

非線性控制 Nonlinear Control

第九章作業 適應性控制

學號：P46104285

研究生：楊亞勳

授課教授：楊憲東

Department of Aeronautics and Astronautics

National Cheng Kung University

Tainan, Taiwan, ROC

中華民國 112 年 1 月 7 日

目錄

Question 1	1
Question 2	2
Question 3	4
MATLAB Code	12

本題延續範例 9.6.2 的討論，但是考慮不同的非線性系統：

$$\dot{y} + a_p y + c_p \cos y = b_p u \quad (1)$$

現在要設計適應性控制 u ，使得在系統參數未知的情況下，非線性系統的輸出能夠追蹤以下的線性參考模式：

$$\dot{y}_m + 3y_m = 2r \quad (2)$$

Question 1

將控制訊號表成如下形式

$$u = K_y y + K_f \cos y + K_r r \quad (3)$$

並假設受控體參數 a_p 、 b_p 和 c_p 為已知的情況下，求出控制律參數 K_y^* 、 K_f^* 、 K_r^* ，使得 $r \rightarrow y$ 間的轉移函數與 $r \rightarrow y_m$ 間的轉移函數完全一致。

Answer

此題要求再受控體參數已知的情況下，求出控制律參數使系統輸出和參考模式輸出完全相同，要達成此目的，需要先令控制訊號表示如式(4)

$$u = K_y^* y + K_f^* \cos y + K_r^* r \quad (4)$$

並將上式代回式(1)，如下

$$\begin{aligned} \dot{y} + a_p y + c_p \cos y &= b_p (K_y^* y + K_f^* \cos y + K_r^* r) \\ \rightarrow \dot{y} + (a_p - b_p K_y^*) y + (c_p - b_p K_f^*) \cos y &= b_p K_r^* r \end{aligned} \quad (5)$$

將式(5)的結果與參考模式(2)比較

$$\begin{cases} \dot{y} + (a_p - b_p K_y^*) y + (c_p - b_p K_f^*) \cos y = b_p K_r^* r \\ \dot{y}_m + 3y_m = 2r \end{cases} \quad (6)$$

若要使兩式完全相同，則需要使

$$a_p - b_p K_y^* = 3 \quad (7)$$

$$c_p - b_p K_f^* = 0 \quad (8)$$

$$b_p K_r^* = 2 \quad (9)$$

解算式(7)、式(8)和式(9)即可得到控制率參數解：

$$K_y^* = \frac{a_p - 3}{b_p} \quad , \quad K_f^* = \frac{c_p}{b_p} \quad , \quad K_r^* = \frac{2}{b_p}$$

Question 2

其次假設受控體參數 a_p 、 b_p 和 c_p 為未知的情況下，求出控制律參數的估測值 \hat{K}_y 、 \hat{K}_f 及 \hat{K}_r 所要滿足的調變律，以保證追蹤誤差 $e = y(t) - y_m(t) \rightarrow 0$ 。

Answer

設控制訊號為以下形式

$$u = \hat{K}_y y + \hat{K}_f \cos y + \hat{K}_r r \quad (10)$$

並且定義參數估測誤差為

$$\bar{K}_y = \hat{K}_y - K_y^*, \bar{K}_f = \hat{K}_f - K_f^*, \bar{K}_r = \hat{K}_r - K_r^* \quad (11)$$

先將式(10)代入式(1)，得到下列閉迴路系統方程式

$$\begin{aligned} \dot{y} + a_p y + c_p \cos y &= b_p (\hat{K}_y y + \hat{K}_f \cos y + \hat{K}_r r) \\ \rightarrow \dot{y} + (a_p - b_p \hat{K}_y) y + (c_p - b_p \hat{K}_f) \cos y &= b_p \hat{K}_r r \\ \rightarrow \dot{y} + (a_p - b_p (\bar{K}_y + K_y^*)) y + (c_p - b_p (\bar{K}_f + K_f^*)) \cos y &= b_p (\bar{K}_r + K_r^*) r \\ \rightarrow \dot{y} + \left(a_p - b_p \left(\bar{K}_y + \frac{a_p - 3}{b_p} \right) \right) y + \left(c_p - b_p \left(\bar{K}_f + \frac{c_p}{b_p} \right) \right) \cos y &= b_p \left(\bar{K}_r + \frac{2}{b_p} \right) r \\ \rightarrow \dot{y} + (3 - b_p \bar{K}_y) y - b_p \bar{K}_f \cos y &= (2 + b_p \bar{K}_r) b_p r \\ \rightarrow \dot{y} = -(3 - b_p \bar{K}_y) y + b_p \bar{K}_f \cos y + (2 + b_p \bar{K}_r) b_p r \end{aligned} \quad (12)$$

參考模式適應性控制的目的是使系統輸出追蹤參考模式輸出 $y(t) \rightarrow y_m(t)$ ，故在此定義模式追蹤誤差

$$e(t) = y(t) - y_m(t) \quad (13)$$

同時將式(13)的兩邊微分即可得到

$$\dot{e}(t) = \dot{y}(t) - \dot{y}_m(t) \quad (14)$$

此為模式追蹤誤差的動態方程式。若式(13)最後能夠趨近於零，代表系統輸出完美追蹤參考模式輸出。若是將閉迴路系統方程式(12)和參考模式方程式 $\dot{y}_m = 2r - 3y_m$ 代入式(14)，即可得到追蹤誤差所要滿足的方程式

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= -(3 - b_p \bar{K}_y) y + b_p \bar{K}_f \cos y + (2 + b_p \bar{K}_r) b_p r - 2r - 3y_m \\ \rightarrow \dot{e}(t) &= -3e(t) + b_p (\bar{K}_y y + \bar{K}_f \cos y + \bar{K}_r r) \end{aligned} \quad (15)$$

為了求出控制律參數的估測值，首先需要建立增益值得調變機制，首先將式(11)移項得到

$$\begin{aligned} \hat{K}_y &= \bar{K}_y + K_y^* \\ \hat{K}_f &= \bar{K}_f + K_f^* \\ \hat{K}_r &= \bar{K}_r + K_r^* \end{aligned} \quad (16)$$

因為由問題一所求得之控制律參數 K_y^* 、 K_f^* 、 K_r^* 為常數值，故將式(16)微分後會為零，並且將 \hat{K}_y 、 \hat{K}_f 及 \hat{K}_r 表示為新的變數如下

$$\begin{aligned}\dot{\bar{K}}_y &= \dot{\hat{K}}_y = f_1(e, \bar{K}_y, \bar{K}_f, \bar{K}_r) \\ \dot{\bar{K}}_f &= \dot{\hat{K}}_f = f_2(e, \bar{K}_y, \bar{K}_f, \bar{K}_r) \\ \dot{\bar{K}}_r &= \dot{\hat{K}}_r = f_3(e, \bar{K}_y, \bar{K}_f, \bar{K}_r)\end{aligned}\tag{17}$$

