非線性控制

Nonlinear Control

第四章作業



學 號 : P46071204

研 究 生 : 蔡 旻 哲

授課教授 : 楊 憲 東

Department of Aeronautics and Astronautics National Cheng Kung University Tainan, Taiwan, R.O.C.

中 華 民 國 109 年 11 月 6 日

國立成功大學航太系 智慧嵌入式控制實驗室(IEC-Lab)

目錄

第 1 題. ....................................................................................................................... 2 第 2 題. ....................................................................................................................... 5 第 3 題. ....................................................................................................................... 8 Matlab Code ............................................................................................................. 11

1

國立成功大學航太系 智慧嵌入式控制實驗室(IEC-Lab)

第1題.

  

利用 Lyapunov 直接定理分析下列非線性方程式在原點處之穩定性 x x x x x

   

2 2

   

1 1 2 1 2

1

(1.1) x x x x x

   

2 2

1

2 1 2 1 2

Question:

(a) 採用 Lyapunov 函數V x x x   2 2

 的x x 1 2 , 收斂範圍。

Answer:

     

1 2 ，求出滿足V 0

  

首先，針對非線性系統(1.1)的平衡點xe 0 0, ，選擇Lyapunov函數V x x x   2 2

1 2 ，

觀察 Lyapunov 函數，我們可以知道，Lyapunov 函數只有在位於平衡點 e x 的地方為 V x e  0，並且，除了在 e x 之外，Lyapunov 函數皆滿足V x  0，將 Laypunov 函數 對時間做一次導數，並將系統(1.1)代入如下

 

V x x x x x

 

2 2

 

1 1 2 2

       

2 1 2 1

x x x x x x x x x x

2 2 2 2

1 1 2 1 2 2 1 2 1 2

   

2 1

x x x x

2 2 2 2

1 2 1 2

         

2 1

x x x x

2 2 2 2

   

1 2 1 2

由(1.2)式可以知道，若初始狀態x1 、x2滿足x x   2 2

(1.2)

1 2 1，則 Lyapuov 函數對時間一次

 ，這個結果所代表的意義為，若系統的初始狀態滿足x x   2 2

導數為V 0

1 2 1時，則系

統狀態會以漸進穩定的方式收斂到平衡點 e x 上，這也說明了此非線性系統(1.1)在平衡 點xe 0 0, 時，為局部漸進穩定。

Question:

(b) 在此範圍內選 3 個初始點，用 Matlab 畫出相平面軌跡確認穩定性的預測。同時在 確保穩定的範圍之外也任選 3 個初始點，是否由這些點出發的軌跡都為不穩定? 解釋其原因。

Answer:

由(a)小題的穩定性分析當中，我們可以得出結論，當系統初始釋放的點滿足 x x   2 2

1 2 1時，系統軌跡會呈現漸進穩定，而當系統初始狀態滿足x x   2 2

1 2 1時，則

 ，也就是說系統狀態並不收斂，也不發散，而當系統初始狀態滿足x x   2 2

V  0

1 2 1時，

 ，以能量的觀點來看，是會發散的。

則 Lyapunov 對時間一次導數為V  0

在 Matlab 數值模擬的部分，首先我們將系統初始值x x 1 2 0 0 ,   分別設置為 0 5 0 5 . , . 、0 6 0 7 . , .  以及  0 6 0 2 . , . ，並且這三組初始值皆滿足x x   2 2

1 2 1，而這三

2

國立成功大學航太系 智慧嵌入式控制實驗室(IEC-Lab)

-1.5 -1 -0.5 0 0.5 1 1.5

組初始值釋放的軌跡，分別代表 圖 1.1 中的藍色軌跡，在圖中可以看到，藍色軌跡 由於初始值都滿足 Lyapunov 穩定性所推導出來的範圍，因此皆會收斂到平衡點0 0,  上，而在 圖 1.1 中，綠線軌跡的初始值x x 1 2 0 0 ,   設置分別為1 0 5 , . 、0 5 1 . , 以 及  0 9 0 7 . , . ，這三個初始值條件皆不滿足由 Lyapunov 穩定性所推導出來的範圍: x x   2 2

1 2 1，因此是為發散的。

1.5

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

1

0.5

0

-0.5

-1

-1.5

圖 1.1、非線性系統於任意初始值釋放之相平面軌跡

Question:

(c) 不同V x 函數所對應的收斂範圍均不同，最精確的收斂範圍必須由(1.1)式本身決 定。透過座標轉換x x r 1 2 , ,  ，求得使得r 0的r 範圍，比較由(a)以條件V 0



所得到的範圍有何不同?

