**非線性控制**

**Nonlinear Control**

第一章作業

學號 : P46104285

研究生 : 楊亞勳

授課教授 : 楊憲東

Department of Aeronautics and Astronautics

National Cheng Kung University

Tainan, Taiwan, ROC

中華民國 111年 9月24日

目錄

[第一題 3](#_Toc114862709)

[第二題 5](#_Toc114862710)

[第三題 8](#_Toc114862711)

[MATLAB Code 12](#_Toc114862712)

# **第一題**

Question:

渾沌(chaos)的測試。試用 MATLAB 求解非線性 ODE

 (1.1)

測試兩組很接近的初始條件

(a) 𝑥 (0) = 3，𝑥̇ (0) = 4

(b) 𝑥 (0) = 3.01，𝑥̇ (0) = 4.01

比對兩組𝑥(𝑡)對時間的響應圖，是否很接近?若把非線性項 改成線性項𝑥，情況又如何？

Answer:

利用MATLAB內中的ode45微分方程數值求解器可直接計算(1.1)中 對時間的變化。而每組邊界條件有兩組解，標示為 和，如圖1.1~圖1.4所示。

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 圖1.1、邊界條件(a)對時間之響應 | 圖1.2、邊界條件(a)對時間之響應 |
|  |  |
| 圖1.3、邊界條件(b)對時間之響應 | 圖1.4、邊界條件(b)對時間之響應 |

直觀上，圖1.1和圖1.3，圖1.2和圖1.4(相同邊界條件)之比較並沒有很大的差異。式(1.1)

和課本[1]中的式(1.8.1)相比，差別在於 前的係數和方程式右邊之對時間函數。而在式(1.1)中，前的係數為0.1，明顯大於課本中式(1.8.1)之0.05，這造成了此題中非線性部分權重較小，故渾沌現象較不明顯。圖1.5和圖1.6將相同的解，不同的邊界條件對時間之響應進行疊圖，發現除了某些點，例如t=9s、t=26s 以外，並沒有太大的差異。和課本中之圖1.8.1相比有很大的不同。

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 圖1.5、邊界條件(a)、(b)對時間之響應 | 圖1.6、邊界條件(a)、(b)對時間之響應 |

若是將式(1.1)之項改為，則此系統變為一線性系統。由圖1.7觀察可知，兩個差異細微的邊界條件，對線性系統的解幾乎沒有任何影響，兩條線幾乎完全貼合。

|  |
| --- |
|  |
| 圖1.7、線性系統於邊界條件(a)對時間之響應 |

# **第二題**

Question:

Lorentz 奇異吸子的測試：用 MATLAB 求解下列非線性 ODE

𝑥̇ = 10(𝑦 − 𝑥)

𝑦̇ = 𝑥(28 − 𝑧) – 𝑦 (2.1)

𝑧̇ = 𝑥𝑦 − 8𝑧/3

選取初始位置(x(0), y(0), z(0)) = (1,1,0)，畫出軌跡點(𝑥(𝑡), 𝑦(𝑡), 𝑧(𝑡))隨時間𝑡 = 0連 續變化到𝑡 = 𝑇所連成的曲線。比較三種終端時間:𝑇 = 100, 1000, 10000，所得到的奇異吸子軌跡有何不同?如果將初始位置改成(x(0), y(0), z(0)) = (10,1,0)，其結果有何不同?

Answer:

奇異吸子的特性為軌跡既不收斂於固定點，也不進入極限圓，但也不發散。而是在有限空間內不斷變化沒有一定的規則，但軌跡絕不會重複。為了驗證這個非線性系統的特性，

利用MATLAB的數值求解器ODE45，帶入第一個邊界條件，可求出不同終端時間(2.1)的時間響應。圖2.1、圖2.2和圖2.3為邊界條件(x(0), y(0), z(0)) = (1,1,0)對T=100秒、T=1000秒和T=10000秒的時間響應。

|  |
| --- |
|  |
| 圖2.1、Lorentz 系統於第一邊界條件之奇異吸子軌跡 (T=100s) |
|  |
| 圖2.2、Lorentz 系統於第一邊界條件之奇異吸子軌跡 (T=1000s) |
|  |
| 圖2.3、Lorentz 系統於第一邊界條件之奇異吸子軌跡 (T=10000s) |