式(17)中的三組函數為待定函數值，其目的是要使得追蹤誤差為漸進穩定，亦即 $e(t) \rightarrow 0$ 。

在此採用 Lyapunov 直接定理來確保 $e(t) \rightarrow 0$ ，並選取二次式 Lyapunov 函數如下：

$$V(e, \bar{K}_y, \bar{K}_f, \bar{K}_r) = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}|b_p| \left(\frac{1}{\gamma_1} \bar{K}_y^2 + \frac{1}{\gamma_2} \bar{K}_f^2 + \frac{1}{\gamma_3} \bar{K}_r^2 \right) \geq 0, \gamma_i > 0\tag{18}$$

並且將上式對時間微分

$$\begin{aligned}\dot{V}(e, \bar{K}_y, \bar{K}_f, \bar{K}_r) &= e\dot{e} + |b_p| \left(\frac{\bar{K}_y \dot{\bar{K}}_y}{\gamma_1} + \frac{\bar{K}_f \dot{\bar{K}}_f}{\gamma_2} + \frac{\bar{K}_r \dot{\bar{K}}_r}{\gamma_3} \right) \\ &= -3e^2 + b_p e (\bar{K}_y y + \bar{K}_f \cos y + \bar{K}_r r) + |b_p| \left(\frac{\bar{K}_y f_1}{\gamma_1} + \frac{\bar{K}_f f_2}{\gamma_2} + \frac{\bar{K}_r f_3}{\gamma_3} \right) \leq 0\end{aligned}\tag{19}$$

觀察上式，可以看到第一項 $-3e^2$ 必定為負數，而其他項次無法保證為負數。為讓(19)式之不等式恆成立，在此採用消除不確定正負號函數的策略，選擇

$$\begin{cases} f_1 = -\text{sgn}(b_p) \gamma_1 e y \\ f_2 = -\text{sgn}(b_p) \gamma_2 e \cos y \\ f_3 = -\text{sgn}(b_p) \gamma_3 e r \end{cases}\tag{20}$$

可以使式(19)變成下列不等式

$$\dot{V}(e, \bar{K}_y, \bar{K}_f, \bar{K}_r) = -3e^2 \leq 0\tag{21}$$

上式的不等式恆成立。當 $\dot{V} = 0$ 時，必有 $e(t) = 0$ 。但上面的函數選擇無法保證參數估測誤差 \bar{K}_y 、 \bar{K}_f 和 \bar{K}_r 為零。即使如此，此函數的設計還是能到達成 $e = y(t) - y_m(t) \rightarrow 0$ 的目標。

Question 3

最後進行數值模擬驗證，設定 $a_p=1$ ， $b_p=2$ ， $c_p=-1$ ，參考指令分別討論 $r(t)=1$ 與 $r(t)=2\sin t+\cos t$ 的情形。畫出追蹤誤差與 3 個參數估測誤差隨時間的響應圖，並分析在二種不同參考指令之下，這二種誤差是否可同時趨近於零？

Answer

本題非線性系統方程式

$$\dot{y} + a_p y + c_p \cos y = b_p u \quad (22)$$

和所參考的線性系統

$$\dot{y}_m + 3y_m = 2r \quad (23)$$

而其中非線性系統所使用的控制訊號形式如下

$$u = \hat{K}_y y + \hat{K}_f \cos y + \hat{K}_r r \quad (24)$$

其中的控制律參數增益，經過上一小題的設計會隨著以下的變化率來更新

$$\begin{cases} \dot{\hat{K}}_y = -\text{sgn}(b_p) \gamma_1 e y, \hat{K}_y(0) = 0 \\ \dot{\hat{K}}_f = -\text{sgn}(b_p) \gamma_2 e \cos y, \hat{K}_f(0) = 0 \\ \dot{\hat{K}}_r = -\text{sgn}(b_p) \gamma_3 e r, \hat{K}_r(0) = 0 \end{cases} \quad (25)$$

其中系統的真實參數為 $a_p=1$ ， $b_p=2$ ， $c_p=-1$ 。但在適應性控制的過程中，先假設這些參數是未知的。設非線性系統和參考模式輸出之初使條件為 $y_m(0)=y(0)=0$ 。而模擬中控制器參數調變律增益值選定為 $\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=10$ 。

首先將參考指令設定為 $r(t)=1$ 。並且將上述的參數輸入道系統當中，結果如圖 1 所示。

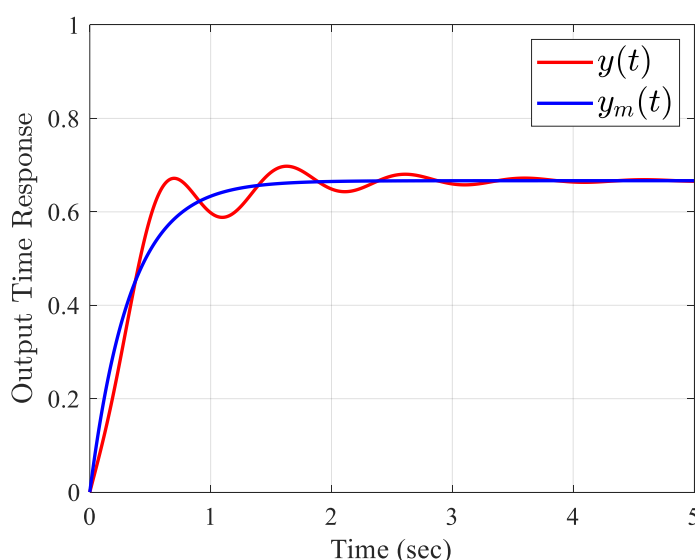


圖 1、當參考指令為 $r(t)=1$ 時，系統輸出和參考模式輸出時間響應之比較

其中藍色線為參考模式輸出之時間響應，紅色線則為系統實際輸出的值。從圖中觀察可以看到，系統實際輸出在適應性控制的設計下，以漸進穩定的方式追蹤到參考模式的輸出，代表第二題中的控制律設計達成需求。為了更清楚的觀察系統輸出和參考模式輸出的差別圖 2 為系統追蹤誤差之時間響應。從這張圖也可以清楚的看到誤差以漸進穩定的方式收斂到零，達到 $e(t) \rightarrow 0$ 的目標。