Answer:

   

    ~~~~   

考慮系統(1.1)，並且定義新的坐標狀態為

    

1

r x x    

1 2(1.3)

2 2 2

     

tanxx

1 2

  

1

其中r  0，將(1.3)式對時間微分一次，並將(1.1)代入如下 1

  

r x x x x x x

  



2 2 2

1 2 1 1 2 2

1

               x x x x x x x x x x x x

(1.4)

1 1



2 2 2 2 2 2 2 1 2 1 1 2 1 2 2 1 2 1 2

1

    

x x x x x x



(1.5)

2 2 2 2 2 2 2 1

1 2 1 2 1 2  

r r

 

2

1

同理，將(1.4)式對時間微分一次，並將(1.1)代入如下可得

3

國立成功大學航太系 智慧嵌入式控制實驗室(IEC-Lab)

 ~~~~      ~~~~ 

 

x x x x





1

    

2 1 2 1

2 2

x x

1

2

  

x

1

1

11 1                x x x x x x x x x x

x ~~x~~

2 2 2 2

(1.6)

2 ~~2~~ 1 1 2 1 2 2 1 2 1 2 1 2

11

   

x x x x

x ~~x~~

2 2 2 2

2 ~~2~~ 1 2 1 2 

1 2

 

2

r

1

因此，非線性系統(1.1)透過座標轉換(1.3)、(1.4)，可以轉成以下二條等效動態方程式 r r r    

 1 (1.7)

2

   r2 1

 (1.8)

2 1時，r  0以及r 

2 1時，r  0，r 

接著，我們觀察(1.7)可以發現，當r 

2 1時r  0，

2 1時，則系統會發散，而系統初始狀

因此我可以得出結論，當系統初始狀態滿足r 

2 1時，則系統會呈現漸進穩定收斂，而又根據於r 的定義(1.3)，因此這樣的

態滿足r 

結果可以與(a)小題，透過 Lyapunov 直接穩定定理所推導出來的穩定範圍相符合，且 由於滿足 Lyapunov 直接穩定定理只是一個充分條件，而本小題透過座標轉換的方式 分析系統，可以直接掌握整個系統收斂與發散的全貌。

4

國立成功大學航太系 智慧嵌入式控制實驗室(IEC-Lab)

第2題.

利用可變梯度法求下列非線性系統的 Lyapunov 函數V x x x x

 

 2

2

假設V 的梯度可表成

1 1 1 2

 (2.1) x x



2 2

    V a x a x a x x   11 1 12 2 21 1 2 2 (2.2)

不同的係數aij 可得到不同的 Lyapunov 函數V 。考慮下列二種不同的aij 選擇，分別求 得對應的 Lyapunov 函數V ，並求出其可確保穩定的區域範圍:

Question:

(a) a a a    , 11 21 12 1 0

Answer:

  ~~~~ 

本題令a11 1且a a 21 12   0，因此 Lyapunov 函數的梯度可以表示為      V x x V V     1 2 1 2 2 (2.3)

根據參數的選擇，式(2.3)必須滿足以下梯度函數

  

V V

1 2

 ~~~~

x ~~x~~ 2 1

(2.4)

再根據 Lyapunov 函數對時間一次導數的定義，並且將系統(2.1)代入，因此 Lyapunov   x x x x x

函數對時間一次導數可以被推導為

      x x

        V V V x x



1 1

2

 

x x

1 2 1 2

   

2 2

  (2.5)  

x x x x

2

1 1 2 2

  

x x x x

2 2

2 3 2

1 1 2 2

  

x x x x

1 2 2

2 2

 

1 1 2 2

在(2.5)當中，若將x1、x2限制在   x x1 2 1 2 0 的範圍，則有V 0

;其相對應的V 為

     1 2 1 2

V x Vdx V dx V dx x dx x dx

        2

1 1 2 2 1 1 2 2 0 0 0 0 0 1

 

x x

2 2

(2.6)

1 2

2

1 2 2 ，被證明出此系統在   x x1 2 1 2 0 之範圍內為局部穩定

因此若取V x x x    2 2 Question:

x x

2



2 2

a a a

  

, ,

1 1

(b)      

11 12 21 2 ~~2 2~~

1 1 1

  

x x x x x x

1 2 1 2 1 2

5

國立成功大學航太系 智慧嵌入式控制實驗室(IEC-Lab)

Answer:

       x x x x V x V V

透過本題的係數設置，因此 Lyapunov 函數的梯度可以表示為

   ~~ ~~   

           

2 3

22

1 1 2 1

1 1 1(2.7)

2 ~~2 2~~ 2 1 2

    

x x x x x x

1 2 1 2 1 2

   ~~~~  ~~~~