由上面三個圖可以發現，此系統的解會沿著兩個吸子旋轉，既不發散，也不收斂，隨著時間的增長，軌跡以不重複。符合先前描述的奇異吸子的現象。

若是將邊界條件改為(x(0), y(0), z(0)) = (10,1,0)。則結果如圖2.4、圖2.5和圖2.6。

|  |
| --- |
|  |
| 圖2.4、Lorentz 系統於第二邊界條件之奇異吸子軌跡 (T=100s) |
|  |
| 圖2.5、Lorentz 系統於第二邊界條件之奇異吸子軌跡 (T=1000s) |
|  |
| 圖2.6、Lorentz 系統於第二邊界條件之奇異吸子軌跡 (T=10000s) |

改變邊界條件後，軌跡旱地一個邊界條件若有不同，但是發生的現象完全相同，就是既不發散，也不收斂，隨著時間的增長，軌跡以不重複。

根據課本[1]中的描述，奇異吸子在某些初始條件下會有渾沌現象的發生，即是初始值隊系統輸出有很大的影響。為了探討這個現象是否存在，圖2.7繪製了不同邊界條件下， 對時間的響應。由圖中可以看到，在20秒後，每個時間點的值會有很大的差異，但是值的大小都在-20到20之間。由此可知，渾沌現象可能會伴隨著奇異吸子的發生。

|  |
| --- |
|  |
| 圖2.7、Lorentz 系統於兩個不同邊界條件下的時間響應 |

# **第三題**

Question:

霍普夫分岔(Hopf bifurcation)的測試：考慮下列非線性 ODE

 (3.1)

其中 m 是常數。

(a) 將直角座標 (𝑥, 𝑦) 轉成極座標 (𝑟, 𝜃) ，並將上式用𝑟，𝜃表示之。

(b) 任選三個不同的𝜇值：，，，用 MATLAB 畫出其相對應的軌跡圖 (𝑥(𝑡), 𝑦(𝑡)) 。參考 1.6 節中第一個例題及圖 1.6.3 的討論。

(c) 根據極座標方程式及上述之軌跡變化，推論出分岔現象發生時之值。

(d) 比較及二種情形下，平衡點數目是否有改變，軌跡的幾何結構是否有改變?

Answer:

直角坐標表示式如下:

 (3.2)

 (3.3)

若將(3.2)和(3.3)對時間微分，則得到式(3.4)和(3.5)，如下:

 (3.4)

 (3.5)

此時再將式(3.1)帶入式(3.4)和式(3.5)中，整理後得到(3.1)之極座標表示法(3.6):

 (3.6)

**Case 1: **

將、代入式(3.6)，利用RK4數值求解器解算微分方程，得到圖3.1。觀察式(3.6) ，當****時，因為一定大於等於零，故，遞增，平衡點不穩定，故圖3.1中之軌跡向外發散。

|  |
| --- |
|  |
| 圖3.1、當、時之軌跡 |

**Case 2: **

將、代入式(3.6)，利用RK4數值求解器解算微分方程，得到圖3.2。觀察式(3.6) ，當****時，因為一定大於等於零，故，遞增，平衡點不穩定，故圖3.2中之軌跡向外發散。和圖3.1不同時，當時，向外發散的時間發生的較慢。

|  |
| --- |
|  |
| 圖3.2、當、時之軌跡 |

**Case 3: **

觀察式(3.6)， 當時，可以分成三個情況 :

 (3.7)

 (3.8)

 (3.9)

(i)  ，則，增加，使平衡點不穩定。

(ii) ，則，維持在。

(iii) ，則，減小，且收斂到0。

|  |
| --- |
|  |
| 圖3.3、時之軌跡 |

因

 (3.10)

故

 (3.11)