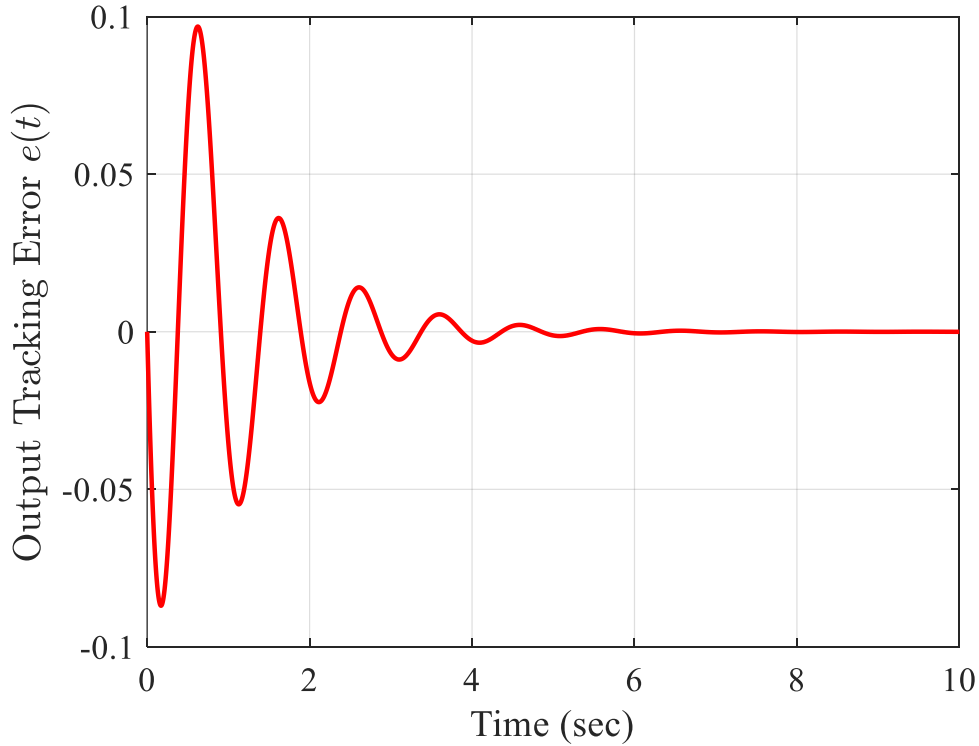


圖 2、當時參考指令為 $r(t)=1$ 時，系統追蹤誤差之時間響應

接著要觀察系統控制律參數估測的結果。圖 3~圖 5 為實際控制律參數 K_y^* 、 K_f^* 、 K_r^* 和利用適應性控制方法所得到的參數估測值 \hat{K}_y 、 \hat{K}_f 及 \hat{K}_r 之時間響應圖。圖中藍色虛線為若是知道實際系統參數，所得到能夠追蹤參考模式輸出的控制律參數，紅色實線則為利用估測方法計算出的控制律參數。從這三張圖觀察可以得知，雖然系統能夠完美追蹤參考模式輸出，追蹤誤差以漸進穩定的方式收斂到零。但是參數估測卻無法以相同方式收斂。會造成這個結果的原因為在第二題的控制率增益值調變機制中，其設計結果所使用之 Lyapunov 函數，當 $\dot{V}(t) \leq 0$ 時只有包含到追蹤誤差 $e(t)$ 的項次，沒有包含到參數估測誤差的項次，故其設計結果只能保證追蹤誤差以漸進穩定，無法保證控制律參數的估測誤差為零。故此模擬和設計結果相符合。