根據參數的選擇，式(2.7)必須滿足以下梯度函數

  

V V

1 2

 ~~~~

x ~~x~~

 ~~~~  ~~~~  ~~~~ 2 1

(2.8)

再根據 Lyapunov 函數對時間一次導數的定義，並且將系統(2.1)代入，因此 Lyapunov 函數對時間一次導數可以被推導為

        

 

 

x x x x x x V V V x

2 3

22

          

1 1 1 1 2 1

 

x x x x x x x x

 

1 2 2 2 ~~2 2~~         

1 1 1

2 2 1 2 1 2 1 2

 ~~~~

x x x x

2 3

22



   

   

x x x x x

1 1 2 1

2 ~~2 2~~ 1 1 2 2 2

1 1 1

  

x x x x x x

1 2 1 2 1 2

   

2 4 2 2

x x x x x x x x xx

2 3 3 4 2 3

   

1 1 2 1 2 1 2 1 2 2

2 ~~2 2~~ 2

1 1 1

  

x x x x x x

     

1 2 1 2 1 2

2 4 2 2

x x x x xx

 

(2.9)





2 3 4 2

1 1 2 1 2 2

1

x x

2 2



1 2

     

2 12

x x xx

2 2



 

1 1 2 2

1

x x

2 2



1 2

  x x

2 2

 ~~~~

 

2

1 2

;其相對應的V 為

在(2.9)當中，不論x1、x2為何，皆有V 0

  

x x x

V x Vdx V x dx V x x dx      

, ,

1 2

0

1 1 1 2 1 2 2 0 0 0

        

x x x x dx x dx

2 3

 

22

x x

   

1 2

1 1 2 1

2 ~~2 2~~ 1 2 2 0 0       

1 1 1

x x x x x x

1 2 1 2 1 2 0

x

2



(2.10)

 

    

  x x

3

x

2 2 x dx x dx

1 2

1

1 1 2 2 2 x x

0 01 2

  

1

2

xx

 

1 2

~~x x~~

2

  1



1 2

根據(2.10)的推導，此系統必須在   x x1 2 1 0的情況下，Lyapunov 函數V x 才會 恆大於 0，在本小題我們證明出，此系統必須在   x x1 2 1 0 之範圍內為才會滿足  ，也就是說在這個範圍內系統在平衡點xe 0 0, 為局部漸進穩定。

V x  0且V 0

6

國立成功大學航太系 智慧嵌入式控制實驗室(IEC-Lab)

Question:

(c) 系統(2.1)可穩定的範圍是以上二個範圍的交集或聯集?在保證穩定的範圍內選幾 個初始點，以 Matlab 求解(3)式，證實平衡點為穩定;在穩定範圍之外也選幾個初 始點，Matlab 求解所得之相平面軌跡是否必為發散?

Answer:

透過以上(a)、(b)小題的推導，選擇兩種不同的 Lyapunov 函數所得出，對於平衡 點xe 0 0,  局部穩定的初始範圍條件各不同，(a)小題所得出的結論為，初始條件 x x 1 2 0 0 ,  必須滿足   x x1 2 1 2 0，方使得系統會以漸進穩定的方式收斂到平衡點， 而(b)小題所得出的結論為，初始條件x x 1 2 0 0 ,  須滿足   x x1 2 1 0，系統會以漸進 穩定的方式收斂到平衡點，由以上兩者結論我們可以知道，條件   x x1 2 1 0包含了條 件   x x1 2 1 2 0，因此我們將兩者條件取聯集，得出結論為當系統(2.1)的初始條件滿足   x x1 2 1 0時，則系統必會以漸進穩定的方式收斂到平衡點xe 0 0, ，當然 Lyapunov 直接定理只是一個充分條件，因此我們儘管已經選擇兩種的 Lyapunov 函數，並不能 保證我們所推導出滿足收斂的條件皆能涵蓋所有可收斂的範圍，因此一般來說，通常 會盡量多選擇幾種 Lyapunov 函數，並且將其滿足穩定的收斂範圍取聯集，使得由穩 -3 -2 -1 0 1 2 3

