CE080 - FUNDAMENTOS BÁSICOS PARA ESTATÍSTICA
Prof. Dr. Anselmo Chaves Neto

1. FUNÇÕES

1.1- Sistema de Coordenadas Cartesianas ou Plano Cartesiano

A localização de pontos num plano é bastante antiga na Matemática e data aproximadamente do século III a.C. Porém, atualmente, usa-se o Sistema de Coordenadas Cartesianas que teve origem com os trabalhos do matemático René Descartes (século XVIII).

Esse sistema é formado por dois eixos perpendiculares que se cruzam em um ponto chamado **origem**. Esses dois eixos chamam-se: **eixo das abscissas** (horizontal X) e **eixo das ordenadas** (vertical Y).

Exercícios 1

1) Desenhe um **sistema de eixos cartesianos** e indique: o eixo das **abscissas**, o eixo das **ordenadas**, a **origem** e os **quatro quadrantes.**

2) Desenhe um **sistema de eixos cartesianos** e marque no plano os pontos cujas **coordenadas** são:

a) $P_1(2, -1)$ b) $A(0, 2)$ c) $B(0, 3)$ d) $M(0, -2)$ e) $N(2, 2)$
f) $V(-2, 3)$ g) $P_2(-1, 0)$ h) $P_3(-2, -1)$ i) $P_4(2, 1)$ j) $P_5(0, -4)$

3) Desenhe um **sistema de eixos cartesianos**, marque nele os pontos P_1, P_2 e P_3. Trace os **segmentos de reta** $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_1P_3}$ e $\overline{P_2P_3}$ que definem o triângulo $\Delta P_1P_2P_3$.

4) Desenhe um **sistema de eixos cartesianos**, marque nele os pontos P_4 e P_5. Trace a reta definida por esses dois pontos.

Exercícios 2

1) Desenhe um **sistema de eixos cartesianos** e o segmento de reta cujas extremidades são os pontos: P(4; 4) e Q(-3; -3).

2) Desenhe um **sistema de eixos cartesianos** e a reta b correspondente a 1ª. bissetriz do sistema.

3) Quais as coordenadas do ponto M correspondente à intersecção do segmento $\overline{PQ}$ com a sua mediatriz?

4) Escreva os sinais das coordenadas do ponto $P_1 \in 1^{0.}$ quadrante, do ponto $P_2 \in 2^{0.}$ quadrante, do ponto $P_3 \in 3^{0.}$ quadrante e do ponto $P_4 \in 4^{0.}$ quadrante.

5) O ponto P situa-se sobre o semieixo positivo das ordenadas de um sistema cartesiano e a distância de P a origem é 5. Quais as coordenadas deste ponto?

6) O ponto Q situa-se sobre o semieixo negativo das abscissas de um sistema cartesiano e a distância de Q a origem é 5. Quais as coordenadas deste ponto?

7) Escreva os quadrantes do sistema cartesiano aos quais pertencem os pontos: $P_1(-4; 4)$, $P_2(-3; -2)$, $P_3(5; 5)$, $P_4(2; -1)$, $P_5(-5; -1)$, $P_6(3; 2)$ e $P_1(-2; 3)$.

8) Seja a reta s que passa pelos pontos (0; 0) e (3; 3) de um plano cartesiano. Qual o ângulo que essa reta faz com o eixo das abscissas? E, qual o ângulo que a reta faz com o eixo das ordenadas?

9) Seja a reta r que passa pelos pontos (0; 0) e ($\sqrt{3}$; 1) de um plano cartesiano. Pergunta-se:
a) Qual o ângulo que reta faz com o eixo das abscissas?
b) Qual o ângulo que a reta faz com o eixo das ordenadas?
c) Qual a distância entre os dois pontos?

10) Seja a reta p que passa pelos pontos (0; 0) e (1; $\sqrt{3}$) de um plano cartesiano. Pergunta-se:
a) Qual o ângulo que reta faz com o eixo das abscissas?
b) Qual o ângulo que a reta faz com o eixo das ordenadas?
c) Qual a distância entre os dois pontos?

11) Seja o conjunto de pontos representado por: $\{(x; y) \mid x = 0 \text{ e } y \in R\}$. Em qual região do plano cartesiano estes pontos estão situados?

12) Seja o conjunto de pontos representado por: $\{(x; y) \mid x \in R_+ \text{ e } y = 0\}$. Em qual região do plano cartesiano estes pontos estão situados?

13) Seja o conjunto de pontos representado por: $\{(x; y) \mid x = 0 \text{ e } y \in R\_\}$. Em qual região do plano cartesiano estes pontos estão situados?

14) Seja o conjunto de pontos representado por: $\{(x; y) \mid x = 0 \text{ e } y \in R_+\}$. Em qual região do plano cartesiano estes pontos estão situados?

15) A origem do sistema, (0; 0), está situada em alguma das regiões do plano cartesiano definidas nos exercícios de 12 a 14?

16) Desenhe um quadrado contido no $1^{0.}$ quadrante de um sistema cartesiano. Quais as coordenadas do vértice do quadrado que você desenhou?

1.2- Produto Cartesiano

Dados dois conjuntos não vazios A e B, denomina-se **produto cartesiano** de A por B ao conjunto formado por todos os pares ordenados (x; y) com $x \in A$ e $y \in B$. A notação do produto cartesiano de A por B é AxB, onde se lê “A cartesiano B”.

Exercícios 1.2

1) Escreva em linguagem simbólica o produto cartesiano AxB.

2) Dados os conjuntos A = {1; 2; 3} e B = {5; 6}, use diagramas para obter os produtos cartesianos:

a) AxB
b) BxA

3) Olhando os resultados dos produtos cartesianos AxB e BxA você conclui que se A é diferente de B, ou seja, $A \neq B$, então AxB é .... de BxA.

4) Faça a **representação Gráfica** dos dois produtos cartesianos do exercício 2 em um plano cartesiano.

5) Calcule o número de elementos dos produtos cartesianos do exercício 2, ou seja, qual o valor de n(AxB) conhecendo-se os valores de n(A) e n(B)?

6) Faça a **representação Gráfica** do produto cartesiano dos intervalos fechados B = [3; 5] e C = [3; 7] em um plano cartesiano, sendo que esses intervalos estão contidos nos reais (R). Veja que o resultado é um **retângulo**.

7) Qual o número de elementos do produto cartesiano do exercício 6, n(BxC)?

8) Faça a **representação gráfica** do produto cartesiano dos intervalos D =]3; 5], aberto à esquerda e E = [3; 7[, aberto à direita, em um plano cartesiano. Considere esses intervalos contidos nos reais (R). Veja que o resultado é um **retângulo com o lado vertical esquerdo e o lado superior tracejados.**

9) Qual o número de elementos do produto cartesiano do exercício 8, n(DxE)?

10) O número de elementos de um conjunto B é n(B) = 3m e o de um conjunto D é n(D) = 3p. Qual o número de elementos de BxD, ou seja, n(BxD), sabendo que p – m = 1 e m + 2p = 8?

11) Faça a **representação gráfica** do produto cartesiano entre o intervalo A = [-3; ∞), aberto à direita, e o intervalo E = (2; 5], aberto à esquerda. Considere esses intervalos contidos nos reais (R).

12) O eixo das abscissas Ox representa o conjunto dos números reais, R, e da mesma forma o eixo das ordenadas Oy, também, representa o conjunto dos

reais, R. Então, o produto cartesiano RxR pode ser escrito como R^2. Faça a representação gráfica desse produto cartesiano.

13) Qual o número de elementos do produto cartesiano do exercício anterior, n(RxR)?

14) Faça a **representação gráfica** do produto cartesiano entre o intervalo C = [-2; ∞), aberto à direita, e o intervalo D = (2; 7] aberto à esquerda.

15) Faça a **representação gráfica** do produto cartesiano entre o intervalo E = (-3; ∞) e o intervalo F = (2; 5]. Considere esses intervalos contidos nos reais (R).

16) Considere a intersecção entre os produtos cartesianos CxD do exercício 14 e o produto cartesiano ExF do exercício 15. Faça a **representação gráfica** da intersecção e escreva em linguagem o conjunto correspondente à intersecção.

17) Seja o conjunto de pontos do segmento de reta $\overline{AB} = \{(x; y) \in R^2 \mid y = 5+ 2x$ e $x \in [2; 5] \subset R\}$. Pede-se:

a) as coordenadas das extremidades do segmento $\overline{AB}$;
b) o comprimento desse segmento.

18) Seja o conjunto de pontos do segmento de reta $\overline{CD} = \{(x; y) \in R^2 \mid y = 4 + x$ e $x \in [3; 15] \subset R\}$.

a) as coordenadas das extremidades do segmento $\overline{CD}$;
b) o comprimento desse segmento.

19) Existe intersecção entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ dos exercícios 17 e 18?

20) Quais as coordenadas do ponto de intersecção entre $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ dos exercícios 17 e 18?

1.3- Relação

Dados dois conjuntos não vazios A e B denomina-se **relação R de A em B** a qualquer subconjunto do produto cartesiano de A por B, AxB. A relação R de A em B é denotada por **A→B**.

Domínio e Conjunto Imagem

Dado o par ordenado (X; Y) pertencente à relação R de A em B, tem-se que a relação R associa X a Y, e então, Y é a imagem de X em R. Dessa forma, o conjunto domínio de R, D(R) é formado por todos os elementos de A que estão associados a pelo menos um elemento de B e o conjunto imagem de R, Im(R) é formado por todos os elementos de B que são imagens de pelo menos um elemento de A.

Exercícios 1.3

1) Dados os conjuntos A = {2; 7; 9} e B = {7; 9; 10}, mostre que R_1 = {(2; 9), (2; 10), (7; 9)} é uma relação de A em B.

2) Qual o domínio D(R) e o conj. imagem Im(R) da relação R_1 do exercício 1?

3) Verifique se R_2 = {(2; 9), (2; 10), (7; 5)} é uma relação de A em B, os conjuntos especificados no exercício 1.

4) Considere os conjuntos do exercício 1. Faça a representação da relação R_1: A→B por meio do diagrama de flechas.

5) Considere os conjuntos A e B do exercício 1. Escreva, por enumeração, a relação $R_4 = \{(x; y) \in AxB \mid x = y\}$.

6) Qual o domínio D(R) e o conj. imagem Im(R) da relação R_4 do exercício 5?

7) Considere os conjuntos A e B do exercício 1. Escreva, por enumeração, a relação $R_5 = \{(x; y) \in AxB \mid x < y\}$.

8) Qual o domínio D(R) e o conj. imagem Im(R) da relação R_5 do exercício 7?

9) Considere os conjuntos C = {-3; -2; -1; 0; 1; 3} e D = {2; 3; 4; 5; 6} e a relação R: C→D, R = {(-3; 2), (-3; 3), (-2; 4), (-2; 5), (0; 5), (0; 6)}. Represente graficamente a relação R em um plano cartesiano.

10) Qual o domínio D(R) e o conj. imagem Im(R) da relação R do exercício 9?

11) Considere P como o conjunto dos números pares e I o conjunto dos números ímpares. Verifique qual das relações adiante é relação de P em I, ou seja, a relação R: P → I.

a) {(2; 2), (4; 5), (6; 4)}
b) {(4; 3), (6; 5), (8; 7)}
c) {(1; 2), (3; 4), (5; 6)}

12) Qual o domínio D(R) e o conj. imagem Im(R) da relação R do exercício 11?

13) Represente graficamente a relação R que você identificou no exercício 11 em um plano cartesiano.

14) Represente por extensão (ou enumeração) a relação $R_1 = \{(x; y) \in N^2 | y = x\}$.

15) Qual o domínio $D(R_1)$ e o conjunto imagem $Im(R_1)$ da relação R_1 do exercício 14.

16) Represente graficamente em um plano cartesiano a relação R_1 do exercício 14.

17) Represente por extensão (ou enumeração) a relação $R_2 = \{(x; y) \in N^2 | y = x^2\}$.

18) Qual o domínio $D(R_2)$ e o conj. imagem $Im(R_2)$ da relação R_2 do exercício 17?

19) Represente graficamente em um plano cartesiano a relação R_2 do exercício 17.

20) Represente por extensão (enumeração) a relação $R_3 = \{(x; y) \in N^2 | y = x\}$.

21) Qual o domínio $D(R_3)$ e o conjunto imagem $Im(R_3)$ da relação R_3 do exercício 20?

22) Represente graficamente em um plano cartesiano a relação R_3 do exercício 20.

23) Seja A = {2; 5; 10} e C = {-4; 4; 3}.

a) Represente por diagrama em flechas a relação $R_1 = \{(x; y) \in AxC | x + y \leq 7\}$.
b) Represente por extensão a relação $R_1 = \{(x; y) \in AxC | x + y \leq 7\}$.
c) Represente por extensão o domínio e o conjunto imagem de R_1.
d) Represente por diagrama em flechas a relação $R_2 = \{(x; y) \in AxC | x^2 = y\}$.
e) Represente por extensão o domínio e o conjunto imagem de R_2.

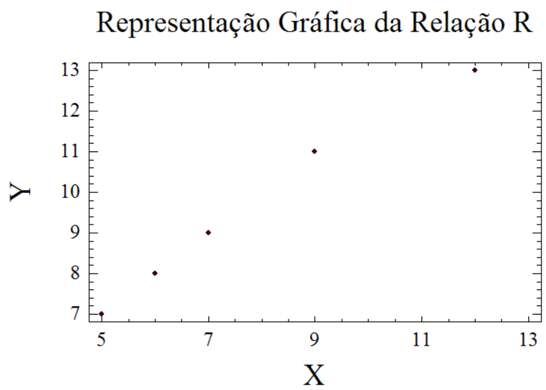
24) Faça a **representação gráfica** (no plano cartesiano) das relações R_1 e R_2, citadas anteriormente.

25) Dados os intervalos: $A = [-3; 3] \subset R$ e $B = [-9; 9] \subset R$, faça a representação gráfica (no plano cartesiano) das relações:

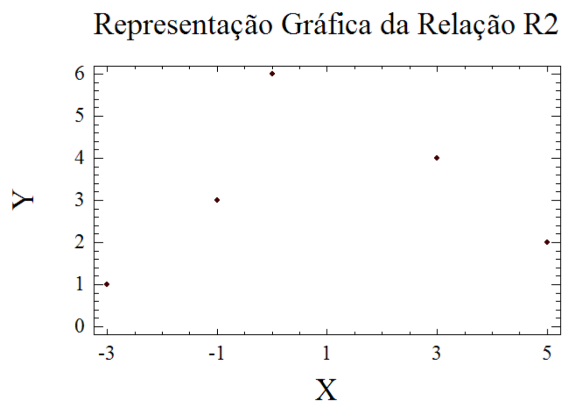
a) $R_1 = \{(x; y) \in AxB \mid y = x^2\}$;
b) $R_2 = \{(x; y) \in AxB \mid y = 3x\}$;
c) Represente por extensão $D(R_1)$ e $Im(R_1)$;
d) Represente por extensão $D(R_2)$ e $Im(R_2)$.

26) Dada a representação gráfica, adiante, da relação R de X em Y, ou seja, R: $X \rightarrow Y$, com $X \subset Z$ e $Y \subset Z$ pede-se:

a) Represente por extensão (ou enumeração) a relação R;
b) Represente por extensão o domínio de R, D(R);
c) Represente por extensão o conjunto imagem de R, Im(R);
d) De qual conjunto, produto cartesiano, R é subconjunto?



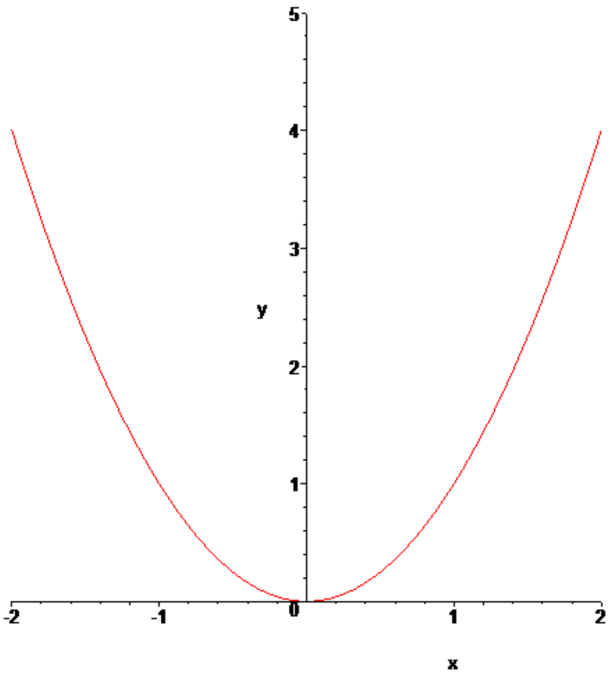
27) Dada a representação gráfica, adiante, da relação R_2 de X em Y, ou seja, R_2: $X \rightarrow Y$, com $X \subset Z$ e $Y \subset Z$.



Pede-se:

a) Represente por extensão (ou enumeração) a relação R2 ;
b) Representa por extensão o domínio de R2, D(R2);
c) Represente por extensão a imagem de R2, Im(R2);
d) De qual conjunto, produto cartesiano, R2 é subconjunto?

28) Dada a representação gráfica, adiante, da relação R_3 de X em Y, ou seja, R_3: $X \rightarrow Y$, com $X \subset R$ e $Y \subset R$,



pede-se:

a) Represente por propriedade a relação R_3 ;
b) Represente por propriedade o domínio de R_3, $D(R_3)$;
c) Represente por propriedade a imagem de R_3, $Im(R_3)$;
d) De qual conjunto produto cartesiano R_3 é subconjunto?

1.4- Função

Dados dois conjuntos não vazios A e B, denomina-se **função a toda relação de A em B** na qual, para todo elemento de A, está associado um único elemento de B. Desta forma, todos os elementos de A estão associados a um elemento de B e nenhum elemento de A pode estar associado a dois ou mais elementos de B.

Uma função do conjunto A em B denotada por **f: A → B** pode ser representada por uma lei do tipo **y = f(x)** que determina a forma como são obtidos os pares (x; y) do produto cartesiano, ou seja, (x; y) $\in$ AxB. Se uma relação R é uma função de A em B, dizemos que:

- A é o domínio da função;
- B é o contradomínio;
- os elementos do contradomínio B que estão associados aos do domínio A formam o conjunto imagem da função.

Exercícios 1.4

1) Identifique nas figuras que o professor fará no quadro negro, o que é função e o que não é, explicando por quê.

2) Dados os conjuntos A = {0, 1, 2, 3} e B = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, pede-se:
   a) O produto cartesiano AxB.
   b) Os pares (pontos) correspondentes à função, y = f(x): A → B, com y = f(x) = 2x + 1.
   c) Represente os pares ordenados obtidos no item (b) em um plano cartesiano.

3) Dado o conjunto dos reais, R, e o conjunto dos reais não negativos, R_+, pede-se:
   a) A representação no plano cartesiano da função y = f(x): R → R_+, y = f(x) = $3x^2 +2$.
   b) A representação no plano cartesiano da função y = f(x): R → R_+, y = f(x) = x^2.

4) Seja a relação de A = [0; 5] em B = {1/5} cuja expressão é f(x) = y = $\frac{1}{5}$.
   a) f(x) é uma função, explique por quê.
   b) Qual o conjunto domínio de f(x)?
   c) Qual o conjunto contradomínio de f(x)?
   d) Faça a representação no plano cartesiano da função f(x).

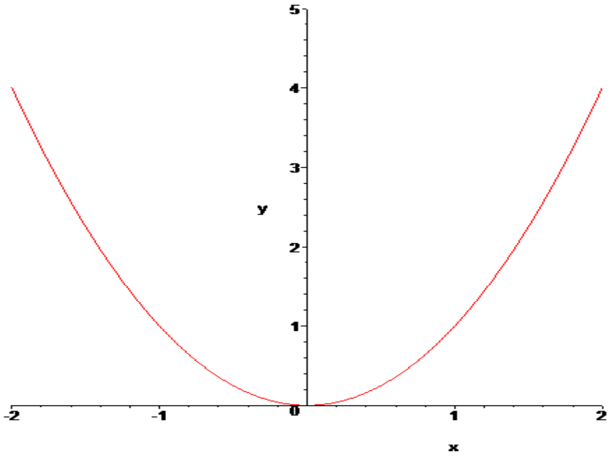
5) Seja a expressão f(x) = y = $\frac{1}{b-a}$, tal que x $\in$ [a; b] $\subset$ R, com b > a. Assim, tem-se f:X→Y com X = [a; b] $\subset$ R e Y = { $\frac{1}{b-a}$ }$\subset$ R
   a) f(x) é uma função, explique por quê.
   b) Qual o conjunto domínio de f(x)?
   c) Qual o conjunto contradomínio de f(x)?

d) Qual o conjunto imagem de f(x)?

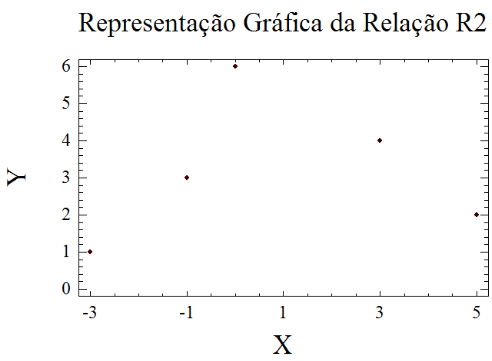
e) Faça a representação no plano cartesiano da função f(x), assumindo um valor genérico para b.

6) As funções dos itens 4 e do item 5 têm um nome especial. Qual é este nome?

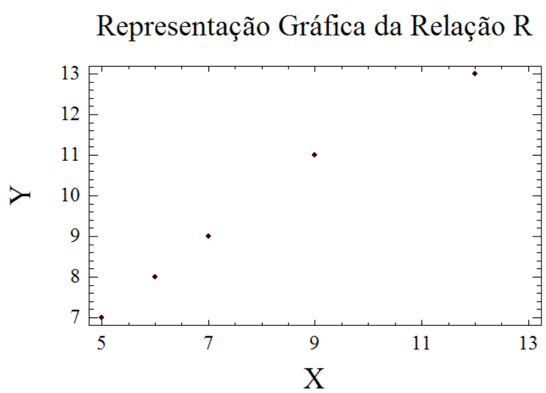
7) Seja a representação gráfica, adiante, da relação R_3 de X em Y, ou seja, R_3: X $\rightarrow$ Y, com X $\subset$R e Y $\subset$R, adiante. A relação R_3 é uma função? Por quê?



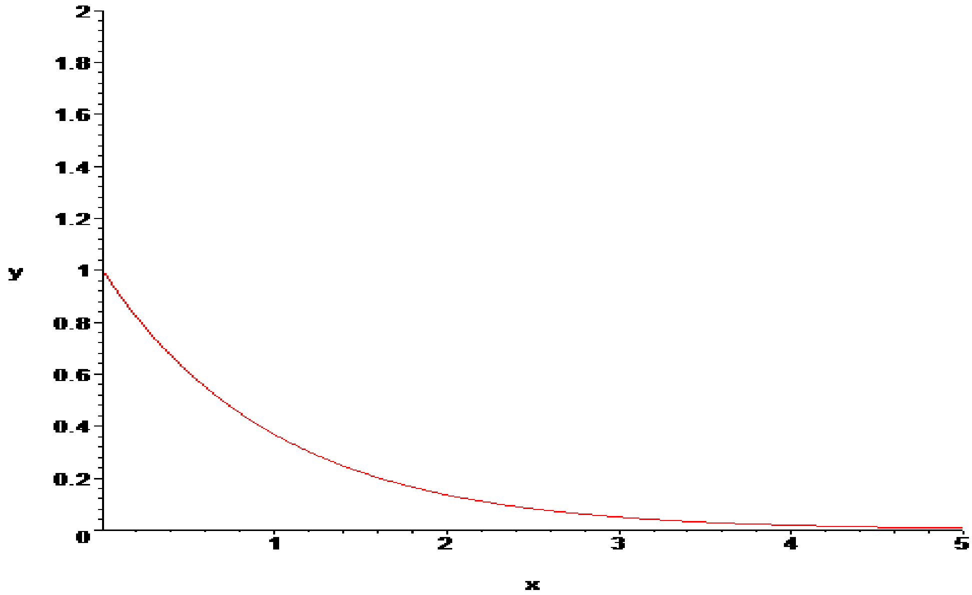
8) Seja a representação gráfica da relação R_2 de X em Y, ou seja, R_2: X $\rightarrow$ Y, com X$\subset$Z e Y$\subset$Z, adiante. A relação R_2 é uma função? Por quê?



