非線性控制
Nonlinear Control

第二章作業

學號 : P46104285

研究生 : 楊亞勳

授課教授 : 楊憲東

Department of Aeronautics and Astronautics

National Cheng Kung University

Tainan, Taiwan, ROC

中華民國 111 年 10 月 8 日

目錄

第一題

Question:

考慮(2.4.3)式，選取 6 種不同的(a, b)值，使得特徵方程式 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ 所求得到的 2 個特徵值的位置剛好對應到圖 2.4.1 的 6 種情形。針對這 6 種不同的(a, b)值，畫出(2.4.3)式的相平面軌跡，並比較圖 2.4.1 的軌跡，驗證所得結果的正確性。

Answer:

此題要探討的是對非線性系統平衡點附近的相軌跡。由二皆非線性系統開始

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \tag{1.1}$$

透過泰勒級數展開後，將高階項捨取後可得一線性化系統

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 \\ \dot{x}_2 = b_1 x_1 + b_2 x_2 \end{cases} \tag{1.2}$$

此系統若轉換為矩陣之形式後可得

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

由此系統之系統矩陣可取得此系統之特徵方程式

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{1.4}$$

由不同的 (a,b) 值，可得不同的特徵值

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2} \end{aligned} \tag{1.5}$$

而根據不同的特徵值，系統會有不同的相平面軌跡。表 1.1 整理出 6 種情形所對應之特徵值和 (a,b) 值。

表 1.1、不同情形所對應之系統參數和特徵值

	(a,b)	(λ_1,λ_2)
穩定焦點 (Stable focus)	$(2,5)$	$(-1+2i,-1-2i)$
不穩定焦點 (Unstable focus)	$(-2,5)$	$(1+2i,1-2i)$
不穩定焦點 (Unstable focus)	$(4,3)$	$(-3,-1)$
穩定節點 (Stable node)	$(-4,3)$	$(3,1)$
中心點 (Center)	$(0,3)$	$(1.73i,-1.73i)$
鞍點 (Saddle point)	$(3,-4)$	$(-4,1)$

1. 穩定焦點 (Stable focus)

此情形的系統參數為 $(a,b)=(2,5)$ 、特徵值為 $(\lambda_1,\lambda_2)=(-1+2i,-1-2i)$。圖 1.1 為此參數下複數平面圖，根的形式為共軛複數根，實部為負。初始值之設定為 $(x,\dot{x})=(-1,-1)$ 開始， 以 0.2 為變化量，使用兩個迴圈至 $(x,\dot{x})=(1,1)$ 為止。圖 1.2 為此設定下之相平面圖，圖中橫軸為 x，縱軸為 $\dot{x}$。由圖中觀察可知，不管初始值之位置為何，軌跡到最後都會以螺旋狀的趨勢趨於原點，而螺旋狀震盪發生的原因可尤其根的位置得知，因跟有負實部，damping ratio 為小於一的實數，故其解會產生震盪現象。此種平衡點被稱為穩定焦點(Stable focus)。

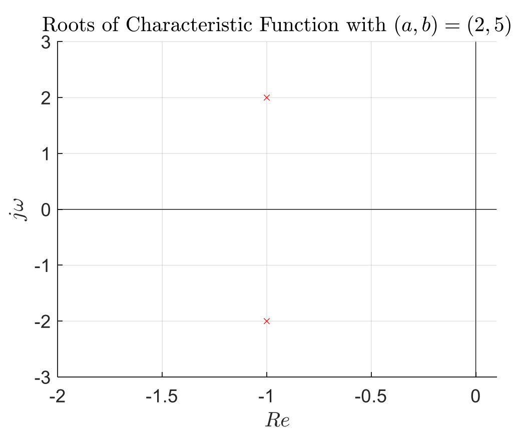


圖 1.1、穩定焦點 (Stable focus)之特徵值在複數平面上的位置

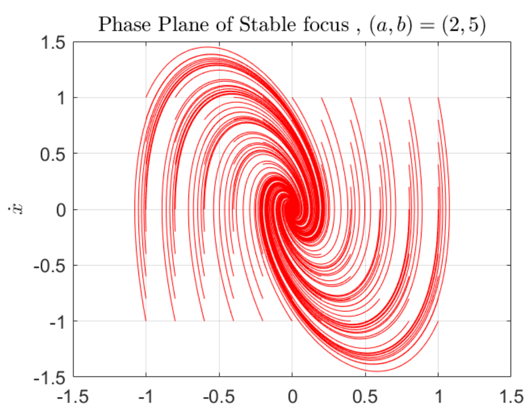


圖 1.2、穩定焦點 (Stable focus)之相平面軌跡

2. 不穩定焦點 (Unstable focus)

此情形的系統參數為 $(a,b)=(-2,5)$ 、特徵值為 $(\lambda_1,\lambda_2)=(1+2i,1-2i)$。圖 1.3 為此參數下複數平面圖，根的形式為共軛複數根，實部為正。初始值之設定為 $(x,\dot{x})=(-1,-1)$ 開始， 以 0.2 為變化量，使用兩個迴圈至 $(x,\dot{x})=(1,1)$ 為止。圖 1.4 為此設定下之相平面圖，圖中橫軸為 x，縱軸為 $\dot{x}$。由圖中觀察可知，不管初始值之位置為何，軌跡皆會以螺旋狀的方式向外發散，產生震盪的原因和上述穩定焦點相同，這種情形之平衡點被稱作不穩定焦點 (Unstable focus)。

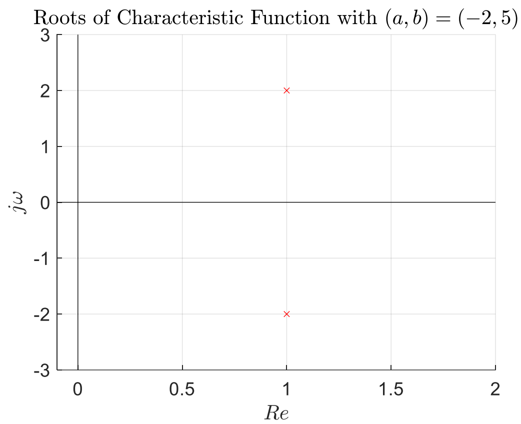


圖 1.3、不穩定焦點 (Unstable focus)之特徵值在複數平面上的位置

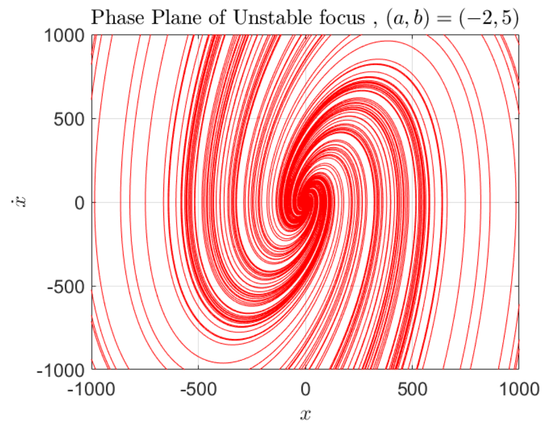
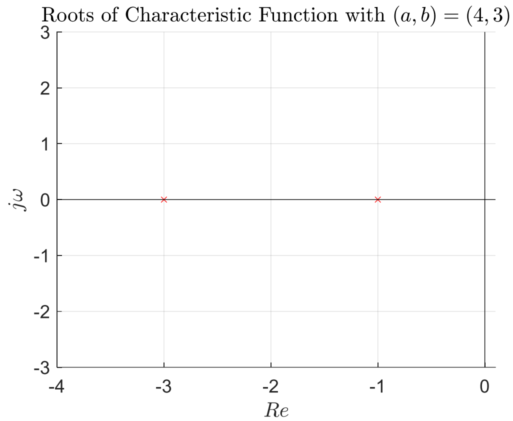


