

## Chapter 11

### 非線性最佳控制(Nonlinear Optimal Control)

如果控制講的是謀略與決策，那麼最佳控制就是在決定最佳的決策。在經濟上講最佳決策，是要謀取最高利潤；在政治上講最佳決策，是要謀求雙贏的最佳妥協。在族群生存上講最佳決策，是要建立最優的環境適應力；在工程上講最佳決策，是在追求最佳的工程設計品質。當我們在面對人生道路上的每個交叉路口，要決定往哪個方向走時，又何嘗不是跟最佳決策有關。了解最佳控制的基本原理，不僅有助於工程設計與政經決策，其最大意義在於幫助我們在面對各種人生問題時，知道如何做出最佳決策。

不管受控系統是線性還是非線性，最佳化(optimization)控制設計均可適用，所以最佳化控制是一個通用的控制法則。目前求得最佳控制解的方法有二種，第一種方法是根據變分原理(calculus of variation)，第二種方法是根據動態規劃(Dynamic Programming)原理；變分所得到的最佳控制是開迴路(open-loop)的型式 $u = u(t)$ ，是透過常微分方程式的求解而得到；而動態規劃所得到的最佳控制則是閉迴路(closed-loop)的型式 $u = u(x)$ ，是透過偏微分方程式的求解而得到。開迴路最佳控制 $u = u(t)$ 告訴我們沿著某一特定軌跡上，在時間 $t$ 時，最佳控制策略是甚麼；閉迴路最佳控制 $u = u(x)$ 則告訴我們，當在位置 $x$ 時(且不管先前是沿著怎樣的軌跡到達 $x$ )，所要採用的最佳控制策略是甚麼。

最佳控制不僅可應用於人造的工程系統與人文社會系統，自然界的所有定律也都是老天爺最佳化的傑作。我們所看到的、所測量到的所有自然現象與物理定律，都是被老天爺精心安排的最佳化設計。如本章下面將要解說的，古典力學(包含 Newton 力學、Lagrange 力學、Hamilton 力學)與量子力學都是自然界的最佳控制設計。人世間觸目所及，不管是天然的或是人造的事物，都是最佳化控制結果的呈現。一些平常的事物看來不怎麼稀奇，但當我們學過最佳控制之後，會驚訝地發現，原先所謂的平常之物，其實背後是遵循著最佳策略在運作著。生物族群的進化，為因應生存環境的改變，經過突變與天擇，而演繹出最佳的適應之道。大自然用具體的行動告訴我們什麼是最佳決策，大自然才是教授『最佳控制』課程的最佳導師。

最佳控制整合了數學、物理與工程三個領域：數學是最佳控制的運作核心，物理是最佳控制的具體實現，工程則是最佳控制的實務應用。本章所要涵蓋的主題將包含下列幾個：

- 分別以變分原理與動態規劃原理求解最佳控制問題，並討論幾個工程範例。
- 以最佳控制建立古典力學原理：Newton 力學、Lagrange 力學、Hamilton 力學。
- 以動態規劃原理求解最佳隨機控制問題。
- 以最佳隨機控制建立量子力學原理。

#### 11.1 變分原理

變分是最佳化設計的第一種方法。變分代表一種虛擬的擾動，用符號 $\delta$ 表示之。靜力平衡中所提到的虛擬位移 $\delta x$ 即是變分的一種型式。虛擬擾動可加在位移 $x$ 上，也可加在函數 $f(x)$ 上，此時所得到的函數變分 $\delta f$ ，其本身仍然是一函數。變分的目的是要找出極值(最佳值)發生的地方。在極值發生之處，斜率必為零，此時將位置在極值附近微擾一下，函數的值不會改變，

即  $\delta f = 0$ 。

### 例題 11.1.1

舉例而言，在靜力平衡之下(參考圖 11.1.1)，彈簧與重物系統的總位能  $U$  為最小(即  $U$  在平衡位置的斜率為零)。在平衡位置  $\theta_0$  下，對系統施以一虛擬位移  $\delta\theta_0$ ，此時總位能  $U$  的變化必須為零(因斜率為零)，即  $\delta U = 0$ 。虛功原理即是利用  $\delta U = 0$  的條件，反求平衡點的位置  $\theta_0$ 。在平衡位置  $\theta_0$  下，系統之總位能為

$$U(\theta_0) = -Wl\sin\theta_0 + \frac{k}{2}[2l(1 - \cos\theta_0)]^2 \quad (11.1.1)$$

施加一虛擬擾動  $\delta\theta_0$  後，系統之總位能變為

$$U(\theta_0 + \delta\theta_0) = -Wl\sin(\theta_0 + \delta\theta_0) + \frac{k}{2}[2l(1 - \cos(\theta_0 + \delta\theta_0))]^2 \quad (11.1.2)$$

因此位能的變化量  $\delta U$  為

$$\delta U = U(\theta_0 + \delta\theta_0) - U(\theta_0) = [W - 4kl(1 - \cos\theta_0)\tan\theta_0]\delta\theta \quad (11.1.3)$$

當  $\theta_0$  是平衡位置時， $U(\theta_0)$  必須處於位能最低之處(參考圖 11.1.1 之右圖)，其所在斜率為零，因此由  $\delta\theta_0$  所造成的位能擾動  $\delta U$  必須為零。故令(11.1.3)式中  $\delta U = 0$ ，可求得靜力平衡位置  $\theta_0$  所需滿足的方程式：

$$(1 - \cos\theta_0)\tan\theta_0 = W/4kl \quad (11.1.4)$$

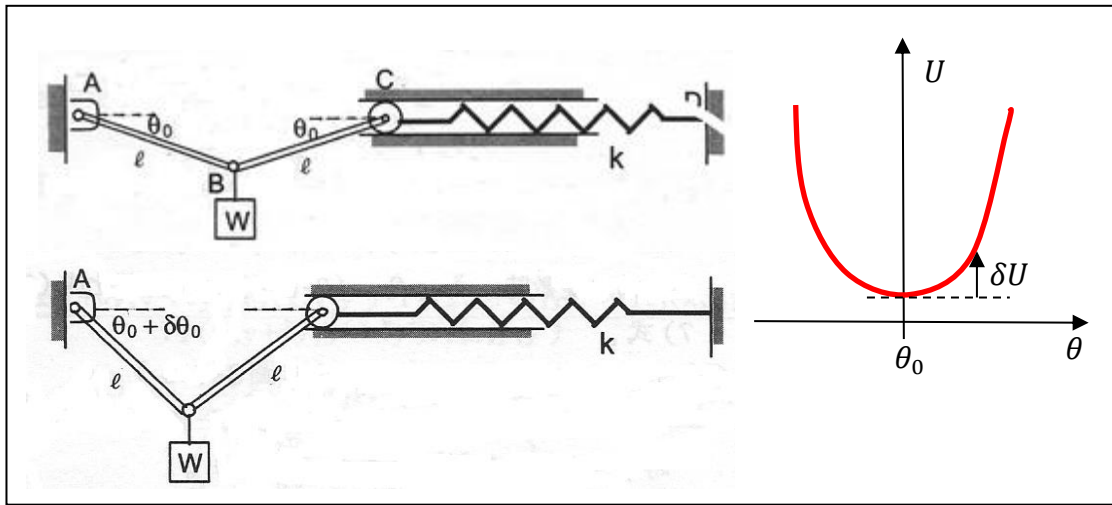


圖 11.1.1 在平衡位置上加入一虛擬位移  $\delta\theta_0$ ，其相對應的位能變化  $\delta U = 0$

以上例題討論的是關於一個位置或是一個點的微擾，下面接著看相對於函數微擾的變分問題。函數微擾的目的是要尋求一最佳函數  $y(x)$  使得下列的成本函數為最小：

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y, y') dx \quad (11.1.5)$$

如圖 11.1.2a 所示，函數  $y(x)$  通過二個點  $(x_1, y_1)$  與  $(x_2, y_2)$ ，而通過此二點的  $y(x)$  曲線有無限多條；對於每一函數  $y(x)$ ，吾人都可根據(11.1.5)式計算其所對應的成本函數  $J(y)$ 。由於成本函數  $J(y)$  是函數  $y(x)$  的函數，故稱  $J(y)$  為泛函數(functional)。我們的目的要找出最佳的函數  $y(x)$  使得(11.1.5)中的泛函數  $J$  為最小。現在假設函數  $y_0(x)$  使得成本函數  $J$  為最小，如圖 11.1.2b 所示，亦即  $J(y)$  在  $y_0$  處的斜率為零。故對  $y_0$  所施加的微擾  $\delta y$ ，其對成本函數  $J$  所造成的微擾  $\delta J$  必須為零。當  $y_0 \rightarrow y_0 + \delta y$  時， $J_0 \rightarrow J_0 + \delta J$ 。根據以上的定義，成本函數  $J$  的微擾量  $\delta J$  可計算如

下：

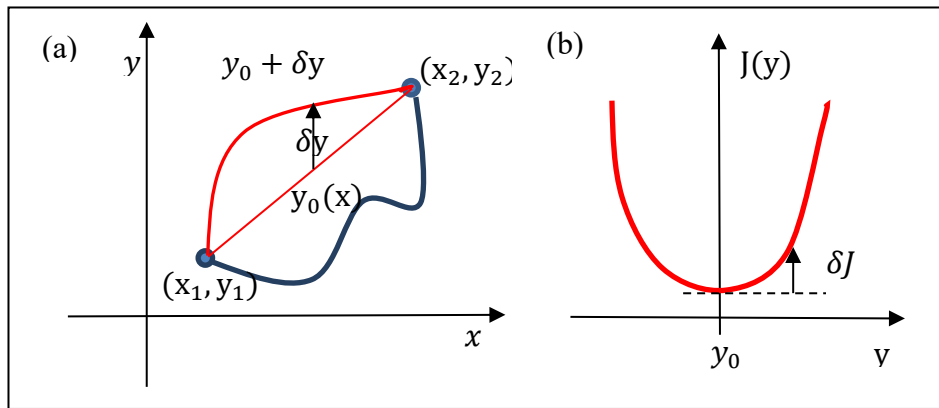


圖 11.1.2 (a) 函數的變分是在最佳函數  $y_0(x)$  上，施加一虛擬微擾函數  $\delta y$ 。(b) 最佳函數  $y_0$  所對應的成本函數  $J$  為最小，亦即在  $y_0$  處的斜率為零。故對  $y_0$  所施加的微擾所造成的成本函數的微擾  $\delta J$  必須為零。

$$\delta J = J(y_0 + \delta y) - J(y_0) = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y_0 + \delta y, y'_0 + \delta y') dx - \int_{x_1}^{x_2} L(x, y_0, y'_0) dx \quad (11.1.6)$$

對函數  $L(x, y_0 + \delta y, y'_0 + \delta y')$  取到一階的展開，得到

$$L(x, y_0 + \delta y, y'_0 + \delta y') = L(x, y_0, y'_0) + \frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y'$$

將之代入(11.1.6)式，並進行部分積分可得

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y' \right) dx = \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx \quad (11.1.7)$$

右邊的第一項為零，因  $y(x_1) = y_1$  與  $y(x_2) = y_2$  為固定值，故端點的變分  $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$ 。在右邊的第二項中，因微擾量  $\delta y$  為任意值，故為了保證  $\delta J = 0$ ，唯一的可能是  $\delta y$  的係數必須為零，即

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0 \quad (11.1.8)$$

此式即為最佳函數  $y_0(x)$  所要滿足的微分方程式，又稱為 Euler 方程式。有關變分原理的更詳細討論可參閱 Hildebrand (1965) 或楊憲東(1995)的著作。

### 例題 11.1.2

試以變分原理證明歐氏幾何中的公設：兩點間之所有連線中，距離最短者為直線。(參考圖 11.1.2a)。

設二已知點為  $P_1(x_1, y_1)$  與  $P_2(x_2, y_2)$ ，則  $P_1$  與  $P_2$  間之連線弧長可寫成

$$J = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx \quad (11.1.9)$$

(11.1.9) 式與 (11.1.5) 式比較，得  $L(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$ ，再將之代入 (11.1.8) 式，可得到最短連線所需滿足的方程式為

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0 - \frac{d}{dx} \left[ \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \right] = 0 \quad (11.1.10)$$

上式的解為

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}} = c = \text{常數} \Rightarrow y'(x) = a = \text{常數}$$

故求得最佳曲線為  $y(x) = ax + b$ ，這證明了兩點間的最短連線確實為一直線，而常數  $a$  與  $b$  的值是由二個端點條件  $y(x_1) = y_1$  與  $y(x_2) = y_2$  所決定。

□

## 11.2 古典力學的最佳化詮釋

工程力學(古典力學)的三種型式: Newton 力學、Lagrange 力學、Hamilton 力學，都是自然界本身最佳化的結果，也都可以由變分的原理推導出來。

### 11.2.1 以變分推導 Lagrange 力學

在(11.1.5)式中的成本函數  $J(y)$  只包含一個待定函數  $y(x)$ 。現在考慮一般的情況，成本函數  $J$  包含  $n$  個待定函數:  $J(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，並且將自變數  $x$  改成時間  $t$ ，則(11.1.5)式的廣義化型式成為

$$J(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt \quad (11.2.1)$$

變分的目的是要求得  $n$  個時間:  $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$   $\dots$   $x_n(t)$  使得成本函數  $J$  為最小。依循上節相同的步驟，令  $\delta J = 0$ ，可得到最佳  $q_i(t)$  函數所要滿足之聯立微分方程式:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (11.2.2)$$

如果我們將(11.2.1)式中的被積分函數選為 Lagrangian 函數:

$$L(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = T(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) - V(x_1, \dots, x_n) \quad (11.2.3)$$

其中  $T$  表動能， $V$  表位能，而  $x_i$ ， $i = 1, \dots, n$ ，表示描述系統運動的廣義座標(generalized coordinates)。茲將(11.2.3)的  $L$  代入(11.2.2)式中，即可得到有名的 Lagrange 方程式，這就是 Lagrange 動力學的主要運動方程式。所以(11.2.2)式通稱為 Euler-Lagrange 方程式。由於廣義座標  $x_i$  的選擇是任意的，這說明 Lagrange 運動方程式可適用於任何座標系統，亦即 Lagrange 運動方程式具有座標的無關性(coordinate independent)。相反的，牛頓力學的運動方程式在不同的座標系統，其型式也不同，所以牛頓運動方程式具有座標的相關性。Lagrangian 函數  $L$  是動能與位能的差，由於能量是純量，它是沒有方向性的，所以 Lagrange 運動方程式(11.2.2)是純量方程式，它不須要分隔方向去進行不同方向的力平衡。

#### 例題 11.2.1

只要求得一個系統的動能與位能的差，再將其代入(11.2.2)式中，即可得到系統的 Lagrange 運動方程式。以單擺運動為例，其只有一個自由度，故只需要一個廣義座標  $\theta$  即可描述其運動(參考圖 11.2.1)。

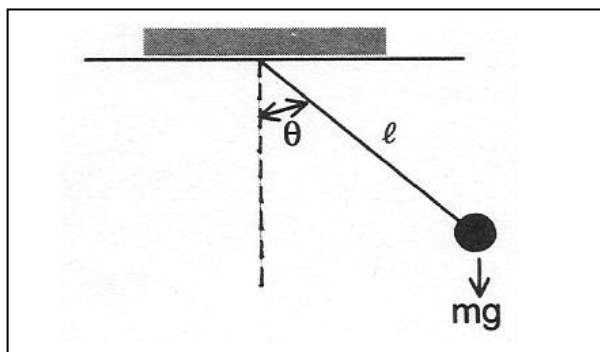


圖 11.2.1 單擺運動只有一個自由度，只需要一個廣義座標 即可描述其運動。

將單擺的最低點當成零位面，則單擺的位能為

$$V = mgl(1 - \cos\theta)$$

單擺的動能為

$$T = (1/2)mv^2 = (1/2)m(l\dot{\theta})^2$$

故得 Lagrangian 函數為

$$L = T - V = (ml^2/2)\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta) \quad (11.2.4)$$

再將  $L$  代入 Lagrange 方程式(11.2.2)，即得到如下單擺的運動方程式

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0 \Rightarrow l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0 \quad (11.2.5)$$

□

### 例題 11.2.2

Lagrange 力學以能量為基礎，當系統的自由度越多，總能量仍然是純量的型式，不須要去考慮能量在不同自由度上的分量，因為能量不像作用力，它是沒有方向的。這一點是 Lagrange 力學與 Newton 力學的最大不同點。茲舉二自由度的雙擺運動來說明(參考圖 11.2.2)其與單擺的差異性。

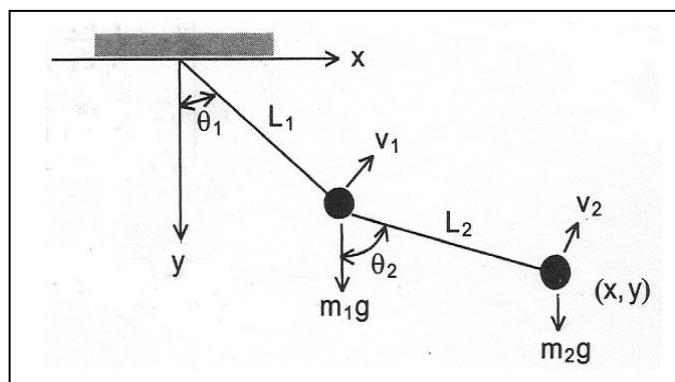


圖 11.2.2 雙擺運動有二個自由度，需要二個廣義座標  $\theta_1$  及  $\theta_2$  才能描述其運動。

系統總位能是二個擺錘位能的和：

$$V = V_1 + V_2 = m_1gl_1(1 - \cos\theta_1) + m_2g[l_1(1 - \cos\theta_1) + l_2(1 - \cos\theta_2)]$$

系統總動能是二個擺錘動能的和：

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \quad (11.2.6)$$

其中 $(x_1, y_1)$ 和 $(x_2, y_2)$ 是二個擺錘的座標，由圖 11.2.2 可求出為

$$(x_1, y_1) = (l_1 \sin \theta_1, l_1 \cos \theta_1), (x_2, y_2) = (l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2, l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) \quad (11.2.7)$$

將(11.2.7)式的微分代入(11.2.6)式中，得到系統總動能 $T$ 為

$$T = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + l_2^2 \dot{\theta}_2^2]$$

將上面的動能 $T$ 減去位能 $V$ 以形成 Lagrangian 函數 $L = T - V$ ，再代入 Lagrange 方程式(11.2.2)

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = 0, \frac{\partial L}{\partial \theta_2} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = 0 \quad (11.2.8)$$

即可得到描述雙擺運動的二個聯立非線性微分方程式

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{m_1 l_2 / l_1}{m_1 + m_2} [\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1)] + \frac{g}{l_1} \sin \theta_1 = 0 \quad (11.2.9a)$$

$$\ddot{\theta}_2 + \frac{l_1}{l_2} [\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1)] + \frac{g}{l_2} \sin \theta_2 = 0 \quad (11.2.9b)$$

吾人可以看到雙擺的運動方程式(11.2.8)只是將單擺的運動方程式(11.2.5)複製成二個相同的方程式而已，雙擺與單擺的唯一不同點是在於 Lagrangian 函數 $L = T - V$ 。

□

## 11.2.2 以變分推導 Newton 力學

Lagrange 方程式(11.2.2)可視為是廣義化的 Newton 方程式。首先定義廣義動量 $p_i$ 如下：

$$p_i \triangleq \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}, i = 1, 2, \dots, n \quad (11.2.10)$$

則 Lagrange 方程式(11.2.2)可改寫成

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x_i} = Q_i \quad (11.2.11)$$

其中 $Q_i$ 稱為廣義作用力(generalized force)。因此(11.2.11)式表達了廣義動量 $p_i$ 的時間變化率等於廣義作用力 $Q_i$ 。吾人也可不透過 Lagrange 方程式，而直接由變分原理得到 Newton 方程式。考慮如下的成本函數：

$$J = \int_{t_1}^{t_2} L(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) dt = \int_{t_1}^{t_2} (m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)/2 - V(x, y, z)) dt \quad (11.2.12)$$

令上式的變分 $\delta J = 0$ ，可得到如(11.2.2)式的 Euler 方程式

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0, \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = 0, \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) = 0, \quad (11.2.13)$$

以(11.2.12)式中的 $L$ 定義式代入之，並注意

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x}, \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = f_x = x \text{ 方向的作用力}$$

則(11.2.13)式化成卡氏直角座標下的 Newton 方程式

$$m\ddot{x} = f_x, m\ddot{y} = f_y, m\ddot{z} = f_z \quad (11.2.14)$$

## 11.2.3 以變分推導 Hamilton 力學

Lagrange 力學的主角是 Lagrangian 函數 $L(t, x_i, \dot{x}_i)$ ，它是廣義座標 $q_i$ 及廣義座標微分 $\dot{q}_i$ 的

函數；Hamilton 力學<sup>1</sup>的主角是 Hamiltonian 函數  $H(t, x_i, p_i)$ ，它是廣義座標  $q_i$  及廣義動量  $p_i$  的函數，其中廣義動量  $p_i$  的定義如(11.2.10)式所示。 $L(t, x_i, \dot{x}_i)$  與  $H(t, x_i, p_i)$  的關係式為

$$H(t, x_i, p_i) \triangleq p_i \dot{x}_i - L(t, x_i, \dot{x}_i) \quad (11.2.15)$$

其中上式右邊出現的  $\dot{x}_i$  已透過關係式  $p_i = \partial L / \partial \dot{x}_i$ ，將其表為  $q_i$  及  $p_i$  的函數，亦即  $\dot{x}_i = \dot{x}_i(t, x_i, p_i)$ 。因此可以保證  $H$  僅是  $x_i$  及  $p_i$  的函數。利用(11.2.15)式，吾人可將(11.2.1)式的成本函數改寫成

$$J = \int_{t_1}^{t_2} L(t, x_i, \dot{x}_i) dt = \int_{t_1}^{t_2} [p_i \dot{x}_i - H(t, x_i, p_i)] dt \quad (11.2.16)$$

吾人的目的是要求得最佳函數  $q_i(t)$  與  $p_i(t)$  使得成本函數  $J$  為最小，即使得變分  $\delta J = 0$ 。依照 11.1 節的變分原則：

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \left( \delta p_i \dot{x}_i + p_i \delta \dot{x}_i - \frac{\partial H}{\partial x_i} \delta x_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) dt \quad (11.2.17)$$

對  $p_i \delta \dot{x}_i$  進行部分積分，上式可進一步化簡成

$$\delta J = p_i \delta x_i \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \left( \dot{x}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left( \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) \delta x_i \right] dt = 0$$

上式對任意的  $\delta x_i$  及  $\delta p_i$  均須成立，故得一組聯立的 Hamilton 運動方程式

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, i = 1, 2, \dots, n \quad (11.2.18)$$

有關變分原理與古典力學關聯性的進一步詳細討論，可參閱 Lanczos (1986) 所寫的教科書。

### 例題 11.2.3

對於單擺的問題，我們在例題 11.2.1 已用 Lagrange 力學求解過，現在用 Hamilton 力學再重新求解一遍，以便分析兩者的相同與相異之處。首先 Lagrangian 函數已求得為

$$L = T - V = (ml^2/2)\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta)$$

其中  $\theta$  為廣義座標，利用(11.2.10)式，相對應的廣義動量  $p_\theta$  為

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta} \quad (11.2.19)$$

由上式及(11.2.15)式的定義，可將 Hamiltonian 函數表成

$$\begin{aligned} H(t, \theta, p_\theta) &\triangleq p_\theta \dot{\theta} - L(t, \theta, \dot{\theta}) = p_\theta \dot{\theta} - [(ml^2/2)\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta)] \\ &= (ml^2/2)\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta) = T + V \end{aligned} \quad (11.2.20)$$

吾人發現 Hamiltonian 函數原來是動能加位能，也就是系統的總能量。(11.2.20)式還不是標準的 Hamiltonian 函數，因為按照定義， $\dot{\theta}$  必須先表示成廣義動量  $p_\theta$  的函數(透過(11.2.19)式)，如此則可以得到如下結果：

$$H(t, \theta, p_\theta) = \frac{1}{2ml^2} p_\theta^2 + mgl(1 - \cos\theta) \quad (11.2.21)$$

最後再將上式代入(11.2.18)式，即可得到單擺的 Hamilton 運動方程式

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{1}{ml^2} p_\theta, \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgl \sin\theta \quad (11.2.22)$$

這是二個一階微分方程式的聯立，如果我們進一步將此二式合併並將  $p_\theta$  消去，則可得到如同

<sup>1</sup> H. Goldstein and C. Poole, Classical Mechanics, 3<sup>rd</sup> Edition, Addison Wesley, 2002.

