非線性控制

Nonlinear Control

第一章作業



學 號 : P46071204

研 究 生 : 蔡 旻 哲

授課教授 : 楊 憲 東

Department of Aeronautics and Astronautics National Cheng Kung University Tainan, Taiwan, R.O.C.

中 華 民 國 109 年 9 月 25 日

國立成功大學航太系 智慧嵌入式控制實驗室(IEC-Lab)

目錄

第 1 題. ....................................................................................................................... 2 第 2 題. ....................................................................................................................... 4 第 3 題. ....................................................................................................................... 6 Matlab Code ............................................................................................................... 9

1

國立成功大學航太系 智慧嵌入式控制實驗室(IEC-Lab)

第1題.

Question:

渾沌(chaos)的測試。試用 Matlab 求解非線性 ODE

  0 1 5 (1.1)

x x x t    . cos 3

測試兩組很接近的初始條件

(a) x x 0 3 0 4   ,  

(b) x x 0 3 01 0 4 01   . , .  

比對兩組x t 對時間的響應圖，是否很接近?若把非線性項x3 改成線性項x ，情況又 如何?

Answer:

0 ~~5 10 15 20 25~~ 30 05 ~~10 15 20 25~~ 30

考慮(1.1)，我們令x x x x   , 1 2  ，則(1.1)可以被轉為以下狀態空間方程表示式                       

x xt x

0 1 0 0 

1 1 3

5

cos

(1.2) x x

           

0 0 1 1 1

1

.

2 2

其中 2 組初始條件個別為:

Case 1:

x x    ,   1 2 0 3 0 4 (1.3)

Case 2:

x x    . , .   1 2 0 3 01 0 4 01 (1.4)

將(1.3)、(1.4)個別代入(1.2)，並且透過 Matlab 中的 ODE45 數值積分求解x1 ，其結果 如圖 1.1、圖 1.2

4

4

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

2

2

0

0

-2

-2

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

-4

-4

Time (s)

Time (s)

圖 1.1、Case 1 之非線性系統響應 圖 1.2、Case 2 之非線性系統響應 並且比較兩種不同初始值的非線性系統響應如圖 1.3，從圖中可以看出初始值的差異， 導致在時間t  9秒、t  27 秒時系統響應有所不同，但由於系統的初始值的差異非常

的小，且非線性項對於整個系統的權重不高，因此大部分的響應皆還是重疊的。 然而若將(1.1)中的非線性項x3 改成線性項x ，則(1.1)被改寫為

2

國立成功大學航太系 智慧嵌入式控制實驗室(IEC-Lab)

0 5 10 15 20 25 30 0 5 10 15 20 25 30

x x x t      0 1 5 . cos (1.5)

利用同樣的方法令x x x x   , 1 2  ，則(1.5)可以推導為以下線性狀態空間方程式                  

x xt

0 1 05 

1 1

cos

(1.6)

x x

         

1 0 1 1

.

2 2

將(1.3)、(1.4)個別代入(1.6)，並且透過 Matlab 中的 ODE45 數值積分求解，其響應結 果比較如圖 1.4 所示，從圖中可以看出由於(1.6)為線性系統，因此微小的初始值差異 幾乎不會影響到系統完整的響應。

4

50

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

2

0

0

-2

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |

-4

-50

Time (s)

Time (s)

圖 1.3、非線性系統響應於不同初始值之 比較

圖 1.4、線性系統響應於不同初始值之比 較

3

國立成功大學航太系 智慧嵌入式控制實驗室(IEC-Lab)

選取初始位置  x y z       0 0 0 1 1 0 , , , ,  ，畫出軌跡點  x t y t z t       , , 隨時間t 0 連續變化到t T 所連成的曲線。比較三種終端時間:T 100 1000 10000 , , ，所得到的奇異吸子軌跡有何不同?如果將初始位置改成  x y z       0 0 0 10 1 0 , , , ,   ，其結果有何不

x y x

z xy z  

y x z y

  

 

 

第2題.

