

# 非線性控制

## Nonlinear Control

### 第七章作業 (逆向步進控制)



學 號：P46071204

研 究 生：蔡旻哲

授課教授：楊憲東

Department of Aeronautics and Astronautics

National Cheng Kung University

Tainan, Taiwan, R.O.C.

中 華 民 國 109 年 12 月 10 日

## 目錄

|                       |    |
|-----------------------|----|
| 第 1 題. 逆向步進控制設計 ..... | 1  |
| Question (a) .....    | 1  |
| Question (b) .....    | 7  |
| Question (c) .....    | 12 |
| Question (d) .....    | 14 |
| Question (e) .....    | 15 |
| Matlab Code .....     | 21 |

## 第1題. 逆向步進控制設計

考慮以下二階的非線性系統

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + x_1^2 + x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + (1 + x_2^2)u\end{aligned}\tag{1.1}$$

### Question (a)

列出逆向步進控制的設計步驟，參考講義(7.4.2)式~(7.4.7)式，設計控制律  $u(x_1, x_2)$ ，使得控制後的系統(亦即閉迴路系統)相對於原點為漸進穩定。

### Answer

考慮非線性系統(1.1)，透過逆向步進控制的觀念，首先探討內層迴路

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_1^2 + x_1 x_2\tag{1.2}$$

在(1.2)當中，將  $x_2$  做為一個虛擬控制輸入(Virtual Control Input)，在此設  $x_2 = \phi(x_1)$ ，因此內層迴路可以化為以下閉迴路系統

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_1^2 + x_1 \phi(x_1)\tag{1.3}$$

根據(1.3)式的系統，設計  $\phi_1(x_1) = -1 - x_1 - x_1^2$ ，則(1.3)改寫為

$$\dot{x}_1 = -x_1^3\tag{1.4}$$

從(1.4)式看出， $x_1 = 0$  為系統的平衡點，並且當  $x_1 > 0$  時則  $\dot{x}_1 < 0$ ， $x_1 < 0$  時則  $\dot{x}_1 > 0$ ，由此可知  $x_1 = 0$  為穩定的平衡點，因此透過這樣的  $\phi_1(x_1)$  形式的設計，可以使得內層系統全域漸進穩定到原點，根據逆向步進控制的設計觀念，我們想要找到一個真實的控制輸入  $u$ ，使得最終  $x_2 \rightarrow \phi_1(x_1)$ ，而當  $x_2 = \phi_1$  時，則內層系統的狀態最終會隨時間以漸進穩定的方式到達  $x_1 = 0$ ，然而我們觀察虛擬控制律  $\phi_1 = -1 - x_1 - x_1^2$  發現，當內層狀態  $x_1 = 0$  時， $\phi_1 = -1$ ，此時又  $x_2 = \phi_1$ ，因此可以推論，最終  $x_2$  只會到達  $x_2 = -1$ ，也就是說最終非線性系統(1.1)經過逆步式控制設計後，狀態  $x_1$ 、 $x_2$  可以漸進穩定的方式到達平衡點  $(x_1, x_2) = (0, -1)$ ，而並無法到達題目所要求的“原點”。

基於以上的敘述，我們接著將控制目標鎖定於，利用逆步式控制設計的概念，使得非線性系統(1.1)的狀態，最終以漸進穩定的方式到達平衡點  $\mathbf{x}_e = (0, -1)$ ，為了方便後續設計，因此對原始系統(1.1)做狀態平移，令新的系統狀態變數  $\bar{x}_1$ 、 $\bar{x}_2$  為

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= x_1 \\ \bar{x}_2 &= x_2 + 1\end{aligned}\tag{1.5}$$

這樣的手段可使得新的系統平衡點位於原點  $\bar{\mathbf{x}}_e = (0, 0)$  的位置，接著將(1.5)對時間做一次導數並將  $x_1$ 、 $x_2$  與  $\bar{x}_1$ 、 $\bar{x}_2$  間的關係代入，因此新的系統狀態微分方程式可被推導為

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_1 &= \bar{x}_1^2 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \\ \dot{\bar{x}}_2 &= \bar{x}_1 + \left[1 + (\bar{x}_2 - 1)^2\right] u\end{aligned}\quad (1.6)$$

最終，新的控制問題被等效為，透過逆向步進控制的觀念，使得系統(1.6)受到控制後，其系統狀態相對於原點為漸進穩定，若以上設計問題滿足，則等價於系統(1.1)受到控制後，狀態相對於 $\mathbf{x}_e = (0, -1)$ 為漸進穩定。

針對系統(1.6)，首先令真實控制輸入 $u$ 為如下的形式

$$u = \frac{1}{1 + (\bar{x}_2 - 1)^2} \cdot (-\bar{x}_1 + u_1) \quad (1.7)$$

其中 $u_1$ 為一個待設計的控制輸入訊號，將(1.7)式代入系統(1.6)得到以下簡單的形式

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_1 &= \bar{x}_1^2 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \\ \dot{\bar{x}}_2 &= u_1\end{aligned}\quad (1.8)$$

根據逆向步進控制的觀念，首先探討內層系統迴路的穩定性，並且依照前面所敘述，將 $x_2$ 設為一個虛擬控制輸入 $\bar{x}_2 = \bar{\phi}(\bar{x}_1)$ ，因此內層系統可以被整理為

$$\dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_1^2 + \bar{x}_1 \cdot \bar{\phi}(\bar{x}_1) \quad (1.9)$$

基於內層系統(1.9)，選擇 Lyapunov 候選函數如下

$$V_1(\bar{x}_1) = \frac{1}{2} \bar{x}_1^2 \quad (1.10)$$

並且將 Lyapunov 函數(1.10)沿著系統(1.9)對時間做一次導數

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(\bar{x}_1) &= \bar{x}_1 \dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_1 [\bar{x}_1^2 + \bar{x}_1 \cdot \bar{\phi}(\bar{x}_1)] \\ &= \bar{x}_1^3 + \bar{x}_1^2 \cdot \bar{\phi}(\bar{x}_1)\end{aligned}\quad (1.11)$$

接著我們需要設計 $\bar{\phi}(\bar{x}_1)$ 使得以下不等式成立

$$\dot{V}_1(\bar{x}_1) = \bar{x}_1^3 + \bar{x}_1^2 \cdot \bar{\phi}(\bar{x}_1) \leq V_a(\bar{x}_1) < 0 \quad (1.12)$$

其中，觀察(1.12)因此選擇 $V_a(\bar{x}_1) = -\bar{x}_1^4 < 0, \forall \bar{x}_1 \neq 0$ ，將所選擇的 $V_a(\bar{x}_1)$ 代回(1.12)當中，可以很簡單的將 $\bar{\phi}(\bar{x}_1)$ 設計為

$$\bar{\phi}(\bar{x}_1) = -\bar{x}_1 - \bar{x}_1^2 \quad (1.13)$$

將(1.13)代回(1.11)並且整理如下

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(\bar{x}_1) &= \bar{x}_1 \dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_1 [\bar{x}_1^2 + \bar{x}_1 \cdot \bar{\phi}(\bar{x}_1)] \\ &= \bar{x}_1^3 + \bar{x}_1^2 \cdot (-\bar{x}_1 - \bar{x}_1^2) \\ &= -\bar{x}_1^4 \leq 0\end{aligned}\quad (1.14)$$

式(1.14)可以說明，當 $\bar{x}_1$ 不等於0時，其 Lyapunov 函數對時間的一次導數會小於0，也就是說， $\bar{\phi}(\bar{x}_1)$ 這樣的設計， $\bar{x}_1$ 將會隨著時間收斂到0。

以上敘述說明了當 $\bar{\phi}(\bar{x}_1)$ 設計為(1.13)的形式，且 $\bar{x}_2 = \bar{\phi}_1(\bar{x}_1)$ 時，則內層系統將會穩定且隨著時間以漸進收斂的方式到達 $\bar{x}_1 = 0$ 的位置，接著我們要探討的是，如何設計控制律 $u_1$ 使得 $\bar{x}_2$ 能夠等於虛擬控制輸入 $\bar{\phi}_1(\bar{x}_1)$ ，因此進一步將(1.8)改寫為

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_1 &= \bar{x}_1^2 + \bar{x}_1\bar{\phi} + \bar{x}_1(\bar{x}_2 - \bar{\phi}) \\ \dot{\bar{x}}_2 &= u_1\end{aligned}\tag{1.15}$$

並且定義新的誤差變數  $z$  為

$$z = \bar{x}_2 - \bar{\phi}\tag{1.16}$$

將(1.16)對時間做一次導數，並且將  $\dot{\bar{x}}_2 = u_1$  的關係代入如下

$$\dot{z} = \dot{\bar{x}}_2 - \dot{\bar{\phi}} = u_1 - \dot{\bar{\phi}} = v\tag{1.17}$$

其中令  $v = u_1 - \dot{\bar{\phi}}$ ，因此(1.15)將可以被進一步推導為以下的等效系統

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_1 &= \bar{x}_1^2 + \bar{x}_1\bar{\phi} + \bar{x}_1z \\ \dot{z} &= v\end{aligned}\tag{1.18}$$

在等效系統(1.18)當中，當誤差變數  $z = 0$  時，根據以上設計則內層系統

$$\dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_1^2 + \bar{x}_1\bar{\phi}\tag{1.19}$$

相對於原點為漸進穩定，因此接下來將設計  $v$  使得新的誤差狀態變數  $z$  會收斂到 0。

因此以下，選擇等效系統(1.18)的候選 Lyapunov 函數為

$$V_2(\bar{x}_1, z) = V_1(\bar{x}_1) + \frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}\bar{x}_1^2 + \frac{1}{2}z^2\tag{1.20}$$

將(1.20)沿著(1.18)對時間進行一次導數，並將(1.14)的結果代入推導如下

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(\bar{x}_1, z) &= \bar{x}_1\dot{\bar{x}}_1 + z\dot{z} \\ &= \bar{x}_1(\bar{x}_1^2 + \bar{x}_1\bar{\phi} + \bar{x}_1z) + zv \\ &= \bar{x}_1^3 + \bar{x}_1^2\bar{\phi} + \bar{x}_1^2z + zv \\ &= V_a(\bar{x}_1) + \bar{x}_1^2z + zv\end{aligned}\tag{1.21}$$

觀察(1.21)，設計  $v$  為

$$v = -\bar{x}_1^2 - 2z\tag{1.22}$$

將(1.22)代回(1.21)中，則 Lyapunov 函數(1.20)對時間一次導數最終可以被整理為

$$\dot{V}_2(\bar{x}_1, z) = V_a(\bar{x}_1) - z^2 = -\bar{x}_1^4 - 2z^2 \leq 0\tag{1.23}$$

式(1.23)說明了，當  $\bar{x}_1$  及  $z$  不為 0 時，則  $\dot{V}_2$  恆小於 0，因此最終系統(1.18)的狀態  $\bar{x}_1$  及  $z$  將會隨著時間以漸進收斂的方式到達原點。

整理(1.7)、(1.16)、(1.17)及(1.22)的關係，最終得出真實的控制輸入訊號為

$$u = \frac{1}{1 + (\bar{x}_2 - 1)^2} \cdot \left( -\bar{x}_1 - \bar{x}_1^2 - 2\bar{x}_2 + 2\bar{\phi} + \dot{\bar{\phi}} \right)\tag{1.24}$$

其中  $\bar{\phi} = -\bar{x}_1 - \bar{x}_1^2$ 、 $\dot{\bar{\phi}} = (-1 - 2\bar{x}_1) \cdot (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_1\bar{x}_2)$ ，綜合以上設計流程以及敘述，逆向步進控制的設計概念應用於系統(1.6)，透過真實的控制輸入  $u$  使得狀態  $\bar{x}_2$  會趨於虛擬控制輸入  $\bar{\phi}$ ，而虛擬控制輸入  $\bar{\phi}$  又使得內層系統狀態  $\bar{x}_1$  趨於 0，當系統狀態  $\bar{x}_1$  趨於 0 時則意味著虛擬控制輸入  $\bar{\phi}$  亦為 0，因此  $\bar{x}_2$  也會為 0，而又由於前面狀態平移的關係，對於題目所給定的系統(1.1)，最終狀態  $x_1$ 、 $x_2$  會到達 0、-1。

根據以上  $\bar{\phi}(\bar{x}_1)$  的設計，最終會使得內層迴路為以下形式

$$\dot{\bar{x}}_1 = -\bar{x}_1^3\tag{1.25}$$

然而在這裡發現了一個問題，由於(1.25)式的非線性高次項為 3 次方，因此將使得  $\bar{x}_1$  在要趨近於 0 時， $\dot{\bar{x}}_1$  也會趨近於 0，而  $\dot{\bar{x}}_1$  趨近於 0 時，也表示  $\bar{x}_1$  變化律非常小，由此可知，此系統在  $\bar{x}_1$  趨近於 0 時收斂的力道幾乎不見了，這樣的結果將會使得最終的狀態  $\bar{x}_1$  無法完美的到達 0，而  $x_2$  最終也會等於  $\bar{\phi}$ ，因此這也導致  $\bar{x}_2$  無法完全收斂到 0，這個現象進一步反應回到原始系統(1.1)，則表示原始系統的狀態，將無法完全收斂到平衡點  $\mathbf{x}_e = (0, -1)$ ，以下用模擬 圖 1.1 來表達此一現象。

