



LISTA 1 – CE304 TEORIA DA PROBABILIDADE 1

Prof. Benito Olivares Aguilera

2025/1

I. INTRODUÇÃO.

A. Teoria de Conjuntos.

1. Usando as definições e propriedades verifique as seguintes identidades. Também verifique utilizando diagramas de Venn.
 - a) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.
 - b) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.
 - c) $(A \cap D) \cup D^c = A \cup D^c$.
 - d) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$.
 - e) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.
2. Foi realizada uma pesquisa com um grupo de vestibulandos e constatou-se que:
 - 1200 se inscreveram para a prova da UnB;
 - 900 se inscreveram para a prova da UFMG;
 - 710 se inscreveram para a prova da Unesp;
 - O número de candidatos que se inscreveram apenas para a UnB e para a Unesp (mas não para a UFMG) é igual ao número que se inscreveu para UFMG e para Unesp.
 - O número de vestibulandos que se inscreveu para apenas uma faculdade é o triplo do número que se inscreveu para as três faculdades.
 - O número de vestibulando que se inscreveram em apenas duas faculdades corresponde a 1030 candidatos.
 - 35 não se inscreveram em nenhuma delas.

Responda: Quantos vestibulandos havia no grupo da pesquisa?
3. Determine os conjuntos A, B e C que satisfazem as seguintes condições simultaneamente:
$$\begin{aligned} 1^\circ) A \cup B \cup C &= \{z, x, v, u, t, s, r, q, p\}; & 2^\circ) A \cap B &= \{r, s\}; \\ 3^\circ) B \cap C &= \{s, x\}; & 4^\circ) C \cap A &= \{s, t\}; \\ 5^\circ) A \cup C &= \{p, q, r, s, t, u, v, x\}; & 6^\circ) A \cup B &= \{p, q, r, s, t, u, x, z\}. \end{aligned}$$
4. Seja Ω um conjunto não vazio e seja $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ uma família (ou classe) de subconjuntos de Ω . Diremos que \mathcal{A} é uma álgebra sobre Ω se satisfaz:
 - i) $\Omega \in \mathcal{A}$,
 - ii) se $A_i \in \mathcal{A}$ então $A_i^c \in \mathcal{A}, \forall i = 1, 2, \dots, n$.
 - iii) $\forall n$, se $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ então $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$.

- a) Qual a menor álgebra possível?
- b) Qual a menor álgebra contendo um conjunto A ?
- c) Para $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$ comprove que $\mathcal{P}(\Omega)$, o conjunto das partes de Ω , é uma álgebra.

B. Análise Combinatória.

- 5. Em uma corrida com dez cavalos, quantos são os resultados possíveis para os quatro primeiros lugares?
- 6. Quantos números inteiros maiores que 53000 e de cinco algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7?
- 7. Quantas diferentes placas de automóvel com 7 caracteres são possíveis se os três primeiros campos forem ocupados por letras e os 4 campos finais por números?
- 8. Uma aluna gasta exatamente um minuto para escrever cada anagrama da palavra ESTATISTICA, quanto tempo ela levará para escrever todos os anagramas, se ela descansa um minuto entre cada escrita?
- 9. Quantos subconjuntos existem em um conjunto de n elementos?
- 10. Quantos números pares de três algarismos podemos escrever com algarismos diferentes?
- 11. De um baralho comum (52 cartas) sacam-se sucessivamente e sem reposição três cartas. Quantas são as extrações nas quais a primeira carta é de copas, a segunda é um rei e a terceira não é uma dama?
- 12. O código morse usa "palavras" contendo de 1 a 4 "letras", as "letras" sendo ponto e traço. Quantas "palavras" existem no código morse?
- 13. No Senado Federal, o Distrito Federal e os 26 estados da federação têm 3 representantes cada. Deve-se formar uma comissão de modo que todos os estados e o Distrito Federal estejam representados por 1 ou 2 senadores. De quantos modos essa comissão pode ser formada?
- 14. Há duas urnas com 12 bolas numeradas de 1 a 12 em cada uma delas. Retiram-se 7 bolas de cada urna e os 14 números são registrados. De quantas maneiras podem ser obtidas cinco repetições de números? Consegue encontrar uma fórmula para k repetições ($k = 2, 3, \dots, 7$)?

