left(x_1-x_2\right)\left(x_1^2+x_2^2-1\right)\right)+2x_2\left(\left(x_1+x_2\right)\left(x_1^2+x_2^2-1\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right)^{\frac{-1}{2}}\left(2\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(x_1^2+x_2^2-1\right)\right) \quad \left(\text{For } r = x_1^2+x_2^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(r^2\right)^{\frac{-1}{2}}\left(2r^2\left(r^2-1\right)\right) \\
&= r\left(r^2-1\right)
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\theta} &= \left(1+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2\right)^{-1}\left(\frac{\dot{x}_2x_1-x_2\dot{x}_1}{x_1^2}\right) \\
&= \left(x_1^2+x_2^2\right)^{-1}\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(x_1^2+x_2^2-1\right) \\
&= r^{-2}r^2\left(r^2-1\right) \\
&= r^2-1
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

由上述推導可知此非線性系統經由座標轉換後，在極座標下的表示法為:

$$
\begin{cases}
\dot{r} = r\left(r^2-1\right) \\
\dot{\theta} = r^2-1
\end{cases}
\tag{1.10}
$$

由(1.10)觀察可知，若此系統要收斂，則須滿足條件 $\dot{r}<0$ 。若此條件要滿足，則需 $r^2-1<0$ ，也就是 $r^2<-1$ 。此範圍和(a)小題所得到之收斂範圍一模一樣。由此可知，座標系統的轉換並不會影響非線性系統的穩定性。

第二題

Question:

利用可變梯度法求下列非線性系統的 Lyapunov 函數

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^2 x_2,\ \ \dot{x}_2 = -x_2 \tag{2.1}$$

假設V的梯度可表成

$$\nabla V = \left[a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ \ a_{21}x_1 + 2x_2\right]$$

不同的係數a_{ij}可得到不同的 Lyapunov 函數V。考慮下列二種不同的a_{ij}選擇，分別求得對應的 Lyapunov 函數V，並求出其可確保穩定的區域範圍:

(a) $a_{11} = 1,\ \ a_{21} = a_{12} = 0$

(b) $a_{11} = \dfrac{2}{\left(1 - x_1 x_2\right)^2},\ a_{12} = \dfrac{-x_1^2}{\left(1 - x_1 x_2\right)^2},\ a_{21} = \dfrac{x_1^2}{\left(1 - x_1 x_2\right)^2}$

(c) 系統(3)可穩定的範圍是以上二個範圍的交集或聯集?在保證穩定的範圍內選幾個初始點，以 MATLAB 求解(3)式，證實平衡點為穩定；在穩定範圍之外也選幾個初始點，MATLAB 求解所得之相平面軌跡是否必為發散?

Answer:

可變梯度法為一有系統化之尋找 Lyapunov 函數的方法。其核心概念為求得 Lyapunov 函數後，利用調整梯度函數之係數來獲得符合直接穩定定理之函數。假設$V(x)$唯一非時變系統$\dot{x} = f(x)$之 Lyapunov 函數，則其對時間之為分為:

$$\dot{V} = (\nabla V)\dot{x} = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial V}{\partial x_n}\right]\dot{x} \tag{2.2}$$

其中$\nabla V = \left[\dfrac{\partial V}{\partial x_1},\dfrac{\partial V}{\partial x_2},\ldots,\dfrac{\partial V}{\partial x_n}\right]$且內部每一分量可以表示成$\nabla V_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$，$a_{ij}$為可調整之常數或是$x_j$之函數。調整係數使的此梯度函數滿足

(1) $V(0) = 0,\ V(x) > 0,\ \forall x \in D - \{0\}$

(2) $\dot{V} < 0,\ \forall x \in D - \{0\}$

(3) $\dfrac{\partial(\nabla V_i)}{\partial x_j} = \dfrac{\partial(\nabla V_j)}{\partial x_i},\ i, j = 1, 2, \ldots n$

若上述條件皆滿足，則可利用線積分求得此系統之 Lyapunov 函數

$$\begin{aligned} V(x) &= \int_0^x \nabla V dx = \int_0^{x_1^0} \nabla V_1(x_1, 0, \ldots, 0)dx_1 + \int_0^{x_2^0} \nabla V_2\left(x_1^0, x_2, \ldots, 0\right)dx_2 \\ &\quad + \ldots + \int_0^{x^0} \nabla V_1\left(x_1^0, x_m^0, \ldots, x_n\right)dx_1 \end{aligned} \tag{2.3}$$

(a)