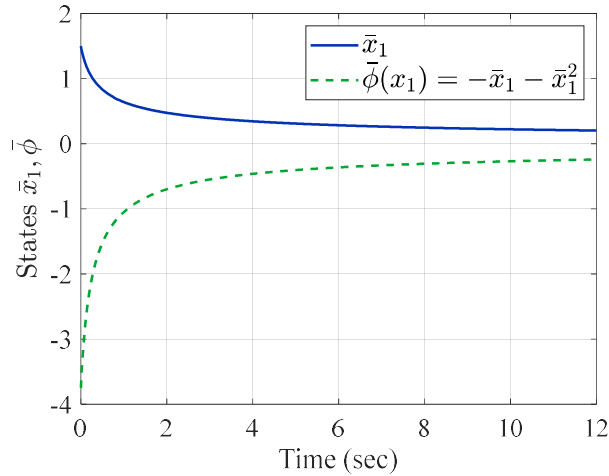


圖 1.1、經過第一種平移座標系之內層系統收斂情形

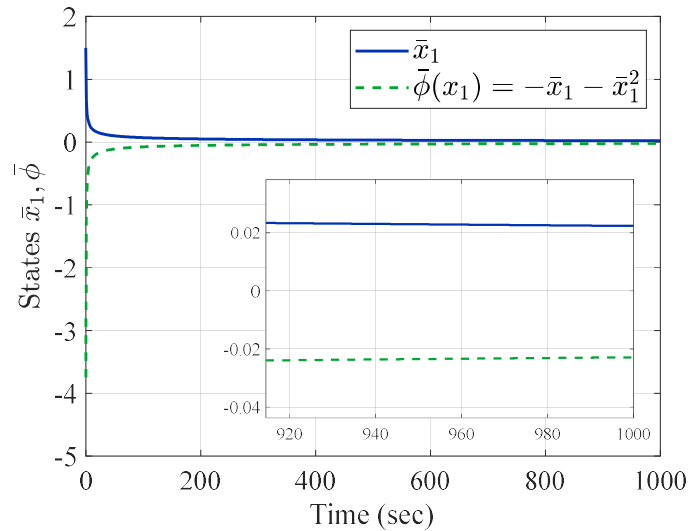


圖 1.2、第一種平移座標系之內層系統於極大時間之收斂情形

雖然在學理的穩定性分析上，這樣的  $\bar{\phi}$  設計是可行的，以上也由學理預測出  $\bar{x}_1$  最終可以收斂到 0，然而學理上所提到的完美收斂是需要當時間為無窮大時才有辦法實現，而關於這點也由 圖 1.2 說明，由 圖 1.2 的結果發現當模擬時間設定為 1000 秒時，內層系統還是辦不到完美的收斂，因此為了解決這樣的問題，以下將重新設計狀態變數的平移量，考慮以下新的狀態變數平移座標系

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= x_1 \\ \bar{x}_2 &= x_2 + 2\end{aligned}\tag{1.26}$$

將(1.26)重複以上的步驟，並代入原始系統(1.1)當中，整理得到在新座標系之下的非線性系統如下

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_1 &= -\bar{x}_1 + \bar{x}_1^2 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \\ \dot{\bar{x}}_2 &= \bar{x}_1 + \left[1 + (\bar{x}_2 - 2)^2\right]u\end{aligned}\tag{1.27}$$

一樣利用逆向步進控制的概念引入虛擬控制輸入  $x_2 = \bar{\phi}$ ，因此系統內層迴路可以寫為

$$\dot{\bar{x}}_1 = -\bar{x}_1 + \bar{x}_1^2 + \bar{x}_1 \cdot \bar{\phi}(\bar{x}_1)\tag{1.28}$$

在此，將  $\bar{\phi}_1$  與前述所設計相同為

$$\bar{\phi} = -\bar{x}_1 - \bar{x}_1^2\tag{1.29}$$

將(1.29)代入(1.28)中，得出以下內層系統受到虛擬控制後，所表示的閉迴路系統

$$\dot{\bar{x}}_1 = -\bar{x}_1 - \bar{x}_1^3\tag{1.30}$$

比較(1.30)與(1.25)兩者的差異，可以知道在相同的虛擬控制律  $\bar{\phi}$  之下，透過不同的座標平移量，(1.30)式多出了  $-\bar{x}_1$  的項，這一項可以使得當  $\bar{x}_1$  在趨近於 0 的時候， $\dot{\bar{x}}_1$  還保有收斂的力道，以下一樣會透過模擬來解釋收斂性的差異，在圖 1.3 當中可以看出，與前述相同的  $\bar{\phi}_1$  可以使得系統(1.28)的狀態  $\bar{x}_1$  完美的收斂到達 0 的位置，而當  $\bar{x}_1$  收斂到 0 時，則  $\bar{\phi}$  亦也會收斂到 0，並且在透過外層迴路的設計使得  $x_2$  能夠收斂到  $\bar{x}_2 = \bar{\phi}$ ，則  $\bar{\phi}$  為 0 也能同於  $\bar{x}_2$  為 0，而在(1.26)當中可以知道， $\bar{x}_1$ 、 $\bar{x}_2$  分別等於 0 則可以反映出原始系統(1.1)中的  $x_1 = 0$ 、 $x_2 = -2$ ，因此與前面敘述不同的是，在新的平移座標系之下，當系統狀態皆到達 0，則等同於原始系統的狀態到達平衡點  $\mathbf{x}_e = (0, -2)$ 。(注意：這裡的平衡點與前面所敘述的  $\mathbf{x}_e = (0, -1)$  已經不相同了。)

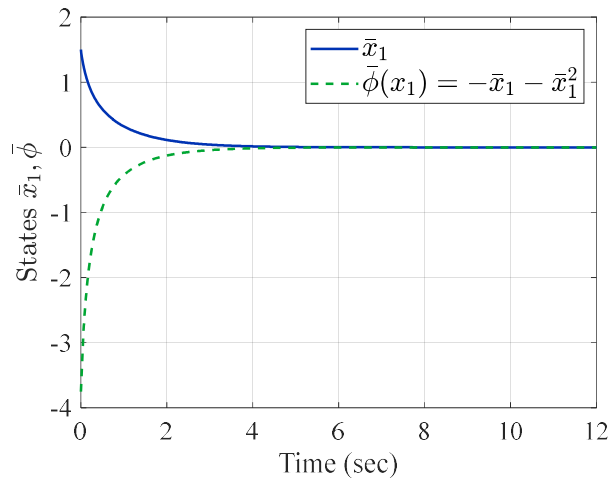


圖 1.3、經過第二種平移座標系之內層系統收斂情形

綜合以上的敘述，接下來的設計皆會以新的平移座標系(1.26)進行設計，經過以上的敘述，新的平移座標系統表示為

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_1 &= -\bar{x}_1 + \bar{x}_1^2 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \\ \dot{\bar{x}}_2 &= \bar{x}_1 + [1 + (\bar{x}_2 - 2)^2]u\end{aligned}\quad (1.31)$$

以上已經設計  $\bar{\phi} = -\bar{x}_1 - \bar{x}_1^2$  可以使得內層系統以漸近穩定的方式收斂到達 0，因此接下來會探討設計真實控制律  $u$ ，使得  $x_2 = \bar{\phi}$ ，重複以上的設計步驟，令控制律  $u$  如下

$$u = \frac{1}{1 + (\bar{x}_2 - 2)^2} \cdot (u_1 - \bar{x}_1) \quad (1.32)$$

且定義誤差變數  $z = \bar{x}_2 - \bar{\phi}$ ，因此內外層系統控制問題可以等效為將以下系統控制到達原點

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_1 &= -\bar{x}_1 + \bar{x}_1^2 + \bar{x}_1 \bar{\phi} + \bar{x}_1 z \\ \dot{z} &= v\end{aligned}\quad (1.33)$$

其中  $v = u_1 - \dot{\bar{\phi}}$ ，選擇 Lyapunov 候選函數為

$$V_2(\bar{x}_1, z) = \frac{1}{2} \bar{x}_1^2 + \frac{1}{2} z^2 \quad (1.34)$$

將(1.34)沿著(1.33)進行時間的一次導數如下

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(\bar{x}_1, z) &= \bar{x}_1 \dot{\bar{x}}_1 + z \dot{z} \\ &= \bar{x}_1 (-\bar{x}_1 + \bar{x}_1^2 + \bar{x}_1 \bar{\phi} + \bar{x}_1 z) + zv \\ &= -\bar{x}_1^2 + \bar{x}_1^3 + \bar{x}_1^2 \bar{\phi} + \bar{x}_1^2 z + zv\end{aligned}\quad (1.35)$$

將(1.29)代入(1.35)當中，則(1.35)可以化為

$$\dot{V}_2(\bar{x}_1, z) = -\bar{x}_1^2 - \bar{x}_1^4 + \bar{x}_1^2 z + zv \quad (1.36)$$

基於(1.36)，設計  $v$  與(1.22)相同如下

$$v = -\bar{x}_1^2 - 2z \quad (1.37)$$

因此最終在新的平移座標系之下，其 Lyapunov 函數沿著新的平移座標系統，進行時間的一次導數可以被推導為

$$\dot{V}_2(\bar{x}_1, z) = -\bar{x}_1^2 - \bar{x}_1^4 - 2z^2 \leq 0 \quad (1.38)$$

比較(1.38)與(1.23)可以發現，新平移座標系的 Lyapunov 函數相較於舊平移座標系的 Lyapunov 函數僅僅多出了  $-\bar{x}_1^2$  的項，而再將(1.37)反推回在新平移座標系下，真實的控制輸入  $u$  可以被設計為

$$u = \frac{1}{1 + (\bar{x}_2 - 2)^2} \cdot (-\bar{x}_1 - \bar{x}_1^2 - 2\bar{x}_2 + 2\bar{\phi} + \dot{\bar{\phi}}) \quad (1.39)$$

其中  $\bar{\phi} = -\bar{x}_1 - \bar{x}_1^2$ 、 $\dot{\bar{\phi}} = (-1 - 2\bar{x}_1) \cdot (-\bar{x}_1 + \bar{x}_1^2 + \bar{x}_1 \bar{x}_2)$ ，而由以上的設計，將所推導出的真實控制輸入(1.39)，再經由(1.26)的關係反推，並且輸入到原始非線性系統(1.1)當中，則可以推斷原始非線性系統的狀態  $x_1$ 、 $x_2$  最終會回到平衡點  $\mathbf{x}_e = (0, -2)$  上。



### Question (b)

將所得到的  $u(x_1, x_2)$  代回(1.1)式，進行閉迴路的 Matlab 模擬。選定不同的初始點，畫出相平面軌跡，驗證軌跡相對於原點的漸進穩定。

### Answer

首先，針對在第一種座標平移系統(1.5)下的設計進行模擬，在前一題當中提到，由於第一種座標平移，會使得被平移後的系統經過設計後，於狀態值趨於 0 時，收斂力道不夠，因此在座標平移系統下之狀態在短時間內，沒辦法很完美的收斂到平衡點  $\bar{x}_e = (0, 0)$  的位置，其模擬結果如 圖 1.4 所示，在 圖 1.4 當中可以看到，逆向步進控制的觀念在於，狀態  $\bar{x}_2$  必須收斂到虛擬控制輸入  $\bar{\phi}$  的軌跡，進一步使得狀態  $\bar{x}_1$ 、 $\bar{x}_2$  一起收斂到平衡點，這個現象在 圖 1.4 當中也是存在的，而在 圖 1.4 當中也可以看出，經過狀態平移後的系統在短時間內，是無法完美收斂到原點的。

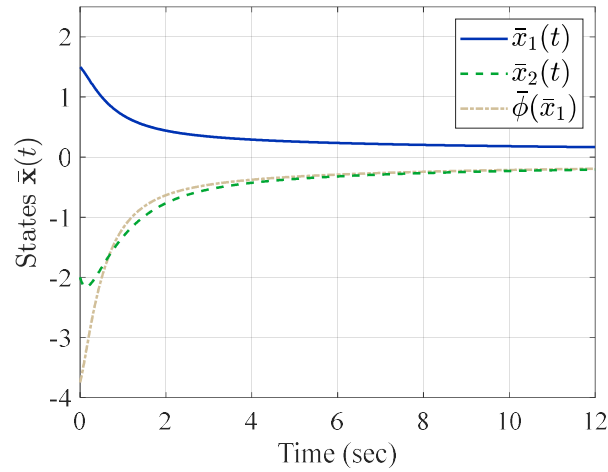


圖 1.4、第一種平移座標系之狀態收斂時間響應

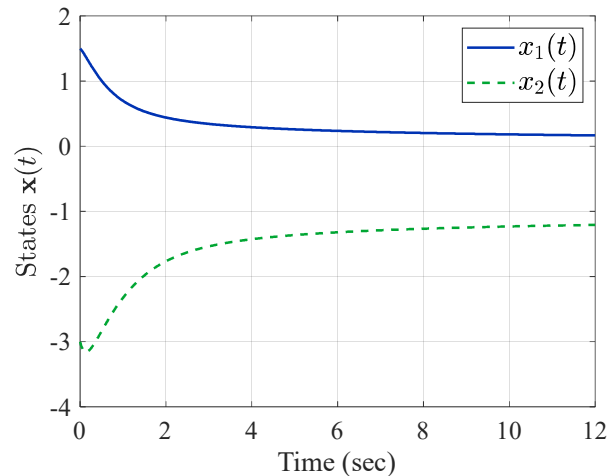


圖 1.5、原始系統狀態相對於平衡點  $\mathbf{x}_e = (0, -1)$  收斂之時間響應

圖 1.5 是將在第一種狀態平移座標系之下，所設計到的真實控制律  $u(\bar{x})$ ，輸入原始系統當中的狀態時間響應，而由於狀態平移的關係，可以推得出在此的原始系統平衡點位於  $x_e = (0, -1)$  的位置，因此在 圖 1.5 當中可以看到此時的狀態勢必也是要往  $x_e = (0, -1)$  的位置收斂，而在平移後的座標系當中，狀態在短時間內無法完美到達平衡點  $x_e = (0, 0)$ ，因此可以推論在原始座標系中，狀態也無法在短時間內完美收斂到  $x_e = (0, -1)$ ，這樣的現象也在 圖 1.5 看的見，而基於第一種平移座標系所設計的控制律(1.24)，其在 Matlab 中的模擬響應如 圖 1.6，這裡的控制律也與輸入到原始系統的控制律是相同的。