定性分析所決定的收斂區間並不那麼保守，這樣我們所得出的初始值收斂區間，將可 以越接近實際的收斂區間大小。

在 Matlab 數值模擬的部分，首先我們繪出x x1 2 1的雙曲線，在 圖 2.1 中以綠線 表示，而在綠線以內的淺綠色區域為x x1 2 1，根據(a)、(b)小題的 Lyapunov 直接穩定 性分析，系統狀態初始值若在這個區域內，則系統軌跡會以漸進穩定的方式收斂到系 統平衡點 e x ，在圖中此區內的系統運動軌跡以藍線表示;而在綠線以外的區域為 x x1 2 1，由(a)、(b)小題穩定性分析的收斂區域取聯集後，我們知道在這個區域的外

部並無法保證系統收斂，因此在 圖 2.1 中，我們也可以看出系統軌跡以紅色線表示， 且軌跡是為發散的。

3

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

2

1

0

-1

-2

-3

圖 2.1、非線性系統基於平衡點周圍之相平面軌跡運動圖

7

國立成功大學航太系 智慧嵌入式控制實驗室(IEC-Lab)

第3題.

考慮一個二階非線性系統

 

 

62

x

x x

  

1

1 2 2

1



2

x

1

 

(3.1)



x



2

x x 1 2

2 2

 

1



2

x

1

本題是要測試(3.1)式相對於原點是否為全域穩定。

Question:

(a) 若取V x x x x      

1 1 2 1 ，證明V x V x x       , ,    

2 2 2

   

2 0 0 0   。亦即原點

為漸進穩定。 Answer:

   

 ~~  ~~   

首先，觀察本題題目所給定的 Lyapunov 函數，當x1、x2不等於 0 時，Lyapunov 函數皆會滿足V x  0，而當x1、x2皆為 0 時，則 Lyapunov 函數V x  0 ;接著，對

 ~~  ~~ 

Lyapunov 函數V x x x x      

2 2 2

1 1 2 1 對時間做一次導數，並且將系統(3.1)帶入，其推

導如下

 

x x x V x x x x x 2 1 22



2 3

   1 1 1

  

2 ~~2~~ 1 1 2 2 2 2

1 1

 

x x

1 1

              x x x x

2 6 2

   

2 2

x x

1 1 1 2

2 ~~2 2~~ 2 2 2 2 2

        

1 1 1

x x x

1 1 1

  

x x x x x x

12 4 4

2

  

1 1 2 2 1 2

4 ~~2 2~~ 2 2 2

1 1 1

  

x x x

1 1 1

12 4

x x

2 2

 

1 2

4 ~~2~~ 2 2

1 1

 

x x

   

1 1

(3.2)

根據(3.2)的推導結果，我們可以知道當x x 1 2 , , 0 0時，V 恆小於 0，然而只有在 x x 1 2 , , 0 0時，才會滿足V  0

 ，因此從這個推導結果可以得知，系統的原點

x x 1 2 , , 0 0為一個穩定的平衡點，且原點附近的收斂性呈現漸進穩定收斂。

Question:

(b) 測試V x 是否滿足radially unbounded條件(參考講義4.4節)?也就是當x 離原點無 窮遠處時，V x 的值是否也必定趨近於無窮大?

8

國立成功大學航太系 智慧嵌入式控制實驗室(IEC-Lab)

Answer:

   

引入本大題所給定的 Lyapunov 函數

2

x V x x

 

1 2

1 1(3.3)



2 2

x

觀察(3.3)式，對於這個 Lyapunov 函數，如果有 x1  則V x x    22 1 ，但此時的x2 可以為任何有限的值，使得V x 也為一個有限的值，即V x 不一定趨近於，也就 是說這個 Lyapunov 函數不滿足 x  ，V x  ，故 growth condition 不滿足，當

x 離原點無窮遠處時，V x 的值不一必定趨近於無窮大，這個結果使得我們知道本題 的 Lyapunov 函數不滿足 radially unbounded 條件。

Question:

(c) 畫出V x 的等高線圖(令V x 不同的常數值，從大排到小，取約 10 個數值)， 並以此等高線圖為背景，畫出該系統的相平面軌跡。證明從某些點出發的相平面 軌跡，其切割等高線圖的方式雖然滿足V x  0

 的條件，然而這些軌跡最後卻不

進入平衡點，亦即此系統不為全域漸進穩定(參照講義的圖 4.4.2)。從數值上求出 該系統可保證漸進穩定的初始值範圍。

Answer:

















0

.

