



國立成功大學  
National Cheng Kung University

*National Cheng Kung University*

*Department of Aeronautics and Astronautics*

---

## 非線性控制第四章作業

---

*Author:*

Chen, Guan-Shiun ( 陳冠勳 )

*Supervisor:*

Prof Yang

*Student ID No.:*

P18091026

An Assignment submitted for the NCKU:

【P4-065】非線性控制

November 4, 2020

## Contents

<b>1</b>	<b>Problem Statement</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Answer to Problem 4.1</b>	<b>5</b>
2.1	Answer to Problem 4.1 (a) . . . . .	5
2.2	Answer to Problem 4.1 (b) . . . . .	7
2.3	Answer to Problem 4.1 (c) . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Answer to Problem 4.2</b>	<b>18</b>
3.1	Answer to Problem 4.2 (a) . . . . .	19
3.2	Answer to Problem 4.2 (b) . . . . .	21
3.3	Answer to Problem 4.2 (c) . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Answer to Problem 4.3</b>	<b>38</b>
4.1	Answer to Problem 4.3 (a) . . . . .	38
4.2	Answer to Problem 4.3 (b) . . . . .	38
4.3	Answer to Problem 4.3 (c) . . . . .	39
4.4	Answer to Problem 4.3 (d) . . . . .	49
<b>A</b>	<b>Appendix : Code for Problem 4.1</b>	<b>52</b>

<b>B Appendix : Code for Problem 4.2</b>	<b>55</b>
<b>C Appendix : Code for Problem 4.3</b>	<b>63</b>
<b>Reference</b>	<b>68</b>

## 1. Problem Statement

4.1 利用 Lyapunov 直接定理分析下列非線性方程式在原點處之穩定性：

$$\dot{x}_1 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) \quad (1a)$$

$$\dot{x}_2 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) \quad (1b)$$

- (a) 採用 Lyapunov 函數  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ ，求出滿足  $\dot{V} < 0$  的  $(x_1, x_2)$  收斂範圍。
- (b) 在此範圍內選3個初始點，用Matlab畫出相平面軌跡確認穩定性的預測。同時在確保穩定的範圍之外也任選3個初始點，是否由這些點出發的軌跡都為不穩定？解釋其原因。
- (c) 不同  $V(x)$  函數所對應的收斂範圍均不同，最精確的收斂範圍必須由 (1a)–(1b) 式本身決定。透過座標轉換  $(x_1, x_2) \rightarrow (r, \theta)$ ，求得使得  $\dot{r} < 0$  的  $r$  範圍，比較由 (a) 以條件  $\dot{V} < 0$  所得到的範圍有何不同？

4.2 利用可變梯度法求下列非線性系統的 Lyapunov 函數  $V$

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^2x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_2 \quad (2)$$

假設  $V$  的梯度可表成

$$\nabla V = [a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \quad a_{21}x_1 + 2x_2] \quad (3)$$

不同的係數  $a_{ij}$  可得到不同的 Lyapunov 函數  $V$ 。考慮下列二種不同的  $a_{ij}$  選擇，分別求得對應的 Lyapunov 函數  $V$ ，並求出其可確保穩定的區域範圍：

- (a)  $a_{11} = 1, a_{21} = a_{12} = 0$
- (b)  $a_{11} = \frac{2}{(1-x_1x_2)^2}, a_{12} = \frac{-x_1^2}{(1-x_1x_2)^2}, a_{21} = \frac{x_1^2}{(1-x_1x_2)^2}$
- (c) 系統 (2) 可穩定的範圍是以上二個範圍的交集或聯集？在保證穩定的範圍內選幾個初始點，以 Matlab 求解 (2) 式，證實平衡點為穩定；在穩定範圍之外也選幾個初始點，Matlab 求解所得之相平面軌跡是否必為發散？

### 4.3 考慮一個二階非線性系統

$$\dot{x}_1 = -\frac{6x_1}{(1+x_1^2)^2} + 2x_2, \quad \dot{x}_2 = \frac{-2(x_1+x_2)}{(1+x_1^2)^2} \quad (4)$$

本題是要測試 (4) 式相對於原點是否為全域穩定。

- (a) 若取  $V(x) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2$ ，證明  $V(x) > 0$ ， $\dot{V}(x) < 0$ ， $\forall x \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ 。亦即原點為漸近穩定。
- (b) 測試  $V(x)$  是否滿足 radially unbounded 條件(參考講義4.4節)? 也就是當  $x$  離原點無窮遠時， $V(x)$  的值是否也必定趨近於無窮大?
- (c) 畫出  $V(x)$  的等高線圖(令  $V(x) =$  不同的常數值，從大排到小，取約 10 個數值)，並以此等高線圖為背景，畫出該系統的相平面軌跡。證明從某些點出發的相平面軌跡，其切割等高線圖的方式雖然滿足  $\dot{V}(x) < 0$  的條件，然而這些軌跡最後卻不進入平衡點，亦即此系統不為全域漸近穩定(參照講義的圖4.4.2)。從數值上求出該系統可保證漸近穩定的初始值範圍。
- (d) 證明實際上 (4) 式的平衡點有2個：(1)  $x_1 + 1 = x_2 = 0$  (2)  $x_1 = \pm\infty, x_2 = 0$ 。因此原點並非全域穩定。確認在 (c) 的 10 條軌跡中，應該有些軌跡趨近於原點，即平衡點 (1)，另外有一些軌跡則趨近於平衡點 (2)。

## 2. Answer to Problem 4.1

### 2.1. Answer to Problem 4.1 (a)

考慮一個自治(autonomous)/非時變(time-invariant)系統

$$\dot{x} = f(x) \quad (5)$$

其中  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  為一個局部 Lipschitz 函數且  $D$  為一個包含平衡點  $x = 0$  的域(domain)/開連通集合(open and connected set)。Lyapunov 直接定理說明了若存在一個連續可微分(continuously differentiable)函數  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  使得系統滿足

$$V(0) = 0 \quad \text{且} \quad V(x) > 0, \quad \forall x \in D - \{0\} \quad (6)$$

$$\dot{V}(x) \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \dot{x}_i \leq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \text{ \& } x \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \quad (7)$$

則系統平衡點/原點為 Lyapunov 穩定(stable in the sense of Lyapunov)；若系統進一步滿足

$$\dot{V}(x) < 0, \quad \forall x \in D - \{0\}, \quad (8)$$

則系統平衡點為漸進穩定(asymptotically stable)。根據此定理，針對

題目給定之系統

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ \dot{x}_2 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1), \end{cases} \quad (9)$$

若吾人選擇 Lyapunov 候選函數(candidate)  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ ，由於此函數為一個二次式形式，吾人首先可輕易確認函數  $V(x)$  的正定性。再者，吾人亦可輕鬆計算出  $V(x)$  沿著系統 (9) 軌跡之時間導數  $\dot{V}(x)$  為

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} \dot{x}_2 = 2(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 1), \quad (10)$$

$\forall x \in D$ 。倘若進一步分析 (10)，吾人可知由於對於所有  $x \in D - \{0\}$  皆有  $2(x_1^2 + x_2^2) > 0$ ；因此若 (10) 需滿足  $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in D - \{0\}$ ，則系統狀態  $x = (x_1, x_2)$  須滿足

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 < 0, \quad (11)$$

$\forall x \in D - \{0\}$ ，此時選定之 Lyapunov 函數滿足  $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in D - \{0\}$ 。意即當系統初始狀態  $x(t_0) = (x_1(t_0), x_2(t_0)) \in D = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$  (落在單位圓內)，吾人可根據 Lyapunov 直接定理得到系統平衡點  $x = 0$  為漸進穩定。

## 2.2. Answer to Problem 4.1 (b)

透過 4.1 (a) 的分析，吾人得知對於系統 (4) 而言倘若選定一連續可微分函數  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$  作為此系統的 Lyapunov 函數，透過上述的分析吾人可以透過 Lyapunov 直接穩定定理保證當系統初始條件落於  $x_1^2 + x_2^2 < 1$  (意即單位圓) 之區域內時會使得系統的原點為一個漸進穩定的平衡點，意即滿足  $V(0) = 0, V(x) > 0, \forall x \in D - \{0\}$  及  $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in D - \{0\}$ 。

然而，Lyapunov 直接穩定定理僅僅是一個充分條件，當選定不同的 Lyapunov 函數時亦可能對應到不同的收斂區間；換句話說，透過上述的分析，吾人無法得到“當初始條件  $x(t_0) = (x_1(t_0), x_2(t_0))$  落在  $\mathbb{R} - D$  時系統狀態  $(x_1, x_2)$  將會發散”此一結論。

為了驗證 4.1 (a) 之結果，在 Matlab 模擬階段有了以下分析

- (i) 當系統初始條件落於  $x_1^2 + x_2^2 < 1$  (意即單位圓) 之區域內時，透過上述分析得知系統的原點為一個漸進穩定的平衡點。倘若進一步



求得系統 (4) 在原點之Jacobian matrix

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x=0} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x=0} \\ &= \begin{bmatrix} -1 + 3x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 & 1 + 2x_1x_2 - x_1^2 - 3x_2^2 \\ -1 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1x_2 & -1 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + x_1^2 + 3x_2 \end{bmatrix}_{x=0} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

可得其特徵值為  $-2 \pm j$ ，故系統的平衡點  $x = 0$  為一穩定焦點。

為了看清初始狀態對於此系統的影響，吾人選定四組初始狀態

第幾組	初始狀態	第幾組	初始狀態
$(x_1^1(0), x_2^1(0))$	$(0.65, 0.65)$	$(x_1^2(0), x_2^2(0))$	$(-0.65, 0.65)$
$(x_1^3(0), x_2^3(0))$	$(-0.65, -0.65)$	$(x_1^4(0), x_2^4(0))$	$(0.65, -0.65)$

此時系統相平面軌跡可由圖 1 表示，藍色實線為系統相平面軌跡，箭頭表示系統軌跡行進方向，從圖中吾人可以發現系統相平面軌跡會以旋轉的方式逐漸進入原點，意即系統原點為一穩定焦點。

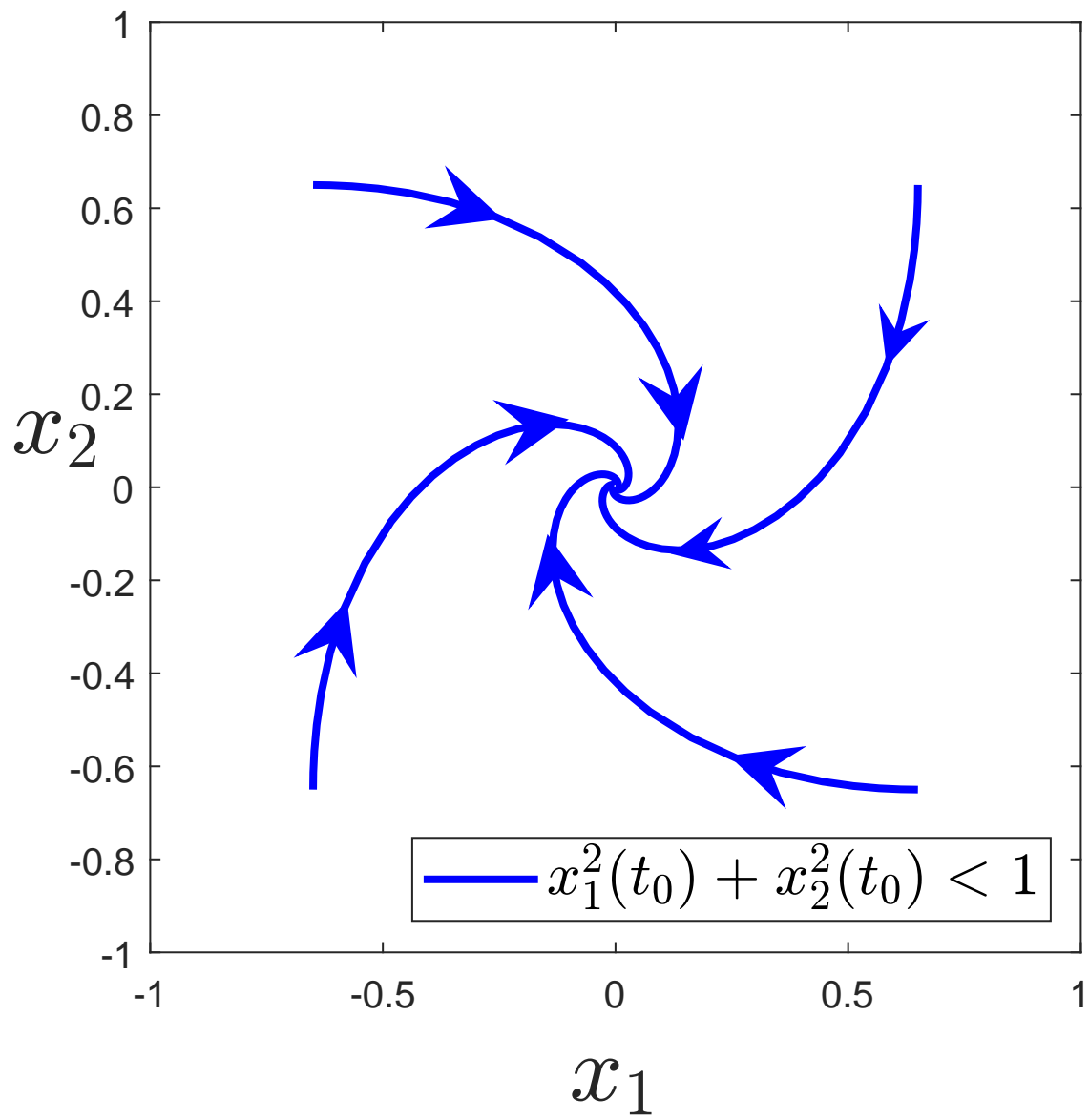


Figure 1: 系統相平面軌：當系統初始狀態滿足  $x_1^2(t_0) + x_2^2(t_0) < 1$

(ii) 當系統初始條件落於  $x_1^2 + x_2^2 > 1$  (意即單位圓外) 時，透過前述之

Lyapunov 直接穩定定理分析吾人雖然無法判斷此時系統狀態是否

會收斂或是發散，然而透過在 Matlab 模擬階段當吾人選擇16組

位於單位圓外且足夠靠近單位圓的初始狀態，此時系統相平面軌

跡可由圖 2 表示，黑色實線為系統相平面軌跡，吾人發現此時系

統軌跡將以旋轉方式向外發散，類似系統不穩定焦點的系統軌跡

狀態。

第幾組	初始狀態	第幾組	初始狀態
$(x_1^{13}(0), x_2^{13}(0))$	$(1, 0.1)$	$(x_1^{14}(0), x_2^{14}(0))$	$(-1, 0.1)$
$(x_1^{15}(0), x_2^{15}(0))$	$(-1, -0.1)$	$(x_1^{16}(0), x_2^{16}(0))$	$(1, -0.1)$
$(x_1^{18}(0), x_2^{17}(0))$	$(0.1, 1)$	$(x_1^{18}(0), x_2^{18}(0))$	$(-0.1, 1)$
$(x_1^{19}(0), x_2^{19}(0))$	$(-0.1, -1)$	$(x_1^{20}(0), x_2^{20}(0))$	$(0.1, -1)$
$(x_1^{21}(0), x_2^{21}(0))$	$(\sqrt{\frac{1}{2}} + 0.1, \sqrt{\frac{1}{2}})$	$(x_1^{22}(0), x_2^{22}(0))$	$(-\sqrt{\frac{1}{2}} - 0.1, \sqrt{\frac{1}{2}})$
$(x_1^{23}(0), x_2^{21}(0))$	$(-\sqrt{\frac{1}{2}} - 0.1, -\sqrt{\frac{1}{2}})$	$(x_1^{24}(0), x_2^{24}(0))$	$(\sqrt{\frac{1}{2}} - 0.1, \sqrt{\frac{1}{2}})$
$(x_1^{25}(0), x_2^{25}(0))$	$(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}} + 0.1)$	$(x_1^{26}(0), x_2^{26}(0))$	$(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}} + 0.1)$
$(x_1^{27}(0), x_2^{27}(0))$	$(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}} - 0.1)$	$(x_1^{28}(0), x_2^{28}(0))$	$(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}} - 0.1)$