Question:

8 3

Lorentz 奇異吸子的測試:用 Matlab 求解下列非線性 ODE 

 

10



同? Answer:

28 

(2.1)

考慮(2.1)之 Lorentz 系統，代入第一組初始值，並且針對不同的終端時間，透過Matlab 中的 ODE45 數值積分求解其響應如圖 2.1，圖中終端時間T 100秒、T 1000 秒、T 10000分別標示為綠線藍線、紅線、綠線，而由圖中看到可以儘管終端時間增加，系統的軌跡並不會重疊，而是持續的填滿特定的區域，這個即為奇異吸子的現象。

圖 2.2 為另一組初始值的系統軌跡響應，由圖中可以看到，儘管初始值有所差異，然而系統軌跡還是會隨著時間以類似的軌跡在纏繞，並且不會重疊，這樣的結果驗證了奇異吸子的特殊現象。

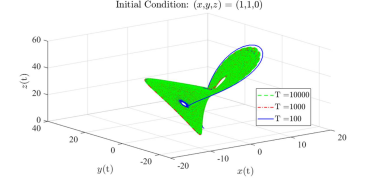
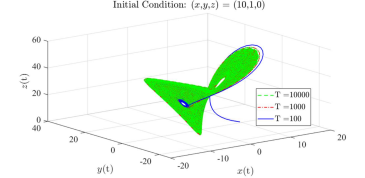


圖 2.1、Lorentz 系統於第一組初始值之奇異吸子軌跡

4

國立成功大學航太系 智慧嵌入式控制實驗室(IEC-Lab)

0 20 40 60 80 100 圖 2.2、Lorentz 系統於第二組初始值之奇異吸子軌跡

30

20

10

0

-10

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  | x t  |  |  |
|  |  |  |  |  |

-20

Time (s)

圖 2.3、Lorentz 系統之不同初始狀態響應比較

圖 2.3 針對 Lorentz 系統(2.1)中的狀態，以不同初始值帶入系統做比較，從圖中結果可以看出，非線性系統的初始值差異會大大的影響系統隨時間之後的響應。

5

國立成功大學航太系 智慧嵌入式控制實驗室(IEC-Lab)

第3題.

Question:

霍普夫分岔(Hopf bifurcation)的測試: 考慮下列非線性 ODE x x y x x y

   

2

2 2





2

 

y x y y x y    

2

2 2

(3.1)



其中是常數



2

 

(a) 將直角坐標x y, 轉成極座標r ,，並將上式用r ， 表示之。 (b) 任選三個不同的值:       , , 1 2 3 0 0 0，用 Matlab 畫出其相對應的軌跡圖 x t y t  ,  。參考 1.6 節中第一個例題及圖 1.6.3 的討論。

(c) 根據極座標方程式及上述之軌跡變化，推論出分岔現象發生時之 c 值。 (d) 比較   c 及   c 二種情形下，平衡點數目是否有改變，軌跡的幾何結構是否 有改變?

Answer: (a):

   

     ~~~~          ~~~~ 

參考非線性系統(3.1)，為了將系統以極座標表示，令

1 2 2 2 (3.2)

r x y    

tanyx

 1(3.3)

   

將(3.2)、(3.3)對時間做一次偏導數並且透過r,  代換如下

         

1 2 2 2

  

r x y xx yy

  

1 2 2 2

-

              

   

1 2 2 2 2 2 2 2 2 2

x y x x y x x y y x y y x y

 

2 2

-

           

1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 x y x y x y x y

(3.4)

-

  r r



2

 



2

4

              



1

  y x yx yx x



1

2 2

              

1 2 2 2 2 2 2 2 2 x y x x y y x y y x y x x y  



   x y x y



1

2 2 2 2 

1

2 2

(3.5)

因此原始系統(3.1)可以重新以新的座標軸r,  表示為以下等效系統

6

國立成功大學航太系 智慧嵌入式控制實驗室(IEC-Lab)

r r r  



 

4 2

(3.6) -1 ~~-0.~~5 0 0.5 1





1

(b):

針對等效系統(3.6)，固定r 的初始值r  . 0 0 5，並且選擇不同的值做系統測試，

針對以下三種情形

Case 1:  0

參考(3.6)式，若  0則

r 0 (3.7)