針對(2.1)，若選擇 $a_{11}=1$ 、 $a_{12}=a_{21}=0$ ，則所設定之 Lyapunov 梯度函數為 $\nabla V=\left[x_1\ 2x_2\right]$ 。在開始檢驗此梯度函數所求得之穩定性前，需要檢驗此梯度函數係數是否合理。這需要先檢驗上述第三個條件，如下

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \nabla V_1}{\partial x_2}=\dfrac{\partial x_1}{\partial x_2}=0 \\ \dfrac{\partial \nabla V_2}{\partial x_1}=\dfrac{\partial 2x_2}{\partial x_1}=0 \end{cases} \Rightarrow \ \frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_2}=\frac{\partial \nabla V_2}{\partial x_1} \tag{2.4}$$

上式確保了此係數選擇確保 ∇V 為一梯度函數。確認為梯度函數後，可先求 Lyapunov 候選函數對時間的導數，其中 $\nabla V_1=x_1$ ，$\nabla V_2=2x_2$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \nabla V\dot{x}=\left[\nabla V_1\ \nabla V_2\right]\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\left[x_1 \quad 2x_2\right]\begin{bmatrix}-x_1+2x_1^2x_2\\ -x_2\end{bmatrix} \\ &=-x_1^2+2x_1^3x_2-2x_2^2=-2x_2^2-x_1^2\left(1-2x_1x_2\right) \end{aligned} \tag{2.5}$$

由(2.5)分析，若要 $\dot{V}<0$ ，則需 $1-2x_1x_2>0$ ，此時 $V\left(x\right)$ 可用線積分求得

$$\begin{aligned} V\left(x\right) &= \int_0^x \nabla V dx=\int_0^{x_1}\nabla V_1 dx_1+\int_0^{x_2}\nabla V_2 dx_2 \\ &=\int_0^{x_1} x_1 dx_1+\int_0^{x_2} 2x_2 dx_2 \\ &=\frac{1}{2}x_1^2+x_2^2>0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

於(2.6)的結果可知，可得到一 Lyapunov 函數滿足 $V\left(0\right)=0,\ V\left(x\right)>0,\ \forall x\in D-\left\{0\right\}$ ，且(2.5)則提供在 $D_1=\left\{\left(x_1,x_2\right)|1-2x_1x_2>0\right\}$ 的範圍下，$\dot{V}<0$ ；在這些條件下，$V\left(x\right)$ 為一可使得系統平衡點為漸進穩定之 Lyapunov 函數。

(b)

針對(2.1)，若選擇 $a_{11}=\dfrac{2}{\left(1-x_1x_2\right)^2},\ a_{12}=\dfrac{-x_1^2}{\left(1-x_1x_2\right)^2},\ a_{21}=\dfrac{x_1^2}{\left(1-x_1x_2\right)^2}$ ，則所設定之 Lyapunov 梯度函數為 $\nabla V=\left[\dfrac{2x_1}{\left(1-x_1x_2\right)^2}+\dfrac{-x_1^2x_2}{\left(1-x_1x_2\right)^2} \quad \dfrac{x_1^3}{\left(1-x_1x_2\right)^2}+2x_2\right]$ 。在開始檢驗此梯度函數所求得之穩定性前，需要檢驗此梯度函數係數是否合理。這需要先檢驗上述第三個條件，如下

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \nabla V_1}{\partial x_2} = \dfrac{\partial\left(\dfrac{2x_1}{\left(1-x_1x_2\right)^2}+\dfrac{-x_1^2x_2}{\left(1-x_1x_2\right)^2}\right)}{\partial x_2} = \dfrac{3x_1^2-4x_1^3x_2+x_1^4x_2^2}{\left(1-x_1x_2\right)^4} \\ \dfrac{\partial \nabla V_2}{\partial x_1} = \dfrac{\partial\left(\dfrac{x_1^3}{\left(1-x_1x_2\right)^2}+2x_2\right)}{\partial x_1} = \dfrac{3x_1^2-4x_1^3x_2+x_1^4x_2^2}{\left(1-x_1x_2\right)^4} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \nabla V_2}{\partial x_1} \qquad (2.7)$$