式(3.11)表示出分岔現象發生時之值。

圖3.4表示出、和之軌跡。

當時，平衡點之數目為0，且軌跡向外發散。

當時，平衡點數目為1，所有軌跡收斂到 。

|  |
| --- |
|  |
| 圖 3.4、固定r，不同之軌跡 |

|  |
| --- |
| **MATLAB Code** |
| 第一題 |
| % Nonlinear Control HW1\_1  %%  clc;  clear;  close all;    %% Initial Condition 1  c1=[3 4];  %% Initial Condition 2  c2=[3.01 4.01];    %% Time span  t0=0;  tf=50;  nout=600;  tspan=linspace(t0, tf, nout);    %% Nonlinear Case 1  [t1, y1]=ode45(@nonlinear, tspan, c1);    %% Nonlinear Case 2  [t2, y2]=ode45(@nonlinear, tspan, c2);    %% Linear Case 1  [t3, y3]=ode45(@linear, tspan, c1);    %% Linear Case 2  [t4, y4]=ode45(@linear, tspan, c2);    %% Plot  LW\_1=1.4;  FS\_ax=16;  FS\_leg=10;    %% x1 Condition 1  figure(1)  plot(tspan, y1(:,1), 'r', 'LineWidth',LW\_1);  xlabel('Time(s)')  ylabel('$x\_1(t)$', 'Interpreter', 'latex')  title('Initial Condition: $x(0)=3$, $\dot x(0)=4$','Interpreter', 'latex')  ax(1)=gca;  ax(1).YLim=[-4 4];  grid on    %% x2 Condition 1  figure(2)  plot(tspan, y1(:,2), 'r', 'LineWidth',LW\_1);  xlabel('Time(s)')  ylabel('$x\_2(t)$', 'Interpreter', 'latex')  title('Initial Condition: $x(0)=3$, $\dot x(0)=4$','Interpreter', 'latex')  ax(2)=gca;  ax(2).YLim=[-8 6];  grid on    %% x1 Condition 2  figure(3)  plot(tspan, y2(:,1), 'r', 'LineWidth',LW\_1);  xlabel('Time(s)')  ylabel('$x\_1(t)$', 'Interpreter', 'latex')  title('Initial Condition: $x(0)=3.01$, $\dot x(0)=4.01$','Interpreter', 'latex')  ax(3)=gca;  ax(3).YLim=[-4 4];  grid on      %% x2 Condition 2  figure(4)  plot(tspan, y2(:,2), 'r', 'LineWidth',LW\_1);  xlabel('Time(s)')  ylabel('$x\_2(t)$', 'Interpreter', 'latex')  title('Initial Condition: $x(0)=3.01$, $\dot x(0)=4.01$','Interpreter', 'latex')  ax(4)=gca;  ax(4).YLim=[-8 6];  grid on    %% Compare x1  figure(5)  plot(tspan, y1(:,1), 'b', 'LineWidth',LW\_1)  hold on  plot(tspan, y2(:,1), 'r--', 'LineWidth',LW\_1);  xlabel('Time(s)')  ylabel('$x\_1(t)$', 'Interpreter', 'latex')  ax(5)=gca;  hs(1)=legend({'Initial Condition: $x(0)=3$,$\dot x(0)=4$', 'Initial Condition: $x(0)=3.01$,$\dot x(0)=4.01$'},'Interpreter','latex','Location','Northeast');  ax(5).YLim=[-4 4];  grid on    %% Compare x2  figure(6)  plot(tspan, y1(:,2), 'b', 'LineWidth',LW\_1)  hold on  plot(tspan, y2(:,2), 'r--', 'LineWidth',LW\_1);  xlabel('Time(s)')  ylabel('$x\_2(t)$', 'Interpreter', 'latex')  ax(6)=gca;  hs(2)=legend({'Initial Condition: $x(0)=3$,$\dot x(0)=4$', 'Initial Condition: $x(0)=3.01$,$\dot x(0)=4.01$'},'Interpreter','latex','Location','Northeast');  ax(6).YLim=[-8 6];  grid on    %% Linear