9) Seja a representação gráfica da relação R de X em Y, ou seja, R: X $\rightarrow$ Y, com X$\subset$Z e Y$\subset$Z, adiante. A relação R é uma função? Por quê?



10) Seja a representação gráfica, adiante, da relação R_6 de X em Y, ou seja, R_6: X → Y, com X = [0; 5]$\subset R_+$ e Y = [0; 2]$\subset R_+$, adiante. A relação R_6 é uma função? Por quê?



11) Seja y = f(x) a função cuja representação gráfica está na figura anterior (10).

a) Qual a expressão da função f(x)? Represente-a por propriedade (compreensão).

b) Qual o domínio da função f(x)? Represente-o por propriedade (compreensão).

c) Qual o contradomínio da função f(x)? Represente-o por propriedade (compreensão).

d) Qual o conjunto imagem da função f(x)? Represente-o por propriedade (compreensão).

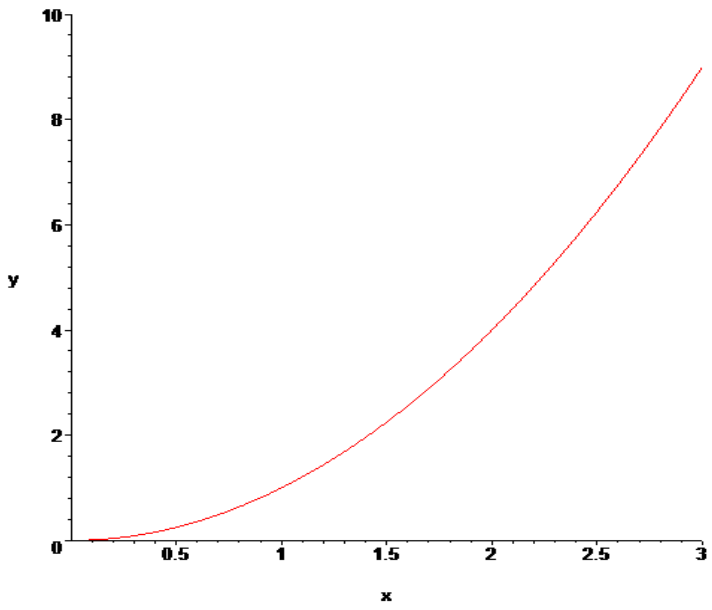
12) Seja y = g(x) a função g: X → Y, com X sendo o intervalo [0; 3]$\subset R_+$ e Y o intervalo [0; 10]$\subset R_+$, cuja representação gráfica está na figura adiante.

a) Qual a expressão da função g(x)? Represente-a por propriedade (compreensão).

b) Qual o domínio da função g(x)? Represente-o por propriedade (compreensão).

c) Qual o contradomínio da função g(x)? Represente-o por propriedade (compreensão).

d) Qual o conjunto imagem da função g(x)? Represente-o por propriedade (compreensão).



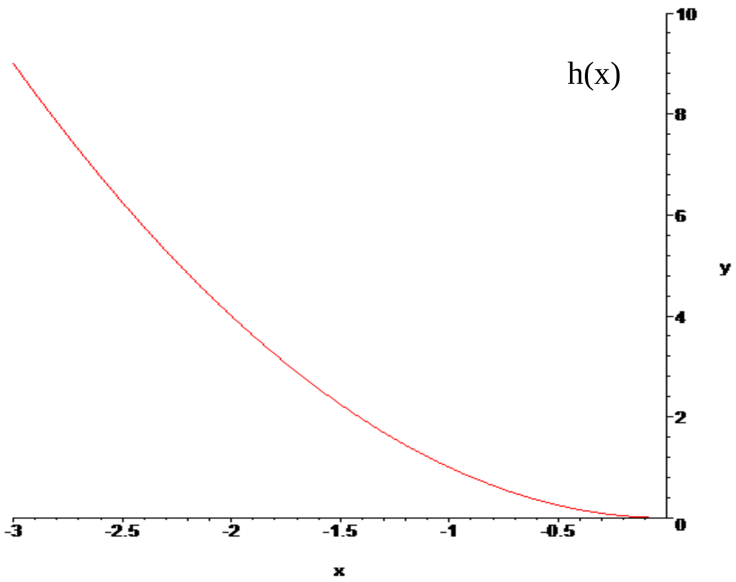
13) Seja y = h(x) a função h: X → Y, com X sendo o intervalo $[-3; 0] \subset R_-$ e Y o intervalo $[0; 10] \subset R_+$, cuja representação gráfica está na figura adiante.

a) Qual a expressão da função g(x)? Represente-a por propriedade (compreensão).

b) Qual o domínio da função g(x)? Represente-o por propriedade (compreensão).

c) Qual o contradomínio da função g(x)? Represente-o por propriedade (compreensão).

d) Qual o conjunto imagem da função g(x)? Represente-o por propriedade (compreensão).



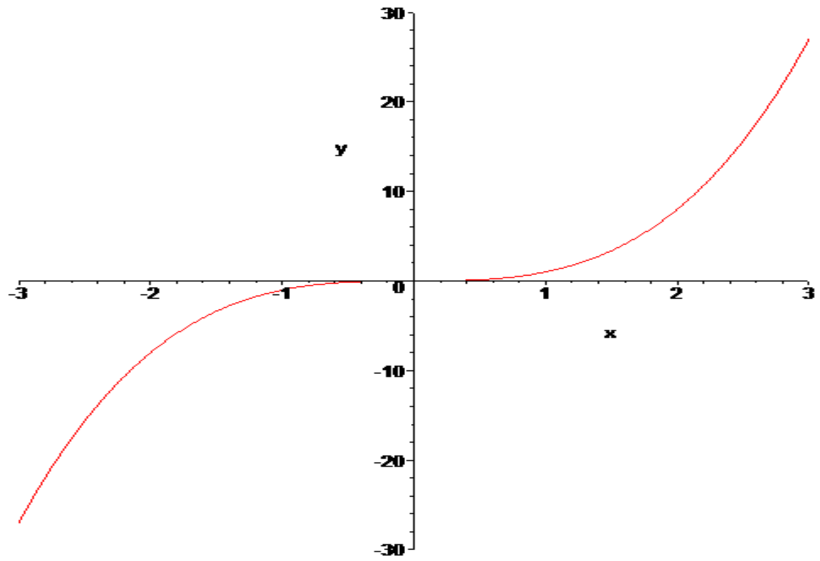
14) Seja $y = f(x) = x^3$ a função f: X → Y, com X sendo o intervalo $[-3; 3] \subset R$ e Y o intervalo $[-30; 30] \subset R$, cuja representação gráfica está na figura adiante.

a) Por que f(x) é uma função?

b) Qual o domínio da função f(x)? Represente-o por propriedade (compreensão).

c) Qual o contradomínio da função f(x)? Represente-o por propriedade (compreensão).

d) Qual o conjunto imagem da função f(x)? Represente-o por propriedade (compreensão).



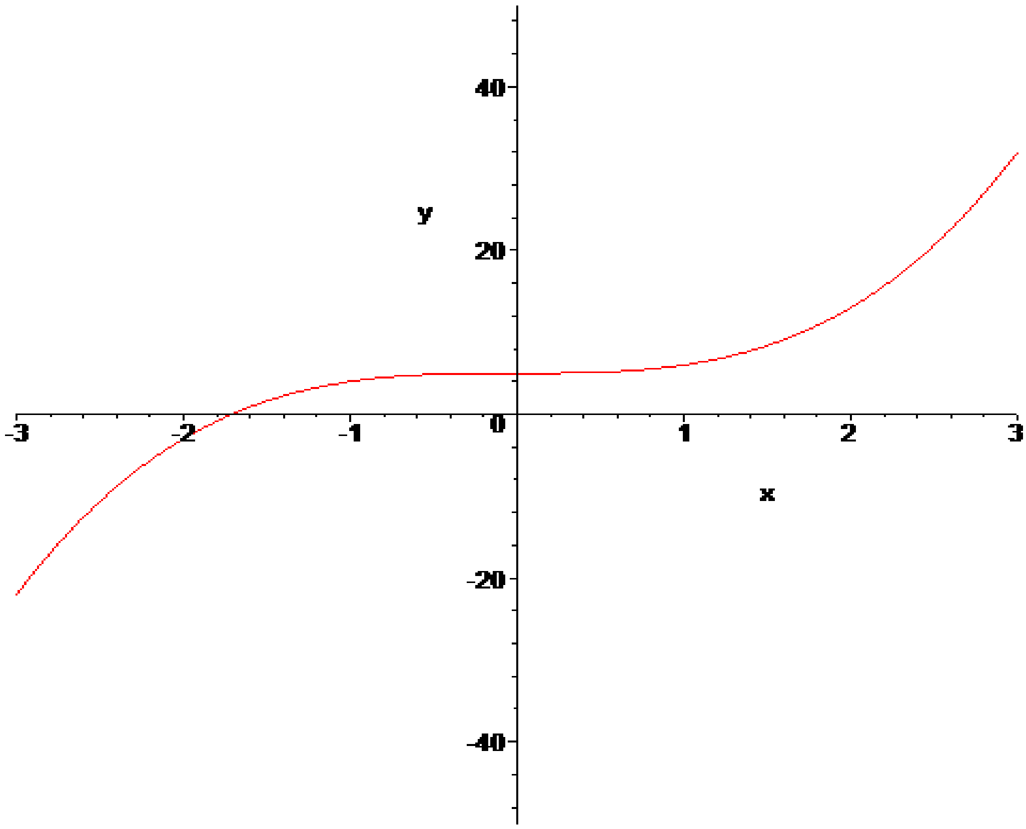
15) Seja $y = g(x) = x^3 + 5$ a relação $g: X \rightarrow Y$, com X sendo o intervalo $[-3; 3] \subset R$ e Y o intervalo $[-50; 50] \subset R$, cuja representação gráfica está na figura adiante.

a) Por que g(x) é uma função?

b) Qual o domínio da função g(x)? Represente-o por propriedade (compreensão).

c) Qual o contradomínio da função g(x)? Represente-o por propriedade (compreensão).

d) Qual o conjunto imagem da função g(x)? Represente-o por propriedade (compreensão).



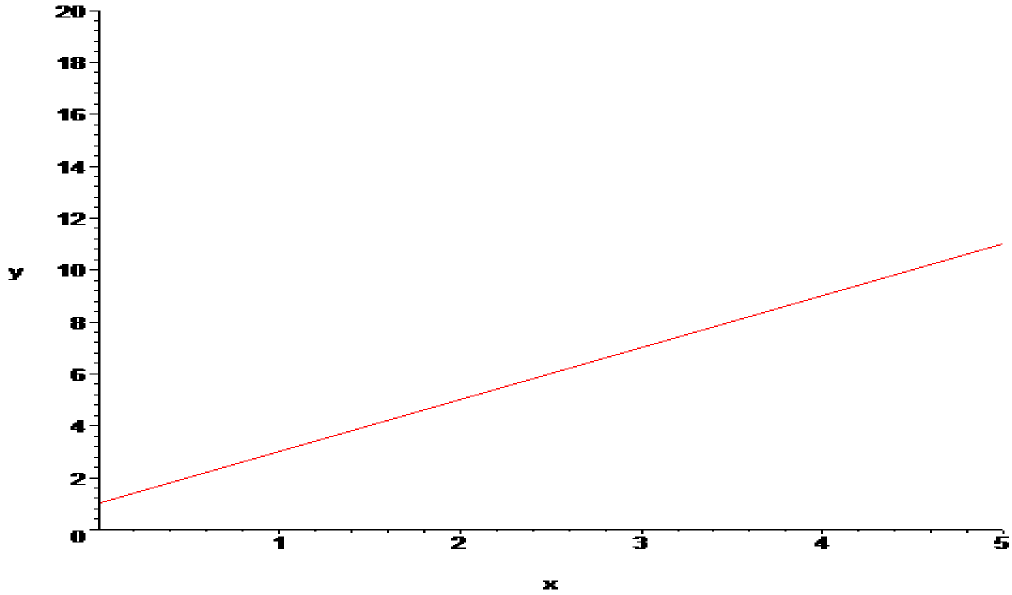
16) Seja $y = h(x) = 2x + 1$, a função $h: X \rightarrow Y$, com X sendo o intervalo $[0; 5] \subset R_+$ e Y o intervalo $[0; 20] \subset R_+$, cuja representação gráfica está na figura adiante.

a) Por que h(x) é uma função?

b) Qual o domínio da função h(x)? Represente-o por propriedade (compreensão).

c) Qual o contradomínio da função h(x)? Represente-o por propriedade (compreensão).

d) Qual o conjunto imagem da função y = h(x)? Represente-o por propriedade (compreensão).



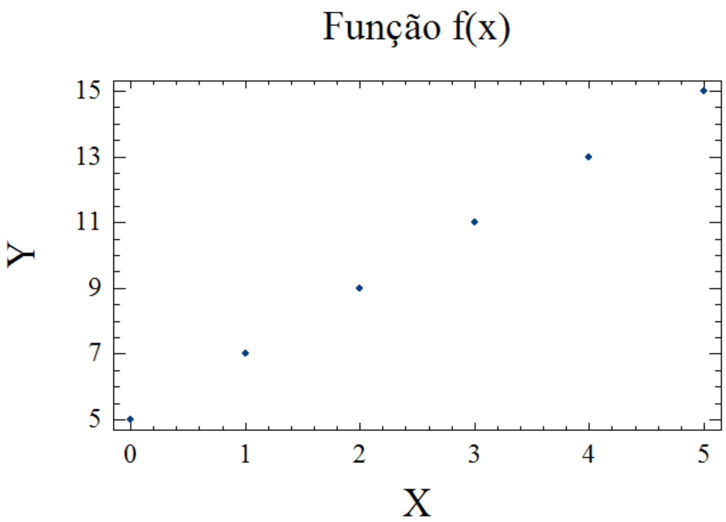
17) Seja y = f(x) = 2x + 5, a função f: X → Y, com X sendo o conjunto [0; 1; 2; 3; 4; 5]⊂N e Y o conjunto [0; 1; 2; .....; 19; 20]⊂N, cuja representação gráfica está na figura adiante.

a) Por que f(x) é uma função?

b) Qual o domínio da função f(x)? Represente-o por extensão.

c) Qual o contradomínio da função f(x)? Represente-o por extensão.

d) Qual o conjunto imagem da função f(x)? Represente-o por extensão.

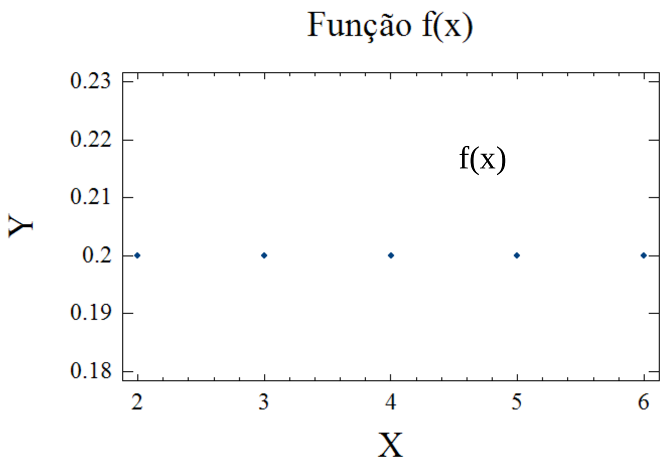


1.4.1- FUNÇÃO CONSTANTE

Chama-se **função constante** a toda função na qual os elementos do domínio possuem a mesma imagem.

Exercícios 1.4.1

1) Seja y = f(x) = 0,2 a função f: X → Y com X = {2, 3, 4, 5, 6}⊂N e o conjunto unitário Y = {0,2}⊂Q. A representação gráfica está na figura adiante.



a) Por que f(x) é uma função? Qual a propriedade importante que tem essa função?

b) Qual o nome dessa função, devido essa propriedade do item (a)?

c) Qual o domínio da função f(x)? Represente-o por extensão.

d) Qual o contradomínio da função f(x)? Represente-o extensão.

e) Qual o conjunto imagem da função f(x)? Represente-o por extensão.

2) Seja y = g(x) = 0,25 a função g: X → Y com X sendo o intervalo [0; 4]⊂R e o conjunto unitário Y = {0,25}⊂R. A representação gráfica está na figura adiante.

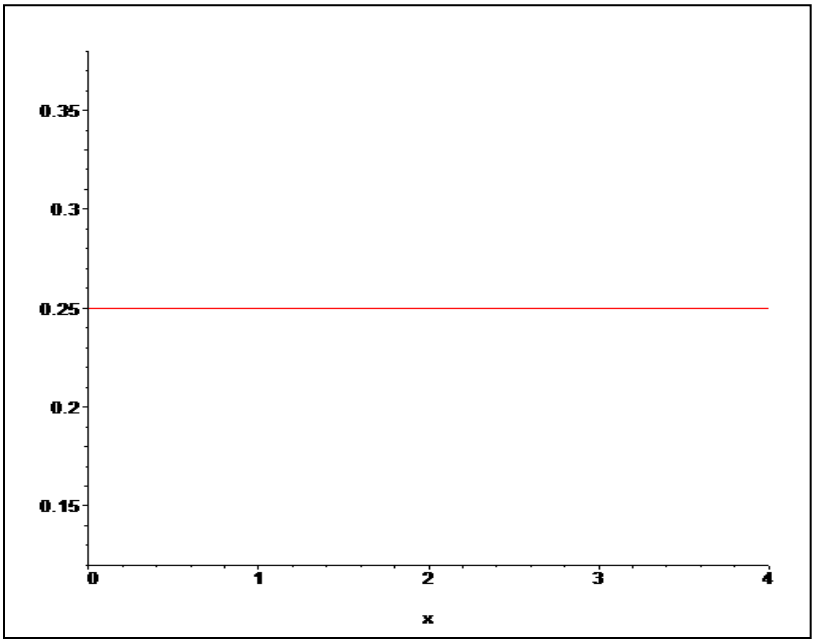
a) Por que g(x) é uma função? Qual a propriedade que tem essa função?

b) Qual o nome dessa função, devido essa propriedade do item (a)?

c) Qual o domínio da função g(x)? Represente-o por propriedade (compreensão).

d) Qual o contradomínio da função g(x)? Represente-o.

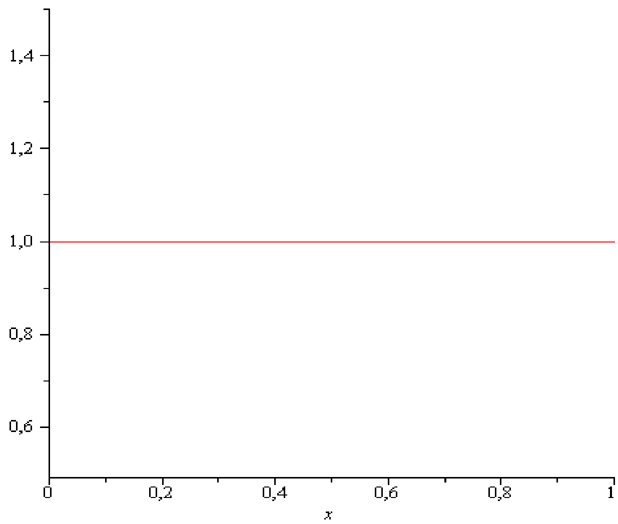
e) Qual o conjunto imagem da função g(x)? Represente-o.



3) Uma variável aleatória X tem como função densidade de probabilidade a função f(x) = 1. Esta é uma função de X = [0; 1] $\subset$ R em Y = {1} $\subset$ N.

a) Por que f é uma função? Qual a propriedade importante que tem essa função?

b) Qual o nome dessa função?
c) Qual o domínio de f?
d) Qual o contradomínio de f?
e) Qual conjunto imagem de f?



4) Uma variável aleatória X tem como função densidade de probabilidade a função f(x) = 1/5. Trata-se de uma função de X, o intervalo [5; 10] $\subset$ R, em Y o conjunto unitário {1/5}$\subset$ R.

a) Por que f é uma função? Qual a propriedade que tem essa função?

b) Qual o nome dessa função f?
c) Qual o domínio de f?
d) Qual o contradomínio de f?
e) Qual conjunto imagem de f?
f) Faça a representação gráfica de f.

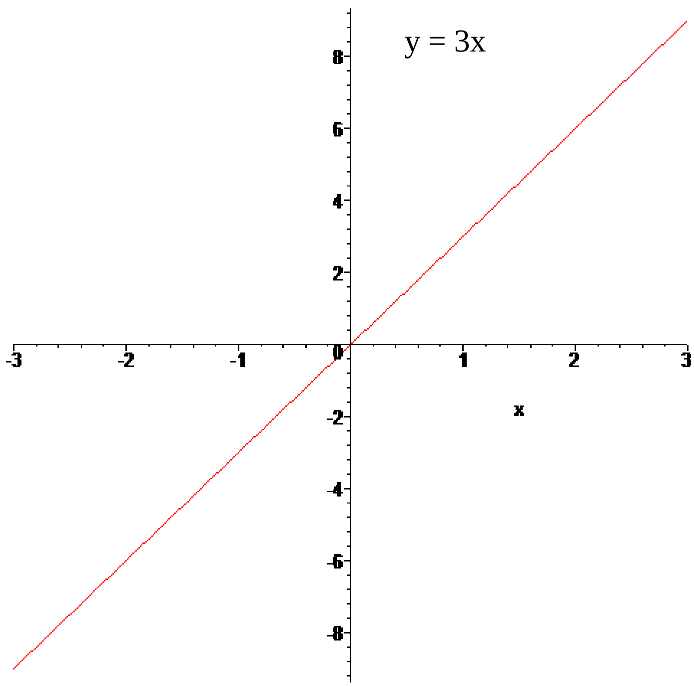
5) Faça a representação gráfica da função definida por f: U $\rightarrow$ Y, onde U é o intervalo fechado [a; b] $\subset$ R, Y é o conjunto unitário {1/(b – a)} $\subset$ R e tem-se f(u) = 1/(b – a). Identifique os elementos da função (domínio, etc.). Se U é uma variável aleatória, como se chama a função f(u) no contexto estatístico?

1.4.2 FUNÇÃO CRESCENTE E FUNÇÃO DECRESCENTE

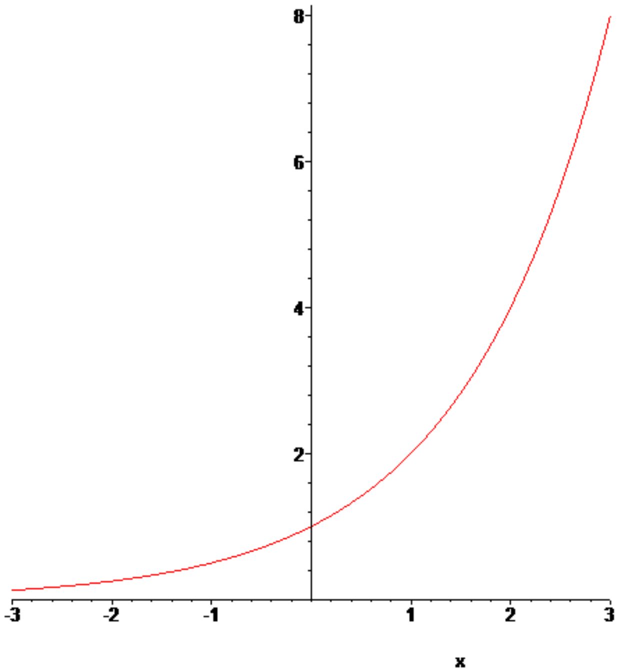
Uma função f(y), definida no intervalo [a; b], é chamada de função crescente se para $y_2 > y_1$ tem-se $f(y_2) > f(y_1)$ e da mesma forma g(y), definida no intervalo [a; b], é chamada de função decrescente se para $y_2 > y_1$ ocorrer $g(y_2) < g(y_1)$.