2 

0

.7 

0.7



















圖 3.1、非線性系統 Lyapunov 函數及系統相平面軌跡運動圖

在 圖 3.1 當中，底部灰色虛線為本題所訂定的 Lyapunov 函數(3.3)於相平面的等 高線圖，在這裡我們取了 10 個 Lyapunov 函數值，從大到小排序分別為V x 1   6、 V x 2   5、V x 3   4、V x 4   3、V x 5   2、V x  . 6 1 5、V x 7  1、V x  . 8 0 9 、

9

國立成功大學航太系 智慧嵌入式控制實驗室(IEC-Lab)

V x  . 9 0 7 及V x  . 10 0 2，而從圖中可以發現當V x 1時，系統 Lyapunov 函數曲 線皆為封閉曲線，由 growth condition 可以知道，儘管 Lyapunov 函數對時間一次導數  ，但也只有在當 Lyapunov 函數曲線為封閉曲線時，才能保證系統在此區域為漸

V  0

漸穩定的，根據這個理論，我們也從圖中驗證了這個結果，在圖中系統初始值若在這 個區域中V x 1，則系統軌跡會以漸近穩定(切割 Lyapunov 函數等高線)的方式收 斂到平衡點。在 圖 3.1 中，系統軌跡相對於平衡點收斂以藍實線表示，系統軌跡相

對於平衡點發散以紅實線表示。在 圖 3.1 中，部分藍線雖然是收斂到平衡點上的， 但是它的初始點，卻部位於我們所定義的 Lyapunov 函數等高線內，這個結果也呼應 了 Lyapunov 值皆定理只是一個充分條件，我們只能證明在等高線V x 1的區間內 釋放初始點，系統皆會收斂到原點，卻不能保證在這個區間外系統不會收斂到原點， 而這樣的結果也告訴了我們，選擇 Lyapunov 函數的重要性，一般來說是可以多選擇 幾組的，這樣最後所找到的收斂區間會更接近真實的收斂區間。

Question:

(d) 證明實際上(3.1)式的平衡點有 2 個:(1)x x 1 2   0 , (2)x x    , 1 2 0。因此原點  

並非全域穩定。確認在(c)的 10 條軌跡中，應該有些軌跡趨近於原點，即平衡點  

(1)，另外有一些軌跡則趨近於平衡點(2)。

Answer:

考慮非線性系統(3.1)，所謂系統的平衡點，也就是當系統在變化過程中，狀態處 於不變的點(值)，因此若要找此非線性系統的平衡點，則首先會令系統的微分為零， 如下

62 0

x

x x

   

1

1 2 2

1



2



x

x

1

 

x x

20   1 2

(3.4)

2 2

 

1



2

x

1

在本系統當中，使得系統微分為零時，共會有兩種情況，分別為，當x x,  1 2 分別處在 0 0, 時，則滿足(3.4)式，以及當x x,  1 2 分別處在,0時，也就是說，在非線性系 統(3.1)內，總共含有 3 個平衡點，因此我們由(a)小題所證明出對於原點x x, ,   1 2 0 0

的穩定性，只是區域穩定的，系統在任意初始值釋放並非會一致進入原點，這個結果 也可以(c)小題的 圖 3.1 中觀察到。

10

國立成功大學航太系 智慧嵌入式控制實驗室(IEC-Lab)