Case  figure(7)  plot(tspan, y3(:,1), 'b', 'LineWidth',LW\_1)  hold on  plot(tspan, y4(:,1), 'r--', 'LineWidth',LW\_1);  xlabel('Time(s)')  ylabel('$x\_1(t)$', 'Interpreter', 'latex')  ax(7)=gca;  hs(3)=legend({'Initial Condition: $x(0)=3$,$\dot x(0)=4$', 'Initial Condition: $x(0)=3.01$,$\dot x(0)=4.01$'},'Interpreter','latex','Location','Northeast');  ax(7).YLim=[-60 70];  grid on      for i=1:length(ax)  set(ax(i),'FontSize',FS\_ax, 'FontName','Times New Roman')  end    for i = 1:length(hs)  set(hs(i),'FontSize',FS\_leg)  end    %% Nonlinear differential equation  function dfdt=nonlinear(t, f)  del\_x1=f(2);  del\_x2=5\*cos(t)-0.1\*f(2)-f(1)^3;  dfdt=[del\_x1, del\_x2]';  end    %% Linear differential equation  function dfdt=linear(t, f)  del\_x1=f(2);  del\_x2=5\*cos(t)-0.1\*f(2)-f(1);  dfdt=[del\_x1, del\_x2]';  end |
| 第二題 |
| % Nonlinear Control HW1\_2  %%  clc;  clear;  close all;    %% Initial Condition  c1=[1 1 0];  c2=[10 1 0];    %% Time Span  delta\_t=0.01;  t\_final\_1=100;  t\_final\_2=1000;  t\_final\_3=10000;  t1=0:delta\_t:t\_final\_1;  t2=0:delta\_t:t\_final\_2;  t3=0:delta\_t:t\_final\_3;    %% Case 1  [t1\_case1, X1\_case1]=ode45(@Lorentz, t1, c1);  [t2\_case1, X2\_case1]=ode45(@Lorentz, t2, c1);  [t3\_case1, X3\_case1]=ode45(@Lorentz, t3, c1);    %% Case 2  [t1\_case2, X1\_case2]=ode45(@Lorentz, t1, c2);  [t2\_case2, X2\_case2]=ode45(@Lorentz, t2, c2);  [t3\_case2, X3\_case2]=ode45(@Lorentz, t3, c2);    %% Plot  LW\_1=1;  LW\_2=1.3;  FS\_ax=16.5;  FS\_leg=15;      %% Initial Condition 1, T=100  f(1) = figure('Units','Normalized','Position',[0.29,0.29,0.477,0.415]) ;  plot3(X1\_case1(:,1),X1\_case1(:,2),X1\_case1(:,3),'r','LineWidth',LW\_1) ;  xlabel('$x(t)$', 'Interpreter', 'latex')  ylabel('$y(t)$', 'Interpreter', 'latex')  zlabel('$z(t)$', 'Interpreter', 'latex')  title('Initial Condition: $(x,y,z)=(1,1,0)$', 'Interpreter', 'latex')  ax(1)=gca;  hs(1) = legend(['T =',num2str(t\_final\_1)]) ;  grid on      %% Initial Condition 1, T=1000  f(2) = figure('Units','Normalized','Position',[0.29,0.29,0.477,0.415]) ;  plot3(X2\_case1(:,1),X2\_case1(:,2),X2\_case1(:,3),'r','LineWidth',LW\_1) ;  xlabel('$x(t)$', 'Interpreter', 'latex')  ylabel('$y(t)$', 'Interpreter', 'latex')  zlabel('$z(t)$', 'Interpreter', 'latex')  title('Initial Condition: $(x,y,z)=(1,1,0)$', 'Interpreter', 'latex')  ax(2)=gca;  hs(2) = legend(['T =',num2str(t\_final\_2)]) ;  grid on    %% Initial Condition 1, T=10000  f(3) = figure('Units','Normalized','Position',[0.29,0.29,0.477,0.415]) ;  