Exercícios 1.4.2

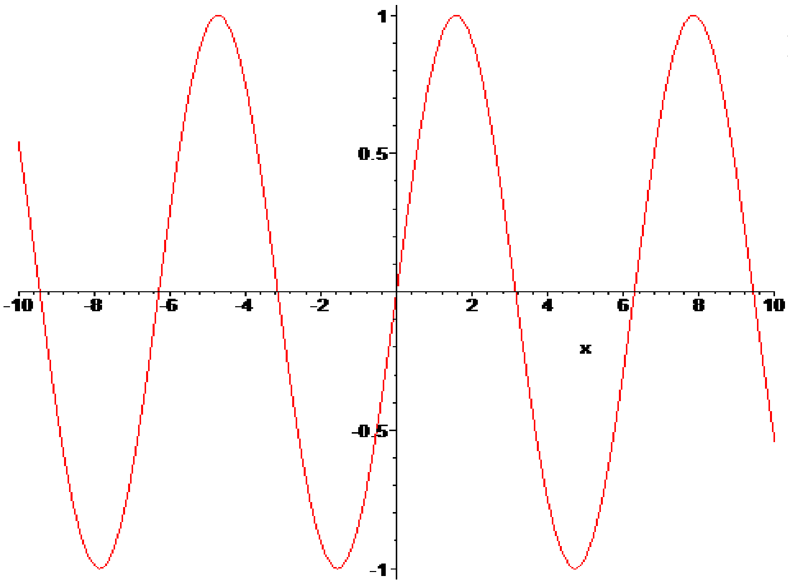
1) A função y = g(x) = 3x definida em R, ou seja g:X$\rightarrow$Y com X$\subset$ R e Y$\subset$ R, é crescente ou decrescente? Por quê?



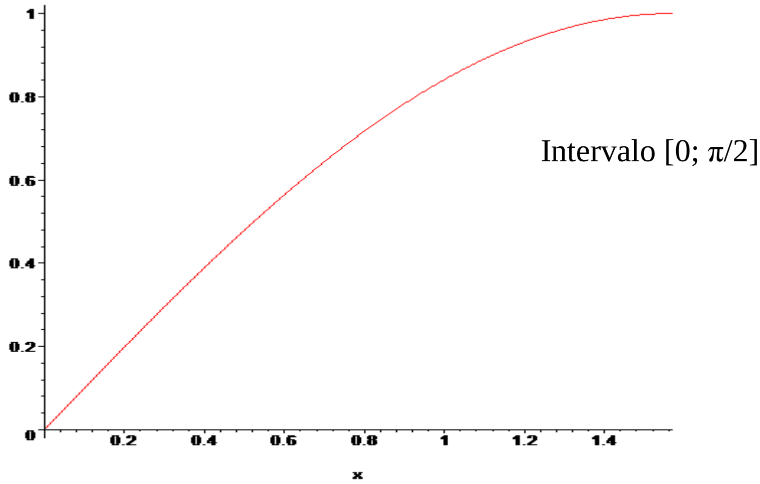
2) A função $y = f(x) = 2^x$ definida em R, ou seja, $f: X \to Y$ com $X \subseteq R$ e $Y \subseteq R_+$, é crescente ou decrescente? Por quê?



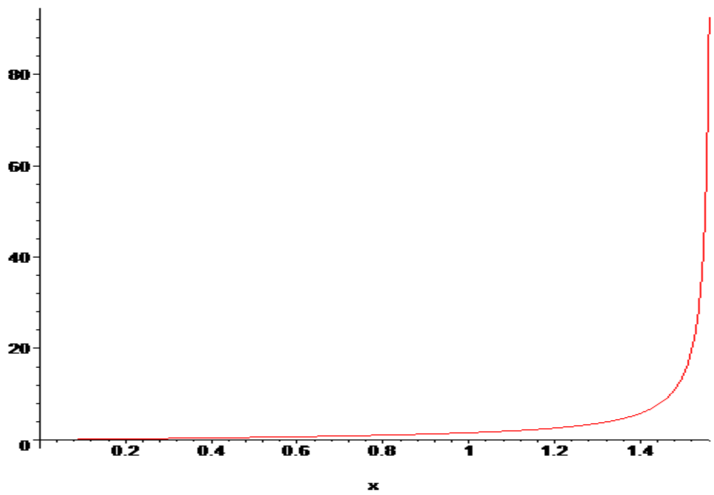
3) A função $y = f(x) = sen(x)$ com $x \in [0; \frac{\pi}{2})$, ou seja, $f: X \to Y$ com $X = [0; \frac{\pi}{2}) \subset R$ e $Y = [-1; 1] \subset R$, é crescente ou decrescente? Por quê?



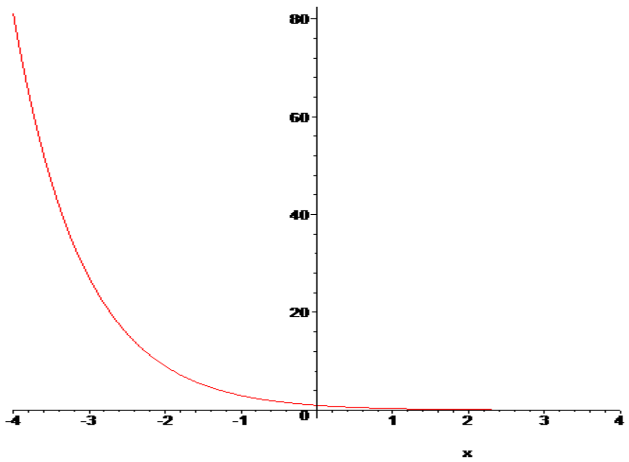
Intervalo maior
[-10; 10]



4) A função $y = h(x) = tg(x)$ com $x \in [0; \frac{\pi}{2})$, ou seja, $h: X \rightarrow Y$ com $X = [0; \frac{\pi}{2}) \subset R$ e $Y \subset R_{+}$, é crescente ou decrescente? Por quê?

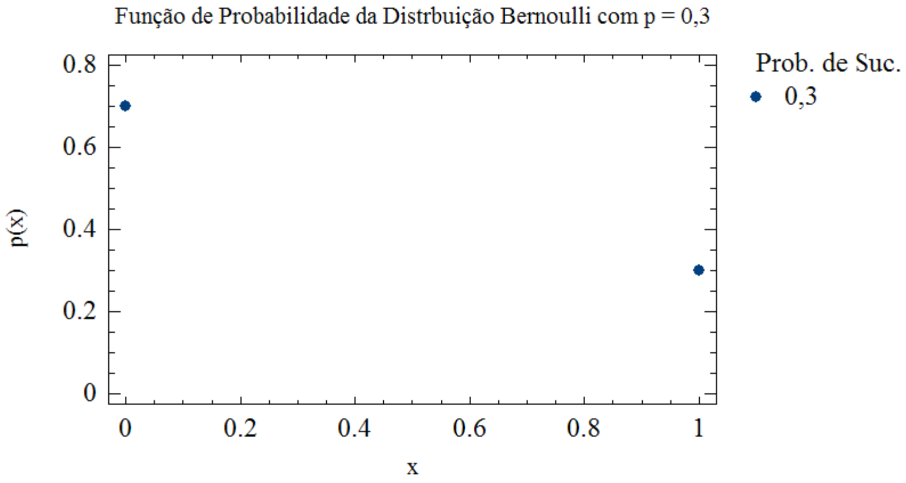


5) A função $f(x) = 3^{-x}$ com $x \in R$ é crescente ou decrescente? Por quê?

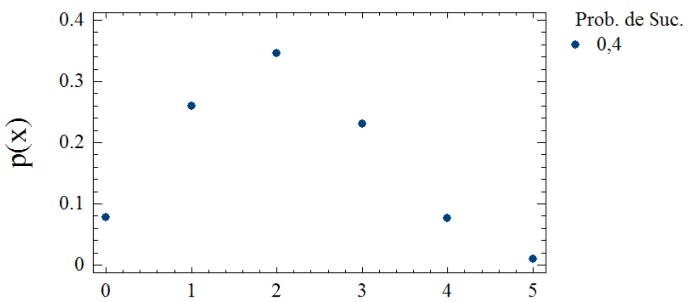


6) A função $p(x) = 0{,}3^x.0{,}7^{1-x}$ com x = 0, 1 é da forma $p(x) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}$ com $\theta \in (0;\ 1)$ e x = 0, 1. Na forma específica trata-se da função f do conjunto {0; 1} no intervalo [0; 1], ou seja, f:{0; 1} → $[0;1] \subset R$ com θ = 0,3. A representação gráfica está em seguida.

a) Por que p(x) é uma função?
b) Qual o domínio dessa função p(x)?
c) Qual o contradomínio dessa função p(x)?
d) Qual o conjunto imagem de p(x)?
e) Qual o nome dessa função no contexto estatístico?



7) A função $p(y) = \binom{5}{y} 0{,}4^y 0{,}6^{5-y}$ com y = 0, 1, 2, 3, 4, 5 é da forma $p(y) = \binom{n}{y}\theta^y(1-\theta)^{n-y}$ y = 0, 1, 2, ... , n. Na forma específica trata-se da função f do conjunto {0; 1; 2; 3; 4; 5} no intervalo [0; 1], ou seja, f:{0; 1; 2; 3; 4; 5} → $[0;1] \subset R$. A representação gráfica está em seguida.



a) Por que p(y) é uma função?
b) Qual o domínio dessa função p(y)?
c) Qual o contradomínio dessa função p(y)?
d) Qual o conjunto imagem de p(y)?

1.4.3 FUNÇÕES PARES E FUNÇÕES ÍMPARES

Função Par
Uma função é chamada de **função par** quando para qualquer valor **x** do seu domínio ocorrer **f(x) = f(-x)**. Assim, em uma função par valores simétricos (em relação à origem) do domínio têm sempre a mesma imagem no contradomínio.

Função Impar
Uma função é chamada de **função impar** quando para qualquer valor **x** do seu domínio ocorrer **f(x) = -f(-x)**. Assim, em uma função impar valores simétricos (em relação à origem) do domínio têm imagens simétricas no contradomínio.

Função Sem Paridade
Uma função que **não é par** e **não é impar** é chamada de função **sem paridade** ou se diz que **não tem paridade**.

Exercícios 1.4.3
1) Classifique as funções abaixo em **função par,** em **função impar** ou em **função sem paridade** e justifique por quê.

a) $f(x) = x^2$ com $x \in R$ ( )
b) $f(x) = 3x^2$ com $x \in R$ ( )
c) $f(x) = x^3$ com $x \in R$ ( )
d) $f(x) = 3x^4$ com $x \in R$ ( )
e) $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}z^2}$ com $z \in R$ ( )
f) $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}z}$ com $z \in R$ ( )
g) $f(x) = 3x$ com $x \in R$ ( )
h) $y = x^2 + 3$ com $x \in R$ ( )
i) $h(x) = -\frac{x^3}{2}$ com $x \in R$ ( )
j) $u(x) = x^3 - 1$ com $x \in R$ ( )
k) $f(x) = sen(x)$ $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ( )
l) $f(x) = cos(x)$ $x \in R$ ( )
m) $f(y) = tg(y)$ $y \in [0, \frac{\pi}{2})$ ( )
n) $f(x) = \ell n(x)$ $x \in R_+$ ( )
o) $f(x) = 1 - x$ $x \in R$ ( )

2) Classifique as funções que o professor desenhará no quadro negro em **função par,** em **função impar** ou em **função sem paridade** e justifique por quê.

1.4.4 FUNÇÃO SOBREJETORA, INJETORA E BIJETORA

Função Sobrejetora

Uma função f: A→B é chamada de **função sobrejetora** quando todo elemento do **contradomínio B** for imagem de pelo menos um elemento do **domínio A** da função. Desta forma o **conjunto imagem** de **f é igual ao seu contradomínio**.

Função Injetora

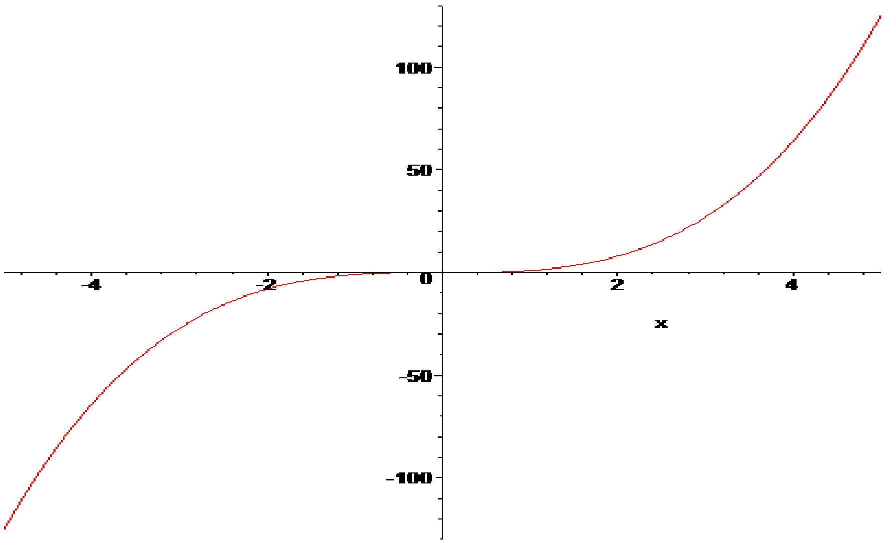
Uma função f: A→B é chamada de **função injetora** quando para **dois elementos distintos quaisquer** do domínio, corresponderem **duas imagens distintas** no contradomínio.

Função Bijetora

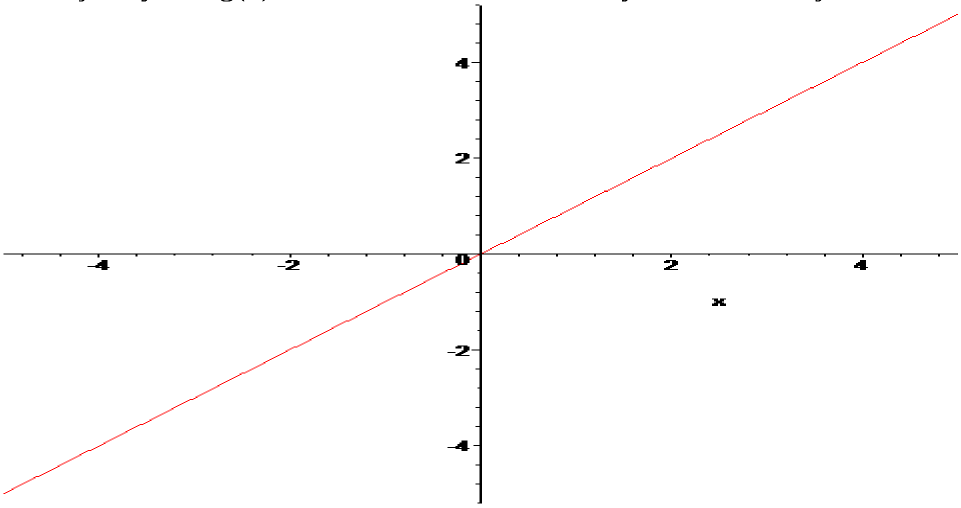
Uma função f: A→B é chamada de **função bijetora** quando for **injetora e sobrejetora** simultaneamente.

Exercícios 1.4.4

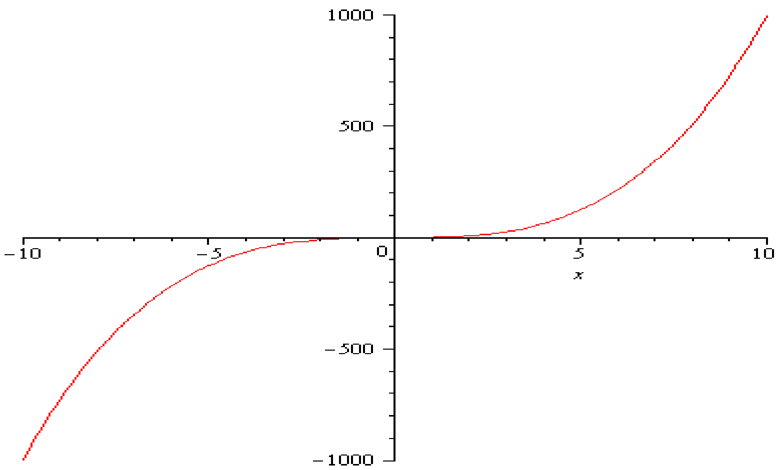
1) A função $y = f(x) = x^3$, com $x \in R$ e $y \in R$, é sobrejetora? Por quê?



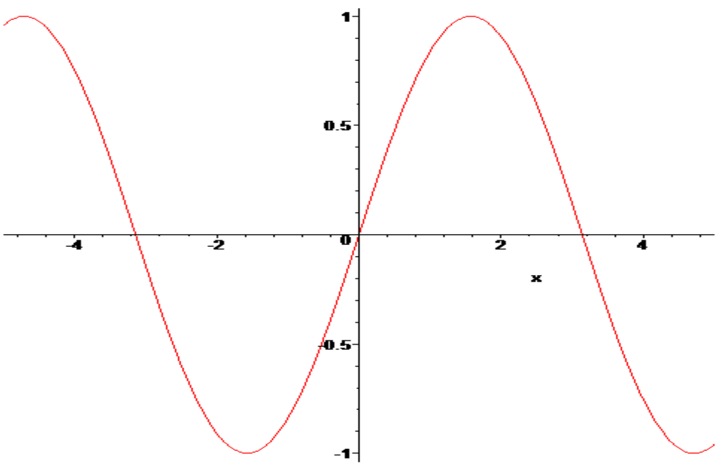
2) A função $y = g(x) = x$, com $x \in R$ e $y \in R$, é injetora? Por quê?



3) A função $f(x) = x^3$, com $x \in [-10; 10]$ e $y \in [-1000; 1000]$ é bijetora? Por quê?



4) A função $y = sen(x)$, com $x \in R$ e $y \in [-1; 1] \subset R$, é injetora?



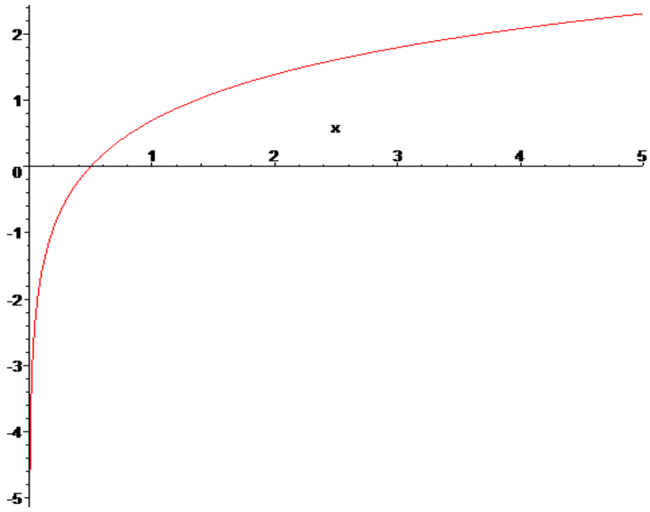
5) Complete o texto de forma a torná-lo verdadeiro: “toda reta paralela ao eixo das abscissas, Ox, corta uma função injetora em no máximo um

....................”. Então, a função y = f(x) = sen(x) não é injetora porque existem retas paralelas ao eixo Ox cortando o gráfico em mais de um ....

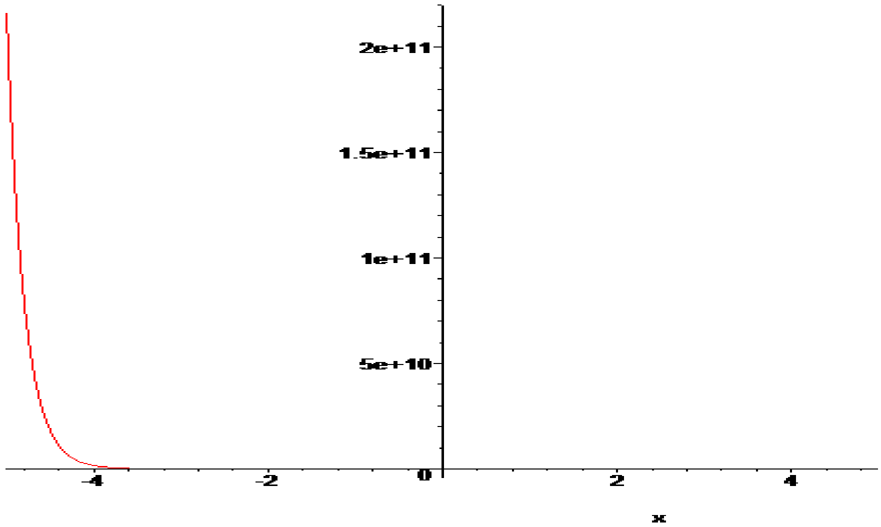
6) Identifique nas figuras que o professor fará no quadro negro as funções sobrejetoras.

7) Identifique nas figuras que o professor fará no quadro negro as funções sobrejetoras, injetoras e bijetoras.

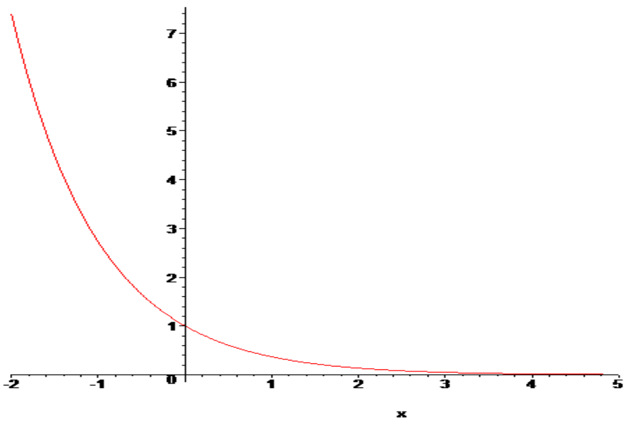
8) A função $y = f(x) = \ell n(2x)$, com $x \in R_+^*$ e $y \in$ R, é sobrejetora? É injetora? É bijetora? Veja o gráfico adiante.



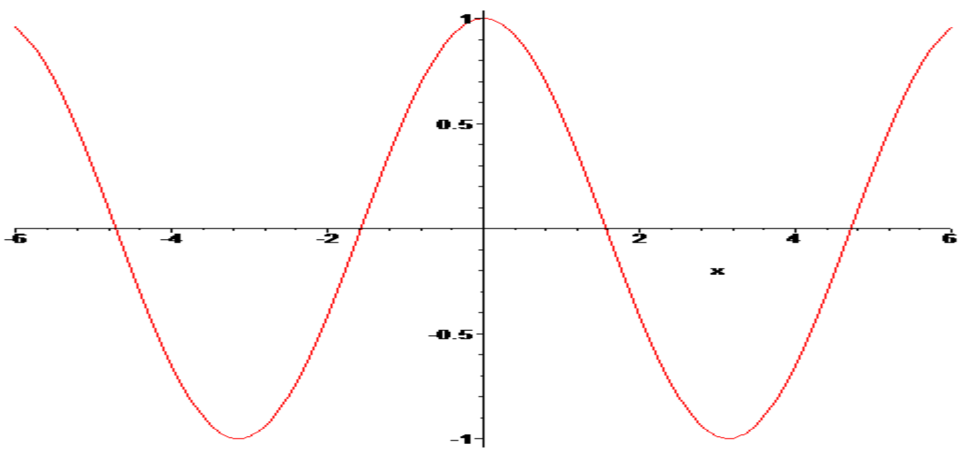
9) A função $y = f(x) = 3e^{-5x}$, com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}_+^*$, é sobrejetora? É injetora? É bijetora? Veja o gráfico adiante.