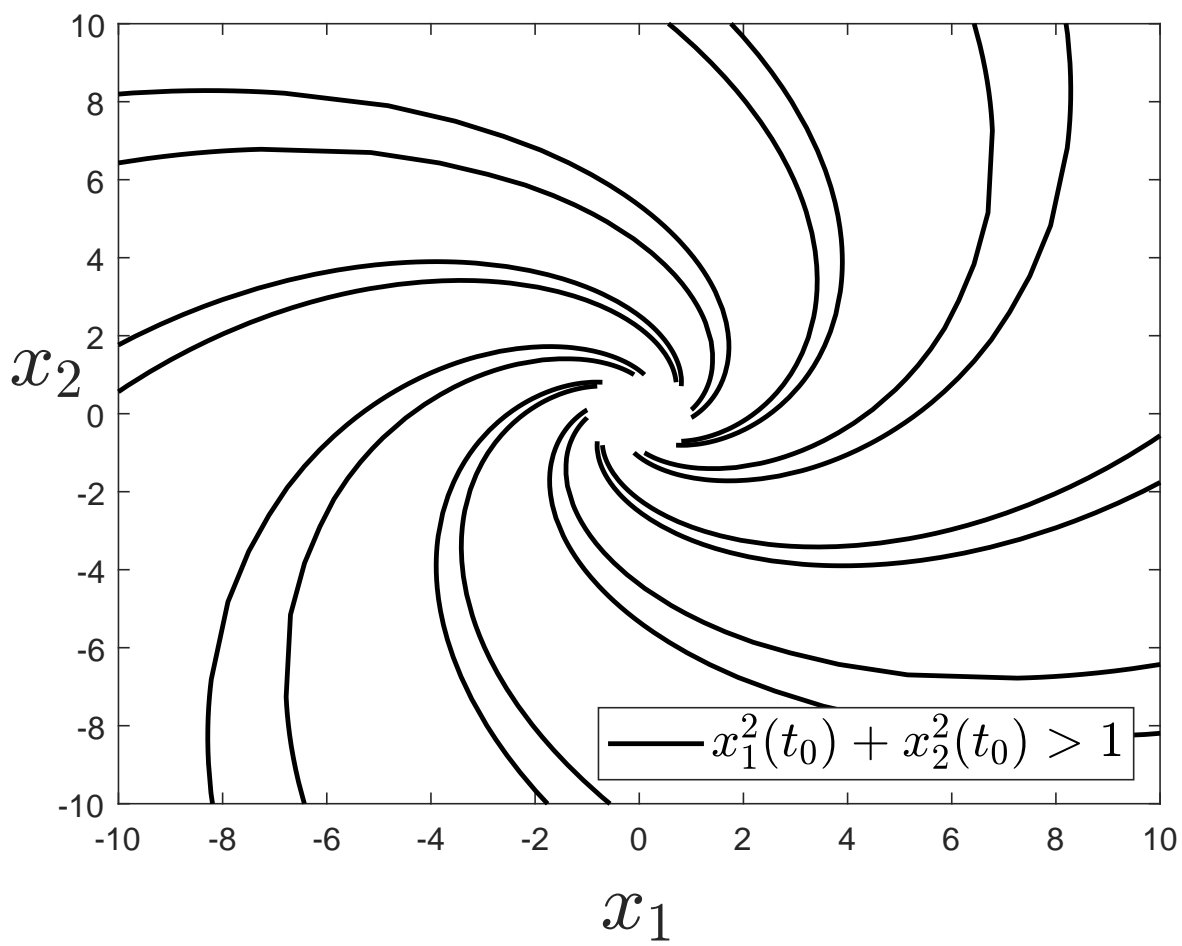


Figure 2: 系統相平面軌：當系統初始狀態滿足  $x_1^2(t_0) + x_2^2(t_0) > 1$

(iii) 當系統初始條件落於  $x_1^2 + x_2^2 = 1$  (意即單位圓上) 時，透過前述之 Lyapunov 直接穩定定理分析吾人無法判斷此時系統狀態是否會收斂或是發散；因此在 Matlab 模擬階段當吾人選擇8組位於單位圓上的初始狀態，此時系統相平面軌跡可由圖 3 表示，紅色星號為系統相平面軌跡，意即系統軌跡不會移動從而始終落於初始狀態那一點上。爲了進一步檢驗此結果與理論是否違背，透過分析系統 (4)，吾人發現當系統初始狀態落於單位圓上(意即系統初始狀態滿足  $x_1^2(t_0) + x_2^2(t_0) = 1$ )時，恆有  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ ，也就是說所有位於單位圓上的點皆是此系統的平衡點。

第幾組	初始狀態	第幾組	初始狀態
$(x_1^5(0), x_2^5(0))$	$(1, 0)$	$(x_1^6(0), x_2^6(0))$	$(0, 1)$
$(x_1^7(0), x_2^7(0))$	$(-1, 0)$	$(x_1^8(0), x_2^8(0))$	$(0, -1)$
$(x_1^9(0), x_2^9(0))$	$(\sqrt{0.5}, \sqrt{0.5})$	$(x_1^{10}(0), x_2^{10}(0))$	$(-\sqrt{0.5}, \sqrt{0.5})$
$(x_1^{11}(0), x_2^{11}(0))$	$(-\sqrt{0.5}, -\sqrt{0.5})$	$(x_1^{12}(0), x_2^{12}(0))$	$(-\sqrt{0.5}, \sqrt{0.5})$

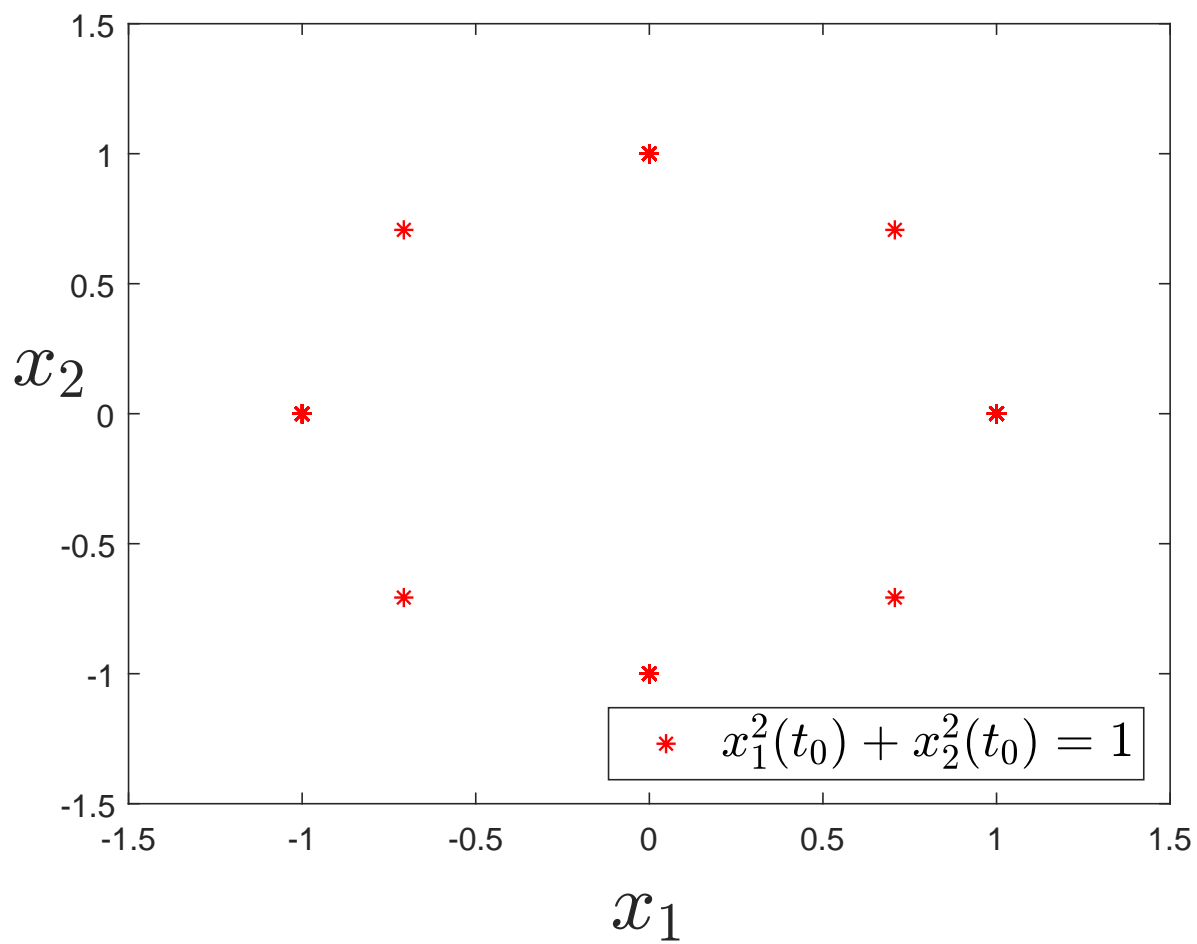


Figure 3: 系統相平面軌：當系統初始狀態滿足  $x_1^2(t_0) + x_2^2(t_0) = 1$

透過上述 (i)–(iii) 之分析，吾人透過 Matlab 模擬驗證了  $x_1 + x_2 < 1$  為系統 (4) 收斂到平衡點  $x = 0$  的最大收斂空間(紅色虛線內)；然而吾人發現位於單位圓上的點亦為系統的平衡點，且透過 (i)，(ii) 的分析可知這些平衡點皆為不穩定的平衡點，其原因在於當吾人選定稍離這些平衡點一點的初始狀態時皆有收斂到原點或是發散至無窮大的情況。此一現象亦可從圖 4 中顯見判斷。

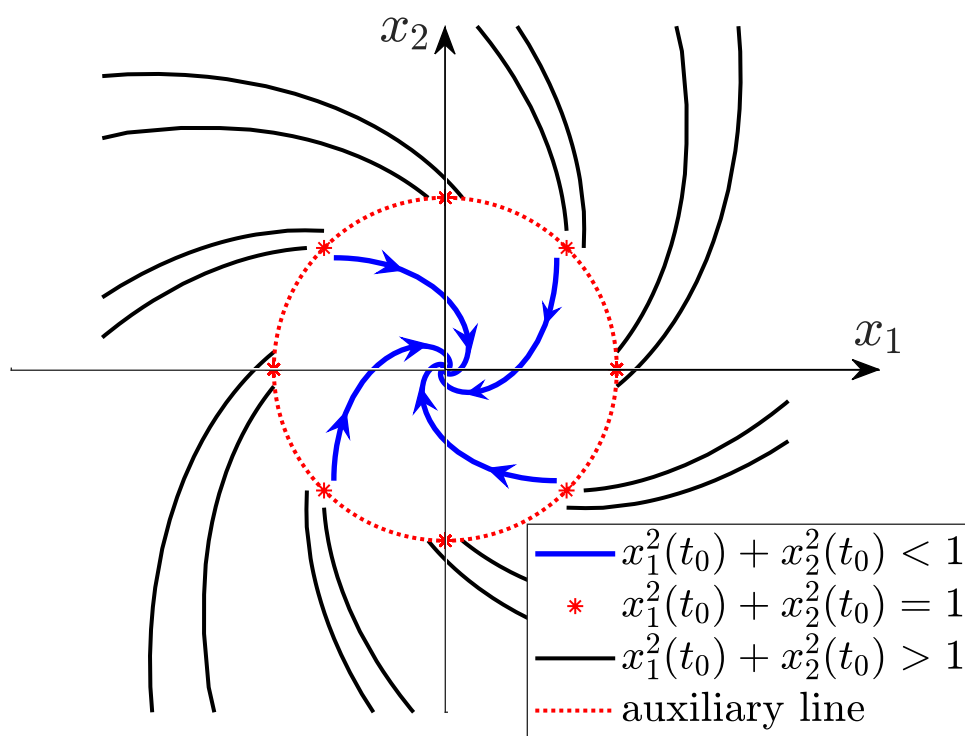


Figure 4: 系統相平面軌：當系統初始狀態滿足  $x_1^2(t_0) + x_2^2(t_0) < 1$

### 2.3. Answer to Problem 4.1 (c)

透過前面兩題的分析，吾人得知雖然可以藉由 Lyapunov 直接穩定定理判斷系統原點為漸進穩定平衡點的最大收斂區間，然而收斂區間極大的受到所選定之 Lyapunov 函數影響，且收斂區域之外的系統狀態軌跡無法透過 Lyapunov 直接穩定定理得到確切結論；**最真實的系統狀態軌跡特性應該由系統本身決定**，因此本題之目的為利用極座標判斷系統特性；為了此目的，令  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ,  $\tan \theta = x_2/x_1$ ，則有

$x_1 = r \cos \theta$ ,  $x_2 = r \sin \theta$  以及

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) = r(\cos \theta - \sin \theta)(r^2 - 1) \\ \dot{x}_2 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) = r(\cos \theta + \sin \theta)(r^2 - 1) \end{cases} \quad (12)$$



可推論出

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \frac{d}{dt} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\
&= \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{1}{2}} \times (2x_1 \times \dot{x}_1 + 2x_2 \times \dot{x}_2) \\
&= \frac{1}{2} r^{-1} \times \left( 2r \cos \theta \times r(\cos \theta - \sin \theta)(r^2 - 1) \right. \\
&\quad \left. + 2r \sin \theta \times r(\cos \theta + \sin \theta)(r^2 - 1) \right) \\
&= r(r^2 - 1)
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} &= \frac{d}{dt} \left\{ \arctan \frac{x_2}{x_1} \right\} \\
&= \frac{1}{1 + \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^2} \times \left( \frac{x_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2}{x_1^2} \right) = \frac{x_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2}{r^2} \\
&= \frac{r \cos \theta \times r(\cos \theta + \sin \theta)(r^2 - 1) - r \sin \theta \times r(\cos \theta - \sin \theta)(r^2 - 1)}{r^2} \\
&= \frac{r^2(r^2 - 1)}{r^2} = r^2 - 1
\end{aligned}$$

因此吾人可將原微分方程改成由極座標表示如下

$$\begin{cases} \dot{r} = r(r^2 - 1) \\ \dot{\theta} = r^2 - 1 \end{cases} \quad (13)$$

(13) 為典型的 Bernouli's equation，倘若進一步求解  $r(t)$ ，將方程式兩端同乘  $r^{-3}$ ，可得  $r^{-3}\dot{r} = 1 - r^{-2}$ ；令  $u(t) = r^{-2}$ ，則  $\dot{u} = -2r^{-3} \cdot \dot{r}$ ，代回可得  $\dot{u} - 2u = -2$ ，透過分離變數法求解此經過變數變換之微分方程並帶入初始狀態  $(r(t_0), t_0) = (r_0, 0)$ ，最終可得

$$r(t) = \sqrt{\frac{1}{1 + C_0 \cdot e^{2t}}}, \quad C_0 = \frac{1}{r_0^2} - 1 \quad (14)$$

透過分析 (13)，吾人可以知道

(i) 當初始狀態  $0 < r_0 < 1$  時，可得到  $\dot{r} < 0$ ，此時  $r$  會逐漸下降，

系統軌跡將朝原點前進，當  $r = 0$  時系統將進入穩定焦點  $x = 0$ 。

(ii) 當初始狀態  $r_0 > 1$  時，可得到  $\dot{r} > 0$ ，此時  $r$  會逐漸上升，此時

系統軌跡將離開單位圓進一步發散。

(iii) 當初始狀態從單位圓出發 ( $r_0 = 1$ )，吾人可得此時  $\dot{r} = 0$ ，系統軌

跡將駐在原地不運動，其原因在於此時皆有  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ 。

從上述分析，吾人可推斷出此微分方程擁有一個“漸進穩定”的平衡

點  $x = 0$ ，從系統解析解亦可驗證此一現象，此時系統收斂區間為

$0 < r(t_0) = \sqrt{x_1^2(t_0) + x_2^2(t_0)} < 1$ ，與 4.1 (a) 藉由 Lyapunov 直接穩定

定理得到的答案相同。

### 3. Answer to Problem 4.2

可變梯度法為一種架構在 Lyapunov 直接穩定定理下選擇 Lyapunov 函數的方法，其核心精神在於透過調變 Lyapunov 函數梯度進而找到一個使得系統穩定的 Lyapunov 函數。若考慮一個非時變系統  $\dot{x} = f(x)$ ，吾人先假設對於此系統存在一個 Lyapunov 函數  $V : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  使得其時間導數滿足

$$\dot{V} \equiv (\nabla V)\dot{x} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} \quad (15)$$

其中  $\nabla V = \begin{bmatrix} \nabla V_1 & \cdots & \nabla V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix}$  表示 Lyapunov 函數之梯度，且存在  $a_{ij}$  使得  $\nabla V$  每一分量  $\nabla V_i$  滿足

$$\nabla V_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (16)$$

其中  $a_{ij}$  可為常數亦可為  $x_j$  之函數。吾人之目的為藉由調整  $a_{ij}$  進一步影響梯度進而使得系統 Lyapunov 函數滿足

$$(i) \ V(0) = 0, \ V(x) > 0, \ \forall x \in D - \{0\}$$

$$(ii) \dot{V} < 0, \forall x \in D - \{0\}$$

$$(iii) \nabla \times \nabla V = 0 \implies \frac{\partial(\nabla V_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial(\nabla V_j)}{\partial x_i}, i = 1, 2, \dots, n$$

若上述皆滿足，則可藉由積分求得 系統 Lyapunov 函數為

$$\begin{aligned} V(x) = & \int_0^{x_1^0} \nabla V_1(x_1, 0, \dots, 0) dx_1 + \int_0^{x_2^0} \nabla V_2(x_1^0, x_2, 0, \dots, 0) dx_2 \\ & + \dots + \int_0^{x_n^0} \nabla V_n(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{n-1}^0, x_n) dx_n \end{aligned} \quad (17)$$

### 3.1. Answer to Problem 4.2 (a)

針對系統 (2)，倘若系統梯度函數選擇為  $\nabla V = [a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \quad a_{21}x_1 + 2x_2]$ ，其中  $a_{11} = 1, a_{12} = a_{21} = 0$ ，此時吾人可以重寫梯度函數為

$$\nabla V = [x_1 \quad 2x_2] \quad (18)$$

為檢驗此梯度函數選擇是否合理，吾人首先必須檢測此梯度函數的旋度是否為零，亦即  $\partial(\nabla V_1)/\partial x_2$  必須等於  $\partial(\nabla V_2)/\partial x_1$ ，因此有了以下計算

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\nabla V_1)}{\partial x_2} = \frac{\partial x_1}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial(\nabla V_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial 2x_2}{\partial x_1} = 0 \end{array} \right. \quad (19)$$

透過上述分析吾人確保了梯度函數選擇的合理性，此時吾人可進一步求得系統 Lyapunov 候選函數的時間導數為

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\equiv (\nabla V)\dot{x} = \begin{bmatrix} x_1 & 2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & 2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 + 2x_1^2x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix} \\
&= -x_1^2 + 2x_1^3x_2 - 2x_2^2 \\
&= -x_1^2(1 - 2x_1x_2) - 2x_2^2 \tag{20}
\end{aligned}$$

分析 (20) 吾人可知當將  $x_1, x_2$  限制在  $1 - 2x_1x_2 > 0$  範圍時，可保證  $\dot{V} < 0$ ，此時相對應的  $V$  為

$$\begin{aligned}
V(x) &= \int_0^x \nabla V dx = \int_0^{x_1} \nabla V_1 dx_1 + \int_0^{x_2} \nabla V_2 dx_2 \\
&= \int_0^{x_1} x_1 dx_1 + \int_0^{x_2} 2x_2 dx_2 \\
&= \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 > 0 \tag{21}
\end{aligned}$$

