



LISTA 1 – CE304 TEORIA DA PROBABILIDADE 1

Prof. Benito Olivares Aguilera

2024/1

I. INTRODUÇÃO.

A. Teoria de Conjuntos.

1. Usando as definições e propriedades verifique as seguintes identidades. Também verifique utilizando diagramas de Venn.
 - a) $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$.
 - b) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
 - c) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$.
 - d) $(A \cap B) \setminus B = \emptyset$.
 - e) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.
 - f) $[A \cup (B \cap C)] \cap \{[A^c \cup (B \cap C)] \cap (B \cap C)^c\} = \emptyset$.
2. Utilize diagramas de Venn para mostrar que a diferença simétrica satisfaz a propriedade associativa, isto é, para quaisquer conjuntos A, B e C:
 $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.
3. Use qualquer método para verificar as seguintes identidades:
 - a) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.
 - b) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.
 - c) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$.
 - d) $(A \Delta B) \cup C = (A \cup C) \Delta (B \setminus C)$.
 - e) $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$.
 - f) $(A \Delta B) \setminus C = (A \setminus C) \Delta (B \setminus C)$.
 - g) $(A \cup B) \Delta C = (A \Delta C) \Delta (B \setminus A)$.
 - h) $(A \cap B) \Delta C = (A \Delta C) \Delta (A \setminus B)$.
 - i) $(A \setminus B) \Delta C = (A \Delta C) \Delta (A \cap B)$.
4. Em um programa de intercâmbio 35 estudantes estrangeiros vieram ao Brasil. Deles, 16 visitaram Manaus; 16, São Paulo e 11, Salvador. Desses estudantes, 5 visitaram Manaus e Salvador e, desses 5, 3 visitaram também São Paulo. Qual o número de estudantes que visitaram Manaus ou São Paulo?
5. Seja Ω um conjunto não vazio e seja $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ uma família (ou classe) de subconjuntos de Ω . Diremos que \mathcal{A} é uma álgebra sobre Ω se satisfaz:
 - i) $\Omega \in \mathcal{A}$,
 - ii) se $A_i \in \mathcal{A}$ então $A_i^c \in \mathcal{A}, \forall i = 1, 2, \dots, n$.
 - iii) $\forall n$, se $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ então $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$.
 - a) Qual a menor álgebra possível?

- b) Qual a menor álgebra contendo o conjunto A ?
- c) Para $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$ comprove que o conjunto das partes de Ω , é uma álgebra.

6. Sejam A, B, C e D conjuntos sobre Ω . Prove formalmente que:

- a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ (ídem para a união)
- b) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.
- c) $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$.

B. Análise Combinatória.

- 7. Em uma corrida com dez cavalos, quantos são os resultados possíveis para os quatro primeiros lugares?
- 8. Quantos números inteiros maiores que 53000 e de cinco algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7?
- 9. Quantas diferentes placas de automóvel com 7 caracteres são possíveis se os três primeiros campos forem ocupados por letras e os 4 campos finais por números?
- 10. Uma turma de Teoria da Probabilidade é formada por 6 homens e 4 mulheres. Aplica-se uma prova e os estudantes são classificados de acordo com o seu desempenho. Suponha que nenhum dos estudantes tenha tirado a mesma nota.
 - (a) Quantas diferentes classificações são possíveis?
 - (b) Se os homens forem classificados apenas entre si e as mulheres apenas entre si, quantas diferentes classificações são possíveis?
- 11. Um torneio de xadrez tem dez competidores, dos quais quatro são russos, três são dos Estados Unidos, dois são da Grã-Bretanha e um é do Brasil. Se o resultado do torneio listar apenas a nacionalidade dos jogadores em sua ordem de colocação, quantos resultados serão possíveis?
- 12. Uma aluna gasta exatamente um minuto para escrever cada anagrama da palavra ESTATISTICA, quanto tempo ela levará para escrever todos os anagramas, se ela descansa um minuto entre cada escrita?
- 13. Quantos subconjuntos existem em um conjunto de n elementos?
- 14. De um baralho comum (52 cartas) sacam-se sucessivamente e sem reposição três cartas. Quantas são as extrações nas quais a primeira carta é de copas, a segunda é um rei e a terceira não é uma dama?
- 15. O código morse usa "palavras" contendo de 1 a 4 "letras", as "letras" sendo ponto e traço. Quantas "palavras" existem no código morse?
- 16. No Senado Federal, o Distrito Federal e os 26 estados da federação têm 3 representantes cada. Deve-se formar uma comissão de modo que todos os estados e o Distrito Federal estejam representados por 1 ou 2 senadores. De quantos modos essa comissão pode ser formada?