上式確保了此係數選擇確保∇V為一梯度函數。確認為梯度函數後，可先求 Lyapunov 候選函數對時間的導數，其中$\nabla V_1 = \dfrac{2x_1}{\left(1-x_1x_2\right)^2}+\dfrac{-x_1^2x_2}{\left(1-x_1x_2\right)^2}$ ，$\nabla V_2 = \dfrac{x_1^3}{\left(1-x_1x_2\right)^2}+2x_2$

$$\begin{aligned} \dot{V} = \nabla V\dot{x} &= \begin{bmatrix} \dfrac{2x_1}{\left(1-x_1x_2\right)^2}+\dfrac{-x_1^2x_2}{\left(1-x_1x_2\right)^2} & \dfrac{x_1^3}{\left(1-x_1x_2\right)^2}+2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{2x_1-x_1^2x_2}{\left(1-x_1x_2\right)^2}+ & \dfrac{x_1^3}{\left(1-x_1x_2\right)^2}+2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1+2x_1^2x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{-2x_1^2+4x_1^3x_2-2x_1^4x_2^2}{\left(1-x_1x_2\right)^2}-2x_2^2 \\ &= -2x_2^2-\frac{2x_1^2\left(1-2x_1x_2+x_1^2x_2^2\right)}{\left(1-x_1x_2\right)^2} \\ &= -2x_2^2-\frac{2x_1^2\left(1-x_1x_2\right)^2}{\left(1-x_1x_2\right)^2} \\ &= -2\left(x_1^2+x_2^2\right)<0,\ \forall x \neq 0 \end{aligned} \qquad (2.8)$$

由(2.8)分析，已知可保證$\dot{V}<0$，此時$V\left(x\right)$可用線積分求得

$$\begin{aligned} V\left(x\right) &= \int_0^x \nabla V dx = \int_0^{x_1} \nabla V_1 dx_1 + \int_0^{x_2} \nabla V_2 dx_2 \\ &= \int_0^{x_1} \frac{2x_1}{\left(1-x_1x_2\right)^2}+\frac{-x_1^2x_2}{\left(1-x_1x_2\right)^2}\Big|_{x_2=0} dx_1 + \int_0^{x_2} \frac{x_1^3}{\left(1-x_1x_2\right)^2}+2x_2dx_2 \\ &= \int_0^{x_1} 2x_1dx_1 + \int_0^{x_2} \frac{x_1^3}{\left(1-x_1x_2\right)^2}+2x_2dx_2 \\ &= x_1^2+\frac{x_1^2}{1-x_1x_2}-x_1^2+x_2^2 \\ &= \frac{x_1^2}{1-x_1x_2}+x_2^2 \end{aligned} \qquad (2.9)$$

於(2.9)的結果可知，此函數若要滿足 $V(0)=0,\ V(x)>0,\ \forall x\in D-\{0\}$，則此系統之初始值範圍必須滿足 $1-x_1x_2>0$。令 $D_2=\{(x_1,x_2)|1-x_1x_2>0\}$，在此條件滿足下，則此 Lyapunov 函數滿足 $V(0)=0,\ V(x)>0,\ \forall x\in D-\{0\}$，$\dot{V}<0,\ \forall x\in D-\{0\}$，$V(x)$ 唯一可使得系統平衡點為漸進穩定的 Lyapunov 函數。

(c) 0

透過(a)、(b)兩小題的推導，可以知道選擇不同的 Lyapunov 函數，所推論出的初始值收斂範圍會不相同。(a)小題所得到的結論為當 $D_1=\{(x_1,x_2)|1-2x_1x_2>0\}$ 時，系統會以漸進穩定的方式收斂到平衡點。而(b)小題所得到之結論為當 $D_2=\{(x_1,x_2)|1-x_1x_2>0\}$ 時，系統也會以漸進穩定的方式收斂到平衡點。為了驗證不同的 Lyapunov 函數所造成的不同收斂範圍會市聯集還是交集。我們將區域分為四組。

(1) $(x_1,x_2)\in D_1\cap D_2$

(2) $(x_1,x_2)\in D_2-D_1$

(3) $(x_1,x_2)\notin D_1\cup D_2$

以上範圍可如圖 2.1 所示。(1)所代表的範圍為(a)和(b)小題所求出之範圍取交集，代表圖 2.1 中綠色之區域。(2)所表示之區域為符合(b)小題之收斂範圍，但不包括(a)小題之收斂範圍。若是初始值在(1)和(2)範圍接收斂，就代表 Lyapunov 函數之收斂範圍為聯集，若是聯集，就驗證了 Lyapunov 穩定定理唯一充分條件。(3)的範圍則不在(a)和(b)之收斂範圍內。