對於 (21)，吾人可得到  $V(0) = 0$  及  $V(x) > 0, \forall x \in D_1 - \{0\}$ ，且 (20) 則提供了  $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in D_1 - \{0\}$ ，其中  $D_1 = \{(x_1, x_2) \mid 1 - 2x_1x_2 >$

0}；在這些條件下，所選擇之  $V(x)$  為一個可使得系統平衡點為漸進穩定的 Lyapunov 函數。

### 3.2. Answer to Problem 4.2 (b)

針對系統 (2)，倘若系統梯度函數選擇為  $\nabla V = [a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \quad a_{21}x_1 + 2x_2]$ ，其中  $a_{11} = 2/(1 - x_1x_2)^2$ ， $a_{12} = -x_1^2/(1 - x_1x_2)^2$ ， $a_{21} = x_1^2/(1 - x_1x_2)^2$ ，此時吾人可以重寫梯度函數為

$$\nabla V = \begin{bmatrix} \frac{2}{(1-x_1x_2)^2}x_1 + \frac{-x_1^2}{(1-x_1x_2)^2}x_2 & \frac{x_1^2}{(1-x_1x_2)^2}x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

為檢驗此梯度函數選擇是否合理，吾人首先必須檢測此梯度函數的旋度是否為零，亦即  $\partial(\nabla V_1)/\partial x_2$  必須等於  $\partial(\nabla V_2)/\partial x_1$ ，因此有了以下計算

$$\begin{cases} \frac{\partial(\nabla V_1)}{\partial x_2} = \frac{\partial\left(\frac{2}{(1-x_1x_2)^2}x_1 + \frac{-x_1^2}{(1-x_1x_2)^2}x_2\right)}{\partial x_2} = \frac{3x_1^2 - 4x_1^3x_2 + x_1^4x_2^2}{(1-x_1x_2)^4} \\ \frac{\partial(\nabla V_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial\left(\frac{x_1^2}{(1-x_1x_2)^2}x_1 + 2x_2\right)}{\partial x_1} = \frac{3x_1^2 - 4x_1^3x_2 + x_1^4x_2^2}{(1-x_1x_2)^4} \end{cases} \quad (23)$$

透過上述分析吾人確保了梯度函數選擇的合理性，此時吾人可進一步

求得系統 Lyapunov 候選函數的時間導數為

$$\begin{aligned}
\dot{V} \equiv (\nabla V)\dot{x} &= \begin{bmatrix} \frac{2}{(1-x_1x_2)^2}x_1 + \frac{-x_1^2}{(1-x_1x_2)^2}x_2 & \frac{x_1^2}{(1-x_1x_2)^2}x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2x_1-x_1^2x_2}{(1-x_1x_2)^2} & \frac{x_1^3}{(1-x_1x_2)^2} + 2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 + 2x_1^2x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{(2x_1 - x_1^2x_2)(-x_1 + 2x_1^2x_2) - x_1^3x_2}{(1 - x_1x_2)^2} - 2x_2^2 \\
&= \frac{-2x_1^2 + 4x_1^3x_2 - 2x_1^4x_2^2}{(1 - x_1x_2)^2} - 2x_2^2 \\
&= -2x_2^2 - \frac{2x_1^2 \cdot (1 - 2x_1x_2 + x_1^2x_2^2)}{(1 - x_1x_2)^2} \\
&= -2x_2^2 - \frac{2x_1^2 \cdot (1 - x_1x_2)^2}{(1 - x_1x_2)^2} \\
&= -2x_1^2 - 2x_2^2 < 0, \quad \forall x \neq 0
\end{aligned} \tag{24}$$

透過 (24) 吾人可保證  $\dot{V} < 0$ ，此時相對應的  $V$  為

$$\begin{aligned}
 V(x) &= \int_0^x \nabla V dx = \int_0^{x_1} \nabla V_1 dx_1 + \int_0^{x_2} \nabla V_2 dx_2 \\
 &= \int_0^{x_1} \left( \frac{2}{(1-x_1x_2)^2} x_1 + \frac{-x_1^2}{(1-x_1x_2)^2} x_2 \right) dx_1 \\
 &\quad + \int_0^{x_2} \left( \frac{x_1^2}{(1-x_1x_2)^2} x_1 + 2x_2 \right) dx_2 \\
 &= x_2^2 - x_1^2 + \frac{2x_1^2}{1-x_1x_2} \tag{25}
 \end{aligned}$$

對於 (25)，吾人可得到  $V(0) = 0$  及  $V(x) > 0, \forall x \in D_2 - \{0\}$ ，且 (24) 則提供了  $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ ，其中  $D_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_2^2 - x_1^2 + \frac{2x_1^2}{1-x_1x_2} > 0\}$ ；在這些條件下，所選擇之  $V(x)$  為一個可使得系統平衡點為漸進穩定的 Lyapunov 函數。

### 3.3. Answer to Problem 4.2 (c)

從以上分析吾人可以看到不同的 Lyapunov 函數有各自對應的收斂區間，但由於 Lyapunov 直接穩定定理為一充分條件，將所有可能收斂區間的聯集才應該平衡點/原點的收斂範圍。因此，如果吾人找到的合理 Lyapunov 函數越多，則所對應的收斂區間聯集將越接近實際收斂區間的大小。如果吾人只能找到一個合理的 Lyapunov 函數，則由其所決



定的收斂區間將可能太過保守，意即可能比實際的收斂區間小。

爲了驗證上述所求是否正確，在 Matlab 模擬階段，吾人有以下分析

(i) 首先根據 4.2 (a)–4.2 (b) 分析，吾人首先得知相對應的收斂範圍

分別爲  $D_1 = \{(x_1, x_2) \mid 1 - 2x_1x_2 > 0\}$  及  $D_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_2^2 - x_1^2 + \frac{2x_1^2}{1-x_1x_2} > 0\}$ ，如圖 5–6 所示，其中白色範圍代表滿足  $D_1$  及  $D_2$  的  $(x_1, x_2)$  分布情形。

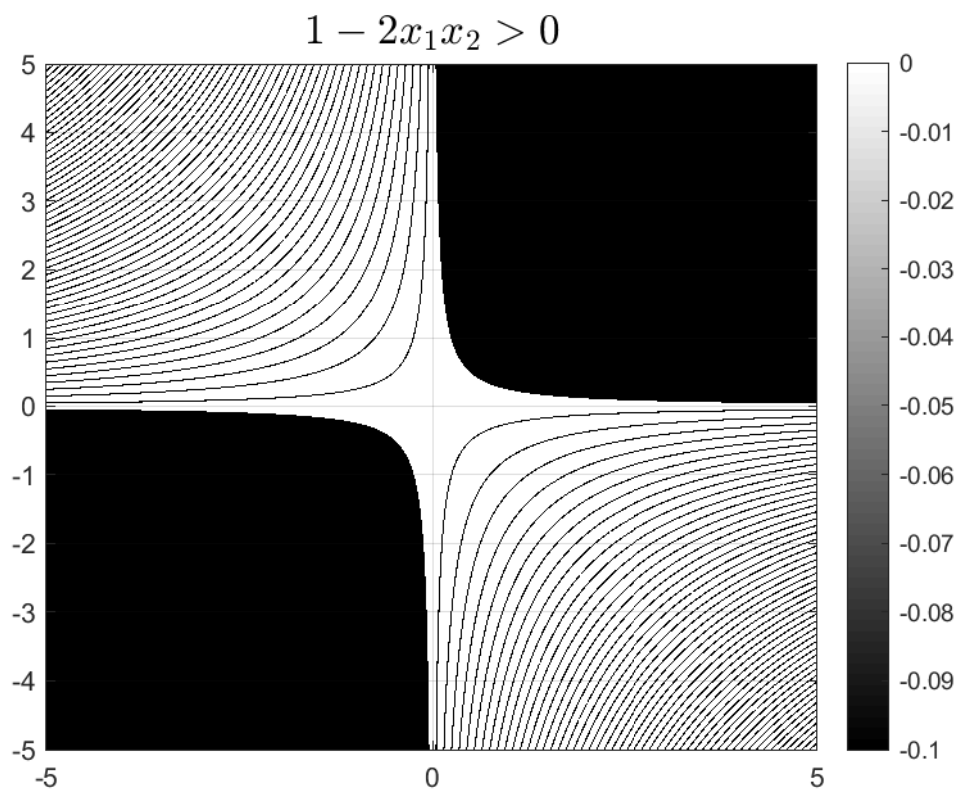


Figure 5: 系統收斂區間  $D_1 = \{(x_1, x_2) \mid 1 - 2x_1x_2 > 0\}$

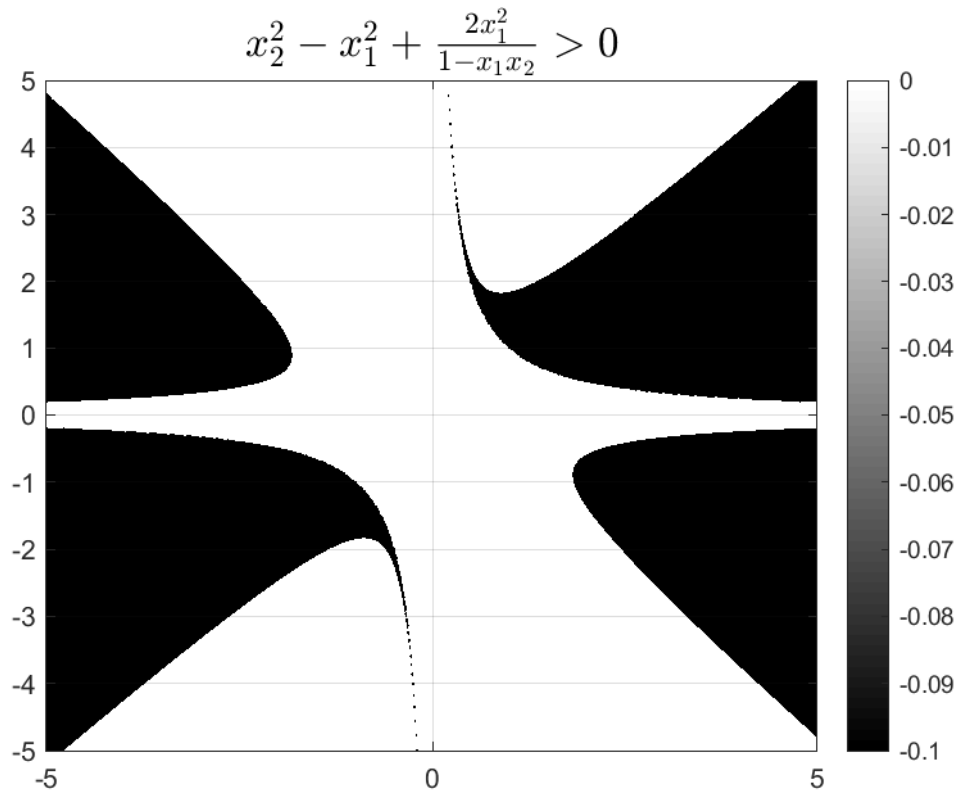


Figure 6: 系統收斂區間  $D_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_2^2 - x_1^2 + \frac{2x_1^2}{1-x_1x_2} > 0\}$

(ii) 當系統初始值同時滿足 4.2 (a)–4.2(b) 穩定收斂區間，意即

$x(t_0) \in D_1 \cap D_2$ ，此時系統狀態將收斂至原點，在 Matlab 模擬階

段吾人選擇八個初始狀態滿足

第幾組	初始狀態	第幾組	初始狀態
$(x_1^1(0), x_2^1(0))$	$(0.5, 0.9)$	$(x_1^2(0), x_2^2(0))$	$(-0.5, 0.9)$
$(x_1^3(0), x_2^3(0))$	$(-0.5, -0.9)$	$(x_1^4(0), x_2^4(0))$	$(0.5, -0.9)$
$(x_1^5(0), x_2^5(0))$	$(0.9, 0.5)$	$(x_1^6(0), x_2^6(0))$	$(-0.9, 0.5)$
$(x_1^7(0), x_2^7(0))$	$(-0.9, -0.5)$	$(x_1^8(0), x_2^8(0))$	$(0.9, -0.5)$

此時模擬結果如圖 7a–7b 所示，可以清楚的看到當初始狀態皆落在穩定收斂範圍內時，系統狀態軌跡將會逐漸收斂至原點，如同前述分析。

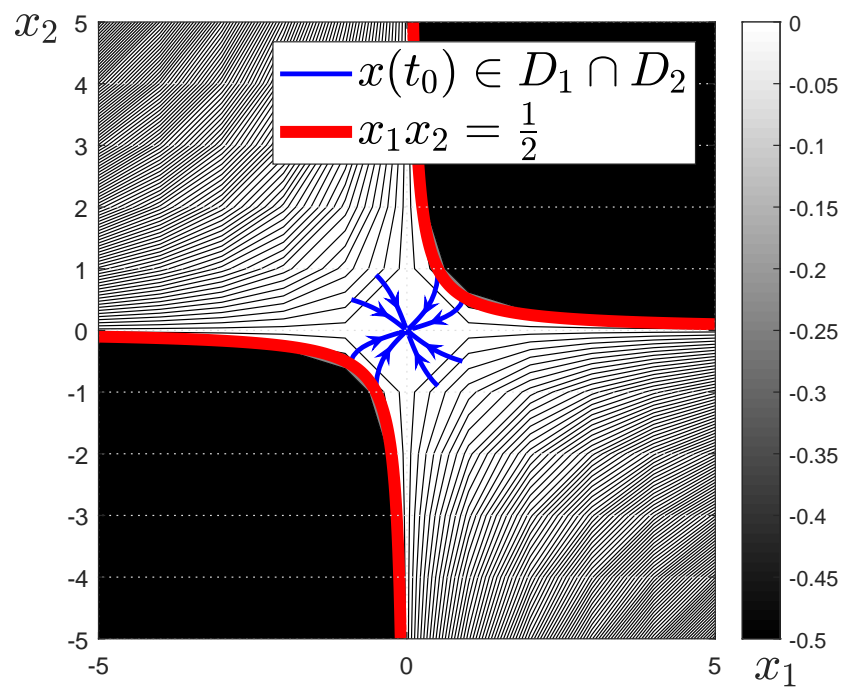
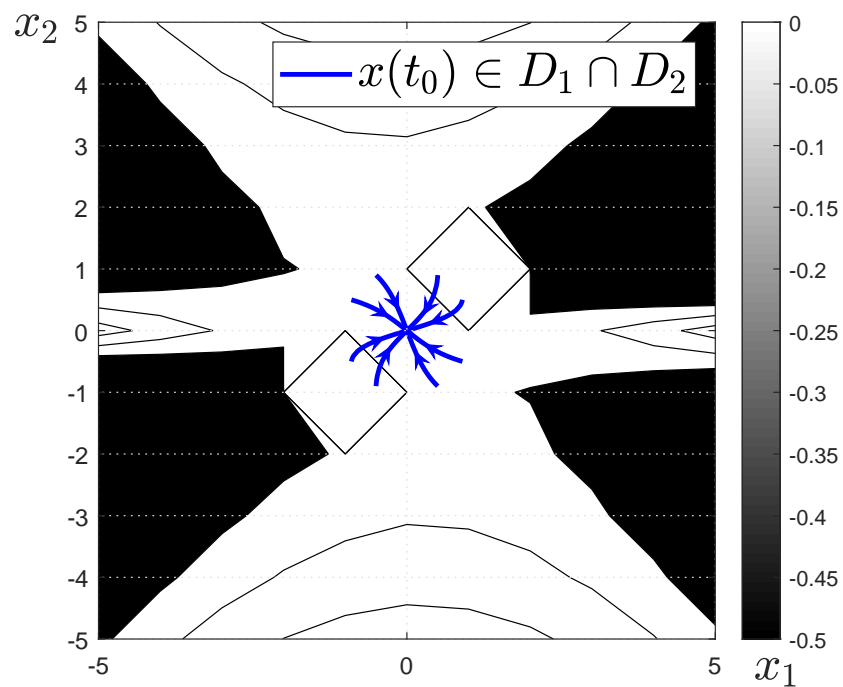


Figure 7(a) is a phase plane plot showing trajectories and a red curve.