(11.2.5)式的 Lagrange 方程式

$$l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0 \quad (11.2.23)$$

□

上面結果說明 Lagrange 運動方程式與 Hamilton 運動方程式二者是等義的，不同的地方是，前者以二階微分方程式來表示，而後者以二個一階的微分方程式來表示。對 $n$ 個自由度的系統而言，Lagrange 運動方程式是 $n$ 個二階微分方程式的聯立，而 Hamilton 運動方程式是 $2n$ 個一階的微分方程式的聯立。在用 Matlab 求解高階微分方程式時，我們知道必須先將高階微分方程式化成多個一階的微分方程式的聯立，此時 Matlab 才得以求解。Hamilton 力學的功能正是在於以一階微分方程式的聯立來表達系統的運動行為。

### 11.3 以變分原理求解非線性最佳控制

變分的目的在於決定系統具有極值的地方(極大或極小)，而在最佳化控制問題中，所要最佳化的對象稱為成本函數(cost function):

$$J(u) = \phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt \quad (11.3.1)$$

最佳化控制的目的就是要透過變分求得最佳控制 $u$ ，使得 $J(u)$ 具有極值；亦即使得 $\delta J = 0$ 。成本函數 $J$ 之中含有二項， $\phi(x(t_f), t_f)$ 是只和終端位置有關的成本(terminal cost)，與系統變化的過程無關； $L(x(t), u(t), t)$ 則是和變化過程有關的成本(或稱為 running cost)。 $x = [x_1 x_2 \cdots x_n]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ 是 $n$ 階向量代表系統的狀態， $u \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ 是 $m$ 階向量代表待定的控制函數。比較(11.3.1)式與(11.1.5)式，吾人發現(11.3.1)式的積分中沒有出現待求函數的微分項 $\dot{x}$ ，這是因為在控制設計的問題中，受控系統的狀態 $x$ 與狀態的微分 $\dot{x}$ 並不是獨立的，所以二者不能獨立進行變分，此時狀態 $x$ 與 $\dot{x}$ 的關係已被事先給定，稱為系統的狀態方程式(state-space equations):

$$\dot{x} = f(x, u, t), x(t_0) = x_0 \quad (11.3.2)$$

在控制設計的問題中，(11.3.2)式是給定的動態限制條件；反之，在力學最佳化問題中，事先並不知道有像(11.3.2)式的關係，所以在(11.1.5)式中的 $y$ 及 $\dot{y}$ (或 $y'$ )被視為是獨立的函數，可以自由變分，而力學變分的目地是要建立像(11.3.2)的狀態關係式。

在終端時刻 $t_f$ ， $x(t_f)$ 可能還須要滿足一些終端限制條件:

$$\varphi(x(t_f), t_f) = 0, \quad \varphi: q \times 1\text{-之向量} \quad (11.3.3)$$

為了處理動態限制條件(11.3.2)及終端限制(11.3.3)，吾人引入 Lagrange 乘積因子 $p$ 和 $v$ ，並將此二限制條件與(11.3.1)式結合成

$$J = \phi(x(t_f), t_f) + v^T \varphi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [L(x(t), u(t), t) + p^T (\dot{x} - f(x(t), u(t), t))] dt \quad (11.3.4)$$

引入 Lagrange 乘積因子的目的是要增加系統的自由度。讓虛擬擾動仍然擁有完全的任意性，就如同沒有限制條件一般。如果沒有引入 Lagrange 乘積因子，則終端限制條件會限制虛擬擾動的範圍，破壞了原先虛擬擾動可任意性的假設。

茲定義 Hamiltonian 函數 $H$ 如下:

$$H(x, u, p, t) = p^T f(x, u, t) - L(x, u, t) \quad (11.3.5)$$

則(11.3.4)可改寫成



$$J = \Phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [p^T \dot{x} - H(x, u, p, t)] dt \quad (11.3.6)$$

其中函數 $\Phi$ 定義成

$$\Phi(x(t_f), t_f) = \phi(x(t_f), t_f) + v^T \varphi(x(t_f), t_f) \quad (11.3.7)$$

並對(11.3.6)式中的 $p^T \dot{x}$ 執行部分積分而得

$$J = \Phi(x(t_f), t_f) + p^T(t_f)x(t_f) - p^T(t_0)x(t_0) - \int_{t_0}^{t_f} [H(x, u, p, t) + \dot{p}^T x] dt \quad (11.3.8)$$

以下開始進行變分的動作，只要是待求最佳值的數及函數都要進行變分(虛擬擾動)，因此虛擬擾動項將包含 $\delta x$ 、 $\delta u$ 、 $\delta t_f$ 、 $\delta x(t_f)$ ，又因為 $t_0$ 及 $x(t_0)$ 為已知，故無虛擬擾動項； $p$ 及 $v$ 是為了求解最佳化所特意引入的乘積因子，其本身不是被最佳化的對象，故亦無虛擬擾動。(11.3.8)式變分的結果為

$$\delta J = \delta \Phi(x(t_f), t_f) + \delta [p^T(t_f)x(t_f)] - \int_{t_0}^{t_f} \delta [H(x, u, p, t) + \dot{p}^T x] dt - [H + \dot{p}^T x]_{t=t_f} \delta t_f \quad (11.3.9)$$

(11.3.9)中各項的變分可求得如下：

$$\begin{aligned} \bullet \delta \Phi(x(t_f), t_f) &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{t=t_f} \delta x(t_f) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{t=t_f} \delta t_f \\ \bullet \delta [p^T(t_f)x(t_f)] &= \delta p^T(t_f)x(t_f) + p^T(t_f)\delta x(t_f) = \dot{p}^T(t_f)\delta t_f x(t_f) + p^T(t_f)\delta x(t_f) \\ \bullet \delta H(x, u, p, t) &= \frac{\partial H}{\partial x} \delta x + \frac{\partial H}{\partial u} \delta u \end{aligned}$$

將以上各項代入(11.3.9)式，得

$$\delta J = \left[ -H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right]_{t=t_f} \delta t_f + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{t_f} + p(t_f) \right) \delta x(t_f) - \int_{t_0}^{t_f} \left[ \frac{\partial H}{\partial u} \delta u + \left( \frac{\partial H}{\partial x} + \dot{p} \right) \delta x \right] dt \quad (11.3.10)$$

最佳化成立的條件必須使得 $\delta J = 0$ ，所以上式各項都要為零。首先注意 $\delta x$ 、 $\delta u$ 是任意變化的微擾量，所以其係數必須為零。由 $\delta u$ 的係數為零，得到最佳控制律(Optimal control law):

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (11.3.11)$$

其次由 $\delta x$ 的係數為零得到乘積因子 $p$ 所要滿足的方程式：

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (11.3.12)$$

在另一方面，狀態 $x$ 的方程式是由(11.3.2)所給定： $\dot{x} = f(x, u, t)$ ，此式可以改寫成與(11.3.12)式對稱的型式。由(11.3.5)式的定義知 $\partial H / \partial p = f$ ，因此 (11.3.2)式可改寫成 $\dot{x} = f = \partial H / \partial p$ ，再與(11.3.12)聯立即得

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (11.3.13)$$

以上 $2n$ 個聯立微分方程式，必須配合 $2n$ 個條件才得以求解，其中 $n$ 個條件式給定在初始時刻： $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ ，另外 $n$ 個條件則依不同的

(1) 終端狀態 $x(t_f)$ 與終端時間 $t_f$ 均已知的情形：

此時 $x(t_f) = x_f \in \mathbb{R}^n$ 是給定值，終端時間 $t_f$ 亦是給定值，故有 $\delta x(t_f) = 0$ ， $\delta t_f = 0$ ，因此(11.3.10)式的積分外的項自動為零。而求解(11.3.13)式所需要的 $2n$ 個條件則由 $x(t_0)$ 與 $x(t_f)$ 所給定：

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p}, x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_f \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x}\end{aligned}\quad (11.3.14)$$

(2) 終端狀態  $x(t_f)$  未知，終端時間  $t_f$  已知的情形：

此時終端時刻  $t_f$  給定，但終端狀態  $x(t_f)$  未給定，故有  $\delta x(t_f) \neq 0$  且  $\delta t_f = 0$ 。為了使(11.3.10)式的積分外的項為零， $\delta x(t_f)$  的係數必須為零：

$$p(t_f) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}\bigg|_{t_f} \in \mathbb{R}^n \quad (11.3.15)$$

此時雖然少了  $x(t_f)$  的條件，但多了(11.3.15)式的條件，再配合初始條件  $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ ，仍然剛好有  $2n$  個條件以求解(11.3.13)式：

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p}, x(t_0) = x_0 \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x}, p(t_f) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}\bigg|_{t_f}\end{aligned}\quad (11.3.16)$$

(3) 終端狀態  $x(t_f)$  與終端時刻  $t_f$  均未知的情形：

此時終端時刻  $t_f$  未給定，且終端狀態  $x(t_f)$  也未給定，故有  $\delta x(t_f) \neq 0$  且  $\delta t_f \neq 0$ 。為了使(11.3.10)式的積分外的項為零， $\delta x(t_f)$  與  $\delta t_f$  的係數都必須為零，亦即

$$p(t_f) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}\bigg|_{t_f} \in \mathbb{R}^n \quad (11.3.17)$$

$$H(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}\bigg|_{t=t_f} \quad (11.3.18)$$

其中(11.3.17)式取代了  $x(t_f)$  所缺少的  $n$  個條件，(11.3.18)式則取代了  $t_f$  所缺少的 1 個條件。此時所要求解的聯立微分方程式與(11.3.16)式相同，但唯一不同的是數值積分的終止時間  $t_f$  並不知道，而要從(11.3.18)式的滿足來判定是否已到達終止時間  $t_f$ 。

□

不管是以上何種情形，都是  $2n$  個聯立微分方程式，對應到  $2n$  個邊界條件，但其中  $n$  個給在初始端  $t_0$ ，另外  $n$  個給在終端  $t_f$ 。此即所謂的雙邊界值問題(two-boundary value problem)，它與初始值問題不同，因為在初始端只有一半的條件知道，所以無法從初始端積分，去獲得解答。同樣地，在終端也只有一半的條件知道，所以也無法從終端做反向積分，去獲得解答。求解雙邊界值問題只能透過數值疊代法(稱為 shooting method<sup>2</sup>)，先猜一組初始值  $p(t_0)$ ，連同已知的  $x(t_0)$  代入(11.3.14)式或(11.3.16)式，再從  $t_0$  積分到  $t_f$ ，積分所得的  $x(t_f)$  或  $p(t_f)$  再與所給定的  $x(t_f)$  或  $p(t_f)$  值做比較，利用比較所得的誤差去修正  $p(t_0)$  的猜測值，然後再以新的  $p(t_0)$  值進行第二次積分，如此疊代下去，直到  $p(t_f)$  的誤差小到可接受的程度。

Matlab 有現成的程式 `tpoint.m` 可用以求解雙邊界值問題。在呼叫這個程式時，使用者必須先建立二個副程式 `fcni.m` 和 `fcnb.m`，其中 `fcni.m` 設定了所要求解的聯立微分方程式，而 `fcnb.m` 則設定了兩端給定的邊界值。程式 `tpoint.m` 的功能是利用 shooting method 將雙邊界值問題轉換成初始值問題，所以程式 `tpoint.m` 的輸出是所有變數的初始值  $x(t_0)$  和  $p(t_0)$ 。有了所有變數的初始值後，我們即可呼叫程式 `ode45.m` 求解初始值問題，得到所有變數的時間響應。以下有一例題說明最佳化控制所遇到的雙邊界值問題，以及利用 Matlab 程式 `tpoint.m` 進行求解的過程。

<sup>2</sup> Press, W. H., et al, Numerical Recipes: The Art of scientific Computing, New York, Cambridge University Press, 1986.

綜合以上的討論，最佳控制 $u(t)$ 的求解步驟可歸納如下：

1. 先由(11.3.11)式求得 $u$ ，並將之表成 $x$ 和 $p$ 的函數，即 $u(x, p)$ 。
2. 再將 $u(x, p)$ 代入 $H(x, u, p, t)$ 中，將 $H(x, u, p, t)$ 表成 $x$ 和 $p$ 的函數，即 $H(x, p, t)$ 。
3. 再將 $H(x, p, t)$ 代入(11.3.13)式，以建立 $x$ 與 $p$ 所要滿足的微分方程式。
4. 求解(11.3.14)式或(11.3.16)式的雙邊界值問題，得到時間函數 $x(t)$ 和 $p(t)$ 的數值解。
5. 將時間函數 $x(t)$ 和 $p(t)$ 的數值解代入 $u(x, p)$ ，以求得最佳控制訊號 $u(t) = u(x(t), p(t))$ 。

以上步驟所求得的控制訊號 $u(t)$ 通常只是時間的函數，與狀態 $x$ 的回授無關，故稱如此求得的控制訊號為開迴路的最佳控制。反之，若控制訊號可表成 $u = u(x)$ 的型式，則稱此為閉迴路的最佳控制。通常以變分得到的最佳控制是開迴路的形式，而以動態規劃法(參見 11.5 節)所獲得的最佳控制是屬於閉迴路的形式。

### 例題 11.3.1: 由最佳控制推導力學原理

在這一例題中我們要以最佳控制的方法重新推導 11.2 節的力學原理。在(11.3.14)式中，函數 $p$ 的角色是 Lagrange 乘積因子，當我們把最佳控制應用到力學原理時，將會發現 $p$ 原來就是力學中的動量，因此(11.2.18)式的 Hamilton 運動方程式才會和(11.3.14)式完全一樣。8.3 節提到，力學原理的建立是透過變分求得函數 $x(t)$ 使得下列成本函數為最小：

$$J(x) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, x, \dot{x}) dt \quad (11.3.19)$$

先前吾人已經證明 $x(t)$ 必須滿足 Lagrange 方程式(11.2.2)或 Hamilton 方程式(11.2.18)。現在將(11.3.19)式改寫成一最佳控制的問題：求得控制訊號 $u(t)$ ，使得下列成本函數為最小：

$$J(u) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, x, u) dt \quad (11.3.20)$$

並受到下列動態限制：

$$\dot{x} = f(x, u, t) = u(t), x(t_0) = x_0 \quad (11.3.21)$$

這相當於控制訊號 $u(t)$ 就是粒子的速度 $\dot{x}$ ，而力學的內部運作即是在求得每一瞬間的最佳速度策略 $u(t) = \dot{x}$ ，使得成本函數 $J(u)$ 為最小。由(11.3.20)式與(11.3.21)式所組成的最佳控制問題只是(11.3.1)式與(11.3.2)式的一個特例，所以可直接套用本節的結果。首先根據(11.3.5)式，本最佳控制問題所對應的 Hamiltonian 函數為

$$H(x, u, p, t) = p^T f(x, u, t) - L(x, u, t) = p^T u - L(x, u, t) \quad (11.3.22)$$

再由最佳控制律 $\partial H / \partial u = 0$ 求得

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = p - \frac{\partial L}{\partial u} \Rightarrow p = \frac{\partial L}{\partial u} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \quad (11.3.23)$$

上式與(11.2.10)式比較，證明了此時的 Lagrange 乘積因子 $p$ 就是力學中所定義的動量；在另一方面，(11.3.23)式的乘積因子 $p$ 要滿足(11.3.13)式，而有

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

根據(11.3.22)式中的 $H$ 型式， $\partial H / \partial x = -\partial L / \partial x$ ，代入上式得

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

此式即為(11.2.2)式的 Lagrange 運動方程式。因此吾人從最佳控制的觀點出發，最後獲得了力

學的運作原理。這說明最佳控制是自然界中普遍性存在並持續在運作的事實，力學原理只是其中一個特例。

□

**例題 11.3.2:** 終端狀態 $x(t_f)$ 與終端時間 $t_f$ 均已知的情形

考慮一條曲線的參數式 $x(t)$ ， $a \leq t \leq b$ ，其兩端位置均給定 $x(a) = x_a$ ， $x(b) = x_b$ 。本題的目的是要在二端點固定的情形下，求出連結此二端點的最短距離曲線。我們曾在例題 11.1.2 中以變分的方法討論過相同的問題，這裡我們重新以最佳控制的觀點來求解。這裡所對應的成本函數是曲線連結二端點的弧線長：

$$J = \int_a^b \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)} dt \quad (11.3.24)$$

而曲線所要滿足的方程式為

$$\dot{x} = u(t) \quad (11.3.25)$$

這裡的控制律 $u$ 即為曲線的斜率 $\dot{x}$ ，也就是我們要設計此曲線在每一點的斜率 $u(t)$ ，使得連結兩固定端點的弧線長為最短。有了成本函數及動態方程式後，即可建立 Hamiltonian 函數

$$H(x, u, p, t) = p^T f(x, u, t) - L(x, u, t) = pu - \sqrt{1 + u^2} \quad (11.3.26)$$

再將 $H$ 代入(11.3.13)式求得 $x$ 與 $p$ 所要滿足的動態方程式

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = u, \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad (11.3.27)$$

而由最佳控制律(11.3.11)式得到

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow p = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \quad (11.3.28)$$

由(11.3.27)式知 $p = \text{常數}$ ，再代入(11.3.28)式，得 $u = c_1 = \text{常數}$ 。結合 $u = c_1$ 及(11.3.25)式，得到最短曲線方程式為

$$\dot{x} = c_1 \Rightarrow x = c_1 t + c_2 \quad (11.3.29)$$

這是一直線方程式的參數式，其中的待定係數 $c_1$ 與 $c_2$ 可利用兩端點的條件： $x(a) = x_a$ ， $x(b) = x_b$ 求出，最後得到直線方程式

$$x(t) = \frac{x_a - x_b}{a - b} t + \frac{ax_b - bx_a}{a - b} \quad (11.3.30)$$

此即通過二個給定點的直線方程式。因此在本題中，我們以最佳控制的方法證明了歐氏幾何的一個公設：『二點間之最短連線為直線』。

**例題 11.3.3:** 終端狀態 $x(t_f)$ 未知，終端時間 $t_f$ 已知的情形 (Lewis, 1995)

考慮粒子的簡單一維運動，其位置為 $y(t)$ ，速度為 $v(t)$ ，加速度為所要設計的控制律 $u$ ：

$$\dot{y} = v, \dot{v} = u \quad (11.3.31)$$

初始條件為 $y(0) = v(0) = 1$ ，但終端狀態 $y(t_f)$ 與 $v(t_f)$ 未給定。 $u$ 的設計是要使得以下的成本函數為最小：

$$J = \frac{1}{2} s_y (y(t_f) - y_{ref})^2 + \frac{1}{2} s_v (v(t_f) - v_{ref})^2 + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} u^2(t) dt \quad (11.3.32)$$