plot3(X3\_case1(:,1),X3\_case1(:,2),X3\_case1(:,3),'r','LineWidth',LW\_1) ;  xlabel('$x(t)$', 'Interpreter', 'latex')  ylabel('$y(t)$', 'Interpreter', 'latex')  zlabel('$z(t)$', 'Interpreter', 'latex')  title('Initial Condition: $(x,y,z)=(1,1,0)$', 'Interpreter', 'latex')  ax(3)=gca;  hs(3) = legend(['T =',num2str(t\_final\_3)]) ;  grid on    %% Initial Condition 2, T=100  f(4) = figure('Units','Normalized','Position',[0.29,0.29,0.477,0.415]) ;  plot3(X1\_case2(:,1),X1\_case2(:,2),X1\_case2(:,3),'r','LineWidth',LW\_1) ;  xlabel('$x(t)$', 'Interpreter', 'latex')  ylabel('$y(t)$', 'Interpreter', 'latex')  zlabel('$z(t)$', 'Interpreter', 'latex')  title('Initial Condition: $(x,y,z)=(1,1,0)$', 'Interpreter', 'latex')  ax(4)=gca;  hs(4) = legend(['T =',num2str(t\_final\_1)]) ;  grid on      %% Initial Condition 2, T=1000  f(5) = figure('Units','Normalized','Position',[0.29,0.29,0.477,0.415]) ;  plot3(X2\_case2(:,1),X2\_case2(:,2),X2\_case2(:,3),'r','LineWidth',LW\_1) ;  xlabel('$x(t)$', 'Interpreter', 'latex')  ylabel('$y(t)$', 'Interpreter', 'latex')  zlabel('$z(t)$', 'Interpreter', 'latex')  title('Initial Condition: $(x,y,z)=(1,1,0)$', 'Interpreter', 'latex')  ax(5)=gca;  hs(5) = legend(['T =',num2str(t\_final\_2)]) ;  grid on    %% Initial Condition 2, T=10000  f(6) = figure('Units','Normalized','Position',[0.29,0.29,0.477,0.415]) ;  plot3(X3\_case2(:,1),X3\_case2(:,2),X3\_case2(:,3),'r','LineWidth',LW\_1) ;  xlabel('$x(t)$', 'Interpreter', 'latex')  ylabel('$y(t)$', 'Interpreter', 'latex')  zlabel('$z(t)$', 'Interpreter', 'latex')  title('Initial Condition: $(x,y,z)=(1,1,0)$', 'Interpreter', 'latex')  ax(6)=gca;  hs(6) = legend(['T =',num2str(t\_final\_3)]) ;  grid on    %% Time Response  f(7) = figure('Units','Normalized','Position',[0.29,0.29,0.477,0.415]) ;  plot(t1, X1\_case1(:,1), 'b','LineWidth',LW\_1)  hold on  plot(t1, X1\_case2(:,1), 'g--','LineWidth',LW\_1)  xlabel('Time (s)')  ylabel('$x(t)$', 'Interpreter', 'latex')  title('Time Response of x')  ax(7)=gca;  legend({'Initial Condition: $(x,y,z)=(1,1,0)$', 'Initial Condition: $(x,y,z)=(10,1,0)$'},'Interpreter','latex','Location','Northeast');  ax(7).YLim=([-20 40]);  grid on      for i = 1:length(ax)  set(ax(i),'FontSize',FS\_ax,'FontName','Times New Roman')  end    for i = 1:length(hs)  set(hs(i),'Position',[0.70,0.29,0.15,0.21],'Fontsize',FS\_leg)  end    function dX=Lorentz(t,X)  x=X(1);  y=X(2);  z=X(3);  dx=10\*(y-x);  dy=x\*(28-z)-y;  dz=x\*y-8\*z/3;  dX=[dx dy dz]';  end |
| 第三題 |