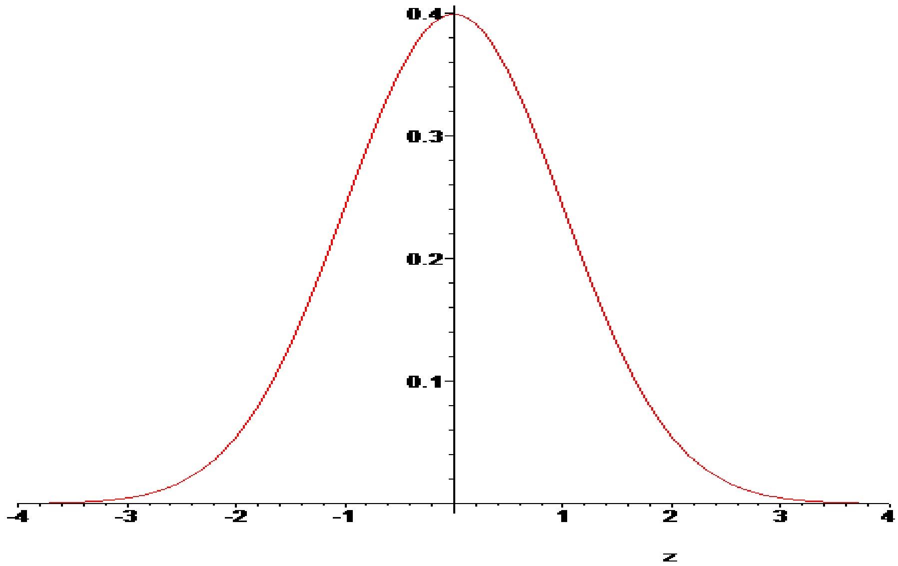
10) A função $y = f(x) = e^{-5x}$, com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}_+^*$ é sobrejetora? É injetora? É bijetora? Veja o gráfico adiante.



11) A função $y = f(x) = \cos(x)$, com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in [-1; 1] \subset \mathbb{R}$, é sobrejetora? É injetora? É bijetora? Veja o gráfico adiante.

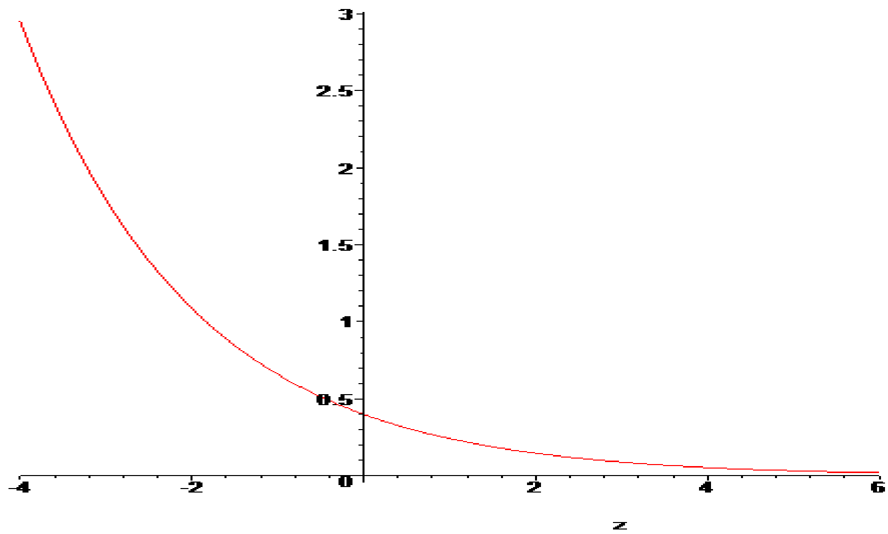


12) A função y = f(z) = $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}$, com z $\in$ R e y $\in$ (0; 0,4] $\subset R_+^*$, é sobrejetora? É injetora? É bijetora? Veja o gráfico adiante.



13) A função do item (12) é muito importante na estatística. Qual o nome dessa função na Estatística?

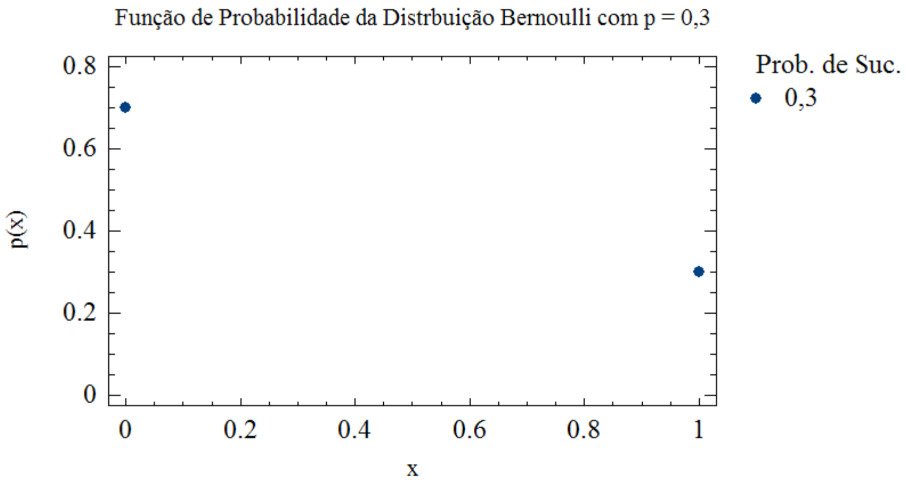
14) A função y = f(z) = $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z}$, com z $\in$ R e y $\in$ R_+^* , é sobrejetora? É injetora? É bijetora? Veja o gráfico adiante.



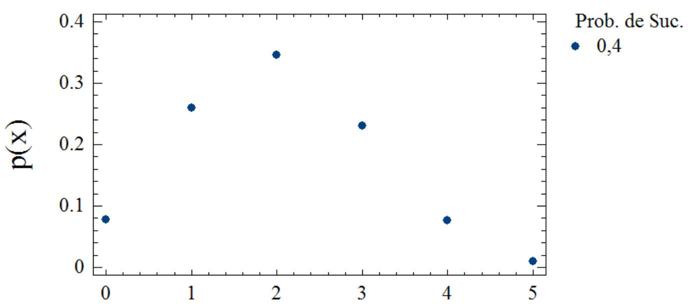
15) A função p(x) = $0{,}3^x.0{,}7^{1-x}$ com x = 0, 1 é da forma p(x) = $\theta^x(1-\theta)^{1-x}$ com $\theta\in(0;\ 1)$ e x = 0, 1. Na forma específica trata-se da função f do conjunto {0; 1} no intervalo [0; 1], ou seja, f:{0; 1} $\rightarrow$ [0;1]$\subset$R com θ = 0,3. A representação gráfica está em seguida.

a) Por que p(x) é uma função?

b) Qual o domínio dessa função p(x)?
c) Qual o contradomínio dessa função p(x)?
d) Qual o conjunto imagem de p(x)?
e) Qual o nome dessa função no contexto estatístico?
f) A função p(x) é par, impar ou sem paridade?
g) A função p(x) é sobrejetora, injetora ou bijetora? Por quê?



16) A função $p(y) = \binom{5}{y} 0{,}4^{y} 0{,}6^{5-y}$ com y = 0, 1, 2, 3, 4, 5 é da forma $p(y) = \binom{n}{y} \theta^{y} (1-\theta)^{n-y}$ y = 0, 1, 2, ... , n. Na forma específica trata-se da função f do conjunto {0; 1; 2; 3; 4; 5} no intervalo [0; 1], ou seja, f:{0; 1; 2; 3; 4; 5} → $[0;1] \subset R$. A representação gráfica está em seguida.



a) Por que p(y) é uma função?
b) Qual o domínio dessa função p(y)?
c) Qual o contradomínio dessa função p(y)?
d) Qual o conjunto imagem de p(y)?
e) A função p(y) é par, impar ou sem paridade?
f) A função p(y) é sobrejetora, injetora ou bijetora? Por quê?

g) Qual o nome dessa função p(x) no contesto estatístico?

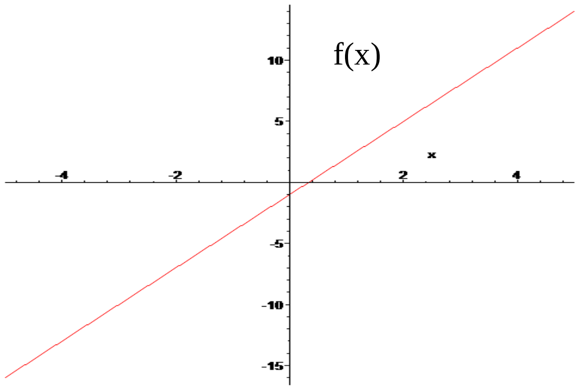
1.4.5 FUNÇÃO INVERSA

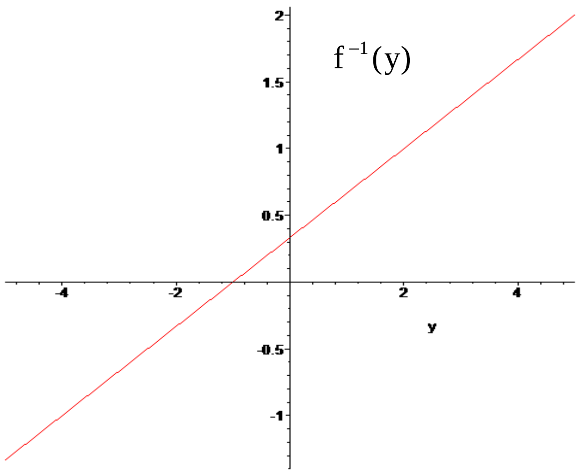
Seja f uma função **bijetora** de A em B, então é possível definir uma nova função com **domínio B** e **contradomínio A** que associa a cada elemento $y = f(x) \in B$ um único elemento $x \in A$. Essa nova função, denotada por $\mathbf{f^{-1}}$, é **chamada de função inversa de f**. E, então, $f^{-1} = \{(y; x) \mid (x; y) \in f\}$.

Exercícios 1.4.5

1) Seja $y = f(x) = 3x - 1$, com $x \in R$, ou melhor, $f: R \to R$. Veja os gráficos de $f(x)$ e de $f^{-1}(y)$.

a) Determine a função inversa de f, ou seja, $f^{-1}(y)$;
b) Por que existe a inversa f^{-1} de f?
c) Se x = 5, qual o valor de y = f(x)?
d) Se y = 11, qual o valor de $x = f^{-1}(y)$?



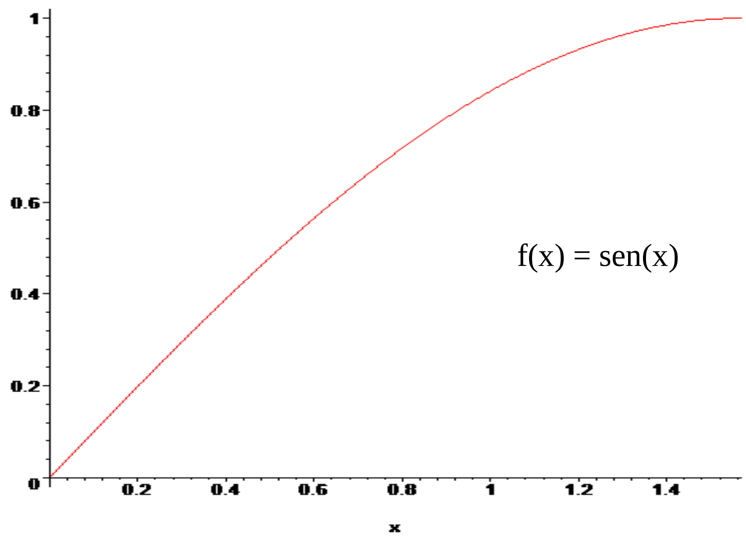


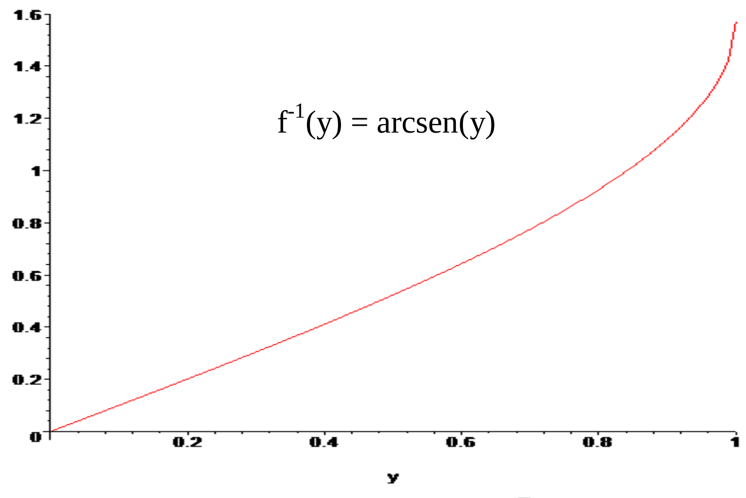
2) Seja f(x) = y = sen(x), com $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, ou melhor, $f:[0; \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0; 1]$. Veja os gráficos de f(x) e de $f^{-1}(y)$.

a) Escreva a função $f^{-1}(y)$.

b) Se $x = 45^0$, ou melhor, $x = \frac{\pi}{4}$ radianos; qual o valor de f(x)?

c) Se $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, qual o valor de $f^{-1}(y)$?





3) Seja f(x) = y = sen(x/2), com $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, ou melhor, $f: [0; \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0; 1]$

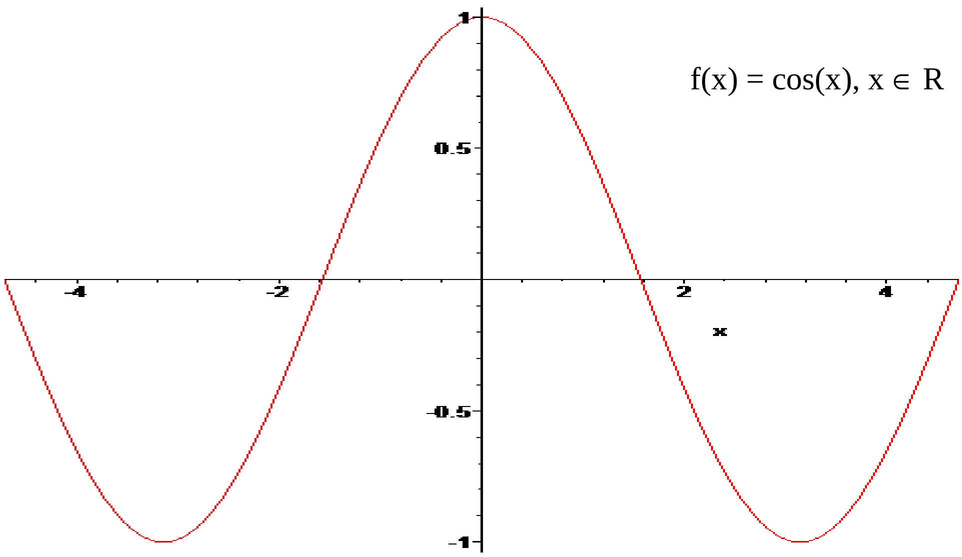
a) Qual o valor de $f^{-1}(y)$?

b) Se $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, qual o valor de $f^{-1}(y)$?

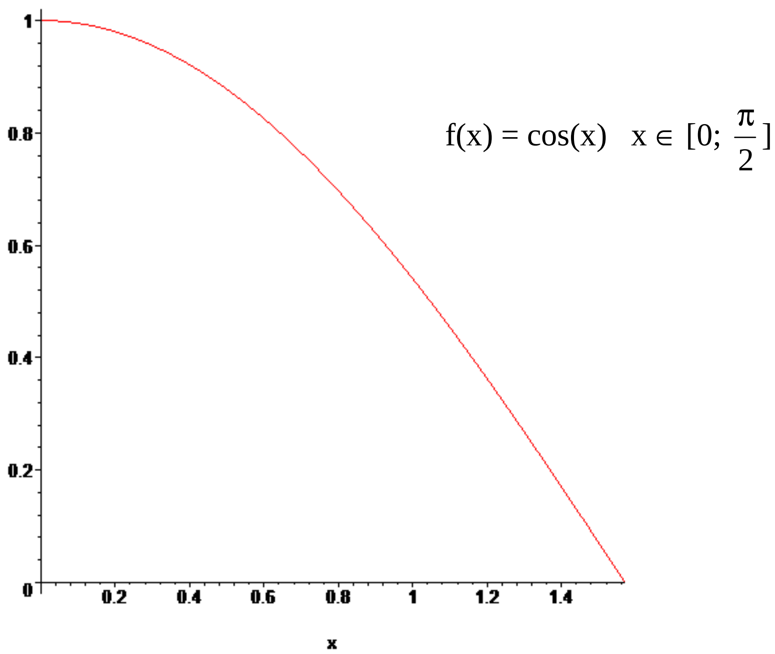
c) Qual propriedade uma função deve possuir para que admita inversa?

4) Seja f(x) = y = cos(x), com $x \in R$, ou melhor, $f: R \rightarrow R$ com conjunto imagem igual a [-1; 1].

a) Essa função admite inversa em todo o seu domínio? Por quê? Veja o gráfico adiante.

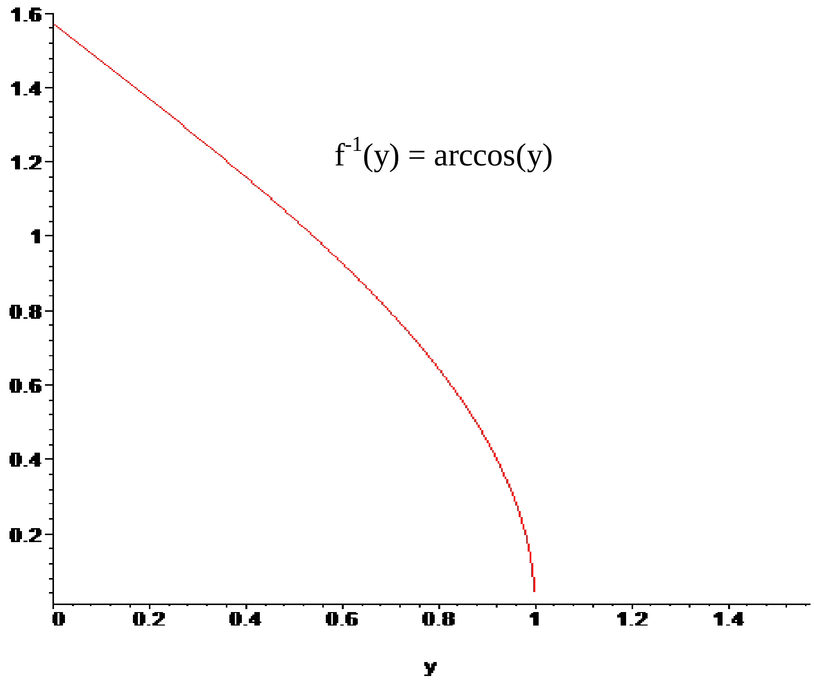


b) Se a função $f(x) = y = \cos(x)$ for definida apenas no $1^{0.}$ quadrante, ou seja, $f:[0; \frac{\pi}{2}] \rightarrow [1; 0]$, ela admite inversa? Por quê? Veja o gráfico.



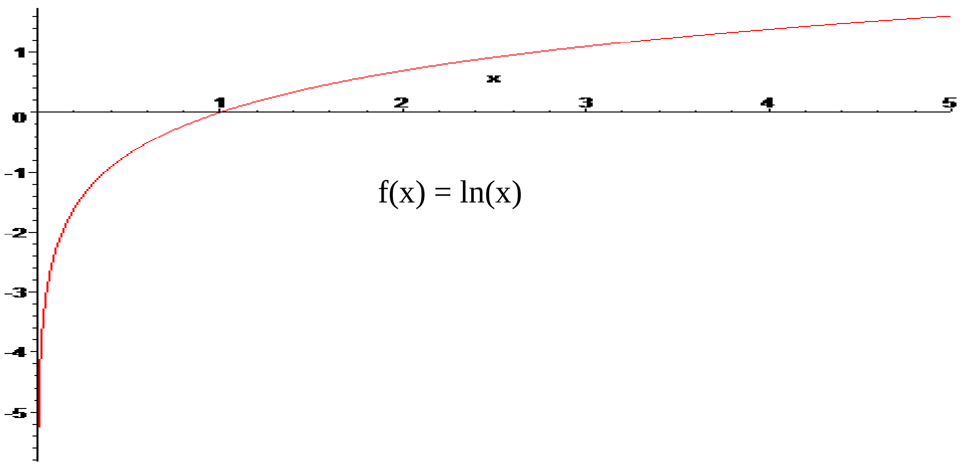
c) Se $x = \frac{1}{2}$, qual o valor de $y = f(x)$?

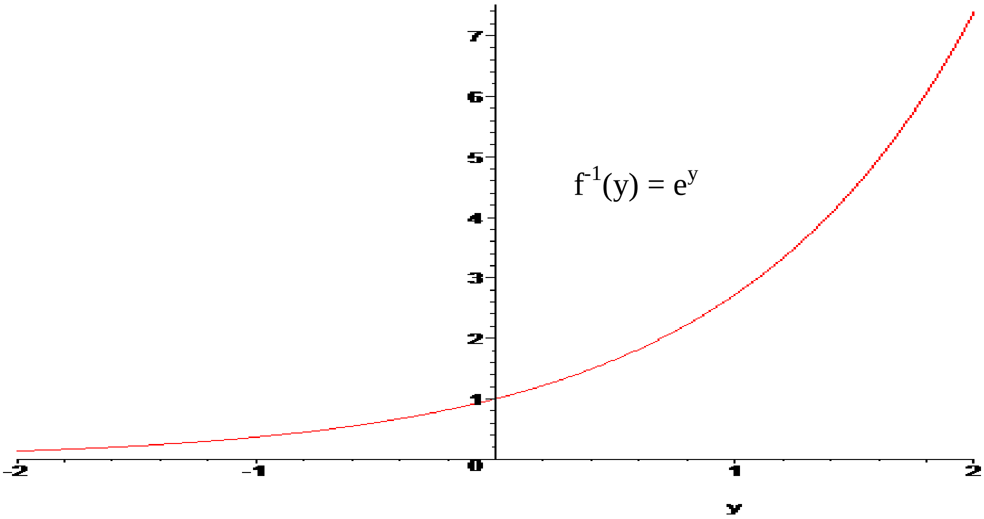
d) Se $y = 0,5$; qual o valor da inversa $f^{-1}(y)$? Veja o gráfico adiante.



