**非線性控制**

**Nonlinear Control**

第四章作業

學號 : P46104285

研究生 : 楊亞勳

授課教授 : 楊憲東

Department of Aeronautics and Astronautics

National Cheng Kung University

Tainan, Taiwan, ROC

中華民國 111年 10月29日

目錄

[第一題 1](#_Toc117604913)

[第二題 5](#_Toc117604914)

[第三題 10](#_Toc117604915)

[MATLAB Code 13](#_Toc117604916)

# **第一題**

Question:

利用 Lyapunov 直接定理分析下列非線性方程式在原點處之穩定性:

 (1.1a)

 (1.1b)

1. 採用 Lyapunov  函數，求出滿足 的收斂範圍
2. 在此範圍內選3個初始點，用 MATLAB 畫出相平面軌跡確認穩定性的預測。同時在確保穩定的範圍之外也任選 3個初始點，是否由這些點出發的軌跡都為不穩定?解釋其原因。
3. 不同 函數所對應的收斂範圍均不同，最精確的收斂範圍必須由(1)式本身決定。 透過座標轉換，求得使得的範圍，比較由(a)以條件所得到的範圍有何不同?

Answer:

根據Lyapunov直接穩定定理，若設為之平衡點，為之一臨域，在上市一連續可微的函數，若滿足

1. 
2. ，
3. 在上，為Lyapunov穩定
4. ，為漸進穩定

根據題目所提供之Lyapunov函數，第一項條件在、時滿足條件。第二項條件為除了原點之外，要大於0，題目所選擇之Lyapunov函數因為兩項狀態的平方相加，故也滿足此條件。為了驗證第三和第四項條件，需要將對狀態微分並將(1.1a)和(1.1b)代入，如下:

 (1.2)

由(1.2)的推導中可以得知，若要滿足條件，則需

 (1.3)

由上式觀察可知，不等式左邊為一正圓方程式，此結果代表滿足 的之收斂範圍在一個圓心為圓點，半徑為1的正圓內，如圖1.1所示。這個結果代表當系統之初始值落入這個範圍內，此相平面軌跡會呈現漸進穩定。

|  |
| --- |
|  |
| 圖1.1、 之收斂範圍 |

此題要分析(a)小題中使用的Lyapunov函數所解出來之初使值收斂範圍內外的行為。這是因為Lyapunov直接穩定定理為一充分條件，代表符合直接定理之Lyapunov函數範圍外，也就是 範圍內的初始值，”不一定”會使系統發散。

根據(a)小題之穩定性分析，我們可以知道當系統初始值範圍滿足時，系統會呈現漸進穩定。而透過(1.2)推導結果觀察，當初始值範圍滿足時，，因總能量不變，代表此系統既不發散，也不收斂。而當時，，總能量不斷增加，代表此系統會發散。

為了印證以上推論，可利用MATLAB進行數值模擬。模擬方法為先選定收斂範圍內和收斂範圍外之初始值各三點，再利用ODE45數值求解器計算並繪製出相平面圖，結果如圖1.2所示。收斂範圍內之初始值選定為、和，此三點皆滿足，呈現出之相平面軌跡為途中紅色軌跡。從初始值釋放後，此軌跡以穩定震盪的方式進入原點收斂，此推論和(a)小題中相符。收斂範圍外之初始值選定為、和，此三點不滿足，呈現出之相平面軌跡為途中藍色軌跡。從初始值釋放後，此軌跡向外發散，因初始值條件不滿足Lyapunov直接定理所推導出之收斂範圍。由上述分析可知，Lyapunov直接定理之推導結果和模擬結果相符。

|  |
| --- |
|  |
| 圖1.2、收斂範圍內和收斂範圍外初始值之相平面軌跡 |

此題需要將(1.1a)和(1.1b)非線性方程式轉換為極座標表示法。直角坐標表示式如下:

 (1.4)

 (1.5)

其中恆大於0。若將(1.4)和(1.5)對時間微分，則得到式(1.6)和(1.7)，如下:

 (1.6)

 (1.7)

此時再將式(1.1a)和(1.1b)帶入式(1.6)和式(1.7)中，如下

 (1.8)

 (1.9)

由上述推導可知此非線性系統經由座標轉換後，在極座標下的表示法為:

 (1.10)