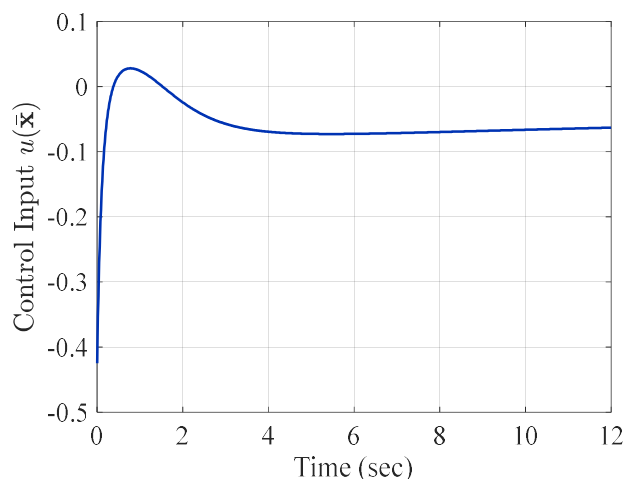


圖 1.6、在第一種平移座標系下所設計的輸入控制律響應

前面敘述提到，第一種平移座標系在狀態趨於平衡點時，收斂力道不夠，導致狀態在短時間內無法收斂到平衡點，因此在前一題當中又提出了第二種的狀態平移座標(1.26)，此狀態平移量可以使得內層系統的微分方程式中，多了  $-\bar{x}_1$  的項，而經過這個狀態平移所設計的控制律輸入回原始系統，則導致原始系統的平衡點由前面的位於  $x_e(0, -1)$ ，轉變為位於  $x_e = (0, -2)$ ，而被平移後的系統，其平衡點一樣位於  $\bar{x}_e = (0, 0)$  的位置，在第二種平移座標系之下，設計逆向步進控制律為(1.39)，而在收到控制後的平移座標系統，狀態收斂的時間響應也由 Matlab 模擬如 圖 1.7，在 圖 1.7 當中，一樣可以看到  $\bar{x}_2$  最後會收斂到虛擬控制輸入  $\bar{\phi}$  的軌跡當中，並且由於第二種座標平移量的緣故，內層系統在狀態趨於 0 時，還保有收斂力道，因此可以在 圖 1.7 當中看到，經過平移後之系統的兩個狀態，皆會在一定時間內完美的到達平衡點  $\bar{x}_e = (0, 0)$  的位置，而這也反映到原始系統的狀態在經過相同控制律輸入之下，系統狀態可以完美的收斂到平衡點  $x_e = (0, -2)$  的位置如 圖 1.8 所示。

圖 1.9 為在第二種座標平移系統下，利用逆向步進的觀念，所設計的控制輸入(1.39)之 Matlab 模擬響應圖，在 圖 1.9 中可以看到，由於控制輸入被設計為，與經過轉換後的系統狀態相依，因此當狀態到達平衡點  $\bar{x}_e = (0, 0)$  時，則此時的控制律也收斂到 0，而與之不同的是 圖 1.6，由於第一種狀態平移下系統無法很完美的收斂到平衡點(原點)，因此控制律的收斂速度也是非常的慢，無法回到 0。

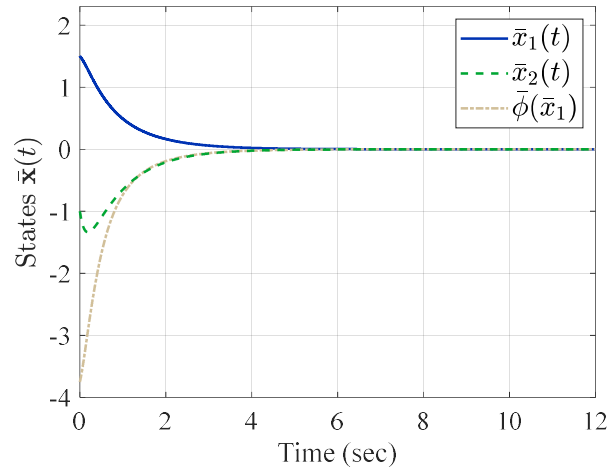


圖 1.7、第二種平移座標系之狀態收斂時間響應

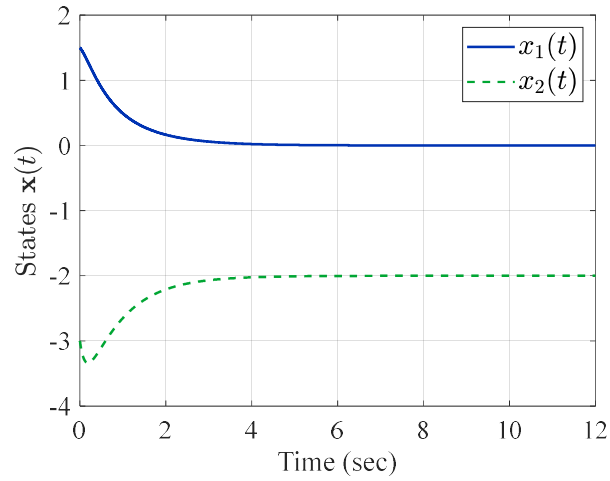


圖 1.8、原始系統狀態相對於平衡點  $\mathbf{x}_e = (0, -2)$  收斂之時間響應

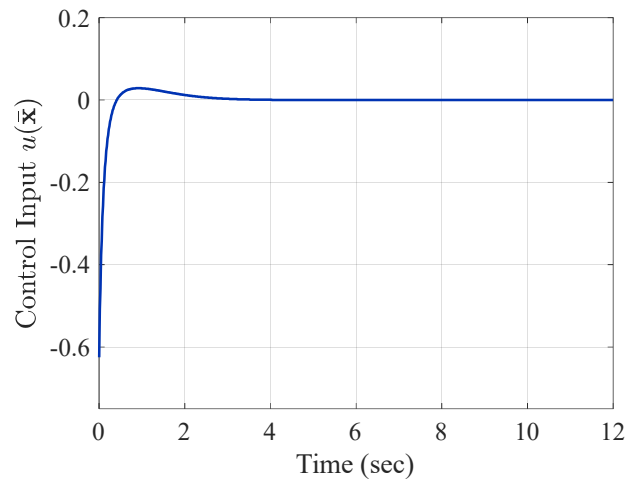


圖 1.9、在第二種平移座標系下所設計的輸入控制律響應

以上皆為系統狀態對於時間的響應，接著，利用 Matlab 模擬系統狀態在相平面的軌跡如下圖。首先，選擇了 9 個經過平移後之系統，於平衡點(原點)附近之初始值，圖 1.10 為在第一種座標平移座標系設計下，9 個初始值分別對於平衡點的收斂情形，圖 1.10 a) 為狀態在平移座標系下收斂於平衡點(原點)的相平面軌跡，圖 1.10 b) 為狀態在原始系統下收斂於平衡點  $\mathbf{x}_e = (0, -1)$  的相平面軌跡，有趣的是由學理穩定性分析當中，我們推論此系統相對於平衡點為漸進穩定，而在 圖 1.10 當中，相平面中的軌跡都只有收斂在平衡點的附近，這點也呼應了上面的系統模擬時間不夠長，當狀態趨於平衡點時收斂力道不夠的問題。

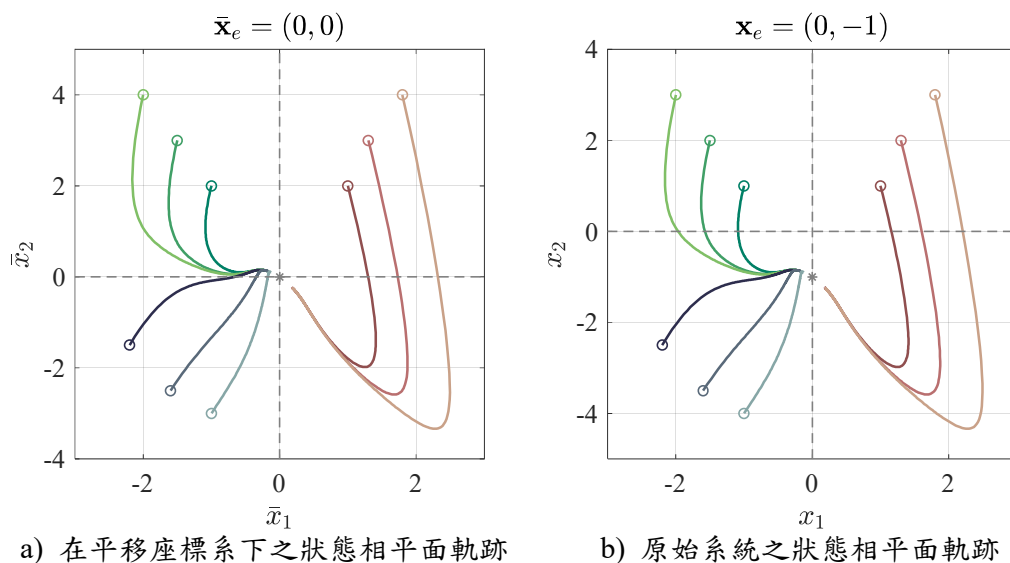


圖 1.10、於第一種平移座標系下，設計逆步式控制之狀態相平面軌跡

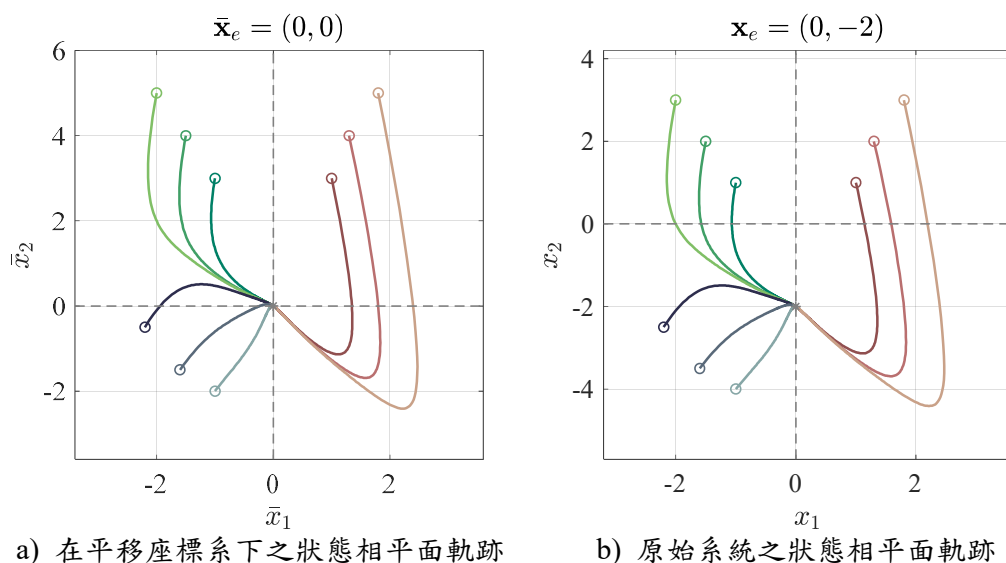


圖 1.11、於第二種平移座標系下，設計逆步式控制之狀態相平面軌跡

考慮第二種平移座標系，則不會存在當狀態趨於平衡點時，收斂速度不夠快的問題，從 圖 1.11 的系統相平面軌跡當中可以看出，不管是在平移座標系下之狀態軌跡，亦或者是在原始系統下之狀態軌跡，兩者的相平面軌跡皆有呈現相對於平衡點漸進穩定的現象，而由於兩個系統是狀態平移的關係，因此兩者的相平面收斂軌跡亦會相同，而差別僅在於，對平移後的系統而言平衡點位於  $\bar{\mathbf{x}}_e = (0, 0)$ ，而對於原始系統而言平衡點位於  $\mathbf{x}_e = (0, -2)$ 。

### Question (c)

擴大初始點的分布範圍，從 Matlab 的相平面軌跡圖，判斷所得到的閉迴路系統是區域穩定還是全域穩定？

#### Answer

在(b)小題當中，對於經過平移後之系統，狀態初始值的選擇皆位於正負 4 以內，而在本小題，將擴大所選擇的初始值，以驗證系統相對於平衡點為全域漸進穩定。

首先，選擇原始系統狀態的初始值為  $(x_1(0), x_2(0)) = (50, 40)$ ，經過第二種狀態平移(1.26)，在第二種平移座標系下的系統初始值為  $(\bar{x}_1(0), \bar{x}_2(0)) = (50, -38)$ ，重複(b)小題的模擬，圖 1.12 為在第二種平移座標系下，狀態對於平衡點  $\bar{\mathbf{x}}_e = (0, 0)$  的收斂時間響應，圖 1.13 為在第二種平移座標系下設計逆步式控制，並且轉回原始系統，狀態對於平衡點  $\mathbf{x}_e = (0, -2)$  的收斂時間響應。