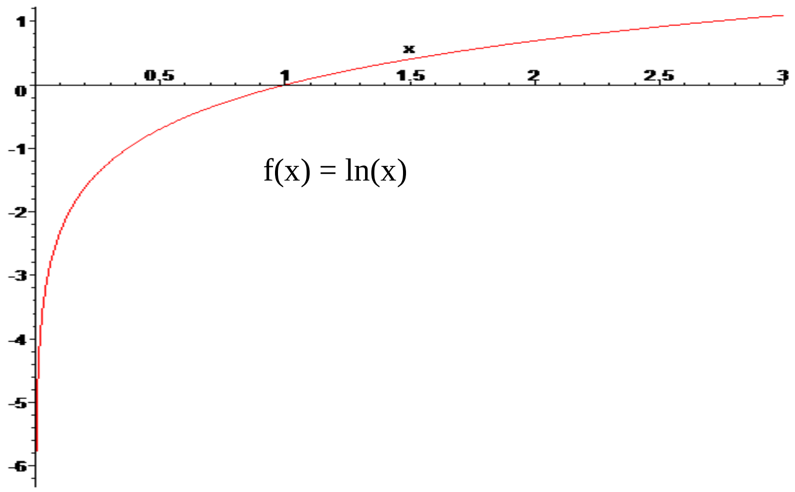
5) Seja f(x) = y = ln(x). Veja os gráficos adiante.

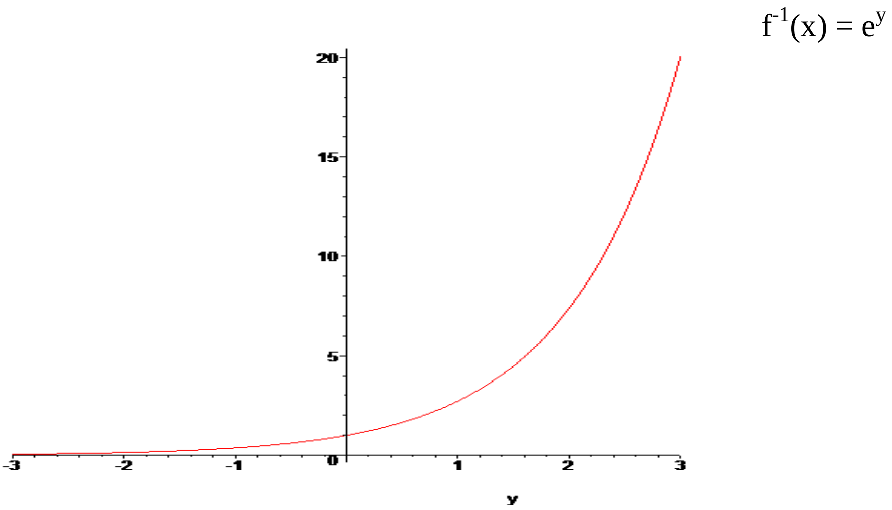
a) Existe inversa de f(x)? Por quê?
b) Qual a função inversa de f(x), $f^{-1}(y)$?
c) Se x = 0, qual o valor de f(x)?
d) Se x = 2, qual o valor de f(x)?
e) Se y = 1, qual o valor de $f^{-1}(y)$?
f) Se y = 0,4, qual o valor de $f^{-1}(y)$?





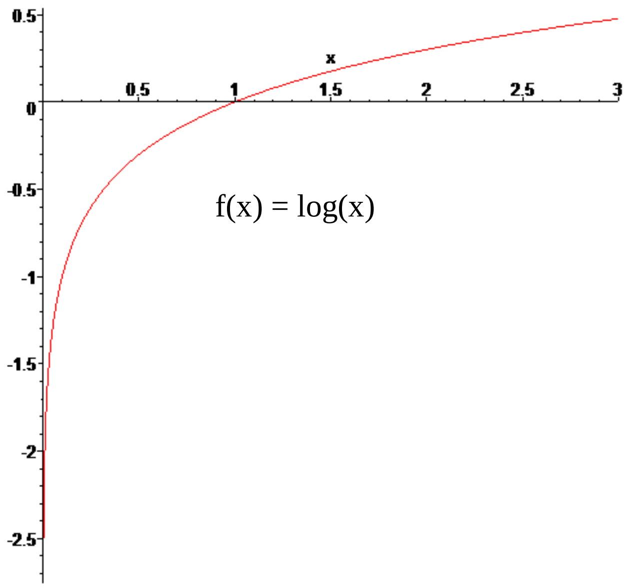
6) Seja a função f(x) = y = ℓn (x), ou seja, f: $R_+^* \rightarrow R$,. Veja os gráficos de f(x) e de $f^{-1}(y)$ adiante.

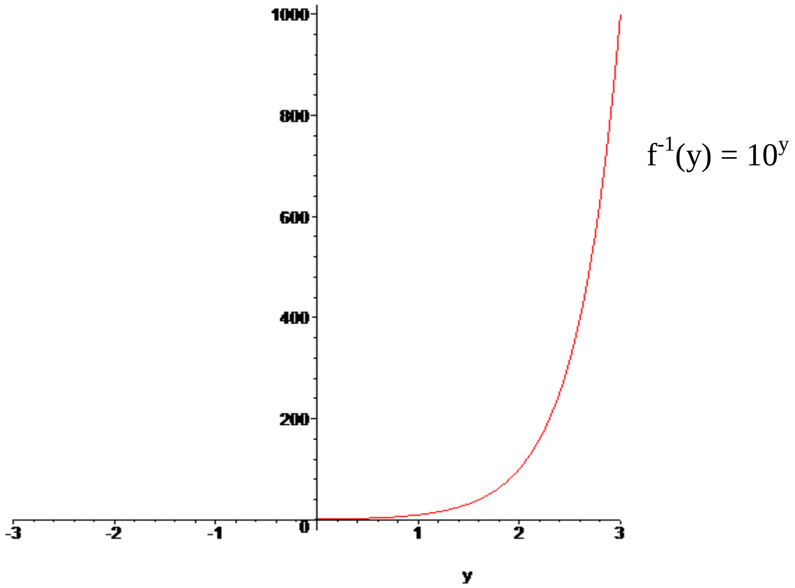




a) Qual o valor da inversa $f^{-1}(y)$ no ponto y = 0,5?
b) Qual o valor de f(x) em x = 1?
c) Qual o valor de f(x) em x = 2?
d) Qual o valor de $f^{-1}(y)$ em y = 0,69314718?

7) Seja f(x) = y = log(x), ou seja, f: $R_+^* \rightarrow R$. Veja os gráficos adiante.



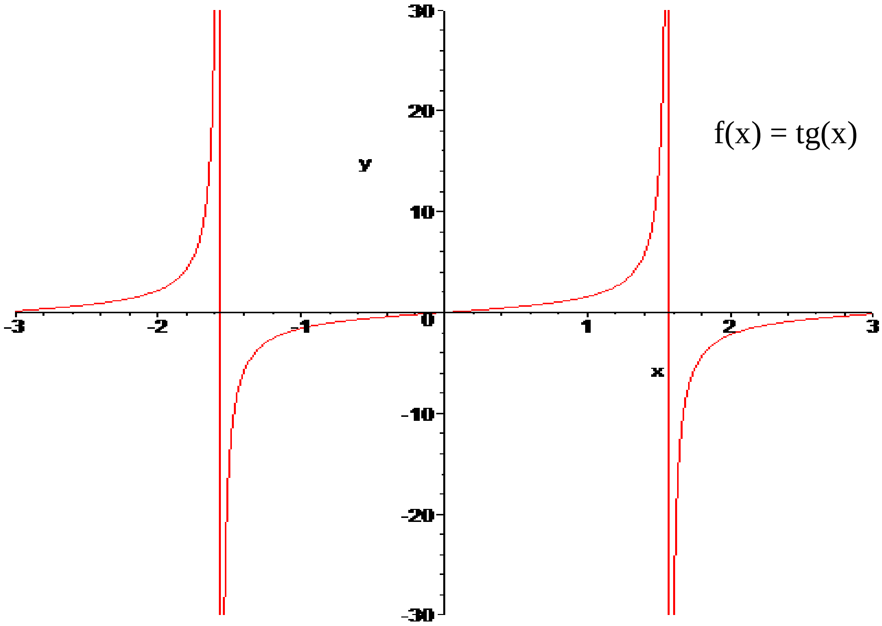


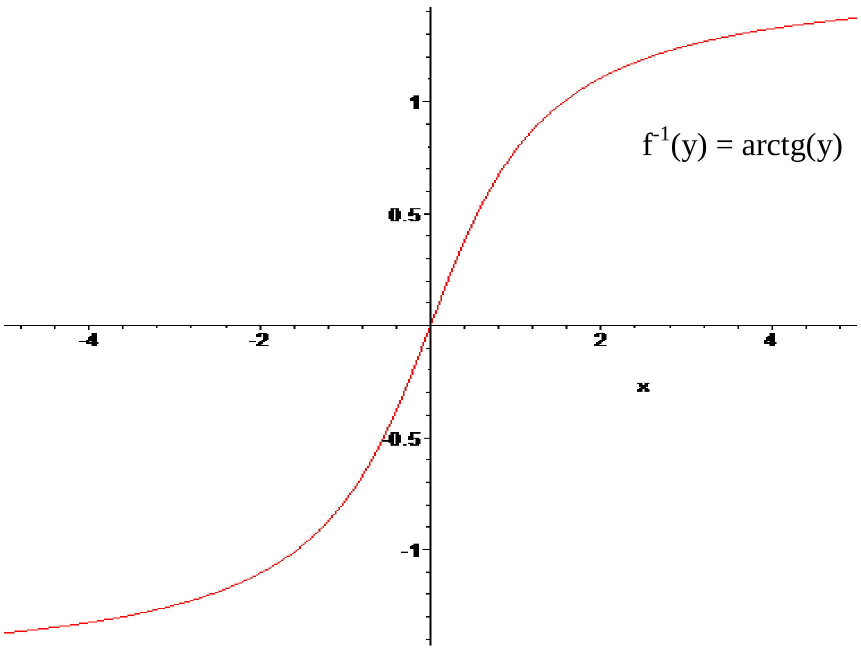
a)Qual a função inversa de f(x), $f^{-1}(y)$?
b) Qual o valor de f(2)?
c) Qual o valor de f(3)?
d) Qual o valor de f(4)?
e) Qual o valor de $f^{-1}(0,301029999)$?
f) Qual o valor de $f^{-1}(0,477121)$.

8) Seja f(x) = y = log(x) = 0,845098. Qual o valor da inversa de f(x), em 0,845098, ou seja, $f^{-1}(0,845098)$?

9) Os gráficos adiante se referem à representação gráfica da relação de R → R. y = tg(x). Considere, agora, y = f(x) = tg(x) que é uma função f : $[0; \frac{\pi}{2}) \to R_+$.

Veja os gráficos da função no trecho $x \in [0; \frac{\pi}{2})$ adiante.





a) Qual o valor de f(x) em $x = 45^0$?
b) Qual o valor de f(x) em $x = \pi/6$?
c) Qual o valor de $f^{-1}(y)$ em y = 1?

d) Qual o valor de $f^{-1}(y)$ em y = $\frac{\sqrt{3}}{3}$?

e) Qual o valor de $f^{-1}(y)$ em y = $\sqrt{3}$?

1.4.6 Função Composta

Dadas as funções **f** e **g** chama-se **função composta** de **f** com **g** a função denotada por $f \circ g$ e definida por **$f \circ g(x) = f[g(x)]$**.

Exercícios 1.4.6

1) Sejam as funções $f(x) = x + 3$ e $g(x) = 3x – 5$. Determine:

a) $f \circ g$;
b) $g \circ f$;

c) $f \circ g$ para x = 1.

2) Sejam as funções $f(x) = x^3 – 1$ e $g(x) = 3x$. Calcule:

a) $f^{o}g(2)$;

b) $f^{o}f(x)$;

c) $f^{o}f(3)$.

1.5- Funções Importantes

1.5.1 FUNÇÃO POLINOMIAL DO $1^{0.}$ GRAU (RETA)

Toda função definida de R em R, ou seja, f: R→R, por $f(x) = ax + b$, com $b \in R$ e $a \in R^*$ é denominada função **polinomial do $1^{0.}$ grau**.

Equação Geral da Reta
A equação geral da reta é **$ay + bx + c = 0$** com $a\in R$, $b\in R^*$ e $c\in R$.

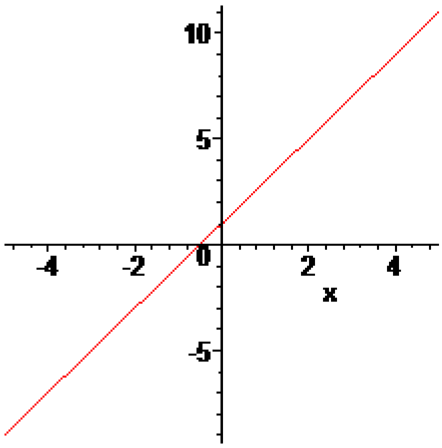
Equação Reduzida da Reta
Da equação geral pode-se obter a forma reduzida, ou seja, $y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$ e fazendo $m = -\frac{b}{a}$ e $n = -\frac{c}{a}$ tem-se $y = mx + n$, onde **m é o coeficiente angular** da reta e **n o coeficiente linear ou intercepto**.

Exercícios 1.5.1

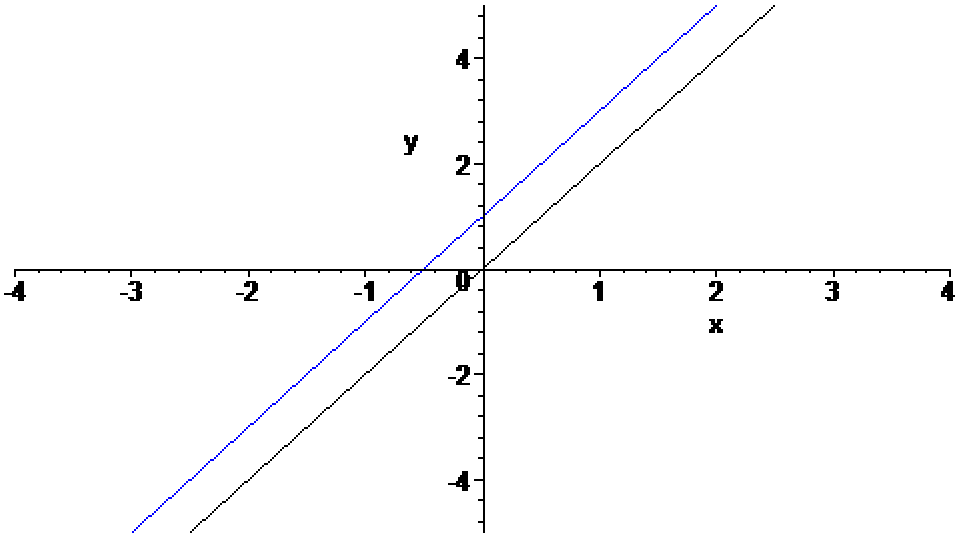
1) Mostre que o coeficiente angular m é a tangente do ângulo agudo que a reta faz com o eixo das abscissas.

2) Mostre que o coeficiente linear (intercepto) n é igual à distância do ponto de interseção da reta com o eixo das ordenadas a origem do Sistema Cartesiano.

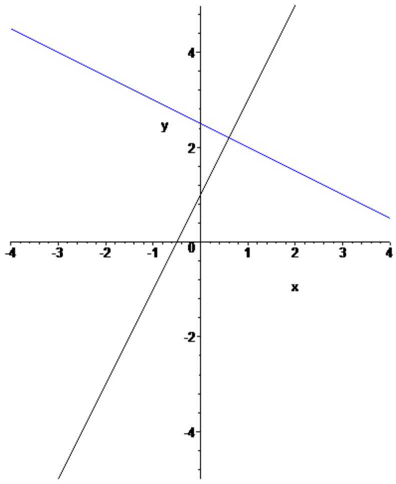
3) Dada a $f(x) = y = 2x + 1$. Veja o gráfico adiante. Pede-se:
   a) O zero (raiz) da função.
   b) O coeficiente angular da reta que a função representa.
   c) O coeficiente linear da reta que a função representa.



4) Determine a equação da reta que passa pelo ponto P(1; 2) e é paralela a reta representada pela função do exercício 3.



5) Determine a equação da reta que passa pelo ponto P(1; 2) e é perpendicular a reta representada pela função do exercício 3.



6) Uma reta passa pelo ponto (2; 1) e tem coeficiente angular igual a $\frac{1}{2}$. Qual a equação dessa reta na forma reduzida e na forma geral?

7) Sabendo que três pontos $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ e $(x_3; y_3)$ são colineares (pertencem a mesma reta) se verificam a equação:

$$\det\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

Pergunta-se:
a) Os pontos (1; 7), (0; 5) e (-3; -1) pertencem a mesma reta?
b) Os pontos (0; 3), (1; 5) e (7, -2) pertencem a mesma reta?
c) Os pontos (5; 15), (-5; -5) e (0; 5) pertencem a mesma reta?

8) Sabendo que a equação da reta que passa por dois pontos é dada por:

$$\det\left(\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

Pergunta-se:
a) Qual a equação da reta que passa pelos pontos (1; 7) e (0; 5)?
b) Qual a equação da reta que passa pelos pontos (0; 3) e (2; 5)?
c) Qual a equação da reta que passa pelos pontos (2; 2) e (-1; -1)?

9) Sabendo que a distância de um ponto $P(x_0; y_0)$ a reta r com equação ay + bx + c = 0 é dada pela expressão:

$$d(P, r) = \frac{|ay_0 + bx_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Pergunta-se:

a) Qual a distância do ponto (1; 7) à reta y = 2x + 5?
b) Qual a distância do ponto (0; 3) à reta 2y -3x + 4 = 0?
c) Qual a distância da origem do sistema à reta y -x + 5 = 0?

10) Sabendo que a área de um triângulo cujos vértices têm as coordenadas (x_1; y_1), (x_2; y_2) e (x_3; y_3) é dada pela expressão:

$$A = \frac{1}{2} \left| \det\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \right) \right|$$

Pergunta-se:
a) Qual a área do triângulo cujos vértices são: (1; 2), (3; 4) e (9; 2)?
b) Qual a área do triângulo cujos vértices são: (0; 2), (3; 0) e (4; 3)?
c) Qual a área do triângulo cujos vértices são: (1; 1), (4; 2) e (3; 5)

11) Resolva a **inequação produto** $(2x + 5)(-5x + 2) \geq 0$ respondendo aos itens:
a) Identifique as funções que compõem o produto;
b) Construa, separadamente, os gráficos das funções;
c) Monte uma tabela com os sinais de cada função e do produto;
d) Escreva o conjunto solução.

12) Resolva a **inequação quociente** $\frac{(3x-5)(2x+1)}{3-x} < 0$ respondendo aos itens:
a) Identifique as funções que compõem o quociente;
b) Construa, separadamente, os gráficos das funções;
c) Monte uma tabela com os sinais de cada função e do quociente;
d) Escreva o conjunto solução.

13) Resolva a **inequação quociente** $\frac{(3x-5)}{7-x} > 0$ respondendo aos itens:
a) Identifique as funções que compõem o quociente;
b) Construa, separadamente, os gráficos das funções;
c) Monte uma tabela com os sinais de cada função e do quociente;
d) Escreva o conjunto solução.

14) Resolva a **inequação produto** $(2x -5)(x-2) > 0$ respondendo aos itens:
a) Identifique as funções que compõem o produto;
b) Construa, separadamente, os gráficos das funções;
c) Monte uma tabela com os sinais de cada função e do produto;
d) Escreva o conjunto solução.

1.5.2 FUNÇÃO POLINOMIAL DO $2^{0.}$ GRAU

Toda função definida de R em R por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $b, c \in R$ e $a \in R^*$, é denominada função **polinomial do $2^{0.}$ grau ou função quadrática (trinômio do $2^{0.}$ grau).**

FÓRMULA DE BHASCARA (Filósofo indiano que viveu de 1114 a 1185).

A determinação das raízes da função do $2^{0.}$ grau é feita usando a fórmula de Bháskara e a idéia é completar o trinômio $\mathbf{ax^2 + bx + c}$ de modo a fatorar o quadrado perfeito, ou seja:

- começando com $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, multiplica-se a equação por 4a ;
- ao resultado $\mathbf{4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0}$, soma-se b^2 aos dois membros da igualdade, pois falta o termo b^2 para que fique um quadrado perfeito;
- operando com o resultado:
  $4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = b^2$
  $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$
- o primeiro membro é um trinômio quadrado perfeito, então,
  $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$
- isolando a incógnita x: $2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

$$2ax = -b \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b \pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Exercícios 1.5.2

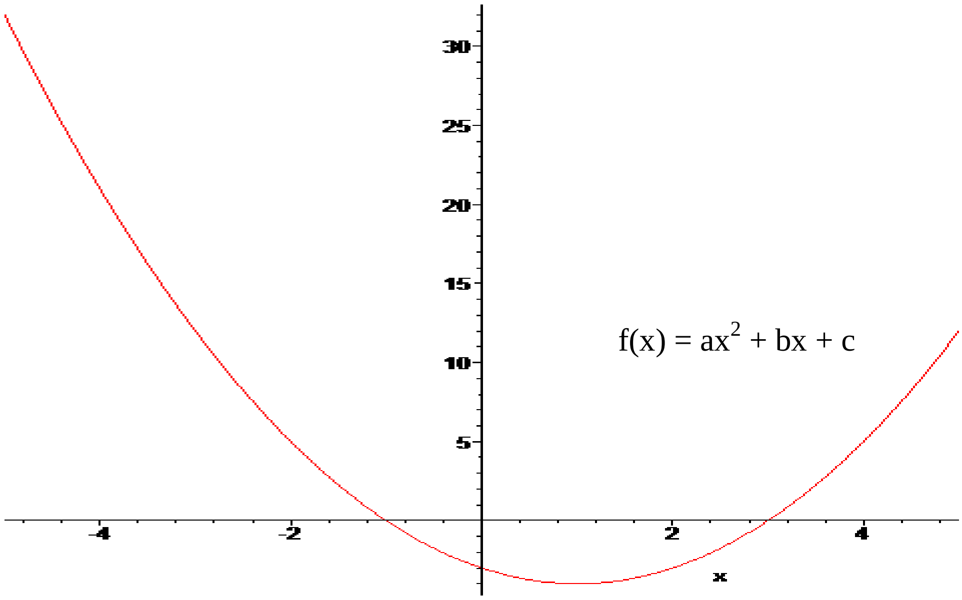
1) Dada a função do segundo grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, (veja o gráfico),mostre que:

   a) a soma das raízes da função é igual a $S = \frac{-b}{a}$;

   b) o produto das raízes da função é igual a $P = \frac{c}{a}$ com $a \neq 0$.

2) Dada a equação do segundo grau $x^2 - 2x - 3 = 0$;

   a) identifique os coeficientes a, b e c;
   b) calcule a soma das raízes;
   c) calcule o produto das raízes;
   d) ache as raízes da equação.