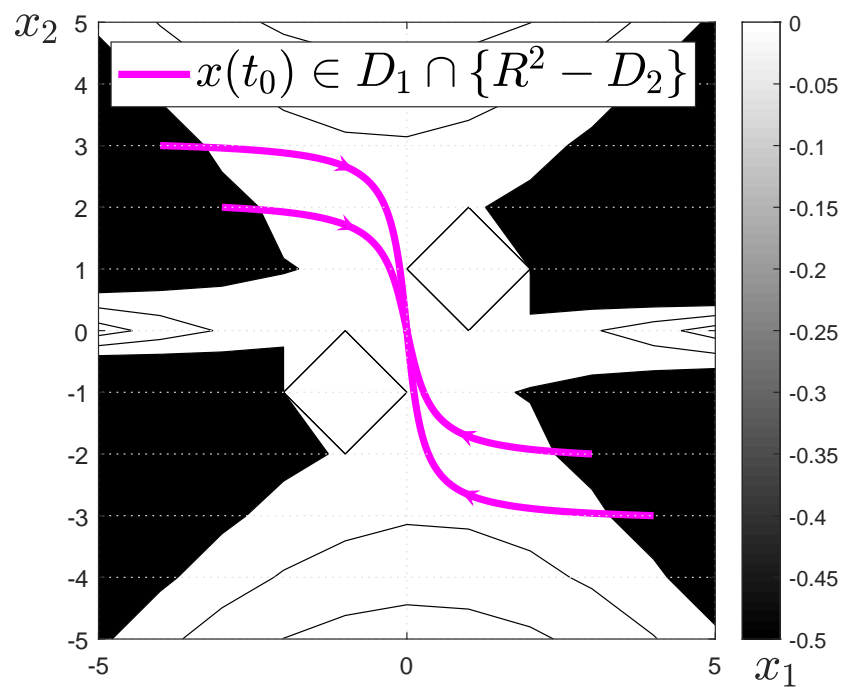
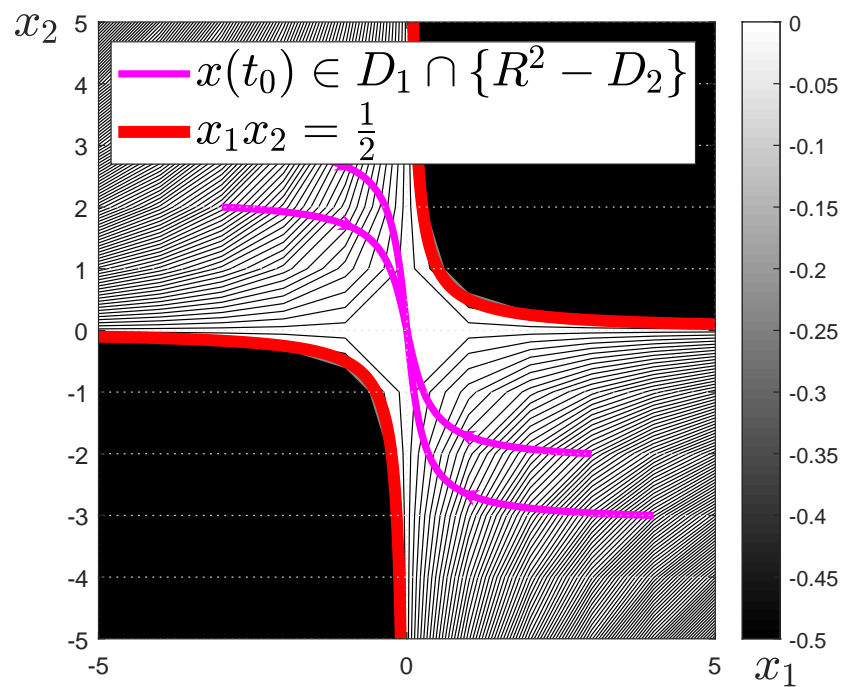
(b) 背景白色為  $D_2$  收斂區間

Figure 7: 相平面軌跡：  $x(t_0) \in D_1 \cap D_2$

(iii) 當系統初始值滿足 4.2 (a) 之穩定收斂區間卻不滿足 4.2(b) 之穩定收斂區間，意即  $x(t_0) \in D_1 \cap \{\mathbb{R}^2 - D_2\}$ ，此時選定四組初始狀態

第幾組	初始狀態	第幾組	初始狀態
$(x_1^9(0), x_2^9(0))$	$(-3, 2)$	$(x_1^{10}(0), x_2^{10}(0))$	$(-4, 3)$
$(x_1^{11}(0), x_2^{11}(0))$	$(3, -2)$	$(x_1^{12}(0), x_2^{12}(0))$	$(4, -3)$

此時模擬結果如圖 8a–8b 所示，可以清楚的看到當初始狀態只要落在其中一個穩定收斂範圍內時，系統狀態軌跡就會逐漸收斂至原點，再次說明了吾人欲找的是所有合理的 Lyapunov 函數所確定的穩定範圍之聯集，如同前述分析。



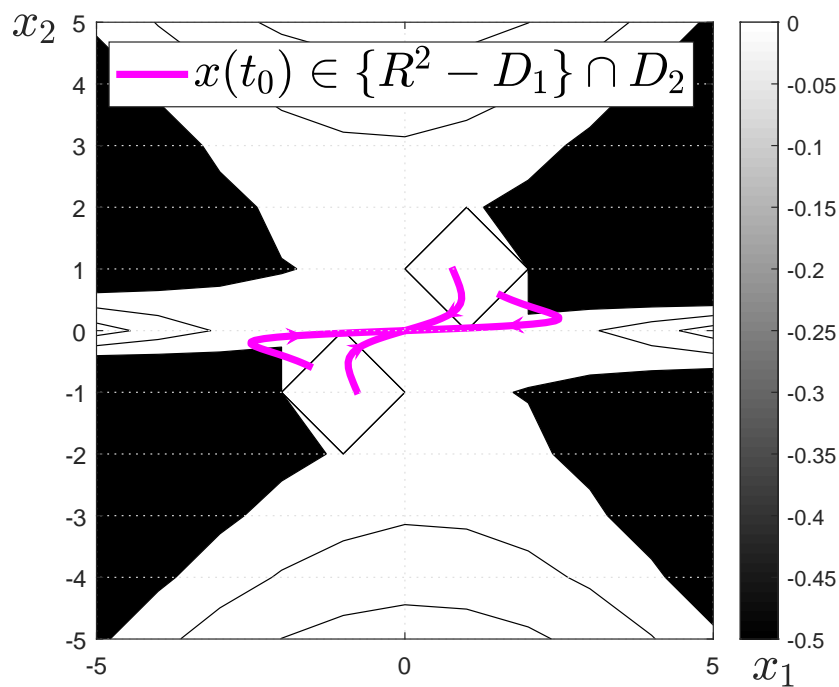
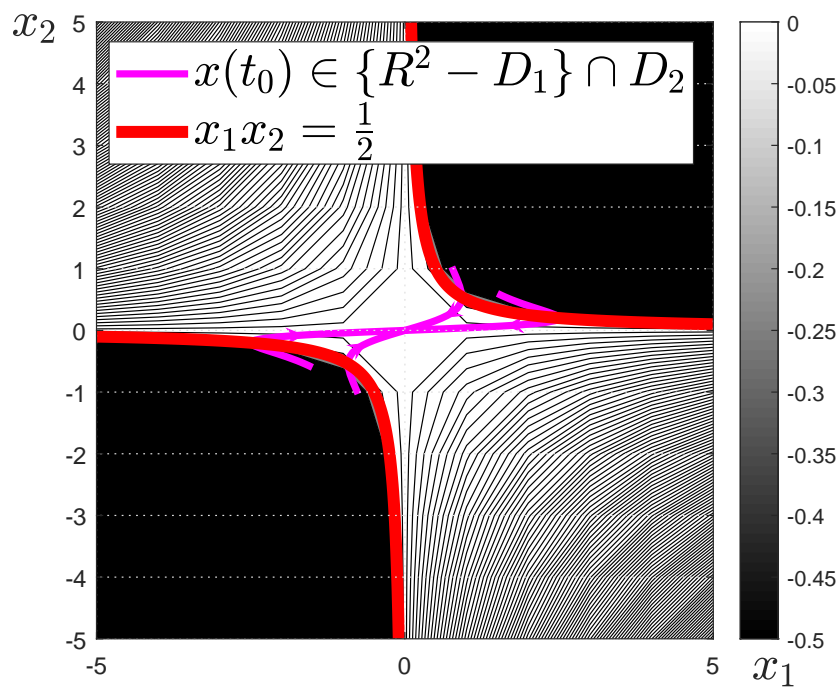
(b) 背景白色為  $D_2$  收斂區間

Figure 8: 相平面軌跡：  $x(t_0) \in D_1 \cap \{\mathbb{R}^2 - D_2\}$

(iv) 當系統初始值滿足 4.2 (b) 之穩定收斂區間卻不滿足 4.2(a) 之穩定收斂區間，意即  $x(t_0) \in D_2 \cap \{\mathbb{R}^2 - D_1\}$ ，此時選定四組初始狀態

第幾組	初始狀態	第幾組	初始狀態
$(x_1^{13}(0), x_2^{13}(0))$	$(1.5, 0.6)$	$(x_1^{14}(0), x_2^{14}(0))$	$(-1.5, -0.6)$
$(x_1^{15}(0), x_2^{15}(0))$	$(0.76, 1.03)$	$(x_1^{16}(0), x_2^{16}(0))$	$(-0.76, -1.03)$

此時模擬結果如圖 9a–9b 所示，可以再一次清楚的看到當初始狀態只要落在其中一個穩定收斂範圍內時，系統狀態軌跡就會逐漸收斂至原點，再次說明了吾人欲找的是所有合理的 Lyapunov 函數所確定的穩定範圍之聯集，如同前述分析。



(b) 背景白色為  $D_2$  收斂區間

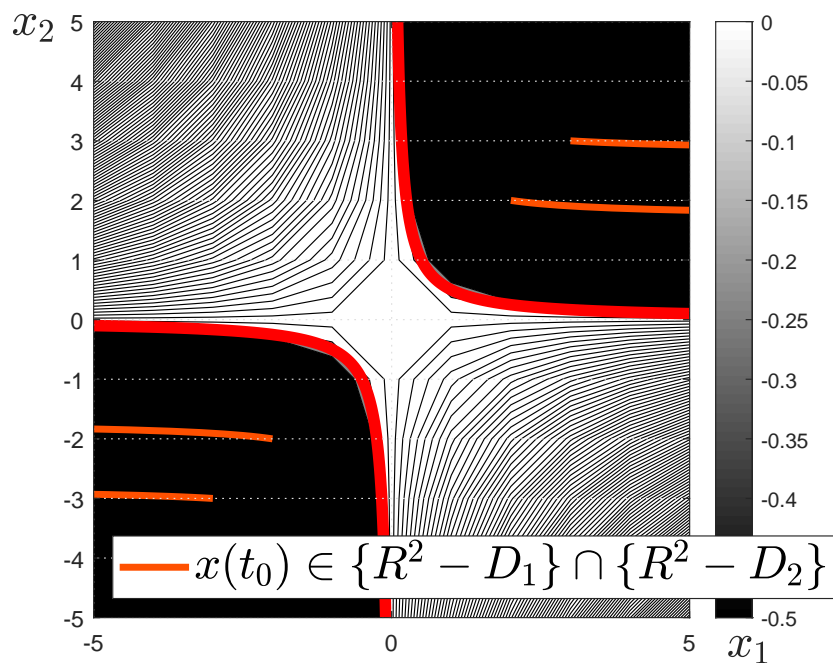
Figure 9: 相平面軌跡：  $x(t_0) \in D_2 \cap \{R^2 - D_1\}$



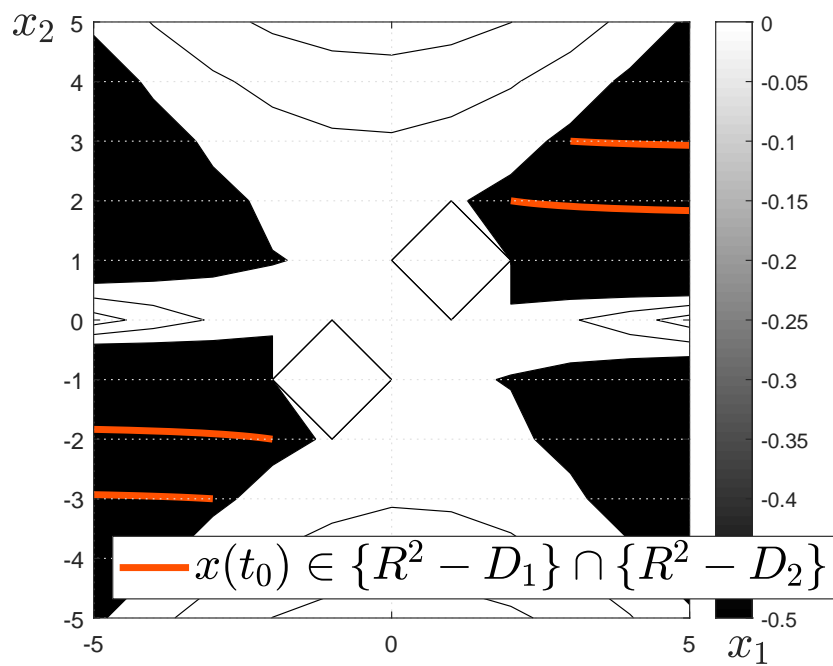
(v) 當系統初始值不滿足 4.2 (a) 之穩定收斂區間也不滿足 4.2 (b) 之穩定收斂區間，意即  $x(t_0) \in \{\mathbb{R} - D_1\} \cap \{\mathbb{R} - D_2\}$ ，此時選定四組初始狀態

第幾組	初始狀態	第幾組	初始狀態
$(x_1^{17}(0), x_2^{17}(0))$	$(2, 2)$	$(x_1^{18}(0), x_2^{18}(0))$	$(3, 3)$
$(x_1^{19}(0), x_2^{19}(0))$	$(-2, -2)$	$(x_1^{20}(0), x_2^{20}(0))$	$(-3, -3)$

此時模擬結果如圖 10a-10b 所示，從圖中可以看到雖然當吾人在兩者收斂區間聯集外找到四個會使系統軌跡發散的初始狀態，但吾人卻無法得到在兩者之外皆會發散(意即  $D_1 \cup D_2$  為最大收斂區間)的結論，透過尋找不同的 Lyapunov 函數可能進一步找到更大的收斂區間。



軌跡の色の白黒は時間



(b) 背景白色為  $D_2$  收斂區間

Figure 10: 相平面軌跡：  $x(t_0) \in \{R^2 - D_1\} \cap \{R^2 - D_2\}$

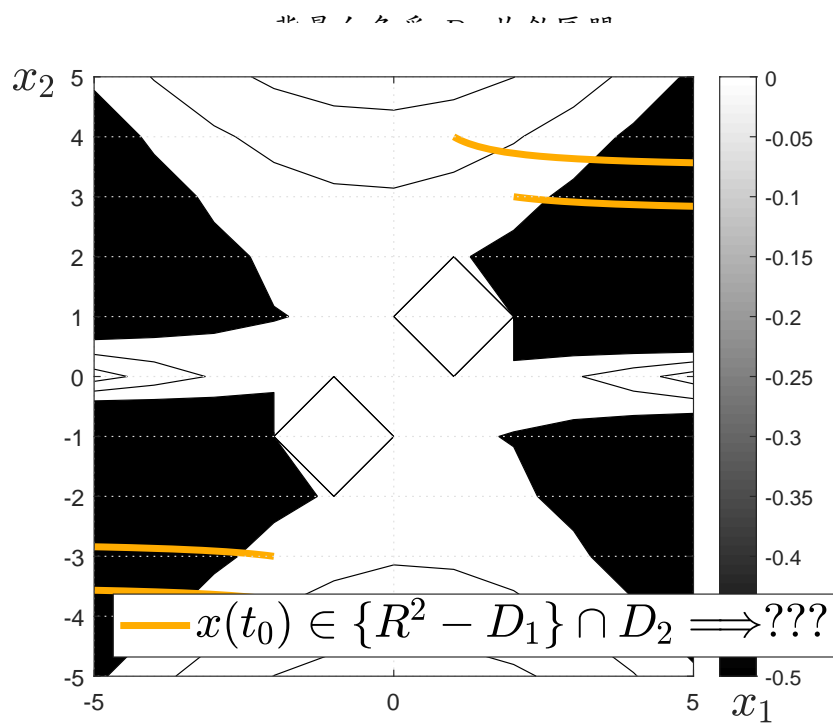
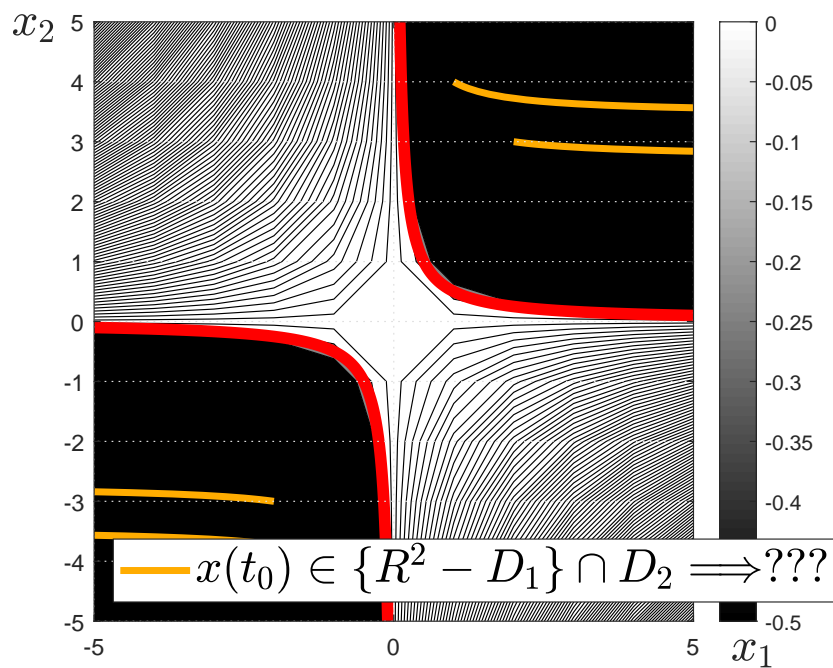
(vi) 前述分析理應能涵括所有情況，然而在當系統初始值不滿足 4.2 (a) 之穩定收斂區間但滿足 4.2(b) 之穩定收斂區間時  $(x(t_0) \in \{\mathbb{R}-D_1\} \cap \{\mathbb{R}-D_2\})$ ，若刻意選定四組初始狀態落於

第幾組	初始狀態	第幾組	初始狀態
$(x_1^{21}(0), x_2^{21}(0))$	(1, 4)	$(x_1^{22}(0), x_2^{22}(0))$	(2, 3)
$(x_1^{23}(0), x_2^{23}(0))$	(-1, -4)	$(x_1^{24}(0), x_2^{24}(0))$	(-2, -3)

此時模擬結果如圖 11a–11b 所示，從圖中可以看到這些初始狀態雖然未落在  $D_1$  收斂區間但落在  $D_2$  收斂區間，然而從圖形中可以發現這些初始狀態造成的系統軌跡卻會發散，其原因可能為當使用可變梯度法計算出的 Lyapunov 函數

$$V(x) = x_2^2 - x_1^2 + \frac{2x_1^2}{1 - x_1x_2} \quad (26)$$

在  $x_1x_2 = 1$  點不連續(函數值不存在)，意即此函數不為一連續可為分函數，違反使用 Lyapunov 函數使用前提，為了改善此一弱點，吾人推斷 4.2 (b) 之收斂區間應修改為  $D_2^* = \{(x_1, x_2) \mid x_2^2 - x_1^2 + \frac{2x_1^2}{1-x_1x_2} > 0 \cap 1 - x_1x_2 < 1\}$ ，此時會將原本  $D_2$  的收斂範圍縮小到較精確的區間  $D_2^*$ 。