由此可知r 會發散，如圖 3.1，其中  0 1. 。

1

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

0.5

0

-0.5

-1

圖 3.1、  0之系統相平面軌跡

Case 2:  0

參考(3.6)式，若  0則

r  0 (3.8)

由此可知r 會發散，如圖 3.1，其中  0 。







|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |



圖 3.2、  0 之系統相平面軌跡

7

國立成功大學航太系 智慧嵌入式控制實驗室(IEC-Lab)

  r 4

2 0 (3.9)

r  

r r    4  2 (3.11)

Case 3:  0

參考(3.6)式，若

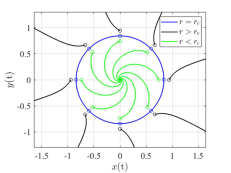
則

4

2 (3.10)

因此

c



  r4

2 0 (3.12)

c      r 4

圖 3.3、  0之系統相平面軌跡

(c)、(d):

若

則

2 (3.13)

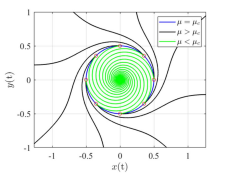
平衡點數目沒改變，但是系統的軌跡幾何結構改變了。 

圖 3.4、固定r 之系統相平面軌跡

8

國立成功大學航太系 智慧嵌入式控制實驗室(IEC-Lab)

Matlab Code

第一題

| %% Nonlinear Control HW1 - Q1  clc ; clear ; close all  A1 = [ 0 1 ; 0 -0.1 ] ;  A2 = [ 0 1 ; -1 -0.1 ] ;  B = [ 0 ; 1 ] ;  D = [ 0 ; -1 ] ;  dt = 0.001 ;  t\_final = 30 ;  t = 0 : dt : t\_final ;    % ======= case 1 ============  x1\_0\_case1 = 3 ;  x2\_0\_case1 = 4 ;  X\_0\_case1 = [ x1\_0\_case1 ; x2\_0\_case1] ;  % ======= case 2 ============  x1\_0\_case2 = 3.01 ;  x2\_0\_case2 = 4.01 ;  X\_0\_case2 = [ x1\_0\_case2 ; x2\_0\_case2] ;  func\_nonlinear = @(t,X) Nonlinear\_System\_Function(t,X,A1,B,D) ;  [ t\_1\_n , X\_1\_n ] = ode45( func\_nonlinear , t , X\_0\_case1) ;  [ t\_2\_n , X\_2\_n ] = ode45( func\_nonlinear , t , X\_0\_case2) ;  func\_linear = @(t,X) linear\_System\_Function(t,X,A2,B) ;  [ t\_1\_l , X\_1\_l ] = ode45( func\_linear , t , X\_0\_case1) ;  [ t\_2\_l , X\_2\_l ] = ode45( func\_linear , t , X\_0\_case2) ;  %% Plot  LW\_1 = 1.4 ;  FS\_ax = 16 ;  FS\_leg = 12 ;  f(1) = figure() ; |
| --- |

9

國立成功大學航太系 智慧嵌入式控制實驗室(IEC-Lab)

plot(t,X\_1\_n(:,1),'b','LineWidth',LW\_1) ;

xlabel('Time (s)')

ylabel('$x$(t)','Interpreter','latex')

title('Initial Condition: $x$(0)=3, $\dot x$(0)=4','Interpreter','latex')

ax(1) = gca ;

ax(1).YLim = [-4 4];

grid on

f(2) = figure() ;

plot(t,X\_2\_n(:,1),'b','LineWidth',LW\_1) ;

xlabel('Time (s)')

ylabel('$x$(t)','Interpreter','latex')

title('Initial Condition: $x$(0)=3.01, $\dot x$(0)=4.01','Interpreter','latex') ax(2) = gca ;

ax(2).YLim = [-4 4];

grid on

f(3) = figure() ;

plot(t,X\_1\_n(:,1),'b','LineWidth',LW\_1) ; hold on ; plot(t,X\_2\_n(:,1),'r--','LineWidth',LW\_1) xlabel('Time (s)')