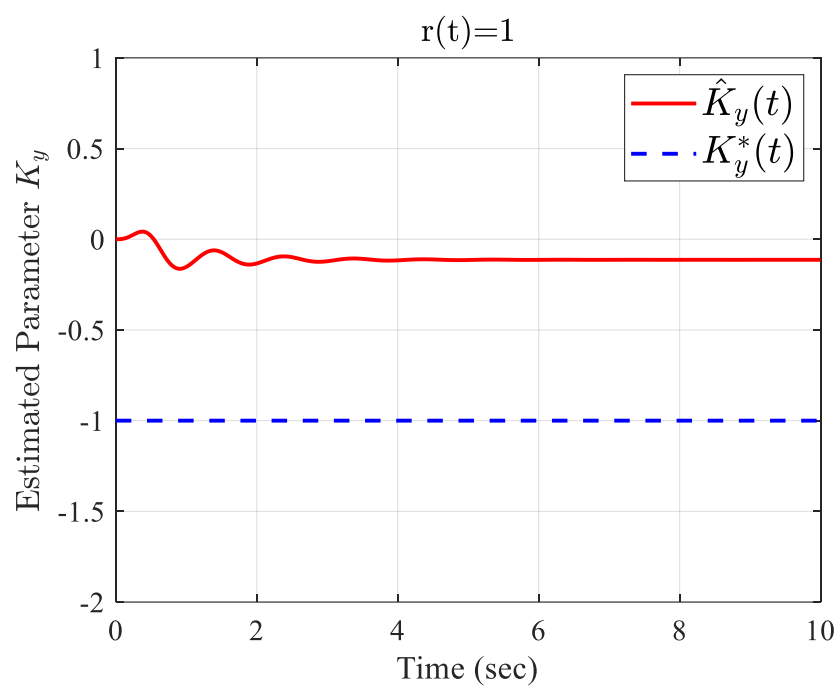


圖 3、實際控制律參數與參數估測時間響應圖

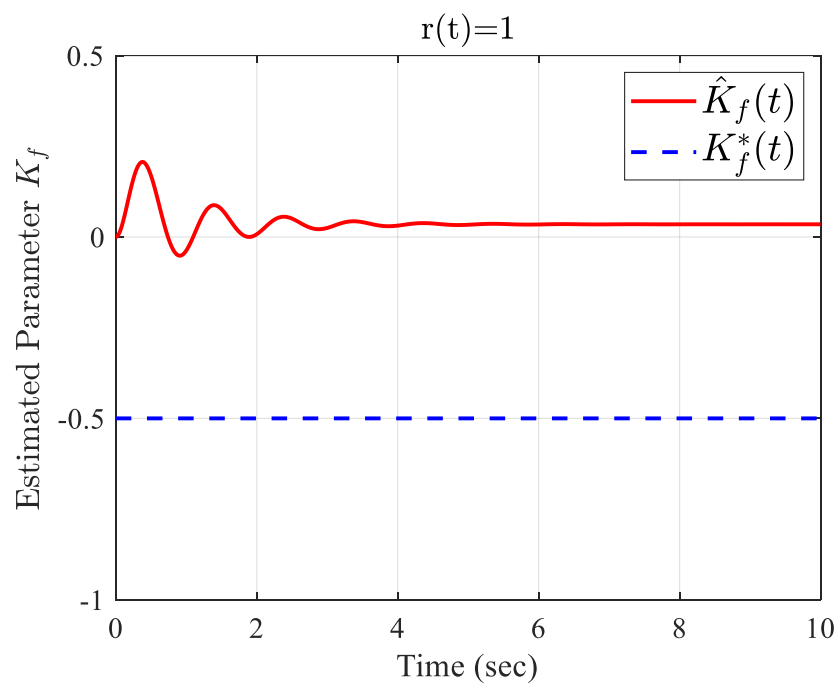


圖 4、實際控制律參數與參數估測時間響應圖

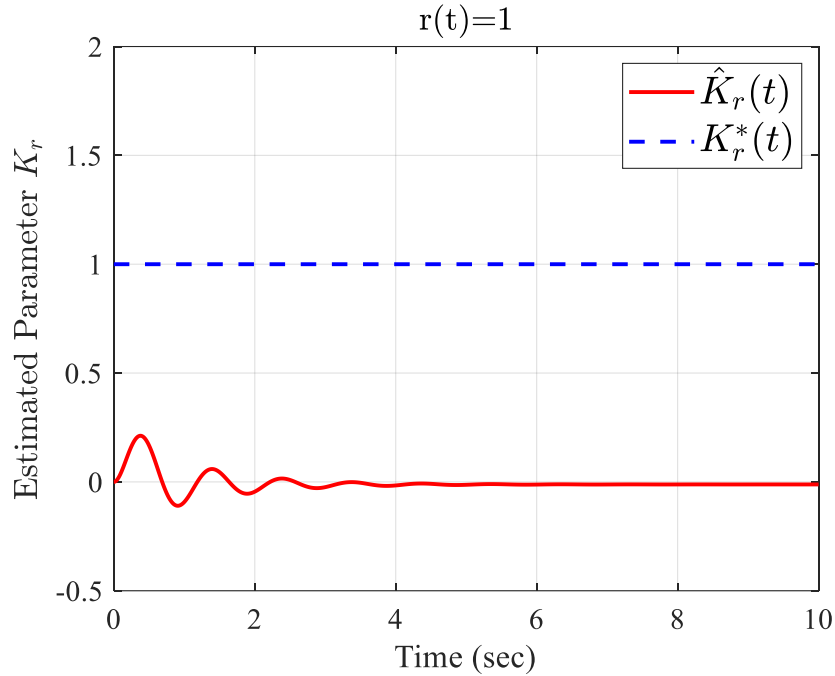


圖 5、實際控制律參數與參數估測時間響應圖

接著將參考指令設定為 $r(t) = 2\sin t + \cos t$ ，其他的模擬參數則不改變，並且重複以上的步驟以觀察不同的參考指令是否對系統的追蹤誤差和參數估測誤差有影響。圖 6 為模擬結果其中藍色線為參考模式輸出之時間響應，紅色線則為系統實際輸出的值。這張圖乍看之下，系統追蹤誤差也以漸進穩定的方式收斂到零，但若是進一步繪製出系統追蹤誤差如圖 7，可以看到系統追蹤誤差即使到模擬時長為 100 秒時，也沒有完全收斂至零。這個結果推論是參考輸入中含有不同頻率的訊號，引起的響應影響到系統追蹤誤差的收斂情形。即使如此，系統追蹤誤差還是可以收斂到很小的數量級，達到追蹤參考模式的目的。

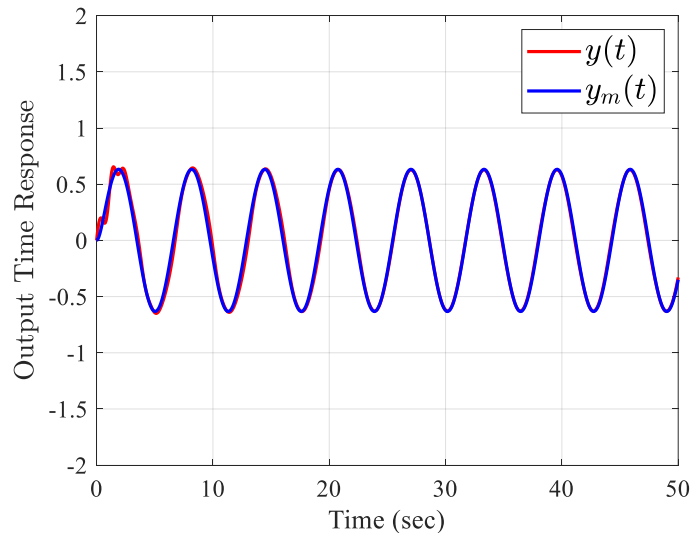


圖 6、當參考指令為 $r(t) = 2\sin t + \cos t$ 時，系統輸出和參考模式輸出時間響應之比較

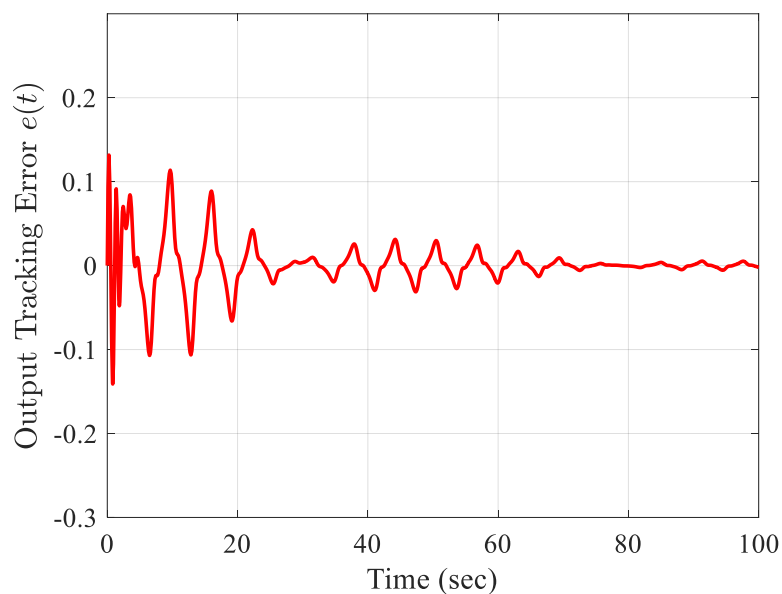


圖 7、當時參考指令為 $r(t) = 2\sin t + \cos t$ 時，系統追蹤誤差之時間響應

接著要觀察在不同參考指令下，系統控制律參數估測的結果。圖 8~圖 10 為實際控制律參數 K_y^* 、 K_f^* 、 K_r^* 和利用適應性控制方法所得到的參數估測值 \hat{K}_y 、 \hat{K}_f 及 \hat{K}_r 之時間響應圖。圖中藍色虛線為若是知道實際系統參數，所得到能夠追蹤參考模式輸出的控制律參數，紅色實線則為利用估測方法計算出的控制律參數。