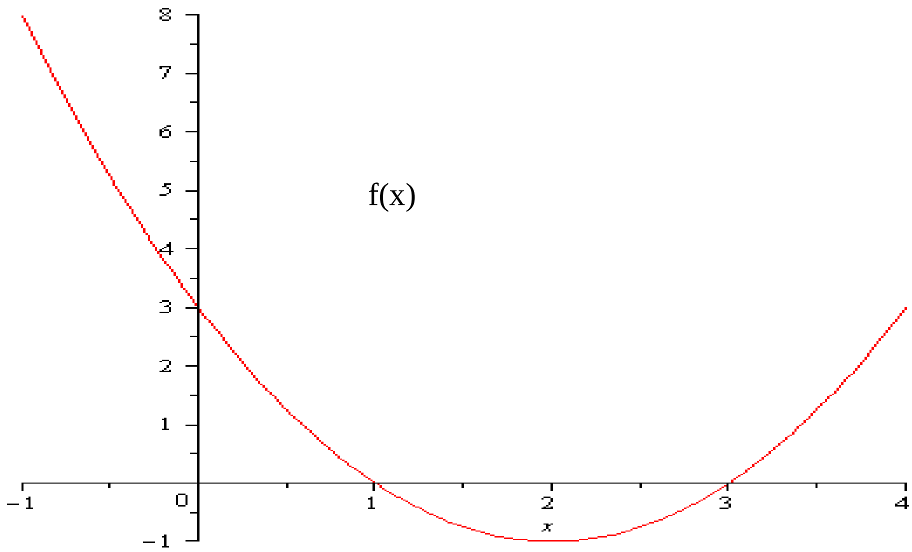


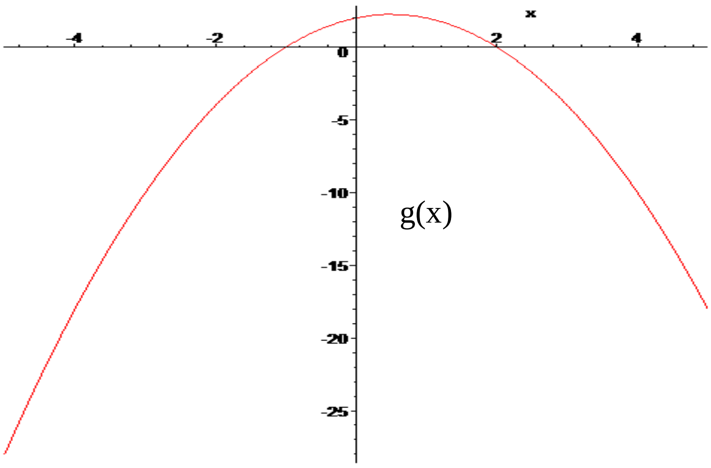
3) Seja a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, definida nos números reais. O gráfico dessa função é uma curva chamada parábola. Assim, complete o texto adiante tornando verdadeiro.

a) Quando $a > 0$ a **concavidade** da curva está voltada para ....
b) Quando $a < 0$ a **concavidade** da curva está voltada para ....

4) Veja os gráficos das seguintes funções do $2^{0.}$ grau e responda aos itens adiante.

A) $f(x) = x^2 – 4x + 3$
B) $g(x) = -x^2 + x + 2$





a) Cada uma das funções tem concavidade para cima ou para baixo?
b) Calcule a soma das raízes de cada uma das funções;
c) Calcule o produto das raízes de cada uma das funções;;
d) Ache as raízes de cada uma das funções.

5) O gráfico da função definida de R em R por $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$ é uma curva chamada parábola. Determine as coordenadas do **vértice V** da função do $2^{0.}$ grau $f(x) = ax^2 + bx + c$ **(parábola)** observando que:

- a parábola tem um eixo de simetria passando pelo **vértice V**, então a abscissa do vértice é o ponto médio das abscissas das raízes;
- a soma das raízes é $S = \dfrac{-b}{a}$;
- entrando com a abscissa de V (x_V achada no passo anterior) em $f(x) = y = ax^2 + bx + c$ encontra-se a ordenada de V, (y_V).

Adiantando as coordenadas são: $V(\dfrac{-b}{2a};\dfrac{-\Delta}{4a})$ com $\Delta = b^2 - 4ac$

6) Dadas as equações do $2^{0.}$ grau adiante. Pede-se:

a) As raízes da função do $2^{0.}$ grau;
b) As coordenadas do vértice V da função do $2^{0.}$ grau;
c) O gráfico da função;
d) Identifique se a função tem concavidade para cima ou para baixo.

1ª. $x^2 - 5x + 6 = 0$
2ª. $2x^2 - 10x + 8 = 0$
3ª. $-x^2 + 5x - 4 = 0$
4ª. $x^2 - 1 = 0$
5ª. $-x^2 + x + 2 = 0$

7) Resolva as inequações do $2^{0.}$ grau seguintes;

a) $x^2 + 5x - 24 \geq 0$
b) $-x^2 + 3x + 4 > 0$
c) $x^2 - 5x + 6 < 0$
d) $2x^2 - 10x + 8 > 0$

e) $-x^2 + 5x - 4 \geq 0$
f) $x^2 - 1 \geq 0$
g) $-x^2 + x + 2 \leq 0$

8) Faça esboços dos gráficos das funções do $2^{o.}$ grau cujos parâmetros são:

a) $a > 0$ e $\Delta > 0$;
b) $a < 0$ e $\Delta > 0$;
c) $a > 0$ e $\Delta = 0$;
d) $a < 0$ e $\Delta = 0$;
e) $a > 0$ e $\Delta < 0$;
f) $a < 0$ e $\Delta < 0$.

9) Quando o discriminante é maior que zero $\Delta > 0$ tem-se que as raízes da função são números ...., quando $\Delta < 0$ as raízes são.................... e quando $\Delta = 0$ as raízes são ....

10) A função do $2^{0.}$ grau definida de R em R por $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$ assume um valor **máximo** ou **mínimo** dependendo do valor do coeficiente **a** da função. Se $a > 0$ (concavidade para cima) f(x) tem um **mínimo** dado pela ordenada do vértice e $\mathbf{f(x)_{min}} = \frac{-\Delta}{4a}$;
Se $a < 0$ (concavidade para baixo) f(x) tem um máximo dado pela ordenada do vértice e $\mathbf{f(x)_{max}} = \frac{-\Delta}{4a}$.
Então, determine o máximo ou o mínimo das seguintes funções:

a) $f(x) = x^2 + 5x - 24$
b) $f(x) = -x^2 + 3x + 4$
c) $f(x) = x^2 - 5x + 6$
d) $f(x) = 2x^2 - 10x + 8$
e) $f(x) = -x^2 + 5x - 4$
f) $f(x) = x^2 - 1$
g) $f(x) = -x^2 + x + 2$

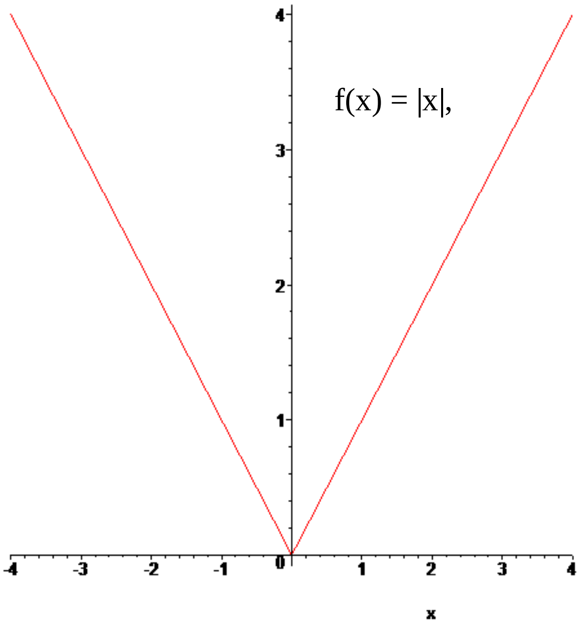
1.5.3 FUNÇÃO MODULAR

Uma função f: R → R é denominada de **função modular** quando é definida por f(x) = |x|.

OBS. Lembre que **módulo** ou **valor absoluto** de um número é a **distância** da imagem desse número na reta orientada até a origem da reta. Veja que |5| é igual à distância de 5 a origem 0, logo |5| = 5. Por outro lado, |-7| é igual à distância de -7 a origem 0, logo |-7| = 7. Como você sabe distância é sempre um número positivo.

Exercícios 1.5.3

1) Faça o gráfico da função f(x) = |x|, x ∈ R.



2) Observando o gráfico do exercício anterior se conclui que o conjunto imagem da função modular é o conjunto dos reais não ...., ou seja, Im(f) = R_+.

3) Observando o gráfico do exercício 1 se conclui que o conjunto domínio da função modular é o conjunto dos......................., ou seja, D(f) = R.

4) Faça os gráficos de y = |f(x)| nos seguintes casos:

a) f(x) = 3x – 5

b) $f(x) = -x^2 + 3x$

5) Dada a função $f(x) = x^2 - 3$, faça o gráfico de $y = |x^2 - 3| - 3$.

6) Dadas as funções f(x) = |x – 1| e g(x) = 3x - 2 faça o gráfico de $f^o g(x)$.

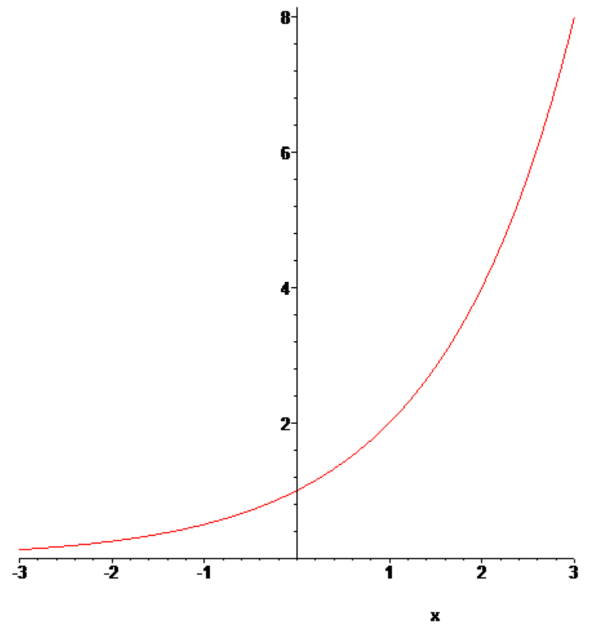
1.5.4 FUNÇÃO EXPONENCIAL

1.5.4.1 DEFINIÇÃO

Uma função é chamada de exponencial quando é definida por $f(x) = a^x$, dos reais nos reais, ou seja, de R em R, com $a \in R_+^*$ e $a \neq 1$.

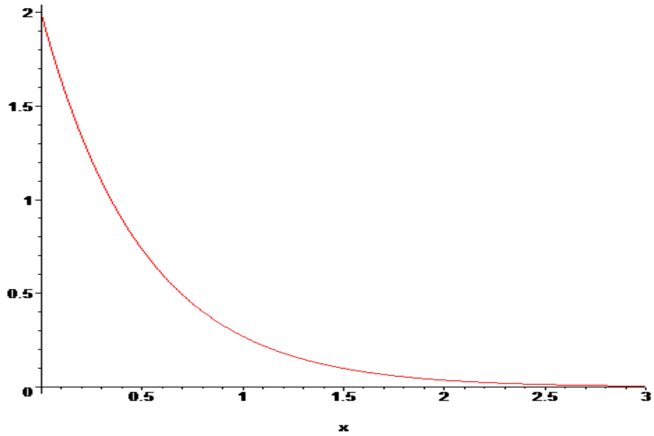
Exercícios 1.5.4.1

1) Faça o gráfico da função exponencial $f(x) = 2^x$, ou seja, $f: R \rightarrow R_+^*$.



Responda para f(x):
a) Qual o domínio de f(x)?
b) Qual o contradomínio de f(x)?
c) Qual o conjunto imagem de f(x)?
d) A função f(x) é par, impar ou sem paridade?
e) A função f(x) é sobrejetora, injetora ou bijetora?

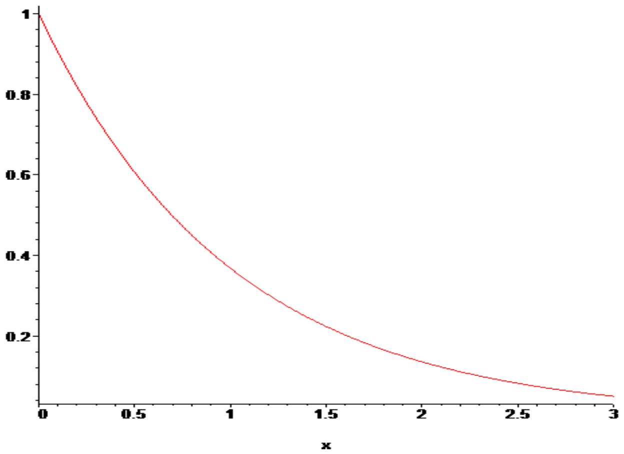
2) Faça o gráfico da função exponencial $f(x) = 2e^{-2x}$, $f: R_+^* \rightarrow R_+$ e responda aos itens adiante.



a) Observa-se que f(x) é da forma $f(x) = \theta e^{-\theta x}$, $x \geq 0$, $\theta > 0$. Então, no contexto estatístico, qual o nome que essa função recebe?
b) Sendo f(x) uma função densidade de probabilidade, qual a área da região limitada pela curva e pelo eixo das abscissas?

3) Faça o gráfico da função exponencial $f(x) = e^x$.

4) Faça o gráfico da função exponencial $f(x) = e^{-x}$, $x \geq 0$, $f:R_+^* \rightarrow R_+$ e responda aos itens adiante.



Responda para f(x):
a) Qual o domínio de f(x)?
b) Qual o contradomínio de f(x)?
c) Qual o conjunto imagem de f(x)?
d) A função f(x) é par, impar ou sem paridade?
e) A função f(x) é sobrejetora, injetora ou bijetora?

5) Faça o gráfico da função exponencial $f(x) = 4e^x$.

6) Faça o gráfico da função exponencial $f(x) = 5e^{-x}$.

7) Uma variável aleatória X tem função densidade de probabilidade dada por $f(x) = 5e^{-5x}$ $x \geq 0$. Faça o gráfico dessa função e responda aos itens adiante.

a) Qual o domínio de f(x)?
b) Qual o contradomínio de f(x)?
c) Qual o conjunto imagem de f(x)?
d) A função f(x) é par, impar ou sem paridade?
e) A função f(x) é sobrejetora, injetora ou bijetora?

1.5.4.2 FUNÇÃO EXPONENCIAL: CRESCENTE E DECRESCENTE

Dada uma função exponencial definida por $f(x) = a^x$, de R em R, com $a \in R_+^*$ e $a \neq 1$ existem dois tipos de comportamento para o gráfico dessa função. O tipo depende do valor da base da exponencial a. Assim, tem-se:

$1^{0.}$) Se $a > 1$ tem-se uma função exponencial crescente.

$2^{0.}$) Se $0 < a < 1$ tem-se uma função exponencial decrescente.

Exercícios 1.5.4.2

1) Identifique as sentenças verdadeiras e marque V e nas falsas marque F.

a) $f(x) = 6^x$ é uma função crescente por que a base $a = 6$ é maior que 1 (   )

b) $g(x) = (\frac{1}{4})^x$ é uma função crescente por que a base $a = \frac{1}{4}$ é menor que 1 (   )

c) $(\frac{3}{2})^{0,3} > (\frac{3}{2})^{0,2}$ (   )

d) $(\frac{2}{3})^{0,3} > (\frac{2}{3})^{0,2}$ (   )

e) $(0,8)^{0,7} > (0,8)^{0,5}$ (   )

f) $(3)^{0,7} > (3)^{0,5}$ (   )

2) Identifique as funções exponenciais como crescente ou decrescente.

a) $f(x) = 2^x$ b) $g(x) = 0,5^x$ c) $h(x) = 0,25^x$ d) $r(y) = 5^y$

3) Classifique as funções adiante em par ou impar ou sem paridade; crescente ou decrescente ou constante.

1) $f(t) = t^2 \quad t \in R$

2) $g(t) = -t^2 \quad t \in R$

3) $f(x) = e^{-x} \quad x \in R_+^*$

4) $f(x) = -e^{-x} \quad x \in R_+^*$

5) $g(x) = x^2 - 3 \quad x \in R$

6) $h(x) = 7 \quad x \in R$

1.5.4.3 EQUAÇÃO EXPONENCIAL

Uma equação é denominada de **equação exponencial** quando a incógnita situa-se no expoente.

Exemplos (resolva estas equações)

1) $2^x = 16$

2) $3^{x-2} = \frac{1}{9}$

3) $0,5^x = 2^{-3}$

4) $(\frac{1}{3})^y = \frac{1}{27}$

Exercícios 1.5.4.3
Resolva as equações exponenciais que seguem.

1) $2^{2x} - 3.2^{x} + 2 = 0$

2) $3^{x} = 243$

3) Resolva os sistemas de equações exponenciais que seguem.

1) $\begin{cases} 2^{x+y} = 8 \\ 2^{x-y} = 32 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2^{x}.4^{y} = 64 \\ \dfrac{2^{x}}{4^{y}} = 4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3^{x+y} = 81 \\ 2^{x-y} = 4^{-1} \end{cases}$

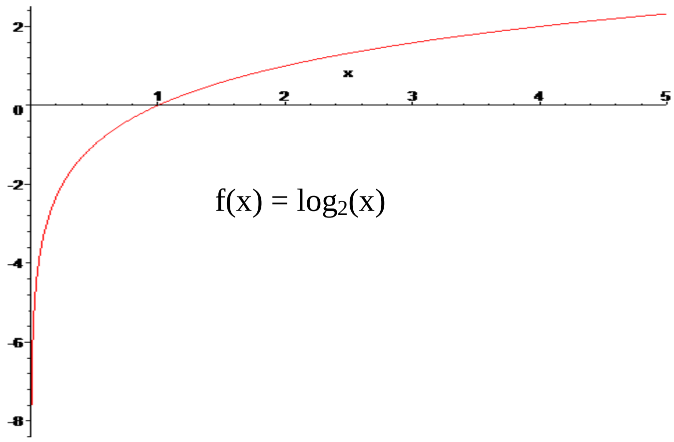
1.5.5 FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Uma função logarítmica é a função f(x) definida de R_{+}^{*} em R por $f(x) = \log_a(x)$ com $a \in R_{+}^{*}$ e $a \neq 1$.

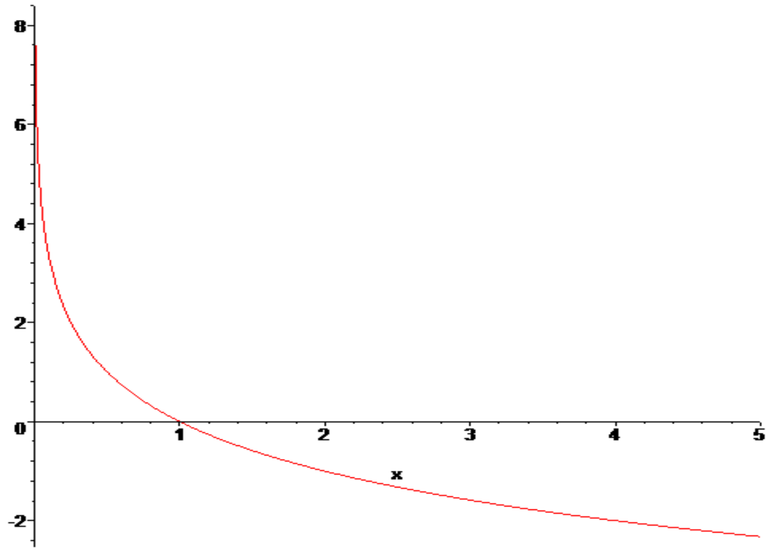
OBS.: 1) A função logarítmica é crescente se a > 1 e é decrescente se a < 1.
2) A função logarítmica é bijetora, logo admite inversa.

Exercícios 1.5.5

1) Faça o gráfico da função logarítmica $f(x) = \log_2(x)$ e determine a sua inversa.



2) Faça o gráfico da função logarítmica $f(x) = \log_{1/2}(x)$ e determine a sua inversa.



3) Calcule o valor de $\log(\sqrt[3]{20})$, sabendo que $\log(2) = 0{,}3010$.

4) Determine as condições de existência de $\log(x^2 + 3x)$.

5) Seja $y = f(x) = \log(x) = 0{,}698970$. Então, qual o valor de $x = f^{-1}(y)$ a função inversa de $f(x)$?

6) Seja $y = h(x) = \ell n(x) = 1{,}098612289$. Então, qual o valor de $x = h^{-1}(y)$ a função inversa de $h(x)$?

7) Resolva a equação logarítmica $\ell n(x+5) = 2{,}302585093$.

8) Resolva a equação logarítmica $\ell og(2x+3) = 0{,}845098$.

9) $f(x) = \ell n(x)$, em qual ponto essa função corta o eixo das abscissas?

10) Seja $f(x) = \ell og(x)$, em qual ponto essa função corta o eixo das abscissas?

11) Quais as propriedades operacionais da função logarítmica?

As propriedades são:

1ª.) O logaritmo de um **produto** é igual a **soma** dos logaritmos dos fatores.

$\log(A.B) = \log(A) + \log(B)$

2ª.) O logaritmo de um **quociente** é igual ao logaritmo do **dividendo** menos o logaritmo do **divisor**.

$\log(A/B) = \log(A) - \log(B)$

3ª.) O logaritmo de uma **potência** é igual ao **produto do expoente da potência pelo logaritmo da base**.

$\log(B^x) = x\log(B)$

4ª.) O logaritmo de uma **raíz** é igual ao logaritmo do **radicando** dividido pelo índice da raiz.

$\log(\sqrt[i]{R}) = \dfrac{\log(R)}{i}$

12) Calcule o valor de $Y = x^3z^2w^5$ sabendo que log(x) = a, log(z) = b, log(w) = c e que 3a + 2b + 5c = 0,301030.

13) Calcule o valor de $Y = \sqrt{x}\,.z^2.\sqrt[3]{w}$ sabendo que log(x) = a, log(z) = b, log(w) = c e que $0{,}5a + 2b + \frac{1}{3}c = 1{,}301030$.

14) Calcule o valor $Y = \dfrac{x}{z^3}.\sqrt[5]{w}$ sabendo que log(x) = a, log(z) = b, log(w) = c e que $a - 3b + \frac{1}{5}c = 2{,}84509804$

15) Se f(x) = y =ln(x) = 0,69314718, qual o valor de x? Veja que x na verdade é $f^{-1}(y)$.

16) Se f(x) = y =log(x) = 0,602060, qual o valor de x? Veja que x na verdade é $f^{-1}(y)$.

2. LIMITES

Definição

Seja uma função f(x) definida em um intervalo aberto que contém o ponto **a**, exceto possivelmente no próprio ponto **a**. O limite de f(x) quando x se aproxima de **a** é L. Assim, tem-se:

$$L = \lim_{x \to a} f(x)$$

e isto significa que $\forall\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$ e ainda se f(x) tem limite quando x tende para **a**, então tal limite é único.

Propriedades importantes:

1ª.) $\lim_{x \to a} c = c$ com c uma constante, ou seja, um real.

2ª.) $\lim_{x \to a} x = a$

3ª.) $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

4ª.) $\lim_{x \to a} f(x)\, g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x)$

5ª.) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} f(x) \,/\, \lim_{x \to a} g(x)$, com $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

6ª.) $\lim_{x \to a} cf(x) = c \lim_{x \to a} f(x)$

7ª.) $\lim_{x \to a} f(x)^n = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)^n$, desde que $\lim_{x \to a} f(x)$ exista.

