

## 非線性控制期中考

Closed-book Test (10:10~12:10)

1. (10%)考慮  $n$  階非線性系統的一般型式：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

除了少數例外，方程式(1)通常沒有解析解，而只有數值解。但不管解答如何複雜，方程式(1)解的型式只有五種可能，請說明是那五種可能型式的解答。

2. (10%)如何檢測一個系統是線性亦或是非線性(假設只能取得該系統的輸入及輸出訊號，而對其內部動態完全不清楚)？試說明其檢測步驟。
3. (10%)考慮二階非線性系統

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (2)$$

說明如何用解析的方法決定其在平衡點附近的相平面軌跡。解釋為何恰好有六種可能結果？此六種可能的相平面軌跡各為何？

4. (10%)考慮一個非線性元件，已知當輸入為  $X \sin \omega t$  時，輸出為  $y(t)$ ；試說明如何由輸入和輸出求出此非線性元件的描述函數  $N(X, \omega)$ 。
5. (10%)考慮下列之控制系統

$$\dot{x} + u(t) = 0, \quad x(0) = x_0 \quad (4)$$

其中  $u(t)$  為輸入之控制訊號，試設計  $u(t)$  使得不管  $x_0$  為何，當  $t \rightarrow \infty$ ，恆有  $x \rightarrow 0$ 。

6. (10%)解釋為何存在 Lyapunov function  $V(x)$  滿足  $V(0) = 0$ ， $V(x) > 0$ ， $\dot{V}(x) < 0$  之時，其所對應的非線性系統便為 asymptotically stable？其背後的物理意義為何，
7. (10%)試利用 Lyapunov's direct method，推導出線性系統  $\dot{x} = Ax$  為穩定的條件。
8. (10%)何謂 Lyapunov's indirect method？說明如何利用此法驗證非線性系統  $\dot{x} = f(x)$  的穩定性。
9. (10%)考慮以下非線性系統：

$$\dot{x} = -x + x^3 \quad (5)$$

畫出其相平面軌跡。並從軌跡的運動方向判斷平衡點的穩定性。

10. (10%)考慮下列之非線性方程式

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \kappa x + \mu x^3 = 0$$

(a) 求出此系統的總能量  $E$ ；(b) 透過  $E$  的變化，說明此非線性系統有極限圓的存在。