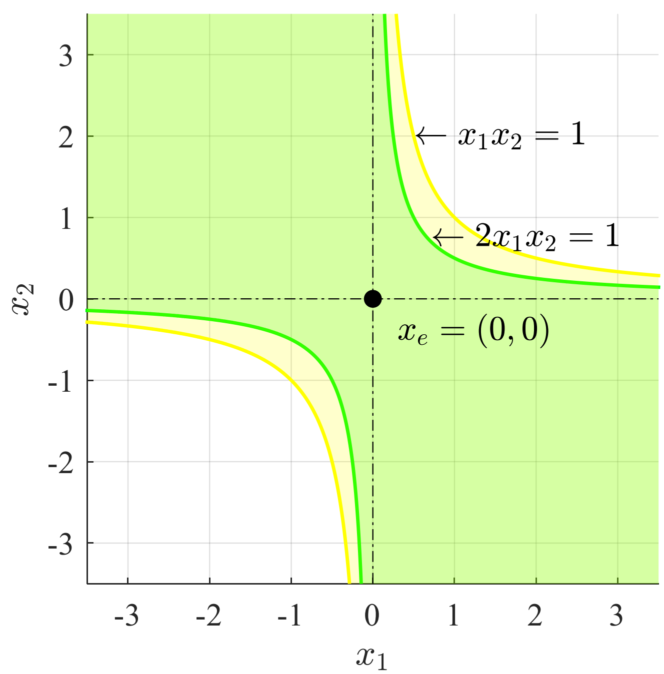

圖 2.1、相平面上不同的收斂範圍

圖 2.2 為利用 MATLAB 模擬之結果。將結果分為四組:

(1) 藍色線為符合$\left(x_1, x_2\right) \in D_1 \cap D_2$範圍之初始值。從圖中觀察可以得知，在四個象限的初始值接收斂到原點，呈現漸進穩定。這也符合前面的推論，在交集的收斂範圍內，所有初始值為漸進穩定。

(2) 紅色線為符合$\left(x_1, x_2\right) \in D_2 - D_1$範圍之初始值。從圖中觀察可知，此範圍內之初始值所計算之相平面軌跡也呈現漸進穩定，收斂到原點。因此範圍只滿足(a)小題之收斂範圍，但也呈現漸進穩定，這代表 Lyapunov 函數之收斂範圍為聯集，也驗證了 Lyapunov 直接穩定定理為一充分條件。

(3) 粉色線為符合$\left(x_1, x_2\right) \notin D_1 \cup D_2$範圍之初始值。由圖中觀察可知，此範圍之初始值會使系統發散，呈現不穩定。但因 Lyapunov 直接定理唯一充分條件，我們無法下結論令$\left(x_1, x_2\right) \notin D_1 \cup D_2$範圍內之所有初始值皆會使系統發散。

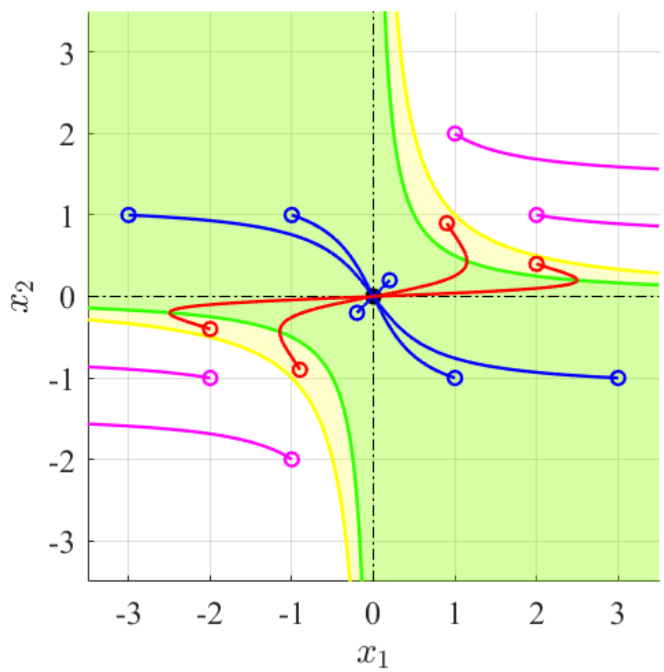

圖 2.2、不同初始值對應不同收斂範圍之像平面軌跡圖

綜上所述，系統(2.1)之可穩定範圍是以上二個範圍聯集，且在穩定範圍之所得之相平面軌跡為發散，但這或許是來自我們沒有挑選到由其他 Lyapunov 函數所計算出之收斂範圍之初始值。

第三題

<u>Question:</u>

考慮一個二階非線性系統

$$\dot{x}_1 = -\frac{6x_1}{\left(1+x_1^2\right)^2} + 2x_2,\quad \dot{x}_2 = \frac{-2\left(x_1+x_2\right)}{\left(1+x_1^2\right)^2} \tag{3.1}$$

本題是要測試(4)式相對於原點是否為全域穩定。

(a) 若 $V\left(x\right)=\dfrac{x_1^2}{1+x_1^2}+x_2^2$ ，證明 $V\left(x\right)>0$ ，$\dot{V}\left(x\right)<0$ ，$\forall x\in\Re^2-\left\{0\right\}$ 。亦即原點為漸近穩定。

(b) 測試 $V\left(x\right)$ 是否滿足 radially unbounded 條件(參考講義 4.4 節)?也就是當 x 離原點無窮遠時，$V\left(x\right)$ 的值是否也必定趨近於無窮大?