| % Nonlinear Control HW1\_3  %%  clc;  clear;  close all;    %% Initial Parameter  dt=0.001;  t\_final=100;  t=0:dt:t\_final;  points=8;  LW=1.5;  FS\_ax=16.5;      %% Case 1 (u>0)  u\_case\_1=1;  r\_case\_1=0.5;    figure(1)  for i=1:8  theta1=2\*pi/points\*i;  X0\_1=[r\_case\_1;theta1];  [t1, x1]=RK4(@(t, X0\_1) Hopf\_bifurcation(t, X0\_1, u\_case\_1), t, X0\_1);  xx\_1=x1(:,1).\*cos(x1(:,2));  yy\_1=x1(:,1).\*sin(x1(:,2));  plot(xx\_1, yy\_1, 'b', 'LineWidth', LW);  hold on  plot(xx\_1(1),yy\_1(1),'ro');  end  xlabel('$x$(t)','Interpreter','latex')  ylabel('$y$(t)','Interpreter','latex')  title('Initial Condition: $r\_0$ = 0.5, $\mu$=1','Interpreter','latex')  axis equal  grid on  ax(1) = gca ;  ax(1).YTick = [-1 -0.5 0 0.5 1] ;  ax(1).XLim=([-1 1]);  ax(1).YLim=([-1 1]);  set(ax(1),'FontSize',FS\_ax,'FontName','Times New Roman')    %% Case 2 (u=0)  u\_case\_2=0;  r\_case\_2=0.5;    figure(2)  for i=1:8  theta2=2\*pi/points\*i;  X0\_2=[r\_case\_2; theta2];  [t2, x2]=RK4(@(t, X0\_2) Hopf\_bifurcation(t, X0\_2, u\_case\_2), t, X0\_2);  xx\_2=x2(:,1).\*cos(x2(:,2));  yy\_2=x2(:,1).\*sin(x2(:,2));  plot(xx\_2, yy\_2, 'b', 'LineWidth', LW);  hold on  plot(xx\_2(1),yy\_2(1),'ro');  end  xlabel('$x$(t)','Interpreter','latex')  ylabel('$y$(t)','Interpreter','latex')  title('Initial Condition: $r\_0$ = 0.5, $\mu$=0','Interpreter','latex')  axis equal  grid on  ax(2) = gca ;  ax(2).YTick = [-1 -0.5 0 0.5 1] ;  ax(2).XLim=([-1 1]);  ax(2).YLim=([-1 1]);  set(ax(2),'FontSize',FS\_ax,'FontName','Times New Roman')      %% Case 3 (u<0) §ïÅÜrªº¤j¤p  u\_case\_3=-1;  r\_case\_3\_1=(-u\_case\_3/2)^(1/4);  r\_case\_3\_2=(-u\_case\_3/2)^(1/4)+0.1;  r\_case\_3\_3=(-u\_case\_3/2)^(1/4)-0.1;    figure(3)  for i=1:8  theta3=2\*pi/points\*i;  X0\_3=[r\_case\_3\_1 ;theta3];  [t3, x3]=RK4(@(t, X0\_3) Hopf\_bifurcation(t,X0\_3, u\_case\_3), t, X0\_3);  xx\_3=x3(:,1).\*cos(x3(:,2));  yy\_3=x3(:,1).\*sin(x3(:,2));  p1=plot(xx\_3, yy\_3, 'b', 'LineWidth', LW);  hold on  plot(xx\_3(1),yy\_3(1),'bo');  end    for i=1:8  theta3=2\*pi/points\*i;  X0\_3=[r\_case\_3\_2 ;theta3];  [t3, x3]=RK4(@(t, X0\_3) Hopf\_bifurcation(t, X0\_3, u\_case\_3), t, X0\_3);  xx\_3=x3(:,1).\*cos(x3(:,2));  yy\_3=x3(:,1).\*sin(x3(:,2));  p2=plot(xx\_3, yy\_3, 'r', 'LineWidth', LW);  hold on  plot(xx\_3(1),yy\_3(1),'ro');  hold on  end    for i=1:8  theta3=2\*pi/points\*i;  X0\_3=[r\_case\_3\_3 ;theta3];  [t3, x3]=RK4(@(t, X0\_3) Hopf\_bifurcation(t, X0\_3, u\_case\_3), t, X0\_3);  xx\_3=x3(:,1).\*cos(x3(:,2));  yy\_3=x3(:,1).