ylabel('$x$(t)','Interpreter','latex')

ax(3) = gca ;

hs(1)=legend({'Initial Condition: $x$(0)=3, $\dot x$(0)=4','Initial Condition: $x$(0)=3.01, $\dot x$(0)=4.01'},'Interpreter','latex','Location','Northeast');

ax(3).YLim = [-4 4];

grid on

f(4) = figure() ;

plot(t,X\_1\_l(:,1),'b','LineWidth',LW\_1) ; hold on ; plot(t,X\_2\_l(:,1),'r--','LineWidth',LW\_1) xlabel('Time (s)')

ylabel('$x$(t)','Interpreter','latex')

ax(4) = gca ;

hs(2)=legend({'Initial Condition: $x$(0)=3, $\dot x$(0)=4','Initial Condition: $x$(0)=3.01, $\dot x$(0)=4.01'},'Interpreter','latex','Location','Northwest');

ax(4).YLim = [-50 50];

grid on

for i = 1:length(ax)

10

國立成功大學航太系 智慧嵌入式控制實驗室(IEC-Lab)

| set(ax(i),'FontSize',FS\_ax,'FontName','Times New Roman')  RemovePlotWhiteArea(ax(i)) ;  end  for i = 1:length(hs)  set(hs(i),'FontSize',FS\_leg)  end  function dX = Nonlinear\_System\_Function(t,X,A1,B,D)  x1 = X(1) ;  dX = A1\*X + B\*5\*cos(t) + D\*(x1^3) ;  end  function dX = linear\_System\_Function(t,X,A2,B)  dX = A2\*X + B\*5\*cos(t) ;  end |
| --- |

第二題

| %% Nonlinear Control HW1 - Q2  clc ; clear ; close all  dT = 0.01 ;  t\_final\_1 = 100 ; t\_final\_2 = 1000 ; t\_final\_3 = 10000 ;  t\_1 = 0 : dT : t\_final\_1 ;  t\_2 = 0 : dT : t\_final\_2 ;  t\_3 = 0 : dT : t\_final\_3 ;  % ===== case 1 ===========  x\_0\_case1 = 1 ;  y\_0\_case1 = 1 ;  z\_0\_case1 = 0 ;  X\_0\_case1 = [ x\_0\_case1 ; y\_0\_case1 ; z\_0\_case1 ] ;  % ===== case 2 ===========  x\_0\_case2 = 10 ;  y\_0\_case2 = 1 ;  z\_0\_case2 = 0 ;  X\_0\_case2 = [ x\_0\_case2 ; y\_0\_case2 ; z\_0\_case2 ] ;  [t\_1\_case1 , X1\_case1] = ode45(@ Lorentz\_System , t\_1 , X\_0\_case1 ) ; |
| --- |

11

國立成功大學航太系 智慧嵌入式控制實驗室(IEC-Lab)

[t\_2\_case1 , X2\_case1] = ode45(@ Lorentz\_System , t\_2 , X\_0\_case1 ) ; [t\_3\_case1 , X3\_case1] = ode45(@ Lorentz\_System , t\_3 , X\_0\_case1 ) ;

[t\_1\_case2 , X1\_case2] = ode45(@ Lorentz\_System , t\_1 , X\_0\_case2 ) ; [t\_2\_case2 , X2\_case2] = ode45(@ Lorentz\_System , t\_2 , X\_0\_case2 ) ; [t\_3\_case2 , X3\_case2] = ode45(@ Lorentz\_System , t\_3 , X\_0\_case2 ) ;

LW\_1 = 1.3 ;

LW\_2 = 1.3 ;

FS\_ax = 16.5 ;