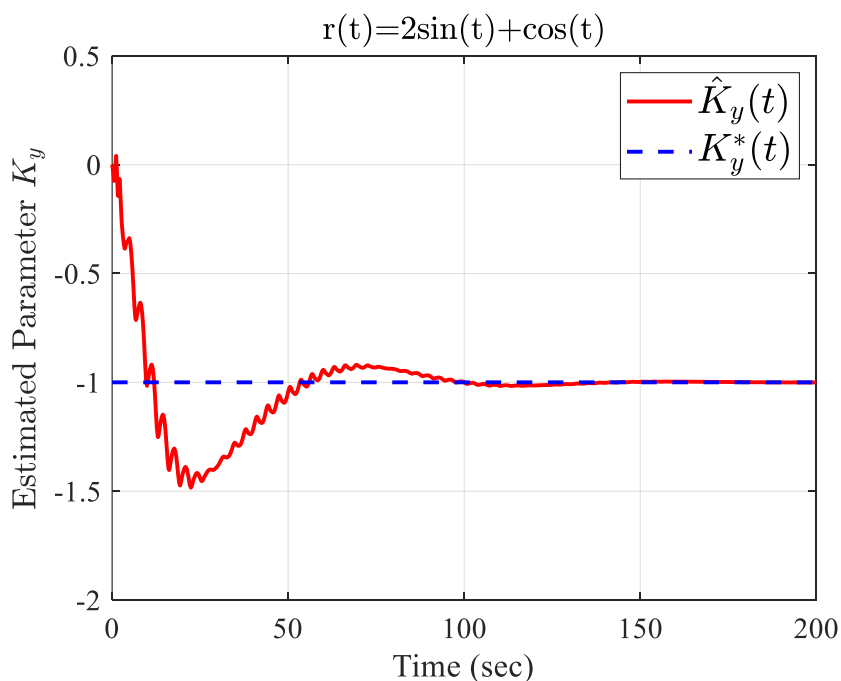


圖 8、實際控制律參數與參數估測時間響應圖

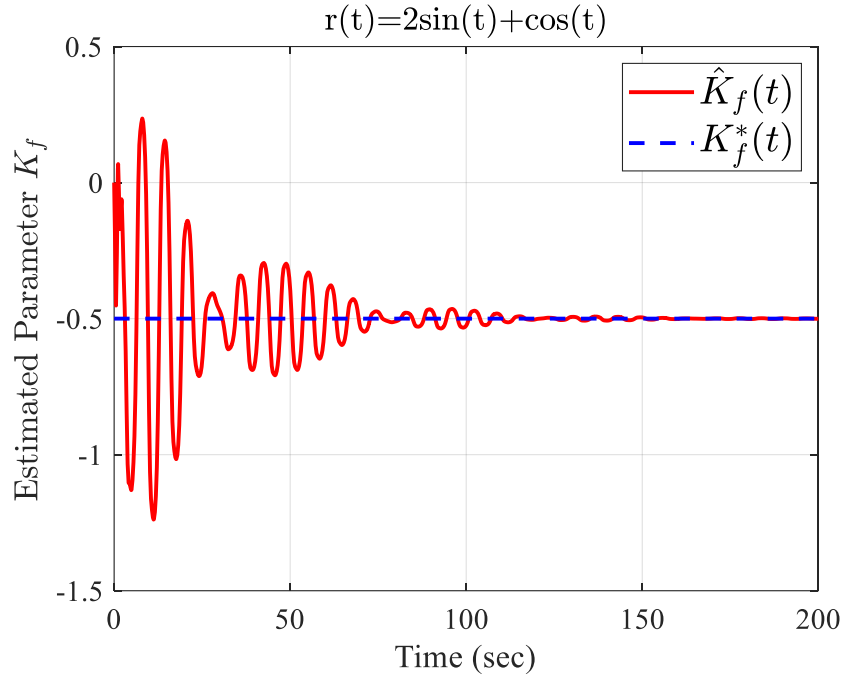


圖 9、實際控制律參數與參數估測時間響應圖

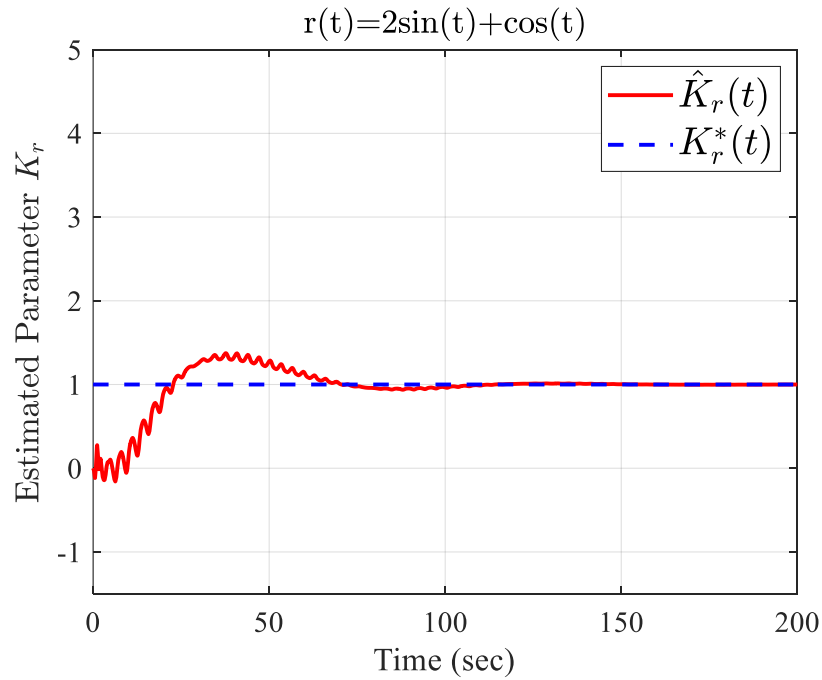


圖 10、實際控制律參數與參數估測時間響應圖

從圖中可以看出，若是將參考指令從常數值改為弦波輸入訊號，即使在追蹤誤差上會有所犧牲，但是參數估測在約 100 秒後幾乎能夠和實際的控制律參數相同。圖 11~圖 14 繪製出兩種參考指令所得到的系統追蹤誤差和參數估測時間響應，從這幾張圖可以看出，當參考指令為較單純的輸入 $r(t)=1$ 時，系統的追蹤誤差會很快的收斂到零，但是無法得到準確

的參數估測值。而當參考指令為較為複雜的弦波輸入 $r(t) = 2\sin t + \cos t$ 時，系統追蹤誤差雖然無法很快的收斂到零，但最終還是會逼近零。而參數估測的效果比單純的常數輸入訊號好，因為常數參考指令書如即使模擬時長到了 120 秒，卻沒有收斂至真實的控制率參數的跡象，而弦波參考指令輸入則是會漸漸收斂到真實的控制律參數上。