(b) 背景白色為  $D_2$  收斂區間

Figure 11: 相平面軌跡：  $x(t_0) \in \{\mathbb{R}^2 - D_1\} \cap D_2 \implies$  不收斂

將上述分析合併，可得圖 12，可以看到不同初始狀態在兩者收斂範圍的系統軌跡運動情形。注意，若進一步滿足上述 (vi) 之分析，則橘色實線系統軌跡的初始值將同時落在兩者收斂區間之外，如圖 13 所示， $D_2^*$  的收斂範圍不包含紅色曲線所圍起來的兩個角落，故在此區間內橘色實線的發散情形是可被理解的。

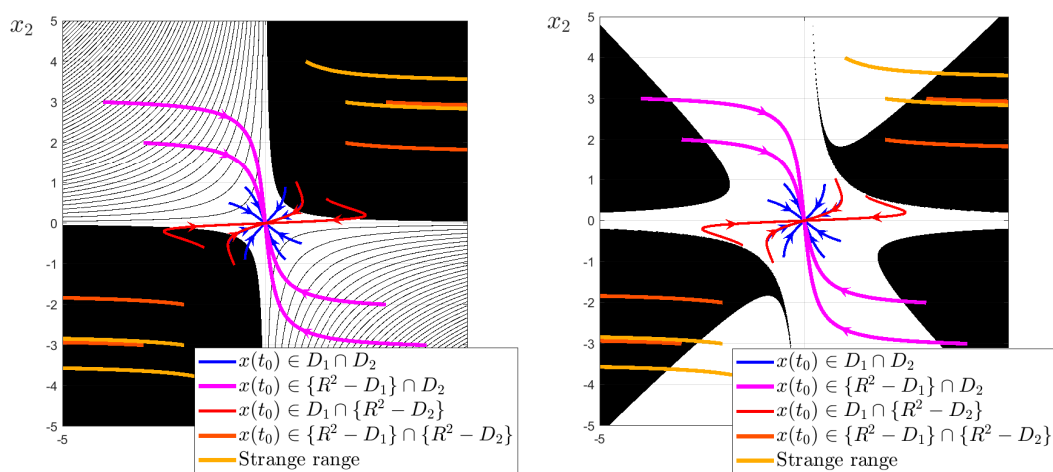


Figure 12: 相平面軌跡：  $x(t_0) \in \{\mathbb{R}^2 - D_1\} \cap D_2 \implies$  不收斂

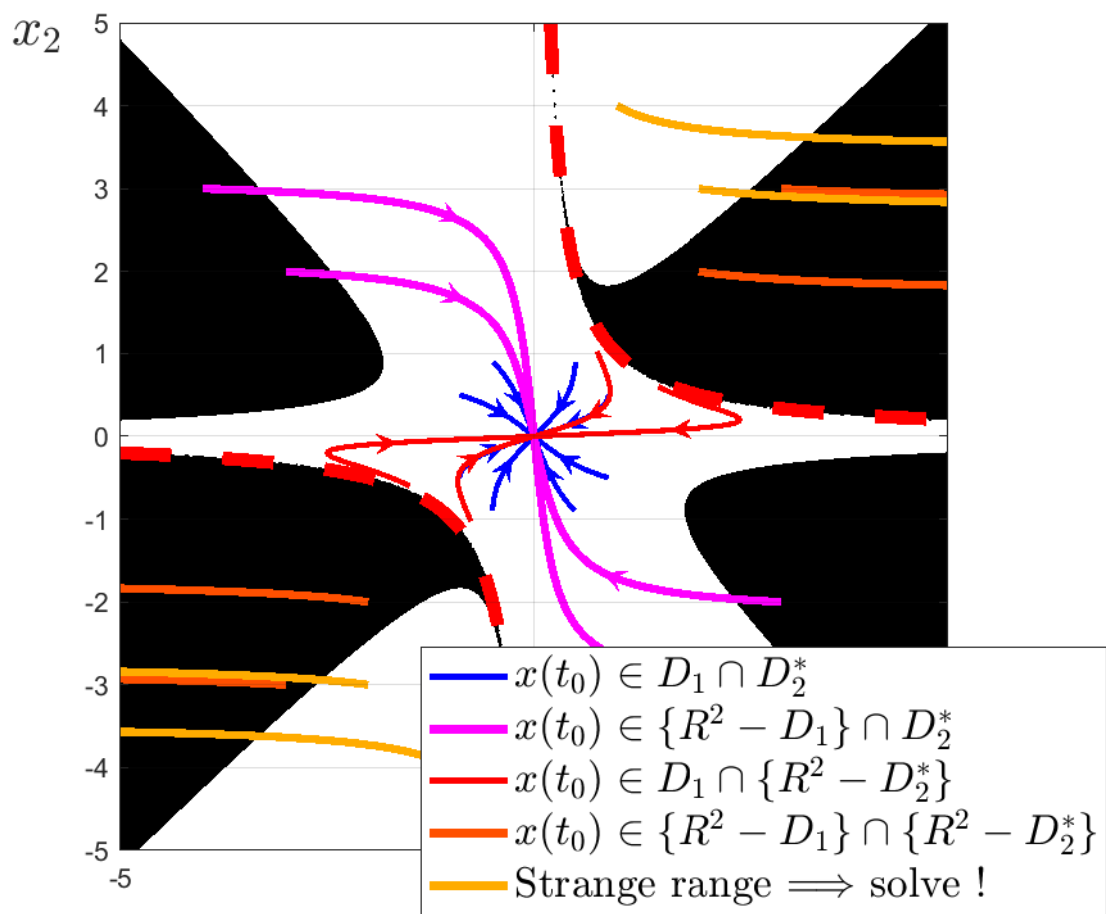


Figure 13: 相平面軌跡：  $x(t_0) \in \{\mathbb{R}^2 - D_1\} \cap D_2 \implies$  不收敛

#### 4. Answer to Problem 4.3

考慮一個二階非線性系統

$$\dot{x}_1 = -\frac{6x_1}{(1+x_1^2)^2} + 2x_2, \quad \dot{x}_2 = \frac{-2(x_1+x_2)}{(1+x_1^2)^2} \quad (27)$$

##### 4.1. Answer to Problem 4.3 (a)

若選定 Lyapunov 候選函數  $V(x) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2$ ，由於此函數變數項次幂皆為2次，故吾人可得知  $V(0) = 0, V(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ ；另一方面，由於

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &\equiv \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} \dot{x}_2 \\ &= \frac{2x_1}{(1+x_1^2)^2} \cdot \left( -\frac{6x_1}{(1+x_1^2)^2} + 2x_2 \right) + 2x_2 \cdot \left( \frac{-2(x_1+x_2)}{(1+x_1^2)^2} \right) \\ &= -\frac{12x_1^2 + 2x_2^2(1+x_1^2)^2}{(1+x_1^2)^4} < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 - \{0\} \end{aligned} \quad (28)$$

因此由 Lyapunov 定理得知系統 (27) 的原點  $x = 0$  為一個漸進穩定的平衡點。

##### 4.2. Answer to Problem 4.3 (b)

透過 4.2 (a) 的分析，吾人得知對於系統 (27) 而言原點為一個漸進穩

定的平衡點，然而 Lyapunov 直接穩定定理僅能保證平衡點**局部穩定性**。倘若需討若平衡點是否為全域穩定，則需利用全域穩定定理 (又稱 Barbashin-Krasovskii 定理) 確認平衡點的穩定性；此定理與 Lyapunov 直接穩定定理大致相同，唯要求系統 Lyapunov 函數需額外滿足**放射狀無界條件 (radially unbounded)**，意即

$$\|x\| \rightarrow \infty \implies V(x) \rightarrow \infty \quad (29)$$

也就是當  $x$  離原點/平衡點無窮遠時， $V(x)$  的值也必需趨近於無窮大。對於本題選定之 Lyapunov 函數，由於

$$|x_1| \rightarrow \infty \implies V(x) \rightarrow 1 + x_2^2 \quad (30)$$

放射狀無界條件不被滿足，因此 4.2 (a) 所討論的漸進穩定之平衡點**僅為局部漸進穩定**。

#### 4.3. Answer to Problem 4.3 (c)

因為本題所建構的 Lyapunov 函數不滿足放射狀無界之條件，意即雖然  $\dot{V}(x) < 0$ ，但是系統軌跡**可能沿著等高線發散至無窮大**；為檢驗這一結果，吾人首先選定十組  $V(x) = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0$ ，所畫出之圖形如圖 14 所示；從圖中吾人可發現當系統滿



足放射狀無界條件時(又被稱為 growth condition)，此時系統將會有  $V(x) = c$  為代表環繞平衡點的封閉曲線及當  $c$  上升時所圍繞的封閉區間面積將會包含上一個較小  $c$  所產生的封閉曲線。然而，本題所建構的 Lyapunov 函數只有在  $V(x)$  小於 1 才有這種現象產生，意即當  $x(t_0)$  滿足  $V(x)$  小於 1 時搭配 Lyapunov 直接穩定定理將保證系統軌跡收斂到原點，然而對於區間外的初始值是否收斂，吾人暫時無法給出結論，必須透過以下四點討論結果。

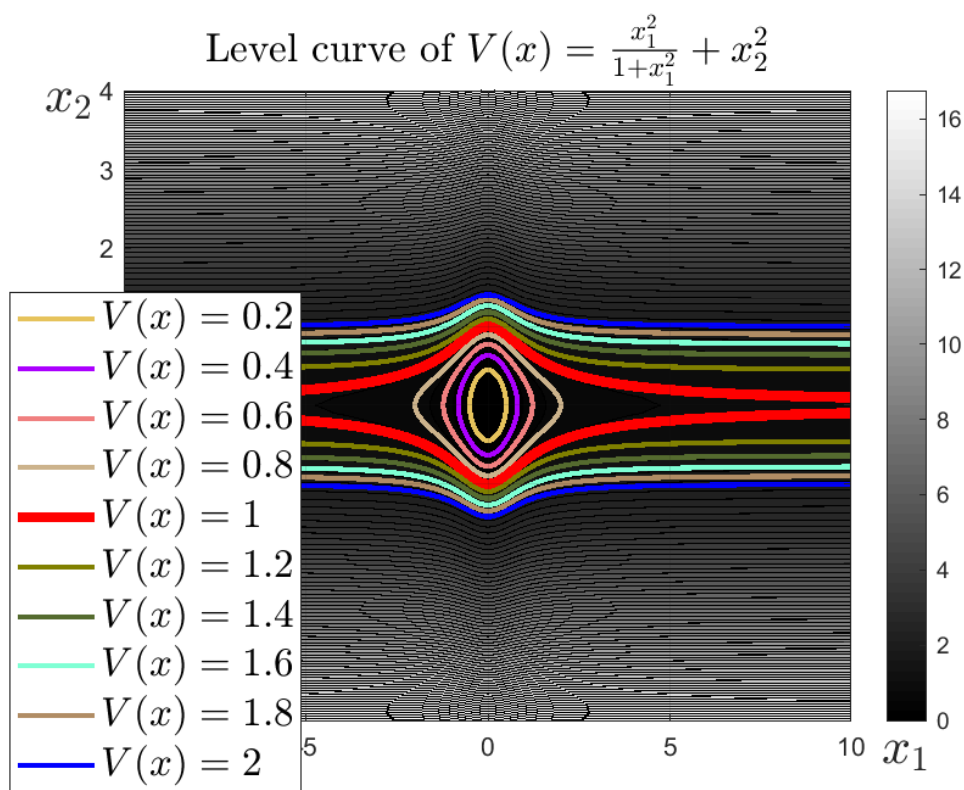


Figure 14: 相平面軌跡：  $x(t_0) \in \{\mathbb{R}^2 - D_1\} \cap D_2 \implies$  不收斂

(i) 當系統條件  $x(t_0) = (x_1(t_0), x_2(t_0))$  落於第二象限時，此時吾人給定12組初始狀態

第幾組	初始狀態	第幾組	初始狀態
$(x_1^1(0), x_2^1(0))$	$(-10, 0.5)$	$(x_1^2(0), x_2^2(0))$	$(-10, 1)$
$(x_1^3(0), x_2^3(0))$	$(-10, 1.5)$	$(x_1^4(0), x_2^4(0))$	$(-10, 2)$
$(x_1^5(0), x_2^5(0))$	$(-10, 2.5)$	$(x_1^6(0), x_2^6(0))$	$(-10, 3)$
$(x_1^7(0), x_2^7(0))$	$(-10, 3.1)$	$(x_1^8(0), x_2^8(0))$	$(-10, 3.135)$
$(x_1^9(0), x_2^9(0))$	$(-10, 3.137)$	$(x_1^{10}(0), x_2^{10}(0))$	$(-10, 3.138)$
$(x_1^{11}(0), x_2^{11}(0))$	$(-10, 3.139)$	$(x_1^{12}(0), x_2^{12}(0))$	$(-10, 3.2)$

模擬結果如圖 15 所示，先討論第二而不先討論第一象限的原因在於大部分初始狀態落於第二象限的系統軌跡將先穿過第二象限進入第一象限再收斂或是發散。從圖中吾人發現落於離原點較遠的初始狀態將先沿著等高線平行於  $x$  軸前進，而且當  $x_2(t_0) \leq 3.138$  時系統軌跡將會收斂到原點/平衡點；當  $x_2(t_0) > 3.138$  時系統軌跡將會朝無窮線大前進，因此吾人判斷當系統初始狀態落於第二象限時，只要  $x_2(t_0) \leq 3.138$ ，系統軌跡將會收斂，反之則發散。

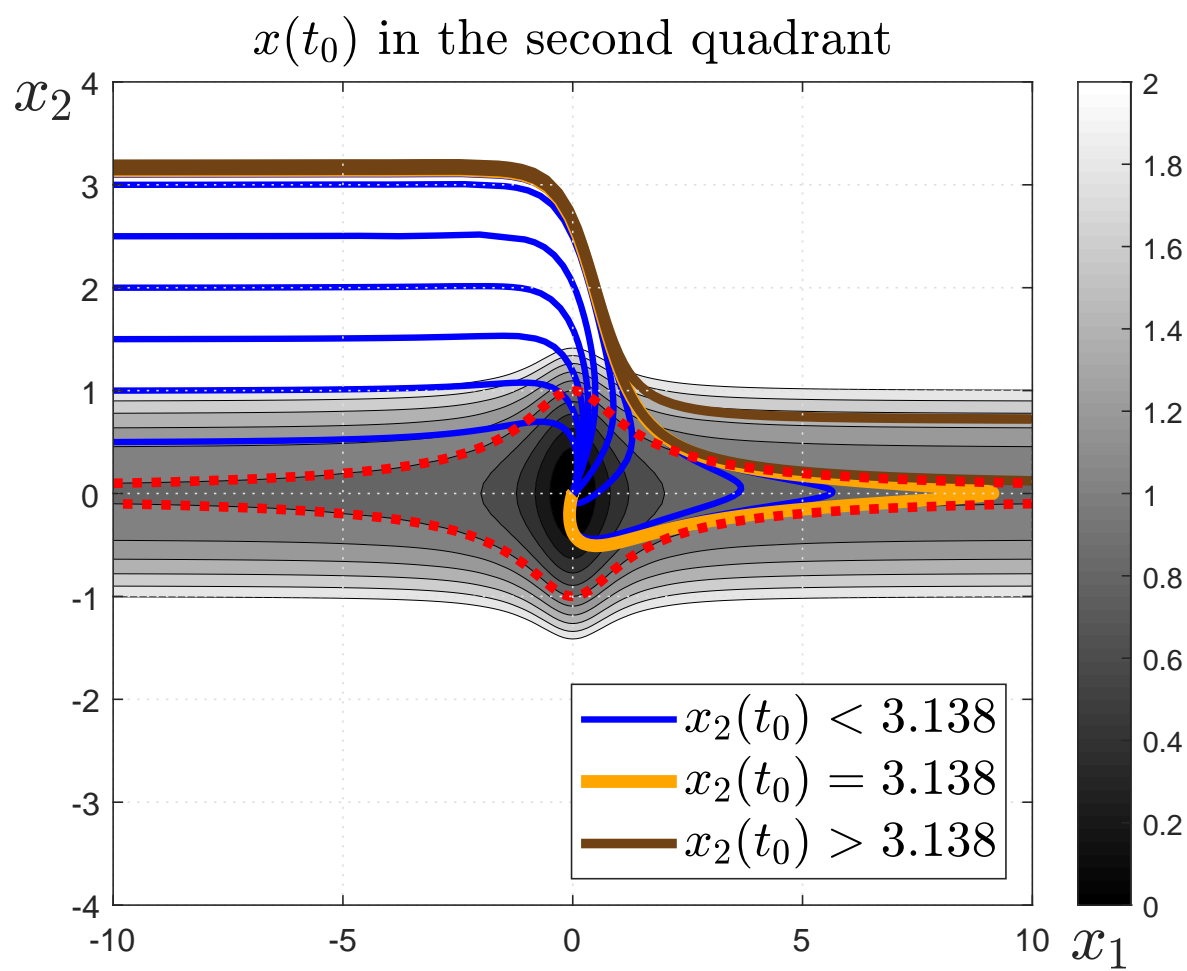


Figure 15: 相平面軌跡：  $x(t_0)$  落於第二象限

(ii) 當系統條件  $x(t_0) = (x_1(t_0), x_2(t_0))$  落於第四象限時，此時吾人給定12組初始狀態

第幾組	初始狀態	第幾組	初始狀態
$(x_1^{13}(0), x_2^{13}(0))$	$(10, -0.5)$	$(x_1^{14}(0), x_2^{14}(0))$	$(10, -1)$
$(x_1^{15}(0), x_2^{15}(0))$	$(10, -1.5)$	$(x_1^{16}(0), x_2^{16}(0))$	$(10, -2)$
$(x_1^{17}(0), x_2^{17}(0))$	$(10, -2.5)$	$(x_1^{18}(0), x_2^{18}(0))$	$(10, -3)$
$(x_1^{19}(0), x_2^{19}(0))$	$(10, -3.1)$	$(x_1^{20}(0), x_2^{20}(0))$	$(10, -3.135)$
$(x_1^{21}(0), x_2^{21}(0))$	$(10, -3.137)$	$(x_1^{22}(0), x_2^{22}(0))$	$(10, -3.138)$
$(x_1^{23}(0), x_2^{23}(0))$	$(10, -3.139)$	$(x_1^{23}(0), x_2^{23}(0))$	$(10, -3.2)$