(c) 畫出 $V\left(x\right)$ 的等高線圖(令 $V\left(x\right)$=不同的常數值，從大排到小，取約 10 個數值)，並以此等高線圖為背景，畫出該系統的相平面軌跡。證明從某些點出發的相平面軌跡，其切割等高線圖的方式雖然滿足 $\dot{V}(x)<0$ 的條件，然而這些軌跡最後卻不進入平衡點，亦即此系統不為全域漸近穩定(參照講義的圖 4.4.2)。從數值上求出該 系統可保證漸近穩定的初始值範圍。

<u>Answer:</u>

全域穩定定理，又稱作 Barbashin-Krasovskii 定理:設 $x=0$ 為 $\dot{x}=f\left(x\right)$ 之平衡點，且 $V\left(x\right):R^n\rightarrow R$ 是一連續可微函數，且滿足下列三條件:

(1) $V\left(0\right)=0$ 且 $V\left(x\right)>0$，$\forall x\neq 0$

(2) $\left\|x\right\|\rightarrow\infty\Rightarrow V\left(x\right)\rightarrow\infty$

(3) $\dot{V}\left(x\right)<0$，$\forall x\neq 0$

則 $x=0$ 為全域漸進穩定。

(a)

此題需要證明題目所定之 Lyapunov 函數是否會使二階非線性系統相對於原點為全域穩定，而 $V\left(x\right)=x_1^2/1+x_1^2+x_2^2$。觀察當 x_1 和 x_2 皆為 0 時，$V\left(0\right)=0$。且當 x_1 和 x_2 皆為非 0 實數時，$V\left(x\right)>0$。接著將 Lyapunov 函數對時間做一次導數，並將(3.1)代入，如下:

$$\begin{aligned}\dot{V}\left(x\right)&=\frac{2x_1\left(1+x_1^2\right)}{\left(1+x_1^2\right)^2}\dot{x}_1-\frac{2x_1^3}{\left(1+x_1^2\right)^2}\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2\\&=\frac{2x_1}{\left(1+x_1^2\right)^2}\left[-\frac{6x_1}{\left(1+x_1^2\right)^2}+2x_2\right]+2x_2\left[\frac{-2\left(x_1+x_2\right)}{\left(1+x_1^2\right)^2}\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-12x_1^2}{\left(1+x_1^2\right)^4} + \frac{4x_1x_2}{\left(1+x_1^2\right)^2} + \frac{-4x_2\left(x_1+x_2\right)}{\left(1+x_1^2\right)^2} \\
&= \frac{-12x_1^2}{\left(1+x_1^2\right)^4} - \frac{4x_2^2}{\left(1+x_1^2\right)^2}
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

根據(3.2)推導結果，當$\left(x_1,x_2\right)\neq\left(0,0\right)$時，$\dot{V}\left(x\right)$恆小於 0。但是當$\left(x_1,x_2\right)=\left(0,0\right)$時，$\dot{V}\left(x\right)=0$。這代表此 Lyapunov 函數滿足$V\left(x\right)>0$，$\dot{V}\left(x\right)<0$，$\forall x\in\Re^2-\left\{0\right\}$的條件。代表此系統之原點為一穩定的平衡點，且呈現漸進穩定收斂。

(b)

若是滿足$V\left(x\right)$放射狀無界條件(radially unbounded)條件，用數學方式表達如下:

$$\left\|x\right\|\to\infty\Rightarrow V\left(x\right)\to\infty \tag{3.3}$$

而此題所給定之 Lyapunov 函數為

$$V\left(x\right)=\frac{x_1^2}{1+x_1^2}+x_2^2 \tag{3.4}$$

觀察(3.4)式，當$x_1\to\infty$時，$V\left(x\right)\to 1+x_2^2$。因當其中一狀態變數趨近於無限大時，Lyapunov 函數並未趨近於無限大，代表此函數不滿足 growth condition。當x離原點無窮遠時，$V\left(x\right)$的值並不趨近於無窮大。這代表(a)所討論之平衡點僅為局部漸進穩定，而非全域漸進穩定。