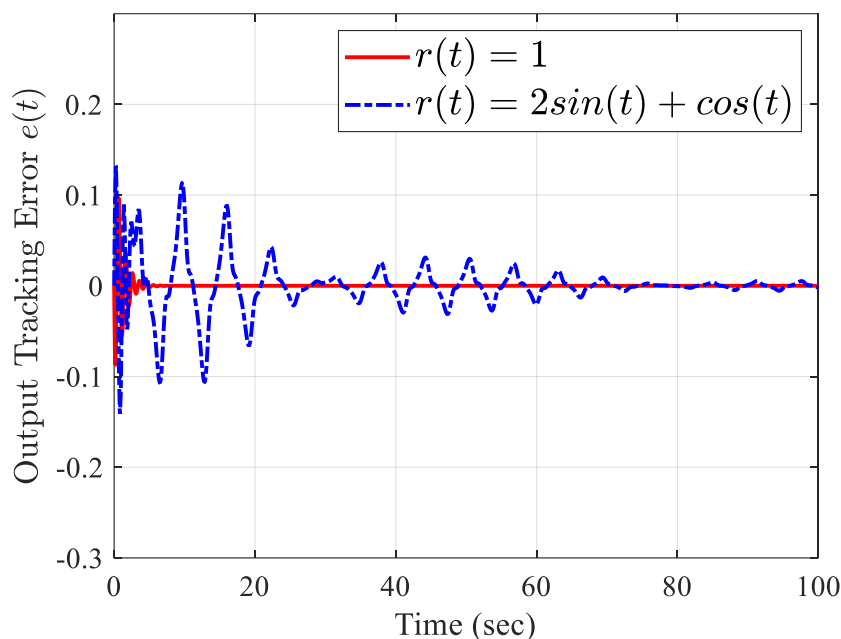


圖 11、不同參考指令輸入下，所得到之系統追蹤誤差

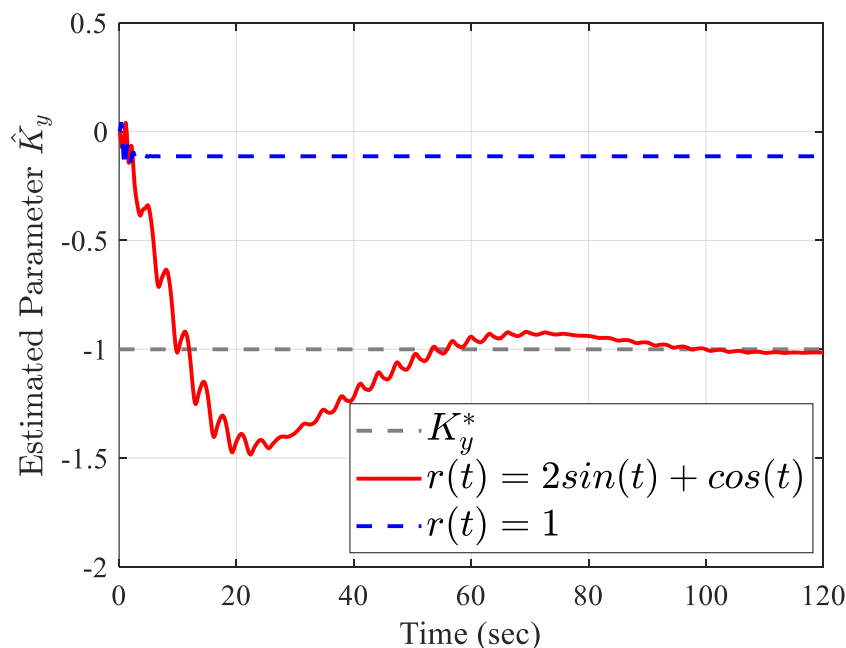


圖 12、不同參考指令下，控制器參數估測之時間響應

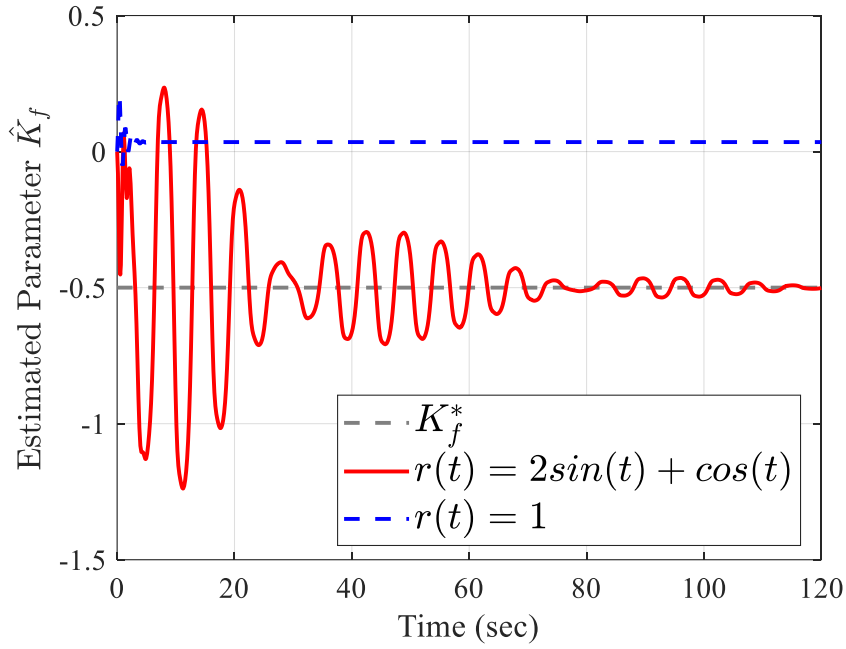


圖 13、不同參考指令下，控制器參數估測之時間響應

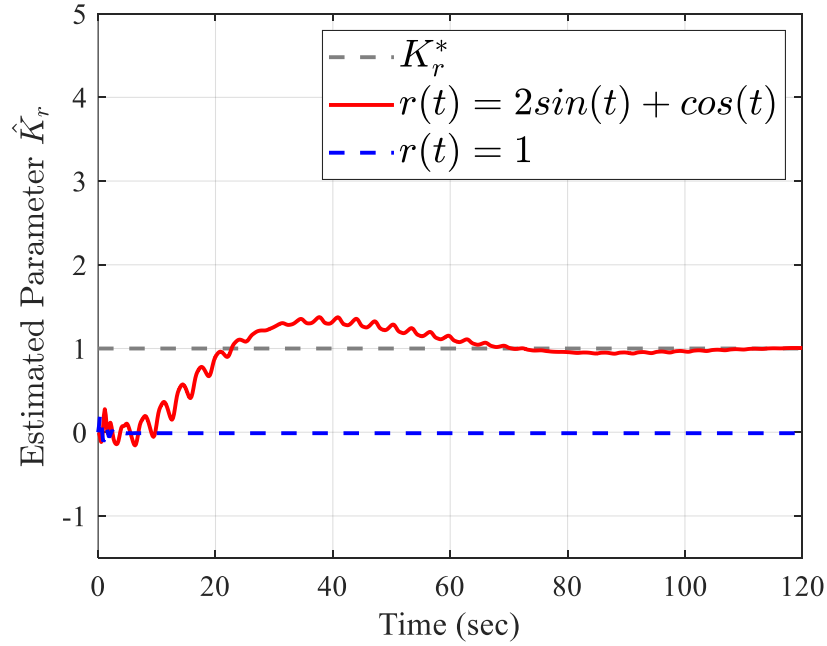


圖 14、不同參考指令下，控制器參數估測之時間響應

綜合上面的模擬結果和推論，可以得知使用較為複雜的輸入指令能夠得到正確的參數估測，使參數估測誤差趨近於零。但因不論輸入指令的形式為何，此系統皆在參考模式適應性控制的方法下完成設計，故系統追蹤誤差皆能夠收斂至零，達到追蹤參考模式的效果。故系統追蹤誤差和參數估測誤差能夠達成同時趨近於零的結果。

MATLAB Code

Question 3

```
clc;
clear;
close all;

%%
ap=1; bp=2; cp=-1;
gamma1=10; gamma2=10; gamma3=10;
dt=0.001;
t_final=120;
t=0:dt:10;
LW=1.8;
FS=14;
FS_lg=18;
%%
y0=0; ym0=0; Ky_ini=0; Kf_ini=0; Kr_ini=0;
Y0=[y0; ym0; Ky_ini; Kf_ini; Kr_ini];

%%
[t1, Yt1]=RK4( @(t,Y0) nonlinear_system_1(t,Y0,ap,bp,cp,gamma1,gamma2,gamma3) , [0
t_final], Y0,dt) ;
[t2, Yt2]=RK4( @(t,Y0) nonlinear_system_2(t,Y0,ap,bp,cp,gamma1,gamma2,gamma3) , [0
t_final], Y0,dt) ;
Yt1=Yt1';
Yt2=Yt2';

for i =1:length(t1)
    [dY1(:,i) , uc1(i) , r1(i) ] = nonlinear_system_1(t1(i),
Yt1(:,i),ap,bp,cp,gamma1,gamma2,gamma3) ;
end

for i =1:length(t2)
    [dY2(:,i) , uc2(i) , r2(i) ] = nonlinear_system_2(t2(i),
Yt2(:,i),ap,bp,cp,gamma1,gamma2,gamma3) ;
end

%% Figure 1 System Output vs Reference Model Output (r=1)
f1=figure;
plot(t1,Yt1(1,:), 'r', 'LineWidth',LW);
hold on
plot(t1,Yt1(2,:), 'b', 'LineWidth',LW);
hs(1)=legend({'$y(t)$', '$y_m(t)$'}, 'Interpreter', 'latex');
ax(1) = gca ;
xlabel('Time (sec)')
```

```

ylabel('Output Time Response','Interpreter','Latex')
xlim([0 t_final])
ylim([0 1])
axis normal
grid on

%% Figure 2 Tracking Error Output (r=1)
f2 = figure;
plot(t1,Yt1(1,:)-Yt1(2,:), 'r','LineWidth',LW);
hold on
ax(2) = gca;
xlabel('Time (sec)')
ylabel('Output Tracking Error  $e(t)$ ','Interpreter','Latex')
xlim([0 t_final])
ylim([-0.1 0.1])
axis normal
grid on

%% Figure 3 System Output vs Reference Model Output (r=2sint+cost)