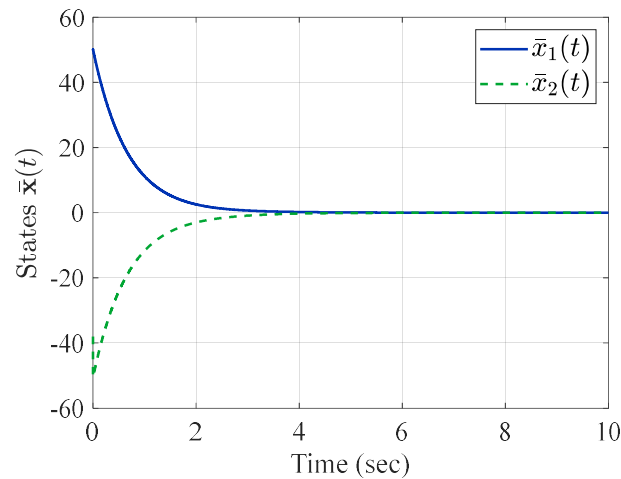


圖 1.12、第二種平移座標系在大初始值下，狀態收斂時間響應

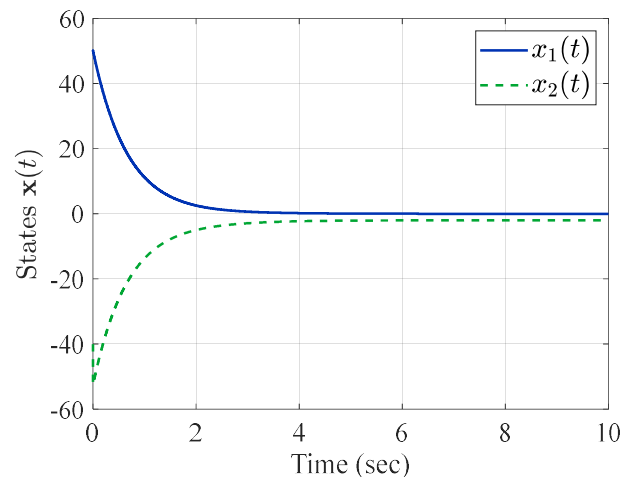


圖 1.13、原始系統狀態在大初始值下，對於平衡點之收斂時間響應

由圖 1.12、圖 1.13 中可以看出，系統在大初始值下，狀態時間響應也會回到平衡點，這也代表著在此透過逆步式控制所設計的系統是為全域穩定的，然而又由於控制律被(1.39)中，具有為某幾項為高度非線性，因此在初始值較大時，一開始的控制律會過大如圖 1.14，這個現象會導致實現上的困難，並且使得系統容易發散。

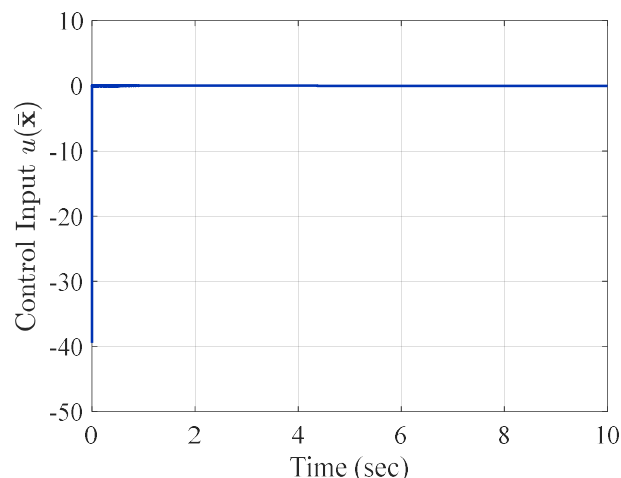


圖 1.14、在大初始值設定下，第二種平移座標系之控制輸入響應

接著進一步選擇 9 組較大的原始系統狀態的初始值  $\mathbf{x}(0)$ ，以及其對應到的第二種平移座標系之狀態初始值  $\bar{\mathbf{x}}(0)$ ，利用繪出兩者系統狀態的相平面軌跡，較能夠清楚驗證系統相對於平衡點為漸進穩定，且由於初始值較選擇很大，因此為全域漸進穩定如圖 1.15。

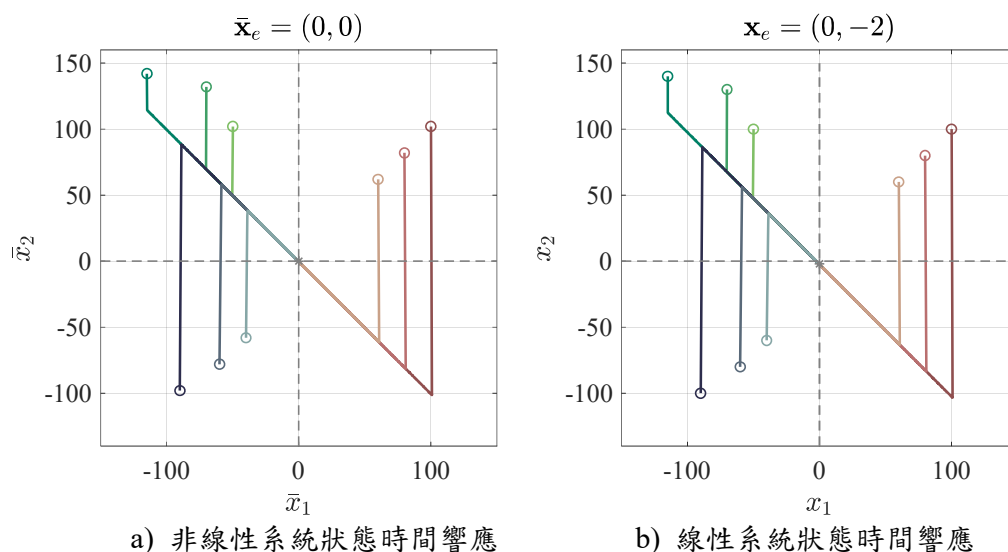


圖 1.15、系統受到回授線性化控制之收斂時間響應圖

在本題 Matlab 模擬過程中，使用了兩種積分演算法，分別為不定積分步長的 ODE45 以及固定積分步長的 RK4，有趣的是，我們發現若是使用了 RK4 積分上述的系統，積分步長必須選擇夠細，否則在大初始值下模擬會導致系統發散。

### Question (d)

檢視 Question (a)所得到的 Lyapunov 函數  $V(x_1, x_2)$ ，從學理上判斷它是保證區域穩定還是全域穩定？與 Matlab 的模擬結果是否相符？

### Answer

根據(c)小題的模擬結果，我們了解系統初始值範圍較大時，狀態相對於平衡點亦為漸進穩定，因此我們推論系統受到以上所設計的逆步式控制後，平衡點為全域漸進穩定，而其實早在經由(a)小題的設計後，我們已經知道這個結果了，原因如下：首先，考慮原始系統經過第二種的狀態平移(1.26)，因此在第二種平移座標系下的系統被表示為

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_1 &= -\bar{x}_1 + \bar{x}_1^2 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \\ \dot{\bar{x}}_2 &= \bar{x}_1 + \left[1 + (\bar{x}_2 - 2)\right]^2 u\end{aligned}\quad (1.40)$$

將被設計過後的真實控制輸入

$$u = \frac{1}{1 + (\bar{x}_2 - 2)^2} \cdot \left(-\bar{x}_1 - \bar{x}_1^2 - 2\bar{x}_2 + 2\bar{\phi} + \dot{\bar{\phi}}\right) \quad (1.41)$$

代回(1.40)當中，其中  $\bar{\phi} = -\bar{x}_1 - \bar{x}_1^2$ 、 $\dot{\bar{\phi}} = (-1 - 2\bar{x}_1) \cdot (-\bar{x}_1 + \bar{x}_1^2 + \bar{x}_1 \bar{x}_2)$ ，經過整理，受控閉迴路系統可以被寫為

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_1 &= -\bar{x}_1 + \bar{x}_1^2 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \\ \dot{\bar{x}}_2 &= -\bar{x}_1 - 2\bar{x}_1^2 - 2\bar{x}_1^3 - 2\bar{x}_2 - \bar{x}_1 \bar{x}_2 - 2\bar{x}_1^2 \bar{x}_2\end{aligned}\quad (1.42)$$

在(1.42)當中， $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 0)$ 使得  $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix}^T$  因此系統平衡點為  $\bar{\mathbf{x}}_e = (0, 0)$ ，基於此平衡點，選擇相同於(1.34)的候選 Lyapunov 函數為

$$V(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \frac{1}{2} \bar{x}_1^2 + \frac{1}{2} (\bar{x}_2 + \bar{x}_1 + \bar{x}_1^2)^2 \quad (1.43)$$

觀察 (1.43)，當  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \neq (0, 0)$  時，則  $V(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \neq 0$ ，而當  $\bar{x}_1 \rightarrow \infty$   $\bar{x}_2 \rightarrow \infty$  則  $V(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \rightarrow \infty$ ，將(1.43)沿著系統(1.42)對時間做一次導數推導，並參考(1.38)如下

$$\begin{aligned}\dot{V}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) &= \frac{\partial V}{\partial \bar{x}_1} \dot{\bar{x}}_1 + \frac{\partial V}{\partial \bar{x}_2} \dot{\bar{x}}_2 \\ &= \left[\bar{x}_1 + (\bar{x}_2 + \bar{x}_1 + \bar{x}_1^2)(1 + 2\bar{x}_1)\right] \dot{\bar{x}}_1 + (\bar{x}_2 + \bar{x}_1 + \bar{x}_1^2) \dot{\bar{x}}_2 \\ &= -\bar{x}_1^2 - \bar{x}_1^4 - 2(\bar{x}_2 + \bar{x}_1 + \bar{x}_1^2)^2 \leq 0\end{aligned}\quad (1.44)$$

在(1.44)中，當  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \neq (0, 0)$  時則所有  $\dot{V}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) < 0$ ，且(1.43)的 Lyapunov 函數滿足 growth condition 因此可以由學理的穩定性分析判斷，系統狀態  $\bar{x}_1$ 、 $\bar{x}_2$  對於平衡點(原點)是為全域漸進穩定的，這點與(c)小題的模擬結果是為相同的。



### Question (c)

檢查 Question (a)所列出的設計步驟，判斷所得到的控制律  $u(x_1, x_2)$  是否為唯一？如果不是，嘗試求得另一個可以保證漸進穩定的控制律  $\tilde{u}(x_1, x_2)$ ，並比較  $\tilde{u}(x_1, x_2)$  與  $u(x_1, x_2)$  的模擬結果。

### Answer

根據以上的敘述，在第二種平移座標系(1.26)下，系統表示為

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_1 &= -\bar{x}_1 + \bar{x}_1^2 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \\ \dot{\bar{x}}_2 &= \bar{x}_1 + \left[1 + (\bar{x}_2 - 2)^2\right] u\end{aligned}\quad (1.45)$$

接著，針對內層系統，假設虛擬控制律  $\bar{x}_2 = \bar{\phi}(\bar{x}_1)$ ，因此內層系統被寫為

$$\dot{\bar{x}}_1 = -\bar{x}_1 + \bar{x}_1^2 + \bar{x}_1 \cdot \bar{\phi}(\bar{x}_1) \quad (1.46)$$

而在(a)小題中，將  $\bar{\phi}(\bar{x}_1)$  選擇為  $\bar{\phi}(\bar{x}_1) = -\bar{x}_1 - \bar{x}_1^2$ ，使得內層系統可以被推導為

$$\dot{\bar{x}}_1 = -\bar{x}_1 - \bar{x}_1^3 \quad (1.47)$$

透過(1.46)式，我們知道  $\bar{\phi}(\bar{x}_1)$  的選擇目的是為了讓內層系統穩定，從這個論述來說， $\bar{\phi}(\bar{x}_1)$  的解不唯一，在本小題中，刻意選擇與(a)小題不同為  $\bar{\phi}(\bar{x}_1) = -\bar{x}_1$ ，並將其代入(1.46)當中，得到本題所設計的內層閉迴路系統

$$\dot{\bar{x}}_1 = -\bar{x}_1 \quad (1.48)$$

比較(1.47)與(1.48)兩式，一個是(a)小題所設計的內層閉迴路系統，一個是本題所設計的內層閉迴路系統，可以看出，本題所設計的內層迴路為線性的，並且一樣能夠收斂到原點，有了本題所設計的  $\bar{\phi}(\bar{x}_1)$  後，接下來要設計真實控制律，使得  $\bar{x}_2$  的響應可以趨於虛擬控制律  $\bar{\phi}(\bar{x}_1)$ ，因此重複(a)小題的步驟，令控制律  $u$  如下

$$u = \frac{1}{1 + (\bar{x}_2 - 2)^2} \cdot (u_1 - \bar{x}_1) \quad (1.49)$$

且定義誤差變數  $z = \bar{x}_2 - \bar{\phi}$ ，因此系統控制問題可以等效為將以下系統控制到達原點

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_1 &= -\bar{x}_1 + \bar{x}_1^2 + \bar{x}_1 \bar{\phi} + \bar{x}_1 z \\ \dot{z} &= v\end{aligned}\quad (1.50)$$