II. ESPAÇOS DE PROBABILIDADE.

15. Para cada um dos seguintes experimentos, descreva um espaço amostral:

- a) Uma urna contém duas bolas brancas e três bolas vermelhas. Retira-se uma bola ao acaso da urna. Se for branca, lança-se uma moeda; se for vermelha, ela é devolvida à urna e retira-se outra bola.
- b) Lançar um dado até que a face 6 apareça pela primeira vez.
- c) Três jogadores A, B e C disputam um torneio de tênis. Inicialmente, A joga com B e o vencedor joga com C, e assim por diante. O torneio termina quando um jogador ganha duas vezes consecutivas ou quando são disputadas, ao todo, quatro partidas.
- d) Numa linha de produção conta-se o número de peças defeituosas num intervalo de uma hora.
- e) Investigam-se famílias de 4 crianças, anotando-se a configuração segundo o sexo.
- f) Numa entrevista telefônica com 250 assinantes, pergunta-se se o proprietário tem ou não máquina de secar roupa.
- g) Um fichário com 10 nomes contém 3 nomes de mulheres. Seleciona-se ficha após ficha, até o último nome de mulher ser selecionado, e anota-se o número de fichas selecionadas.
- h) Uma urna contém 10 bolas azuis e 10 bolas vermelhas com dimensões rigorosamente iguais. Três bolas são selecionadas ao acaso com reposição e as cores são anotadas.
- i) Dois dados, com as faces enumeradas de 1 a 6, são lançados simultaneamente e estamos interessados na soma das faces observadas.
- j) De um grupo de 5 pessoas {A, B, C, D, E} sorteiam-se duas, uma após a outra, com reposição, e anota-se a configuração formada.
- k) Mesmo enunciados que j), sem reposição.
- l) Mesmo enunciado que j), mas os dois selecionados simultaneamente.
- m) Um relógio mecânico pode parar a qualquer momento por falha técnica. Mede-se o ângulo (em graus) que o ponteiro dos segundos forma com o eixo imaginário orientado do centro ao número 12.
- n) Mesmo enunciado anterior, mas supondo que o relógio seja elétrico, onde o ponteiro dos segundos move-se continuamente.
- o) Dois dados, com as faces enumeradas de 1 a 6, são lançados simultaneamente e estamos interessados na soma das faces observadas.
- p) Em uma cidade, famílias com três crianças são selecionadas ao acaso, anotando-se o sexo de cada uma.
- q) Uma máquina produz 20 peças por hora, escolhe-se um instante qualquer e observa-se o número de defeituosas na próxima hora.
- r) Uma moeda lançada consecutivamente até o aparecimento da primeira cara.

16. Sendo $\Omega = \{a, b, c\}$, liste todas as sigma-álgebras de subconjuntos de Ω .

- 17.** Sendo A e B dois eventos em um mesmo espaço amostral, "traduza" para a linguagem da teoria dos conjuntos, as seguintes afirmações:
- a) Pelo menos um dos eventos ocorre.
 - b) O evento A ocorre, mas o evento B não.
 - c) Nenhum deles ocorre.
 - d) Exatamente um dos eventos ocorre.
- 18.** Sendo A, B e C subconjuntos quaisquer, expresse em notação matemática os conjuntos cujos elementos:
- a) Estão em A e B, mas não em C.
 - b) Não estão em nenhum deles.
 - c) Estão, no máximo, em dois deles.
 - d) Estão em A, mas no máximo em um dos outros.
 - e) Estão na interseção dos três conjuntos e no complementar de A.
- 19.** Sejam A, B e C três eventos em um espaço de probabilidade. Expresse os seguintes eventos em termos de A, B e C:
- a) Apenas A ocorre;
 - b) A e B ocorrem, mas C não ocorre;
 - c) Os três eventos ocorrem;
 - d) Pelo menos um dos três eventos ocorre;
 - e) Nenhum dos três eventos ocorre;
 - f) Exatamente um dos três eventos ocorre;
 - g) No máximo um dos três eventos ocorre;
 - h) Pelo menos dois dos três eventos ocorrem.
- 20.** Mostre que a interseção de duas sigma-álgebras é sempre uma sigma-álgebra. Pesquise se isto vale também para a união de duas sigma-álgebras.
- 21.** Para cada um dos seguintes experimentos, descreva um espaço de probabilidade que sirva de modelo:
- a) Seleciona-se um ponto, ao acaso, do quadrado $Q = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$.
 - b) Retiram-se cartas sucessivamente de um baralho de 52 cartas, ao acaso e com reposição, até retirar-se o primeiro rei. Registra-se o número total de retiradas.
 - c) Quinze bolas são retiradas, ao acaso e com reposição, de uma urna contendo 5 bolas vermelhas, 9 bolas pretas, e uma bola branca. Observa-se o número de vezes que ocorre cada cor
 - d) O experimento (c) é realizado sem reposição
 - e) Suponhamos que dez cartas estejam numeradas de 1 até 10. Das dez cartas, retira-se uma de cada vez, ao acaso e sem reposição, até retirar o primeiro número par. Conta-se o número de retiradas necessárias.
 - f) Retiram-se 4 cartas, ao acaso, de um baralho de 52 cartas. Registra-se o número de reis na amostra. Considere os casos em que:
 - i) As retiradas são feitas sem reposição.
 - ii) As retiradas são feitas com reposição.