f3=figure;
plot(t2,Yt2(1,:), 'r','LineWidth',LW);
hold on
plot(t2,Yt2(2,:), 'b','LineWidth',LW);
hs(2)=legend({' $y(t)$ ',' $y_m(t)$ '},'Interpreter','latex');
ax(3) = gca ;
xlabel('Time (sec)')
ylabel('Output Time Response','Interpreter','Latex')
xlim([0 t_final])
ylim([-2 2])
axis normal
grid on

%% Figure 4 Tracking Error Output (r=2sint+cost)
f4 = figure;
plot(t2,Yt2(1,:)-Yt2(2,:), 'r','LineWidth',LW);
hold on
ax(4) = gca;
xlabel('Time (sec)')
ylabel('Output Tracking Error  $e(t)$ ','Interpreter','Latex')
xlim([0 t_final])
ylim([-0.3 0.3])
axis normal
grid on

%% Figure 5 Tracking Error Comparison
f5=figure;

```

```

plot(t1,Yt1(1,:)-Yt1(2,:), 'r','LineWidth',LW);
hold on
plot(t2,Yt2(1,:)-Yt2(2,:), 'b-','LineWidth',LW);
ax(5)=gca;
hs(3)=legend({'$r(t)=1$', '$r(t)=2\sin(t)+\cos(t)$'}, 'Interpreter','latex');
xlabel('Time (sec)')
ylabel('Output Tracking Error $e(t)$', 'Interpreter','Latex')
xlim([0 t_final])
ylim([-0.3 0.3])
axis normal
grid on

%% Figure 6 Control Input (r=1)
f6=figure;
plot(t1, uc1, 'r', 'LineWidth',LW)
ax(6)=gca;
xlabel('Time (sec)')
ylabel('Control Input $u(t)$', 'Interpreter','Latex')
xlim([0 t_final])
ylim([-0.3 0.5])
axis normal
grid on

%% Figure 7 Control Input (r=2sint+cost)
f7=figure;
plot(t1, uc2, 'r', 'LineWidth',LW)
ax(7)=gca;
xlabel('Time (sec)')
ylabel('Control Input $u(t)$', 'Interpreter','Latex')
xlim([0 t_final])
ylim([-2 1.5])
axis normal
grid on

%% Figure 8 Ky (r=1)
f8 = figure;
plot(t1,Yt1(3,:), 'r','LineWidth',LW);
hold on
plot(t1,(ap-3)/bp*ones(length(t1),1), 'b--','LineWidth',LW)
hs(4)=legend({'$\hat{K}_y(t)$', '$K_y^{*}(t)$'}, 'Interpreter','latex');
ax(8) = gca ;
title('r(t)=1', 'Interpreter','Latex')
xlabel('Time (sec)')
ylabel('Estimated Parameter $K_y$', 'Interpreter','Latex')
axis([0 t_final -2 1])
axis normal