其中  $v = u_1 - \dot{\bar{\phi}}$ ，選擇 Lyapunov 候選函數為

$$V_2(\bar{x}_1, z) = \frac{1}{2} \bar{x}_1^2 + \frac{1}{2} z^2 \quad (1.51)$$

將(1.51)沿著(1.50)進行時間的一次導數如下

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(\bar{x}_1, z) &= \bar{x}_1 \dot{\bar{x}}_1 + z \dot{z} \\ &= \bar{x}_1 (-\bar{x}_1 + \bar{x}_1^2 + \bar{x}_1 \bar{\phi} + \bar{x}_1 z) + z v \\ &= -\bar{x}_1^2 + \bar{x}_1^3 + \bar{x}_1^2 \bar{\phi} + \bar{x}_1^2 z + z v\end{aligned}\quad (1.52)$$

將虛擬控制律  $\bar{\phi}(\bar{x}_1)$  代入(1.52)中，可以進一步推導如下

$$\dot{V}_2(\bar{x}_1, z) = -\bar{x}_1^2 + \bar{x}_1^2 z + z v \quad (1.53)$$

基於(1.53)，設計  $v$  與(1.22)相同如下

$$v = -\bar{x}_1^2 - 2z \quad (1.54)$$

因此最終在新的平移座標系之下，其 Lyapunov 函數沿著新的平移座標系統，進行時間的一次導數可以被推導為

$$\dot{V}_2(\bar{x}_1, z) = -\bar{x}_1^2 - 2z^2 \leq 0 \quad (1.55)$$

比較(1.38)與(1.55)可以發現，本題的 Lyapunov 函數相較於(a)小題的 Lyapunov 函數少了  $-\bar{x}_1^4$  的項，而再將(1.54)反推回在新平移座標系下，真實的控制輸入  $u$  可以被設計為

$$u = \frac{1}{1 + (\bar{x}_2 - 2)^2} \cdot \left( -\bar{x}_1 - \bar{x}_1^2 - 2\bar{x}_2 + 2\bar{\phi} + \dot{\bar{\phi}} \right) \quad (1.56)$$

其中  $\bar{\phi} = -\bar{x}_1$ 、 $\dot{\bar{\phi}} = -(-\bar{x}_1 + \bar{x}_1^2 + \bar{x}_1\bar{x}_2)$ ，比較(a)小題所設計的控制律(1.39)，以及本題所設計的控制律，可以發現，兩者的結構無異，差別僅在於  $\bar{\phi}$ 、 $\dot{\bar{\phi}}$  所選擇的不同。

以下將針對本題所設計的控制律，輸入狀態平移系統以及原始系統，並檢測其是否受到控制後系統狀態響應可以收斂到平衡點。

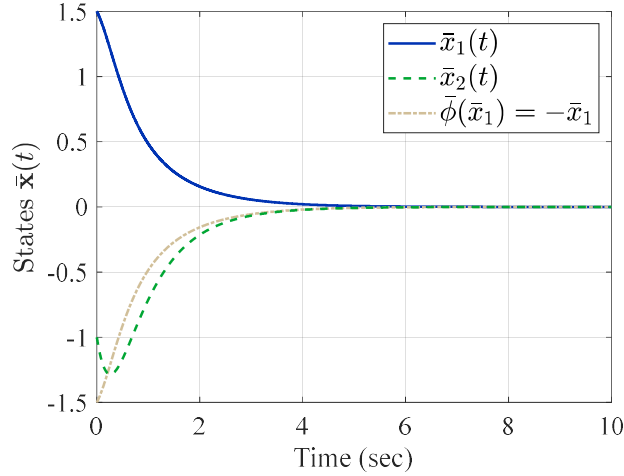


圖 1.16、設計  $\bar{\phi} = -\bar{x}_1$  於第二種平移座標系之狀態時間響應

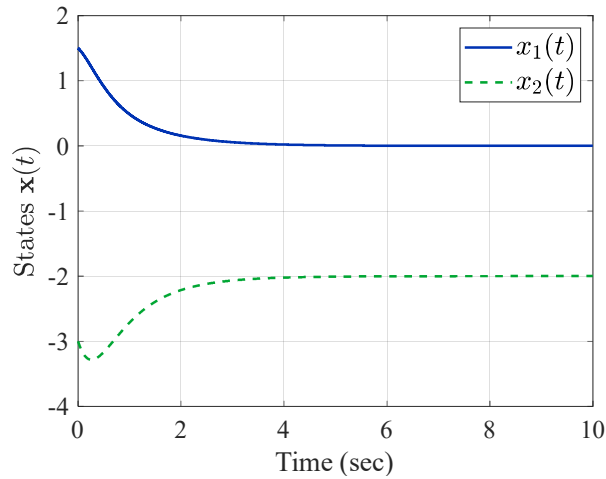


圖 1.17、設計  $\bar{\phi} = -\bar{x}_1$  於原始系統下之狀態時間響應

圖 1.16 為在平移座標系下，系統狀態收斂到平衡點的時間響應，由圖中可以看到本題的  $\bar{\phi}$  設計為  $\bar{\phi} = -\bar{x}_1$ ，並且狀態  $\bar{x}_2$  會在一定的時間內收斂到  $\bar{\phi}$  的軌跡，最終  $\bar{x}_1$ 、 $\bar{x}_2$  兩個狀態皆會收斂到平衡點(原點)，圖 1.17 為在原始系統下的狀態收斂時間響應，在圖中也可以看到狀態亦會朝向原始的平衡點收斂，而 圖 1.18 為本題所設計的對於兩個系統的控制輸入時間響應。比較(a)小題與本小題設計的  $\bar{\phi}$  所對應到的真實控制律輸入如 圖 1.19，得出不同的控制律，卻都能使得系統相對於平衡點為漸進穩定，而仔細觀察 圖 1.19，可以發現，兩者的控制律響應圖趨勢是為相同的，且兩者的數值差異也不大，會有這樣的結果我們判斷主要有兩個原因:1.由於本題的設計皆採用逆向步進式控制的设计方法，因此控制律皆有相同的結構。2.由於在兩個系統中，初始值的設置相同較小，因此對於  $\bar{\phi}$ 、 $\dot{\bar{\phi}}$  來說差異不大，而兩者的控制律差別也僅在於  $\bar{\phi}$ 、 $\dot{\bar{\phi}}$ ，因此從兩者的時間響應較無法看出明顯的差異。

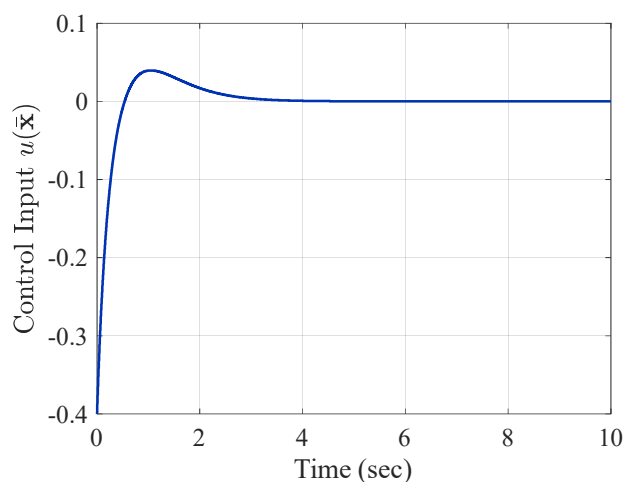


圖 1.18、設計  $\bar{\phi} = -\bar{x}_1$  的逆步式控制輸入響應

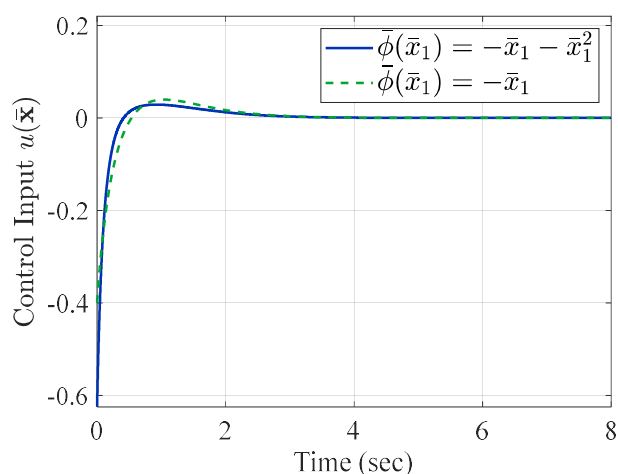


圖 1.19、不同的  $\bar{\phi}$  所對應到的不同逆步式控制輸入響應

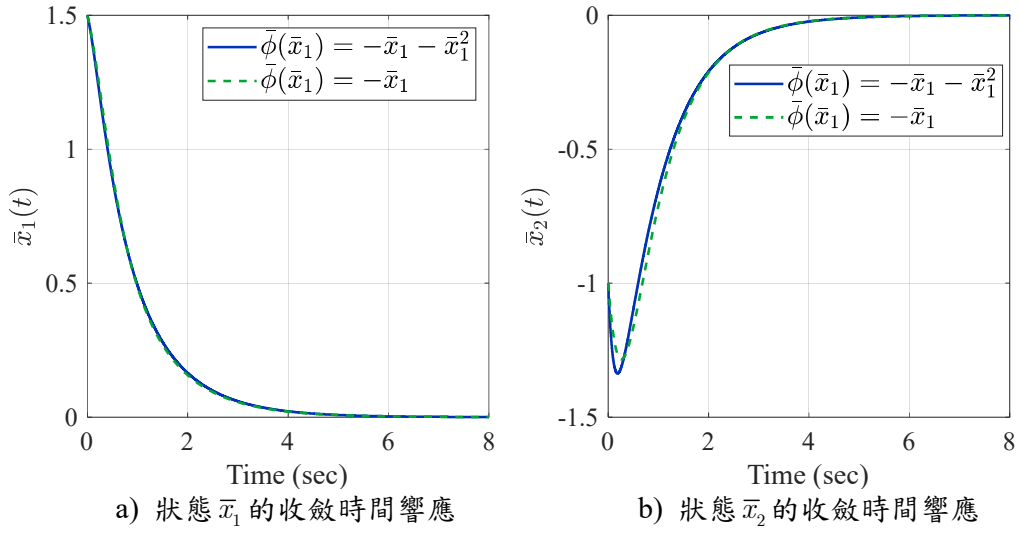


圖 1.20、比較不同的控制律對於平移座標系的狀態時間響應

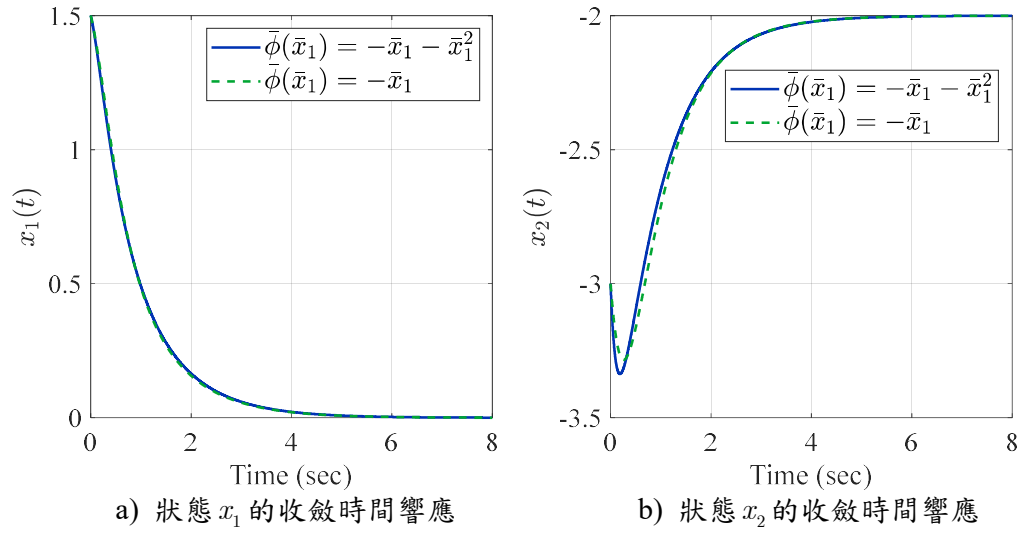


圖 1.21、比較不同的控制律對於原始系統的狀態時間響應

雖然設計了不同的  $\bar{\phi}$ ，導致控制律的不同，可是初始值的設定，導致控制律與(a)小題的差異不大，因此可想而知，系統狀態響應收斂的情形差異應該也不大，圖 1.20 以及 圖 1.21 分別表示了兩種不同控制律之下，系統狀態響應收斂的情形，在圖中可以發現，由於初始值的設置較小，因此在經過設計後的系統高階非線性項的部分也被忽略，因此與(a)小題所設計的狀態響應差異不大，不過還是有些微的差別。