(c)

當$\left\|x\right\|\to\infty\Rightarrow V\left(x\right)\to\infty$時，這個條件被稱為 growth condition。一個平衡點若是 Lyapunov 穩定，且$V\left(x\right)$又滿足 growth condition 時，則此平衡點的穩定為全域穩定。growth condition 的滿足可保證$V\left(x\right)=C$(常數)是代表環繞平衡點的封閉曲線，和$V\left(x\right)=C$曲線呈現層狀結構，即若$C_1<C_2$，必有$\left\{x\,|\,V\left(x\right)\le C_1\right\}\subset\left\{x\,|\,V\left(x\right)\le C_2\right\}$。但是此題所選之 Lyapunov 函數，利用不同的常數代入，分別為$V\left(x\right)=6$、$V\left(x\right)=5$、$V\left(x\right)=4$、$V\left(x\right)=3$、$V\left(x\right)=2$、$V\left(x\right)=1.5$、$V\left(x\right)=1$、$V\left(x\right)=0.9$、$V\left(x\right)=0.7$、$V\left(x\right)=0.2$。用 MATLAB 模擬的結果如圖 3.1 所示。觀察圖中可以發現，只有當$V\left(x\right)<1$時，會滿足以上兩個條件。而圖 3.2 為代入 30 點不同初始值所得到之相平面軌跡。由(3.2)式可以知道，除了原點之外，$\dot{V}\left(x\right)<0$，故原點為漸進穩定。但是此題提供之 Lyapunov 函數並不滿足 growth condition，因此無法確定此漸進穩定是否為全域性。由圖 3.2 中觀察，部分初始值會使像平面軌跡收斂至原點，有些卻不會，這代表 Lyapunov 穩定定理只是一充分條件。用單一 Lyapunov 函數並無法斷定