圖 1.4、不穩定焦點 (Unstable focus)之相平面軌跡

3. 穩定節點 (Stable node)

此情形的系統參數為 $(a,b)=(4,3)$ 、特徵值為 $(\lambda_1,\lambda_2)=(-3,-1)$。圖 1.5 為此參數下複數平面圖，根的形式皆為負實數。初始值之設定為 $(x,\dot{x})=(-1,-1)$ 開始， 以 0.2 為變化量，使用兩個迴圈至 $(x,\dot{x})=(1,1)$ 為止。圖 1.6 為此設定下之相平面圖，圖中橫軸為 x，縱軸為 $\dot{x}$。由圖中觀察可知，每個初始位置之軌跡，不會像焦點般有螺旋狀 (震盪)的方式收斂於原點，，此種平衡點被稱作穩定節點 (Stable node)。



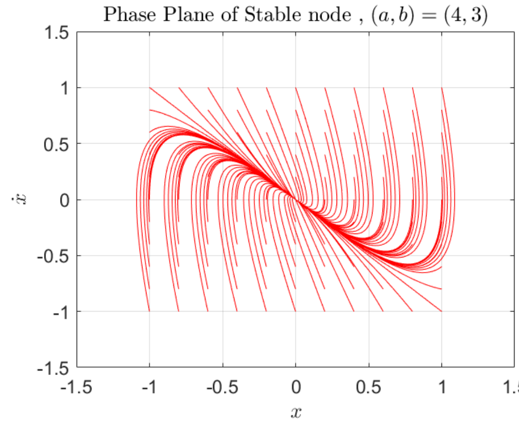
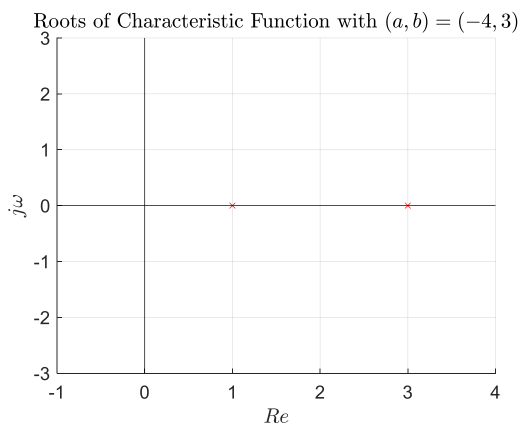


圖 1.5、穩定節點 (Stable node)之特徵值在複數平面上的位置

圖 1.6、穩定節點 (Stable node)之相平面軌跡

4. 不穩定節點 (Unstable node)

此情形的系統參數為 $(a,b)=(-4,3)$ 、特徵值為 $(\lambda_1,\lambda_2)=(3,1)$。圖 1.7 為此參數下複數平面圖，根的形式皆為正實數。初始值之設定為 $(x,\dot{x})=(-1,-1)$ 開始， 以 0.2 為變化量，使用兩個迴圈至 $(x,\dot{x})=(1,1)$ 為止。圖 1.8 為此設定下之相平面圖，圖中橫軸為 x，縱軸為 $\dot{x}$。由圖中觀察可知，各個初始值之軌跡會直接向外發散，沒有震盪的現象，這種平衡點被稱作不穩定節點 (Unstable node)。



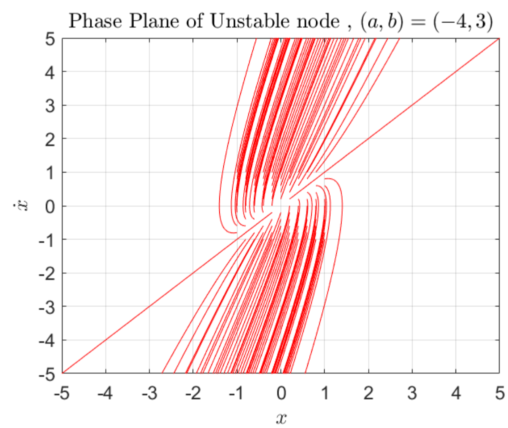


圖 1.7、不穩定節點 (Unstable node)之特徵值在複數平面上的位置

圖 1.8、不穩定節點 (Unstable node)之相平面軌跡

5. 中心點 (Center)

此情形的系統參數為 $(a,b)=(0,3)$ 、特徵值為 $(\lambda_1,\lambda_2)=(1.73i,-1.73i)$ 。圖 1.9 為此參數下複數平面圖，根的形式為虛軸上之共軛負根。初始值之設定為 $(x,\dot{x})=(-1,-1)$ 開始， 以 0.2 為變化量，使用兩個迴圈至 $(x,\dot{x})=(1,1)$ 為止。圖 1.10 為此設定下之相平面圖，圖中橫軸為 x ，縱軸為 $\dot{x}$ 。由圖中觀察可知，此種根的形式會使相平面軌跡不發散也不收斂，而是圍繞著原點旋轉，此種平衡點被稱作中心點 (Center)。

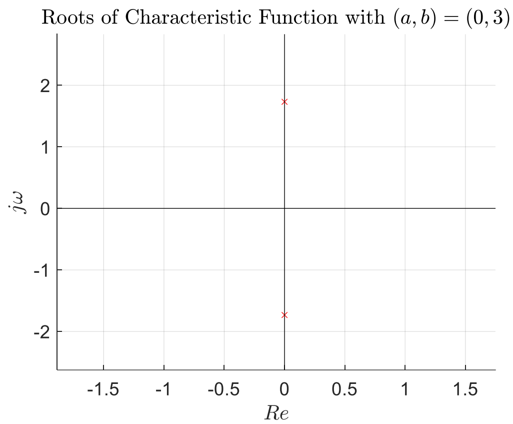


圖 1.9、中心點 (Center)之特徵值在複數平面上的位置

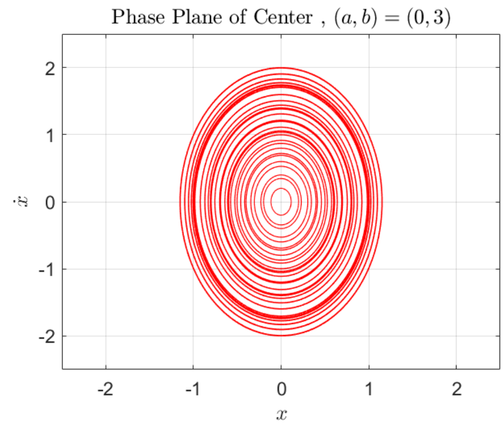


圖 1.10、中心點 (Center)之相平面軌跡

6. 鞍點 (Saddle point)

此情形的系統參數為 $(a,b)=(3,-4)$ 、特徵值為 $(\lambda_1,\lambda_2)=(-4,1)$ 。圖 1.11 為此參數下複數平面圖，根的形式為二實根，一正一負。初始值之設定為 $(x,\dot{x})=(-1,-1)$ 開始，以 0.2 為變化量，使用兩個迴圈至 $(x,\dot{x})=(1,1)$ 為止。圖 1.12 為此設定下之相平面圖，圖中橫軸為 x ，縱軸為 $\dot{x}$ 。由圖中觀察可知，此種平衡點一開始會有收斂到原點之趨勢，但當過了某個未知臨界值後，相平面軌跡會直接向外發散，此種平衡點被稱作鞍點 (Saddle point)。