FS\_leg = 15 ;

f(1) = figure('Units','Normalized','Position',[0.29,0.29,0.477,0.415]) ; plot3(X3\_case1(:,1),X3\_case1(:,2),X3\_case1(:,3),'g--','LineWidth',LW\_1) ; hold on ;

plot3(X2\_case1(:,1),X2\_case1(:,2),X2\_case1(:,3),'r-.','LineWidth',LW\_1) ; plot3(X1\_case1(:,1),X1\_case1(:,2),X1\_case1(:,3),'b','LineWidth',LW\_1) ; xlabel('$x$(t)','Interpreter','latex')

ylabel('$y$(t)','Interpreter','latex')

zlabel('$z$(t)','Interpreter','latex')

title('Initial Condition: ($x$,$y$,$z$) = (1,1,0)','Interpreter','latex') ax(1) = gca ;

hs(1) = legend(['T =',num2str(t\_final\_3)],['T =',num2str(t\_final\_2)],['T =',num2str(t\_final\_1)],'Interpreter','latex') ;

grid on

f(2) = figure('Units','Normalized','Position',[0.29,0.29,0.477,0.415]) ; plot3(X3\_case2(:,1),X3\_case2(:,2),X3\_case2(:,3),'g--','LineWidth',LW\_1) ; hold on ;

plot3(X2\_case2(:,1),X2\_case2(:,2),X2\_case2(:,3),'r-.','LineWidth',LW\_1) ; plot3(X1\_case2(:,1),X1\_case2(:,2),X1\_case2(:,3),'b','LineWidth',LW\_1) ; xlabel('$x$(t)','Interpreter','latex')

ylabel('$y$(t)','Interpreter','latex')

zlabel('$z$(t)','Interpreter','latex')

title('Initial Condition: ($x$,$y$,$z$) = (10,1,0)','Interpreter','latex') ax(2) = gca ;

hs(2) = legend(['T =',num2str(t\_final\_3)],['T =',num2str(t\_final\_2)],['T =',num2str(t\_final\_1)],'Interpreter','latex') ;

12

國立成功大學航太系 智慧嵌入式控制實驗室(IEC-Lab)

| grid on  f(3) = figure ;  plot(t\_1\_case1,X1\_case1(:,1),'g','LineWidth',LW\_2) ; hold on ;  plot(t\_1\_case2,X1\_case2(:,1),'b--','LineWidth',LW\_2)  xlabel('Time (s)')  ylabel('$x$(t)','Interpreter','latex')  ax(3) = gca ;  legend({'Initial Condition: ($x$,$y$,$z$) = (1,1,0)','Initial Condition: ($x$,$y$,$z$) = (10,1,0)'},'Interpreter','latex','Location','Northeast');  ax(3).YLim = [-25 30];  grid on  for i = 1:length(ax)  set(ax(i),'FontSize',FS\_ax,'FontName','Times New Roman')  end  for i = 1:length(hs)  set(hs(i),'Position',[0.70,0.29,0.15,0.21],'Fontsize',FS\_leg)  end    function dX = Lorentz\_System(t,X)  x = X(1) ; y = X(2) ; z = X(3) ;  dx = 10\*(y-x) ;  dy = x\*(28-z)-y ;  dz = x\*y - 8\*z/3 ;  dX = [ dx ; dy ; dz ] ;  end |
| --- |

第三題

| %% Nonlinear Control HW1 - Q3  clc ; clear ; close all  dt= 0.001 ;  t\_final = 100 ;  t = 0 : dt : t\_final ;  number = 8 ; |
| --- |

13

國立成功大學航太系 智慧嵌入式控制實驗室(IEC-Lab)

% ======= case 1 (u>0) =========

u\_case1\_1 = 1 ;

r0\_case1\_1 = 0.5 ;

LW\_1 = 1.4 ;

FS\_ax = 16 ;

FS\_leg = 12 ;

f(1) = figure ;

for i = 1 : number

theta0 = 2\*pi/number\*i ;

X0 = [ r0\_case1\_1 ; theta0] ;