此成本函數相當於要求在終端時刻 $t_f$ ，系統狀態 $(y(t_f), v(t_f))$ 與目標值 $(y_{ref}, v_{ref})$ 的誤差要達到最小，且所花費的能量也要最小。本題的狀態變數為 $x = [yv]^T$ ，Lagrange 乘積因子為 $p = [p_y p_v]^T$ 。首先根據題意列出所對應的 Hamiltonian 函數

$$H = -\frac{1}{2}u^2 + p_y v + p_v u \quad (11.3.33)$$

Lagrange 乘積因子所要滿足的方程式為

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \quad (11.3.34a)$$

$$\dot{p}_v = -\frac{\partial H}{\partial v} = -p_y \quad (11.3.34a)$$

最佳化條件 $\partial H / \partial u = 0$ ，得到最佳控制律為

$$u = p_v(t) \quad (11.3.35)$$

將上式代回(11.3.31)式，得到狀態變數 $x = [yv]^T$ 所要滿足的方程式

$$\dot{y} = v, \dot{v} = p_v \quad (11.3.36)$$

(11.3.34)式與(11.3.36)構成 4 個聯立微分方程式，但已知條件出現在時間的兩端，其中已知的初始條件為 $y(0) = 1$ 與 $v(0) = 1$ 。在終端時刻 $t = t_f$ ，系統狀態 $(y(t_f), v(t_f))$ 要求與目標值 $(y_{ref}, v_{ref})$ 的誤差越小越好，但卻不一定等於目標值，所以終端值 $(y(t_f), v(t_f))$ 並不確定。終端值確定的是乘積因子 $(p_y(t_f), p_v(t_f))$ ，它是由條件(11.3.15)所給定：

$$p(t_f) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{t=t_f}, \Phi(x) = \frac{1}{2}s_y(y(t_f) - y_{ref})^2 + \frac{1}{2}s_v(v(t_f) - v_{ref})^2 \quad (11.3.37)$$

代入 $x = [yv]^T$ ，得到 2 個分量的終端條件

$$\begin{aligned} p_y(t_f) &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{t=t_f} = -s_y(y(t_f) - y_{ref}) \\ p_v(t_f) &= -\frac{\partial \Phi}{\partial v} \Big|_{t=t_f} = -s_v(v(t_f) - v_{ref}) \end{aligned} \quad (11.3.38)$$

整合以上結果，得到待求解的雙邊界值問題如下：

$$\begin{aligned} \dot{y} &= v, y(0) = 1 \\ \dot{v} &= p_v, v(0) = 1 \\ \dot{p}_y &= 0, p_y(t_f) = -s_y(y(t_f) - y_{ref}) \\ \dot{p}_v &= -p_y, p_v(t_f) = -s_v(v(t_f) - v_{ref}) \end{aligned} \quad (11.3.39)$$

在接下來的數值計算中，設定權重參數 $s_y = s_v = 100$ ，狀態目標 $(y_{ref}, v_{ref}) = (0, 0)$ ，終端時刻 $t_f = 10$ ，並將(11.3.39)式的資訊輸入到 matlab 程式 *tpoint.m* 的呼叫指令中，得到 *tpoint.m* 的輸出結果為 $(p_y(0), p_v(0)) = (-0.0718, -0.4594)$ 。再結合給定的初始條件 $y(0) = v(0) = 1$ ，則(11.3.39)式中的 4 個初始條件都已知，我們即可呼叫程式 *ode45.m* 求解初始值問題，得到 4 個變數的時間響應。由於(11.3.39)式的形式簡單，根據 4 個初始條件我們可以得到解析解如下：

$$\begin{aligned}
y(t) &= 1 + t - 0.2297t^2 + 0.012t^3 \\
v(t) &= 1 - 0.4594t + 0.0359t^2 \\
p_y(t) &= -0.0718 \\
p_v(t) &= -0.4594 + 0.0718t
\end{aligned}
\tag{11.3.40}$$

最佳控制律可以由(11.3.19)式求得：

$$u^*(t) = p_v(t) = -0.4594 + 0.0718t \tag{11.3.41}$$

圖 11.3.1 顯示位置 $y(t)$ 與速度 $v(t)$ 隨時間的變化曲線，可以看到在終端時刻 $t_f = 10$ 時， $(y(10), v(10))$ 非常接近狀態目標 $(y_{ref}, v_{ref}) = (0, 0)$ 。這是因為我們在成本函數(11.3.16)式中，設定了很大的權重係數 $s_y = s_v = 100$ ，這代表我們對於目標誤差的關心程度遠大於控制能量的花費程度。如果降低 $s_y$ 與 $s_v$ 的設定值，則終端時刻的目標誤差會變大，但可以降低控制能量的需求。

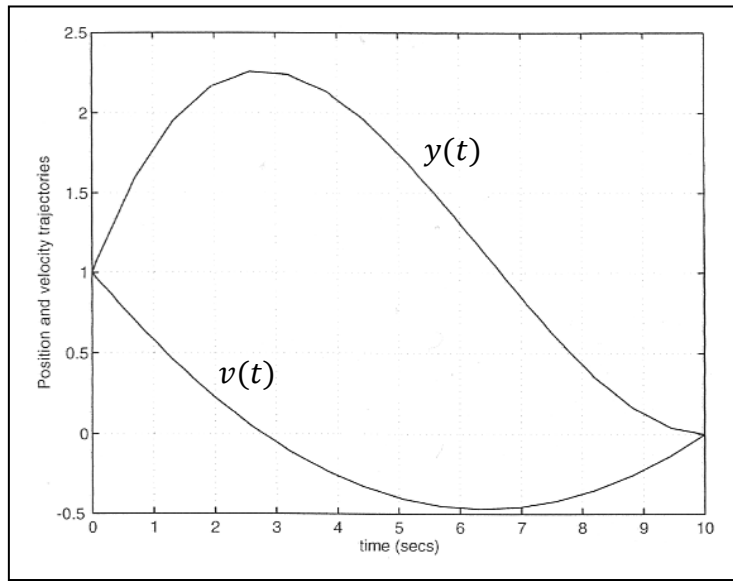


圖 11.3.1 位置 $y(t)$ 與速度 $v(t)$ 隨時間的變化曲線(Lewis, 1995)。

**例題 11.3.4:** 終端狀態 $x(t_f)$ 與終端時間 $t_f$ 均未知的情形

本題延續例題 11.3.2 的討論，但主題換成線外一點與直線的最短連線問題。參考圖 11.3.2，假設 $L$ 是一條不通過原點的已知直線，本題要求解一條曲線 $x(t)$ 從原點出發到達直線 $L$ ，使其連線距離為最短。本題與例題 11.3.2 的最大不同之處是曲線 $x(t)$ 的終點位置並未給定，只知其位於直線 $L$ 之上，但確切的位置事先並不知道，必須等待最佳化的條件來求得。

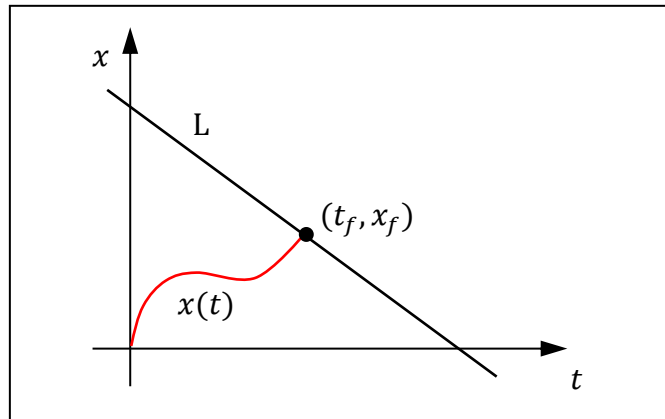


圖 11.3.2 線外一點到直線 $L$ 的最短距離連線。

本題所對應的動態方程式與 Hamiltonian 函數  $H$ ，均與例題 11.3.2 相同，再列出如後：

$$\dot{x} = u(t) \quad (11.3.42)$$

$$H(x, u, p, t) = pu - \sqrt{1+u^2} \quad (11.3.43)$$

由最佳控制律  $\partial H / \partial u = 0$ ，得到

$$p = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \quad (11.3.44)$$

由條件  $\dot{p} = -\partial H / \partial x = 0$ ，知  $p$  為常數，故控制  $u$  亦為常數(由上式)。在  $u$  為常數的情況下，我們由(11.3.42)式的積分獲得

$$x(t) = ut \quad (11.3.45)$$

其中積分常數取為零是因根據題意， $x(t)$  必須通過原點。上式顯示  $x(t)$  是一條通過原點的直線，但斜率  $u$  還未決定。此時參數  $t$  的終端值  $t_f$  與終點位置  $x(t_f)$  均為未知，唯一知道的是終點位置  $x(t_f)$  必須落在直線  $L$  之上。現在假設直線  $L$  的方程式為  $x = -mt + c$ ，則  $t_f$  與終點位置  $x(t_f)$  必須滿足關係式：

$$\varphi(x(t_f), t_f) = x(t_f) + mt_f - c = 0 \quad (11.3.46)$$

其中函數  $\varphi$  就是(11.3.3)式所列的終端限制條件。 $t_f$  與終點位置  $x(t_f)$  同時必須滿足(11.3.17)式與(11.3.18)式二個終端條件：

$$p(t_f) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{t_f}, H(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{t=t_f} \quad (11.3.47)$$

其中由(11.3.7)式知函數  $\Phi$  的定義為

$$\Phi(x(t_f), t_f) = \phi(x(t_f), t_f) + v^T \varphi(x(t_f), t_f) = 0 + v(x(t_f) + mt_f - c) \quad (11.3.48)$$

將此函數  $\Phi$  代入(11.3.47)式，由其中的第一式得到

$$p(t_f) = -v \Rightarrow p = -v \quad (11.3.49)$$

注意  $p$  為常數，故有  $p(t_f) = p$ 。另外由(11.3.47)式的第二式得到

$$pu - \sqrt{1+u^2} - mv = 0 \quad (11.3.50)$$

最後結合(11.3.4)式、(11.3.49)式與(11.3.50)式，得到控制  $u$  所要滿足的式子：

$$-\sqrt{1+u^2} + \frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}} + \frac{mu}{\sqrt{1+u^2}} = 0 \quad (11.3.51)$$

求解得到最佳控制律  $u$  為

$$u = \frac{1}{m} \quad (11.3.52)$$

再將之代入(11.3.45)式，得到最短連線曲線為

$$x(t) = \frac{t}{m} \quad (11.3.53)$$

這是一條通過原點的直線，且與直線  $L$  垂直。將上式代入(11.3.46)式，得到相對應的  $t_f$  與  $x(t_f)$  值為

$$t_f = \frac{mc}{1+m^2}, x(t_f) = \frac{c}{1+m^2} \quad (11.3.54)$$

此結果證明了歐氏幾何的一個基本性質：『線外一點  $A$  與直線  $L$  的最短連線是通過  $A$  點且與  $L$  垂直的直線段』。

**例題 11.3.5** 具有終端限制條件的情形(Bryson, 1975)

前面的例題考慮最佳軌跡的終點必須落在某一直線上，我們可以將其擴展到落在任意指定曲線上的情形。在衛星軌道的實際應用中，我們通常要求衛星軌道的終點要進入某一繞地的圓形軌道。本題考慮一具有固定推力 $T$ 的火箭引擎，其燃燒的時間 $t_f$ 為固定，我們希望求得推力方向的最佳時間函數 $\phi(t)$ ，以使得火箭能夠進入的圓形軌道半徑 $r$ 為最大。軌道的幾何關係如圖 11.3.3 所示，其中各符號定義如下：

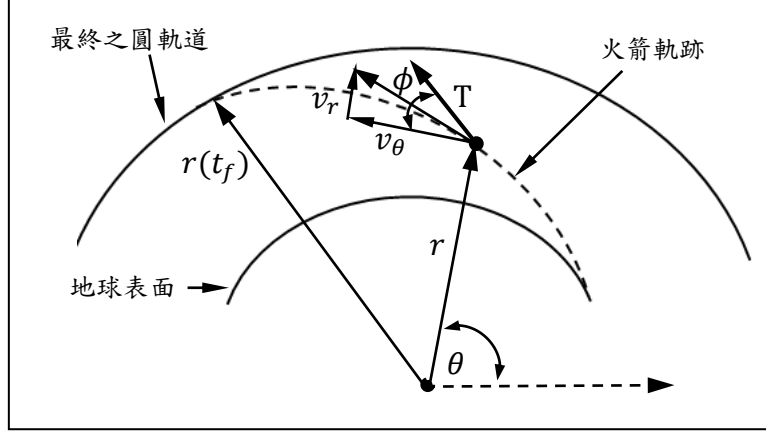


圖 11.3.3 決定推力的最佳方向 $f(t)$ ，使得火箭能夠進入的軌道半徑為最大。

- $r$ : 火箭到地心的距離
- $\theta$ : 火箭與地心的連線與 $x$ 軸的夾角
- $v_r$ : 火箭速度的 $r$ 分量
- $v_\theta$ : 火箭速度的 $\theta$ 分量
- $m_0$ : 火箭的初始質量
- $\dot{m}$ : 火箭的質量消耗率
- $T$ : 火箭的推力大小，為定值
- $GM$ :  $G$ 是太陽系的重力常數， $M$ 是地球的質量
- $\phi$ : 火箭推力的方向角，是待求的最佳控制 $u$ 。

描述火箭運動的狀態變數有三個： $x = [rv_r v_\theta]$ ，其滿足非線性微分方程式

$$\begin{aligned} \dot{r} &= v_r, r(0) = r_0 \\ \dot{v}_r &= \frac{v_\theta^2}{r} - \frac{GM}{r^2} + \frac{T \sin \phi}{m_0 - \dot{m}t}, v_r(0) = 0 \\ \dot{v}_\theta &= -\frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{T \cos \phi}{m_0 - \dot{m}t}, v_\theta(0) = \sqrt{GM/r_0} \end{aligned} \quad (11.3.55)$$

由於火箭最後必須進入一個圓形軌道，因此其終端速度必須等於圓形軌道速度，亦即須滿足二個終端限制條件

$$\varphi_1 = v_r(t_f) = 0, \varphi_2 = v_\theta(t_f) - \sqrt{GM/r(t_f)} = 0 \quad (11.3.56)$$

其中第一個條件是指 $r$ 方向的終端速度必須為零，而第二個條件指 $\theta$ 方向的終端速度必須等於圓形軌道的速度。根據題意，本最佳化問題的成本函數選為

$$J = \phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt = r(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} 0 dt \quad (11.3.57)$$

這說明成本函數只關心終端時刻軌道半徑 $r(t_f)$ 的大小，而與軌道的中間過程無關。根據(11.3.7)



式的定義，函數 $\Phi$ 可表成

$$\begin{aligned}\Phi(x(t_f), t_f) &= \phi(x(t_f), t_f) + v^T \varphi(x(t_f), t_f) = r(t_f) + v_1 \varphi_1 + v_2 \varphi_2 \\ &= r(t_f) + v_1 v_r(t_f) + v_2 [v_\theta(t_f) - \sqrt{GM/r(t_f)}]\end{aligned}\quad (11.3.58)$$

再根據(11.3.5)式的定義，Hamiltonian 函數 $H$ 可表成

$$\begin{aligned}H(x, u, p, t) &= p^T f(x, u, t) - L(x, u, t) = p_r f_r + p_{v_r} f_{v_r} + p_{v_\theta} f_{v_\theta} - 0 \\ &= p_r v_r + p_{v_r} \left( \frac{v_\theta^2}{r} - \frac{GM}{r^2} + \frac{T \sin \phi}{m_0 - \dot{m} t} \right) + p_{v_\theta} \left( -\frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{T \cos \phi}{m_0 - \dot{m} t} \right)\end{aligned}\quad (11.3.59)$$

將上面的 $H$ 代入(11.3.14b)式，可得到乘積因子 $p = [p_r p_{v_r} p_{v_\theta}]$ 所要滿足的微分方程式

$$\begin{aligned}\dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} = -p_{v_r} \left( -\frac{v_\theta^2}{r^2} + \frac{2GM}{r^3} \right) - p_{v_\theta} \frac{v_r v_\theta}{r^2} \\ \dot{p}_{v_r} &= -\frac{\partial H}{\partial v_r} = -p_r + p_{v_\theta} \frac{v_\theta}{r} \\ \dot{p}_{v_\theta} &= -\frac{\partial H}{\partial v_\theta} = -p_{v_r} \frac{2v_\theta}{r} + p_{v_\theta} \frac{v_r}{r}\end{aligned}\quad (11.3.60)$$

其邊界條件則由(11.3.17)式與(11.3.18)式所決定：

$$p(t_f) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{t_f}, H(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{t=t_f} \quad (11.3.61)$$

將(11.3.58)式的 $\Phi$ 代入上式，其中第一式得到 $p$ 的終端條件

$$\begin{aligned}p_r(t_f) &= -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{t_f} = -1 - \frac{v_2 \sqrt{GM}}{2r^{3/2}(t_f)} \\ p_{v_r}(t_f) &= -\frac{\partial \Phi}{\partial v_r} \Big|_{t_f} = -v_1 \\ p_{v_\theta}(t_f) &= -\frac{\partial \Phi}{\partial v_\theta} \Big|_{t_f} = -v_2\end{aligned}\quad (11.3.62)$$

(11.3.61)式中的第二式則給出到達終端時刻 $t_f$ 的判斷條件

$$H(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{t=t_f} = 0 \quad (11.3.63)$$

其中函數 $H$ 由(11.3.59)式所給定。最佳控制律 $u = \phi(t)$ 是由(11.3.11)式所決定

$$\partial H / \partial \phi = 0 \Rightarrow \tan \phi = p_{v_r} / p_{v_\theta} \quad (11.3.64)$$

從而將 $\sin \phi$ 、 $\cos \phi$ 用 $p_{v_r}$ 及 $p_{v_\theta}$ 表示如下：

$$\sin \phi = \frac{p_{v_r}}{\sqrt{p_{v_r}^2 + p_{v_\theta}^2}}, \cos \phi = \frac{p_{v_\theta}}{\sqrt{p_{v_r}^2 + p_{v_\theta}^2}} \quad (11.3.65)$$

最後將以上的 $\sin \phi$ 、 $\cos \phi$ 代入(11.3.55)式中，再與(11.3.60)式聯立，即可得到由 6 個變數 $r$ 、 $v_r$ 、 $v_\theta$ 、 $p_r$ 、 $p_{v_r}$ 、 $p_{v_\theta}$ 所組成的 6 個微分方程式。整個數值計算過程牽涉到多層次的疊代運算，歸納步驟如下：

- (1) 先給定三個未知常數 $v_1$ 、 $v_2$ 、 $t_f$ 的初始猜測值。
- (2) 建立 6 個邊界條件，其中 3 個給在初始端，如(11.3.55)式所示，另外 3 個給在終端，如(11.3.62)式所示。
- (3) 聯立求解(11.3.55)式與(11.3.60)式所組成的雙邊界值問題，呼叫 Matlab 程式 tpoint.m 將雙邊界值問題轉換成初始值問題，得到三個初始條件： $p_r(0)$ 、 $p_{v_r}(0)$ 、 $p_{v_\theta}(0)$ 。
- (4) 利用六個初始條件 $r(0)$ 、 $v_r(0)$ 、 $v_\theta(0)$ 、 $p_r(0)$ 、 $p_{v_r}(0)$ 、 $p_{v_\theta}(0)$ ，呼叫 ode45.m 程式求解(11.3.55)式與(11.3.60)式所組成的初始值問題。得到六個狀態的終端值 $r(t_f)$ 、 $v_r(t_f)$ 、 $v_\theta(t_f)$ 、

$p_r(t_f)$ 、 $p_{v_r}(t_f)$ 、 $p_{v_\theta}(t_f)$ 。

- (5) 檢測六個狀態的終端值是否滿足三個終端條件： $\varphi_1(t_f) = \varphi_2(t_f) = H(t_f) = 0$ ？如果是，代表最佳解已求得，將所求得的時間函數 $p_{v_r}(t)$ 及 $p_{v_\theta}(t)$ 代入(11.3.64)式中，即可決定每個瞬間的推力最佳方向角 $\phi(t)$ ：

$$\phi(t) = \tan^{-1}(p_{v_r}(t)/p_{v_\theta}(t))$$

- (6) 如果三個終端條件沒有滿足，則修正三個未知常數 $v_1$ 、 $v_2$ 、 $t_f$ 的猜測值，再回到步驟(2)進行下一回的疊代運算，直到三個終端條件滿足為止。

上面步驟所得到的最佳控制 $u = \phi(t)$ 是時間的顯函數，與狀態 $x = [rv_r v_\theta]$ 無關，無法表成 $u = \phi(r, v_r, v_\theta)$ 的回授型式，故稱這是一種開迴路型式的最佳化控制。通常由變分方法所得的非線性最佳化控制都是屬於開迴路的型式。但有一個特例，將變分應用於線性系統時，所得到的最佳化控制可以具有閉迴路的形式，如下一節的討論。

## 11.4 最佳線性二次(LQ)控制的變分求解

這一節所要探討的是上一節的非線性最佳理論在線性系統的應用。最常使用的最佳控制是線性二次(Linear Quadratic)最佳控制，這裡所謂的『二次』是指成本函數是二次的：

$$J(u) = x^T(t_f)Mx(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t))dt \quad (11.4.1)$$

其中 $M = M^T \geq 0$ (半正定對稱矩陣)、 $Q = Q^T \geq 0$ 、 $R = R^T > 0$ (正定對稱矩陣)。這裡所謂的『線性』是指系統的狀態方程式是線性的：

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \quad (11.4.2)$$

$x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ 是 $n$ 階向量代表系統的狀態， $u \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ 是 $m$ 階向量代表待定的控制函數。線性二次最佳控制的目的是要決定控制函數 $u(t)$ 使得成本函數 $J$ 為最小。由於(11.4.1)式的成本函數是(11.3.1)式的特例，而線性動態(11.4.2)也是非線性動態(11.3.2)的特例，所以線性二次最佳控制的解可以直接套用上一節的結果。根據(11.3.5)式的定義，本最佳化問題的 Hamiltonian 函數為

$$H = p^T f(x, u, t) - L(x, u, t) = p^T (A(t)x + B(t)u) - (x^T Q(t)x + u^T R(t)u) \quad (11.4.3)$$

將上式的 $H$ 代入(11.3.14)式中， $x$ 和 $p$ 所要滿足的微分方程式為

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = Ax + Bu, x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \quad (11.4.4a)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 2Qx - A^T p \quad (11.4.4b)$$

其中 $p(t)$ 滿足終端條件

$$p(t_f) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{t_f} = -2Mx(t_f) \in \mathbb{R}^n \quad (11.4.5)$$

其中根據(11.3.8)式， $\Phi(x(t_f)) = x^T(t_f)Mx(t_f)$ 。將 $H$ 代入最佳控制律(11.3.11)式中，得

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = -2Ru + B^T p \Rightarrow u = \frac{1}{2}R^{-1}B^T p(t) \quad (11.4.6)$$