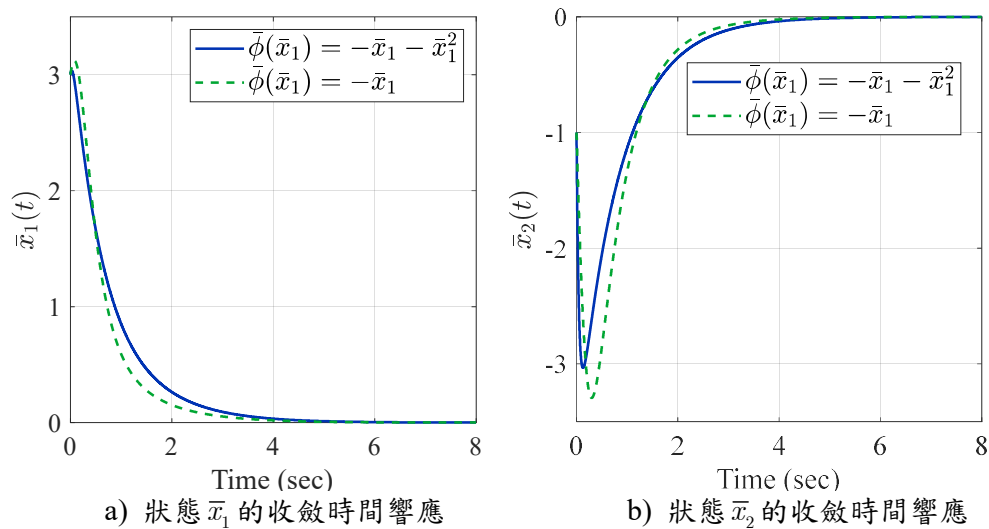


圖 1.22、增加初始值並比較不同的控制律對於平移座標系的狀態時間響應

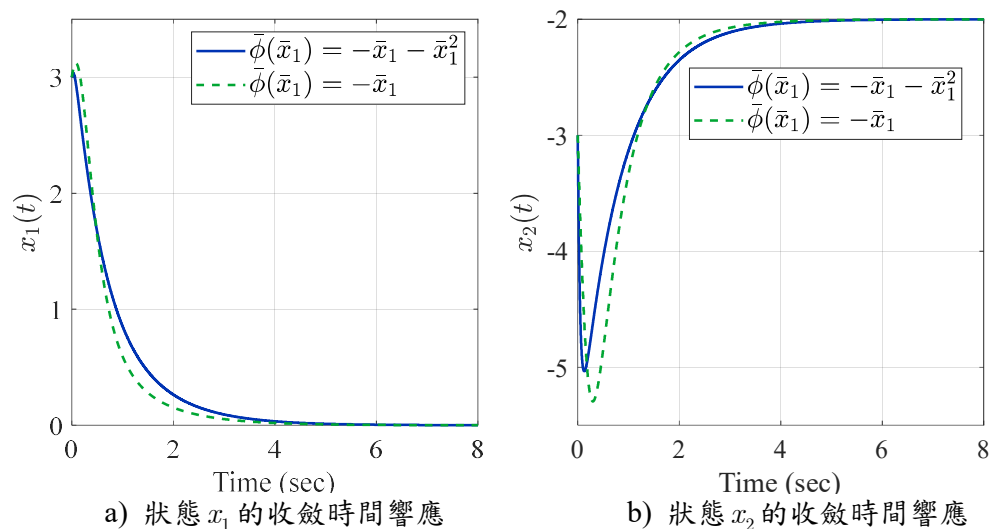


圖 1.23、增加初始值並比較不同的控制律對於原始系統的狀態時間響應

由於以上的初始值設置，導致系統收斂的現象差異不明顯，因此在模擬的過程中，進一步的將初始值增加，而初始值的設定增加後，也可以從 圖 1.22 以及 圖 1.23 中發現，系統的狀態收斂響應皆有所不同了，而其真實控制律的比較如 圖 1.24 所示，由 圖 1.24 發現，不同的控制律在大的初始值下，控制律的初始值差異也被放大了許多。

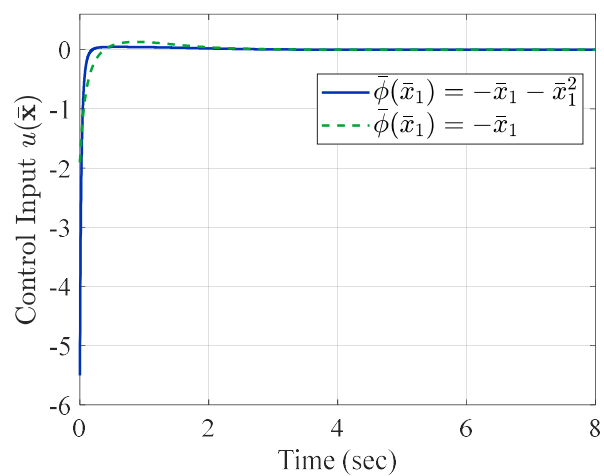


圖 1.24、線性系統於 10 個不同初始值釋放之相平面軌跡

## Matlab Code

### 第一題 - (a)

```

%% Nonlinear Control HW7 - Q1 - (a)

clear ; clc ; close all

dt = 0.01 ; t_final = 1000 ;
t = 0 : dt : t_final ;
x1_0 = 1.5 ; % Initial of x1

%% Plot 1
LW1 = 1.6 ;
LW2 = 1 ;
FS1 = 16 ;
FS_lg = 18 ;

[ t, X1 ] = RK4( @(t,X) NonlinearSystem1(X) , [0 t_final], x1_0 ,dt) ;
[ t, X2 ] = RK4( @(t,X) NonlinearSystem2(X) , [0 t_final], x1_0 ,dt) ;

for i=1:length(t)
    [ dX1(:,i) , phi1(i,1) ] = NonlinearSystem1(X1(i)) ;
    [ dX2(:,i) , phi2(i,1) ] = NonlinearSystem2(X2(i)) ;
end

f1 = figure ;
plot(t,X1,'-', 'Color',[0 0.2 0.7], 'LineWidth',LW1) ; hold on ;
plot(t,phi1,'--', 'Color',[0 0.65 0.2], 'LineWidth',LW1) ;
hsl(1)=legend({'\bar{x}_1$', '\bar{\phi}(x_1)=-\bar{x}_1-\bar{x}_1^2$'}, 'Interpreter', 'latex');
ax1(1) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('States \bar{x}_1, \bar{\phi} $', 'Interpreter', 'Latex') % y label
axis normal
grid on

f2 = figure ;
plot(t,X2,'-', 'Color',[0 0.2 0.7], 'LineWidth',LW1) ; hold on ;
plot(t,phi2,'--', 'Color',[0 0.65 0.2], 'LineWidth',LW1) ;
hsl(2)=legend({'\bar{x}_1$', '\bar{\phi}(x_1)=-\bar{x}_1-\bar{x}_1^2$'}, 'Interpreter', 'latex');

```

```

ax1(2) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('States      $\bar{x}_1, \bar{\phi}$ ', 'Interpreter', 'Latex') % y label
axis normal
grid on

for i = 1:length(ax1)
    set(ax1(i), 'FontSize', FS1, 'FontName', 'Times New Roman')
end

for i = 1:length(hs1)
    set(hs1(i), 'FontSize', FS_lg, 'FontName', 'Times New Roman')
end

%% Nonlinear System Function
function [dX , phi] = NonlinearSystem1(X)
    phi = -X-X^2;
    dX = X^2+X*phi ;
end

function [dX , phi] = NonlinearSystem2(X)
    phi = -X-X^2;
    dX = -X +X^2+X*phi ;
end

```

### 第一題 - (b)

```

%% Nonlinear Control HW7 - Q1 - (b)
clear ; clc ; close all
dt = 0.01 ; t_final = 20 ;
t = 0 : dt : t_final ;
x1_0 = 1.5 ; % Initial of x1
x2_0 = -3 ; % Initial of x2
X_0 = [ x1_0 ; x2_0 ] ;

%%%%%%%% 10 arbitrary initial state values %%%%%%%%%
xt1 = [ 1 ; 1 ] ; xt2 = [ 1.3 ; 2 ] ; xt3 = [ 1.8 ; 3 ] ; xt4 = [ -1 ; 1 ] ; xt5 = [ -1.5 ; 2 ] ; xt6 = [ -2 ; 3 ] ;
xt7 = [ -2.2 ; -2.5 ] ; xt8 = [ -1.6 ; -3.5 ] ; xt9 = [ -1 ; -4 ] ;
Xt_0 = [ xt1 , xt2 , xt3 , xt4 , xt5 , xt6 , xt7 , xt8 , xt9 ] ;

```



```

%%% linear System
Z1_0 = [ x1_0 ; x2_0+1 ] ; % Initial of transformation states Z1
Z2_0 = [ x1_0 ; x2_0+2 ] ; % Initial of transformation states Z2
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for i = 1:length(Xt_0(1,:))
    Z1t_0(:,i) = [ Xt_0(1,i) ; Xt_0(2,i)+1 ] ;
    Z2t_0(:,i) = [ Xt_0(1,i) ; Xt_0(2,i)+2 ] ;
end

%%% Plot 1
LW1 = 1.6 ;
LW2 = 1 ;
FS1 = 16 ;
FS_lg = 18 ;

[ t , X1 ] = RK4( @(t,X) Nonlinear_System1(X) , [0 t_final], X_0 ,dt) ;
[ t , Z1 ] = RK4( @(t,Z) Nonlinear_System_of_CT1(Z) , [0 t_final], Z1_0 ,dt) ;
[ t , X2 ] = RK4( @(t,X) Nonlinear_System2(X) , [0 t_final], X_0 ,dt) ;
[ t , Z2 ] = RK4( @(t,Z) Nonlinear_System_of_CT2(Z) , [0 t_final], Z2_0 ,dt) ;
X1 = X1' ; Z1 = Z1' ;
X2 = X2' ; Z2 = Z2' ;
x1_1_c = X1(1,:) ; x2_1_c = X1(2,:) ;
z1_1_c = Z1(1,:) ; z2_1_c = Z1(2,:) ;
x1_2_c = X2(1,:) ; x2_2_c = X2(2,:) ;
z1_2_c = Z2(1,:) ; z2_2_c = Z2(2,:) ;

for i = 1:length(t)
    [ dX1(:,i) , PhiX1(i,1) , uX1(i,1)] = Nonlinear_System1(X1(:,i)) ;
    [ dZ1(:,i) , PhiZ1(i,1) , uZ1(i,1)] = Nonlinear_System_of_CT1(Z1(:,i)) ;
    [ dX2(:,i) , PhiX2(i,1) , uX2(i,1)] = Nonlinear_System2(X2(:,i)) ;
    [ dZ2(:,i) , PhiZ2(i,1) , uZ2(i,1)] = Nonlinear_System_of_CT2(Z2(:,i)) ;
end

f1 = figure ;
plot(t,x1_1_c,'-','Color',[0 0.2 0.7],'LineWidth',LW1) ; hold on ;
plot(t,x2_1_c,'--','Color',[0 0.65 0.2],'LineWidth',LW1) ;
hs1(1)=legend({'$x_1(t)$','$x_2(t)$'},'Interpreter','latex');
ax1(1) = gca ;

```

```

xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('States    $\mathbf{x}(t)$','Interpreter','Latex') % y label
axis normal
grid on

f2 = figure ;
p1 = plot(t,z1_1_c,'-','Color',[0 0.2 0.7],'LineWidth',LW1) ; hold on ;
p2 = plot(t,PhiZ1,'-','Color',[0.82 0.75 0.6],'LineWidth',LW1) ;
p3 = plot(t,z2_1_c,'--','Color',[0 0.65 0.2],'LineWidth',LW1) ;
hs1(2)=legend([p1,p3,p2],{'$\bar{x}_1(t)$','$\bar{x}_2(t)$','$\bar{\phi}(\bar{x}_1)$'},'Interpreter','latex');
ax1(2) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('States    $\bar{\mathbf{x}}(t)$','Interpreter','Latex') % y label
axis([0 t_final -4 2.5])
axis normal
grid on

f3 = figure ;
plot(t,uX1,'-','Color',[0 0.2 0.7],'LineWidth',LW1) ; hold on ;
ax1(3) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('Control Input $u(\bar{\mathbf{x}})$','Interpreter','Latex'); % y label
axis normal
grid on

f4 = figure ;
plot(t,x1_2_c,'-','Color',[0 0.2 0.7],'LineWidth',LW1) ; hold on ;
plot(t,x2_2_c,'--','Color',[0 0.65 0.2],'LineWidth',LW1) ;
hs1(3)=legend({'$x_1(t)$','$x_2(t)$'},'Interpreter','latex');
ax1(4) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('States    $\mathbf{x}(t)$','Interpreter','Latex') % y label
axis normal
grid on

f5 = figure ;
p4 = plot(t,z1_2_c,'-','Color',[0 0.2 0.7],'LineWidth',LW1) ; hold on ;
p5 = plot(t,PhiZ2,'-','Color',[0.82 0.75 0.6],'LineWidth',LW1) ;

```

```

p6 = plot(t,z2_2_c,'--','Color',[0 0.65 0.2],'LineWidth',LW1) ;
hs1(4)=legend([p4,p6,p5],{'$\bar{x}_1(t)$','$\bar{x}_2(t)$','$\bar{\phi}(\bar{x}_1)$'},'Interpreter','latex');
ax1(5) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('States $\bar{\mathbf{x}}(t)$','Interpreter','Latex') % y label
axis normal
grid on

f6 = figure ;
plot(t,uX2,'-','Color',[0 0.2 0.7],'LineWidth',LW1) ; hold on ;
ax1(6) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('Control Input $u(\bar{\mathbf{x}})$','Interpreter','Latex'); % y label
axis([0 t_final -0.75 0.2])
axis normal
grid on

for i = 1:length(ax1)

set(ax1(i),'XGrid','on','YGrid','on','XMinorGrid','off','YMinorGrid','off','FontSize',FS1,'FontName','Times
New Roman')
end

for i = 1:length(hs1)
    set(hs1(i),'FontSize',FS_1g,'FontName','Times New Roman')
end

%% Plot 2
Dfcolor1 = pink(8) ;
Dfcolor1 = Dfcolor1(2:4,:);
Dfcolor2 = summer(5) ;
Dfcolor2 = Dfcolor2(1:3,:);
Dfcolor3 = bone(6) ;
Dfcolor3 = Dfcolor3(2:4,:);
Dfcolor = [Dfcolor1;Dfcolor2;Dfcolor3] ;

f7 = figure ;
for i = 1:length(Xt_0(1,:))