[ t\_1 , X ] = RK4(@ (t,X) Hopf\_bifurcation\_system(t , X , u\_case1\_1) , t , X0 ) ; x = X(:,1).\*cos(X(:,2)) ;

y = X(:,1).\*sin(X(:,2)) ;

plot(x,y,'b','LineWidth',LW\_1) ;

hold on ;

plot(x(1),y(1),'ro') ;

end

xlabel('$x$(t)','Interpreter','latex')

ylabel('$y$(t)','Interpreter','latex')

title('Initial Condition: $r\_0$ = 0.5','Interpreter','latex')

axis([-1 1 -1 1])

axis equal

grid on

ax(1) = gca ;

ax(1).YTick = [-1 -0.5 0 0.5 1] ;

set(ax(1),'FontSize',FS\_ax,'FontName','Times New Roman')

% ======= case 2 (u=0) =========

u\_case2\_1 = 0 ;

f(2) = figure ;

for i = 1 : number

theta0 = 2\*pi/number\*i ;

X0 = [ r0\_case1\_1 ; theta0] ;

[ t\_1 , X ] = RK4(@ (t,X) Hopf\_bifurcation\_system(t , X , u\_case2\_1) , t , X0 ) ; x = X(:,1).\*cos(X(:,2)) ;

14

國立成功大學航太系 智慧嵌入式控制實驗室(IEC-Lab)

y = X(:,1).\*sin(X(:,2)) ;

plot(x,y,'b','LineWidth',LW\_1) ;

hold on ;

plot(x(1),y(1),'ro') ;

end

xlabel('$x$(t)','Interpreter','latex')

ylabel('$y$(t)','Interpreter','latex')

title('Initial Condition: $r\_0$ = 0.5','Interpreter','latex')

axis([-1 1 -1 1])

axis equal

grid on

ax(2) = gca ;

ax(2).YTick = [-1 -0.5 0 0.5 1] ;

set(ax(2),'FontSize',FS\_ax,'FontName','Times New Roman')

% ======= case 3 (u<0) =========

u\_case3\_1 = -1 ;

r0\_case3\_1 = (-u\_case3\_1/2)^(1/4) ;

r0\_case3\_2 = (-u\_case3\_1/2)^(1/4)+0.1 ;

r0\_case3\_3 = (-u\_case3\_1/2)^(1/4) -0.1 ;

f(3) = figure ;

for i = 1 : number

theta0 = 2\*pi/number\*i ;

X0 = [ r0\_case3\_1 ; theta0] ;

[ t\_1 , X ] = RK4(@ (t,X) Hopf\_bifurcation\_system(t , X , u\_case3\_1) , t , X0 ) ; x = X(:,1).\*cos(X(:,2)) ;

y = X(:,1).\*sin(X(:,2)) ;

p1 = plot(x,y,'b','LineWidth',LW\_1) ;

hold on ;

plot(x(1),y(1),'bo') ;

end

for i = 1 : number

theta0 = 2\*pi/number\*i ;

X0 = [ r0\_case3\_2 ; theta0] ;

15

國立成功大學航太系 智慧嵌入式控制實驗室(IEC-Lab)

[ t\_1 , X ] = RK4(@ (t,X) Hopf\_bifurcation\_system(t , X , u\_case3\_1) , t , X0 ) ; x = X(:,1).\*cos(X(:,2)) ;

y = X(:,1).\*sin(X(:,2)) ;

p2 = plot(x,y,'k','LineWidth',LW\_1) ;

hold on ;

plot(x(1),y(1),'ko') ;

end

for i = 1 : number

theta0 = 2\*pi/number\*i ;

X0 = [ r0\_case3\_3 ; theta0] ;

[ t\_1 , X ] = RK4(@ (t,X) Hopf\_bifurcation\_system(t , X , u\_case3\_1) , t , X0 ) ; x = X(:,1).\*cos(X(:,2)) ;

y = X(:,1).\*sin(X(:,2)) ;

p3 = plot(x,y,'g','LineWidth',LW\_1) ;

hold on ;

plot(x(1),y(1),'go') ;

end

xlabel('$x$(t)','Interpreter','latex')

ylabel('$y$(t)','Interpreter','latex')

legend([p1 p2 p3 ],{'$r=r\_c$','$r>r\_c$','$r<r\_c$'},'Interpreter','latex') axis([-1.3 1.3 -1.3 1.3])

axis equal

grid on

ax(3) = gca ;

ax(3).YTick = [-1 -0.5 0 0.5 1] ;

set(ax(3),'FontSize',FS\_ax,'FontName','Times New Roman')