\*sin(x3(:,2));  p3=plot(xx\_3, yy\_3, 'k', 'LineWidth', LW);  hold on  plot(xx\_3(1),yy\_3(1),'ko');  hold on  end    xlabel('$x$(t)','Interpreter','latex')  ylabel('$y$(t)','Interpreter','latex')  legend([p1 p2 p3],{'$r=r\_c$','$r>r\_c$','$r<r\_c$'},'Interpreter','latex')  axis equal  grid on  ax(3) = gca ;  ax(3).YTick = [-1 -0.5 0 0.5 1] ;  ax(3).XLim=([-1.5 1.5]);  ax(3).YLim=([-1.5 1.5]);  set(ax(3),'FontSize',FS\_ax,'FontName','Times New Roman')      %% Case 4 (u<0) §ïÅÜuªº¤j¤p  r\_case\_4=0.5;  u\_case\_4\_1=-2\*(r\_case\_4)^4;  u\_case\_4\_2=-2\*(r\_case\_4)^4+0.1;  u\_case\_4\_3=-2\*(r\_case\_4)^4-0.1;    figure(4)  for i=1:8  theta3=2\*pi/points\*i;  X0\_3=[r\_case\_4 ;theta3];  [t3, x3]=RK4(@(t, X0\_3) Hopf\_bifurcation(t, X0\_3, u\_case\_4\_1), t, X0\_3);  xx\_3=x3(:,1).\*cos(x3(:,2));  yy\_3=x3(:,1).\*sin(x3(:,2));  p1=plot(xx\_3, yy\_3, 'b', 'LineWidth', LW);  hold on  plot(xx\_3(1),yy\_3(1),'bo');  end    for i=1:8  theta3=2\*pi/points\*i;  X0\_3=[r\_case\_4 ;theta3];  [t3, x3]=RK4(@(t, X0\_3) Hopf\_bifurcation(t, X0\_3, u\_case\_4\_2), t, X0\_3);  xx\_3=x3(:,1).\*cos(x3(:,2));  yy\_3=x3(:,1).\*sin(x3(:,2));  p2=plot(xx\_3, yy\_3, 'r', 'LineWidth', LW);  hold on  plot(xx\_3(1),yy\_3(1),'ro');  hold on  end    for i=1:8  theta3=2\*pi/points\*i;  X0\_3=[r\_case\_4 ;theta3];  [t3, x3]=RK4(@(t, X0\_3) Hopf\_bifurcation(t, X0\_3, u\_case\_4\_3), t, X0\_3);  xx\_3=x3(:,1).\*cos(x3(:,2));  yy\_3=x3(:,1).\*sin(x3(:,2));  p3=plot(xx\_3, yy\_3, 'k', 'LineWidth', LW);  hold on  plot(xx\_3(1),yy\_3(1),'ko');  hold on  end    xlabel('$x$(t)','Interpreter','latex')  ylabel('$y$(t)','Interpreter','latex')  legend([p1 p2 p3 ],{'$\mu=\mu\_c$','$\mu>\mu\_c$','$\mu<\mu\_c$'},'Interpreter','latex')  axis equal  grid on  ax(4) = gca ;  ax(4).YTick = [-1 -0.5 0 0.5 1] ;  ax(4).XLim=([-1 1]);  ax(4).YLim=([-1 1]);  set(ax(4),'FontSize',FS\_ax,'FontName','Times New Roman')    %% Hopf bifurcation differential equation  function dX=Hopf\_bifurcation(t, X, u)  r=X(1);  dr=r\*(u+2\*r^4);  dtheta=1;  dX=[dr dtheta]';  end    function [t,y] = RK4(ODESet,TimeSpan,InitialValue,varargin)  % 2019 V1  % 2020/08/25 V2  %... User Given  y0 = InitialValue;  h = TimeSpan(2)-TimeSpan(1);  %... RK4  t = TimeSpan;  n = size(y0,1);  y = zeros(n,length(t));  y(:,1) = y0;  for i = 1:length(t)-1  yi = y(:,i);  ti = t(i);  f1 = ODESet(ti,yi);  f2 = ODESet(ti+0.5\*h,yi+0.5\*h\*f1);  f3 = ODESet(ti+0.5\*h,yi+0.5\*h\*f2);  f4 = ODESet(ti+h,yi+h\*f3);  y(:,i+1) = yi + h\*( 1/6\*f1 + 1/3\*f2 + 1/3\*f3 + 1/6\*f4 );  end  y = y.';  end |