再將 $u$ 代回(11.4.4)式，得到 $x$ 和 $p$ 之聯立 $2n$ 個微分方程式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -(1/2)B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ -2Q(t) & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} \quad (11.4.7)$$

由於 $p(t_f) = -2Mx(t_f)$ 的終端條件，吾人猜測 $p(t)$ 一般解的型式為

$$p(t) = -2P(t)x(t), P(t_f) = M \quad (11.4.8)$$

其中 $P(t)$ 為待定的時間函數矩陣。將(11.4.8)式代入(11.4.7)式可得

$$\dot{P}(t)x = (-A^T(t)P(t) - P(t)A(t) + P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) - Q(t))x \quad (11.4.9)$$

因為上式對任意 $x(t)$ ， $0 \leq t \leq t_f$ ，都要成立，故 $P(t)$ 必須滿足以下條件

$$\dot{P}(t) = -A^T(t)P(t) - P(t)A(t) + P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) - Q(t), P(t_f) = M \quad (11.4.10)$$

此式即為在控制領域中有名的 Riccati 微分方程式，它的已知邊界條件是給在終端點上，故必須用後向積分，由 $P(t_f)$ 開始積分，逆向時間積分到 $P(t_0)$ 。待 $P(t)$ 求出後，代入(11.4.8)式求 $p(t)$ ，再將 $p(t)$ 代入(11.4.6)式得最佳控制函數為：

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x(t) = -K(t)x(t) \quad (11.4.11)$$

其中 $K(t) = R^{-1}(t)B^T(t)P(t)$ 稱為 Kalman gain。前面提到用變分原理所得到的非線性最佳控制都是屬於開迴路的型式，但線性系統是一個特例，我們看到上式已將最佳控制表成閉迴路狀態回授的型式。

最後吾人要計算在最佳控制 $u^*$ 的作用下，其對應的最小成本函數 $J$ 的值為多少。首先利用恆等式，

$$x^T(t_f)Mx(t_f) = x^T(t_0)P(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}(x^T Px)dt \quad (11.4.12)$$

將之代入(11.4.1)式中，得

$$J = x^T(t_0)P(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} [x^T Qx + u^T Ru + \dot{x}^T Px + x^T \dot{P}x + x^T P\dot{x}]dt \quad (11.4.13)$$

其中的 $\dot{x}$ 以(11.4.7)式代入， $\dot{P}$ 則以(11.4.10)式代入，合併化簡得

$$J = x^T(t_0)P(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} (R^{-1}B^T Px + u)^T (R^{-1}B^T Px + u)dt \quad (11.4.14)$$

但因為最佳控制 $u$ 滿足(11.4.11)式，其剛好使得上面的積分項完全為零，故成本函數的最小值化為

$$J_{\min} = x^T(t_0)P(t_0)x(t_0) \quad (11.4.15)$$

其中的 $P(t_0)$ 是由(11.4.10)式逆向積分 $P(t)$ ，從 $t = t_f$ 積到 $t = t_0$ 所得到的。

## 11.5 以動態規劃求解非線性最佳控制

前面所得到的最佳控制 $u(t)$ 只適用於從初始點 $x(t_0)$ 出發的系統，亦即 $u(t)$ 實際上是讓下列的成本函數為最小：

$$J(t_0, x_0, u) = \phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(\tau), u(\tau), \tau)d\tau \quad (11.5.1)$$

其中 $x$ 與 $u$ 滿足系統的狀態方程式

$$\dot{x} = f(x, u, t), x(t_0) = x_0 \quad (11.5.2)$$

當初始時間 $t_0$ 或初始位置 $x_0$ 改變時，最佳控制 $u(t)$ 就不同，因此最佳控制問題必須再重新解一次。這相當於我們所得到的最佳控制 $u(t)$ 其實只是一種特解(particular solution)。本節的目的在於求得最佳控制問題的通解(general solution)。通解的意思是包含了所有可能的 $(t_0, x_0)$ 所對應的特解。為了表示初始條件 $(t_0, x_0)$ 的任意性，我們改用 $(t, x)$ 來表達任意的 $(t_0, x_0)$ ，此時成本函

數(11.5.1)也將是 $(t, x)$ 的函數

$$J(t, x, u) = \phi(x(t_f), t_f) + \int_t^{t_f} L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \quad (11.5.3)$$

其中 $t$ 與 $x$ 的值是任意且為固定的，而 $x(t)$ ， $t \leq t_f$ ，則是時間函數，滿足初始條件 $x(t) = x$ 。最佳控制的通解，是要求得 $u$ 使得在任意初始條件 $x(t) = x$ 下， $J$ 為最小，此時的通解必須能表成初始時間 $t$ 及初始位置 $x$ 的函數，即 $u = u(t, x)$ 。如果將 $t$ 視為現在時刻，則(11.5.3)式所表示的成本就是從現在開始，到執行任務結束時刻 $t_f$ ，所需要的成本，又稱為剩餘成本(cost-to-go)。

(11.5.3)式所得到的最佳控制可為系統在任意時刻 $t$ 、任意位置 $x$ 的狀況下，規劃出最佳策略 $u = u(t, x)$ ，所以具有動態性的規劃能力；反之，(11.5.1)式所得到的最佳控制策略只適用於在特定時刻 $t_0$ 、特定位置 $x_0$ 出發的系統；對於不同的出發點，最佳控制策略必須重新求解。所以(11.5.1)式的最佳控制策略是根據初始狀況 $(t_0, x_0)$ 去做預先規劃，當系統脫離了預先規劃的路徑時，最佳策略就要重新規劃；而(11.5.3)式的最佳控制策略則是屬於動態規劃，根據系統現時所處的狀態 $(t, x)$ ，即時擬定最佳策略。所以具有動態規劃特性的最佳控制是屬於閉迴路的控制(closed-loop control)，它會根據現時的系統狀態，適時調整控制策略(亦即回授)；預先規劃型的最佳控制則是屬於開迴路控制(open-loop control)，無法對突然的改變做調整。由 Bryson and Ho 所寫的最佳控制權威著作(Bryson, 1975)即是在討論開迴路的最佳控制設計。

以動態規劃方法求解最佳控制問題是在 1950 年代由 Bellman (1957)所提出，雖然他所採用的觀點與變分理論不同，但他所推導出來的偏微分方程式卻與 1830 年代出現的 Hamilton-Jacobi 方程式一樣，這是以變分理論推導出來的力學方程式。Bellman 本人可能不知道這種關聯性的存在，而是由 Kalman<sup>3</sup>於 1960 年代提出，並統稱為 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)方程式。所以 Kalman 所建立的最佳控制理論結合了變分與動態規劃的論點。有關這二個論點的關聯性，Liberzon (2012)的新書及 Bryson (1996)的回顧文章均做了非常清楚的解說。

現假設(11.5.3)式的成本函數的最小值為

$$V(t, x) \triangleq \min_{u[t, t_f]} J(t, x, u) = \min_{u[t, t_f]} \left[ \phi(x(t_f), t_f) + \int_t^{t_f} L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \right] \quad (11.5.4)$$

其中 $u[t, t_f]$ 表示時間函數 $u(\tau)$ ， $t \leq \tau \leq t_f$ 。 $V$ 稱為值函數(value function)，由(11.5.3)式知其必須滿足終端條件

$$V(t_f, x) = \phi(t_f, x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (11.5.5)$$

在(11.5.3)式中的積分從 $t$ 到 $t_f$ ，可分成二段的積分相加，先從 $t$ 積到 $t + \Delta t$ ，再從 $t + \Delta t$ 積分到 $t_f$ ，依此原則將值函數 $V$ 拆解成

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \min_{u[t, t_f]} \left\{ \phi(x(t_f), t_f) + \int_t^{t_f} L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \right\} \\ &= \min_{u[t, t_f]} \left\{ \phi(x(t_f), t_f) + \int_t^{t+\Delta t} L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \int_{t+\Delta t}^{t_f} L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \right\} \end{aligned} \quad (11.5.6)$$

根據定義，第一項與第三項相加的最小值即是值函數 $V(t + \Delta t, x(t + \Delta t))$ ，而第二項中的控制函數 $u(\tau)$ 的最佳化搜尋範圍縮小為 $t \leq \tau \leq t + \Delta t$ 。於是(11.5.6)式可簡化成

$$V(t, x) = \min_{u[t, t+\Delta t]} \left\{ V(t + \Delta t, x(t + \Delta t)) + \int_t^{t+\Delta t} L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \right\} \quad (11.5.7)$$

<sup>3</sup> R. E. Kalman, Control Theory: Twenty-Five Seminal Papers (1931-1981), T. Basar, editor, IEEE Press, New York, pages 149-166, 2001.

假設 $\Delta t$ 很小，而將上式右邊二項作泰勒展開：

$$V(t + \Delta t, x(t + \Delta t)) = V(t, x) + \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \cdot f(t, x, u(t)) \Delta t + O(\Delta t) \quad (11.5.8a)$$

$$\int_t^{t+\Delta t} L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau = L(t, x, u(t)) \Delta t + O(\Delta t) \quad (11.5.8b)$$

其中(11.5.8a)式中的 $f(t, x, u(t)) \Delta t = \Delta x$ 是由(11.5.2)式得到的。將以上的展開式代入(11.5.7)式中，可得到

$$V(t, x) = \min_{u[t, t+\Delta t]} \left\{ L(t, x, u(t)) \Delta t + V(t, x) + \frac{\partial V}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(t, x, u(t)) \Delta t + O(\Delta t) \right\} \quad (11.5.9)$$

上式右邊的 $V(t, x)$ 值與 $u$ 無關，可拿到min的外面與左邊的 $V(t, x)$ 對消，而剩下

$$0 = \min_{u[t, t+\Delta t]} \left\{ L(t, x, u(t)) \Delta t + \frac{\partial V}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(t, x, u(t)) \Delta t + O(\Delta t) \right\} \quad (11.5.10)$$

現令 $\Delta t \rightarrow 0$ ，並將與 $t$ 無關的 $\partial V / \partial t$ 這項提到min的外面，而得到

$$-\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} = \min_{u \in U} \left\{ L(t, x, u) + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \cdot f(t, x, u) \right\} \quad (11.5.11)$$

當 $\Delta t \rightarrow 0$ 時，函數 $u[t, t + \Delta t]$ 變成只在時間 $t$ 的瞬間取值，此時 $u$ 已不是時間的函數而是一個普通數，其值域設為 $U$ 。所以(11.5.11)式的最佳化問題變成是在集合 $U$ 內找到一個數 $u$ 使得大括號內的值為最小。在原問題(11.5.3)式中，吾人本是要搜尋一最佳函數 $u(\tau)$ 使得泛函數 $J$ 為最小，這問題牽涉到變分原理；而在(11.5.11)式中，是在尋求一最佳數值 $u$ ，使得函數 $L(t, x, u) + (\partial V / \partial x) \cdot f(t, x, u)$ 為最小，這牽涉到微積分原理(其中的 $t$ 與 $x$ 值都被凍結在時間 $t$ 的瞬間，所以視為定值)。從變分問題化簡成微積分問題，使得最佳控制的求解變得非常容易處理。方程式(11.5.11)稱為 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程式。

為了進一步的化簡，先將(11.5.11)式改寫成

$$\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} = \max_{u \in U} \left\{ -L(t, x, u) - \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \cdot f(t, x, u) \right\} \quad (11.5.12)$$

將上式括號內的項與(11.3.5)式的 Hamiltonian 函數 $H(t, x, u, p) = p^T f(t, x, u) - L(t, x, u)$ 比較，吾人發現上式括號內的項相當於是將 $H$ 中的 $p$ 用 $-\partial V / \partial x$ 取代之，因此(11.5.12)式可用 $H$ 改寫成

$$\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} = \max_{u \in U} \{ H(t, x, u, -\partial V / \partial x) \} \quad (11.5.13)$$

因此最佳控制 $u$ 必須使得 Hamiltonian 函數 $H$ 為最大，而其必要條件為

$$\frac{\partial}{\partial u} H(t, x, u, p) = 0 \Rightarrow u_{\max} = u_{\max}(t, x, p) \big|_{p=-\partial V / \partial x} \quad (11.5.14)$$

此即(11.3.11)式的最佳控制律，然而先前是用變分原理求得，現在吾人用動態規劃原理得到相同結果。在以動態規劃法求解最佳控制的過程中，第一步是先求 $u_{\max}$ 使 $H$ 函數的值為最大，將此最佳的 $u_{\max}$ 用 $\partial V / \partial x$ 表示之；再將此 $u_{\max}$ 代回(11.5.14)式的右邊，而形成 $V(t, x)$ 的偏微分方程式，並求解之。最後再將解答 $V(t, x)$ 代入(11.5.14)式中，得到最佳控制律 $u_{\max}(t, x)$

### 例題 11.5.1

試決定最佳的速度策略 $u(t, x)$

$$\dot{x} = f(t, x, u) = u(t, x)$$

使得下列的剩餘成本(cost-to-go)為最小:

$$J(t, x, u) = \int_t^{t_f} (x^4(\tau) + u^4(\tau)) d\tau$$

對於本問題，(11.5.12)式的對應式子為

$$\begin{aligned} \max_{u \in \mathbf{U}} H &= \max_{u \in \mathbf{U}} \left\{ -L(t, x, u) - \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \cdot f(t, x, u) \right\} \\ &= \max_{u \in \mathbf{U}} \left\{ -x^4 - u^4 - \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \cdot u \right\} \end{aligned}$$

其中函數 $H$ 的最大值可令其對 $u$ 的微分為零，而求得最佳的 $u$ 為

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 4u^3 + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} = 0 \Rightarrow u_{\max} = -\left(\frac{1}{4} \frac{\partial V(t, x)}{\partial x}\right)^{1/3} \quad (11.5.15)$$

將此 $u_{\max}$ 代回(11.5.12)式的右邊，而形成 $V(t, x)$ 的偏微分方程式，

$$\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} = -x^4 + 3\left(\frac{1}{4} \frac{\partial V(t, x)}{\partial x}\right)^{4/3}$$

將所求的解 $V(t, x)$ 代回(11.5.15)式，即得最佳閉迴路控制 $u_{\max}(t, x)$ 。

□

### 例題 11.5.2

有關二次線性最佳化問題，於 8.5 節中吾人已經用變分原理獲得其解。這一例題將以本節所介紹的動態規劃法重新求解二次線性最佳化問題。這裡所要最佳化的成本函數為

$$J(t, x, u) = x^T(t_f)Mx(t_f) + \int_t^{t_f} (x^T(\tau)Q(\tau)x(\tau) + u^T(\tau)R(\tau)u(\tau))d\tau \quad (11.5.16)$$

其中 $t$ 代表現在時刻， $x$ 代表現在位置。上述積分從 $t$ 積到 $t_f$ ，代表從現在起算，完成控制任務所需要的付出成本，或稱為剩餘成本(cost-to-go)。剩餘成本是時間 $t$ 的函數，當時間 $t$ 逐漸接近終端時刻 $t_f$ 時，剩餘成本將越來越小。當 $t = t_f$ 時，剩餘成本等於終端成本 $x^T(t_f)Mx(t_f)$ 。相對地，在(11.4.1)式中的成本函數則是從初始時刻 $t_0$ 積分到終端時刻 $t_f$ ，該成本函數與現在的時刻 $t$ 無關。另外 $x$ 與 $u$ 之間要滿足線性的狀態方程式

$$\dot{x} = f(t, x, u) = A(t)x + B(t)u \quad (11.5.17)$$

根據本節的推導結果，最小成本函數 $V(t, x) = \min J(t, x, u)$ 必需滿足 HJB 偏微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} &= \max_{u \in \mathbf{U}} \{ p^T f(t, x, u) - L(t, x, u) \}_{p = -\partial V / \partial x} \\ &= \max_{u \in \mathbf{U}} \{ -(\partial V / \partial x)^T (A(t)x + B(t)u) - (x^T Q(t)x + u^T R(t)u) \} \end{aligned} \quad (11.5.18)$$

上式的右方為 $u$ 的二次項，且最高次項的係數為負，故知確實存在有最大值。而最大值發生處的 $u$ 值可令微分為零而求得：

$$u = -\frac{1}{2}R^{-1}(t)B^T(t)\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \quad (11.5.19)$$

將此最佳之控制 $u$ 代入(11.5.18)式的右邊項，可得到 $V(t, x)$ 所需滿足的偏微分方程式

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -x^T Q(t)x + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\frac{\partial V}{\partial x} - \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T A(t)x \quad (11.5.20)$$

其中 $V(t, x)$ 滿足終端條件

$$V(t_f, x) = x^T M x \quad (11.5.21)$$

觀察這一終端條件以及(11.5.20)式右邊出現的 $x$ 平方項， $V(t, x)$ 的解答型式可合理假設為

$$V(t, x) = x^T P(t) x, P(t_f) = M \quad (11.5.22)$$

將此假設解代入(11.5.20)式中，得到

$$x^T \dot{P}(t) x = x^T [-A^T(t)P(t) - P(t)A(t) + P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) - Q(t)]x \quad (11.5.23)$$

上式對任意 $x \in \mathbb{R}^n$ ，故 $P(t)$ 必須滿足矩陣微分方程式

$$\dot{P}(t) = -A^T(t)P(t) - P(t)A(t) + P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) - Q(t), P(t_f) = M \quad (11.5.24)$$

此式即為先前(11.4.10)式所得到的 Riccati 方程式。(11.5.22)式中的時間 $t$ 可為任意值；當 $t = t_0$ 時， $V(t_0, x) = x^T P(t_0) x$ 就是成本函數(11.4.1)式的最小值，而此結果與(11.4.15)式的結論相同。

□

吾人發現對於線性二次最佳控制問題，不管是由變分原理或由動態規劃原理來求解，其結果是相同的。但這一結論只適用於線性系統和少數特例，對於非線性系統及量子系統而言，由變分原理所得到的最佳控制是屬於開迴路的型式，而由動態規劃所得到的最佳控制是屬於閉迴路的型式。閉迴路的解答是通解，其可藉由初始條件的設定而得到某一開迴路的特解；但反過來說，集合多個開迴路的控制律不見得可以重建閉迴路控制的效果。

## 11.6 以動態規劃法推導經典力學原理

在例題 11.3.1 中，吾人已將力學問題改寫成等義的最佳控制問題，並利用變分原理求解最佳控制律，而得到力學的運動定律。在本節中，吾人改用動態規劃求解相同的問題。力學問題的相對應剩餘成本函數為：

$$J(t, x, u) = \int_t^{t_f} L(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau \quad (11.6.1)$$

其中 $L(\tau, x, \dot{x}) = T - U$ 為 Lagrangian 函數，是動能與位能的差；控制策略 $u$ 在力學問題中即為速度 $\dot{x}$ ：

$$\dot{x} = f(x, u, t) = u \quad (11.6.2)$$

變分學的最佳化是在求得每一瞬間的最佳速度策略 $u(t) = \dot{x}$ ，而動態規劃的最佳化是在求得每一位置的最佳速度策略 $u(x) = \dot{x}$ ，使得剩餘成本 $J(t, x, u)$ 為最小。本問題所對應的 HJB 方程式(11.5.12)式為

$$\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} = \max_{u \in U} \left\{ -L(t, x, u) - \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \cdot u \right\} \quad (11.6.3)$$

在最大值發生之處， $u$ 必須滿足極值條件

$$\frac{\partial L(t, x, u)}{\partial u} = - \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \quad (11.6.4)$$

從上式解出 $u$ 用 $\partial V / \partial x$ 表示，再代入(11.6.3)式的右邊而得到一個關於 $V(t, x)$ 的偏微分方程式。為了得到進一步的化簡，我們引入先前動量 $p$ 以及 Hamiltonian 函數 $H$ 的定義：

$$p \triangleq \frac{\partial L(t, x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L(t, x, u)}{\partial u} \quad (11.6.5)$$

$$H(t, x, p) \triangleq p\dot{x} - L(t, x, \dot{x}) = pu - L(t, x, u) \quad (11.6.6)$$

注意上式中的 $H(t, x, p)$ 不含有 $u$ 的變數，因為 $u$ 已經透過(11.6.5)式的求解，將之表成 $p$ 之函數。

比較(11.6.4)式及(11.6.5)式，可知在最佳控制下，最佳動量 $p$ 為

$$p = -\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \quad (11.6.7)$$

將之代入(11.6.3)式而得

$$\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} = pu_{\max} - L(t, x, u_{\max}) \quad (11.6.8)$$

其中 $u_{\max}$ 是要從(11.6.4)式求解，並將之表成 $\partial V/\partial x$ 的函數，也就是表成 $p$ 的函數。但是根據(11.6.6)式的定義， $pu - L(t, x, u)$ 中的 $u$ 若表成 $p$ 的函數時，其結果即是 Hamiltonian 函數，因此(11.6.8)式可進一步簡化成

$$\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} = H(t, x, p)|_{p=-\partial V/\partial x} \quad (11.6.9)$$

這就是經典力學中有名的 Hamilton-Jacobi 方程式，它在 1830 年代是透過正則轉換(canonical transformation)推導出來的，在這裡吾人則是以 Bellman 的動態規畫法重新得到。嚴格來講，Hamilton-Jacobi 方程式與(11.6.9)式有些微的差異，不過這只是函數正負號的定義問題。若令新函數

$$S(t, x) = -V(t, x) \quad (11.6.10)$$

則(11.6.9)式可改寫成標準型式的 Hamilton-Jacobi 方程式

$$\frac{\partial S(t, x)}{\partial t} + H(t, x, p)|_{p=\partial S/\partial x} = 0 \quad (11.6.11)$$

