



LISTA 2 – CE304 TEORIA DA PROBABILIDADE 1

Prof. Benito Olivares Aguilera

2024/1

1. Considere uma urna contendo 3 bolas vermelhas e 5 pretas. Retire 3 bolas, sem reposição, e defina a variável aleatória X como o número de bolas pretas retiradas.
 - a) Obtenha a distribuição de X .
 - b) Repita o item anterior, mas considerando extrações com reposição.
2. Três bolas são sorteadas de uma urna contendo 3 bolas brancas, 3 bolas vermelhas e 5 bolas pretas. Suponha que ganhemos R\$10,00 por cada bola branca sorteada e percamos R\$10,00 para cada bola vermelha sorteada. Defina a variável aleatória X como o número de vitórias no jogo, calcule a probabilidade de ganharmos algum dinheiro.
3. Considere uma urna contendo três bolas numeradas 1, 2 e 3. Duas bolas são retiradas sucessivamente e com reposição. Defina X como sendo o maior dos números obtidos e Y o menor dos números obtidos.
 - a) Escreva e desenhe a função distribuição de X e de Y .
 - b) Utilizando a função distribuição encontre $P(X > 2)$ e $P(Y \leq 1)$.
 - c) Encontre $P(X \leq Y)$ e $P(X < Y)$.
4. Sabe-se que a função de distribuição $F(x)$ de uma v.a. X é tal que:
$$F(0) - F(0^-) = 1/12; F(1) - F(1^-) = 0;$$
$$F(2) - F(2^-) = 1/2 \text{ e } F(5/2) - F(5/2^-) = 5/12.$$

Obter a função de probabilidade de X , a função distribuição $F(x)$ e os gráficos respectivos.

5. Estabeleça condições sobre a e b , de modo que a função $g(x)$ seja uma função de probabilidade:

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$	$-(a - b)$	b	a	$a + b$	$b - a$

6. Seja X uma variável aleatória com distribuição dada por:
$$p(x) = k(1 - \theta)^{x-1}, x = 1, 2, \dots$$
Determine o valor de k .

7. Para cada uma das expressões abaixo, verifique se são função de probabilidade. Caso não sejam, indique se uma multiplicação por alguma constante poderia torná-las função de probabilidade.

a) $p(x) = \frac{1}{2^x}, x = 1, 2, \dots$

b) $p(x) = \frac{|x|}{20}, x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4.$

c) $p(x) = \frac{x-1}{2^x}, x = 2, 3, \dots$

8. Determine as constantes a, b e c , para que a função $F(x)$ seja função de distribuição de alguma variável aleatória.

$$F(x) = \begin{cases} a - 2b, & x < 0 \\ ax, & 0 \leq x < 1 \\ a + b(x - 1), & 1 \leq x < 2 \\ c, & x \geq 2. \end{cases}$$

Qual a função densidade?

9. Discuta as condições sobre a, b e c para que a função $g(x)$ seja uma densidade em $[b, +\infty)$, sendo

$$g(x) = \frac{1}{a} e^{-(x-b)/c}.$$

10. A v.a. X tem densidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & -1 \leq x \leq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- a) Encontre o valor da constante c .
b) Calcule $P(X > b / X < b/2)$ para $-1 < b < 0$.
c) Calcule o 1º Quartil da distribuição, isto é, o valor α tal que $F_X(\alpha) = 1/4$.

11. Para X com densidade $f(x) = |1 - x|, 0 \leq x \leq 2$, obtenha:

- a) A função de distribuição de X .
b) $P(X > 1/2)$.
c) $P(X < 2/3 / X > 1/2)$.

12. Diga sob que condições a função é uma densidade de probabilidade. Comprove e desenhe a função.

a) $f(x) = \frac{\alpha}{2} e^{-\lambda|x-\mu|}, x \in \mathbb{R}, \lambda > 0.$

b) $f(x) = \beta \mathbb{I}_{[-1,3]}(x).$

c) $f(x) = \gamma e^{-x^2/2}, x \in \mathbb{R}.$

d) $f(x) = \cos x, 0 \leq x \leq \delta.$

13. Uma v.a. X tem função de distribuição dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < -1; \\ 1/2, & \text{se } -1 \leq x < 1/2; \\ 3/4, & \text{se } 1/2 \leq x < 2; \\ 1, & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

- Classifique a variável X e obtenha a função densidade ou função de probabilidade, segundo corresponda.
- Expresse $P(X \geq 0)$ e $P(X > 0)$ em termos de F e calcule seus valores.
- Expresse $P(X \geq -1)$ e $P(X > -1)$ em termos de F e calcule seus valores. Comente sobre as diferenças em relação ao resultado de b).

14. Obtenha a função de distribuição referente à seguinte função densidade:

$$f(x) = \begin{cases} -x/2, & -1 \leq x \leq 0; \\ x/2, & 0 < x \leq 1; \\ 1/2, & 1 < x \leq 2; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

15. A variável X tem função de distribuição dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ \frac{1}{c}(1 - e^{-(x-1)}), & 1 \leq x < 2; \\ \frac{1}{c}(1 - e^{-1} + e^{-2} - e^{-2(x-1)}), & x \geq 2. \end{cases}$$

- Obtenha o valor da constante c .
- Classifique a variável e obtenha a correspondente função densidade ou função de probabilidade, conforme o caso.
- Determine $P(X \geq 3/2 \mid X < 4)$.

16. Considere a seguinte função:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1/4, & 0 \leq x < 1; \\ 2/5, & 1 \leq x < 2; \\ 1/2, & 2 \leq x < 3; \\ (2x - 5)/2, & 3 \leq x < 7/2; \\ 1, & x \geq 7/2. \end{cases}$$

- Verifique que F é função de distribuição.
- Obtenha a decomposição de F em partes discreta, contínua e singular.