模擬結果如圖 16 所示，第二個討論第四象限的原因在於第四象限的相平面軌跡其實是第二象限相平面軌跡對稱於原點的情形，意即大部分初始狀態落於第四象限的系統軌跡將先穿過第四象限進入第三象限再收斂或是發散。從圖中吾人發現落於離原點較遠的初始狀態將先沿著等高線平行於  $x$  軸前進，而且當  $x_2(t_0) \geq -3.138$  時系統軌跡將會收斂到原點/平衡點；當  $x_2(t_0) < -3.138$  時系統軌跡將會朝負無窮線大前進，因此吾人判

斷當系統初始狀態落於第四象限時，只要  $x_2(t_0) \geq -3.138$ ，系統軌跡將會收斂，反之則發散。

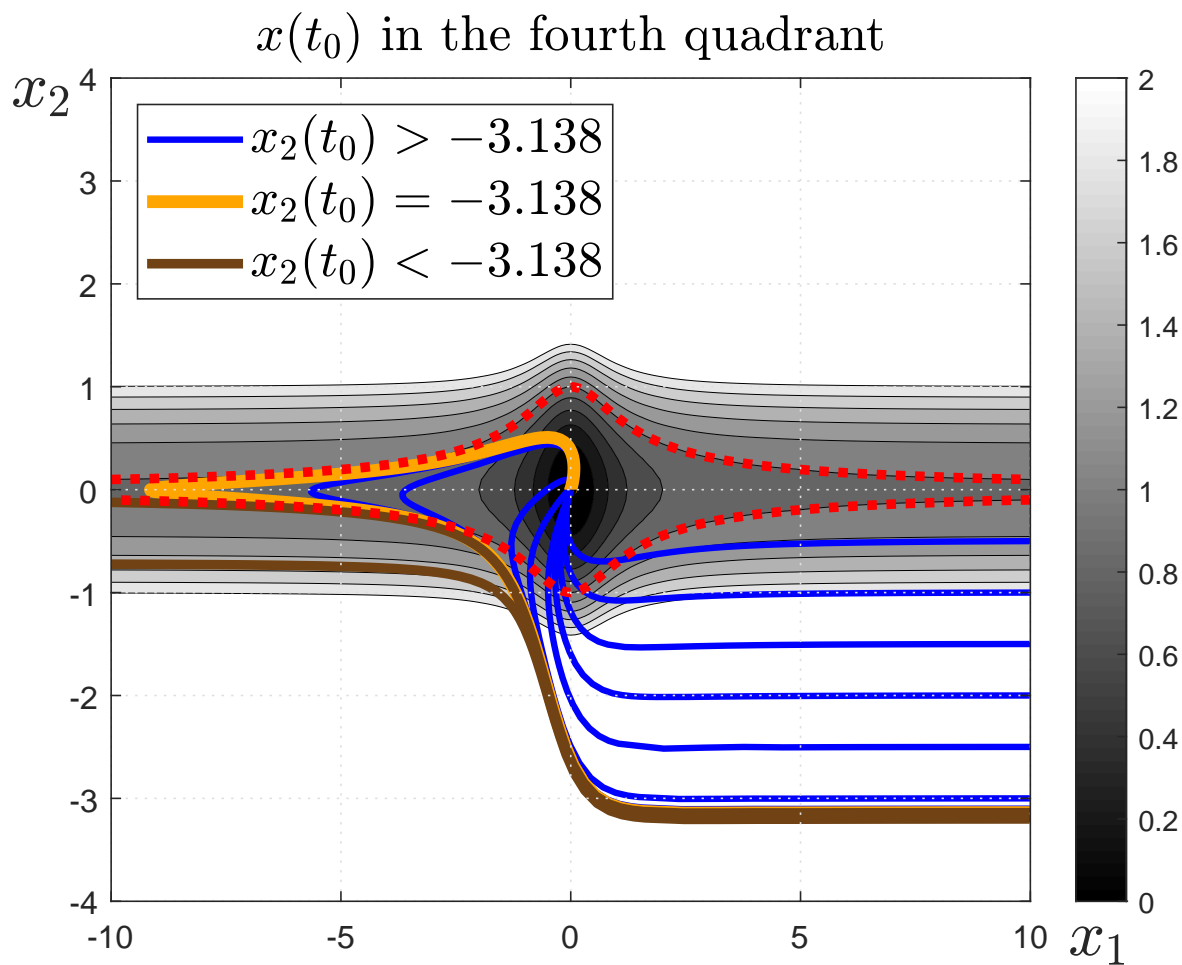


Figure 16: 相平面軌跡：  $x(t_0)$  落於第四象限

(iii) 當系統條件  $x(t_0) = (x_1(t_0), x_2(t_0))$  落於第一象限時，此時吾人給定10組初始狀態

第幾組	初始狀態	第幾組	初始狀態
$(x_1^{25}(0), x_2^{25}(0))$	(0.2, 6)	$(x_1^{26}(0), x_2^{26}(0))$	(1.5, 0.5)
$(x_1^{27}(0), x_2^{27}(0))$	(0.5, 1)	$(x_1^{28}(0), x_2^{28}(0))$	(0.5, 1.5)
$(x_1^{29}(0), x_2^{29}(0))$	(10, 0)	$(x_1^{30}(0), x_2^{30}(0))$	(1, 0.5)
$(x_1^{31}(0), x_2^{31}(0))$	(1, 1)	$(x_1^{32}(0), x_2^{32}(0))$	(0.2, 7)
$(x_1^{33}(0), x_2^{33}(0))$	(1, 1.5)	$(x_1^{34}(0), x_2^{34}(0))$	(1.5, 1)

模擬結果如圖 17 所示，從圖中可以發現初始狀態落於第一象限之軌跡收斂範圍將大大的受收到第二象限軌跡之影響。注意圖中橘色實線代表系統軌跡從第二象限出發時之最大收斂區間，意即  $x_2(t_0) \leq 3.138$ ，此時將橘色線在第一象限的軌跡與  $x$  軸  $y$  軸連線可取得一個封閉區域並稱之為 Region 1；從圖中吾人發現當初始狀態落於 Region 1 時，系統軌跡將會收斂到原點。再者，考慮  $V(x) < 1$  之範圍，並稱之為 Region 2，此時吾人發現初始狀態落於 Region 2 時系統軌跡將會收斂至原點。綜合上述，當系統初始

狀態落於 Region 1 或 Region 2 時，系統軌跡將會收斂至原點，

反之則發散至 $(\infty, 0)$ 。

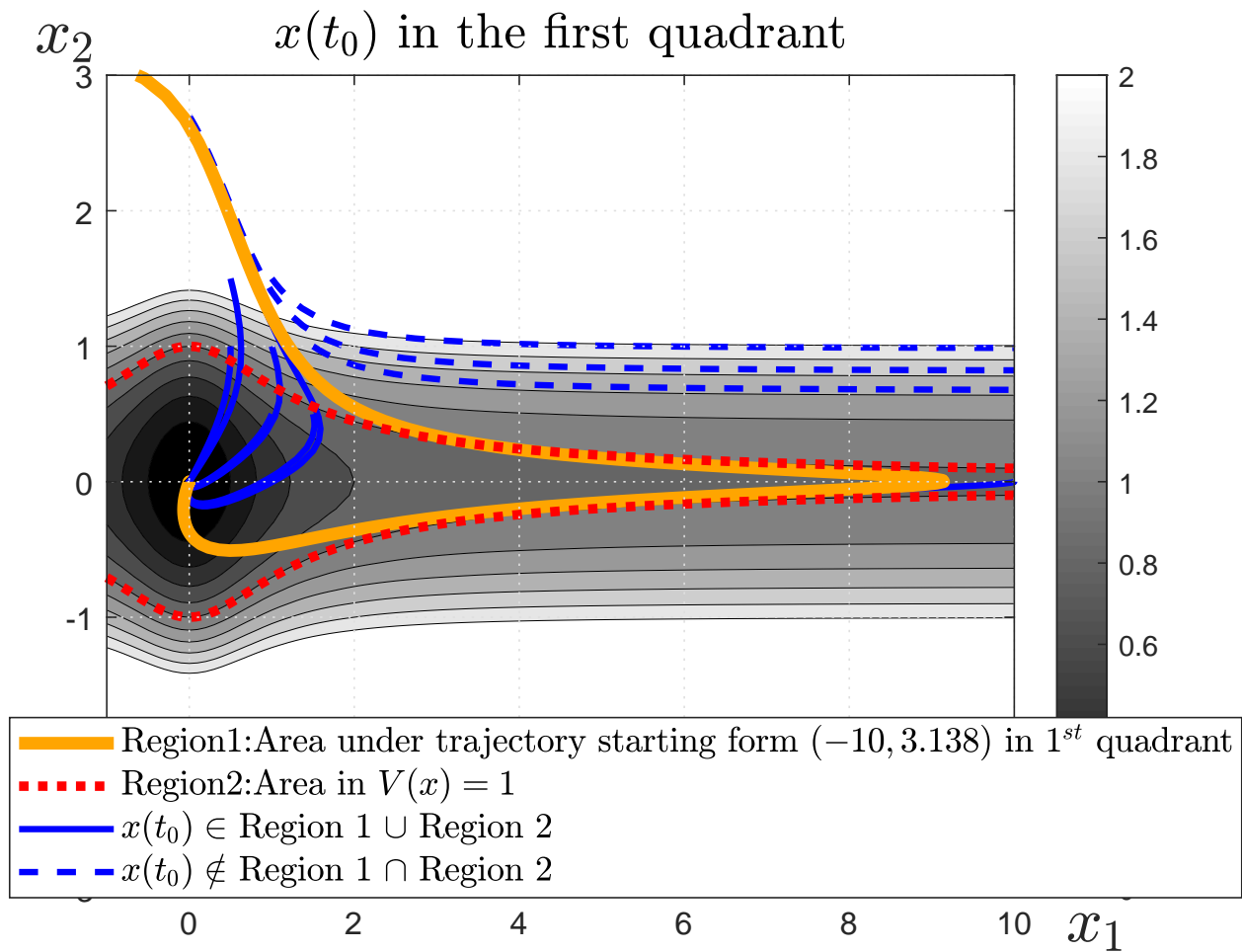


Figure 17: 相平面軌跡：  $x(t_0)$  落於第一象限

(iv) 當系統條件  $x(t_0) = (x_1(t_0), x_2(t_0))$  落於第三象限時，此時吾人給定10組初始狀態

第幾組	初始狀態	第幾組	初始狀態
$(x_1^{35}(0), x_2^{35}(0))$	$(-0.2, -6)$	$(x_1^{36}(0), x_2^{36}(0))$	$(-1.5, -0.5)$
$(x_1^{37}(0), x_2^{37}(0))$	$(-0.5, -1)$	$(x_1^{38}(0), x_2^{38}(0))$	$(-0.5, -1.5)$
$(x_1^{39}(0), x_2^{39}(0))$	$(-10, 0)$	$(x_1^{40}(0), x_2^{40}(0))$	$(-1, -0.5)$
$(x_1^{41}(0), x_2^{41}(0))$	$(-1, -1)$	$(x_1^{42}(0), x_2^{42}(0))$	$(-0.2, -7)$
$(x_1^{43}(0), x_2^{43}(0))$	$(-1, -1.5)$	$(x_1^{44}(0), x_2^{44}(0))$	$(-1.5, -1)$

模擬結果如圖 18 所示，從圖中可以發現初始狀態落於第三象限之軌跡收斂範圍將大大的受收到第四象限軌跡之影響。注意圖中橘色實線代表系統軌跡從第四象限出發時之最大收斂區間，意即  $x_2(t_0) \geq -3.138$ ，此時將橘色線在第三象限的軌跡與  $x$  軸  $y$  軸連線可取得一個封閉區域並稱之為 Region 1；從圖中吾人發現當初始狀態落於 Region 1 時，系統軌跡將會收斂到原點。再者，考慮  $V(x) < 1$  之範圍，並稱之為 Region 2，此時吾人發現初始狀態落於 Region 2 時系統軌跡將會收斂至原點。綜合上述，當系統初始



狀態落於 Region 1 或 Region 2 時，系統軌跡將會收斂至原點，

反之則發散至  $(-\infty, 0)$ 。

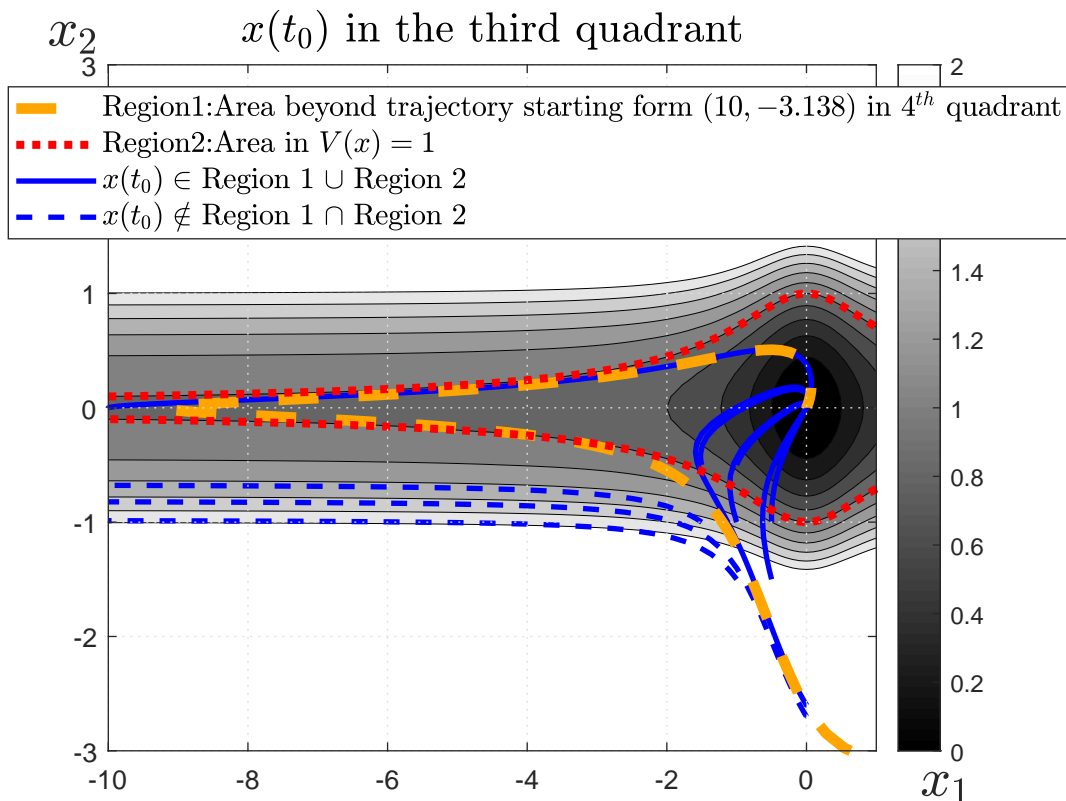


Figure 18: 相平面軌跡：  $x(t_0)$  落於第三象限

綜合上述，吾人可知此系統的最大收斂範圍為

- 系統初始狀態落於第一象限，此時當  $x(t_0)$  在 Region 1 ( $x(t_0) = (-10, 3.138)$  落於第一象限的軌跡與  $x$  軸  $y$  軸連線取得之封閉區域) 或是 Region 2 ( $V(x) < 1$ ) 時，系統軌跡收斂至原點，反之發散。

- 系統初始狀態落於第二象限，當  $x(t_0)$  滿足  $x_2(t_0) \leq 3.138$ ,  $x_1(t_0) < 0$  時，系統軌跡收點至原點，反之發散。
- 系統初始狀態落於第三象限，此時當  $x(t_0)$  在 Region 1 ( $x(t_0) = (10, -3.138)$  落於第三象限的軌跡與  $x$  軸  $y$  軸連線取得之封閉區域) 或是 Region 2 ( $V(x) < 1$ ) 時，系統軌跡收點至原點，反之發散。
- 系統初始狀態落於第四象限，當  $x(t_0)$  滿足  $x_2(t_0) \geq -3.138$ ,  $x_1(t_0) > 0$  時，系統軌跡收點至原點，反之發散。

#### 4.4. Answer to Problem 4.3 (d)

對於系統

$$\dot{x}_1 = -\frac{6x_1}{(1+x_1^2)^2} + 2x_2, \quad \dot{x}_2 = \frac{-2(x_1+x_2)}{(1+x_1^2)^2} \quad (31)$$

倘若吾人對  $x_1$  取極限，可得

$$\lim_{x_1 \rightarrow \pm\infty} \dot{x}_1 \big|_{x_2=0} = \lim_{x_1 \rightarrow \pm\infty} \left( -\frac{6x_1}{(1+x_1^2)^2} \right) = \lim_{x_1 \rightarrow \pm\infty} \left( -\frac{6}{2(1+x_1^2) \cdot 2x_1} \right) = 0 \quad (32)$$

以及

$$\lim_{x_2 \rightarrow \pm\infty} \dot{x}_2 \Big|_{x_2=0} = \lim_{x_1 \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{-2x_1}{(1+x_1^2)^2} \right) = \lim_{x_1 \rightarrow \pm\infty} \left( -\frac{2}{2(1+x_1^2) \cdot 2x_1} \right) = 0 \quad (33)$$