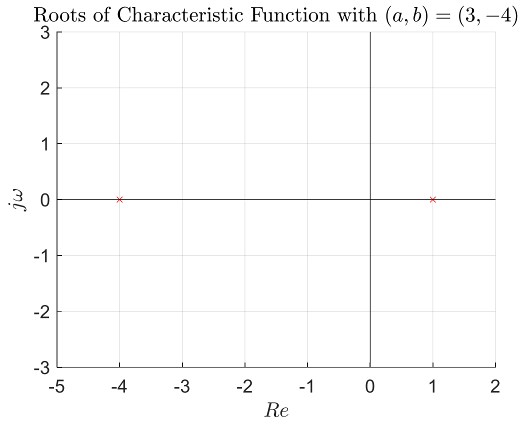


圖 1.11、鞍點 (Saddle point)之特徵值在複數平面上的位置

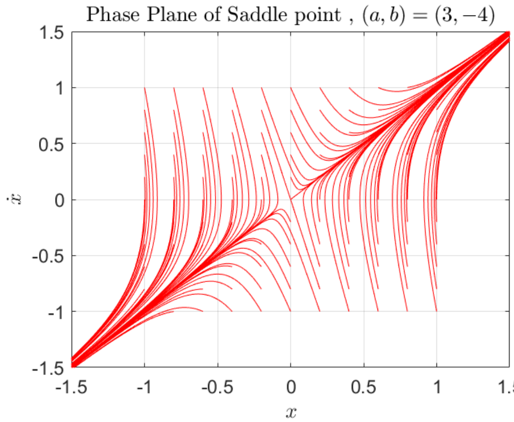


圖 1.12、鞍點 (Saddle point)之相平面軌跡

根據不同的系統參數，我們可以得到不同的特徵值，對應到 6 種不同的情形。而根據 MATLAB 數值模擬之結果，不同特徵根所對應到之像平面軌跡形式，和課本中的描述相符。

第二題

Question:

試以座標變換

$$r=\sqrt{x_1^2+x_2^2},\ \theta=\tan^{-1}(x_2/x_1) \tag{2.1}$$

求下列三組非線性系統的解析解

a) $\dot{x}_1=x_2+x_1(x_1^2+x_2^2-1),\ \dot{x}_2=-x_1+x_2(x_1^2+x_2^2-1)$

b) $\dot{x}_1=x_2-x_1(x_1^2+x_2^2-1)^2,\ \dot{x}_2=-x_1-x_2(x_1^2+x_2^2-1)^2$

c) $\dot{x}_1=x_2-x_1(x_1^2+x_2^2-1),\ \dot{x}_2=-x_1-x_2(x_1^2+x_2^2-1)$

由所得到的極座標方程式預測各個系統是否存在極限圓，其穩定性如何(穩定？半穩定?不穩定?) 。其次再以 MATLAB 分別畫出以上三組方程式的相平面軌跡圖 (每個象限約取 5 個初始點) ，驗證解析解的預測是否正確性。

Answer:

要將上述三個非線性系統以解析解表示出來，要將式(2.1)對時間微分，得到:

$$\frac{dr}{dt}=\frac{1}{2}\left(x_1{}^2+x_2{}^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2\right) \tag{2.2}$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\left(1+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2\right)^{-1}\left(\frac{\dot{x}_2x_1-x_2\dot{x}_1}{x_1^2}\right) \tag{2.3}$$

接著分別對(a)、(b)和(c)三種情形進行探討

(a) 不穩定的極限圓

為了求得此非線性系統之解析解，要先將兩個一階微分方程式代入(2.2)和(2.3)中，結果如下:

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= \frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2x_1\left(x_2+x_1\left(x_1^2+x_2^2-1\right)\right)+2x_2\left(-x_1+x_2\left(x_1^2+x_2^2-1\right)\right)\right)\\ &= \left(x_1^2+x_2^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(x_1^4+2x_1^2x_2^2-x_1^2-x_2^2+x_2^4\right)\\ &= \left(x_1^2+x_2^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(x_1^2+x_2^2-1\right)\\ &= \left(x_1^2+x_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(x_1^2+x_2^2-1\right) \quad \left(\text{since r} = \sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)\\ &= r\left(r^2-1\right)\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= \left(x_1^2+x_2^2\right)^{-1}\left(x_1\left(-x_1+x_2\left(x_1^2+x_2^2-1\right)\right)-x_2\left(x_2+x_1\left(x_1^2+x_2^2-1\right)\right)\right)\\ &= \left(x_1^2+x_2^2\right)^{-1}\left(x_1^2+x_2^2\right)\\ &= -1\end{aligned} \tag{2.5}$$

由上列推導可知，(a)之及座標表示式為：

$$\dot{r} = r\left(r^2-1\right) \tag{2.6}$$

$$\dot{\theta} = -1 \tag{2.7}$$

而解析解必須將解的形式化簡為 $r(t)$ 。為了得到解析解，要先將式(2.6)之兩端同乘 r^{-3} ，由此可以得到

$$r^{-3}\dot{r} = 1-r^{-2} \tag{2.8}$$

接著令

$$z = r^{-2} \tag{2.9}$$

將(2.9)對時間微分可得

$$\dot{z} = -2r^{-3}\dot{r} \tag{2.10}$$

將(2.9)和(2.10)代回(2.8)後可以得到

$$\dot{z} - 2z = -2 \tag{2.11}$$

根據(2.11)之一階微分方程通解可以得到

$$z(t) = 1+Ce^{2t},\ C = z(0)-1 \tag{2.12}$$

最後再透過變數變換後得到(2.6)和(2.7)之解析解

$$r(t) = (1+Ce^{2t})^{-\frac{1}{2}},\ C = \frac{1}{r^2(0)}-1 \tag{2.13}$$

$$\theta(t) = \theta(0)-t \tag{2.14}$$

接著可以透過(2.6)和(2.7)來觀察此系統隨著不同半徑r所呈現出的不同行為:

1) 當$r<1$時，$\dot{r}<0$ 。這說明當$r<1$時，系統的相平面軌跡半徑會不斷地變小，直到收斂至 0 為止。
2) 當$r=1$時，$\dot{r}=0$ 。這說明當$r=1$時，系統的相平面軌跡半徑不會有任何變化，而是一直維持在極限圓上。
3) 當$r>1$時，$\dot{r}>0$ 。這說明當$r>1$時，系統的相平面軌跡半徑會不斷地變大，直到無窮遠處，是一種發散的現象。

為了驗證由極座標所得出來之推論，可用 MATLAB 繪製此系統之相平面軌跡。利用 MATLAB 之 RK4 數值求解器，設定三個不同的半徑初始值，分別為$r_0=1$ 、$r_0=1.1$和$r_0=0.9$。時間範圍為 0~100 秒，時間變化量為 0.01，可得到圖 2.1 之像平面軌跡。由途中觀察可知，這三種初始值之軌跡如上述分析相同，在$r_0=1$ 時會維持在極限圓上，而當$r_0\neq 1$ 時會離開極限圓。