此系統所有的收斂範圍。這也告訴我們 Lyapunov 函數選擇的重要性，多選擇幾個 Lyapunov 函數進行收斂範圍的分析會較為全面。

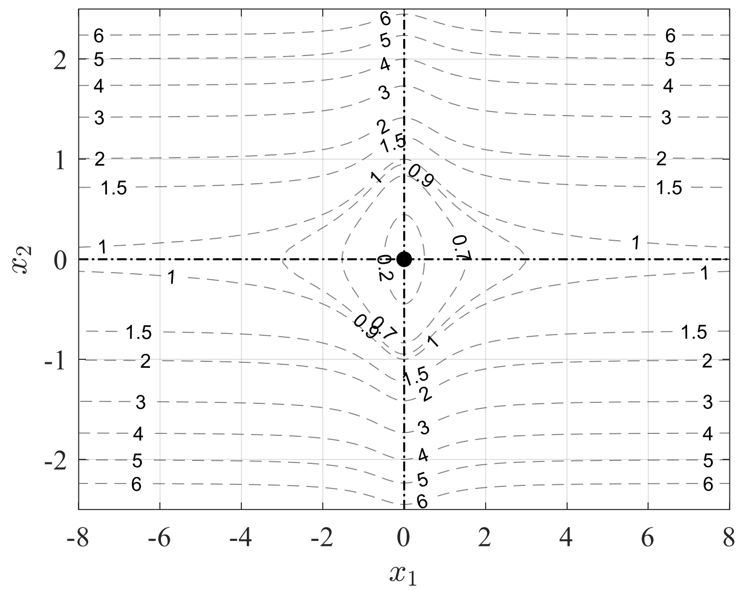

圖 3.1、$V(x)$= 不同常數之等高線圖

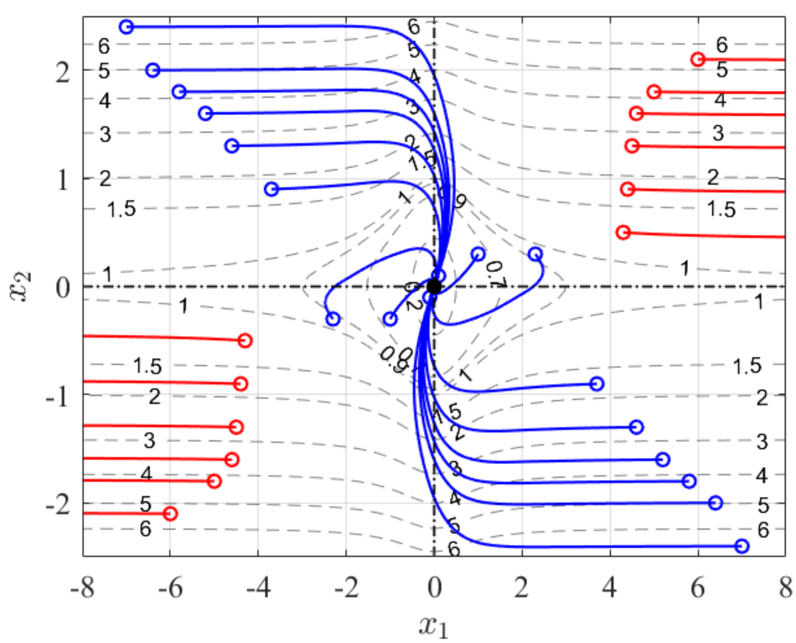

圖 3.1、不同初始值之相平面軌跡

MATLAB Code
第一題

```
%% Nolinear Control HW4_1
clc;
clear;
close all;

%% Initial Parameter
dt=0.01;
t_final=100;
t=0:dt:t_final;
LW=1.5;
FS_ax=16.5;

%% Plot V_dot range
figure(1)
r=1;
rad=0:pi/100:2*pi;
x_circle=r*cos(rad);
y_circle=r*sin(rad);
plot(x_circle,y_circle, 'k', 'LineWidth', 2)
hold on

%%
c1=[0.5 0.5; -0.5 0.5; 0 -sqrt(2*0.5^2)];
for i=1:size(c1,1)
   [t1, y1]=ode45(@nonlinear, t, c1(i,:));
   plot(y1(:,1),y1(:,2), 'r', 'LineWidth', LW)
   hold on
   plot(y1(1,1), y1(1,2), 'ro')
   hold on
end

c2=[1.1 1.1; -1.1 1.1; 0 -sqrt(2*1.1^2)];
for i=1:size(c2,1)
   [t2, y2]=ode45(@nonlinear, t, c2(i,:));
   plot(y2(:,1),y2(:,2), 'b', 'LineWidth', LW)
   hold on
   plot(y2(1,1), y2(1,2), 'bo')
   hold on
end
xlabel('$x_1$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$x_2$', 'interpreter', 'latex')
text(1,-0.5,'$x_1^2+x_2^2 = 1$','Interpreter','latex','FontSize',16,'Color','k') ;
```

```
ax(1)=gca;
axis equal
set(ax(1), 'XLim', [-3 3], 'YLim', [-3 3])
grid on

%%
for i=1:length(ax)
    set(ax(i),'FontSize',FS_ax, 'FontName','Times New Roman')
end

%% Nonlinear differential equation
function dfdt=nonlinear(t, f)
x1=f(1);
x2=f(2);
del_x1=(x1-x2)*(x1^2+x2^2-1);
del_x2=(x1+x2)*(x1^2+x2^2-1);
dfdt=[del_x1, del_x2]';
end
```

第二題

```
%% Nolinear Control HW4_2
clc;
clear;
close all;

%% Initial Parameter
t_final=100;
dt=0.01;
t=0:dt:t_final;
LW = 1.4 ;
FS_ax = 14.5 ;

%% Convergence Region
% (a)
x_CR1_p=0.01:0.01:5;
y_CR1_p=1./(2*x_CR1_p);
x_CR1_n=-0.01:-0.01:-5;
y_CR1_n=1./(2*x_CR1_n);
x_CR1=[x_CR1_p,x_CR1_n];
y_CR1=[y_CR1_p,y_CR1_n];
patch(x_CR1,y_CR1,'g','linewidth',1.5,'facecolor','g','edgecolor','g','facealpha',0.2) ;
hold on
% (b)
x_CR2_p=0.01:0.01:5;
y_CR2_p=1./(x_CR2_p);
x_CR2_n=-0.01:-0.01:-5;
y_CR2_n=1./(x_CR2_n);
```

```
x_CR2=[x_CR2_p,x_CR2_n];
y_CR2=[y_CR2_p,y_CR2_n];
patch(x_CR2,y_CR2,'y','linewidth',1.5,'facecolor','y','edgecolor','y','facealpha',0.2) ;
hold on
plot([-5 5],[0 0],'k-.') ;
plot([0 0],[-5 5],'k-.') ;
plot(0,0,'k.','MarkerSize',25) ;
text(0.3,-0.4,'$x_e = (0,0)$','Interpreter','latex','FontSize',15,'Color','k') ;
text(0.5,2,'$\leftarrow x_1x_2=1$','Interpreter','latex','FontSize',15,'Color','k');
text(0.71,0.75,'$\leftarrow 2x_1x_2=1$','Interpreter','latex','FontSize',15,'Color','k');

%% Plot
c=[1 -1; 0.2 0.2;-0.2 -0.2;-1 1;3 -1;-3 1;0.9 0.9;-0.9 -0.9;2 0.4;-2 -0.4;-1 -2;-2 -1;1 2;2 1];
x_c = ['b','b','b','b','b','b','r','r','r','r','m','m','m','m'] ;
x_mc = ['bo';'bo';'bo';'bo';'bo';'bo';'ro';'ro';'ro';'ro';'mo';'mo';'mo';'mo'] ;
for i = 1:size(c,1)
 [ t , X ] = ode45(@Nonlinear_func,t,c(i,:)) ;
 plot(X(:,1),X(:,2),x_c(i),'LineWidth',LW)
 plot(X(1,1),X(1,2),x_mc(i,:),'LineWidth',LW)
end
axis equal
xlabel('$x_1$','Interpreter','Latex')
ylabel('$x_2$','Interpreter','Latex')
axis([-3.5 3.5 -3.5 3.5])
grid on
ax(1) = gca ;
for i = 1:length(ax)
 set(ax(i),'FontSize',FS_ax,'FontName','Times New Roman')
end
xticks(-3:1:3)
function dX = Nonlinear_func(t,X)
 x1 = X(1) ;
 x2 = X(2) ;
 dx1 = -x1 + 2*(x1^2)*x2 ;
 dx2 = -x2 ;
 dX = [ dx1 ; dx2 ] ;
end
```