意即此系統除了原點一個平衡點外，還擁有  $(\infty, 0)$  及  $(-\infty, 0)$  兩個平衡點，因此對於 4.3 (c) 之系統軌跡運動情形分析，應該做出以下修正

- 系統初始狀態落於第一象限，此時當  $x(t_0)$  在 Region 1 ( $x(t_0) = (-10, 3.138)$ ) 落於第一象限的軌跡與  $x$  軸  $y$  軸連線取得之封閉區域) 或是 Region 2 ( $V(x) < 1$ ) 時，系統軌跡收點至原點，反之收斂至  $(\infty, 0)$ 。
- 系統初始狀態落於第二象限，當  $x(t_0)$  滿足  $x_2(t_0) \leq 3.138$ ,  $x_1(t_0) < 0$  時，系統軌跡收點至原點，反之收斂至  $(\infty, 0)$ 。
- 系統初始狀態落於第三象限，此時當  $x(t_0)$  在 Region 1 ( $x(t_0) = (10, -3.138)$ ) 落於第三象限的軌跡與  $x$  軸  $y$  軸連線取得之封閉區域) 或是 Region 2 ( $V(x) < 1$ ) 時，系統軌跡收點至原點，反之收斂至  $(-\infty, 0)$ 。
- 系統初始狀態落於第四象限，當  $x(t_0)$  滿足  $x_2(t_0) \geq -3.138$ ,  $x_1(t_0) >$

0 時，系統軌跡收點至原點，反之收斂至  $(-\infty, 0)$ 。

若將四個象限軌跡圖畫在一起可以更看清楚此一結果，如圖 19 所示，不同的初始狀態對應到的系統軌跡，要不是收斂到原點，就是收斂到  $(\pm\infty, 0)$ 。

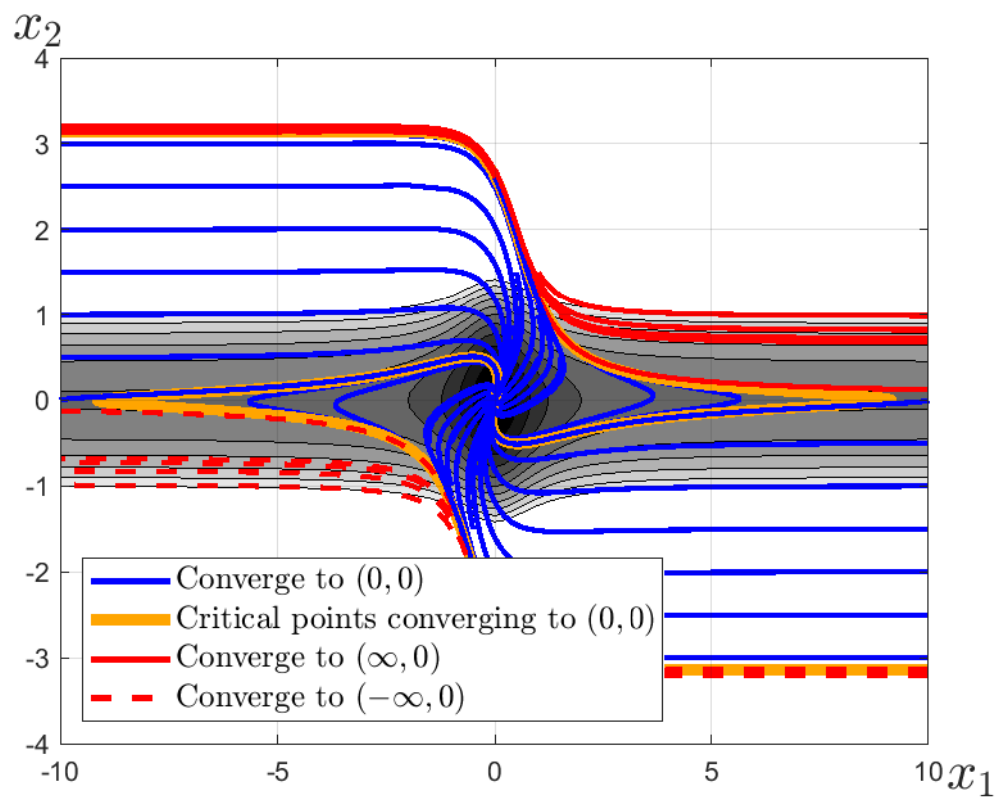


Figure 19: 相平面軌跡

## A. Appendix : Code for Problem 4.1

```

1 clear all;close all;clc;
2 tspan=[0;100]; % time interval
3 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
4 % initial conditions
5 x01=[0.65,0.65];x02=[-0.65,0.65];x03=[-0.65,-0.65];x04
   =[0.65,-0.65];x05=[1,0]; x06=[0,1];x07=[-1,0];x08=[0,-1];x09
   =[sqrt(0.5),sqrt(0.5)];x010=[-sqrt(0.5),sqrt(0.5)];x011=[-
   sqrt(0.5),-sqrt(0.5)];x012=[sqrt(0.5),-sqrt(0.5)];x013
   =[1,0.1];x014=[-1,0.1];x015=[-1,-0.1];x016=[1,-0.1];x017
   =[0.1,1];x018=[-0.1,1];x019=[-0.1,-1];x020=[0.1,-1];
6 x021=[sqrt(0.5)+0.1,sqrt(0.5)];x022=[-sqrt(0.5)-0.1,sqrt(0.5)
   ];x023=[-sqrt(0.5)-0.1,-sqrt(0.5)];x024=[sqrt(0.5)+0.1,-sqrt
   (0.5)];x025=[sqrt(0.5),sqrt(0.5)+0.1];x026=[-sqrt(0.5),sqrt
   (0.5)+0.1];x027=[-sqrt(0.5),-sqrt(0.5)-0.1];x028=[sqrt(0.5)
   ,-sqrt(0.5)-0.1];
7 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
8 %plot fugure
9 figure(1)
10 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x01);h1=arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number
   ',2,'color','b','LineWidth',2,'scale',5,'ratio','equal');;hold on
11 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x02);arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
   2,'color','b','LineWidth',2,'scale',5,'ratio','equal'
   );;hold on
12 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x03);arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
   2,'color','b','LineWidth',2,'scale',5,'ratio','equal'
   );;hold on
13 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x04);arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
   2,'color','b','LineWidth',2,'scale',5,'ratio','equal'
   );;hold on
14 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x05);h2=plot(x(:,1),x(:,2),'*','color',
   'r');;hold on
15 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x06);plot(x(:,1),x(:,2),'*','color','r
   ');;hold on
16 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x07);plot(x(:,1),x(:,2),'*','color','r

```

```

    ');hold on
17 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x08);plot(x(:,1),x(:,2),'*','color','r
    ');hold on
18 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x09);plot(x(1,1),x(2,1),'*','color','r
    ');hold on
19 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x010);plot(x(1,1),x(2,2),'*','color','
    r');hold on
20 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x011);plot(x(1,1),x(2,1),'*','color','
    r');hold on
21 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x012);plot(x(1,1),x(2,2),'*','color','
    r');hold on
22 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x013);h3=plot(x(:,1),x(:,2),'color','k
    ','LineWidth',1.5);hold on
23 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x014);plot(x(:,1),x(:,2),'color','k',
    'LineWidth',1.5);hold on
24 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x015);plot(x(:,1),x(:,2),'color','k',
    'LineWidth',1.5);hold on
25 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x016);plot(x(:,1),x(:,2),'color','k',
    'LineWidth',1.5);hold on
26 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x017);plot(x(:,1),x(:,2),'color','k',
    'LineWidth',1.5);hold on
27 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x018);plot(x(:,1),x(:,2),'color','k',
    'LineWidth',1.5);hold on
28 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x019);plot(x(:,1),x(:,2),'color','k',
    'LineWidth',1.5);hold on
29 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x020);plot(x(:,1),x(:,2),'color','k',
    'LineWidth',1.5);hold on
30 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x021);plot(x(:,1),x(:,2),'color','k',
    'LineWidth',1.5);hold on
31 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x022);plot(x(:,1),x(:,2),'color','k',
    'LineWidth',1.5);hold on
32 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x023);plot(x(:,1),x(:,2),'color','k',
    'LineWidth',1.5);hold on
33 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x024);plot(x(:,1),x(:,2),'color','k',
    'LineWidth',1.5);hold on
34 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x025);plot(x(:,1),x(:,2),'color','k',
    'LineWidth',1.5);hold on
35 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x026);plot(x(:,1),x(:,2),'color','k',
    'LineWidth',1.5);hold on
36 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x027);plot(x(:,1),x(:,2),'color','k',
    'LineWidth',1.5);hold on

```

```

37 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x028);plot(x(:,1),x(:,2),'color','k',
    'LineWidth',1.5);hold on
38 theta=0:0.01:2*pi;
39 h4=plot(sin(theta),cos(theta),'r:','LineWidth',1.5);hold on
40 % %axis
41 xlim([-2 2]);ylim([-2 2]);
42 h0 = gca;
43 pos = get(h0, 'position');
44 hx = axes('position',[pos(1),pos(2)+pos(4)/2,pos(3),pos(4)*1e
    -5]);
45 xlim0 = get(h0, 'xlim');
46 set(hx, 'xlim',xlim0);
47 xtick0 = get(h0, 'xtick');
48 xtick0(xtick0-0 == 0) = [];
49 set(hx, 'xtick', []);
50 xlabel({'$x_1$'}, 'FontSize',20,'Interpreter','latex','position',
    '[2 35]');
51 hy = axes('position',[pos(1)+pos(3)/2, pos(2), pos(3)*1e-5,
    pos(4)]);
52 ylim0 = get(h0, 'ylim');
53 set(hy, 'ylim',ylim0);
54 ytick0 = get(h0, 'ytick');
55 set(hy, 'ytick', []);
56 ylabel({'$x_2$'}, 'FontSize',20,'Rotation',0,'Interpreter','
    latex','position',[-20 1.8]);
57 annotation('arrow',[pos(1)+pos(3)/2,pos(1)+pos(3)],[pos(2)+pos
    (4)/2,pos(2)+pos(4)/2]);
58 annotation('arrow',[pos(1)+pos(3)/2,pos(1)+pos(3)/2],[pos(2)+
    pos(4)/2,pos(2)+pos(4)]);
59 set(h0, 'Visible','off');
60 legend([h1,h2,h3,h4],{'$x_1^2(t_0)+x_2^2(t_0)<1$','$x_1^2(t_0)
    +x_2^2(t_0)=1$','$x_1^2(t_0)+x_2^2(t_0)>1$','auxiliary line'
    },'fontsize',16,'Interpreter','latex','location','SouthEast'
    );
61 %ODE
62 function y = ode(t,x)
63 y = zeros(2,1);
64 y(1) = (x(1)-x(2))*(x(1)^2+x(2)^2-1);
65 y(2) = (x(1)+x(2))*(x(1)^2+x(2)^2-1);
66 end

```

## B. Appendix : Code for Problem 4.2

```

1 clear all;close all;clc;
2
3 tspan=[0;100]; % time interval
4 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
5 % initial conditions
6 x01=[0.5,0.9];x02=[-0.5,0.9];x03=[-0.5,-0.9];x04=[0.5,-0.9];
   x05=[0.9,0.5]; x06=[-0.9,0.5];x07=[-0.9,-0.5];x08
   =[0.9,-0.5];x09=[-3,2];x010=[-4,3];x011=[3,-2];x012=[4,-3];
   x013=[1.5,0.6];x014=[-1.5,-0.6];x015=[0.76,1.03];x016
   =[-0.76,-1.03];x017=[2,2];x018=[3,3];x019=[-2,-2];x020
   =[-3,-3];x021=[1,4];x022=[-1,-4];x023=[2,3];x024=[-2,-3];
7 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
8 plot fugure
9 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
10 %%%% D_1
11 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
12 figure(1)
13 [x,y] = meshgrid(-5:0.01:5,-5:0.01:5);
14 p=1-2.*x.*y;contourf(x,y,p,100);hold on;
15 caxis([-0.1 0]);colorbar;colormap gray;grid on;
16 title({'$1-2x_1x_2>0$'},'fontsize',16,'Interpreter','latex')
17 print 4.2c_1.eps -depsc
18 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
19 %%% D_2
20 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
21 figure(2)
22 [x,y] = meshgrid(-5:0.01:5,-5:0.01:5);
23 p=y.^2-x.^2+((2*x.^2)./(1-x.*y));contourf(x,y,p);hold on;
24 caxis([-0.1 0]);colorbar;colormap gray;grid on;
25 title({'$x_2^2-x_1^2+\frac{2x_1^2}{1-x_1x_2}>0$'},'fontsize',
        ,16,'Interpreter','latex')
26 print 4.2c_2.eps -depsc
27 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
28 %%% ALL_1
29 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
30 figure(3)

```



```

31 [x,y] = meshgrid(-5:0.01:5,-5:0.01:5);
32 p=1-2.*x.*y; contourf(x,y,p,100); hold on;
33 caxis([-0.1 0]); colormap gray; grid on;
34 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x01); h1=arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
    '1','color','b','LineWidth',2,'scale',1,'ratio','equal'); hold on
35 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x02); arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
    '1','color','b','LineWidth',2,'scale',1,'ratio','equal'); hold on
36 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x03); arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
    '1','color','b','LineWidth',2,'scale',1,'ratio','equal'); hold on
37 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x04); arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
    '1','color','b','LineWidth',2,'scale',1,'ratio','equal'); hold on
38 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x05); arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
    '1','color','b','LineWidth',2,'scale',1,'ratio','equal'); hold on
39 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x06); arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
    '1','color','b','LineWidth',2,'scale',1,'ratio','equal'); hold on
40 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x07); arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
    '1','color','b','LineWidth',2,'scale',1,'ratio','equal'); hold on
41 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x08); arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
    '1','color','b','LineWidth',2,'scale',1,'ratio','equal'); hold on
42 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x09); h2=arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
    '1','color','m','LineWidth',3,'scale',1,'ratio','equal'); hold on
43 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x010); arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
    '1','color','m','LineWidth',3,'scale',1,'ratio','equal'); hold on
44 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x011); arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
    '1','color','m','LineWidth',3,'scale',1,'ratio','equal'); hold on
45 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x012); arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
    '1','color','m','LineWidth',3,'scale',1,'ratio','equal'); hold on
46 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x013); h3=arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'
    number','1','color','r','LineWidth',2,'scale',1,'ratio',

```

```

, 'equal');hold on
47 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x014);arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
1,'color','r','LineWidth',2,'scale',1,'ratio','equal
');hold on
48 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x015);arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
1,'color','r','LineWidth',2,'scale',1,'ratio','equal
');hold on
49 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x016);arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
1,'color','r','LineWidth',2,'scale',1,'ratio','equal
');hold on
50 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x017);h4=plot(x(:,1),x(:,2),'LineWidth
',3,'color',[1.0 0.3125 0]);hold on
51 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x018);plot(x(:,1),x(:,2),'LineWidth',
3,'color',[1.0 0.3125 0]);hold on
52 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x019);plot(x(:,1),x(:,2),'LineWidth',
3,'color',[1.0 0.3125 0]);hold on
53 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x020);plot(x(:,1),x(:,2),'LineWidth',
3,'color',[1.0 0.3125 0]);hold on
54 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x021);h5=plot(x(:,1),x(:,2),'LineWidth
',3,'color',[1, 0.6732, 0]);hold on
55 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x022);plot(x(:,1),x(:,2),'LineWidth',
3,'color',[1, 0.6732, 0]);hold on
56 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x023);plot(x(:,1),x(:,2),'LineWidth',
3,'color',[1, 0.6732, 0]);hold on
57 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x024);plot(x(:,1),x(:,2),'LineWidth',
3,'color',[1, 0.6732, 0]);hold on
58 % %axis
59 xlim([-5 5]); ylim([-5 5]);
60 xlabel({'$x_1$'},'FontSize',20,'Interpreter','latex','position
',[6 -4]);
61 ylabel({'$x_2$'},'FontSize',20,'Rotation',0,'Interpreter','
latex','position',[-6 4.5]);
62 legend([h1,h2,h3,h4,h5],{'$x(t_0)\in D_1\cap D_2$','$x(t_0)\in\{R^2-D_1\}\cap D_2$','$x(t_0)\in D_1\cap\{R^2-D_2\}$','$x(t_0)\in\{R^2-D_1\}\cap\{R^2-D_2\}$','Strange range'},'
fontsize',16,'Interpreter','latex','location','NorthEast');
63 %%%%%%%%%%%
64 %%% ALL-2
65 %%%%%%%%%%%
66 figure(4)
67 [x,y] = meshgrid(-5:0.01:5,-5:0.01:5);

```

```

68 p=y.^2-x.^2+((2*x.^2)./(1-x.*y)); contourf(x,y,p); hold on;
69 caxis([-0.1 0]); colormap gray; grid on;
70 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x01); h1=arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
    1,'color','b','LineWidth',2,'scale',1,'ratio','equal'); hold on
71 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x02); arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
    1,'color','b','LineWidth',2,'scale',1,'ratio','equal'); hold on
72 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x03); arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
    1,'color','b','LineWidth',2,'scale',1,'ratio','equal'); hold on
73 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x04); arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
    1,'color','b','LineWidth',2,'scale',1,'ratio','equal'); hold on
74 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x05); arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
    1,'color','b','LineWidth',2,'scale',1,'ratio','equal'); hold on
75 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x06); arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
    1,'color','b','LineWidth',2,'scale',1,'ratio','equal'); hold on
76 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x07); arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
    1,'color','b','LineWidth',2,'scale',1,'ratio','equal'); hold on
77 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x08); arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
    1,'color','b','LineWidth',2,'scale',1,'ratio','equal'); hold on
78 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x09); h2=arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
    1,'color','m','LineWidth',3,'scale',1,'ratio','equal'); hold on
79 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x010); arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
    1,'color','m','LineWidth',3,'scale',1,'ratio','equal'); hold on
80 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x011); arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
    1,'color','m','LineWidth',3,'scale',1,'ratio','equal'); hold on
81 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x012); arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
    1,'color','m','LineWidth',3,'scale',1,'ratio','equal'); hold on
82 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x013); h3=arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'
    number',1,'color','r','LineWidth',2,'scale',1,'ratio',
    'equal'); hold on