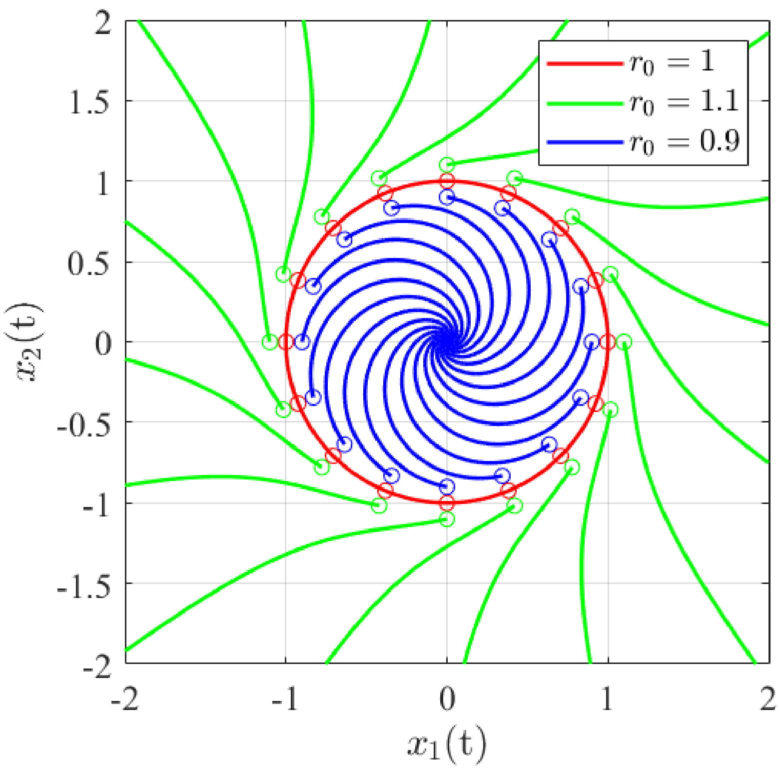


圖 2.1、不穩定極限圓

(b) 半穩定的極限圓

為了求得此非線性系統之解析解，要先將兩個一階微分方程式代入(2.2)和(2.3)中，結果如下:

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= \frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2x_1\left(x_2+x_1\left(x_1^2+x_2^2-1\right)^2\right)+2x_2\left(-x_1+x_2\left(x_1^2+x_2^2-1\right)^2\right)\right)\\ &= -\left(x_1^2+x_2^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(x_1^6+x_2^6+3x_1^2x_2^4+3x_1^4x_2^2-4x_1^2x_2^2-2x_1^4-2x_2^4+x_1^2+x_2^2\right)\\ &= -\left(x_1^2+x_2^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(x_1^2+x_2^2-1\right)^2 \\ &= -\left(x_1^2+x_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(x_1^2+x_2^2-1\right)^2 \quad \left(\text{since r} = \sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)\\ &= -r\left(r^2-1\right)^2\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= \left(x_1^2+x_2^2\right)^{-1}\left(x_1\left(-x_1+x_2\left(x_1^2+x_2^2-1\right)^2\right)-x_2\left(x_2+x_1\left(x_1^2+x_2^2-1\right)\right)^2\right)\\ &= \left(x_1^2+x_2^2\right)^{-1}\left(x_1^2+x_2^2\right)\\ &= -1\end{aligned} \tag{2.16}$$

由上列推導可知，(b)之及座標表示式為:

$$\dot{r} = -r\left(r^2-1\right)^2 \tag{2.17}$$

$$\dot{\theta} = -1 \tag{2.18}$$

而解析解必須將解的形式化簡為 $r(t)$ 。為了得到解析解，可以根據(2.17)和(2.18)進行以下推導:

$$\begin{aligned}&\frac{dr}{dt} = -r(r^2-1)\\ &\rightarrow\ -\int\frac{1}{r(r^2-1)}dr = \int dt\\ &\rightarrow\ -\int\frac{1}{2u(u-1)^2}du = t-t_0 \quad (Let\ r^2=u,\ du=2rdr)\\ &\rightarrow\ -\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u-1}+\frac{1}{(u-1)^2}\right)du = t-t_0\\ &\rightarrow\ -\frac{1}{2}\left(\ln\left|r^2\right|-\ln\left|r^2-1\right|-\frac{1}{r^2-1}\right) = t-t_0+C_0\end{aligned} \tag{2.19}$$

若此時將初始狀態設定為 $\left(r\left(t_0\right),\theta\left(t_0\right),t_0\right)=\left(r_0,\theta_0,0\right)$ ，最後可以得到解析解:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\left(\ln\left|r^2\right|-\ln\left|r^2-1\right|-\frac{1}{r^2-1}\right)=t-t_0+C_0 \\ C_0=-\frac{1}{2}\left(\ln\left|r_0^2\right|-\ln\left|r_0^2-1\right|-\frac{1}{r_0^2-1}\right) \\ \theta(t)=\theta_0-t \end{cases} \tag{2.20}$$

接著可以透過(2.17)和(2.18)來觀察此系統隨著不同半徑r所呈現出的不同行為:

1) 當$r<1$時，$\dot{r}<0$。這說明當$r<1$時，系統的相平面軌跡半徑會不斷地變小，直到收斂至 0 為止。
2) 當$r=1$時，$\dot{r}=0$。這說明當$r=1$時，系統的相平面軌跡半徑不會有任何變化，而是一直維持在極限圓上。
3) 當$r>1$時，$\dot{r}<0$。這說明當$r>1$時，系統之像平面軌跡會不斷向極限圓收斂。

為了驗證由極座標所得出來之推論，可用 MATLAB 繪製此系統之相平面軌跡。利用 MATLAB 之 RK4 數值求解器，設定三個不同的半徑初始值，分別為$r_0=1$、$r_0=1.1$和$r_0=0.9$。時間範圍為 0~100 秒，時間變化量為 0.01，可得到圖 2.2 之像平面軌跡。由途中觀察可知，這三種初始值之軌跡如上述分析相同，在$r_0=1$和$r_0>1$時會維持在極限圓上，而當$r_0<1$時會離開極限圓，向原點收斂。

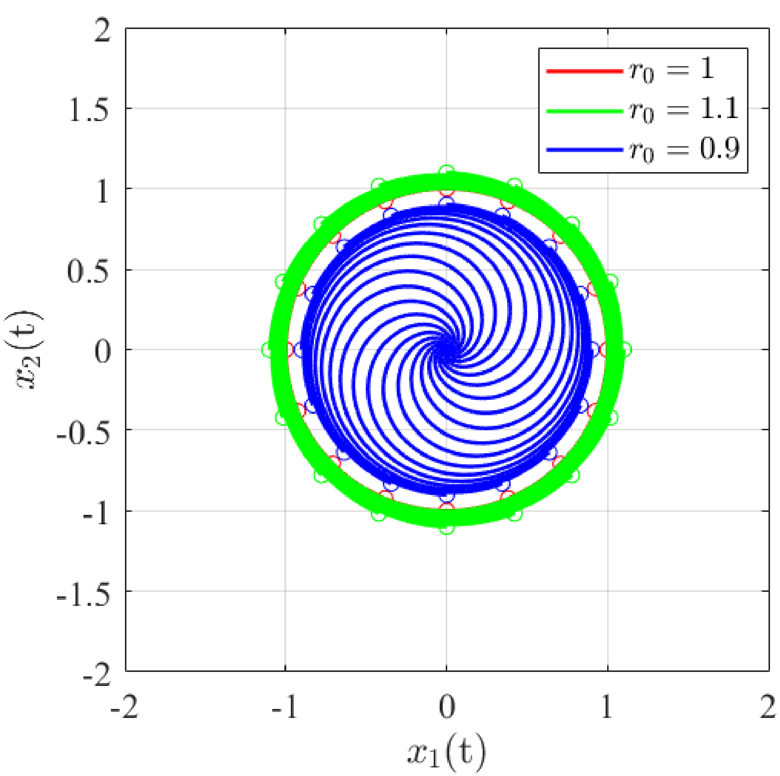


圖 2.2、不穩定極限圓

(c) 穩定的極限圓

為了求得此非線性系統之解析解，要先將兩個一階微分方程式代入(2.2)和(2.3)中，結果如下:

$$
\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= \frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2x_1\left(x_2-x_1\left(x_1^2+x_2^2-1\right)\right)+2x_2\left(-x_1-x_2\left(x_1^2+x_2^2-1\right)\right)\right) \\
&= \left(x_1^2+x_2^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-x_1^4-x_1^2x_2^2+x_1^2-x_1^2x_2^2-x_2^4+x_2^2\right) \\
&= -\left(x_1^2+x_2^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(x_1^2+x_2^2-1\right) \\
&= -\left(x_1^2+x_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(x_1^2+x_2^2-1\right) \quad \left(\text{since r} = \sqrt{x_1^2+x_2^2}\right) \\
&= -r\left(r^2-1\right)
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} &= \left(x_1^2+x_2^2\right)^{-1}\left(x_1\left(-x_1-x_2\left(x_1^2+x_2^2-1\right)\right)-x_2\left(x_2-x_1\left(x_1^2+x_2^2-1\right)\right)\right) \\
&= \left(x_1^2+x_2^2\right)^{-1}\left(x_1^2+x_2^2\right) \\
&= -1
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