第三題

```
%% Nolinear Control HW4_3
clc;
clear;
close all;

%% Initial Parameter
LW = 1.3;
```

```
FS_ax = 14.5;
t_final=100;
dt=0.01;
t=0:dt:t_final;
%% Contour Map
x_ax = linspace(-8,8,240) ;
y_ax = linspace(-3,3,90) ;
[X_ax,Y_ax] = meshgrid(x_ax,y_ax) ;
V_xy = X_ax.^2./(1+X_ax.^2) + Y_ax.^2 ;
f(1) = figure() ;
contour(X_ax,Y_ax,V_xy,[0.2,0.7,0.9,1,1.5,2,3,4,5,6],'--','LineColor',[0.5 0.5
0.5],'ShowText','on');
hold on
%%
c=[0.1 0.1;-0.1 -0.1;1 0.3;-1 -0.3;2.3 0.3;-2.3 -0.3;4.3 0.5;-4.3 -0.5;-3.7 0.9;3.7 -0.9;-4.6
1.3;4.6 -1.3;-5.2 1.6;5.2 -1.6;-5.8 1.8;5.8 -1.8;-6.4 2;6.4 -2;-7 2.4;7 -2.4;4.4 0.9;-4.4 -0.9;4.5
1.3;-4.5 -1.3; 4.6 1.6; -4.6 -1.6;5 1.8;-5 -1.8;6 2.1;-6 -2.1];
x_c = ['b','b','b','b','b','b','r','r','b','b','b','b','b','b','b','b','b','b','b','b','r','r','r','r','r','r','r','r','r','r'] ;
x_mc =
['bo';'bo';'bo';'bo';'bo';'bo';'ro';'ro';'bo';'bo';'bo';'bo';'bo';'bo';'bo';'bo';'bo';'bo';'bo';'bo';'ro';'ro';'ro';'r
o';'ro';'ro';'ro';'ro';'ro';'ro'] ;
for i = 1:size(c,1)
[t,X]=ode45(@Nonlinear_func,t,c(i,:));
 plot(X(:,1),X(:,2),x_c(i),'LineWidth',LW)
 plot(X(1,1),X(1,2),x_mc(i,:),'LineWidth',LW)
 hold on
end
plot([-8 8],[0 0],'k-.','LineWidth',1) ;
plot([0 0],[-8 8],'k-.','LineWidth',1) ;
plot(0,0,'k.','MarkerSize',25) ;
xlabel('$x_1$','Interpreter','Latex') % x label
ylabel('$x_2$','Interpreter','Latex') % y label
axis([-8 8 -2.5 2.5])
grid on
ax(1) = gca ;
for i = 1:length(ax)
 set(ax(i),'FontSize',FS_ax,'FontName','Times New Roman','box','on')
end
function dX = Nonlinear_func(t,X)
 x1=X(1);
 x2=X(2);
 dx1=-6*x1/((1+x1^2)^2) + 2*x2;
 dx2=-2*(x1+x2)/((1+x1^2)^2);
 dX=[ dx1 ; dx2 ];
end
```