Matlab Code

第一題 - (b)

| %% Nonlinear Control HW4 - Q1 - (b)  clear ; clc ; close all ;  t\_final = 10 ;  dT = 0.01 ;  t = 0 : dT : t\_final ;  X0(:,:,1) = [ 0.5 ; 0.5 ] ; X0(:,:,2) = [ 0.6 ; -0.7 ] ; X0(:,:,3) = [ -0.6 ; -0.2 ] ;  X0(:,:,4) = [ 1 ; 0.5 ] ; X0(:,:,5) = [ 0.5 ; -1 ] ; X0(:,:,6) = [ -0.9 ; -0.7 ] ;  r\_margin = 1 ;  theta = 0 : 0.01 : 2\*pi ;  x\_margin = r\_margin\*cos(theta) ;  y\_margin = r\_margin\*sin(theta) ;  LW = 1.6 ;  FS\_ax = 15 ;  col = ['b','b','b','g','g','g'] ;  colm = ['bo';'bo';'bo';'go';'go';'go'] ;  f1 = figure() ;  for i = 1:length(X0(1,1,:))  [ t , X ] = RK4(@Nonlinear\_func,[0 t\_final],X0(:,:,i),dT) ;  plot(X(:,1),X(:,2),col(i),'LineWidth',LW) ; hold on  plot(X(1,1),X(1,2),colm(i,:),'LineWidth',LW) ;  end  plot([-2 2],[0 0],'k-.') ;  plot([0 0],[-2 2],'k-.') ;  plot(x\_margin,y\_margin,'r','LineWidth',LW) ;  text(-0.44,1.2,'$x\_1^2+x\_2^2 = 1$','Interpreter','latex','FontSize',16,'Color','r') ;  axis equal  ax(1) = gca ;  ax(1).XLim = [-1.6 1.6];  ax(1).YLim = [-1.6 1.6];  xlabel('$x\_1$','Interpreter','Latex') % x label  ylabel('$x\_2$','Interpreter','Latex') % y label  grid on |
| --- |

11

國立成功大學航太系 智慧嵌入式控制實驗室(IEC-Lab)

| for i = length(ax)  set(ax(i),'FontSize',FS\_ax,'FontName','Times New Roman')  end  function dX = Nonlinear\_func(t,X)  % x1 = X(1) ; x2 = X(2) ;  % dX = zeros(2,1) ;  % dX(1) = ( x1 - x2 )\*( x1^2 + x2^2 -1 ) ;  % dX(2) = ( x1 + x2 )\*( x1^2 + x2^2 -1 ) ;  x1 = X(1) ; x2 = X(2) ;  dx1 = ( x1 - x2 )\*( x1^2 + x2^2 -1 ) ;  dx2 = ( x1 + x2 )\*( x1^2 + x2^2 -1 ) ;  dX = [ dx1 ; dx2 ] ;  end |
| --- |

第二題 - (c)

| %% Nonlinear Control HW4 - Q2 - (c)  clear ; clc ; close all ;  t\_final = 10 ;  dT = 0.01 ;  t = 0 : dT : t\_final ;  X0(:,:,1) = [ 1 ; 0.8 ] ; X0(:,:,2) = [ 2 ; -2 ] ; X0(:,:,3) = [ -0.4 ; -1.5 ] ; X0(:,:,4) = [ -1.5 ; 2 ] ; X0(:,:,5) = [ 0.8 ; 2 ] ; X0(:,:,6) = [ 1.8 ; 1 ] ; X0(:,:,7) = [ -1.6 ; -1 ] ; X0(:,:,8) = [ -1 ; -2 ] ;  x\_m\_p = 0.01 : 0.01 : 10 ;  y\_m\_p = 1./x\_m\_p ;  x\_m\_n = -0.01 : -0.01 : -10 ;  y\_m\_n = 1./x\_m\_n ;  X\_m = [x\_m\_p,x\_m\_n];  Y\_m=[y\_m\_p,y\_m\_n ];  LW = 1.4 ;  FS\_ax = 14.5 ;  patch(X\_m,Y\_m,'g','linewidth',1.5,'facecolor','g','edgecolor','g','facealpha',0.2) ;  hold on  plot([-5 5],[0 0],'k-.') ;  plot([0 0],[-5 5],'k-.') ;  plot(0,0,'k.','MarkerSize',25) ; |
| --- |