函數 $S$ 稱為作用量函數(action function)。

由(11.6.7)式所得到的動量 $p$ 是位置 $x$ 的函數，這是屬於閉迴路的型式；而由 Hamilton 運動方程式(11.3.14)式所得到的 $x(t)$ 與 $p(t)$ 則都是時間的函數，這是屬於開迴路的型式。以下吾人證明閉迴路控制可化成等義的開迴路型式(11.3.14)。首先由(11.6.6)式對 $p$ 的微分得

$$\frac{\partial H}{\partial p} = u = \dot{x} \quad (11.6.12)$$

此即(11.3.14a)式。其次對(11.6.7)式取對時間 $t$ 的微分，得

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (11.6.13)$$

其中由(11.6.9)式， $\partial V/\partial t = H$ ；由(11.6.7)式， $-\partial V/\partial x = p$ ；由(11.6.12)式， $\dot{x} = \partial H/\partial p$ 。在另一方面，吾人注意

$$H(t, x, p)|_{p=-\partial V/\partial x} = H(t, x, p(x, t)), \quad (11.6.14)$$

二邊均對 $x$ 微分得，

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{p=\text{const.}} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (11.6.15)$$

將之代入(11.6.13)式，可得

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{p=\text{const.}} \quad (11.6.16)$$

上式即為(11.3.14b)式，其中 $H$ 對 $x$ 微分時， $p$ 保持常數，此條件相當於將 $H(t, x, p)$ 中的 $x$ 與 $p$ 視為獨立的變數，而此正是開迴路控制的情形。

### 例題 11.6.1



考慮由彈簧、滑塊所組成的簡諧振子，證明由開迴路的 Hamilton 力學所得到的結果，與由閉迴路的 Hamilton-Jacobi 力學所得到的結果相同。首先建立此系統的 Lagrangian 函數

$$L(t, x, \dot{x}) = T - U = (1/2)m\dot{x}^2 - (1/2)kx^2. \quad (11.6.17)$$

動量  $p$  可由定義式(11.6.5)獲得

$$p = \frac{\partial L(t, x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = p/m \quad (11.6.18)$$

再以動量  $p$  取代  $\dot{x}$ ，而建立 Hamiltonian 函數如下

$$H(t, x, p) \triangleq p\dot{x} - L(t, x, \dot{x}) = \frac{p^2}{m} - \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{k}{2}x^2\right) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 \quad (11.6.19)$$

開迴路型式的解是將上式代入(11.3.14)式中而獲得。其中由(11.3.14b)得到

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx \quad (11.6.20)$$

將(11.6.18)式的  $p = m\dot{x}$  代入上式得

$$m\ddot{x} = -kx \Rightarrow x(t) = \sqrt{2\beta/k}\sin\omega(t + \alpha) \quad (11.6.21)$$

其中  $\alpha$  與  $\beta$  為常數是由初始條件所決定。觀察上式的  $x(t)$  以及  $p = m\dot{x} = \sqrt{2m\beta}\cos\omega(t + \alpha)$ ，如所預料都是時間的函數，這是開迴路控制的結果。在另一方面，閉迴路的解是由(11.6.7)式提供： $p(x) = -\partial V/\partial x = \partial S/\partial x$ ，其中  $S$  滿足 HJ 偏方程式(11.6.11):

$$\frac{\partial S(t, x)}{\partial t} + H(t, x, p)|_{p=\partial S/\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \frac{k}{2}x^2 = 0 \quad (11.6.22)$$

其中  $H$  是由(11.6.19)式所給定。上面的偏微分方程式具有分離變數解

$$S = S_1(t) + S_2(x) \quad (11.6.23)$$

將  $\partial S/\partial x = dS_2(x)/dx$  以及  $\partial S/\partial t = dS_1(t)/dt$  代入(11.6.22)式中，得

$$-\frac{dS_1(t)}{dt} = \frac{1}{2m}\left(\frac{dS_2(x)}{dx}\right)^2 + \frac{k}{2}x^2 = \beta. \quad (11.6.24)$$

上式左邊是時間  $t$  的函數，而右邊是位置  $x$  的函數；因為  $x$  與  $t$  互相獨立，二邊會相等的唯一可能是二邊的值都要為常數(設為  $\beta$ )，因而得到如下二個等式

$$\dot{S}_1(t) = -\beta \Rightarrow S_1(t) = -\beta t \quad (11.6.25a)$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_2(x)}{dx}\right)^2 + \frac{k}{2}x^2 = \beta \Rightarrow \frac{dS_2}{dx} = \sqrt{2m\beta - mkx^2} \quad (11.6.25b)$$

至此步驟，動量  $p$  可求得為

$$p(x) = \frac{\partial S(t, x)}{\partial x} = \frac{dS_2(x)}{dx} = \sqrt{2m\beta - mkx^2} \quad (11.6.26)$$

與開迴路控制不同的是，上式的動量是表示成位置  $x$  的函數  $p(x)$ ，而非時間的函數  $p(t)$ 。同樣地，最佳速度策略  $u$  也是表示成狀態回授的型式  $u(x)$ ，而非時間函數  $u(t)$ ：

$$u = \dot{x} = p/m = \sqrt{2\beta/m - \omega^2 x^2} \quad (11.6.27)$$

這一回授策略告訴吾人，在  $x$  位置上，粒子所應具有的速度  $u(x)$ 。對於給定的某一初始條件，對閉迴路的解(11.6.27)積分，即可得到開迴路的解

$$\dot{x} = \sqrt{2\beta/m - \omega^2 x^2} \Rightarrow x(t) = \sqrt{k/2\beta}\sin\omega(t + \alpha) \quad (11.6.28)$$

此解即為(11.6.21)式，它是由開迴路的 Hamilton 力學方程式所得到。從力學的觀點來看，開

迴路與閉迴路的解其差別僅在於解法的不同，前者是求解聯立的常微分方程式(11.3.14)，而後者是求解一個偏微分方程式(11.6.11)。求解的難易度不同，但最後的結果是相同的。然而從控制的觀點來看，開迴路與閉迴路最佳控制的解卻有很大的意義程度差別，前者的最佳性只適用於某一初始條件，所以是特解；而後者的最佳性是全域性的，所以是通解。藉由初始條件的指定，通解可化為某一特解；但反過來講，除極少數情形外，由特解無法重建通解的型式。所以由動態規劃法所得到的全域性最佳化，雖然要求解 HJB 偏微分方程式，其困難度較高，但其通解的特性卻不是由變分所得到的區域性最佳化可取代的。

## 11.7 隨機過程與隨機微分方程式

從現在開始吾人探討受雜訊干擾的受控系統，這些雜訊有些是外加的，例如在做量測時，感測器所引入的；有些則是內在的，例如量子系統的內在不確定性。受到雜訊干擾的系統具有隨機的行為，也就是給定一初始條件，系統的未來行為並無法唯一決定。本節先討論隨機系統的行為和特性，下一節再介紹如何對隨機系統進行最佳化控制。描述系統隨機行為的方程式稱為隨機微分方程式(stochastic differential equation)。最簡單的隨機運動是離散型的布朗運動(Brownian motion)，其數學方程式可表為

$$x_{i+1} = x_i + \xi_i, \xi_i = \pm\sqrt{\nu}, x_0 = 0 \quad (11.7.1)$$

$x_i$  代表布朗運動第  $i$  步時，所到達的位置。 $\xi_i$  是隨機變數，其值可為  $+\sqrt{\nu}$  或  $-\sqrt{\nu}$ ，機率都是  $1/2$ ；也就是說，隨機變數  $\xi_i$  的期望值  $\langle \xi_i \rangle = 0$ ，變異數(variance)  $\langle \xi_i^2 \rangle = \nu$ 。疊代式(11.7.1)的解可寫成

$$x_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n \quad (11.7.2)$$

由於  $x_n$  是隨機變數  $\xi_i$  的總和，所以  $x_n$  本身也是隨機變數，其期望值和變異數分別為

$$\langle x_n \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \xi_i \rangle = 0, \langle x_n^2 \rangle = \sum_{i,j=1}^n \langle \xi_i \xi_j \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \xi_i^2 \rangle + \sum_{i,j=1, j \neq i}^n \langle \xi_i \rangle \langle \xi_j \rangle = n\nu \quad (11.7.3)$$

其中因為隨機變數  $\xi_i$  和  $\xi_j$  是統計獨立的，故有  $\langle \xi_i \xi_j \rangle = \langle \xi_i \rangle \langle \xi_j \rangle = 0$ 。觀察  $x_n$  的標準差  $\sigma_n = \sqrt{n\nu}$  是  $n$  的函數，這說明隨機變數  $x_n$  的統計特性隨著運動或時間而變。這種統計特性隨著運動或時間而變的隨機變數即稱為隨機過程(stochastic process)，所以布朗運動是隨機過程的一種。

表 11.7.1 執行 10000 次布朗運動實驗的結果，每次實驗都走 100 步(從原點出發)，每步走一個單位長( $\nu = 1$ )，向左向右的機會均等，並記錄第 100 步時所到達的位置  $x_{100} = \Delta$ 。

$\Delta$	Count	$\Delta$	Count	$\Delta$	Count	$\Delta$	Count
0	828			26	21	-26	28
2	815	-2	767	28	17	-28	9
4	718	-4	746	30	6	-30	10
6	648	-6	648	32	1	-32	7
8	547	-8	547	34	2	-34	1
10	478	-10	453	36	0	-36	0
12	383	-12	421	38	0	-38	0
14	335	-14	315	40	2	-40	1
16	233	-16	234	42	1	-42	0
18	171	-18	185	44	0	-44	0
20	116	-20	94	46	0	-46	0
22	66	-22	60	48	0	-48	0
24	42	-24	44	50	0	-50	0

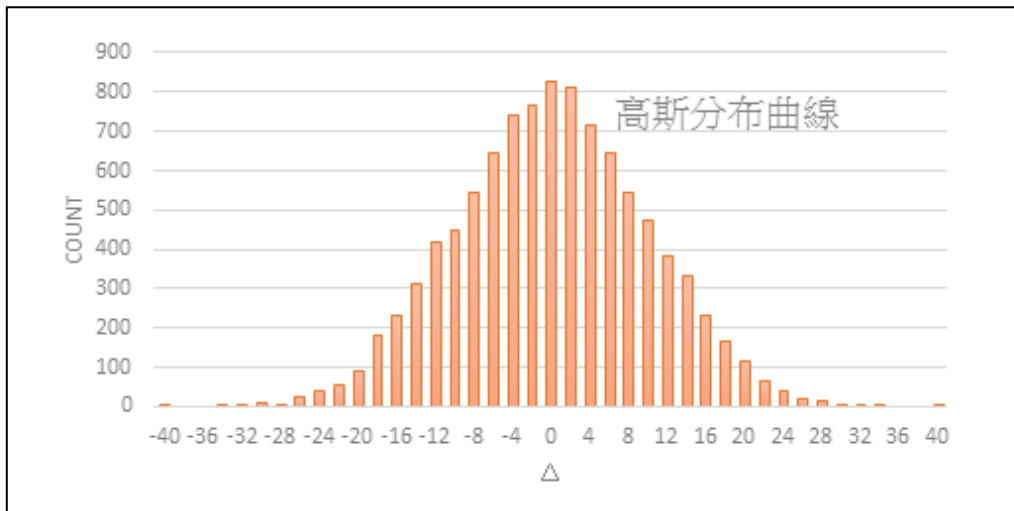


圖 11.7.1 執行 10000 次布朗運動實驗的結果，每次實驗都走 100 步(從原點出發)，每步走一個單位長( $v = 1$ )，向左向右的機會均等，並記錄第 100 步時所到達的位置 $x_{100} = \Delta$ ，當成該次實驗的結果，並記錄在橫軸上，縱軸高度代表 $x_{100}$ 到達該位置的實驗次數。

圖 11.7.1 畫出 $x_{100}$ 的統計分布，也就是布朗運動走 100 步時，其可能到達位置 $\Delta = x_{100}$ 的分布情形。相同的布朗運動實驗重複執行 10000 次，每次實驗都走 100 步(從原點出發)，每步走一個單位長( $v = 1$ )，向左向右的機會均等，並記錄第 100 步時所到達的位置 $\Delta$ ，當成該次實驗的結果。所以總共產生了 10000 個 $\Delta$ ，其值的分布作成表 11.7.1，例如在 10000 次實驗中，共有 828 次(count)實驗到達位置 $\Delta = 0$ ，故其機率為 828/10000；另外共有 815 次到達位置 $\Delta = 2$ ，故其機率為 815/10000，依此類推。將每個 $\Delta$ 位置的實驗到達次數畫成長條圖，其結果如圖 11.7.1 所示。

吾人發現隨機變數 $x_{100}$ 的統計分布類似高斯分布，其期望值和變異數分別由(11.7.3)式所給定 $\langle x_n \rangle = 0$ ， $\sqrt{\langle x_n^2 \rangle} = \sqrt{nv} = \sqrt{100 \times 1} = 10$ 。圖 11.7.1 所表示的只是 $n = 100$ 時， $x_n$ 的統計分布。隨著 $n$ 的增大，變異數 $\langle x_n^2 \rangle = \sqrt{nv}$ 變大，代表 $x_n$ 的位置分布越來越扁平；中心位置不變，總面積不變，但中心位置的機率高度下降，機率曲線向左右二邊延伸。

圖 11.7.1 只是近似高斯分布，還是真正的高斯分布？這問題牽涉到統計理論中的一個重要定理：中央極限定理<sup>4</sup>(central limit theorem)。此定理是說，只要有足夠多的隨機變數相加，則不管其個別的機率分布為何，相加所得的隨機變數必定趨近於高斯分布。數學的描述如下：假設 $x_i$ 是任意隨機變數，考慮多個 $x_i$ 的相加，並逐漸增加相加的個數，直到無窮多個隨機變數的相加：

$$X = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \quad (11.7.4)$$

$X_n$ 是一隨機過程，當 $n \rightarrow \infty$ 時，隨機過程 $X_n$ 收斂於隨機變數 $X$ ，且 $X$ 的統計分布必為高斯分布，此即為中央極限定理。在(11.7.2)式中， $\xi_i$ 具有二項式分布(其值只有 $\pm\sqrt{v}$ 二種可能，且機率各為 1/2)，而 $x_n$ 是 $n$ 個 $\xi_i$ 相加。根據(11.7.4)式的中央極限定理，當 $n$ 越來越大時， $x_n$ 必趨近於高斯分布。在圖 11.7.1 中， $n = 100$ ，雖還不是很大，但 $x_{100}$ 的統計分布已接近高斯分布。所以說布朗運動進行得愈久，其可能到達位置的統計分布愈接近高斯分布。廣義來講，任何隨機變數的相加或積分，最後必趨近於高斯分布，這一定理說明高斯分布不是特例而是一種普遍的現象。

<sup>4</sup> R. E. Walpole and R. H. Myers, Probability and Statistics for Engineers and Scientists, 3th Edition, Macmillan, 1985.

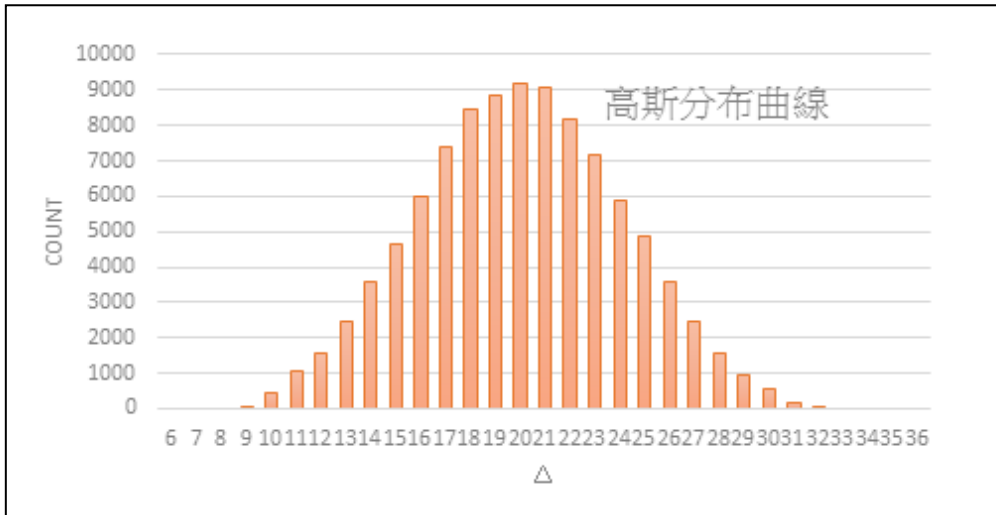


圖 11.7.2 擲 6 次骰子的點數總和的統計分布圖。每一次實驗均擲 6 次骰子，並記錄其點數和。總共進行了十萬次實驗。橫軸列出可能的點數和，最小是 6，最大是 36；長條圖的高度代表出現該點數和的實驗次數。

再舉另一例子，假設擲  $n$  次骰子，每一次出現的點數設為  $d_i$ ，並設  $x_n$  是  $n$  次投擲的點數相加：

$$x_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_n \quad (11.7.5)$$

其中隨機變數  $d_i$  的值是 1 到 6 之間的任何一數，且機率都是  $1/6$ 。 $d_i$  雖不是高斯分布，但根據中央極限定理，當  $n$  越來越大時， $d_i$  的總和  $x_n$  卻趨近於高斯分布。圖 11.7.2 是  $n = 6$  的統計結果。也就是每次實驗擲 6 次骰子，並將其點數相加。實驗總共重複了十萬次，出現的點數和最小是 6，最大是 36。長條圖的高度代表出現該點數和的實驗次數。如圖所示，隨機變數  $x_6$  雖然只是 6 個隨機變數  $d_i$  的相加，但其統計分布已具有高斯分布的主要特徵。

方程式(11.1.1)所描述的是離散型的隨機過程，當布朗運動每一步大小趨近於零時，離散型的隨機過程即趨近於連續型的隨機過程，此時方程式(11.1.1)化成

$$x(t + dt) = x(t) + d\xi \quad (11.7.6)$$

其中  $d\xi$  是隨機變數  $\xi$  的微分量，代表極微小的隨機位移。 $d\xi$  的可能值只有二個： $\pm\sqrt{vdt}$ ，而且取正或取負的機率都是  $1/2$ 。可見  $d\xi$  仍具有隨機布朗運動的特性，只是每次運動的位移量非常微小。從(11.7.6)式求解  $x(t)$  即得

$$x(t) = x_0 + \int_0^t d\xi \quad (11.7.7)$$

上式是(11.7.2)式的對應式，從離散型的求和對應到連續型的積分。 $x$  是隨機變數  $\xi$  的積分，但積分所得的值仍是隨機變數。因為每一次的積分都可視為一次實驗，每次積分所得的值都不同，所以對於固定的時間  $t$  而言， $x(t)$  是一隨機變數，有其對應的統計分布。當時間  $t$  變化時， $x(t)$  的統計分布也隨之變化，故稱  $x(t)$  是一隨機過程。又因為積分是無窮項的求和，因此根據中央極限定理，由(11.7.7)式所得到的隨機變數  $x(t)$ ，不管  $t$  為何， $x(t)$  必具有高斯分布的統計特性。經由學理上的證明， $x(t)$  的機率密度函數為

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi vt}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2vt}\right) \quad (11.7.8)$$

對於每一瞬間  $t$ ， $\rho(x, t)$  確實都是高斯分布函數；而且標準差為  $\sqrt{vt}$ ，表時間越長， $x(t)$  的分布越廣，機率曲線越加扁平。具有(11.7.8)式機率密度函數的隨機過程  $x(t)$  稱為 Wiener process。

所以 Wiener process 就是連續型的布朗運動，其每一步的移動無限小。不管時間長短，Wiener process  $x(t)$  恆具有高斯統計分布，即使是  $dt \rightarrow 0$  所對應的 Wiener process  $dx$  仍具有高斯統計分布，其標準差為  $\sqrt{vdt}$ 。有關隨機過程及隨機微分方程式可參閱 Arnold<sup>5</sup> 的著作。

## 11.8 非線性隨機系統的最佳化控制

先前吾人考慮的非線性系統  $\dot{x} = f(t, x, u)$  是在系統未受到雜訊干擾的情況下才成立的；在有雜訊干擾的情況下，系統的狀態方程式須改成

$$dx = f(t, x, u)dt + d\xi = f(t, x, u)dt + \sqrt{v}d\bar{\xi} \quad (11.8.1)$$

其中  $d\xi$  是微分型的 Wiener 隨機過程，如上一節的介紹， $d\xi$  的期望值  $\langle d\xi \rangle = 0$ ，標準差  $\langle d\xi^2 \rangle = v\langle d\bar{\xi}^2 \rangle = vdt$ 。(11.8.1) 式說明系統位移  $dx$  包含二個分量： $f(t, x, u)dt$  稱為漂移分量(drift)， $d\xi = \sqrt{v}d\bar{\xi}$  稱為擴散分量(diffusion)。受到雜訊的影響，使得(11.8.1)式的解  $x(t)$  也是一個隨機過程，其值無法由初始條件唯一決定，且其統計特性與機率分布均隨時間  $t$  而變化。由於  $x(t)$  的隨機性，使得成本函數(11.5.3)式的值

$$J(t, x, u) = \phi(x(t_f), t_f) + \int_t^{t_f} L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \quad (11.8.2)$$

也是不確定的，這時去求  $J$  的最佳化並沒有意義。所以必須將成本函數的定義修改成

$$J(t, x, u) = E_{t,x} \left\{ \phi(x(t_f), t_f) + \int_t^{t_f} L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \right\} \quad (11.8.3)$$

也就是在成本函數的無窮多種可能值中取其平均，其中  $E_{t,x}$  代表由初始條件  $x(t) = x$  出發的無窮多條軌跡  $x(\tau)$ ， $t \leq \tau \leq t_f$ ，之中，計算成本函數的期望值。除了成本函數(11.8.3)式的改變外，其餘的運算與 8.6 節類似。成本函數的最小值稱為值函數，仍定義成

$$V(t, x) \triangleq \min_{u[t, t_f]} J(t, x, u) \quad (11.8.4)$$

將(11.8.3)式中的積分拆成二段的相加，先從  $t$  積到  $t + dt$ ，再從  $t + dt$  積分到  $t_f$ ，再依據 8.6 節的相同步驟得到

$$V(t, x) = \min_{u[t, t+dt]} E_{t,x} \left\{ V(t + dt, x(t + dt)) + \int_t^{t+dt} L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \right\} \quad (11.8.5)$$

將上式右邊二項作泰勒級數展開：

$$V(t + dt, x(t + dt)) = V(t, x) + \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} dt + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V(t, x)}{\partial x^2} dx^2 + O(dt) \quad (11.8.6a)$$

$$\int_t^{t+dt} L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau = L(t, x, u(t)) dt + O(dt) \quad (11.8.6b)$$

根據(11.8.5)式中的期望值  $E_{t,x}(\cdot)$  定義，(11.8.6)式的期望值是要在  $x(t) = x$  的條件下求取，故有

- $E_{t,x}(V(t, x)) = V(t, x)$
- $E_{t,x} \left( \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} dt \right) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} dt$
- $E_{t,x} \left( \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} dx \right) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} E_{t,x}(dx) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} E_{t,x}(f(t, x, u)dt + d\xi) = \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, u)dt$

<sup>5</sup> L. Arnold, Stochastic Differential Equations – Theory and Applications, John Wiley & Sons, 1974.