INDETERMINAÇÕES

As formas indeterminadas ou indeterminações são as seguintes:

1ª.) $\dfrac{0}{0}$ 2ª.) $\dfrac{\infty}{\infty}$ 3ª.) $0 \times \infty$ 4ª.) $\infty - \infty$ 5ª.) 0^0 6ª.) ∞^0 7ª.) 1^∞

EXERCÍCIOS 2.1: Calcule os limites

1) $\lim\limits_{x \to 2} (3x+4)^5$ R.: 100000

2) $\lim\limits_{x \to a} x^3$ R.: a^3

3) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x+4}{5x+7}$ R.: 10/17

4) $\lim\limits_{x\to 2} (3x^2 + 2x + 4)$

R.: 20

5) $\lim\limits_{x\to 2} [(3x^2 + 2)(x + 4)]$ R.: 84

EXERCÍCIOS 2.2

1) Dada a função f(x) = $\dfrac{x^3+x-10}{x-2}$, pede-se:

a) O gráfico da função para x variando de -5 a 5.

b) Calcule o limite da função quanto x vai para 2, ou seja, $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3+x-10}{x-2}$

R.: 13

2) Dada a função f(x) = $\dfrac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1}$, pede-se:

a) O gráfico da função para x variando de -5 a 5.

b) O valor da função em x = 1. R.: $\dfrac{0}{0}$ (indeterminação)

c) O limite da função quando x tende para 1, ou seja, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1}$

R.: -8

3) Dada a função f(x) = $\dfrac{2}{1+e^{-1/x}}$, pede-se:

a) O gráfico da função para x variando de 0 a 100.

b) O valor da função em x = ∞. R.: 1

c) O limite da função quando x tende para $+\infty$, ou seja, $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2}{1 + e^{\left(-\frac{1}{x}\right)}}$ R.: 1

4) Dada a função f(x) = x^3 -3x +2 pede-se:

a) O gráfico da função para x variando de -5 a 5.

b) O valor da função em x = 0. R.: 2

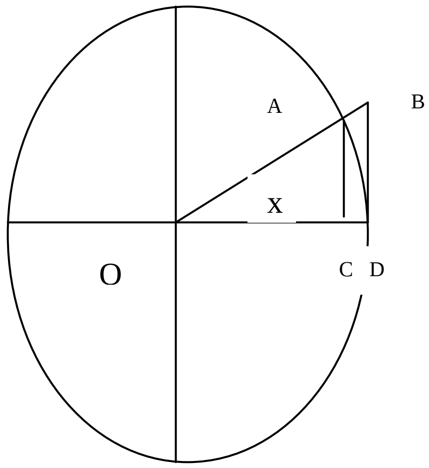
c) O limite da função quando x vai para 0, ou seja, $\lim\limits_{x \to 0} x^3 - 3x + 2$ R.: 2

5) Dada a função f(x) = $\dfrac{\sqrt{x} - 2}{4 - x}$, pede-se:

a) O gráfico da função para x variando de 2 a 6.

b) O valor da função em x = 4. R.: $\dfrac{0}{0}$ (indeterminação)

c) O limite da função quando x vai para 4, $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{4 - x}$ R.: -1/4



6) LIMITE FUNDAMENTAL $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}(x)}{x} = 1$ (Veja a figura anterior).

Demonstre que o limite de $\dfrac{sen(x)}{x}$ quando x vai para 0 é igual a 1, ou seja, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}(x)}{x} = 1$.

Prova: Veja a figura anterior que é a de um circulo trigonométrico (raio 1).

Suponha as desigualdades de áreas do triângulo retângulo OAC, do setor circular OAD e do triângulo retângulo OBD, ou seja:

área do triângulo OAC < área do setor OAD < área do triângulo OBD

$\frac{\cos(x)\text{sen}(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\text{tg}(x)}{2}$ e dividindo tudo por $\frac{\text{sen}(x)}{2}$ resulta:

$\cos(x) < \frac{x}{\text{sen}(x)} < \frac{1}{\cos(x)}$, e trabalhando com as desigualdades tem-se:

$\cos(x) < \frac{\text{sen}(x)}{x} < \frac{1}{\cos(x)}$

então, quando $x \to 0$ tem-se: $1 < \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(x)}{x} < 1$.

Portanto, $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(x)}{x}$ está "ensanduichado" entre 1 e 1, logo $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$.

7) Dada $f(x) = \frac{\text{sen}(ax)}{bx}$ com $b \neq 0$ calcule o limite da função quando x vai para 0. R.: a/b

8) Dada $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{\text{sen}(x)}$ calcule o limite da função quando x vai para 0. R.: 0

9) Dada $f(x) = \frac{1}{\text{sen}(x)} - \frac{1}{\text{tg}(x)}$ calcule o limite da função quando x vai para 0.

R.: 0

10) Dada $f(x) = \frac{\text{sen}^2(x)}{x}$ calcule o limite da função quando x vai para 0. R.: 0

11) Dada $f(x) = \frac{\text{tg}(x)}{x}$ calcule o limite da função quando x vai para 0. R.: 1

12) Dada $f(x) = \frac{\text{sen}(kx)}{x}$ calcule o limite da função quando x vai para 0. R.: k

13) Dada $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x - 2\pi}$ calcule o limite da função quando x vai para 2π. R.: 1

14) Calcule o limite da função $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 5}{x^2 - 2x - 8}$ quando x vai para 1. R.: -1

15) Demonstre que $\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$ (número de Euler e = 2,718281828) e

$\lim_{h\to \infty}(1+\frac{1}{h})^{h} = e$ (número de Euler e = 2,718281828).

Prova da 1ª. parte

A demonstração deste resultado é feita aplicando-se a **definição de derivada** da função f(x) = ln(x). Então,

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d\ell n(x)}{dx} = \ell im_{h\to 0}\left(\frac{\ell n(x+h)-\ell n(x)}{h}\right) = \ell im_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\ell n\left(\frac{(x+h)}{x}\right)\right]$$

$$f'(x) = \ell im_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\ell n\left(1+\frac{h)}{x}\right)\right] = \ell im_{h\to 0}\left[\ell n\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right] \text{ e como } f'(x) = \frac{d\ell n(x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

tem-se que para x = 1 a relação é $\frac{1}{1} = \ell im_{h\to 0}[\ell n(1+h)^{\frac{1}{h}}]$ e $\ell im_{h\to 0}[\ell n(1+h)^{\frac{1}{h}}] = 1$

Continuando, $\ell im_{h\to 0}[(1+h)^{\frac{1}{h}}] = \ell im_{h\to 0}[e^{\ell n(1+h)^{\frac{1}{h}}}] = e^{\ell im_{h\to 0}[\ell n(1+h)^{\frac{1}{h}}]} = e^1 = e$

Para a 2a. parte da prova tem-se $\lim_{h\to\infty}(1+\frac{1}{h})^h$ muda-se a variável $\frac{1}{h} = n$ com $h\to\infty$ e $n\to 0$ resulta: $\lim_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}}$ = e (provado na 1ª. parte)

16) LIMITE FUNDAMENTAL $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$. Mostre que o limite da função $\frac{e^x-1}{x}$ quando x vai para 0, ou seja, $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$.

Prova: Seja a prova no caso geral, ou seja, quando tem-se $\frac{a^x-1}{x}$ a > 0; então fazendo $a^x = 1 + \frac{1}{u}$ e aplicando logaritmo de base **a** tem-se $x = \log_a(1+\frac{1}{u})$.

$$\text{Portanto, } \frac{a^x-1}{x} = \frac{1+\frac{1}{u}-1}{\log_a(1+\frac{1}{u})} = \frac{1}{u\log_a(1+\frac{1}{u})} = \frac{1}{\log_a(1+\frac{1}{u})^u}$$

e, considerando que quando $x\to 0$ implica que $u\to\infty$, pois $u = \frac{1}{a^x-1}$.

$$\text{Então, } \ell im_{u\to\infty}\left(\frac{1}{\ell og_a(1+\frac{1}{u})^u}\right) = \left(\frac{1}{\ell og_a[\ell im_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^u]}\right) = \frac{1}{\ell og_a(e)}.$$

Assim, $\ell im_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right) = \frac{1}{\ell n(e)} = \frac{1}{1} = 1$ (mudando a base de **a** p/ **e** $\log_a(e) = \frac{\ln(e)}{\ln(a)}$)

17) Calcule o limite da função f(x) = $\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ quando x vai para 2. R.: -4

18) Demonstre que $\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{1/x}$ = e^k

19) Demonstre que $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{k}{x})^x$ = e^k.

20) Demonstre que $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{k}{x})^x$ = e^{-k}.

21) Demonstre que $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{x+k}$ = e.

22) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\ell n(1+x)}{x})$. R.: 1

23) Calcule $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{\ell n(x)}{x-1})$. R.: 1

24) Calcule $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{x-1)}{\ell n(x)})$. R.: 1

25) Demonstre que o limite da função $(1 + ax)^{1/x}$ quando x vai para 0 é igual a e^a, ou seja, $\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\left(\frac{1}{x}\right)}$ = e^a .

26) Calcule o limite da função g(x) = $\dfrac{x^2-4x+2}{x^3-x^2-x+1}$ quando x vai p/ 1. R.: ∞

27) Calcule $\underset{h\to 0}{\ell im}\ \dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h}$ R.: 1/4

28) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}(x)}{\sqrt{x}}$ R.: 0

29) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}(3x)}{x}$ R.: 3

30) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{6x-\text{sen}(2x)}{2x+3\text{sen}(4x)})$ R.: 2/7

31) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1-\cos(x)}{\text{sen}(x)})$ R.: 0

32) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{\text{sen}(x)}-\dfrac{1}{\text{tg}(x)})$ R.: 0

33) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$ R.: e

34) Calcule $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$ R: e

35) Calcule $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{(x+k)}$

36) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ell n(1+x)}{x}$ R.: 1

37) Dada a função f(x) = $\frac{2x^3+5x^2+x+1}{x^3+5x-7}$ calcule o limite da função quando x vai para o infinito (∞). R.: 2

38) Dada a função f(x) = $\frac{x^2-1}{x^3+2x+2}$ calcule o limite da função quando x vai para o infinito (∞).

39) Dada a função f(x) = $\frac{x^2-1}{x^3+2x+2}$ calcule o limite da função quando x vai para menos infinito (-∞). R.: 0

40) Dada a função f(x) = $\frac{2x^5+x-2}{-3x^2+x+5}$ calcule o limite da função quando x vai para o infinito (∞). R.: -∞

41) Dada a função f(x) = $\frac{x^3+8}{3x^2+5x+1}$ calcule o limite da função quando x vai para o infinito (∞). R.: ∞

42) Dada a função f(x) = $\frac{x^4+2x^2+3}{x^2-x-1}$ calcule o limite da função quando x vai para menos infinito (-∞). R.: ∞

43) Dada a função f(x) = $\frac{3x^3+2x-1}{2x^2-x+3}$ calcule o limite da função quando x vai para menos infinito (-∞). R.: -∞

44) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\ell n(1+x)^2}{x})$. R.: 2

45) Calcule $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x$. R.: e^2

46) Calcule $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{\ell n(x^3)}{x-1})$. R.: 3

47) Calcule $\lim_{x \to 1} (\frac{2x-2)}{\ell n(x)})$. R.: 2

48) Calcule $\lim_{x \to \infty} (1+\frac{1}{x})^{x+3}$. R.: e

49) Prove que $\lim_{x \to 0} (\frac{a^x - 1)}{x}) = \ell n(a)$ com a > 0.

50) Calcule $\lim_{x \to 0} (\frac{e^x - 1)}{2x})$. R.: 1/2

51) Calcule $\lim_{x \to 1} (\frac{2^{x-1} - 1)}{x-1})$. R.: $\ell n(2)$

52) Calcule $\lim_{x \to 0} (\frac{e^x - 1)}{sen(x)})$. R.: 1

53) Calcule $\lim_{x \to \infty} (x(\sqrt[x]{e} - 1))$. R.:1

54) Prove que $\lim_{x \to 0} (\frac{(1+x)^a - 1)}{x})$ = a com a ≠ 0.

55) Calcule $\lim_{x \to 0} (\frac{(1+x)^m - 1)}{mx})$. R.: 1

56) Calcule $\lim_{x \to 0} [\ell n(\frac{(1+x)^e - 1)}{x})]$. R.: 1

57) Calcule $\lim_{x \to 1} [\ell n(\frac{x^e - 1)}{x-1})]$. R.: 1

58) Uma **função distribuição de probabilidade** de uma variável aleatória X, F(x), tem a seguinte propriedade: quando a variável (aleatória) vai para -∞ o valor da função vai para zero e quando a variável (aleatória) vai para ∞ o valor da função vai para 1. Verifique se a função $F(x) = 1 - e^{-2x}$ $x \geq 0$ é função distribuição de probabilidade da variável X, observando que o "menos infinito, -∞" da variável X é 0, que corresponde ao menor valor do contradomínio.

59) Uma **função distribuição de probabilidade** de uma variável aleatória X, F(x), tem a seguinte propriedade: quando a variável (aleatória) vai para -∞ o valor da função vai para zero e quando a variável (aleatória) vai para ∞ o valor da função vai para 1. Verifique se a função $F(x) = 1 - e^{-\theta x}(1+\theta x)$ $x \geq 0$ é função distribuição de probabilidade da variável X, observando que o

“menos infinito, $-\infty$” da variável X é 0, que corresponde ao menor valor do contradomínio.

60) Verifique se a função F(x) = $\frac{x-a}{b-a}$ $x \in [a; b]$ e $a < b$ é uma função de distribuição com base na propriedade enunciada nos dois últimos exercícios. Veja que o “menos infinito” dessa variável é **a** (seu menor valor no domínio) e o “mais infinito” é **b** (o seu maior valor no domínio).

61) Verifique se a função F(x) = x $x \in [0; 1]$ é uma função de distribuição com base na propriedade enunciada nos últimos exercícios. Veja que o “menos infinito” dessa variável é **0** (seu menor valor no domínio) e o “mais infinito” é **1** (o seu maior valor no domínio).

62) Verifique se a função F(x) = 1 - $\frac{1}{1+x}$ $x \geq 0$ é uma função de distribuição com base na propriedade enunciada nos últimos exercícios. Veja que o “menos infinito” dessa variável é **0** (seu menor valor no domínio) e o “mais infinito” é **∞.**

3. DERIVADAS

Definição

Seja uma função f definida no intervalo aberto (a; b). Se a < x < b, a derivada da função primitiva f no ponto x é dada por: $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ desde que o limite exista. Se f'(x) existe para todos os valores no intervalo (a, b), então f é chamada diferenciável em (a, b).

Propriedades importantes:

1ª.) Se f(x) = c, então $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = 0$

2ª.) Se f(x) = ax + b, então $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = a$.

3ª.) Se $f(x) = x^m$, então $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = mx^{m-1}$.

4ª.) A derivada de cf(x) é $cf'(x) = c\frac{df(x)}{dx}$.

5ª.) A derivada da soma f(x) + g(x) é igual a f'(x) + g'(x), ou seja, se y = u + v, então y' = u' + v'.

6ª.) A derivada do produto f(x)g(x) é igual a f(x)g'(x) + f'(x)g(x), ou seja, y = u.v, então y' = uv'+ u'v.

7ª.) A derivada do produto f(x)g(x)h(x) é igual a f(x)g(x)h'(x) + f(x)g'(x)h(x) + f'(x)g(x)h(x), ou seja, se y = uvw, então y' = uvw'+ uv'w + u'vw.

8ª.) A derivada do quociente $y = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u}{v}$ é igual a $y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$.

9ª.) Se f(x) = sen(x), então $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \cos(x)$.

10ª.) Se f(x) = cos(x), então $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = -\text{sen}(x)$

11ª.) Se f(x) = tg(x), então $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \sec^2(x) = (1 + \text{tg}^2(x))$.

12ª.) Se f(x) = cotg(x), então f'(x) = $\frac{df(x)}{dx}$ = -cosec^2(x) = -(1 + cotg^2(x)).

13ª.) Se f(x) = sec(x), então f'(x) = $\frac{df(x)}{dx}$ = sec(x)tg(x).

14ª.) Se f(x) = cosec(x), então f'(x) = $\frac{df(x)}{dx}$ = -cosec(x)cotg(x)

15ª.) Se y = u e u = f(x), então y' = $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$.

16ª) Se y = arcsen(u), então y' = $\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

17ª.) Se y = arccos(u), então y' = $\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

18ª.) Se y = arctg(u), então y' = $\frac{u'}{1+u^2}$.

19ª.) Se y = arccotg(u), então y' = $\frac{-u'}{1+u^2}$.

20ª.) Se y = arcsec(u), então y' = $\frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$.

21ª.) Se y = arccosec(u), então y' = $\frac{-u'}{u\sqrt{u^2-1}}$.

22ª.) Função Exponencial: y = a^u , u = f(x), y' = a^uln(a)u'.

23ª.) Função Logaritmica: y = $\log_a$(u), u = f(x), y' = $\frac{u'}{u\ln(a)}$

OBS. $\log_a$(e) = $\frac{1}{\ln(a)}$.

24ª.) Função Exponencial Geral: y = u^v , u = f(x) e v = f(x), y' = vu^{v-1}u' + $u^v \ell n$(u).v'.

REGRA DE L'HOSPITAL

Quando se tem para x = a (finito ou infinito) as funções f(x) e g(x) tendendo para **zero** ou **infinito** e fazendo com que o quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ assuma a forma indeterminada $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, então $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

EXERCÍCIOS 23

Verifique em todos os exercícios anteriores sobre limites aqueles em que ocorrem indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ e aplique a Regra de L'Hospital.

EXERCÍCIOS 24

1) Seja a função y = f(x) = 2π, calcule a derivada de f(x). R.: 0

2) Seja a função y = sen(kπ), calcule a derivada de y. R.: 0

3) Seja a função y = sen(kπx), calcule a derivada de y. R.: cos(kπx) kπ

4) Seja a função $y = \frac{x+1}{x}$, calcule a derivada de y. R.: $\frac{1}{x} - \frac{1+x}{x^2}$

5) Seja a função $y = \frac{k}{x}$, calcule a derivada de y. R.: $-\frac{k}{x^2}$

6) Seja a função $y = x^2$, calcule a derivada de y. R.: 2x

7) Seja a função $y = (x+3)^5$, calcule a derivada de y. R.: $5(x+3)^4$

8) Seja a função $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 7$, calcule a derivada de f(x).

R.: $3x^2 - 10x + 2$

9) Seja a função $y = \sqrt{x^2+1}$, calcule a derivada de y. R.: $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

10) Seja a função $y = \sqrt[4]{8x^3}$, calcule a derivada de y. R: $\frac{3}{4}\frac{8^{(1/4)}x^2}{(x^3)^{(3/4)}}$

11) Seja a função $y = \pi^{2x}$, calcule a derivada de y. R.: $2\pi^{(2x)}\ln(\pi)$

12) Seja a função $f(x) = e^{x+2} - e^x$, calcule a derivada de f(x). R.: $e^{(x+2)} - e^x$

13) Seja a função $f(x) = \ell n(x)$, calcule a derivada de f(x). R.: $\frac{1}{x}$

14) Seja a função $f(x) = \ell n(2x^2)$, calcule a derivada de f(x). R.: $\frac{2}{x}$

15) Seja a função $f(x) = \ell og_a(x^2 - 2x + 1)$, calcule a derivada de f(x).

R.:

$$\frac{2x-2}{(x^2-2x+1)\ln(a)}$$

16) Seja a função y = [ℓn (x)]^x, calcule a derivada de y.

R.: $\ln(x)^x \left(\ln(\ln(x)) + \frac{1}{\ln(x)} \right)$

17) Seja a função y = x^x, calcule a derivada de y. R.: $x^x (\ln(x) + 1)$

18) Seja a função y = sen(x^2), calcule a derivada de y. R.: $2 \cos(x^2)\, x$

19) Seja a função y = sen^2(x), calcule a derivada de y. R.: 2sen(x)cos(x)

20) Seja a função y = cos(ℓn(x)), calcule a derivada de y. R.: $-\frac{\sin(\ln(x))}{x}$

21) Seja a função y = cos^2(x), calcule a derivada de y. R.: -2sen(x)cos(x)

22) Seja a função y = 1- cos^2(x), calcule a derivada de y. R.: 2sen(x)cos(x)

23) Seja a função f(x) = $x^3 - x - 1$, calcule a derivada de f(x). R: $3x^2 - 1$

24) Seja a função f(x) = $\frac{-2}{x}$, calcule a derivada de f(x). R.: $\frac{2}{x^2}$

25) Seja a função y = $\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}$, calcule a derivada de y. R.: $2\sqrt{x} - \frac{x^2+1}{2x^{(3/2)}}$

26) Seja a função y = $2xe^x$, calcule a derivada de y. R.: $2e^x + 2xe^x$

27) Seja a função f(t) = $\sqrt{3t}$, calcule a derivada de f(t). R.: $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{t}}$

28) Seja a função f(x) = $\ell n(x^2)$, calcule a derivada de f(x). R.: $\frac{2}{x}$

29) Seja a função f(x) = π^x, calcule a derivada de f(x). R.: $\pi^x \ln(\pi)$

30) Seja a função y = log(x^2 + 1), calcule a derivada de y. R.: $\frac{2x}{(x^2+1)\ln(10)}$

31) Seja a função y = x^{x+1}, calcule a derivada de y. R.: $x^{(1+x)}\left(\ln(x) + \frac{1+x}{x}\right)$

32) Seja a função y = x - $\ell n(e^x)$ + 2sen(π), calcule a derivada de y. R.: 0

33) Seja a função y = sen(5x), calcule a derivada de y. R.: $5\cos(5x)$

34) Seja a função y = $x^2 + e^x$, calcule a derivada de y. R.: $2x + e^x$

35) Seja a função z = f(y) = $\cos(y^2) + y^5$, calcule a derivada de z.

R.:

$-2\sin(y^2)\,y + 5y^4$

36) Seja a função f(t) = $t^3 + t^2 + \ell n(t)$, calcule a derivada de f(t) no ponto t = 1,

ou seja, $\left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=1}$. R.: 6

37) Seja a função g(x) = $x.e^x.\ell n(x) + \text{sen}(e^x)$, calcule a derivada de g(x).

R.:

$$e^x \ln(x) + x\,e^x \ln(x) + e^x + \cos(e^x)\,e^x$$

38) Seja a função y = $\sqrt{x^2+1}$, calcule a derivada de y. R.:

$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

39) Seja a função y = $\sqrt[3]{x}$, calcule a derivada de y. R.:

$\frac{1}{3x^{(2/3)}}$

40) Seja a função y = π^{2x}, calcule a derivada de y. R.:

$2\pi^{(2x)}\ln(\pi)$

41) Um balão esférico está sendo inflado. Determine a taxa na qual o volume V do balão varia em relação ao seu raio R.

42) Seja a função y = f(x) = $\sqrt{x}$, calcule a derivada de y. R.:

$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

43) Calcule o valor da derivada obtida no item anterior no ponto x = 4, ou seja,

$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=4}$. R.: 1/4

44) Seja a função y = f(x) = $\frac{3x^2 - x + 2}{4x^2 + 5}$, calcule a derivada de y.

R.: $\frac{6x-1}{4x^2+5} - \frac{8(3x^2-x+2)x}{(4x^2+5)^2}$

45) Calcule o valor da derivada obtida no item anterior no ponto x = 0, ou seja, $\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=0}$. R.: -1/5

46) Determine a equação da tangente (reta tangente) ao gráfico da função f(x) = $\dfrac{5}{1+x^2}$ no ponto com coordenadas (-2, 1), ou melhor, no ponto P(-2, 1).

47) Determine a equação da tangente ao gráfico da função f(x) = $3x^2 - 2\sqrt{x}$ no ponto com coordenadas (4, 44), ou melhor, no ponto P(4, 44).

48) Seja a função y = f(x) = sen(x+1).cos(x-1), calcule o valor da derivada de y no ponto x = 0.
R.: 1

49) Seja a função y = arctg($\dfrac{1+x}{1-x}$), calcule o valor da derivada de y no ponto x = 0.

50) Calcule o coeficiente angular da tangente à curva y = x^2 -5x + 7 no ponto x = 0.

51) Calcule a inclinação da curva y = 10^x no ponto x = 2.

52) Determine as coordenadas dos pontos da curva y = $x^3 + 2x^2 - 4x + 5$ em que a tangente a curva, nesses pontos, é:
a) horizontal;
b) paralela à reta 2y + 8x = 5.

53) Seja y = f(x) = $\dfrac{sen(x)}{1+\cos(x)}$, calcule y'.

54) Seja a função g(x) = sec(x).tg(x), calcule g'(x).

55) Determine o coeficiente angular das tangentes à curva y = sen(x) nos pontos com abscissas: x = 0, x = $\dfrac{\pi}{3}$, x = $\dfrac{\pi}{2}$, x = $\dfrac{2\pi}{3}$ e π.

56) Determine a equação da normal à curva y = tg(x) no ponto P($\dfrac{\pi}{4}$, 1).