由上列推導可知，(c)之及座標表示式為：

$$\dot{r} = -r\left(r^2-1\right) \tag{2.23}$$

$$\dot{\theta} = -1 \tag{2.24}$$

而解析解必須將解的形式化簡為 $r(t)$ 。為了得到解析解，要先將式(2.23)之兩端同乘 r^{-3} ，由此可以得到

$$r^{-3}\dot{r} = -1+r^{-2} \tag{2.25}$$

接著令

$$z = r^{-2} \tag{2.26}$$

將(2.26)對時間微分可得

$$\dot{z} = -2r^{-3}\dot{r} \tag{2.27}$$

將(2.26)和(2.27)代回(2.25)後可以得到

$$\dot{z}+2z = 2 \tag{2.28}$$

根據(2.28)之一階微分方程通解可以得到

$$z(t) = 1+Ce^{-2t},\ C = z(0)-1 \tag{2.29}$$

最後再透過變數變換後得到(2.23)和(2.24)之解析解

$$r(t) = (1 + Ce^{-2t})^{-\frac{1}{2}},\ C = \frac{1}{r^2(0)} - 1 \tag{2.25}$$

$$\theta(t) = \theta(0) - t \tag{2.26}$$

接著可以透過(2.23)和(2.24)來觀察此系統隨著不同半徑 r 所呈現出的不同行為:

1) 當 $r < 1$ 時，$\dot{r} > 0$ 。這說明當 $r < 1$ 時，系統的相平面軌跡半徑會不斷地變大，直到進入極限圓。
2) 當 $r = 1$ 時，$\dot{r} = 0$ 。這說明當 $r = 1$ 時，系統的相平面軌跡半徑不會有任何變化，而是一直維持在極限圓上。
3) 當 $r > 1$ 時，$\dot{r} < 0$ 。這說明當 $r > 1$ 時，系統的相平面軌跡半徑會不斷地收斂至 1，也就是收斂至極限圓上。

為了驗證由極座標所得出來之推論，可用 MATLAB 繪製此系統之相平面軌跡。利用 MATLAB 之 RK4 數值求解器，設定三個不同的半徑初始值，分別為 $r_0 = 1$ 、$r_0 = 1.1$ 和 $r_0 = 0.9$ 。時間範圍為 0~100 秒，時間變化量為 0.01，可得到圖 2.1 之像平面軌跡。由途中觀察可知，這三種初始值之軌跡如上述分析相同，r_0 不論是大於 1、等於 1 或是小於一階會收斂至極限圓，此種情形被稱作穩定極限圓。

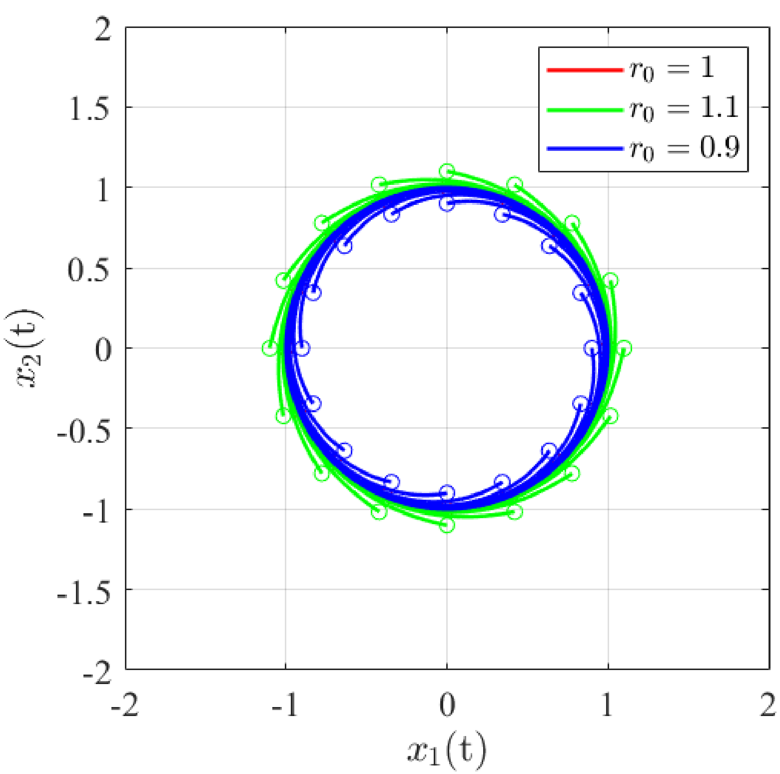


圖 2.3、穩定極限圓

第三題

Question:

利用 MATLAB 畫出圖 2.7.7 所示飽和系統的相平面軌跡圖，其中採用下列的參數設定：$T=1$，$K=4$，$M0=0.2$，$e0=0.2$。比較圖 2.7.8 的手繪圖以及圖 2.7.9 的電腦繪製圖，你所得到的軌跡圖是否與之相符？是否能得到比手繪圖更精確的結果？

Answer:

下圖為飽和系統之控制迴路圖，此系統之行為可用以下微分方程來描述:

$$T\ddot{e}+\dot{e}+Km=0 \tag{3.1}$$

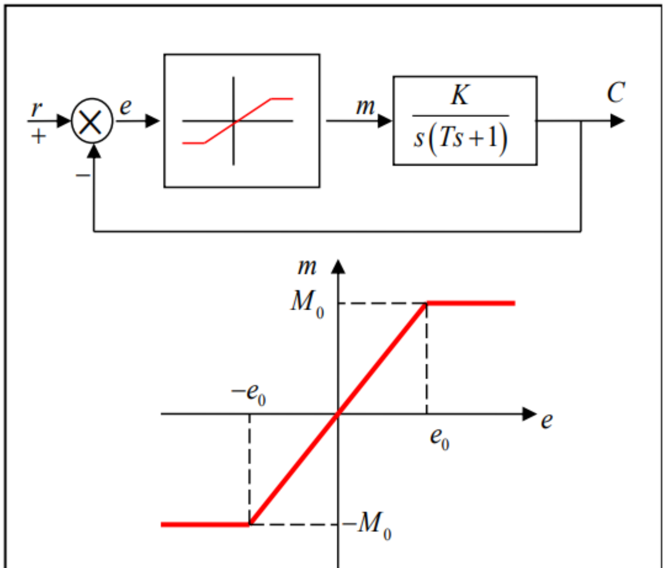


圖 2.7.7　飽和系統之控制迴路圖

又因此系統有一飽和元件，故可將(3.1)根據飽和系統分為三個區段:

(1) 正飽和區

$$T\ddot{e}+\dot{e}+KM_0=0,\ \ e>e_0 \tag{3.2}$$

(2) 線性區

$$T\ddot{e}+\dot{e}+Ke=0,\ \ |e|\le e_0 \tag{3.3}$$

(3) 負飽和區

$$T\ddot{e}+\dot{e}-KM_0=0,\ \ e<e_0 \tag{3.4}$$

根據題目的參數: $T=1$、$K=4$、$M_0=0.2$ 和 $e_0=0.2$ ，用 MATLAB 中的數值求解器 ODE45 來繪製相平面軌跡圖。

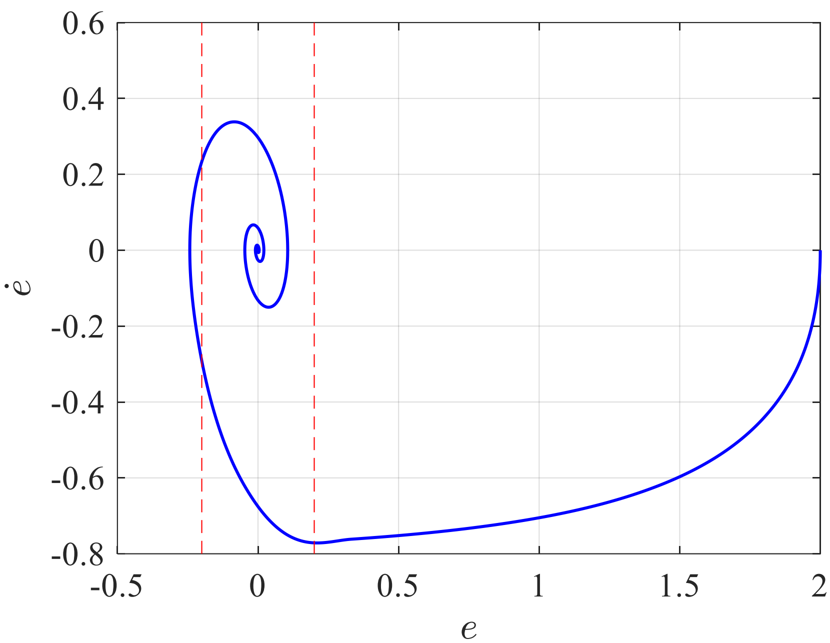


圖 3.1、MATLAB 繪製之相平面軌跡

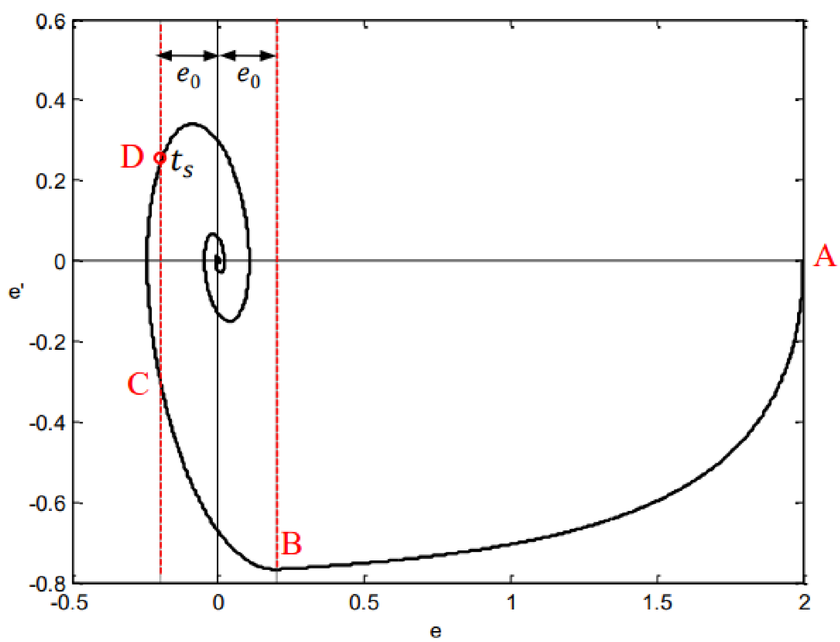


圖 2.7.9 由電腦數值積分連結三個區域的相平面軌跡。

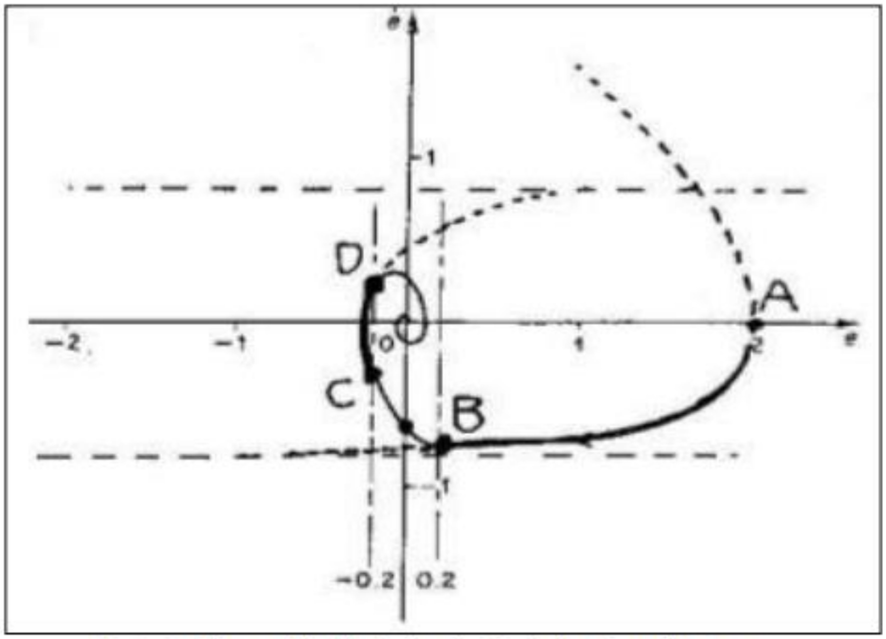


圖 2.7.8b 以等斜率法徒手畫相平面軌跡。

圖 3.1 為使用 MATLAB 繪製出的向平面軌跡，和課本中之圖 2.7.9 電腦數值積分的結果幾乎吻合。而課本中 2.7.8b 之乙等斜率法繪製之像平面軌跡雖然無法像電腦計算般精確，但外型特徵皆有表現出來。