其中上式用到(11.8.1)式 $dx = f(t, x, u)dt + d\xi$ 以及條件 $E_{t,x}(d\xi) = \langle d\xi \rangle = 0$ 。

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad E_{t,x} \left( \frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2} dx^2 \right) &= \frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2} E_{t,x}(dx^2) = \frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2} E_{t,x}[(f(t, x, u)dt + d\xi)^2] \\
 &= \frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2} [f^2(t, x, u)dt^2 + 2f(t, x, u)dt \cdot E_{t,x}(d\xi) + E_{t,x}(d\xi^2)] \\
 &= \frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2} [f^2(t, x, u)dt^2 + vdt]
 \end{aligned} \quad (11.8.7)$$

其中上式用到 $d\xi$ 的統計特性: $\langle d\xi \rangle = 0$ 及 $E_{t,x}(d\xi^2) = \langle d\xi^2 \rangle = vdt$ 。

在(11.8.6a)式的展開式中，吾人只要取到 $dt$ 的一次項，但為什麼要保留到 $dx^2$ 項呢?(11.8.7)式解答了這個疑問。吾人發現 $dx^2$ 的展開項中除了包含 $dt^2$ 的項外，還包含有 $dt$ 的一次項，這是源自 Wiener 隨機過程的統計特性 $\langle d\xi^2 \rangle = vdt$ 。

現將以上各項代入(11.8.5)式中，得到

$$0 = \min_{u[t, t+dt]} \left\{ L(t, x, u(t))dt + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, u)dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} vdt \right\} \quad (11.8.8)$$

現今 $dt \rightarrow 0$ ，並將與 $t$ 無關的 $\partial V/\partial t$ 這項提到min的外面，而得到

$$-\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} = \min_{u \in \mathbf{U}} \left\{ L(t, x, u) + \frac{\partial V(t,x)}{\partial x} f(t, x, u) + \frac{v}{2} \frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2} \right\} \quad (11.8.9)$$

其中上式右邊是在時間為 $t$ ，狀態為 $x$ 的條件下取值，所以是將 $t$ 與 $x$ 視為已知值，而將最佳的 $u$ 值用 $t$ 與 $x$ 表示之。 $V(t, x)$ 所要滿足的邊界條件和(11.5.5)式一樣：

$$V(t_f, x) = \phi(t_f, x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (11.8.10)$$

(11.8.9)式稱為隨機性系統的 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程式，而相對應的(11.5.11)式則稱為確定性系統的 HJB 方程式。比較此二式可以發現隨機系統的 HJB 方程式多出來含有 $v$ 的一項，此項正是來自雜訊的標準差。若令 $v \rightarrow 0$ ，亦即忽略雜訊的影響，則(11.8.9)式即化成(11.5.11)式。有關最佳隨機控制理論的更詳細解說可參閱 Kappen<sup>6</sup>的上課講義。

### 例題 11.8.1

在例題 11.5.2 中，吾人討論了線性二次(LQ)最佳化控制，如果再將雜訊的影響加入，則成線性二次高斯(Linear Quadratic Gaussian - LQG)最佳化控制，這裡所稱的 Gaussian 是指雜訊具有高斯統計分布。LQG 最佳化控制是本節的一個應用，茲舉一實例來說明之。考慮一隨機系統由下列之隨機方程式所描述：

$$dx = (x + u)dt + d\xi, \langle d\xi^2 \rangle = vdt \quad (11.8.11)$$

所要最佳化的成本函數取為

$$J(t, x, u) = E_{t,x} \left\{ \phi(x(t_f), t_f) + \int_t^{t_f} L(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \right\} = E_{t,x} \left\{ 0 + \frac{1}{2} \int_t^{t_f} (x^2 + u^2) d\tau \right\} \quad (11.8.12)$$

將 $f = x + u$ ， $L = (x^2 + u^2)/2$ 代入(11.8.9)式，得到 HJB 方程式為

$$-\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} = \min_{u \in \mathbf{U}} \left\{ (x^2 + u^2)/2 + \frac{\partial V(t,x)}{\partial x} (x + u) + \frac{v}{2} \frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2} \right\} \quad (11.8.13)$$

令上式右邊的微分為零，求出最佳的控制律為

$$u = -\frac{\partial V(t,x)}{\partial x} \quad (11.8.14)$$

<sup>6</sup> H. J. Kappen, Stochastic Optimal Control Theory, Radboud University, Nijmegen, the Netherlands, July 4, 2008.

再將此最佳控制律代回(11.8.13)式中，即得 $V(t, x)$ 所要滿足的偏微分方程式

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\nu}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{x^2}{2} \quad (11.8.15)$$

本題的終端成本函數 $\phi(t_f, x)$ 為零，因此 $V(t, x)$ 須滿足邊界條件 $V(t_f, x) = 0$ 。觀察(11.8.15)式的結構，判斷 $V(t, x)$ 應該是 $x$ 的二次式，故設 $V(t, x)$ 解的型式為

$$V(t, x) = \frac{1}{2} p(t) x^2 + \alpha(t) x + \beta(t) \quad (11.8.16)$$

其中 $p(t)$ 、 $\alpha(t)$ 、 $\beta(t)$ 為待定的時間函數。將(11.8.16)式代入(11.8.15)式得

$$-\frac{1}{2} \dot{p} x^2 - \dot{\alpha} x - \dot{\beta} = \frac{\nu}{2} p - \frac{1}{2} (p x + \alpha)^2 + x(p x + \alpha) + \frac{1}{2} x^2 \quad (11.8.17)$$

上式對於任意 $x$ 值均須成立，故 $x$ 各次方的係數必須為零：

$$x^2: -\dot{p} = -p^2 + 2p + 1 \quad (11.8.18a)$$

$$x^1: -\dot{\alpha} = -p\alpha + \alpha \quad (11.8.18b)$$

$$x^0: -2\dot{\beta} = \nu p - \alpha^2 \quad (11.8.18c)$$

求解的步驟是先由(11.8.18a)式求出 $p(t)$ ，將 $p(t)$ 代入(11.8.18b)式後，求解出 $\alpha(t)$ ，再將 $p(t)$ 及 $\alpha(t)$ 代入(11.8.18c)式求解出 $\beta(t)$ 。等 $p(t)$ 、 $\alpha(t)$ 、 $\beta(t)$ 全部解出後，代入(11.8.16)式即得值函數 $V(t, x)$ 。最後再將 $V(t, x)$ 代入(11.8.14)式求得最佳控制律：

$$u(t, x) = -\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} = -p(t)x - \alpha(t) \quad (11.8.14)$$

在雜訊的作用下，此最佳控制律展示在時間 $t$ 、位置 $x$ 之時，所應採用之最佳策略，此最佳策略保證(11.8.3)式的成本函數 $J(t, x, u)$ 為最小。

□

## 11.9 最佳隨機控制的範例:量子力學

在不考慮雜訊的情況下，吾人在 8.4 節及 8.7 節分別以變分原理與動態規劃原理，證明古典力學(工程力學)是最佳化控制的結果。依此推論，量子力學應是在考慮雜訊的情況下，最佳化控制的結果，本節的目的即在證實此一推論<sup>7</sup>。事實顯示各種力學理論都可由最佳化控制推導出來，這不是一種巧合，我們認為所有的物理定律實際上都是自然界本身進行最佳化控制的結果。

在考慮雜訊的情況下，力學問題的相對應剩餘成本函數為：

$$J(t, x, u) = E_{t,x} \left( \int_t^{t_f} L(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau \right) \quad (11.9.1)$$

其中 $L(\tau, x, u) = T - U$ 為 Lagrangian 函數，是動能與位能的差；系統的狀態方程式為

$$dx = u(t, x)dt + \sqrt{\nu} d\xi, \langle d\xi^2 \rangle = dt \quad (11.9.2)$$

其中 $u dt$ 是漂移位移， $d\xi$ 為微分型的 Wiener 隨機過程，其代表擴散位移，而 $\nu$ 稱為擴散係數。控制的目的是在求得最佳漂移速度策略 $u(t, x)$ ，使得剩餘成本 $J(t, x, u)$ 為最小：

<sup>7</sup> 有關本節的進一步討論，請參閱作者的論文: C. D. Yang and L. L. Cheng, Optimal Guidance Law in Quantum Mechanics, Annals of Physics, Vol. 338, pp.167-185, 2013.

$$V(t, x) \triangleq \min_{u[t, t_f]} J(t, x, u) \quad (11.9.3)$$

採用與上一節相同的步驟，將(11.9.1)式中的積分拆成二段的相加，先從 $t$ 積到 $t + dt$ ，再從 $t + dt$ 積分到 $t_f$ ，而得到

$$V(t, x) = \min_{u[t, t+dt]} E_{t,x} \left\{ V(t + dt, x(t + dt)) + \int_t^{t+dt} L(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau \right\} \quad (11.9.4)$$

右邊的二項分別取到 $dt$ 一次項的展開：

$$E_{t,x}\{V(t + dt, x(t + dt))\} = V(t, x) + \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} dt + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} u dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V(t, x)}{\partial x^2} v dt \quad (11.9.5a)$$

$$E_{t,x} \left\{ \int_t^{t+dt} L(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau \right\} = L(t, x, u(t)) dt \quad (11.9.5b)$$

注意 $E_{t,x}\{\cdot\}$ 是指在時間 $t$ 、位置 $x$ 的前提下，求取期望值。現將 $E_{t,x}\{\cdot\}$ 作用在(11.9.2)式的二側而得到

$$E_{t,x}\{dx\} = E_{t,x}\{u(t, x)dt + \sqrt{v}d\xi\} \Rightarrow dx = u(t, x)dt \Rightarrow \dot{x} = u(t, x) \quad (11.9.6)$$

由於隨機過程 $d\xi$ 的期望值為零，隨機動態(11.9.2)在求取期望值後，剩下來的是不考慮雜訊的平均動態 $\dot{x} = u(t, x)$ 。此平均動態已用在(11.9.5b)式中。將(11.9.5)式代入(11.9.4)式中，得到最佳化隨機控制問題所對應的 HJB 方程式

$$-\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} = \min_{u \in U} \left\{ L(t, x, u) + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} u + \frac{v}{2} \frac{\partial^2 V(t, x)}{\partial x^2} \right\} \quad (11.9.7)$$

在最小值發生之處， $u$ 必須滿足使得右邊括號內各項微分為零的條件，故得

$$p \triangleq \frac{\partial L(t, x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L(t, x, u)}{\partial u} = -\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \quad (11.9.8)$$

經由上式解出最佳控制律

$$u = u(t, x, p)|_{p=-\partial V/\partial x} \quad (11.9.9)$$

再代入(11.9.7)式，即得 $V(t, x)$ 所要滿足的偏微分方程式。為了進一步的化簡，引入 Hamiltonian 函數的定義

$$H(t, x, p) = p\dot{x} - L(t, x, \dot{x}) = pu - L(t, x, u)$$

則(11.9.7)式可改寫成

$$\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} = H(t, x, p)|_{p=-\partial V/\partial x} - \frac{v}{2} \frac{\partial^2 V(t, x)}{\partial x^2} \quad (11.9.10)$$

再引用(11.6.10)式中作用量函數 $S$ 的定義

$$S(t, x) = -V(t, x) \quad (11.9.11)$$

則(11.9.10)式可進一步改寫成

$$\frac{\partial S(t, x)}{\partial t} + H(t, x, p)|_{p=\partial S/\partial x} + \frac{v}{2} \frac{\partial^2 S(t, x)}{\partial x^2} = 0 \quad (11.9.12)$$

與(11.6.11)式的 Hamilton-Jacobi 方程式比較，吾人發現多出了含擴散係數 $v$ 的左邊第三項，此項純粹是源自雜訊的作用。以下我們將看到正是此項的加入使得經典力學變成了量子力學。為了方便與量子力學的對應，我們考慮單一粒子在位勢 $U(t, x)$ 作用下的運動，其 Lagrangian 函數及 Hamiltonian 函數分別可表成



$$L(t, x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U(t, x), p \triangleq \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad (11.9.13)$$

$$H(t, x, p) = p\dot{x} - L(t, x, \dot{x}) = \frac{p^2}{m} - \left(\frac{p^2}{2m} - U(t, x)\right) = \frac{p^2}{2m} + U(t, x) \quad (11.9.14)$$

將 $H$ 代入(11.9.12)式，得到作用量函數 $S$ 所要滿足的偏微分方程式

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + U(t, x) + \frac{\nu}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = 0 \quad (11.9.15)$$

以上是由最佳隨機控制所得到的 HJB 方程式。根據不同的 $\nu$ 值，(11.9.15)式對應到三種類型的方程式。

(A)  $\nu = 0$ : 古典力學的 Hamilton-Jacobi 方程式

這時(11.9.15)式化成

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + U(t, x) = \frac{\partial S(t, x)}{\partial t} + H(t, x, p)|_{p=\partial S/\partial x} = 0 \quad (11.9.16)$$

此即(11.6.11)式的古典力學 Hamilton-Jacobi 方程式。

(B)  $\nu \neq 0, \nu \in \mathbb{R}$ : 熱傳方程式

此時令

$$S(t, x) = m\nu \ln \Psi(t, x) \quad (11.9.17)$$

將之代入(11.9.15)式，得到函數 $\Psi(t, x)$ 所要滿足的方程式

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \mu \Psi \quad (11.9.18)$$

上式對應到一個具有熱輻射源的熱傳導方程式，其中 $\Psi = T - T_s$ ， $T_s$ 代表環境的溫度。係數 $\alpha = -\nu/2$ 稱為 thermal diffusivity， $\mu \Psi = (U/m\nu)\Psi$ 代表因熱輻射所散失的熱量。

(C)  $\nu \neq 0, \nu \in \mathbb{C}$ : 量子力學的 Hamilton-Jacobi 方程式

考慮在此範圍內的一個特殊 $\nu$ 值

$$\nu = -\frac{i\hbar}{m} \quad (11.9.19)$$

此時(11.9.15)式化成

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + U(t, x) - \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = 0 \quad (11.9.20)$$

再經由函數轉換關係

$$S(t, x) = -i\hbar \ln \Psi(t, x) \quad (11.9.21)$$

而將(11.9.20)式轉換成

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + U(t, x)\Psi \quad (11.9.22)$$

此式即為單一粒子在位勢 $U(t, x)$ 作用下的薛丁格(Schrödinger)方程式。其中 $\Psi$ 稱為波函數。透過以上擴散係數 $\nu$ 的不同選擇，吾人揭露了最佳隨機控制的 HJB 方程式(11.9.15)所代表的不同涵義。尤其是當 $\nu$ 值取成(11.9.19)的形式時，最佳隨機控制的 HJB 方程式自動化成量子力學的薛丁格方程式。這也證實了先前的推論：量子力學是在考慮雜訊的情況下，自然界本身最佳化控制的結果。另外值得注意的是(11.9.19)式所給定的擴散係數 $\nu$ 是虛數，將此 $\nu$ 代入(11.9.2)

式時，吾人發現位置 $x$ 必須定義在複數平面上，方程式才有解。

一旦作用量函數 $S$ 決定後，最佳速度控制策略 $u(t, x)$ 可由(11.9.8)式與(11.9.13)式的結合而得到為

$$u(t, x) = \dot{x} = \frac{p}{m} = \frac{1}{m} \frac{\partial S(t, x)}{\partial x} \quad (11.9.23)$$

這是有關速度的方程式，至於加速度的方程式可由動量的微分得到

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial S(t, x)}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \frac{dx}{dt} \quad (11.9.24)$$

其中的 $\partial S / \partial t$ 可由(11.9.20)式獲得

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - V(t, x) + \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \quad (11.9.25)$$

現將上式的 $\partial S / \partial t$ 及(11.9.23)式的 $dx/dt$ 代入(11.9.24)式中，得到 $dp/dt$ 的表示式如下：

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ U(t, x) - \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right]. \quad (11.9.26)$$

我們可以仿照 Hamilton 力學型式，將量子力學的運動方程式(11.9.23)式與(11.9.26)式，重新改寫成 Hamilton 運動方程式。首先吾人定義閉迴路的 Hamiltonian 函數 $H_{CL}$ 如下

$$H_{CL}(t, x, p) = \frac{1}{2m} p^2 + U(t, x) - \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 S(t, x)}{\partial x^2}, \quad (11.9.27a)$$

$H_{CL}$ 與古典的 Hamiltonian 函數 $H$ 比較起來，多出來一項，此項稱為量子位勢 $Q$ ：

$$Q(t, x) = -\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 S(t, x)}{\partial x^2} \quad (11.9.27b)$$

將(11.9.27a)式中的 $x$ 與 $p$ 視為互相獨立的狀態變數，則(11.9.23)式與(11.9.26)式可用 $H_{CL}$ 表示成如下的 Hamilton 運動方程式：

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H_{CL}}{\partial p} = \frac{p}{m}, x \in \mathbb{C} \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H_{CL}}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ U(t, x) - \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right], p \in \mathbb{C} \end{aligned} \quad (11.9.28)$$

與古典的 Hamilton 運動方程式比較，吾人發現量子的 Hamilton 運動方程式只是多出來量子位勢 $Q$ ，量子位勢與外加位勢 $U(t, x)$ 的組合通稱為總位勢：

$$U_{total}(t, x) = U(t, x) + Q(t, x) = U(t, x) - \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 S(t, x)}{\partial x^2} \quad (11.9.29)$$

其中 $U_{total}$ 的第一項為外加位勢 $U$ ，第二項為內在的量子位勢 $Q$ 。所以吾人只要將古典力學中的位勢 $U$ 用總位勢 $U_{total}$ 取代之，即可得到量子力學的運動方程式。

但是注意方程式(11.9.28)是要得到作用量函數的解 $S(t, x)$ 之後，才得以建立。根據定義

$$S(t, x) = -V(t, x) = -i\hbar \ln \Psi(t, x) \quad (11.9.30)$$

故求解 $S$ 即是求解 $V$ ，然而根據(11.9.3)式， $V$ 是最佳的成本函數。換而言之，(11.9.28)式是在進行最佳化控制之後所呈現的系統狀態方程式，也就是閉迴路的狀態空間方程式(closed-loop state-space equations)，故稱相對應的 $H_{CL}$ 為閉迴路的 Hamiltonian 函數。量子力學則稱 $H_{CL}$ 為狀態相依(state-dependent)。量子力學將一個波函數 $\Psi(t, x)$ 對應到一個量子狀態(quantum state)，透過(11.9.30)式的關係，(11.9.27a)式的 $H_{CL}$ 也是波函數 $\Psi(t, x)$ 的函數，亦即 $H_{CL}$ 是量子態的函數，

故稱 $H_{CL}$ 為狀態相依。透過 $H_{CL}$ ，量子 HJB 方程式(11.9.15)或(11.9.20)可改寫成類似古典 HJB 方程式如下：

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \left[ \frac{1}{2m} p^2 + U(t, x) - \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial p}{\partial x} \right]_{p=\partial S/\partial x} = 0 \quad (11.9.31)$$

上面的結論說明量子力學的運動方程式只能在最佳成本函數 $V = -S$ 求出後，以閉迴路的型式加以呈現。我們再回過頭來看經典力學的情況又是如何。根據 11.7 節的結果，我們發現經典力學的運動方程式可以同時具有開迴路與閉迴路的雙重表示法。

#### (A) Hamilton 力學的開迴路表示法

在 8.3 節吾人以變分原理所推導出來的 Hamilton 運動方程式即是屬於開迴路的型式。開迴路的運動方程式顧名思義即是不必透過回授，就可建立的運動方程式。其方法是先建立開迴路的 Hamiltonian 函數 $H_{OL}$ (以單一粒子的運動為例)：

$$H_{OL}(t, x, p) = \frac{1}{2m} p^2 + U(t, x) \quad (11.9.32)$$

其中 $U(t, x)$ 是給定的位勢能。再以 $H_{OL}$ 建立 Hamilton 運動方程式：

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H_{OL}}{\partial p} = \frac{p}{m}, \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H_{OL}}{\partial x} = -\frac{\partial U(t, x)}{\partial x} \quad (11.9.33)$$

所解出的動量 $p(t)$ 是時間的函數，與位置 $x$ 無關。整個求解的過程無需事先知道最佳成本函數 $V(t, x)$ 為何。

#### (B) Hamilton 力學的閉迴路表示法

在 8.7 節吾人以動態規劃原理所推導出來的 Hamilton 運動方程式即是屬於閉迴路的型式。此法要先求解古典的 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式

$$\frac{\partial S(t, x)}{\partial t} + H(t, x, p)|_{p=\partial S/\partial x} = \frac{\partial S}{\partial t} + \left[ \frac{1}{2m} p^2 + U(t, x) \right]_{p=\partial S/\partial x} = 0 \quad (11.9.34)$$

以得到最小之成本函數 $V(t, x) = -S(t, x)$ 。再以所得之解 $S(t, x)$ 決定動量 $p$

$$p(t, x) = \frac{\partial S(t, x)}{\partial x}, x \in \mathbb{R} \quad (11.9.35)$$

所得到的動量 $p$ 是依回授的位置訊號 $x$ 而決定之，所以是閉迴路的型式。在 8.7 節中吾人已經證明閉迴路的方程式(11.9.35)與開迴路的方程式(11.9.33)是同義的。