```



```

grid on

%% Figure 9 Kf (r=1)
f9=figure;
plot(t1,Yt1(4,:), 'r','LineWidth',LW)
hold on
plot(t1,cp/bp*ones(length(t1),1), 'b--','LineWidth',LW)
hs(5)=legend({'$\hat{K}_f(t)$','$K_f^{*}(t)$'}, 'Interpreter', 'latex');
ax(9) = gca ;
title('r(t)=1', 'Interpreter', 'Latex')
xlabel('Time (sec)')
ylabel('Estimated Parameter $K_f$', 'Interpreter', 'Latex')
axis([0 t_final -1 0.5])
axis normal
grid on

%% Figure 10 Kr (r=1)
f10 = figure ;
plot(t1,Yt1(5,:), 'r','LineWidth',LW);
hold on;
plot(t1,2/bp*ones(length(t1),1), 'b--','LineWidth',LW)
hs(6)=legend({'$\hat{K}_r(t)$','$K_r^{*}(t)$'}, 'Interpreter', 'latex');
ax(10) = gca ;
title('r(t)=1', 'Interpreter', 'Latex')
xlabel('Time (sec)')
ylabel('Estimated Parameter $K_r$', 'Interpreter', 'Latex')
axis([0 t_final -0.5 2])
axis normal
grid on

%% Figure 11 Ky (r=2sint+cost)
f11 = figure;
plot(t2,Yt2(3,:), 'r','LineWidth',LW);
hold on
plot(t2,(ap-3)/bp*ones(length(t2),1), 'b--','LineWidth',LW)
hs(7)=legend({'$\hat{K}_y(t)$','$K_y^{*}(t)$'}, 'Interpreter', 'latex');
ax(11) = gca ;
title('r(t)=2sin(t)+cos(t)', 'Interpreter', 'Latex')
xlabel('Time (sec)')
ylabel('Estimated Parameter $K_y$', 'Interpreter', 'Latex')
axis([0 t_final -2 0.5])
axis normal
grid on

%% Figure 12 Kf (r=2sint+cost)
f12 = figure;
plot(t2,Yt2(4,:), 'r','LineWidth',LW);

```

```

hold on
plot(t2,cp/bp*ones(length(t2),1),'b--','LineWidth',LW)
hs(8)=legend({'$\hat{K}_f(t)$','$K_f^{*}(t)$'},'Interpreter','latex');
ax(12) = gca ;
title('r(t)=2sin(t)+cos(t)','Interpreter','Latex')
xlabel('Time (sec)')
ylabel('Estimated Parameter $K_f$','Interpreter','Latex')
axis([0 t_final -1.5 0.5])
axis normal
grid on
%% Figure 13 Kr (r=2sint+cost)
f13 = figure;
plot(t2,Yt2(5,:), 'r','LineWidth',LW);
hold on
plot(t2,2/bp*ones(length(t2),1),'b--','LineWidth',LW)
hs(9)=legend({'$\hat{K}_r(t)$','$K_r^{*}(t)$'},'Interpreter','latex');
ax(13) = gca ;
title('r(t)=2sin(t)+cos(t)','Interpreter','Latex')
xlabel('Time (sec)')
ylabel('Estimated Parameter $K_r$','Interpreter','Latex')
axis([0 t_final -1.5 5])
axis normal
grid on
%% Figure 14 Compare Ky
f14=figure;
plot(t1,(ap-3)/bp*ones(length(t1),1),'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW); hold on ;
plot(t2,Yt2(3,:), 'r','LineWidth',LW) ;
plot(t1,Yt1(3,:), 'b--','LineWidth',LW) ;
hs(10)=legend({'$K^*_y$', '$r(t) = 2sin(t)+cos(t)$', '$r(t) = 1$'},'Interpreter','latex');
ax(14) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('Estimated Parameter $\hat{K}_y$','Interpreter','Latex') % y label
axis([0 t_final -2 0.5])
axis normal
grid on
%% Figure 15 Compare Kf
f15 = figure ;
plot(t1,cp/bp*ones(length(t1),1),'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW); hold on ;
plot(t2,Yt2(4,:), 'r','LineWidth',LW) ;
plot(t1,Yt1(4,:), 'b--','LineWidth',LW) ;
hs(11)=legend({'$K^*_f$', '$r(t) = 2sin(t)+cos(t)$', '$r(t) = 1$'},'Interpreter','latex');
ax(15) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('Estimated Parameter $\hat{K}_f$','Interpreter','Latex') % y label
axis([0 t_final -1.5 0.5])
axis normal

```

```

grid on

%% Figure 16 Compare Kr
f16 = figure ;
plot(t1,2/bp*ones(length(t1),1),'--','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',LW); hold on ;
plot(t2,Yt2(5,:),'r','LineWidth',LW) ;
plot(t1,Yt1(5,:),'b--','LineWidth',LW) ;
hs(12)=legend({'$K^*_r$','$r(t) = 2\sin(t)+\cos(t)$','$r(t) = 1$'},'Interpreter','latex');
ax(16) = gca ;
xlabel('Time (sec)') % x label
ylabel('Estimated Parameter $\hat{K}_r$', 'Interpreter','Latex') % y label
axis([0 t_final -1.5 5])
axis normal
grid on

%%
for i = 1:length(ax)
    set(ax(i),'FontSize',FS,'FontName','Times New Roman')
end

for i = 1:length(hs)
    set(hs(i),'FontSize',FS_lg,'FontName','Times New Roman')
end

%% Nonlinear Equation
function [dY, u, r]=nonlinear_system_1(t,Y0,ap,bp,cp,gamma1,gamma2,gamma3)
y=Y0(1);
ym=Y0(2);
Ky_est=Y0(3);
Kf_est=Y0(4);
Kr_est=Y0(5);

% Input
r=1; % Reference Command
e=y-ym;
u=Ky_est*y+Kf_est*cos(y)+Kr_est*r;
dKy=-sign(bp)*e*y*gamma1;
dKf=-sign(bp)*e*cos(y)*gamma2;
dKr=-sign(bp)*e*r*gamma3;

% Nonlinear System
dy=bp*u-ap*y-cp*cos(y);

% Reference Model
dym=2*r-3*ym;

dY=[dy;dym;dKy;dKf;dKr];

```

end

```
function [dY, u, r]=nonlinear_system_2(t,Y0,ap,bp,cp,gamma1,gamma2,gamma3)
y=Y0(1);
ym=Y0(2);
Ky_est=Y0(3);
Kf_est=Y0(4);
Kr_est=Y0(5);

%r=2*sin(t)+cos(t); % Reference Command
r=sin(t);
e=y-ym;
u=Ky_est*y+Kf_est*cos(y)+Kr_est*r;
dKy=-sign(bp)*e*y*gamma1;
dKf=-sign(bp)*e*cos(y)*gamma2;
dKr=-sign(bp)*e*r*gamma3;

% Nonlinear System
dy=bp*u-ap*y-cp*cos(y);

% Reference Model
dym=2*r-3*ym;

dY=[dy;dym;dKy;dKf;dKr];
end
```