12

國立成功大學航太系 智慧嵌入式控制實驗室(IEC-Lab)

| text(0.3,-0.4,'$x\_e = (0,0)$','Interpreter','latex','FontSize',15,'Color','k') ;  x\_c = ['b','b','b','b','r','r','r','r'] ;  x\_mc = ['bo';'bo';'bo';'bo';'ro';'ro';'ro';'ro'] ;  for i = 1:length(X0(1,1,:))  [ t , X ] = RK4(@Nonlinear\_func,[0 t\_final],X0(:,:,i),dT) ;  plot(X(:,1),X(:,2),x\_c(i),'LineWidth',LW)  plot(X(1,1),X(1,2),x\_mc(i,:),'LineWidth',LW)  end  axis equal  xlabel('$x\_1$','Interpreter','Latex') % x label  ylabel('$x\_2$','Interpreter','Latex') % y label  axis([-3.5 3.5 -3.5 3.5])  grid on  ax(1) = gca ;  for i = 1:length(ax)  set(ax(i),'FontSize',FS\_ax,'FontName','Times New Roman')  end  function dX = Nonlinear\_func(t,X)  % x1 = X(1) ; x2 = X(2) ;  % dX = zeros(2,1) ;  % dX(1) = -x1 + 2\*(x1^2)\*x2 ;  % dX(2) = -x2 ;  x1 = X(1) ; x2 = X(2) ;  dx1 = -x1 + 2\*(x1^2)\*x2 ;  dx2 = -x2 ;  dX = [ dx1 ; dx2 ] ;  end |
| --- |

第三題 - (c)

| %% Nonlinear Control HW4 - Q3 - (c)  clear ; clc ; close all ;  t\_final = 10 ;  dT = 0.01 ;  t = 0 : dT : t\_final ;  X0(:,:,1) = [ -4 ; 0.1 ] ; X0(:,:,2) = [ 3 ; 0.2 ] ; X0(:,:,3) = [ 1 ; 0.3 ] ; X0(:,:,4) = [ -7 ; 2 ] ; X0(:,:,5) = [ 7 ; -1.5 ] ; X0(:,:,6) = [ 1.55 ; 1.85 ] ; X0(:,:,7) = [ -1.15 ; -1.15 ] ; X0(:,:,8) = [ 0.5 ; 2 ] ; |
| --- |

13

國立成功大學航太系 智慧嵌入式控制實驗室(IEC-Lab)

x\_ax = linspace(-8,8,240) ;

y\_ax = linspace(-3,3,90) ;

[X\_ax,Y\_ax] = meshgrid(x\_ax,y\_ax) ;

V\_xy = X\_ax.^2./(1+X\_ax.^2) + Y\_ax.^2 ;

figure

surf(X\_ax,Y\_ax,V\_xy)

f(1) = figure() ;

contour(X\_ax,Y\_ax,V\_xy,[0.2,0.7,0.9,1,1.5,2,3,4,5,6],'--','LineColor',[0.5 0.5 0.5],'ShowText','on'); hold on

LW = 1.3 ;

FS\_ax = 14.5 ;

plot([-8 8],[0 0],'k-.','LineWidth',1) ;

plot([0 0],[-8 8],'k-.','LineWidth',1) ;

plot(0,0,'k.','MarkerSize',25) ;

x\_c = ['b','b','b','b','b','r','r','r'] ;

x\_mc = ['bo';'bo';'bo';'bo';'bo';'ro';'ro';'ro'] ;

for i = 1:length(X0(1,1,:))

% x\_c(i,1) = ['b'] ;

% x\_mc(i,:) = ['bo'] ;

[ t , X ] = RK4(@Nonlinear\_func,[0 t\_final],X0(:,:,i),dT) ;

plot(X(:,1),X(:,2),x\_c(i),'LineWidth',LW)

plot(X(1,1),X(1,2),x\_mc(i,:),'LineWidth',LW)

end

xlabel('$x\_1$','Interpreter','Latex') % x label

ylabel('$x\_2$','Interpreter','Latex') % y label

axis([-8 8 -2.5 2.5])

% grid on

ax(1) = gca ;

for i = 1:length(ax)

set(ax(i),'FontSize',FS\_ax,'FontName','Times New Roman','box','on')

end

function dX = Nonlinear\_func(t,X)

% x1 = X(1) ; x2 = X(2) ;

% dX = zeros(2,1) ;

14

國立成功大學航太系 智慧嵌入式控制實驗室(IEC-Lab)

| % dX(1) = -x1 + 2\*(x1^2)\*x2 ;  % dX(2) = -x2 ;  x1 = X(1) ; x2 = X(2) ;  dx1 = -6\*x1/((1+x1^2)^2) + 2\*x2 ;  dx2 = -2\*(x1+x2)/((1+x1^2)^2) ;  dX = [ dx1 ; dx2 ] ;  end |
| --- |

15

國立成功大學航太系 智慧嵌入式控制實驗室(IEC-Lab)