#### (C) 量子力學的閉迴路表示法

量子力學只有閉迴路而沒有開迴路的運動方程式。如本節前面的介紹，量子力學運動方程式(11.9.28)的建立，需要先求解量子 HJB 方程式(11.9.31)以獲得最佳之成本函數 $V = -S$ 。再以所得到的解 $S(t, x)$ 決定動量

$$p(t, x) = \frac{\partial S(t, x)}{\partial x}, x \in \mathbb{C} \quad (11.9.36)$$

(11.9.35)與(11.9.36)二式表面上看來相同，都是屬於狀態回授的型式，但卻有二個顯著的差異。第一個差異是二者的定義域不同，古典力學的定義域在實數空間，量子力學的定義域則在複數空間。第二個差異是 $S(t, x)$ 所要滿足的 PDE 不同。(11.9.35)式中的 $S$ 是要滿足古典的 HJB 方程式(11.9.34)；(11.9.36)式中的 $S$ 則是要滿足量子的 HJB 方程式(11.9.31)。

## 11.10 量子運動的最佳軌跡

對於粒子的量子運動，目前量子力學的了解僅知其為隨機運動，眾多量子力學的實驗也確認粒子隨機運動之後所產生的位置分布與波函數絕對值 $|\Psi(t, x)|$ 的預測一致。量子力學告訴我們如何描述隨機運動的結果，但未能揭露粒子隨機運動背後所要遵循的原則。量子運動亂歸亂，但亂中有序。量子力學現階段只能描述其亂，但是不知其序。隨機運動的粒子雖然沒有確切的軌跡，但是其隨機行為仍然可以用隨機微分方程式(stochastic differential equation)來加以表示。在上一節的討論中，吾人即是由最佳隨機控制的理想推導出量子運動所要滿足的隨機微分方程式，如(11.9.2)式所示

$$dx = u(t, x)dt + \sqrt{v}d\xi, \langle d\xi^2 \rangle = dt \quad (11.10.1)$$

其中最佳速度策略 $u(t, x)$ 是由(11.9.20)式所決定

$$u(t, x) = \dot{x} = \frac{p}{m} = \frac{1}{m} \frac{\partial S(t, x)}{\partial x} = -\frac{i\hbar}{m} \frac{\partial \ln \Psi(t, x)}{\partial x} \quad (11.10.2)$$

其中 $S(t, x)$ 滿足量子 HJB 方程式(11.9.22)， $\Psi(t, x)$ 則滿足薛丁格(Schrödinger)方程式(11.9.16)。(11.10.1)式是最佳隨機控制的結果，而其解答 $x(t)$ 即為量子運動的最佳軌跡。(11.10.1)式包含三項位移，分別說明如下：

- A.  $u(t, x)dt$ : 此項稱為漂移位移(drift displacement)， $u$ 稱為漂移速度。
- B.  $\sqrt{v}d\xi$ : 此項是 Wiener process 所產生的微位移，稱為擴散位移(diffusion displacement)。此位移是定義在複數平面上，這是因為擴散係數 $v = -i\hbar/m$ 是複數的關係：

$$\sqrt{v} = \sqrt{-\frac{i\hbar}{m}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m}}(-i)^{1/2} = \sqrt{\frac{\hbar}{m}}\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i\sin \frac{3\pi}{2}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m}}(-1 + i) \quad (11.10.3)$$

$d\xi$ 是 Wiener process 的微位移，假設位移的時間間距為 $dt$ ，則在任意時刻 $t$ ， $d\xi$ 的機率密度函數為高斯分布的型式

$$f_{d\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi dt}} e^{-x^2/2dt} \quad (11.10.4)$$

其期望值 $\langle d\xi \rangle = 0$ ，變異數 $\langle d\xi^2 \rangle = dt$ ；也就是 Wiener process 與絕對時間 $t$ 無關，只和時間間隔 $dt$ 有關。

- C.  $dx$ 是漂移位移 $v(t, q)dt$ 與布朗運動擴散位移 $\sqrt{v}d\xi$ 的疊加：

$$dx = v(t, x)dt + \sqrt{v}d\xi = -\frac{i\hbar}{m} \frac{\partial \ln \Psi(t, x)}{\partial x} dt + \sqrt{\frac{\hbar}{2m}}(-1 + i)d\xi \quad (11.10.5)$$

從(11.10.5)式可以看到，布朗擴散位移 $\sqrt{v}d\xi$ 對量子位移 $dx$ 的實、虛部影響是大小相等，但方向相反；也就是當布朗運動造成量子位移 $dx$ 在實部正的方向有一單位的移動時，也將同時造成在虛部負的方向有一單位的移動；相反地，如果布朗運動造成量子位移 $dx$ 在實部負的方向有一單位的移動，也將同時造成在虛部正的方向有一單位的移動。

因此從古典運動要得到量子運動須經過二個步驟：

步驟一：實數運動的複數化(complexification)

$$dx = u(t, x)dt, x, u \in \mathbb{R} \Rightarrow dx = u(t, x)dt, x, u \in \mathbb{C} \quad (11.10.6)$$

步驟二：複數運動的隨機化(randomization)

$$dx = u(t, x)dt, x, u \in \mathbb{C} \Rightarrow dx = u(t, x)dt + \sqrt{v}d\xi, x, u \in \mathbb{C} \quad (11.10.7)$$

複數運動方程式(11.10.6)相當於是取(11.10.5)式的平均值(期望值)，而忽略了布朗運動的隨機

擾動效應。古典力學的複數化稱為複數力學<sup>8,9</sup>，在複數力學中，量子位勢 $Q$ 會被引入(11.9.24a)式中的量子 Hamiltonian 函數 $H_{CL}$ ，其實只是一種假設；這個假設被認為是對的，是因為由 $H_{CL}$ 所建立的 Hamilton-Jacobi 方程式剛好就是 Schrödinger 方程式。在另一方面，Rosenbrok<sup>10</sup>的文章間接證明了，只要在古典力學中加入布朗隨機運動，自然就會呈現量子位勢 $Q$ 的作用。Rosenbrok 的文章著重在利用隨機化推導出 Schrödinger 方程式，對複數化的著墨較少，也未提及任何有關量子軌跡的觀念。

量子軌跡不只是抽象的機率分布，它是可以被視覺化，可以被畫出來展示的。量子軌跡可以由隨機微分方程式(11.10.1)的積分而得到：

$$\int_0^t dx = x(t) - x(0) = \int_0^t u(\tau, x(\tau)) d\tau + \sqrt{v} \int d\xi \quad (11.10.8)$$

其中 Wiener process  $d\xi$ 的積分就是有名的 Ito integral，但 Ito integral 沒有解析的表示方法，(11.10.8)式的積分須用數值疊代來求得。假設 $t_0$ 到 $t_n$ 的積分過程中，時間軸的離散點取在

$$t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n, \Delta t_j = t_{j+1} - t_j$$

則(11.10.8)式的積分疊代式可寫成

$$x_{j+1} = x_j + u(t_j, x_j)\Delta t_j + \bar{\xi}\sqrt{v\Delta t_j}, x_j \in \mathbb{C} \quad (11.10.9)$$

如果是採用等時間間隔積分，則取 $\Delta t_j = \Delta t$ 。(11.10.9)式中的 $\sqrt{v\Delta t}$ 是原先 $d\xi$ 的標準差，這相當於隨機變數 $\bar{\xi}$ 已被正規化(normalized)成標準型式的高斯分布 $N(0,1)$ ，即期望值 $\langle \bar{\xi} \rangle = 0$ ，標準差 $\langle \bar{\xi}^2 \rangle^{1/2} = 1$ ，相對應的機率密度函數為

$$f(\bar{\xi}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\bar{\xi}^2/2} \quad (11.10.10)$$

並注意隨機變數 $\bar{\xi}$ 本身是無單位的，而 $\sqrt{v\Delta t}$ 的單位則是長度。代入 $u(t_j, x_j)$ 及 $\sqrt{v}$ 的定義式，(11.10.9)式可展開成

$$x_{j+1} = x_j - \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial \ln \Psi(t_j, x_j)}{\partial x} \Delta t + \sqrt{\frac{\hbar}{2m}} (-1 + i) \bar{\xi} \sqrt{\Delta t}, j = 0, 1, \cdots, n \quad (11.10.11)$$

將其拆成實部和虛部，可得到二個實數疊代式的聯立：

$$\text{Re}(x_{j+1}) = \text{Re}(x_j) + \frac{\hbar}{m} \text{Im} \left( \frac{\partial \ln \Psi(t_j, x_j)}{\partial x} \right) \Delta t - \sqrt{\frac{\hbar}{2m}} \bar{\xi} \sqrt{\Delta t}, j = 0, 1, \cdots, n \quad (11.10.12a)$$

$$\text{Im}(x_{j+1}) = \text{Im}(x_j) - \frac{\hbar}{m} \text{Re} \left( \frac{\partial \ln \Psi(t_j, x_j)}{\partial x} \right) \Delta t + \sqrt{\frac{\hbar}{2m}} \bar{\xi} \sqrt{\Delta t}, j = 0, 1, \cdots, n \quad (11.10.12b)$$

上式的每個分項都已是距離單位，進一步的數值計算須要先將其無因次化。另外注意(11.10.12a)中的 $\bar{\xi}$ 與(11.10.12b)中的 $\bar{\xi}$ ，是同一個隨機變數，也就是 $\bar{\xi}$ 一旦隨機選定後，就同時代入(11.10.12a)與(11.10.12b)式中，這是因為同一維度實、虛部的 $\bar{\xi}$ 是相同的。然而對於不同維度的隨機變數 $\xi_x$ 和 $\xi_y$ ，則須獨立選定。

### 例題 11.10.1

本例題將以(11.10.12)式計算相干態(coherent state)內的量子軌跡。相干態的波函數如下所

<sup>8</sup> C. D. Yang, Complex Mechanics, Progress in Nonlinear Science, Vol. 1, ISSN 2077-8139, Asian Academic Publisher, Hong Kong, 2010, 377 pages.

<sup>9</sup> C. D. Yang, C. D., Quantum Hamilton Mechanics: Hamilton Equations of Quantum Motion, Origin of Quantum Operators, and Proof of Quantization Axiom, Annals of Physics, Vol. 321, No. 12, pp. 2876-2926, 2006.

<sup>10</sup> H. H. Rosenbrok, A Variational Approach to Quantum Mechanics, Physics Letters, Vol. 110A, pp. 343 - 346, 1985.

示：

$$\Psi(t, x) = \pi^{-1/4} e^{-p_0^2/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} (x - ip_0 \cos t)^2 + xp_0 \sin t - \frac{it}{2} - \frac{ip_0^2}{4} \sin(2t) \right]. \quad (11.10.13)$$

根據定義，相干態的位置及動量所對應的機率密度函數分別為

$$\begin{aligned} \Psi_x^* \Psi_x(t, x) &= \pi^{-1/2} \exp[-(x - p_0 \sin t)^2] \\ \Psi_p^* \Psi_p(t, p) &= \pi^{-1/2} \exp[-(p - p_0 \cos t)^2] \end{aligned} \quad (11.10.14)$$

利用以上之機率密度函數計算位置及動量的期望值及標準差如下

$$\langle x \rangle = p_0 \sin t, \quad \sigma_x = \sqrt{1/2}; \quad \langle p \rangle = p_0 \cos t, \quad \sigma_p = \sqrt{1/2}. \quad (11.10.15)$$

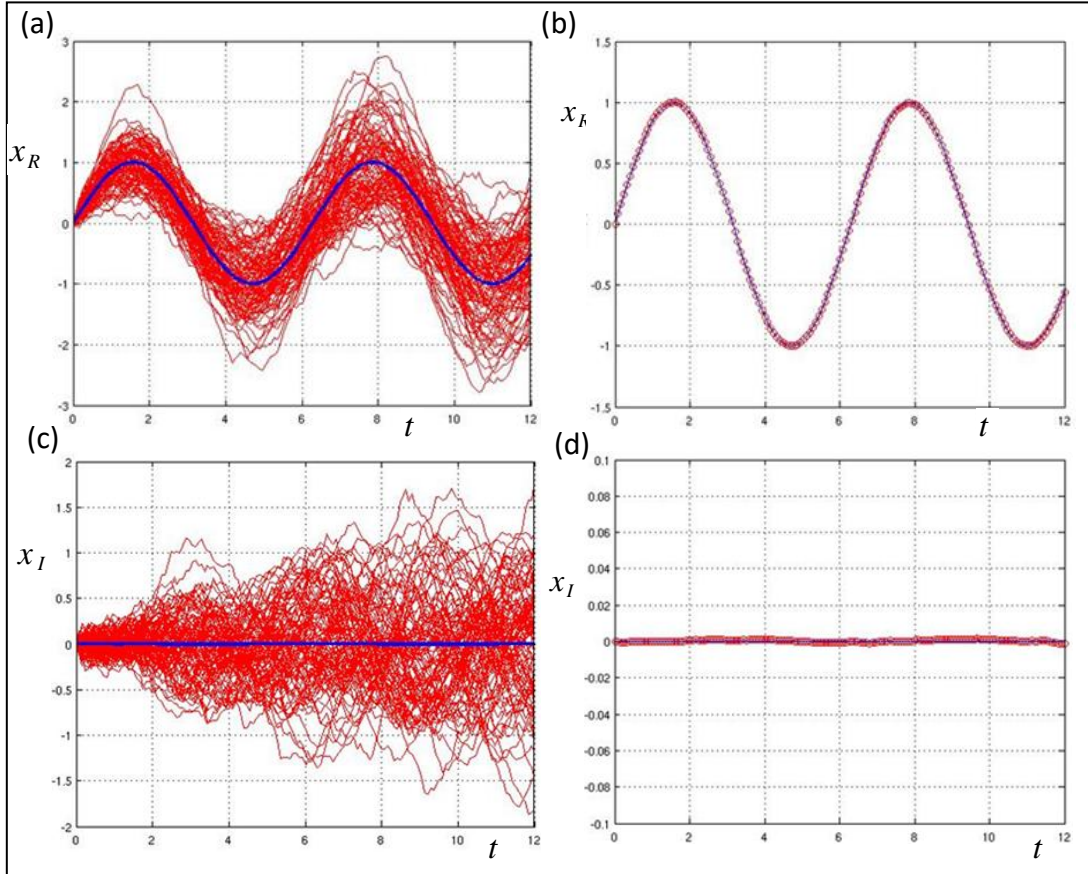


圖 11.10.1 量子相干態內的 160,000 條複數隨機軌跡(紅色)與平均軌跡(藍色)，子圖(a)與(c)分別為這些軌跡的實部與虛部；子圖(b)與(d)則分別為所有實部軌跡與虛部軌跡的平均值。(Yang, 2013)

可見相干態的平均運動行為與彈簧簡諧振子的運動行為一樣，也就是具有古典行為的量子運動。以上三式即為目前量子力學所可以提供的訊息。(11.10.12)式則可提供額外的量子隨機軌跡。將(11.10.13)式代入(11.10.12)式進行疊代運算，並令初始位置 $x_0 = 0$ ，並取常數 $p_0 = 1$ 。由於隨機變數 $\xi$ 的干擾，由 $x_0 = 0$ 出發的軌跡每條都不一樣。圖 11.10.1 總共顯示了 160,000 條複數隨機軌跡(紅色)，子圖(a)與(c)分別為這些軌跡的實部與虛部；子圖(b)與(d)則分別為實部軌跡與虛部軌跡的平均值。

統計所有 160,000 條軌跡，結果顯示實部平均軌跡為 $x_R(t) = \sin t$ ，虛部平均軌跡為 $x_I(t) = 0$ ，此結果與由機率計算所得的期望值相同(參見(11.10.15)式)。另外平均軌跡亦可由(11.10.1)式中忽略隨機變數的影響而獲得，其結果如(11.10.2)式所示。將(11.10.13)式代入(11.10.2)式，可得平均軌跡方程式為

$$\dot{x} = e^{-it} p_0 + ix. \quad (11.10.16)$$

設定初始條件為 $x(0) = 0 + i\delta$ ，則上式的解析解可求得為

$$x_\delta(t) = p_0 \sin t - \delta(\sin t - i \cos t), p_\delta(t) = p_0 \cos t - \delta(\cos t - i \sin t) \quad (11.10.17)$$

其中 $\delta = 0$ 對應於平均軌跡，而得到與(11.10.15)式相同的結果： $x_0(t) = \langle x \rangle = p_0 \sin t$ ， $p_0(t) = \langle p \rangle = p_0 \cos t$ 。 $x_0(t)$ 的實部與虛部畫在圖 11.10.1 的(a)與(c)中的藍色線；將所有隨機軌跡(紅色線)取平均值後，則與藍色軌跡完全重合，如子圖(b)與(d)所示。

□

### 例題 11.10.2

本題考慮另一個量子態，稱為高斯波包(Gaussian wave packet)，它是一個具有高斯分布外型的運動波包，其波函數可表示如下：

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{1+it}} \exp \left[ ik_0 x - i \frac{k_0^2}{2} t \right] \exp \left[ -\frac{(x-k_0 t)^2}{2(1+t^2)} \right] \quad (11.10.18)$$

其相對應的機率密度函數 $|\Psi|^2 = \Psi^* \Psi$ 可化簡如下：

$$\Psi^* \Psi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1+t^2)}} \exp \left[ -\frac{(x-k_0 t)^2}{1+t^2} \right], \quad (11.10.19)$$

可以看到，在每一瞬間 $t$ ， $\Psi^* \Psi$ 都呈現高斯分布，期望值 $k_0 t$ ，標準差 $\sqrt{(1+t^2)/2}$ 。為了計算高斯波包的運動軌跡 $x(t)$ ，吾人將(11.10.18)式代入(11.10.12)式進行疊代。並令初始位置 $x_0 = 0$ ，並取常數 $k_0 = 1$ 。由於隨機變數 $\xi$ 的干擾，由 $x_0 = 0$ 出發的軌跡每條都不一樣。我們總共記錄了 160,000 條複數隨機軌跡，並分析它們在不同時刻的位置分布，與機率密度函數 $\Psi^* \Psi$ 的預測作比較，檢測二者是否一致。結果顯示在圖 11.10.2 中。此圖以 160000 條複數隨機軌跡(藍色)的位置分布去重建高斯波包的機率密度函數 $\Psi^* \Psi$ (綠色)，圖中 6 個子圖顯示在 6 個不同時刻的重建情形：(a)  $t = 0.5$ ，(b)  $t = 1.0$ ，(c)  $t = 1.5$ ，(d)  $t = 2.0$ ，(e)  $t = 2.5$ ，(f)  $t = 3.0$ 。因為所有軌跡都是從原點出發，所以剛開始時，軌跡還未能足夠分散，其位置分布與 $\Psi^* \Psi$ 的預測有較大的誤差，但隨著時間的進展，複數隨機軌跡的分布逐漸收斂到機率密度函數 $\Psi^* \Psi$ 。

圖 11.10.2 展示 160,000 條複數隨機軌跡的位置分布，隨著時間的進展，逐漸收斂到高斯波包的機率密度函數 $\Psi^* \Psi$ 。這結果說明了隨機微分方程式(11.10.1)的正確性，它描述了量子隨機運動所要遵循的規則，這個規則就是我們前面所提到的，量子運動亂歸亂，但亂中其實有序。目前量子力學的研究只知其亂未知其序。

用複數隨機軌跡重建高斯波包的機率密度函數 $\Psi^* \Psi$ ，如果所採用的軌跡樣本數不夠，則將產生重建誤差。圖 11.10.3 展示用不同的軌跡樣本數(藍色線)所獲得的重建情形：(a) 100 條軌跡，(b) 1,000 條軌跡，(c) 10,000 條軌跡，(d) 100,000 條軌跡。圖中曲線均是取自 $t = 3$ 時之軌跡位置分布。可以看到隨著軌跡樣本數增加，軌跡的位置分布逐漸收斂到(11.10.19)式的機率密度函數 $\Psi^* \Psi$ (綠色線)。



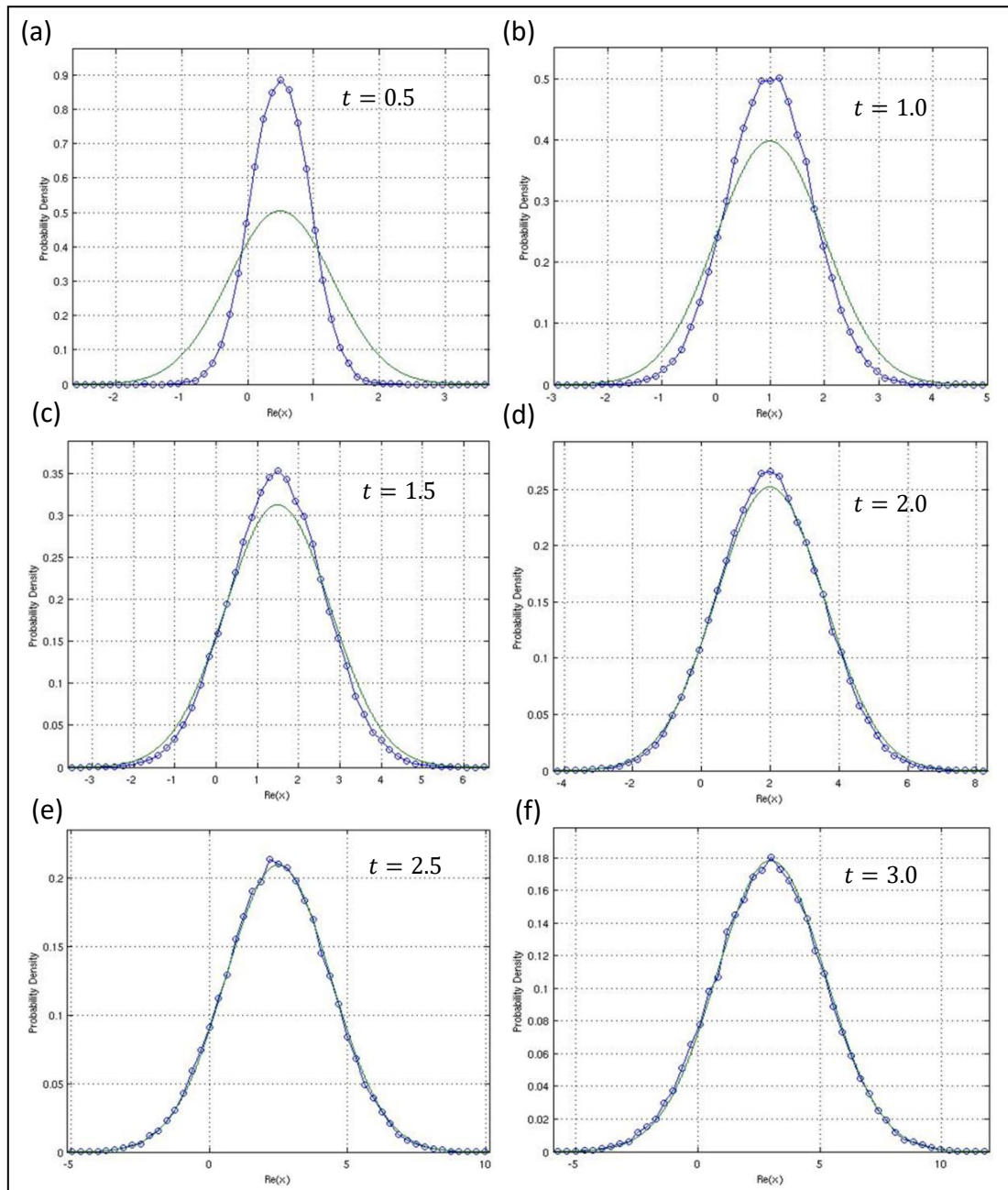


圖 11.10.2 以 160,000 條複數隨機軌跡(藍色)重建高斯波包的機率密度函數 $\Psi^*\Psi$ (綠色)，圖中 6 個子圖顯示在 6 個不同時刻的重建情形: (a)  $t=0.5$ , (b)  $t=1.0$ , (c)  $t=1.5$ , (d)  $t=2.0$ , (e)  $t=2.5$ , (f)  $t=3.0$ 。結果說明隨著時間的進展，複數隨機軌跡的分布逐漸收斂到機率密度函數 $\Psi^*\Psi$ 。(Yang, 2013)