```

```

[ t , Xt1 ] = RK4( @(t,X) Nonlinear_System1(X) , [0 t_final], Xt_0(:,i) ,dt) ;
xt1_1_c = Xt1(:,1) ; xt1_2_c = Xt1(:,2) ;

plot(xt1_1_c,xt1_2_c,'Color',Dfcolor(i,:), 'LineWidth',LW1) ; hold on ;
plot(xt1_1_c(1,1),xt1_2_c(1,1),'o','Color',Dfcolor(i,:), 'LineWidth',LW2) ; hold on ;
end
plot([-5 10],[0 0], '--','Color',[0.5 0.5 0.5], 'LineWidth',LW2) ;
plot([0 0],[-10 15], '--','Color',[0.5 0.5 0.5], 'LineWidth',LW2) ;
plot(0,-1,'*','Color',[0.5 0.5 0.5], 'LineWidth',LW2) ;
ax2(1) = gca ;
title('$\mathbf{x}_e = (0,-1)$','Interpreter','Latex')
xlabel('$x_1$','Interpreter','Latex') % x label
ylabel('$x_2$','Interpreter','Latex') % y label
axis([-3 3 -5 4 ])
axis square

f8 = figure ;
for i = 1:length(Xt_0(1,:))
    [ t , Zt1 ] = RK4( @(t,Z) Nonlinear_System_of_CT1(Z) , [0 t_final], Zt_0(:,i) ,dt) ;
    zt1_1_c = Zt1(:,1) ; zt1_2_c = Zt1(:,2) ;

    plot(zt1_1_c,zt1_2_c,'Color',Dfcolor(i,:), 'LineWidth',LW1) ; hold on ;
    plot(zt1_1_c(1,1),zt1_2_c(1,1),'o','Color',Dfcolor(i,:), 'LineWidth',LW2) ; hold on ;
end
plot([-5 10],[0 0], '--','Color',[0.5 0.5 0.5], 'LineWidth',LW2) ;
plot([0 0],[-10 15], '--','Color',[0.5 0.5 0.5], 'LineWidth',LW2) ;
plot(0,0,'*','Color',[0.5 0.5 0.5], 'LineWidth',LW2) ;
ax2(2) = gca ;
title('$\bar{\mathbf{x}}_e = (0,0)$','Interpreter','Latex')
xlabel('$\bar{x}_1$','Interpreter','Latex') % x label
ylabel('$\bar{x}_2$','Interpreter','Latex') % y label
axis([-3 3 -4 5 ])
axis square

f9 = figure ;
for i = 1:length(Xt_0(1,:))
    [ t , Xt2 ] = RK4( @(t,X) Nonlinear_System2(X) , [0 t_final], Xt_0(:,i) ,dt) ;
    xt2_1_c = Xt2(:,1) ; xt2_2_c = Xt2(:,2) ;

```

```

        plot(xt2_1_c,xt2_2_c,'Color',Dfcolor(i,:),'LineWidth',LW1) ; hold on ;
        plot(xt2_1_c(1,1),xt2_2_c(1,1),'o','Color',Dfcolor(i,:),'LineWidth',LW2) ; hold on ;
    end
    plot([-5 10],[0 0], '--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW2) ;
    plot([0 0],[-10 15], '--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW2) ;
    plot(0,-2,'*','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW2) ;
    ax2(3) = gca ;
    title('$\mathbf{x}_e = (0,-2)$','Interpreter','Latex')
    xlabel('$x_1$','Interpreter','Latex') % x label
    ylabel('$x_2$','Interpreter','Latex') % y label
    axis([-3 3 -5.5 4 ])
    axis square

f10 = figure ;
for i = 1:length(Xt_0(1,:))
    [ t , Zt2 ] = RK4( @(t,Z) Nonlinear_System_of_CT2(Z) , [0 t_final], Zt_0(:,i) ,dt) ;
    zt2_1_c = Zt2(:,1) ; zt2_2_c = Zt2(:,2) ;

    plot(zt2_1_c,zt2_2_c,'Color',Dfcolor(i,:),'LineWidth',LW1) ; hold on ;
    plot(zt2_1_c(1,1),zt2_2_c(1,1),'o','Color',Dfcolor(i,:),'LineWidth',LW2) ; hold on ;
end
    plot([-5 10],[0 0], '--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW2) ;
    plot([0 0],[-10 15], '--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW2) ;
    plot(0,0,'*','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW2) ;
    ax2(4) = gca ;
    title('$\bar{\mathbf{x}}_e = (0,0)$','Interpreter','Latex')
    xlabel('$\bar{x}_1$','Interpreter','Latex') % x label
    ylabel('$\bar{x}_2$','Interpreter','Latex') % y label
    axis([-3.5 4 -4 6 ])
    axis square

for i = 1:length(ax2)

set(ax2(i),'XGrid','on','YGrid','on','XMinorGrid','off','YMinorGrid','off','FontSize',FS1,'FontName','Times
New Roman')
end

```

```

%% Nonlinear System Function
function [dX,Phi,u]= Nonlinear_System1(X)
x1 = X(1); x2 = X(2);

x1_bar = x1;
x2_bar = x2 + 1;
Phi = -x1_bar - x1_bar^2;
dt_Phi = (-1 - 2*x1_bar)*(x1_bar^2 + x1_bar*x2_bar);
u = 1/(1+(x2_bar - 1)^2)*(-x1_bar - x1_bar^2 - 2*x2_bar + 2*Phi + dt_Phi); % Control Input
dx1 = x1 + x1^2 + x1*x2;
dx2 = x1 + (1 + x2^2)*u;
dX = [ dx1; dx2 ];
end

function [dZ,Phi,u] = Nonlinear_System_of_CT1(Z)
z1 = Z(1); z2 = Z(2);

Phi = -z1 - z1^2;
dt_Phi = (-1 - 2*z1)*(z1^2 + z1*z2);
u = 1/(1+(z2-1)^2)*(-z1 - z1^2 - 2*z2 + 2*Phi + dt_Phi); % Control Input
dz1 = z1^2 + z1*z2;
dz2 = z1 + (1+(z2-1)^2)*u;
dZ = [ dz1; dz2 ];
end

function [dX,Phi,u] = Nonlinear_System2(X)
x1 = X(1); x2 = X(2);

x1_bar = x1;
x2_bar = x2 + 2;
Phi = -x1_bar - x1_bar^2;
dt_Phi = (-1 - 2*x1_bar)*(-x1_bar + x1_bar^2 + x1_bar*x2_bar);
u = 1/(1+(x2_bar-2)^2)*(-x1_bar - x1_bar^2 - 2*x2_bar + 2*Phi + dt_Phi); % Control Input
dx1 = x1 + x1^2 + x1*x2;
dx2 = x1 + (1+x2^2)*u;
dX = [ dx1; dx2 ];
end

```

```

function [dZ,Phi,u] = Nonlinear_System_of_CT2(Z)
z1 = Z(1) ; z2 = Z(2) ;

Phi = -z1 - z1^2 ;
dt_Phi = (-1 - 2*z1)*( -z1 + z1^2 + z1*z2 ) ;
u = 1/( 1+(z2-2)^2 )*( -z1 - z1^2 - 2*z2 + 2*Phi + dt_Phi ) ; % Control Input
dz1 = -z1 + z1^2 + z1*z2 ;
dz2 = z1 + (1+(z2-2)^2)*u ;
dZ = [ dz1 ; dz2 ] ;
end

```

### 第一題 - (c)

```

%% Nonlinear Control HW7 - Q1 - (c)
clear ; clc ; close all
dt = 0.001 ; t_final = 10 ;
t = 0 : dt : t_final ;
x1_0 = 50 ; % Initial of x1
x2_0 = -40 ; % Initial of x2
X_0 = [ x1_0 ; x2_0 ] ;

%%%%%%%% 10 arbitrary initial state values %%%%%%%%%
xt1 = [100 ; 100] ; xt2 = [80 ; 80] ; xt3 = [60 ; 60] ; xt4 = [-115 ; 140] ; xt5 = [-70 ; 130] ; xt6 = [-50 ; 100] ;
xt7 = [-90 ; -100] ; xt8 = [-60 ; -80] ; xt9 = [-40 ; -60] ;
Xt_0 = [ xt1 , xt2 , xt3 , xt4 , xt5 , xt6 , xt7 , xt8 , xt9 ] ;
%% linear System
Z2_0 = [ x1_0 ; x2_0+2 ] ; % Initial of transformation states Z2
%%%%%%%% 10 arbitrary initial state values %%%%%%%%%
for i = 1:length(Xt_0(1,:))
    Z2t_0(:,i) = [ Xt_0(1,i) ; Xt_0(2,i)+2 ] ;
end

%% Plot 1
LW1 = 1.6 ;
LW2 = 1 ;
FS1 = 16 ;
FS_lg = 18 ;

```

```

[ t , X2 ] = ode45( @(t,X) Nonlinear_System2(X) , t , X_0 ) ;
[ t , Z2 ] = ode45( @(t,Z) Nonlinear_System_of_CT2(Z) , t , Z2_0 ) ;
X2 = X2' ; Z2 = Z2' ;
x1_2_c = X2(1,:) ; x2_2_c = X2(2,:) ;
z1_2_c = Z2(1,:) ; z2_2_c = Z2(2,:) ;

for i = 1:length(t)
    [ dX2(:,i) , PhiX2(i,1) , uX2(i,1)] = Nonlinear_System2(X2(:,i)) ;
    [ dZ2(:,i) , PhiZ2(i,1) , uZ2(i,1)] = Nonlinear_System_of_CT2(Z2(:,i)) ;
end

f1 = figure ;
plot(t,x1_2_c,'-', 'Color',[0 0.2 0.7], 'LineWidth',LW1) ; hold on ;
plot(t,x2_2_c,'--', 'Color',[0 0.65 0.2], 'LineWidth',LW1) ;
hs1(1)=legend({'$x_1(t)$', '$x_2(t)$'}, 'Interpreter', 'latex');
ax1(1) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('States $\mathbf{x}(t)$', 'Interpreter', 'Latex') % y label
axis normal
grid on

f2 = figure ;
plot(t,z1_2_c,'-', 'Color',[0 0.2 0.7], 'LineWidth',LW1) ; hold on ;
plot(t,z2_2_c,'--', 'Color',[0 0.65 0.2], 'LineWidth',LW1) ;
hs1(2)=legend({'$\bar{x}_1(t)$', '$\bar{x}_2(t)$'}, 'Interpreter', 'latex');
ax1(2) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('States $\bar{\mathbf{x}}(t)$', 'Interpreter', 'Latex') % y label
% axis([0 t_final -4 2.3])
axis normal
grid on

f3 = figure ;
plot(t,uX2,'-', 'Color',[0 0.2 0.7], 'LineWidth',LW1) ; hold on ;
ax1(3) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('Control Input $\bar{\mathbf{u}}(t)$', 'Interpreter', 'Latex'); % y label
% axis([0 t_final -0.75 0.2])

```



```

axis normal
grid on

for i = 1:length(ax1)

set(ax1(i),'XGrid','on','YGrid','on','XMinorGrid','off','YMinorGrid','off','FontSize',FS1,'FontName','Times
New Roman')
end

for i = 1:length(hs1)
    set(hs1(i),'FontSize',FS_lg,'FontName','Times New Roman')
end

%% Plot 2
Dfcolor1 = pink(8) ;
Dfcolor1 = Dfcolor1(2:4,:);
Dfcolor2 = summer(5) ;
Dfcolor2 = Dfcolor2(1:3,:);
Dfcolor3 = bone(6) ;
Dfcolor3 = Dfcolor3(2:4,:);
Dfcolor = [Dfcolor1;Dfcolor2;Dfcolor3] ;

f4 = figure ;
for i = 1:length(Xt_0(1,:))
    [ t , Xt2 ] = ode45( @(t,X) Nonlinear_System2(X) , t , Xt_0(:,i)) ;
    xt2_1_c = Xt2(:,1) ; xt2_2_c = Xt2(:,2) ;

    plot(xt2_1_c,xt2_2_c,'Color',Dfcolor(i,:),'LineWidth',LW1) ; hold on ;
    plot(xt2_1_c(1,1),xt2_2_c(1,1),'o','Color',Dfcolor(i,:),'LineWidth',LW2) ; hold on ;
end
plot([-150 150],[0 0],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW2) ;
plot([0 0],[-150 150],'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW2) ;
plot(0,-2,'*','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW2) ;
ax2(1) = gca ;
title('$\mathbf{x}_e = (0,-2)$','Interpreter','Latex')
xlabel('$x_1$','Interpreter','Latex') % x label
ylabel('$x_2$','Interpreter','Latex') % y label
axis([ -150 150 -140 160 ])