```

```

83 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x014);arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
      1,'color','r','LineWidth',2,'scale',1,'ratio','equal
      ');hold on
84 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x015);arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
      1,'color','r','LineWidth',2,'scale',1,'ratio','equal
      ');hold on
85 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x016);arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
      1,'color','r','LineWidth',2,'scale',1,'ratio','equal
      ');hold on
86 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x017);h4=plot(x(:,1),x(:,2),'LineWidth
      ',3,'color',[1.0 0.3125 0]);hold on
87 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x018);plot(x(:,1),x(:,2),'LineWidth',
      3,'color',[1.0 0.3125 0]);hold on
88 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x019);plot(x(:,1),x(:,2),'LineWidth',
      3,'color',[1.0 0.3125 0]);hold on
89 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x020);plot(x(:,1),x(:,2),'LineWidth',
      3,'color',[1.0 0.3125 0]);hold on
90 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x021);h5=plot(x(:,1),x(:,2),'LineWidth
      ',3,'color',[1, 0.6732, 0]);hold on
91 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x022);plot(x(:,1),x(:,2),'LineWidth',
      3,'color',[1, 0.6732, 0]);hold on
92 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x023);plot(x(:,1),x(:,2),'LineWidth',
      3,'color',[1, 0.6732, 0]);hold on
93 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x024);plot(x(:,1),x(:,2),'LineWidth',
      3,'color',[1, 0.6732, 0]);hold on
94 % %axis
95 xlim([-5 5]); ylim([-5 5]);
96 xlabel({'$x_1$'},'FontSize',20,'Interpreter','latex','position
     ',[6 -4]);
97 ylabel({'$x_2$'},'FontSize',20,'Rotation',0,'Interpreter','
      latex','position',[-6 4.5]);
98 legend([h1,h2,h3,h4,h5],{'$x(t_0)\in D_1\cap D_2$','$x(t_0)\in
      \{R^2-D_1\}\cap D_2$','$x(t_0)\in D_1\cap \{R^2-D_2\}$','$x
      (t_0)\in \{R^2-D_1\}\cap \{R^2-D_2\}$','Strange range'},'
      fontsize',16,'Interpreter','latex','location','NorthEast');
99 %%%%%%%%%%%
100 %%% ALL_3
101 %%%%%%%%%%%
102 figure(5)
103 [x,y] = meshgrid(-5:0.01:5,-5:0.01:5);
104 p=y.^2-x.^2+((2*x.^2)./(1-x.*y));contourf(x,y,p);hold on;

```

```

105 caxis([-0.1 0]);colormap gray;grid on;
106 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x01);h1=arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
    1,'color','b','LineWidth',2,'scale',1,'ratio','equal');hold on
107 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x02);arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
    1,'color','b','LineWidth',2,'scale',1,'ratio','equal');hold on
108 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x03);arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
    1,'color','b','LineWidth',2,'scale',1,'ratio','equal');hold on
109 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x04);arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
    1,'color','b','LineWidth',2,'scale',1,'ratio','equal');hold on
110 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x05);arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
    1,'color','b','LineWidth',2,'scale',1,'ratio','equal');hold on
111 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x06);arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
    1,'color','b','LineWidth',2,'scale',1,'ratio','equal');hold on
112 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x07);arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
    1,'color','b','LineWidth',2,'scale',1,'ratio','equal');hold on
113 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x08);arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
    1,'color','b','LineWidth',2,'scale',1,'ratio','equal');hold on
114 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x09);h2=arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
    1,'color','m','LineWidth',3,'scale',1,'ratio','equal');hold on
115 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x010);arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
    1,'color','m','LineWidth',3,'scale',1,'ratio','equal');hold on
116 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x011);arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
    1,'color','m','LineWidth',3,'scale',1,'ratio','equal');hold on
117 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x012);arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
    1,'color','m','LineWidth',3,'scale',1,'ratio','equal');hold on
118 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x013);h3=arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
    1,'color','r','LineWidth',2,'scale',1,'ratio','equal');hold on
119 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x014);arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',

```

```

        1, 'color', 'r', 'LineWidth', 2, 'scale', 1, 'ratio', 'equal
    ');hold on
120 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x015);arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
        1, 'color', 'r', 'LineWidth', 2, 'scale', 1, 'ratio', 'equal
    ');hold on
121 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x016);arrowPlot(x(:,1),x(:,2),'number',
        1, 'color', 'r', 'LineWidth', 2, 'scale', 1, 'ratio', 'equal
    ');hold on
122 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x017);h4=plot(x(:,1),x(:,2), 'LineWidth
        ', 3, 'color', [1.0 0.3125 0]);hold on
123 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x018);plot(x(:,1),x(:,2), 'LineWidth',
        3, 'color', [1.0 0.3125 0]);hold on
124 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x019);plot(x(:,1),x(:,2), 'LineWidth',
        3, 'color', [1.0 0.3125 0]);hold on
125 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x020);plot(x(:,1),x(:,2), 'LineWidth',
        3, 'color', [1.0 0.3125 0]);hold on
126 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x021);h5=plot(x(:,1),x(:,2), 'LineWidth
        ', 3, 'color', [1, 0.6732, 0]);hold on
127 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x022);plot(x(:,1),x(:,2), 'LineWidth',
        3, 'color', [1, 0.6732, 0]);hold on
128 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x023);plot(x(:,1),x(:,2), 'LineWidth',
        3, 'color', [1, 0.6732, 0]);hold on
129 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x024);plot(x(:,1),x(:,2), 'LineWidth',
        3, 'color', [1, 0.6732, 0]);hold on
130 x1=-10:0.01:-0.01;plot(x1,(x1.^(-1)), 'r—', 'LineWidth',5);
        hold on
131 x1=0.01:0.01:10;plot(x1,(x1.^(-1)), 'r—', 'LineWidth',5);hold
        on
132 % %axis
133 xlim([-5 5]);
134 ylim([-5 5]);
135 xlabel({'$x_1$'}, 'FontSize',20, 'Interpreter', 'latex', 'position
        ', [6 -4]);
136 ylabel({'$x_2$'}, 'FontSize',20, 'Rotation',0, 'Interpreter', '
        latex', 'position', [-6 4.5]);
137 legend([h1,h2,h3,h4,h5],{'$x(t_0)\in D_1\cap D_2^*$', '$x(t_0)
        \in \{R^2-D_1\}\cap D_2^*$', '$x(t_0)\in D_1\cap \{R^2-D_2^*\}$
        ', '$x(t_0)\in \{R^2-D_1\}\cap \{R^2-D_2^*\}$', 'Strange range
        $\Longrightarrow$ solve !'}, 'fontsize',16, 'Interpreter', '
        latex', 'location', 'NorthEast');
138 %ODE

```

```
139 function y = ode(t,x)
140 y = zeros(2,1);
141 y(1) = -x(1)+(2*x(1)^2)*x(2);
142 y(2) = -x(2);
143 end
```

### C. Appendix : Code for Problem 4.3

```

1 clear all;close all;clc;
2 tspan=[0;1000]; % time interval
3 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
4 % initial conditions
5 x01=[-10,0.5];x02=[-10,1];x03=[-10,1.5];x04=[-10,2];x05
   =[-10,2.5];x06=[-10,3];x07=[-10,3.1];x08=[-10,3.135];x09
   =[-10,3.137];x010=[-10,3.138];x011=[-10,3.139];x012
   =[-10,3.2];x013=-1*[-10,0.5];x014=-1*[-10,1];x015
   =-1*[-10,1.5];x016=-1*[-10,2];x017=-1*[-10,2.5];x018
   =-1*[-10,3];x019=-1*[-10,3.1];x020=-1*[-10,3.135];x021
   =-1*[-10,3.137];x022=-1*[-10,3.138];x023=-1*[-10,3.139];x024
   =-1*[-10,3.2];x025=[0,2.6];x026=[1.5,0.5];x027=[0.5,1];x028
   =[0.5,1.5];x029=[10,0];x030=[1,0.5];x031=[1,1];x032=[0,2.7];
   x033=[1,1.5];x034=[1.5,1];x035=-1*[0,2.6];x036=-1*[1.5,0.5];
   x037=-1*[0.5,1];x038=-1*[0.5,1.5];x039=-1*[10,0];x040
   =-1*[1,0.5];x041=-1*[1,1];x042=-1*[0,2.7];x043=-1*[1,1.5];
   x044=-1*[1.5,1];
6 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
7 plot figure
8 [x,y] = meshgrid(-10:0.1:10,-4:0.1:4);
9 z=y.^2+((x.^2)./(1+x.^2));
10 q=contourf(x,y,z,70);hold on;
11 colorbar;colormap gray;grid on;
12 a1=ezplot(' (u.^2/(1+u.^2))+v.^2-0.2 ',[-10,10 -4,4]);hold on;
   set(a1,'color','[0.902 0.7647 0.3608]','linewidth',2,'
   linestyle','-');
13 a2=ezplot(' (u.^2/(1+u.^2))+v.^2-0.4 ',[-10,10 -4,4]);hold on;
   set(a2,'color','[0.67 0 1]','linewidth',2,'linestyle','-');
14 a3=ezplot(' (u.^2/(1+u.^2))+v.^2-0.6 ',[-10,10 -4,4]);hold on;
   set(a3,'color','[0.9412 0.5 0.5]','linewidth',2,'linestyle',
   '-');
15 a4=ezplot(' (u.^2/(1+u.^2))+v.^2-0.8 ',[-10,10 -4,4]);hold on;
   set(a4,'color','[0.8 0.702 0.549]','linewidth',2,'linestyle',
   '-');
16 a5=ezplot(' (u.^2/(1+u.^2))+v.^2-1 ',[-10,10 -4,4]);hold on;
   set(a5,'color','r','linewidth',4,'linestyle','-');

```



```

17 a6=ezplot(' (u.^2/(1+u.^2))+v.^2-1.2', [-10,10 -4,4]); hold on;
    set(a6, 'color', '[0.5 0.5 0]', 'linewidth', 2, 'linestyle', '-');
18 a7=ezplot(' (u.^2/(1+u.^2))+v.^2-1.4', [-10,10 -4,4]); hold on;
    set(a7, 'color', '[0.333 0.4196 0.1843]', 'linewidth', 2, 'linestyle', '-');
19 a8=ezplot(' (u.^2/(1+u.^2))+v.^2-1.6', [-10,10 -4,4]); hold on;
    set(a8, 'color', '[0.498 1 0.8314]', 'linewidth', 2, 'linestyle', '-');
20 a9=ezplot(' (u.^2/(1+u.^2))+v.^2-1.8', [-10,10 -4,4]); hold on;
    set(a9, 'color', '[0.6901 0.549 0.3922]', 'linewidth', 2, 'linestyle', '-');
21 a10=ezplot(' (u.^2/(1+u.^2))+v.^2-2', [-10,10 -4,4]); hold on;
    set(a10, 'color', '[0 0 1]', 'linewidth', 2, 'linestyle', '-');
22 title('Level curve of  $V(x)=\frac{x_1^2}{1+x_1^2}+x_2^2$ ', 'FontSize', 16, 'Interpreter', 'latex');
23 legend([a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,a10], {'$V(x)=0.2$', '$V(x)=0.4$', '$V(x)=0.6$', '$V(x)=0.8$', '$V(x)=1$', '$V(x)=1.2$', '$V(x)=1.4$', '$V(x)=1.6$', '$V(x)=1.8$', '$V(x)=2$'}, 'fontsize', 16, 'Interpreter', 'latex', 'location', 'SouthEast');
24 xlabel({'$x_1$'}, 'FontSize', 20, 'Interpreter', 'latex', 'position', [11.5 -4]);
25 ylabel({'$x_2$'}, 'FontSize', 20, 'Rotation', 0, 'Interpreter', 'latex', 'position', [-11.5 3.5]);
26 [x,y] = meshgrid(-10:0.1:10, -4:0.1:4);
27 z=y.^2+((x.^2)./(1+x.^2));
28 q=contourf(x,y,z,[0:0.2:2], 'linewidth', 0.1); hold on; caxis([0 2]);
29 colormap gray; grid on;
30 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x01); a1=plot(x(:,1),x(:,2), 'b', 'LineWidth', 2); hold on
31 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x02); plot(x(:,1),x(:,2), 'b', 'LineWidth', 2); hold on
32 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x03); plot(x(:,1),x(:,2), 'b', 'LineWidth', 2); hold on
33 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x04); plot(x(:,1),x(:,2), 'b', 'LineWidth', 2); hold on
34 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x05); plot(x(:,1),x(:,2), 'b', 'LineWidth', 2); hold on
35 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x06); plot(x(:,1),x(:,2), 'b', 'LineWidth', 2); hold on
36 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x07); plot(x(:,1),x(:,2), 'b', 'LineWidth', 2); hold on

```

```

    ', 2);hold on
37 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x08);plot(x(:,1),x(:,2),'b','LineWidth
    ', 2);hold on
38 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x09);plot(x(:,1),x(:,2),'b','LineWidth
    ', 2);hold on
39 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x010);a2=plot(x(:,1),x(:,2),'color',[1
    0.6471 0'],'LineWidth',4);hold on
40 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x011);a3=plot(x(:,1),x(:,2),'r','
    LineWidth', 2);hold on
41 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x012);plot(x(:,1),x(:,2),'r','
    LineWidth', 2);hold on
42 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x013);plot(x(:,1),x(:,2),'b','
    LineWidth', 2);hold on
43 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x014);plot(x(:,1),x(:,2),'b','
    LineWidth', 2);hold on
44 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x015);plot(x(:,1),x(:,2),'b','
    LineWidth', 2);hold on
45 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x016);plot(x(:,1),x(:,2),'b','
    LineWidth', 2);hold on
46 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x017);plot(x(:,1),x(:,2),'b','
    LineWidth', 2);hold on
47 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x018);plot(x(:,1),x(:,2),'b','
    LineWidth', 2);hold on
48 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x019);plot(x(:,1),x(:,2),'b','
    LineWidth', 2);hold on
49 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x020);plot(x(:,1),x(:,2),'b','
    LineWidth', 2);hold on
50 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x021);a1=plot(x(:,1),x(:,2),'b','
    LineWidth', 2);hold on
51 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x022);a2=plot(x(:,1),x(:,2),'color',[1
    0.6471 0'],'LineWidth',4);hold on
52 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x023);a4=plot(x(:,1),x(:,2),'r—','
    LineWidth', 2);hold on
53 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x024);plot(x(:,1),x(:,2),'r—','
    LineWidth', 2);hold on
54 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x025);plot(x(:,1),x(:,2),'b','
    LineWidth', 2);hold on
55 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x026);plot(x(:,1),x(:,2),'b','
    LineWidth', 2);hold on
56 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x027);plot(x(:,1),x(:,2),'b','
    LineWidth', 2);hold on

```

```

57 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x028);plot(x(:,1),x(:,2),'b', '
    LineWidth', 2);hold on
58 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x029);plot(x(:,1),x(:,2),'b', '
    LineWidth', 2);hold on
59 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x030);plot(x(:,1),x(:,2),'b', '
    LineWidth', 2);hold on
60 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x031);plot(x(:,1),x(:,2),'b', '
    LineWidth', 2);hold on
61 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x032);plot(x(:,1),x(:,2),'r', '
    LineWidth', 2);hold on
62 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x033);plot(x(:,1),x(:,2),'r', '
    LineWidth', 2);hold on
63 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x034);plot(x(:,1),x(:,2),'r', '
    LineWidth', 2);hold on
64 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x035);plot(x(:,1),x(:,2),'b', '
    LineWidth', 2);hold on
65 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x036);plot(x(:,1),x(:,2),'b', '
    LineWidth', 2);hold on
66 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x037);plot(x(:,1),x(:,2),'b', '
    LineWidth', 2);hold on
67 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x038);plot(x(:,1),x(:,2),'b', '
    LineWidth', 2);hold on
68 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x039);plot(x(:,1),x(:,2),'b', '
    LineWidth', 2);hold on
69 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x040);plot(x(:,1),x(:,2),'b', '
    LineWidth', 2);hold on
70 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x041);plot(x(:,1),x(:,2),'b', '
    LineWidth', 2);hold on
71 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x042);plot(x(:,1),x(:,2),'r—', '
    LineWidth', 2);hold on
72 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x043);plot(x(:,1),x(:,2),'r—', '
    LineWidth', 2);hold on
73 [t,x]=ode45(@ode,tspan,x044);plot(x(:,1),x(:,2),'r—', '
    LineWidth', 2);hold on
74 xlim([-10 10]);ylim([-4 4]);
75 legend([a1,a2,a3,a4],{'Converge to $(0,0)$','Critical points
    converging to $(0,0)$','Converge to $(\infty,0)$','Converge
    to $(-\infty,0)$'},'fontsize',12,'Interpreter','latex','
    location','SouthWest');
76 xlabel({'$x_1$'},'Fontsize',20,'Interpreter','latex','position
   ',[11 -4]);

```

```

77 ylabel({'$x_2$'}, 'FontSize', 20, 'Rotation', 0, 'Interpreter', '
    latex', 'position', [-10.5 4]);
78 function y = ode(t,x)
79 y = zeros(2,1);
80 y(1) = -6*x(1)/((1+x(1)^2)^2)+2*x(2);
81 y(2) = -2*(x(1)+x(2))/((1+x(1)^2)^2);
82 end

```

## 參考文獻

- [1] 楊憲東，非線性系統與控制. I, 系統分析，成大出版社，2015
- [2] Slotine, J.-J. E., and Weiping L.. *Applied nonlinear control*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice hall, 1991.
- [3] Khalil, H. K., and Jessy W. G. *Nonlinear systems*. Upper Saddle River, NJ: Prentice hall, 2002.