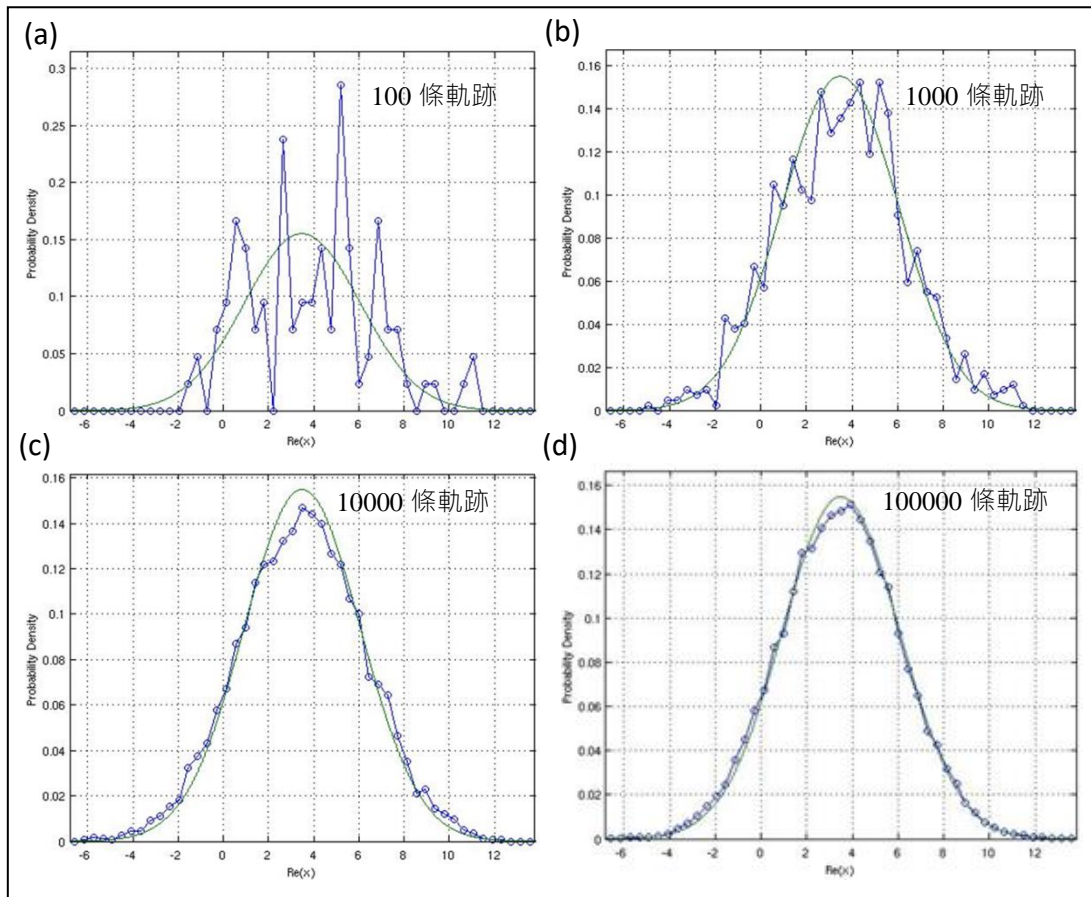


圖 11.10.3 以不同數目的複數隨機軌跡(藍色)重建高斯波包的機率密度函數 $\Psi^*\Psi$ (綠色): (a)100 條軌跡, (b) 1,000 條軌跡, (c) 10,000 條軌跡, (d) 100,000 條軌跡。圖中曲線是取自  $t = 3$  時之軌跡位置分布。(Yang, 2013)

□

## 11.11 學習評量

11.11.1 本題探討一個暖氣供應系統的最佳化控制問題。假設 $\theta(t)$ 是暖房的溫度， $\theta_a$ 是外面環境的溫度(定值)， $u(t)$ 是每單位時間輸入暖房的熱量。已知暖房的溫度 $\theta(t)$ 是由下列的動態方程式所描述

$$\dot{\theta} = -a(\theta - \theta_a) + bu \quad (11.11.1)$$

其中 $a$ 與 $b$ 是給定的常數。定義狀態變數 $x = \theta - \theta_a$ ，將上式改寫成

$$\dot{x} = -ax + bu \quad (11.11.2)$$

所要求解的最佳化問題是決定熱量供給率 $u(t)$ ，使得在時間 $t_f$ 時，暖房溫度到達指定值 $x(t_f)$ ，同時總熱量輸入值為最小：

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} u^2(t) dt \quad (11.11.3)$$

- 根據(11.3.5)式的定義，列出本問題的 Hamiltonian 函數 $H(x, u, p)$ 。
- 將所求得的 $H(x, u, p)$ 代入(11.3.14)式，證明 Lagrange 乘積因子 $p(t)$ 滿足 $\dot{p} = ap$ ，同時證明最佳控制律為 $u(t) = bp(t)$ 。
- 在最佳控制律的作用下，求解 $x$ 與 $p$ 的方程式，證明所得解為

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0)e^{-at} + \frac{b^2}{a}p(t_f)e^{-at}\sinh(at) \\ p(t) &= p(t_f)e^{-a(t_f-t)} \end{aligned} \quad (11.11.4)$$

(d) 在上式中， $p(t_f)$ 是一未知數，現在假設初始條件 $x(0) = 0^\circ$ ， $x(t_f) = 10^\circ$ ，證明此時最佳控制函數為

$$u^*(t) = \frac{10ae^{at}}{b\sinh(at_f)}, 0 \leq t \leq t_f \quad (11.11.5)$$

所對應的最佳狀態響應 $x(t)$ 為

$$x^*(t) = 10 \frac{\sinh(at)}{\sinh(at_f)} \quad (11.11.6)$$

11.11.2 延續上一題的討論，初始條件仍為 $x(0) = 0^\circ$ ，但是不要求 $x(t_f) = 10^\circ$ ，而將條件改成 $x(t_f)$ 盡量接近 $10^\circ$ 即可，此時所對應的成本函數為

$$J = \frac{1}{2}s(x(t_f) - 10)^2 + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} u^2(t)dt \quad (11.11.7)$$

其中 $s$ 是一可調的權重因子， $s$ 值越大，代表最佳化的重心放在(11.11.7)式的第一項； $s$ 值趨於零，則代表最佳化的重心放在(11.11.7)式的第二項。控制律 $u$ 的設計是要成本函數 $J$ 達到最小。在此情況下， $x(t_f)$ 的值並未給定，所以無法像前題一般，由 $x(t_f)$ 的值反求 $p(t_f)$ 的值。

(a) 利用(11.3.13)式，證明 $p(t_f)$ 與 $x(t_f)$ 滿足下列關係式：

$$p(t_f) = -s(x(t_f) - 10) \quad (11.11.8)$$

(b) 結合(11.11.4)式與(11.11.8)式，證明 $p(t_f)$ 的值可求出如下：

$$p(t_f) = \frac{20as}{2a + sb^2(1 - e^{-2at_f})} \quad (11.11.9)$$

(c) 利用上式及前一題所堆導出的關係式，證明最佳控制律為

$$u^*(t) = \frac{10abse^{at}}{ae^{at_f} + sb^2\sinh(at_f)}, 0 \leq t \leq t_f \quad (11.11.10)$$

所對應的最佳狀態響應 $x(t)$ 為

$$x^*(t) = \frac{10sb^2\sinh(at)}{ae^{at_f} + sb^2\sinh(at_f)} \quad (11.11.11)$$

(d) 證明當 $s \rightarrow \infty$ 時，本題的所有結果與前一題的結果完全一致，並解釋背後的原因。

11.11.3 本題討論飛彈與目標物的最佳化追逐問題。參考圖 11.11.1，飛彈(M)在 $x$ 與 $y$ 方向的速度分別為 $u$ 與 $v$ ，假設加速度 $a$ 為定值且與水平方向的夾角為 $\gamma$ 。因此飛彈運動的狀態向量為 $X = [xyuv]$ ，運動方程式可表示成：

$$\dot{x} = u, \dot{y} = v, \dot{u} = a\cos\gamma, \dot{v} = a\sin\gamma \quad (11.11.12)$$

假設初始條件為 $x(0) = y(0) = u(0) = v(0) = 0$ ，但終端狀態 $x(t_f)$ 、 $y(t_f)$ 、 $u(t_f)$ 、 $v(t_f)$ 與終端時間 $t_f$ 均未知。

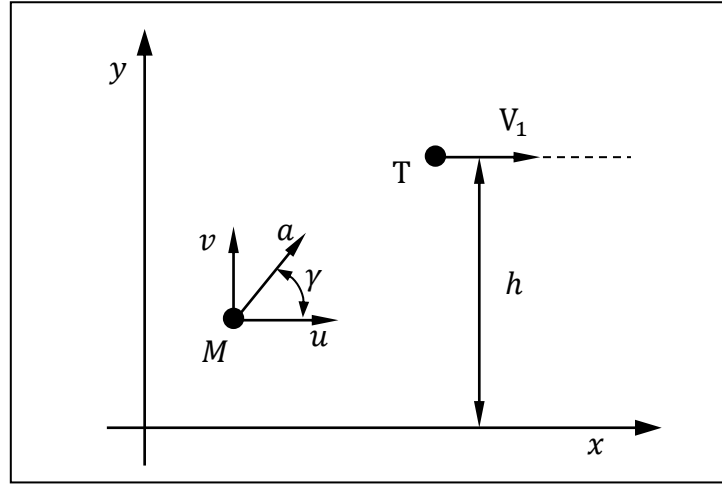


圖 11.11.1 飛彈追逐目標物的幾何示意圖。

最佳控制的問題是要設計飛彈方向角  $u = \gamma(t)$ ，使得所指定的終端時刻成本函數達到最小

$$J = \phi(X(t_f), t_f) \quad (11.11.13)$$

其中  $\phi$  是給定的  $X(t_f)$  與  $t_f$  的函數。同時在終端時刻  $t_f$ ，狀態向量要滿足終端限制條件：

$$\varphi(X(t_f), t_f) = 0 \quad (11.11.14)$$

(a) 列出所對應最佳化問題的 Hamiltonian 函數  $H$ 。

(b) 利用最佳化條件  $\partial H / \partial u = 0$ ，求出最佳方向角  $\gamma(t)$ ，並證明最佳方向角  $\gamma(t)$  滿足下列關係式：

$$\tan \gamma(t) = \frac{p_v(t)}{p_u(t)} \quad (11.11.15)$$

(c) 利用關係式  $\dot{P} = -\partial H / \partial X$ ，列出 Lagrange 乘積因子  $P = [p_x p_y p_u p_v]$  所要滿足的微分方程式。

(d) 求解以上的方程式，並證明以下結果： $p_x = \text{常數}$ ， $p_y = \text{常數}$ ，且

$$p_u(t) = c_1 - p_x t, p_v(t) = c_2 - p_y t \quad (11.11.16)$$

11.11.4 延續前一題所得到的結果，假設目標物(T)以水平直線飛行，速度為  $V_1$ ，座標為  $(x_1 + V_1 t, h)$ ，如圖 11.11.1 所示。本題的目的是要設計最佳化追逐策略，使得在終端時刻  $t_f$  時，飛彈能夠攔截到目標物，並且使得攔截時間  $t_f$  為最短。依題意，所要最佳化的成本函數為：

$$J = \phi(X(t_f), t_f) = t_f \quad (11.11.17)$$

當飛彈攔截到目標物時，飛彈與目標物的座標必須相同，亦即本最佳化問題要求終端限制條件：

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) - (x_1 + V_1 t) \\ y(t) - h \end{bmatrix}_{t=t_f} = 0 \quad (11.11.18)$$

依照(11.3.7)式的定義，本題所對應的函數  $\Phi(x(t_f), t_f)$  為

$$\begin{aligned} \Phi(x(t_f), t_f) &= \phi(x(t_f), t_f) + v^T \varphi(x(t_f), t_f) \\ &= t_f + v_1(x(t_f) - (x_1 + V_1 t_f)) + v_2(y(t_f) - h) \end{aligned} \quad (11.11.19)$$

(a) 利用(11.3.17)式的終端條件，求出 Lagrange 乘積因子的終端值： $p_x(t_f)$ 、 $p_y(t_f)$ 、

$p_u(t_f)$ 、 $p_v(t_f)$ 。

(b) 結合 11.11.3 題(d)部分的結果，證明 Lagrange 乘積因子的解答可表示成：

$$p_x(t) = -v_x, p_y(t) = -v_y, p_u(t) = (t - t_f)v_x, p_v(t) = (t - t_f)v_y \quad (11.11.20)$$

(c) 證明最佳方向角  $\gamma^*$  滿足

$$\tan \gamma^* = v_y/v_x = \text{常數} \quad (11.11.21)$$

(d) 在最佳方向角  $\gamma^*$  的作用下，證明(11.11.12)式的解可表示成

$$x(t) = \frac{at^2}{2} \cos \gamma, y(t) = \frac{at^2}{2} \sin \gamma, u(t) = a \cos \gamma, v(t) = a \sin \gamma \quad (11.11.22)$$

(e) 結合(11.11.18)式與(11.11.22)式，證明最佳終端時刻  $t_f$  是下列方程式的正根：

$$(-a^2/4)t_f^4 + V_1^2 t_f^2 + 2V_1 x_1 t_f + (x_1^2 + h^2) = 0 \quad (11.11.23)$$

#### 11.11.5 考慮一階系統

$$\dot{x} = x + u, x(0) = 10 \quad (11.11.24)$$

設計控制律  $u$  使下列的成本函數為最小

$$J = mx^2(t_f) + \int_0^{t_f} u^2(t) dt \quad (11.11.17)$$

其中  $m$  是給定的比權常數。因此最佳控制的目的是希望在時間  $t_f$  時，將  $x(t_f)$  驅動到最小值，且所花費的能量也要最小。 $x(t_f)$  根據 11.4 節的作法回答下列問題：

(a) 列出本題所對應的 Riccati 方程式(參見(11.4.10)式)。

(b) 設  $m = 1$ ， $t_f = 10$ ，以解析的方法求解上述 Riccati 方程式的解  $P(t)$ 。

(c) 依據(11.4.11)式，最佳控制律可表成  $u^*(t) = -K(t)x(t)$ ，求出增益  $K(t)$  的表示式。

(d) 畫出  $x(t)$  與  $u^*(t)$  對時間的響應圖。

(e) 設  $m = 10$ ，重複以上步驟，討論權重係數  $m$  的大小對於  $x(t)$  收斂速度及控制能量  $u(t)$  的影響。

## 參考文獻 (References)

- Bellman, R., Dynamic Programming, Princeton University Press, 1957.  
Bellman 是動態規劃(dynamical Programming)理論的創立者，該書記錄了他建立此理論的原始構想，開創了最佳控制的新原理，並對經典力學提供了一種新的詮釋。
- Boltyanski, V. G. and Poznyak, A. S., The Robust Maximum Principle, Springer, 2012.  
該書也是以 Pontryagin's maximum principle 建立最佳控制理論，並且是針對具有不確定性的控制系統，所得的控制律具有強健的功能。
- Bryson, A. E. and Ho, Y. C., Applied Optimal Control, Taylor and Francis, 1975.  
該書是以變分原理講述最佳控制理論的權威著作，書中收錄了眾多不同工程領域的最佳控制應用實例，尤其對於線性系統的最佳控制理論有深入的討論。本章第 3 節以變分原理求解最佳化控制問題主要參考自該書。
- Bryson, A. E., Optimal Control: 1950 to 1985, Control Systems, IEEE, Vol. 16, pp. 26-33, June, 1996.  
作為當代最佳控制理論的創建者之一，Bryson 在這篇文章中記錄了 1950 年到 1985 年之間，最佳控制理論發展的幾個重要里程碑，並收錄了 77 篇關鍵的參考文獻。

- Fleming, W. H. and Rishel, R. W., Deterministic and Stochastic Optimal Control, Springer-Verlag, 1975.

變分原理(Calculus of variation)與動態規劃(Dynamical Programming)是求解最佳控制的二種方法，前者僅適用於決定性系統(deterministic system)，而後者能適用於隨機系統(stochastic system)。該書的前半部用變分原理求解決定性系統的最佳控制，而後半部介紹用動態規劃求解隨機系統的最佳控制。

- Haddad, W. M. and Chellaboina, V., Nonlinear Dynamical Systems and Control: A Lyapunov-Based Approach, Princeton University Press, 2008.

該書超過 900 頁，完整涵蓋非線性控制的不同主題，且數學分析嚴謹。該書的特點是以 Lyapunov 理論貫穿非線性控制與最佳控制，詳細解說了 Lyapunov 函數在最佳控制中所扮演的角色。

- Hildebrand, F. B., Methods of Applied Mathematics, 2<sup>nd</sup> Edition, Prentice Hall, 1965.

變分原理(Calculus of variation)是最佳化控制理論的數學基礎，該書對於變分數學原理的介紹，循序漸進，由淺入深，對於初學者而言，是很好的入門之書。本章第 1 節關於變分理論的介紹主要參考自該書。

- Lanczos, C., The Variational Principles of Mechanics, Dover, fourth edition, 1986.

該書的第一版出現在 1948 年，是以變分原理詮釋古典力學(包含相對論力學)的經典著作。若要以變分原理處理物理學問題，該書是必讀之作。本章第 2 節關於各種力學理論的變分詮釋主要參考自該書。

- Lewis, F. L. and Syrmos, V. L., Optimal Control, 2<sup>nd</sup> Edition, John Wiley & Sons, 1995.

該書與 Bryson, 1975 的書比起來平易近人許多，書中對於每個例題的講解均非常詳細，對於理論的推導過程，每一步都沒有略過，非常適合初學者閱讀。除了變分原理的傳統論述外，該書同時以動態規劃原理，進行最佳控制的推導與分析，這是早期最佳控制教科書所欠缺的。本章第 5 節以動態規劃原理求解最佳化控制問題主要參考自該書。

- Liberzon, D., Calculus of Variation and Optimal Control Theory: A Concise Introduction, Princeton University Press, 2012.

這是一本較新的關於最佳控制的教科書，雖然帶有簡介的性質，但全書貫穿最佳控制的三種處理方式: Calculus of variation, Pontryagin's maximum principle, Dynamical programming, 帶給讀者關於最佳控制的全方位認識。

- Pytlak, R., Numerical Methods for Optimal Control Problems with State Constraints, Springer-Verlag, 1999.

最佳化控制需要求解雙邊界值問題，這需要數值計算方法的協助。當最佳控制問題遇到較複雜的終端條件限制時，可能導致數值疊代方法收斂緩慢，甚至發散的情形。該書介紹了各種求解最佳控制問題的數值方法，並討論了它們的收斂性及適用的時機。

- Vincent, T. L. and Grantham, W. J., Nonlinear and Optimal Control Systems, John Wiley & Sons, 1997.

該書的特色是以 Pontryagin's maximum principle 建立最佳控制理論，這是除了變分原理(calculus of variation)及動態規劃(Dynamical Programming)之外，第三種處理最佳控制的手段。當最佳化問題受到不等式的條件限制時，以此法求解最佳控制最為簡便。

- Yang, C. D. (楊憲東) and Cheng, L. L., Optimal Guidance Law in Quantum Mechanics, Annals

of Physics, Vol. 338, pp.167-185, 2013.

該論文是本書作者於 2013 年發表在物理年鑑期刊(Annals of physics)的文章，本章最後三節是根據該篇文獻所改寫，也是文獻上第一篇以最佳導引原理詮釋量子力學的文章。

- 楊憲東，工程分析:第一部 數學模式的建立，巨擘書局，1995。

這是本書作者的另一著作，內容闡述如何以變分原理建立各種工程系統的數學模式。國內的工程數學教育著重在教導學生如何求解數學問題，導致學生只會等待老師出問題，等待主管出問題，再去求解。如今求解數學問題的工作已逐漸被各種數值計算軟體所取代，而電腦所幫不了的工作是如何將工程問題化成等義的數學問題，這才是當代學生所真正需要的數學能力。這本書即是循著這樣的教學理念，透過變分原理的運用，協助讀者自己去建立描述各種工程系統的數學方程式。