% ======= case 4 (u<0) =========

r0\_case4\_1 = 0.5 ;

u\_case4\_1 = -2\*(r0\_case4\_1)^4 ;

u\_case4\_2 = -2\*(r0\_case4\_1)^4 + 0.1 ;

u\_case4\_3 = -2\*(r0\_case4\_1)^4 - 0.1 ;

f(4) = figure ;

for i = 1 : number

16

國立成功大學航太系 智慧嵌入式控制實驗室(IEC-Lab)

theta0 = 2\*pi/number\*i ;

X0 = [ r0\_case4\_1 ; theta0] ;

[ t\_1 , X ] = RK4(@ (t,X) Hopf\_bifurcation\_system(t , X , u\_case4\_1) , t , X0 ) ; x = X(:,1).\*cos(X(:,2)) ;

y = X(:,1).\*sin(X(:,2)) ;

p1 = plot(x,y,'b','LineWidth',LW\_1) ;

hold on ;

plot(x(1),y(1),'ro') ;

end

for i = 1 : number

theta0 = 2\*pi/number\*i ;

X0 = [ r0\_case4\_1 ; theta0] ;

[ t\_1 , X ] = RK4(@ (t,X) Hopf\_bifurcation\_system(t , X , u\_case4\_2) , t , X0 ) ; x = X(:,1).\*cos(X(:,2)) ;

y = X(:,1).\*sin(X(:,2)) ;

p2 = plot(x,y,'k','LineWidth',LW\_1) ;

hold on ;

plot(x(1),y(1),'ro') ;

end

for i = 1 : number

theta0 = 2\*pi/number\*i ;

X0 = [ r0\_case4\_1 ; theta0] ;

[ t\_1 , X ] = RK4(@ (t,X) Hopf\_bifurcation\_system(t , X , u\_case4\_3) , t , X0 ) ; x = X(:,1).\*cos(X(:,2)) ;

y = X(:,1).\*sin(X(:,2)) ;

p3 = plot(x,y,'g','LineWidth',LW\_1) ;

hold on ;

plot(x(1),y(1),'ro') ;

end

xlabel('$x$(t)','Interpreter','latex')

ylabel('$y$(t)','Interpreter','latex')

legend([p1 p2 p3 ],{'$\mu=\mu\_c$','$\mu>\mu\_c$','$\mu<\mu\_c$'},'Interpreter','latex') axis([-1 1 -1 1])

17

國立成功大學航太系 智慧嵌入式控制實驗室(IEC-Lab)

| axis equal  grid on  ax(4) = gca ;  ax(4).YTick = [-1 -0.5 0 0.5 1] ;  set(ax(4),'FontSize',FS\_ax,'FontName','Times New Roman')  function dX = Hopf\_bifurcation\_system(t , X , u\_case1\_1)  r = X(1) ;  dr = r\*(u\_case1\_1 + 2\*(r^4)) ;  dtheta = 1 ;  dX = [dr ; dtheta] ;  end  function [t,y] = RK4(ODESet,TimeSpan,InitialValue,varargin)  % 2019 V1  % 2020/08/25 V2  %... User Given  y0 = InitialValue;  h = TimeSpan(2)-TimeSpan(1);  %... RK4  t = TimeSpan;  n = size(y0,1);  y = zeros(n,length(t));  y(:,1) = y0;  for i = 1:length(t)-1  yi = y(:,i);  ti = t(i);  f1 = ODESet(ti,yi);  f2 = ODESet(ti+0.5\*h,yi+0.5\*h\*f1);  f3 = ODESet(ti+0.5\*h,yi+0.5\*h\*f2);  f4 = ODESet(ti+h,yi+h\*f3);  y(:,i+1) = yi + h\*( 1/6\*f1 + 1/3\*f2 + 1/3\*f3 + 1/6\*f4 );  end  y = y.';  end |
| --- |

18

國立成功大學航太系 智慧嵌入式控制實驗室(IEC-Lab)