```

```

axis square

f5 = figure ;
for i = 1:length(Xt_0(1,:))
    [ t , Zt2 ] = ode45( @(t,Z) Nonlinear_System_of_CT2(Z) , t, Zt_0(:,i)) ;
    zt2_1_c = Zt2(:,1) ; zt2_2_c = Zt2(:,2) ;

    plot(zt2_1_c,zt2_2_c,'Color',Dfcolor(i,:), 'LineWidth',LW1) ; hold on ;
    plot(zt2_1_c(1,1),zt2_2_c(1,1),'o','Color',Dfcolor(i,:), 'LineWidth',LW2) ; hold on ;
end
plot([-150 150],[0 0], '--','Color',[0.5 0.5 0.5], 'LineWidth',LW2) ;
plot([0 0],[-150 150], '--','Color',[0.5 0.5 0.5], 'LineWidth',LW2) ;
plot(0,0,'*','Color',[0.5 0.5 0.5], 'LineWidth',LW2) ;
ax2(2) = gca ;
title('$\bar{\mathbf{x}}_e = (0,0)$','Interpreter','Latex')
xlabel('$\bar{x}_1$','Interpreter','Latex') % x label
ylabel('$\bar{x}_2$','Interpreter','Latex') % y label
axis([ -150 150 -140 160 ])
axis square

for i = 1:length(ax2)

set(ax2(i),'XGrid','on','YGrid','on','XMinorGrid','off','YMinorGrid','off','FontSize',FS1,'FontName','Times
New Roman')
end

%% Nonlinear System Function
function [dX,Phi,u]= Nonlinear_System1(X)
x1 = X(1) ; x2 = X(2) ;

x1_bar = x1 ;
x2_bar = x2 + 1 ;
Phi = -x1_bar - x1_bar^2 ;
dt_Phi = (-1 - 2*x1_bar)*( x1_bar^2 + x1_bar*x2_bar ) ;
u = 1/(1+( x2_bar - 1 )^2)*(-x1_bar - x1_bar^2 - 2*x2_bar + 2*Phi+ dt_Phi) ; % Control Input
dx1 = x1 + x1^2 + x1*x2 ;
dx2 = x1 + ( 1+ x2^2 )*u ;
dX = [ dx1 ; dx2 ] ;

```

```

end

function [dZ,Phi,u] = Nonlinear_System_of_CT1(Z)
z1 = Z(1) ; z2 = Z(2) ;

Phi = -z1 - z1^2 ;
dt_Phi = (-1 - 2*z1)*( z1^2 + z1*z2 ) ;
u = 1/(1+(z2-1)^2)*(-z1 - z1^2 - 2*z2 + 2*Phi + dt_Phi) ; % Control Input
dz1 = z1^2 + z1*z2 ;
dz2 = z1 + (1+(z2-1)^2)*u ;
dZ = [ dz1 ; dz2 ] ;
end

function [dX,Phi,u] = Nonlinear_System2(X)
x1 = X(1) ; x2 = X(2) ;

x1_bar = x1 ;
x2_bar = x2 + 2 ;
Phi = -x1_bar - x1_bar^2 ;
dt_Phi = (-1 - 2*x1_bar)*(-x1_bar + x1_bar^2 + x1_bar*x2_bar) ;
u = 1/( 1 + (x2_bar-2)^2 )*(-x1_bar - x1_bar^2 - 2*x2_bar + 2*Phi + dt_Phi) ; % Control Input
dx1 = x1 + x1^2 + x1*x2 ;
dx2 = x1 + ( 1+x2^2 )*u ;
dX = [ dx1 ; dx2 ] ;
end

function [dZ,Phi,u] = Nonlinear_System_of_CT2(Z)
z1 = Z(1) ; z2 = Z(2) ;

Phi = -z1 - z1^2 ;
dt_Phi = (-1 - 2*z1)*(-z1 + z1^2 + z1*z2) ;
u = 1/( 1+(z2-2)^2 )*(-z1 - z1^2 - 2*z2 + 2*Phi + dt_Phi) ; % Control Input
dz1 = -z1 + z1^2 + z1*z2 ;
dz2 = z1 + (1+(z2-2)^2)*u ;
dZ = [ dz1 ; dz2 ] ;
end

```

# 第一題 - (e)

```

%% Nonlinear Control HW7 - Q1 - (e)
clear ; clc ; close all
dt = 0.001 ; t_final = 8 ;
t = 0 : dt : t_final ;
x1_0 = 3 ; % Initial of x1
x2_0 = -3 ; % Initial of x2
X_0 = [ x1_0 ; x2_0 ] ;

%% linear System
Z1_0 = [ x1_0 ; x2_0+2 ] ; % Initial of transformation states Z2

%% Plot 1
LW1 = 1.6 ;
LW2 = 1 ;
FS1 = 16 ;
FS_lg = 17 ;

[ t, X1 ] = ode45( @(t,X) Nonlinear_System1(X) , t , X_0 ) ;
[ t, Z1 ] = ode45( @(t,Z) Nonlinear_System_of_CT1(Z) , t , Z1_0 ) ;
[ t, X2 ] = ode45( @(t,X) Nonlinear_System2(X) , t , X_0 ) ;
[ t, Z2 ] = ode45( @(t,Z) Nonlinear_System_of_CT2(Z) , t , Z1_0 ) ;
X1 = X1' ; Z1 = Z1' ;
X2 = X2' ; Z2 = Z2' ;
x1_1_c = X1(1,:) ; x2_1_c = X1(2,:) ;
z1_1_c = Z1(1,:) ; z2_1_c = Z1(2,:) ;
x1_2_c = X2(1,:) ; x2_2_c = X2(2,:) ;
z1_2_c = Z2(1,:) ; z2_2_c = Z2(2,:) ;

for i=1:length(t)
    [ dX1(:,i) , PhiX1(i,1) , uX1(i,1)] = Nonlinear_System1(X1(:,i)) ;
    [ dZ1(:,i) , PhiZ1(i,1) , uZ1(i,1)] = Nonlinear_System_of_CT1(Z1(:,i)) ;
    [ dX2(:,i) , PhiX2(i,1) , uX2(i,1)] = Nonlinear_System2(X2(:,i)) ;
    [ dZ2(:,i) , PhiZ2(i,1) , uZ2(i,1)] = Nonlinear_System_of_CT2(Z2(:,i)) ;
end

f1 = figure ;
plot(t,x1_2_c,'-', 'Color',[0 0.2 0.7], 'LineWidth',LW1) ; hold on ;

```

```

plot(t,x2_2_c,'--','Color',[0 0.65 0.2],'LineWidth',LW1) ;
hs1(1)=legend({'$x_1(t)$','$x_2(t)$'},'Interpreter','latex');
ax1(1) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('States $\mathbf{x}(t)$','Interpreter','Latex') % y label
axis normal
grid on

f2 = figure ;
p1 = plot(t,z1_2_c,'-', 'Color',[0 0.2 0.7],'LineWidth',LW1) ; hold on ;
p2 = plot(t,PhiZ2,'-', 'Color',[0.82 0.75 0.6],'LineWidth',LW1) ;
p3 = plot(t,z2_2_c,'--','Color',[0 0.65 0.2],'LineWidth',LW1) ;
hs1(2)=legend([p1,p3,p2],{'$\bar{x}_1(t)$','$\bar{x}_2(t)$','$\bar{\phi}(\bar{x}_1)=-\bar{x}_1$'},'Interpreter','latex');
ax1(2) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('States $\bar{\mathbf{x}}(t)$','Interpreter','Latex') % y label
axis normal
grid on

f3 = figure ;
plot(t,uX2,'-', 'Color',[0 0.2 0.7],'LineWidth',LW1) ; hold on ;
ax1(3) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('Control Input $u(\bar{\mathbf{x}})$','Interpreter','Latex'); % y label
axis normal
grid on

f4 = figure ;
plot(t,x1_1_c,'-', 'Color',[0 0.2 0.7],'LineWidth',LW1) ; hold on ;
plot(t,x1_2_c,'--','Color',[0 0.65 0.2],'LineWidth',LW1) ;
hs1(3)=legend({'$\bar{\phi}(\bar{x}_1)=-\bar{x}_1-\bar{x}_1^2$','$\bar{\phi}(\bar{x}_1)=-\bar{x}_1$'},'Interpreter','latex');
ax1(4) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('$x_1(t)$','Interpreter','Latex') % y label
Ytick = [0 1 2 3] ;
axis square

```

```

grid on

f5 = figure ;
plot(t,x2_1_c,'-','Color',[0 0.2 0.7],'LineWidth',LW1) ; hold on ;
plot(t,x2_2_c,'--','Color',[0 0.65 0.2],'LineWidth',LW1) ;
hs1(4)=legend({'\bar{\phi}(\bar{x}_1)=-\bar{x}_1-\bar{x}_1^2$','\bar{\phi}(\bar{x}_1)=-\bar{x}_1$'},'Interpreter','latex');
ax1(5) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('$x_2(t)$','Interpreter','Latex') % y label
% axis([0 t_final -3.5 -2])
axis square
grid on

f6 = figure ;
plot(t,z1_1_c,'-','Color',[0 0.2 0.7],'LineWidth',LW1) ; hold on ;
plot(t,z1_2_c,'--','Color',[0 0.65 0.2],'LineWidth',LW1) ;
hs1(5)=legend({'\bar{\phi}(\bar{x}_1)=-\bar{x}_1-\bar{x}_1^2$','\bar{\phi}(\bar{x}_1)=-\bar{x}_1$'},'Interpreter','latex');
ax1(6) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('$\bar{x}_1(t)$','Interpreter','Latex') % y label
axis square
grid on

f7 = figure ;
plot(t,z2_1_c,'-','Color',[0 0.2 0.7],'LineWidth',LW1) ; hold on ;
plot(t,z2_2_c,'--','Color',[0 0.65 0.2],'LineWidth',LW1) ;
hs1(6)=legend({'\bar{\phi}(\bar{x}_1)=-\bar{x}_1-\bar{x}_1^2$','\bar{\phi}(\bar{x}_1)=-\bar{x}_1$'},'Interpreter','latex');
ax1(7) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('$\bar{x}_2(t)$','Interpreter','Latex') % y label
% axis([0 t_final -1.5 0])
axis square
grid on

f8 = figure ;

```

```

plot(t,uX1,'-','Color',[0 0.2 0.7],'LineWidth',LW1) ; hold on ;
plot(t,uX2,'--','Color',[0 0.65 0.2],'LineWidth',LW1) ; hold on ;
hs1(7)=legend({'$\bar{\phi}(\bar{x}_1)=-\bar{x}_1-\bar{x}_1^2$', '$\bar{\phi}(\bar{x}_1)=-\bar{x}_1$', 'Interpreter','latex');
ax1(8) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('Control Input $u(\bar{\mathbf{x}})$','Interpreter','Latex'); % y label
% axis([0 t_final -0.625 0.22])
axis normal
grid on

for i = 1:length(ax1)
    set(ax1(i),'XGrid','on','YGrid','on','XMinorGrid','off','YMinorGrid','off','FontSize',FS1,'FontName','Times New Roman')
end

for i = 1:length(hs1)
    set(hs1(i),'FontSize',FS_lg,'FontName','Times New Roman')
end

%% Nonlinear System Function
function [dX,Phi,u]= Nonlinear_System1(X)
x1 = X(1) ; x2 = X(2) ;

x1_bar = x1 ;
x2_bar = x2 +2 ;
Phi = -x1_bar - x1_bar^2 ;
dt_Phi = (-1 - 2*x1_bar)*(-x1_bar + x1_bar^2 + x1_bar*x2_bar) ;
u = 1/(1+(x2_bar - 2)^2)*(-x1_bar - x1_bar^2 - 2*x2_bar + 2*Phi+ dt_Phi) ; % Control Input
dx1 = x1 + x1^2 + x1*x2 ;
dx2 = x1 + (1+ x2^2)*u ;
dX = [ dx1 ; dx2 ] ;
end

function [dZ,Phi,u]= Nonlinear_System_of_CT1(Z)
z1 = Z(1) ; z2 = Z(2) ;

Phi = -z1 - z1^2 ;

```

```

dt_Phi = (-1 - 2*z1 )*( -z1 + z1^2 + z1*z2 );
u = 1/(1+(z2-2)^2)*( -z1 - z1^2 - 2*z2 + 2*Phi + dt_Phi ); % Control Input
dz1 = -z1 + z1^2 + z1*z2 ;
dz2 = z1 + (1+(z2-2)^2)*u ;
dZ = [ dz1 ; dz2 ] ;
end

function [dX,Phi,u] = Nonlinear_System2(X)
x1 = X(1) ; x2 = X(2) ;

x1_bar = x1 ;
x2_bar = x2 + 2 ;
Phi = -x1_bar ;
dt_Phi = -1*( -x1_bar + x1_bar^2 + x1_bar*x2_bar );
u = 1/( 1+ (x2_bar-2)^2 )*( -x1_bar - x1_bar^2 - 2*x2_bar + 2*Phi + dt_Phi ); % Control Input
dx1 = x1 + x1^2 + x1*x2 ;
dx2 = x1 + ( 1+ x2^2 )*u ;
dX = [ dx1 ; dx2 ] ;
end

function [dZ,Phi,u] = Nonlinear_System_of_CT2(Z)
z1 = Z(1) ; z2 = Z(2) ;

Phi = -z1 ;
dt_Phi = -1*( -z1 + z1^2 + z1*z2 );
u = 1/( 1+(z2-2)^2 )*( -z1 - z1^2 - 2*z2 + 2*Phi + dt_Phi ); % Control Input
dz1 = -z1 + z1^2 + z1*z2 ;
dz2 = z1 + (1+(z2-2)^2)*u ;
dZ = [ dz1 ; dz2 ] ;
end

```