II. ESPAÇOS DE PROBABILIDADE.

17. Para cada um dos seguintes experimentos, descreva um espaço amostral:

- a) Uma urna contém duas bolas brancas e três bolas vermelhas. Retira-se uma bola ao acaso da urna. Se for branca, lança-se uma moeda; se for vermelha, ela é devolvida à urna e retira-se outra bola.
- b) Lançar um dado até que a face 6 apareça pela primeira vez.
- c) Três jogadores A, B e C disputam um torneio de tênis. Inicialmente, A joga com B e o vencedor joga com C, e assim por diante. O torneio termina quando um jogador ganha duas vezes consecutivas ou quando são disputadas, ao todo, quatro partidas.
- d) Numa linha de produção conta-se o número de peças defeituosas num intervalo de uma hora.
- e) Investigam-se famílias de 4 crianças, anotando-se a configuração segundo o sexo.
- f) Numa entrevista telefônica com 250 assinantes, pergunta-se se o proprietário tem ou não máquina de secar roupa.
- g) Um fichário com 10 nomes contém 3 nomes de mulheres. Seleciona-se ficha após ficha, até o último nome de mulher ser selecionado, e anota-se o número de fichas selecionadas.
- h) Uma urna contém 10 bolas azuis e 10 bolas vermelhas com dimensões rigorosamente iguais. Três bolas são selecionadas ao acaso com reposição e as cores são anotadas.
- i) Dois dados, com as faces enumeradas de 1 a 6, são lançados simultaneamente e estamos interessados na soma das faces observadas.
- j) De um grupo de 5 pessoas {A, B, C, D, E} sorteiam-se duas, uma após a outra, com reposição, e anota-se a configuração formada.
- k) Mesmo enunciados que j), sem reposição.
- l) Mesmo enunciado que j), mas os dois selecionados simultaneamente.
- m) Um relógio mecânico pode parar a qualquer momento por falha técnica. Mede-se o ângulo (em graus) que o ponteiro dos segundos forma com o eixo imaginário orientado do centro ao número 12.
- n) Mesmo enunciado anterior, mas supondo que o relógio seja elétrico, onde o ponteiro dos segundos move-se continuamente.
- o) Uma máquina produz 20 peças por hora, escolhe-se um instante qualquer e observa-se o número de defeituosas na próxima hora.
- p) Uma moeda lançada consecutivamente até o aparecimento da primeira cara.

18. Sendo A e B dois eventos em um mesmo espaço amostral, "traduza" para a linguagem da teoria dos conjuntos, as seguintes afirmações:

- a) Pelo menos um dos eventos ocorre.
- b) O evento A ocorre, mas o evento B não.
- c) Nenhum deles ocorre.
- d) Exatamente um dos eventos ocorre.

19. Sendo A , B e C subconjuntos quaisquer, expresse em notação matemática os conjuntos cujos elementos:
- Estão em A e B , mas não em C .
 - Não estão em nenhum deles.
 - Estão, no máximo, em dois deles.
 - Estão em A , mas no máximo em um dos outros.
 - Estão na interseção dos três conjuntos e no complementar de A .
20. Sejam A , B e C três eventos em um espaço de probabilidade. Expresse os seguintes eventos em termos de A , B e C :
- Apenas A ocorre;
 - A e B ocorrem, mas C não ocorre;
 - Os três eventos ocorrem;
 - Pelo menos um dos três eventos ocorre;
 - Nenhum dos três eventos ocorre;
 - Exatamente um dos três eventos ocorre;
 - No máximo um dos três eventos ocorre;
 - Pelo menos dois dos três eventos ocorrem.
21. Mostre que a interseção de duas sigma-álgebras é sempre uma sigma-álgebra. Pesquise se isto vale também para a união de duas sigma-álgebras.
22. Para cada um dos seguintes experimentos, descreva um espaço de probabilidade que sirva de modelo:
- Seleciona-se um ponto, ao acaso, do quadrado $Q = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$.
 - Retiram-se cartas sucessivamente de um baralho de 52 cartas, ao acaso e com reposição, até retirar-se o primeiro rei. Registra-se o número total de retiradas.
 - Quinze bolas são retiradas, ao acaso e com reposição, de uma urna contendo 5 bolas vermelhas, 9 bolas pretas, e uma bola branca. Observa-se o número de vezes que ocorre cada cor
 - O experimento (c) é realizado sem reposição
 - Suponhamos que dez cartas estejam numeradas de 1 até 10. Das dez cartas, retira-se uma de cada vez, ao acaso e sem reposição, até retirar o primeiro número par. Conta-se o número de retiradas necessárias.
 - Retiram-se 4 cartas, ao acaso, de um baralho de 52 cartas. Registra-se o número de reis na amostra. Considere os casos em que:
 - As retiradas são feitas sem reposição.
 - As retiradas são feitas com reposição.

ATENÇÃO: A presente lista é apenas uma sugestão de material de estudo. Você pode tentar resolver exercícios de outras fontes.

Você não precisa resolver absolutamente todos os exercícios propostos; o importante é que compreenda o conceito/metodologia subjacente.