由(1.10)觀察可知，若此系統要收斂，則須滿足條件。若此條件要滿足，則需，也就是。此範圍和(a)小題所得到之收斂範圍一模一樣。由此可知，座標系統的轉換並不會影響非線性系統的穩定性。

# **第二題**

Question:

利用可變梯度法求下列非線性系統的 Lyapunov 函數

 (2.1)

假設的梯度可表成



不同的係數可得到不同的 Lyapunov 函數。考慮下列二種不同的選擇，分別求得對應的 Lyapunov 函數，並求出其可確保穩定的區域範圍:

1. 
2. 
3. 系統(3)可穩定的範圍是以上二個範圍的交集或聯集?在保證穩定的範圍內選幾個初始點，以 MATLAB 求解(3)式，證實平衡點為穩定；在穩定範圍之外也選幾個初始點，MATLAB 求解所得之相平面軌跡是否必為發散?

Answer:

可變梯度法為一有系統化之尋找Lyapunov 函數的方法。其核心概念為求得Lyapunov 函數後，利用調整梯度函數之係數來獲得符合直接穩定定理之函數。假設唯一非時變系統 之Lyapunov 函數，則其對時間之為分為:

 (2.2)

其中 且內部每一分量可以表示成，為可調整之常數或是之函數。調整係數使的此梯度函數滿足

1. 
2. 
3. 

若上述條件皆滿足，則可利用線積分求得此系統之Lyapunov 函數

 (2.3)

針對(2.1)，若選擇、，則所設定之 Lyapunov梯度函數為 。在開始檢驗此梯度函數所求得之穩定性前，需要檢驗此梯度函數係數是否合理。這需要先檢驗上述第三個條件，如下

 (2.4)

上式確保了此係數選擇確保為一梯度函數。確認為梯度函數後，可先求Lyapunov候選函數對時間的導數，其中 ，

 (2.5)

由(2.5)分析，若要，則需 ，此時可用線積分求得

 (2.6)

於(2.6)的結果可知，可得到一Lyapunov函數滿足，且(2.5)則提供在的範圍下，；在這些條件下，為一可使得系統平衡點為漸進穩定之Lyapunov函數。

針對(2.1)，若選擇，則所設定之 Lyapunov梯度函數為 。在開始檢驗此梯度函數所求得之穩定性前，需要檢驗此梯度函數係數是否合理。這需要先檢驗上述第三個條件，如下

 (2.7)

上式確保了此係數選擇確保為一梯度函數。確認為梯度函數後，可先求Lyapunov候選函數對時間的導數，其中 ，

 (2.8)

由(2.8)分析，已知可保證，此時可用線積分求得

 (2.9)

於(2.9)的結果可知，此函數若要滿足，則此系統之初始值範圍必須滿足。令，在此條件滿足下，則此Lyapunov函數滿足，，唯一可使得系統平衡點為漸進穩定的Lyapunov函數。

1. 0

透過(a)、(b)兩小題的推導，可以知道選擇不同的Lyapunov函數，所推論出的初始值收斂範圍會不相同。(a)小題所得到的結論為當時，系統會以漸進穩定的方式收斂到平衡點。而(b)小題所得到之結論為當時，系統也會以漸進穩定的方式收斂到平衡點。為了驗證不同的Lyapunov函數所造成的不同收斂範圍會市聯集還是交集。我們將區域分為四組。

1. 
2. 
3. 

以上範圍可如圖2.1所示。(1)所代表的範圍為(a)和(b)小題所求出之範圍取交集，代表圖2.1中綠色之區域。(2)所表示之區域為符合(b)小題之收斂範圍，但不包括(a)小題之收斂範圍。若是初始值在(1)和(2)範圍接收斂，就代表Lyapunov函數之收斂範圍為聯集，若是聯集，就驗證了Lyapunov穩定定理唯一充分條件。(3)的範圍則不在(a)和(b)之收斂範圍內。

|  |
| --- |
|  |
| 圖2.1、相平面上不同的收斂範圍 |

圖2.2為利用MATLAB模擬之結果。將結果分為四組:

1. 藍色線為符合範圍之初始值。從圖中觀察可以得知，在四個象限的初始值接收斂到原點，呈現漸進穩定。這也符合前面的推論，在交集的收斂範圍內，所有初始值為漸進穩定。
2. 紅色線為符合範圍之初始值。從圖中觀察可知，此範圍內之初始值所計算之相平面軌跡也呈現漸進穩定，收斂到原點。因此範圍只滿足(a)小題之收斂範圍，但也呈現漸進穩定，這代表Lyapunov函數之收斂範圍為聯集，也驗證了Lyapunov直接穩定定理為一充分條件。
3. 粉色線為符合範圍之初始值。由圖中觀察可知，此範圍之初始值會使系統發散，呈現不穩定。但因Lyapunov直接定理唯一充分條件，我們無法下結論令範圍內之所有初始值皆會使系統發散。

|  |
| --- |
|  |
| 圖2.2、不同初始值對應不同收斂範圍之像平面軌跡圖 |

綜上所述，系統(2.1)之可穩定範圍是以上二個範圍聯集，且在穩定範圍之所得之相平面軌跡為發散，但這或許是來自我們沒有挑選到由其他Lyapunov函數所計算出之收斂範圍之初始值。

# **第三題**

Question:

考慮一個二階非線性系統

 (3.1)

本題是要測試(4)式相對於原點是否為全域穩定。

1. 若 ，證明 ， ， 。亦即原點為漸近穩定。
2. 測試是否滿足 radially unbounded 條件(參考講義 4.4 節)?也就是當離原點無窮遠時，的值是否也必定趨近於無窮大?
3. 畫出的等高線圖(令=不同的常數值，從大排到小，取約 10 個數值)，並以此等高線圖為背景，畫出該系統的相平面軌跡。證明從某些點出發的相平面軌跡，其切割等高線圖的方式雖然滿足𝑉̇(𝑥) < 0的條件，然而這些軌跡最後卻不進入平衡點，亦即此系統不為全域漸近穩定(參照講義的圖 4.4.2)。從數值上求出該 系統可保證漸近穩定的初始值範圍。

Answer:

全域穩定定理，又稱作Barbashin-Krasovskii定理:設為之平衡點，且 是一連續可微函數，且滿足下列三條件:

1. 且，
2. 
3. ，

則為全域漸進穩定。

此題需要證明題目所定之Lyapunov函數是否會使二階非線性系統相對於原點為全域穩定，而。觀察當和皆為0時，。且當和皆為非0實數時，。接著將Lyapunov函數對時間做一次導數，並將(3.1)代入，如下:



 (3.2)

根據(3.2)推導結果，當時，恆小於0。但是當時，。這代表此Lyapunov函數滿足 ， ，的條件。代表此系統之原點為一穩定的平衡點，且呈現漸進穩定收斂。

若是滿足放射狀無界條件(radially unbounded )條件，用數學方式表達如下:

 (3.3)

而此題所給定之Lyapunov函數為

 (3.4)

觀察(3.4)式，當時，。因當其中一狀態變數趨近於無限大時，Lyapunov函數並未趨近於無限大，代表此函數不滿足growth condition。當離原點無窮遠時，的值並不趨近於無窮大。這代表(a)所討論之平衡點僅為局部漸進穩定，而非全域漸進穩定。

當時，這個條件被稱為growth condition。一個平衡點若是Lyapunov穩定，且又滿足growth condition時，則此平衡點的穩定為全域穩定。growth condition的滿足可保證(常數)是代表環繞平衡點的封閉曲線，和曲線呈現層狀結構，即若，必有 。但是此題所選之Lyapunov函數，利用不同的常數代入，分別為、、、、、、、、、。用MATLAB模擬的結果如圖3.1所示。觀察圖中可以發現，只有當時，會滿足以上兩個條件。而圖3.2為代入30點不同初始值所得到之相平面軌跡。由(3.2)式可以知道，除了原點之外，，故原點為漸進穩定。但是此題提供之Lyapunov函數並不滿足growth condition，因此無法確定此漸進穩定是否為全域性。由圖3.2中觀察，部分初始值會使像平面軌跡收斂至原點，有些卻不會，這代表Lyapunov穩定定理只是一充分條件。用單一Lyapunov函數並無法斷定此系統所有的收斂範圍。這也告訴我們Lyapunov函數選擇的重要性，多選擇幾個Lyapunov函數進行收斂範圍的分析會較為全面。