MATLAB Code
第一題

```
% Nolinear Control HW2_1
clc;
clear;
close all;

%%
t_final=100;
delta_t=0.01;
tspan=0:delta_t:t_final;
FS_ax=14;

%% Stable focus
figure(1)
sys1=[1 2 5];
for i=-1:0.2:1
    for j=-1:0.2:1
        x1=[i j];
        [t1, y1]=ode45(@(tspan, x1) odefun(tspan, x1, sys1), tspan, x1);
        plot(y1(:,1), y1(:,2), 'r-')
        hold on
    end
end

ax=gca;
title('Phase Plane of Stable focus , $(a,b)=(2,5)$', 'interpreter', 'latex')
xlabel('$x$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$\dot{x}$', 'interpreter', 'latex')
set(gca, 'XLim' ,[-1.5 1.5], 'YLim' ,[-1.5 1.5], 'FontSize', FS_ax, 'FontName', 'Time New
Roman')
grid on

r1=roots(sys1);
figure(2)
scatter( real(r1), imag(r1), 'x', 'r')
ax=gca;
title('Roots of Characteristic Function with $(a,b)=(2,5)$' , 'interpreter', 'latex')
set(gca, 'XLim' ,[-2 0.1], 'YLim' ,[-3 3], 'FontSize', FS_ax, 'FontName', 'Time New Roman')
xlabel('$Re$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$j\omega$', 'interpreter', 'latex')
line([0 0],ylim(),'Color','k');
line(xlim(),[0 0],'Color','k');
grid on
%%Unstable focus
```

```
figure(3)
sys2=[1 -2 5];
for i=-1:0.2:1
   for j=-1:0.2:1
      x2=[i j];
      [t2, y2]=ode45(@(tspan, x2) odefun(tspan, x2, sys2), tspan, x2);
      plot(y2(:,1), y2(:,2), 'r-')
      hold on
   end
end

ax=gca;
title('Phase Plane of Unstable focus , $(a,b)=(-2,5)$', 'interpreter', 'latex')
xlabel('$x$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$\dot{x}$', 'interpreter', 'latex')
set(gca, 'XLim' ,[-1000 1000], 'YLim' ,[-1000 1000], 'FontSize', FS_ax, 'FontName', 'Time
New Roman')
grid on

r2=roots(sys2);
figure(4)
scatter( real(r2), imag(r2), 'x', 'r')
ax=gca;
title('Roots of Characteristic Function with $(a,b)=(-2,5)$' , 'interpreter', 'latex')
set(gca, 'XLim' ,[-0.1 2], 'YLim' ,[-3 3], 'FontSize', FS_ax, 'FontName', 'Time New Roman')
xlabel('$Re$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$j\omega$', 'interpreter', 'latex')
line([0 0],ylim(),'Color','k');
line(xlim(),[0 0],'Color','k');
grid on
%% Stable node
figure(5)
sys3=[1 4 3];
for i=-1:0.2:1
   for j=-1:0.2:1
      x3=[i j];
      [t3, y3]=ode45(@(tspan, x3) odefun(tspan, x3, sys3), tspan, x3);
      plot(y3(:,1), y3(:,2), 'r-')
      hold on
   end
end

ax=gca;
title('Phase Plane of Stable node , $(a,b)=(4,3)$', 'interpreter', 'latex')
xlabel('$x$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$\dot{x}$', 'interpreter', 'latex')
```

```
set(gca, 'XLim' ,[-1.5 1.5], 'YLim' ,[-1.5 1.5], 'FontSize', FS_ax, 'FontName', 'Time New
Roman')
grid on

r3=roots(sys3);
figure(6)
scatter( real(r3), imag(r3), 'x', 'r')
ax=gca;
title('Roots of Characteristic Function with $(a, b)=(4,3)$' , 'interpreter', 'latex')
set(gca, 'XLim' ,[-4 0.1], 'YLim' ,[-3 3], 'FontSize', FS_ax, 'FontName', 'Time New Roman')
xlabel('$Re$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$j\omega$', 'interpreter', 'latex')
line([0 0],ylim(),'Color','k');
line(xlim(),[0 0],'Color','k');
grid on
%% Unstable node
figure(7)
sys4=[1 -4 3];
for i=-1:0.2:1
    for j=-1:0.2:1
        x4=[i j];
        [t4, y4]=ode45(@(tspan, x4) odefun(tspan, x4, sys4), tspan, x4);
        plot(y4(:,1), y4(:,2), 'r-')
        hold on
    end
end

ax=gca;
title('Phase Plane of Unstable node , $(a,b)=(-4,3)$', 'interpreter', 'latex')
xlabel('$x$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$\dot{x}$', 'interpreter', 'latex')
set(gca, 'XLim' ,[-5 5], 'YLim' ,[-5 5], 'xtick', [-5:1:5], 'ytick', [-5:1:5], 'FontSize', FS_ax,
'FontName', 'Time New Roman')
grid on

r4=roots(sys4);
figure(8)
scatter( real(r4), imag(r4), 'x', 'r')
ax=gca;
title('Roots of Characteristic Function with $(a,b)=(-4,3)$' , 'interpreter', 'latex')
set(gca, 'XLim' ,[-1 4], 'YLim' ,[-3 3], 'FontSize', FS_ax, 'FontName', 'Time New Roman')
xlabel('$Re$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$j\omega$', 'interpreter', 'latex')
line([0 0],ylim(),'Color','k');
line(xlim(),[0 0],'Color','k');
grid on
```

```
%% Center
figure(9)
sys5=[1 0 3];
for i=-1:0.2:1
   for j=-1:0.2:1
      x5=[i j];
      [t5, y5]=ode45(@(tspan, x5) odefun(tspan, x5, sys5), tspan, x5);
      plot(y5(:,1), y5(:,2), 'r-')
      hold on
   end
end

ax=gca;
title('Phase Plane of Center , $(a,b)=(0,3)$', 'interpreter', 'latex')
xlabel('$x$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$\dot{x}$', 'interpreter', 'latex')
set(gca, 'XLim' ,[-2.5 2.5], 'YLim' ,[-2.5 2.5], 'FontSize', FS_ax, 'FontName', 'Time New
Roman')
grid on

r5=roots(sys5);
figure(10)
scatter( real(r5), imag(r5), 'x', 'r')
ax=gca;
title('Roots of Characteristic Function with $(a,b)=(0,3)$' , 'interpreter', 'latex')
set(gca, 'XLim' ,[-2 2], 'YLim' ,[-3 3], 'FontSize', FS_ax, 'FontName', 'Time New Roman')
xlabel('$Re$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$j\omega$', 'interpreter', 'latex')
line([0 0],ylim(),'Color','k');
line(xlim(),[0 0],'Color','k');
grid on
%% Saddle point
figure(11)
sys6=[1 3 -4];
for i=-1:0.2:1
   for j=-1:0.2:1
      x6=[i j];
      [t6, y6]=ode45(@(tspan, x6) odefun(tspan, x6, sys6), tspan, x6);

      plot(y6(:,1), y6(:,2), 'r-')
      hold on
   end
end

ax=gca;
title('Phase Plane of Saddle point , $(a,b)=(3,-4)$', 'interpreter', 'latex')
```

```
xlabel('$x$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$\dot{x}$', 'interpreter', 'latex')
set(gca, 'XLim' ,[-1.5 1.5], 'YLim' ,[-1.5 1.5], 'FontSize', FS_ax, 'FontName', 'Time New
Roman')
grid on

r6=roots(sys6);
figure(12)
scatter( real(r6), imag(r6), 'x', 'r')
ax=gca;
title('Roots of Characteristic Function with $(a,b)=(3,-4)$' , 'interpreter', 'latex')
set(gca, 'XLim' ,[-5 2], 'YLim' ,[-3 3], 'FontSize', FS_ax, 'FontName', 'Time New Roman')
xlabel('$Re$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$j\omega$', 'interpreter', 'latex')
line([0 0],ylim(),'Color','k');
line(xlim(),[0 0],'Color','k');
grid on
%% Differential Equation
function dfdt=odefun(t, f, para)
a=para(2);
b=para(3);

del_x1=f(2);
del_x2=-a*f(2)-b*f(1);
dfdt=[del_x1, del_x2]';
end
```