57) De um balão a 150 m acima do solo cai um saco de areia. Desprezando-se a resistência do ar, a distância s(t) do solo ao saco em queda, após t segundos é dada por s(t) = $-4{,}9t^2 + 150$. Determinar a velocidade do saco nos seguintes casos:
a) quando t = a segundos;

b) quando t = 2 segundos;

c) quando s = 0 (distância ao solo);

58) Uma função densidade de probabilidade, f(x), de uma variável aleatória X corresponde à **derivada** da função distribuição de probabilidade, F(x), dessa variável aleatória. Sendo assim, se $F(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$ $x > 0$, calcule a função densidade de probabilidade de X.

59) Uma função densidade de probabilidade, f(x), de uma variável aleatória X corresponde à **derivada** da função distribuição de probabilidade, F(x), dessa variável aleatória. Sendo assim, se $F(x) = 1 - e^{-5x}$ $x > 0$, calcule a função densidade de probabilidade de X.

60) Calcule a função densidade de probabilidade, f(x), da variável aleatória X dada a função distribuição de probabilidade $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$ $x \in [a; b]$ e $a < b$.

61) Calcule a função densidade de probabilidade, f(x), da variável aleatória X dada a função distribuição de probabilidade $F(x) = x$ com $x \in [0; 1]$.

4. INTEGRAL

4.1- Definições e Integrais Imediatas

Função Primitiva: Dada uma função f(x) definida no intervalo [a; b], chama-se função primitiva de f(x) a toda função F(x), também definida em [a; b] e cuja derivada F'(x) = f(x) em todo intervalo [a; b]. Toda função contínua admite uma primitiva.

Teorema: Se F(x) é uma primitiva de f(x), então F(x) + c onde c é uma constante é, também, uma primitiva de f(x).

4.2- Integral Indefinida

Como já se definiu, dada uma função f(x) definida no intervalo [a; b], chama-se função primitiva de f(x) a toda função F(x), também definida em [a; b] e cuja derivada F'(x) = f(x) em todo intervalo [a; b]. E, se sabe que toda função contínua admite uma primitiva. Então, a **integral indefinida** de f(x) é a integral mais geral da função f(x), isto é,

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

onde F(x) é a uma função tal que F'(x) $= \dfrac{d(F(x))}{dx} = f(x)$ e C é uma constante arbitrária.

Integrais Imediatas:

1ª.) $\int dx = x + c$

2ª.) $\int x^m dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + c$

3ª.) $\int u^m du = \dfrac{u^{m+1}}{m+1} + c$ com u = f(x).

4ª.) $\int \sqrt{x}dx = \int x^{1/2}dx = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$.

5ª.) $\int \sqrt{u}\,du = \int u^{1/2}du = \frac{2}{3}\sqrt{u^3} + c$, com u = f(x).

6ª.) $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ell n(a)} + c$, com u = f(x).

7ª.) $\int a^u \ell n(a)\,du = a^u + c$, com u = f(x).

8ª.) $\int e^u\,du = e^u + c$, com u = f(x).

9ª.) $\int \frac{du}{u} = \ell n(u) + c$, com u = f(x).

10ª.) $\int \cos(u)du = \text{sen}(u) + c$, com u = f(x).

11ª.) $\int \text{sen}(u)du = -\cos(u) + c$, com u = f(x).

12ª.) $\int \sec^2(u)du = \text{tg}(u) + c$, com u = f(x).

13ª.) $\int \text{cosec}^2(u)du = -\text{cotg}(u) + c$, com u = f(x).

14ª.) $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \text{arcsen}(u) + c$, com u = f(x).

ou $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\arccos(u) + c$, com u = f(x).

15ª.) $\int \frac{du}{1+u^2} = \text{arc tg}(u) + c$, com u = f(x).

ou $\int \frac{du}{1+u^2} = -\text{arc cotg}(u) + c$, com u = f(x).

EXERCÍCIOS 25: INTEGRAL INDEFINIDA.

1) Seja f(x) = x, calcule a integral indefinida de f(x). R: $\frac{x^2}{2}$

2) Seja f(x) = $\frac{1}{\sqrt{x}}$, calcule a integral indefinida de f(x). R: $2\sqrt{x}$

3) Calcule a integral indefinida $\int e^{ax}\,dx$, com $a \in$ R. R: $\frac{e^{(a x)}}{a}$

4) Seja y = f(x) = 2cos(x), calcule a integral indefinida de f(x). R: 2sen(x)

5) Calcule a integral indefinida $\int \frac{3}{x}dx$. R: $3\ln(x)$

6) Seja f(x) = $5x^4$, calcule a integral indefinida de f(x). R: x^5

7) Seja $y = -2x^3$, calcule a integral indefinida de y. R: $-\frac{x^4}{2}$

8) Calcule a integral indefinida $\int -\operatorname{sen}(x)\,dx$. R: $\cos(x)$

9) Calcule a integral indefinida $\int \frac{dx}{\sqrt{4-4x^2}}$ R: $\frac{1}{2}\arcsin(x)$

10) Seja o polinômio $f(x) = x^2 - 2x + 5$, calcule a integral indefinida de f(x).

R: $\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5x$

11) Calcule a integral indefinida $\int 5\,dx$. R: 5x

12) Calcule a integral indefinida $\int \frac{dx}{2}$. R: x/2

13) Calcule a integral indefinida $\int x^3\,dx$. R: $x^4/4$

14) Calcule a integral indefinida $\int 2x^5\,dx$. R: $x^6/3$

15) Calcule a integral indefinida $\int \frac{1}{\pi}x^5\,dx$. R: $\frac{1}{\pi}\frac{x^6}{6}$

16) Calcule a integral indefinida $\int 3\sqrt{x}\,dx$. R: $2x^{(3/2)}$

17) Calcule a integral indefinida $\int \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}\,dx$. R: $x^{(4/3)}$

18) Calcule a integral indefinida $\int \frac{dx}{x^3}$. R: $-\frac{1}{2x^2}$

19) Calcule a integral indefinida $\int \frac{5}{3}x^{2/3}\,dx$. R: $x^{(5/3)}$

20) Calcule a integral indefinida $\int 2x^{-3}\,dx$. R: $-\frac{1}{x^2}$

21) Calcule a integral indefinida $\int \frac{1}{2}x^{-1/2}\,dx$. R: $\sqrt{x}$

22) Calcule a integral indefinida $\int 2^x\,dx$. R: $\frac{2^x}{\ln(2)}$

23) Calcule a integral indefinida $\int 3\sqrt{10x}\,dx$. R: $2x^{(3/2)}\sqrt{10}$

24) Calcule a integral indefinida $\int 3e^{3x}\,dx$. R: $e^{(3x)}$

25) Calcule a integral indefinida $\int e^{\operatorname{sen}(x)}\cos(x)dx$. R: $e^{\sin(x)}$

26) Calcule a integral indefinida $\int \frac{2xdx}{x^2}$. R: $2\ln(x)$

27) Calcule a integral indefinida $\int 3e^x\, dx$. R: $3\, e^x$

28) Calcule a integral indefinida $\int 2e^{-x}\, dx$. R: $-2\, e^{(-x)}$

29) Calcule a integral indefinida $\int e^{2x}\, dx$. R: $\frac{1}{2}\, e^{(2x)}$

30) Calcule a integral indefinida $\int \frac{2dx}{e^x}$. R: $-2\, e^{(-x)}$

31) Calcule a integral indefinida $\int \frac{\cos(x)}{\mathrm{sen}(x)}dx$. R: $\ln(\mathrm{sen}(x))$

32) Calcule a integral indefinida $\int \frac{2xdx}{x^2+1}$. R: $\ln(x^2+1)$

33) Calcule a integral indefinida $\int \frac{dx}{x\ell n(x)}$. R: $\ln(\ln(x))$

34) Calcule a integral indefinida $\int 2\cos(2x)dx$. R: $\mathrm{sen}(2x)$

35) Calcule a integral indefinida $\int \mathrm{sen}(x^2)2xdx$. R: $-\cos(x^2)$

36) Calcule a integral indefinida $\int -3\mathrm{sen}(3x)dx$. R: $\cos(3x)$

36) Calcule a integral indefinida $\int 2\sec^2(x)dx$. R: $\frac{2\sin(x)}{\cos(x)}$

37) Calcule a integral indefinida $\int -2\,\mathrm{cos\,ec}^2(x)dx$. R: $\frac{2\cos(x)}{\sin(x)}$

38) Calcule a integral indefinida $\int 2\sec^2(2x)dx$.

39) Calcule a integral indefinida $\int \sec^2(2x)dx$.

40) Calcule a integral indefinida $\int \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}$. R: $2\arcsin(x)$

41) Calcule a integral indefinida $\int \frac{3dx}{1+x^2}$. R: $3\arctan(x)$

42) Calcule a integral indefinida $\int \frac{dx}{2+2x^2}$. R: $\frac{1}{2}\arctan(x)$

43) Calcule a integral indefinida $\int \frac{dx}{\sqrt{9-9x^2}}$. R: $\frac{1}{3}\arcsin(x)$

44) Calcule a integral indefinida $\int (x^2+x+1)dx$. R: $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x$

45) Calcule a integral indefinida $\int (2x+1)dx$.   R: $x^2 + x$

46) Calcule a integral indefinida $\int (6x^5 - 8x^3 - 2x)dx$.   R: $x^6 - 2\,x^4 - x^2$

47) Calcule a integral indefinida $\int (e^x + e^{-x} + x - 1)dx$.   R: $\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{(-x)} + \frac{x^2}{2} - x$

48) Calcule a integral indefinida $\int (\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 3\sqrt{x})dx$.

49) Calcule a integral indefinida $\int (e^x + 2^x)dx$.

50) Calcule a integral indefinida $\int (\cos(x) + \mathrm{sen}(x))dx$.

51) Calcule a integral indefinida $\int (\sec^2(x) - \cos\mathrm{ec}^2(x))dx$.

52) Calcule a integral indefinida $\int (\frac{1}{1+x^2} + \sec^2(x))dx$.

53) Calcule a integral indefinida $\int (\frac{1}{1+x^2} + \cos\mathrm{ec}^2(x))dx$.

54) Calcule a integral indefinida $\int (\cos(x) - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}})dx$.

55) Calcule a integral indefinida $\int \mathrm{tg}(x)dx$.

56) Calcule a integral indefinida $\int \sec^2(\frac{x}{2})dx$.

57) Calcule a integral indefinida $\int \sqrt{3+x^2}.xdx$.

4.3- Integral Definida

Teorema Fundamental do Cálculo

Sejam F(x) e sua derivada F'(x) = $\frac{d(F(x))}{dx} = f(x)$ funções injetoras e contínuas no intervalo [a; b]. Então, se o intervalo for dividido em n subintervalos de comprimento $\Delta_1 x$, $\Delta_2 x$, $\Delta_3 x$, ... , $\Delta_n x$ e se for inseridos os n – 1 pontos $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{n-1}$ entre a e b, de forma que se tenha

$$a < \xi_1 < \xi_2 < \xi <, \ldots, < \xi_{n-1} < b$$

e fazendo a = ξ_0 e b = ξ_n, em cada subintervalo e selecionando-se um ponto x_1 no intervalo (ξ_0, ξ_1), x_2 em (ξ_1, ξ_2) .... x_n em (ξ_{n-1}, ξ_{n1}) forma-se a soma:

$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta_k x = f(x_1)\Delta_1 x + f(x_2)\Delta_2 x + \ldots\ldots + f(x_n)\Delta_n x$. Assim, quando n aumenta indefinidamente, de modo que quando $\Delta_k x \to 0$ o limite da soma será:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_k)\Delta_k x = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

EXERCÍCIOS 26: INTEGRAL DEFINIDA.

1) Dada a função $f(x) = x^2$, calcule a integral definida de f(x) de 0 a 4, ou seja, $\int_0^4 x^2 dx$. R: $\frac{64}{3}$

2) Dada a função y = sen(x), calcule a integral definida de y de 0 a $\frac{\pi}{2}$, ou seja, $\int_0^{\pi/2} \text{sen}(x)dx$. R: 1

3) Dada a função $f(x) = x^5$, calcule a integral definida $\int_0^2 x^5 dx$. R: 32/3

4) Dada a função $f(z) = \sqrt[3]{z}$ calcule a integral definida $\int_0^1 \sqrt[3]{z}dz$.

5) Dada a função $y = a^u$, calcule a integral definida $\int_0^2 a^u du$. R: $\frac{-1 + a^2}{\ln(a)}$

6) Dada a função $f(s) = (3s + 4)^2$, calcule a integral definida $\int_{-5}^{-4/3} (3s+4)^2 ds$.

7) Dada a função $f(s) = (3s + 4)^2$, calcule a integral definida $\int_{-4/3}^{5} (3s+4)^2 ds$.

8) Calcule $\int_{-3}^{1} dx$. R: 4

9) Calcule $\int_{-2}^{-1} x^2 dx$.

10) Calcule $\int_0^{\pi} \text{sen}(x)dx$. R: 2

11) Calcule $\int_1^2 \frac{dx}{x}$. R: ln(2)

12) Calcule $\int_{0}^{\pi} 2\cos(x)dx$. R: 0

13) Calcule $\int_{1}^{e} \frac{dx}{x}$. R: 1

14) Calcule $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$. R: $\frac{\pi}{4}$

15) Calcule $\int_{3}^{3} \frac{dx}{1+x^2}$. R: 0

16) Calcule $\int_{0}^{\pi} \cos(2x)dx$.

17) Calcule $\int_{0}^{\pi} \cos(5x)dx$.

18) Calcule $\int_{0}^{\pi} \mathrm{sen}(2x)dx$.

19) Calcule $\int_{0}^{\pi} \mathrm{sen}(3x)dx$.

20) Calcule $\int_{0}^{\pi} \mathrm{sen}(6x)dx$.

21) Calcule $\int_{0}^{2\pi} \cos(2x)dx$.

22) Calcule $\int_{0}^{2\pi} \cos(3x)dx$.

23) Calcule $\int_{0}^{2\pi} \mathrm{sen}(2x)dx$.

24) Uma função distribuição de probabilidade de uma variável aleatória contínua X pode ser obtida integrando-se a função densidade de probabilidade do menor valor do domínio de X até um valor específico x. Dada a função densidade de probabilidade $f(x) = 5e^{-5x}$ $x \geq 0$ determine a função distribuição de X.

25) Uma função distribuição de probabilidade de uma variável aleatória contínua X pode ser obtida integrando-se a função densidade de probabilidade do menor valor do domínio de X até um valor específico x.

Dada a função densidade de probabilidade f(x) = $\frac{1}{(1+x)^2}$ $x \geq 0$. Determine a função distribuição de X.

26) Calcule a função distribuição de probabilidade da variável aleatória X, dado que a sua função densidade de probabilidade é f(x) = $\frac{1}{b-a}$ $x \in [a; b]$ $a < b$.

27) Calcule a função distribuição de probabilidade da variável aleatória X, dado que a sua função densidade de probabilidade é f(x) = 1 $x \in [0; 1]$.

28) Calcule a função distribuição de probabilidade da variável aleatória X, dado que a sua função densidade de probabilidade é f(x) = $\theta e^{-\theta x}$ com $x \geq 0$, $\theta > 0$.

29) Calcule a função distribuição de probabilidade da variável aleatória X, dado que a sua função densidade de probabilidade é f(x) = $1{,}5x^2$ com $x \in [-1; 1]$.

30) Uma função densidade de probabilidade é sempre não negativa, ou seja, $f(x) \geq 0$ e a integral definida da função é sempre igual a l. Então, verifique se $f(x) = 1{,}5x^2$ com $x \in [-1; 1]$ é uma função densidade de probabilidade.

31) Verifique se a função f(x) = $3e^{-3x}$ com $x \in (0; \infty)$, é uma função densidade de probabilidade.

32) Verifique se a função f(x) = 1 com $x \in [0; 1]$, é uma função densidade de probabilidade.

33) Verifique se a função f(x) = $\frac{1}{(1+x)^2}$ com $x > 0$, é uma função densidade de probabilidade.

34) Verifique se a função f(x) = $\frac{1}{b-a}$ com $x \in [a; b]$ $a < b$ é uma função densidade de probabilidade.

35) Verifique se a função $f(x) = x^2$ com $x \in [1; 5]$ é uma função densidade de probabilidade.

4.4- Métodos de Integração

4.4.1- Integração por Partes

O método da integração por partes é baseado na seguinte regra:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Sendo que na aplicação dessa regra deve-se separar o integrando em duas partes. Uma que é o **u** e a outra que junto com dx é o **dv**. Dessa forma existem duas regras gerais:

1ª.) a parte escolhida como **dv** deve ser de fácil integração;

2ª.) a integral $\int v\,du$ deve ser mais simples do que $\int u\,dv$.

EXERCÍCIOS 27: INTEGRAÇÃO POR PARTES

1) Calcule a integral $\int x\,\mathrm{sen}(x)dx$ — R: sen(x) – xcos(x) + C

2) Calcule a integral $\int xe^x dx$ — R: $(-1 + x)e^x + C$

3) Calcule a integral $\int x^2 \ell n(x)dx$ — R: $\frac{1}{3}x^3\ell n(x) - \frac{1}{9}x^3 + C$

4) Calcule a integral $\int x\sqrt{1+x}\,dx$ — R: $\frac{2\,(1+x)^{(3/2)}\,(-2+3\,x)}{15} + C$

5) Calcule a integral $\int \mathrm{arcsen}\,(x)\,dx$ — R: $x\,\mathrm{arcsen}(x) + \sqrt{1-x^2} + C$

6) Calcule a integral $\int x\,\mathrm{arcsen}(x^2)dx$ — R: $\frac{1}{2}x^2\mathrm{arcsen}(x^2) + \frac{\sqrt{1-x^4}}{2} + C$

7) Calcule a integral $\int \mathrm{sen}^2(x)dx$ — R: $-\frac{1}{2}\mathrm{sen}(x)\cos(x) + \frac{x}{2} + C$

4.4.2- Integrais Trigonométricas

Nas integrais trigonométricas são usadas as seguintes identidades trigonométricas:

1ª.) $sen^2(x) + cos^2(x) = 1$

2ª.) $1 + tg^2(x) = sec^2(x)$

3ª.) $1 + cotg^2(x) = cosec^2(x)$

4a.) $sen^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \mathbf{cos}(2x))$

5ª.) $cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{cos}(2x))$

6ª.) $sen(x)cos(x) = \frac{1}{2}sen(2x)$

7ª.) $sen(x)cos(y) = \frac{1}{2}[sen(x - y) + sen(x + y)]$

8ª.) $sen(x)sen(y) = \frac{1}{2}[\mathbf{cos}(x - y) - \mathbf{cos}(x + y)]$

9ª.) $cos(x)cos(y) = \frac{1}{2}[\mathbf{cos}(x - y) + \mathbf{cos}(x + y)]$

10ª.) $1 - cos(x) = 2sen^2(x/2)$

11ª.) $1 + cos(x) = 2cos^2(x/2)$

12ª.) $1 \pm sen(x) = 1 \pm cos(\frac{\pi}{2} - x)$

EXERCÍCIOS 28: INTEGRAIS TRIGONOMÉTRICAS

1) Calcule a integral $\int \text{sen}^2(x)dx$ R: $-\frac{1}{2}\text{sen}(x)\cos(x)+\frac{x}{2}+C$

2) Calcule a integral $\int \cos^2(3x)dx$ R: $\frac{1}{6}\cos(3x)\text{sen}(3x)+\frac{x}{2}+C$

3) Calcule a integral $\int \text{sen}^3(x)dx$ R: $-\cos(x)+\frac{1}{3}\cos^3(x)+C$

4) Calcule a integral $\int \cos^5(x)dx$ R: $\text{sen}(x)-\frac{2}{3}\text{sen}^3(x)+\frac{1}{5}\text{sen}^5(x)+C$

5) Calcule a integral $\int \text{sen}^2(x)\cos^3(x)dx$ R: $\frac{1}{3}\text{sen}^3(x)-\frac{1}{5}\text{sen}^5(x)+C$

6) Calcule a integral $\int \cos^4(2x)\text{sen}^3(2x)dx$ R: $-\frac{1}{10}\cos^5(2x)+\frac{1}{14}\cos^7(2x)+C$

7) Calcule a integral $\int \text{sen}^3(3x)\cos^5(3x)dx$ R: $-\frac{1}{18}\cos^6(3x)+\frac{1}{24}\cos^8(3x)+C$

4.4.3- Integração por Substituições Trigonométricas

Quando o integrando da integral contém uma das formas $\sqrt{a^2 - b^2u^2}$, $\sqrt{a^2 + b^2u^2}$, $\sqrt{b^2u^2 - a^2}$ e não possui nenhum outro fator irracional, pode-se fazer uma mudança de variável no integrando envolvendo funções trigonométricas. Então, quando se tem:

$\sqrt{a^2 - b^2u^2}$ muda-se u para u = $\frac{a}{b}\text{sen}(z)$ e obtém-se $a\sqrt{1-\text{sen}^2(z)}$ = acos(z)

$\sqrt{a^2 + b^2u^2}$ muda-se u para u = $\frac{a}{b}\text{tg}(z)$ e obtém-se $a\sqrt{1+\text{tg}^2(z)}$ = asec(z)

$\sqrt{b^2u^2 - a^2}$ muda-se u para u = $\frac{a}{b}\mathbf{sec}(z)$ e obtém-se $a\sqrt{\mathbf{sec}^2(z)-1)}$ = atg(z)

EXERCÍCIOS 29: SUBSTITUIÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

1) Calcule a integral $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$ R: $-\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x}+C$

2) Calcule a integral $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$ R: $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4}+2\ell n(x^2+\sqrt{x^2-4})+C$

3) Calcule a integral $\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x}dx$ R: $3\,\ell n(\frac{3-\sqrt{9-4x^2}}{x})+\sqrt{9-4x^2}+C$

4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{9+4x^2}}$ R: $\frac{1}{3}\ell n(\frac{\sqrt{9+4x^2}-3}{x})$

INTEGRAIS RESPOSTAS

Observe que se a integral é INDEFINIDA adicione a <u>constante de integração c.</u>

1) $\frac{x^2}{2}$

2) $2\sqrt{x}$

3) $\frac{e^{(a\,x)}}{a}$

4) 2sen(x)

5) $3\ln(x)$

6) x^5

7) $-\frac{x^4}{2}$

8) $\cos(x)$

9) $-\sqrt{1-x}$

10) $\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5\,x$

11) $5\,x$

12) $\frac{x}{2}$

15) $\frac{x^6}{6\,\pi}$

16) $2\,x^{(3/2)}$

17) $x^{(4/3)}$

18) $-\frac{1}{2\,x^2}$

19) $x^{(5/3)}$

20) $\frac{1}{x^2}$

21) $\sqrt{x}$

22) $\dfrac{2^x}{\ln(2)}$

23) $2\,x^{(3/2)}\sqrt{10}$

24) $e^{(3\,x)}$

25) $e^{\operatorname{sen}(x)}$

26) $2\ln(x)$

27) $3\,e^x$

28) $-2\,e^{(-x)}$

29) $\dfrac{1}{2}\,e^{(2\,x)}$

30) $-\dfrac{2}{e^x}$

31) ln(sen(x))

32) $\ln(x^2+1)$

33) $\ln(\ln(x))$

34) sen(2x)

35) $-\cos(x^2)$

36) $\cos(3\,x)$

36’) $\dfrac{2\sin(x)}{\cos(x)}$

37) $\dfrac{2\cos(x)}{\sin(x)}$

38) $\dfrac{\sin(2\,x)}{\cos(2\,x)}$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

1. Ayres, Frank Jr. & Mendelson – Cálculo Dif. e Integral; 4ª. Edição, Coleção Schaum, Bookman, Porto Alegre, 2005.
2. Cálculo: Funções de Uma Variável. Morettin, P. A.; Bussab, W. O. & Hazzan, S. Atual Editora.