|  |
| --- |
|  |
| 圖3.1、不同常數之等高線圖 |

|  |
| --- |
|  |
| 圖3.1、不同初始值之相平面軌跡 |

|  |
| --- |
| **MATLAB Code** |
| 第一題 |
| %% Nolinear Control HW4\_1  clc;  clear;  close all;    %% Initial Parameter  dt=0.01;  t\_final=100;  t=0:dt:t\_final;  LW=1.5;  FS\_ax=16.5;    %% Plot V\_dot range  figure(1)  r=1;  rad=0:pi/100:2\*pi;  x\_circle=r\*cos(rad);  y\_circle=r\*sin(rad);  plot(x\_circle,y\_circle, 'k', 'LineWidth', 2)  hold on    %%  c1=[0.5 0.5; -0.5 0.5; 0 -sqrt(2\*0.5^2)];  for i=1:size(c1,1)  [t1, y1]=ode45(@nonlinear, t, c1(i,:));  plot(y1(:,1),y1(:,2), 'r', 'LineWidth', LW)  hold on  plot(y1(1,1), y1(1,2), 'ro')  hold on  end    c2=[1.1 1.1; -1.1 1.1; 0 -sqrt(2\*1.1^2)];  for i=1:size(c2,1)  [t2, y2]=ode45(@nonlinear, t, c2(i,:));  plot(y2(:,1),y2(:,2), 'b', 'LineWidth', LW)  hold on  plot(y2(1,1), y2(1,2), 'bo')  hold on  end  xlabel('$x\_1$', 'interpreter', 'latex')  ylabel('$x\_2$', 'interpreter', 'latex')  text(1,-0.5,'$x\_1^2+x\_2^2 = 1$','Interpreter','latex','FontSize',16,'Color','k') ;  ax(1)=gca;  axis equal  set(ax(1), 'XLim', [-3 3], 'YLim', [-3 3])  grid on    %%  for i=1:length(ax)  set(ax(i),'FontSize',FS\_ax, 'FontName','Times New Roman')  end    %% Nonlinear differential equation  function dfdt=nonlinear(t, f)  x1=f(1);  x2=f(2);  del\_x1=(x1-x2)\*(x1^2+x2^2-1);  del\_x2=(x1+x2)\*(x1^2+x2^2-1);  dfdt=[del\_x1, del\_x2]';  end |
| 第二題 |
| %% Nolinear Control HW4\_2  clc;  clear;  close all;    %% Initial Parameter  t\_final=100;  dt=0.01;  t=0:dt:t\_final;  LW = 1.4 ;  FS\_ax = 14.5 ;    %% Convergence Region  % (a)  x\_CR1\_p=0.01:0.01:5;  y\_CR1\_p=1./(2\*x\_CR1\_p);  x\_CR1\_n=-0.01:-0.01:-5;  y\_CR1\_n=1./(2\*x\_CR1\_n);  x\_CR1=[x\_CR1\_p,x\_CR1\_n];  y\_CR1=[y\_CR1\_p,y\_CR1\_n];  patch(x\_CR1,y\_CR1,'g','linewidth',1.5,'facecolor','g','edgecolor','g','facealpha',0.2) ;  hold on  % (b)  x\_CR2\_p=0.01:0.01:5;  y\_CR2\_p=1./(x\_CR2\_p);  x\_CR2\_n=-0.01:-0.01:-5;  y\_CR2\_n=1./(x\_CR2\_n);  x\_CR2=[x\_CR2\_p,x\_CR2\_n];  y\_CR2=[y\_CR2\_p,y\_CR2\_n];  patch(x\_CR2,y\_CR2,'y','linewidth',1.5,'facecolor','y','edgecolor','y','facealpha',0.2) ;  hold on  plot([-5 5],[0 0],'k-.') ;  plot([0 0],[-5 5],'k-.') ;  plot(0,0,'k.','MarkerSize',25) ;  text(0.3,-0.4,'$x\_e = (0,0)$','Interpreter','latex','FontSize',15,'Color','k') ;  text(0.5,2,'$\leftarrow x\_1x\_2=1$','Interpreter','latex','FontSize',15,'Color','k');  text(0.71,0.75,'$\leftarrow 2x\_1x\_2=1$','Interpreter','latex','FontSize',15,'Color','k');    %% Plot  