第二題

```
% Nolinear Control HW2_2
clc;
clear;
close all;

%%
t_final=100;
delta_t=0.01;
tspan=0:delta_t:t_final;
FS_ax=14;
LW=1.5;
points=16;
r_1=1;
r_2=1.1;
r_3=0.9;

%% Unstable Limit Cycle
figure(1)
for i=1:points
```

```
    theta1=2*pi*i/points;
    c1=[r_1; theta1];
    [t1, y1]=RK4(@odefun1, tspan, c1);
    x_11=y1(:,1).*cos(y1(:,2));
    x_21=y1(:,1).*sin(y1(:,2));
    p1=plot(x_11, x_21, 'r', 'LineWidth', LW);
    hold on
    plot(x_11(1),x_21(1),'ro');
end

for i=1:points
    theta2=2*pi*i/points;
    c2=[r_2; theta2];
    [t2, y2]=RK4(@odefun1, tspan, c2);
    x_21=y2(:,1).*cos(y2(:,2));
    x_22=y2(:,1).*sin(y2(:,2));
    p2=plot(x_21, x_22, 'g', 'LineWidth', LW);
    hold on
    plot(x_21(1),x_22(1),'go');
end

for i=1:points
    theta3=2*pi*i/points;
    c3=[r_3; theta3];
    [t3, y3]=RK4(@odefun1, tspan, c3);
    x_31=y3(:,1).*cos(y3(:,2));
    x_32=y3(:,1).*sin(y3(:,2));
    p3=plot(x_31, x_32, 'b', 'LineWidth', LW);
    hold on
    plot(x_31(1),x_32(1),'bo');
end

axis equal
grid on
ax(1) = gca ;
set(ax(1),'XLim',([-2 2]),'YLim',([-2 2]),'FontSize',FS_ax,'FontName','Times New Roman')
xlabel('$x_1$(t)','Interpreter','latex')
ylabel('$x_2$(t)','Interpreter','latex')
hs(1) = legend([p1 p2 p3 ],{'$r_0 = 1$','$r_0 = 1.1$','$r_0 = 0.9$'},'Interpreter','latex') ;

%% Semi-stable Limit Cycle
figure(2)
for i=1:points
    theta1=2*pi*i/points;
    c1=[r_1; theta1];
    [t1, y1]=RK4(@odefun2, tspan, c1);
```

```
    x_11=y1(:,1).*cos(y1(:,2));
    x_21=y1(:,1).*sin(y1(:,2));
    p1=plot(x_11, x_21, 'r', 'LineWidth', LW);
    hold on
    plot(x_11(1),x_21(1),'ro');
end

for i=1:points
    theta2=2*pi*i/points;
    c2=[r_2; theta2];
    [t2, y2]=RK4(@odefun2, tspan, c2);
    x_21=y2(:,1).*cos(y2(:,2));
    x_22=y2(:,1).*sin(y2(:,2));
    p2=plot(x_21, x_22, 'g', 'LineWidth', LW);
    hold on
    plot(x_21(1),x_22(1),'go');
end

for i=1:points
    theta3=2*pi*i/points;
    c3=[r_3; theta3];
    [t3, y3]=RK4(@odefun2, tspan, c3);
    x_31=y3(:,1).*cos(y3(:,2));
    x_32=y3(:,1).*sin(y3(:,2));
    p3=plot(x_31, x_32, 'b', 'LineWidth', LW);
    hold on
    plot(x_31(1),x_32(1),'bo');
end

axis equal
grid on
ax(2) = gca ;
set(ax(2),'XLim',([-2 2]),'YLim',([-2 2]),'FontSize',FS_ax,'FontName','Times New Roman')
xlabel('$x_1$(t)','Interpreter','latex')
ylabel('$x_2$(t)','Interpreter','latex')
hs(2) = legend([p1 p2 p3 ],{'$r_0 = 1$','$r_0 = 1.1$','$r_0 = 0.9$'},'Interpreter','latex') ;
%% Stable Limit Cycle
figure(3)
for i=1:points
    theta1=2*pi*i/points;
    c1=[r_1; theta1];
    [t1, y1]=RK4(@odefun3, tspan, c1);
    x_11=y1(:,1).*cos(y1(:,2));
    x_21=y1(:,1).*sin(y1(:,2));
    p1=plot(x_11, x_21, 'r', 'LineWidth', LW);
    hold on
```

```
    plot(x_11(1),x_21(1),'ro');
end

for i=1:points
    theta2=2*pi*i/points;
    c2=[r_2; theta2];
    [t2, y2]=RK4(@odefun3, tspan, c2);
    x_21=y2(:,1).*cos(y2(:,2));
    x_22=y2(:,1).*sin(y2(:,2));
    p2=plot(x_21, x_22, 'g', 'LineWidth', LW);
    hold on
    plot(x_21(1),x_22(1),'go');
end

for i=1:points
    theta3=2*pi*i/points;
    c3=[r_3; theta3];
    [t3, y3]=RK4(@odefun3, tspan, c3);
    x_31=y3(:,1).*cos(y3(:,2));
    x_32=y3(:,1).*sin(y3(:,2));
    p3=plot(x_31, x_32, 'b', 'LineWidth', LW);
    hold on
    plot(x_31(1),x_32(1),'bo');
end

axis equal
grid on
ax(3) = gca ;
set(ax(3),'XLim',([-2 2]),'YLim',([-2 2]),'FontSize',FS_ax,'FontName','Times New Roman')
xlabel('$x_1$(t)','Interpreter','latex')
ylabel('$x_2$(t)','Interpreter','latex')
hs(3) = legend([p1 p2 p3 ],{'$r_0 = 1$','$r_0 = 1.1$','$r_0 = 0.9$'},'Interpreter','latex') ;
%%
function dfdt=odefun1(t,f)
r=f(1);
dr=r*(r^2-1);
dtheta=-1;
dfdt=[dr,dtheta]';
end

function dfdt=odefun2(t,f)
r=f(1);
dr=-r*(r^2-1)^2;
dtheta=-1;
dfdt=[dr,dtheta]';
end
```

```
function dfdt=odefun3(t,f)
r=f(1);
dr=-r*(r^2-1);
dtheta=-1;
dfdt=[dr,dtheta]';
end

function [t,y] = RK4(ODESet,TimeSpan,InitialValue,varargin)
% 2019 V1
% 2020/08/25 V2
%... User Given
y0 = InitialValue;
h = TimeSpan(2)-TimeSpan(1);
%... RK4
t = TimeSpan;
n = size(y0,1);
y = zeros(n,length(t));
y(:,1) = y0;
for i = 1:length(t)-1
 yi = y(:,i);
 ti = t(i);
 f1 = ODESet(ti,yi);
 f2 = ODESet(ti+0.5*h,yi+0.5*h*f1);
 f3 = ODESet(ti+0.5*h,yi+0.5*h*f2);
 f4 = ODESet(ti+h,yi+h*f3);
 y(:,i+1) = yi + h*( 1/6*f1 + 1/3*f2 + 1/3*f3 + 1/6*f4 );
end
y = y.';
end
```

第三題

```
% Nolinear Control HW2_3
clc;
clear;
close all;

% T=1, K=4, M0=0.2, e0=0.2

%%
t_final=100;
delta_t=0.01;
tspan=0:delta_t:t_final;
T=1;
K=4;
M0=0.2;
```

```
e0=0.2;
para=[T,K,M0,e0];
x0=[2, 0];
LW_1 = 1.4 ;
FS_ax = 16 ;
FS_leg = 14 ;

%%
[t, x]=ode45(@(tspan, x0) odefun(tspan, x0, para), tspan,x0);
figure
plot(x(:,1),x(:,2),'b','LineWidth',LW_1)
hold on
grid on
plot([e0,e0],[0.6,-0.8],'r--');
plot([-e0,-e0],[0.6,-0.8],'r--');
xlabel('$e$','interpreter','latex')
ylabel('$\dot e$','interpreter','latex')
ax = gca ;
set(ax,'FontSize',FS_ax,'FontName','Times New Roman')

function dx=odefun(t,x,para)
T=para(1);
K=para(2);
M0=para(3);
e0=para(4);
dx = zeros(2,1); %[xa,xb,xc,theta]
if abs(x(1))<=para(4)
 dx(2) =(-x(2)-K*x(1))/T;
 dx(1) =x(2);
elseif x(1)>para(4)
 dx(2) =(-x(2)-K*M0 )/T;
 dx(1) =x(2);
elseif x(1)<-para(4)
 dx(2) =(-x(2)+K*M0 )/T;
 dx(1) =x(2);
end
end
```