c=[1 -1; 0.2 0.2;-0.2 -0.2;-1 1;3 -1;-3 1;0.9 0.9;-0.9 -0.9;2 0.4;-2 -0.4;-1 -2;-2 -1;1 2;2 1];  x\_c = ['b','b','b','b','b','b','r','r','r','r','m','m','m','m'] ;  x\_mc = ['bo';'bo';'bo';'bo';'bo';'bo';'ro';'ro';'ro';'ro';'mo';'mo';'mo';'mo'] ;  for i = 1:size(c,1)  [ t , X ] = ode45(@Nonlinear\_func,t,c(i,:)) ;  plot(X(:,1),X(:,2),x\_c(i),'LineWidth',LW)  plot(X(1,1),X(1,2),x\_mc(i,:),'LineWidth',LW)  end  axis equal  xlabel('$x\_1$','Interpreter','Latex')  ylabel('$x\_2$','Interpreter','Latex')  axis([-3.5 3.5 -3.5 3.5])  grid on  ax(1) = gca ;  for i = 1:length(ax)  set(ax(i),'FontSize',FS\_ax,'FontName','Times New Roman')  end  xticks(-3:1:3)  function dX = Nonlinear\_func(t,X)  x1 = X(1) ;  x2 = X(2) ;  dx1 = -x1 + 2\*(x1^2)\*x2 ;  dx2 = -x2 ;  dX = [ dx1 ; dx2 ] ;  end |
| 第三題 |
| %% Nolinear Control HW4\_3  clc;  clear;  close all;    %% Initial Parameter  LW = 1.3;  FS\_ax = 14.5;  t\_final=100;  dt=0.01;  t=0:dt:t\_final;  %% Contour Map  x\_ax = linspace(-8,8,240) ;  y\_ax = linspace(-3,3,90) ;  [X\_ax,Y\_ax] = meshgrid(x\_ax,y\_ax) ;  V\_xy = X\_ax.^2./(1+X\_ax.^2) + Y\_ax.^2 ;  f(1) = figure() ;  contour(X\_ax,Y\_ax,V\_xy,[0.2,0.7,0.9,1,1.5,2,3,4,5,6],'--','LineColor',[0.5 0.5 0.5],'ShowText','on');  hold on  %%  c=[0.1 0.1;-0.1 -0.1;1 0.3;-1 -0.3;2.3 0.3;-2.3 -0.3;4.3 0.5;-4.3 -0.5;-3.7 0.9;3.7 -0.9;-4.6 1.3;4.6 -1.3;-5.2 1.6;5.2 -1.6;-5.8 1.8;5.8 -1.8;-6.4 2;6.4 -2;-7 2.4;7 -2.4;4.4 0.9;-4.4 -0.9;4.5 1.3;-4.5 -1.3; 4.6 1.6; -4.6 -1.6;5 1.8;-5 -1.8;6 2.1;-6 -2.1];  x\_c = ['b','b','b','b','b','b','r','r','b','b','b','b','b','b','b','b','b','b','b','b','r','r','r','r','r','r','r','r','r','r'] ;  x\_mc = ['bo';'bo';'bo';'bo';'bo';'bo';'ro';'ro';'bo';'bo';'bo';'bo';'bo';'bo';'bo';'bo';'bo';'bo';'bo';'bo';'ro';'ro';'ro';'ro';'ro';'ro';'ro';'ro';'ro';'ro'] ;  for i = 1:size(c,1)  [t,X]=ode45(@Nonlinear\_func,t,c(i,:));  plot(X(:,1),X(:,2),x\_c(i),'LineWidth',LW)  plot(X(1,1),X(1,2),x\_mc(i,:),'LineWidth',LW)  hold on  end  plot([-8 8],[0 0],'k-.','LineWidth',1) ;  plot([0 0],[-8 8],'k-.','LineWidth',1) ;  plot(0,0,'k.','MarkerSize',25) ;  xlabel('$x\_1$','Interpreter','Latex') % x label  ylabel('$x\_2$','Interpreter','Latex') % y label  axis([-8 8 -2.5 2.5])  grid on  ax(1) = gca ;  for i = 1:length(ax)  set(ax(i),'FontSize',FS\_ax,'FontName','Times New Roman','box','on')  end  function dX = Nonlinear\_func(t,X)  x1=X(1);  x2=X(2);  dx1=-6\*x1/((1+x1^2)^2) + 2\*x2;  dx2=-2\*(x1+x2)/((1+x1^2)^2);  dX=[ dx1 ; dx2 ];  end |