CE084 - Probabilidades A

Exercícios da Unidade 3

Os exercícios foram extraídos de seções do livro:

Magalhães, MN. Noções de Probabilidade e Estatística, São Paulo: EDUSP, 2008.

1. A resistência (em toneladas) de vigas de concreto produzidas por uma empresa, comporta-se conforme a função de probabilidade abaixo:

Resistência	2	3	4	5	6
p_i	0.1	0.1	0.4	0.2	0.2

   Admita que essas vigas são aprovadas para uso em construções se suportarem pelo menos 3 toneladas. De um grande lote fabricado pela empresa, escolhemos 15 vigas ao acaso. Qual será a probabilidade de:

   (a) Todas serem aptas para construções?

   (b) No mínimo 13 serem aptas?

2. Sendo X uma variável segundo o modelo Uniforme Discreto, com valores no conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, pergunta-se:

   (a) $P(X \geq 7)$.

   (b) $P(3 < X \leq 7)$.

   (c) $P(X < 2 \textit{ ou } X \geq 8)$.

   (d) $P(X \geq 5 \textit{ ou } X \geq 8)$

   (e) $P(X > 3 \textit{ e } X < 6)$.

   (f) $P(X \leq 9 | X \geq 6)$.

3. Um usuário de transporte coletivo chega pontualmente às 8 horas para pegar o seu ônibus. Devido ao transito caótico, a demora pode ser qualquer tempo entre 1 e 20 minutos (admita que o relógio "pule" de minuto em minuto). Pergunta-se:

   (a) Qual a probabilidade de demorar mais de 10 minutos?

   (b) Qual a probabilidade de demorar pelo menos 5 mas não mais de 10 minutos?

   (c) Qual a probabilidade da demora não chegar a 5 minutos?

   (d) Se um amigo chegou 10 minutos atrasado e vai pegar o mesmo ônibus (que ainda não passou), qual a probabilidade do amigo atrasado esperar até 3 minutos?

4. Sendo X uma variável aleatória segundo o modelo Binomial com parâmetros $n = 15$ e $p = 0.4$; pergunta-se:

   (a) $P(X \geq 14)$.

   (b) $P(8 < X \leq 10)$.

   (c) $P(X < 2 \text{ } ou \text{ } X \geq 11)$.

   (d) $P(X \geq 11 \text{ } ou \text{ } X > 13)$.

   (e) $P(X > 3 \text{ } e \text{ } X < 6)$.

   (f) $P(X \leq 13 | X \geq 11)$.

5. Uma certa doença pode ser curada través de procedimento cirúrgico em 80% dos casos. Dentre os que têm essa doença, sorteamos 15 pacientes que serão submetidos à cirurgia. Fazendo alguma suposição adicional que julgar necessária, responda qual é a probabilidade de:

   (a) Todos serem curados?

   (b) Pelo menos dois não serem curados?

   (c) Ao menos 10 ficarem livres da doença?

6. Sendo $X \sim G(0.4)$ Calcule:

   (a) $P(X = 3)$.

   (b) $P(2 \leq X < 4)$.

   (c) $P(X > 1|X \leq 2)$.

   (d) $P(X \geq 1)$.

7. Uma moeda equilibrada é lançada sucessivamente, de modo indepedente, até que ocorra a primeira cara. Seja X a variável aleatória que conta o número de lançamentos anteriores à ocorrência de cara. Determine:

   (a) $P(X \leq 2)$.

   (b) $P(X > 1)$.

   (c) $P(3 < X \leq 5)$.

   (d) Quantas vezes deve, no mínimo, ser lançada a moeda para garantir a ocorrência de cara com pelo menos 0.8 de probabilidade.

8. A variável aleatória Y tem função de probabilidade Poisson com parâmetro $\lambda = 2$. Obtenha:

   (a) $P(Y < 2)$.

   (b) $P(2 \leq Y < 4)$.

   (c) $P(Y > 0)$.

   (d) $P(Y = 1|Y < 3)$.

9. A aplicação de fundo anticorrosivo em chapas de aço de 1 m^2 é feita mecanicamente e pode produzir defeitos (pequenas bolhas na pintura), de acordo com uma variável aleatória Poisson de parâmetro $\lambda = 1$ por m^2. Uma chapa é sorteada ao acaso para ser inspecionada, pergunta-se a probabilidade de:

   (a) Encontrarmos pelo menos 1 defeito.

   (b) No máximo 2 defeitos serem encontrados.

(c) Encontrarmos de 2 a 4 defeitos.

(d) Não mais de 1 defeito ser encontrado.

10. A variável H segue o modelo Hipergeométrico com parâmetros $n = 10$, $m = 5$ e $r = 4$. Determine:

(a) $P(H = 2)$.

(b) $P(H \leq 1)$.

(c) $P(H > 0)$.

11. Por engano 3 peças defeituosas foram misturadas com boas formandos um lote de 12 peças nos total. Escolhendo ao acaso 4 dessas peças, determine a probabilidade de encontrar:

(a) Pelo menos 2 defeituosas.

(b) No máximo 1 defeituosa.

(c) No mínimo 1 boa.

12. Um laboratório estuda a emissão de partículas de certo material radioativo. Seja: $N =$ número de partículas emitidas em 1 minuto. O laboratório admite que N tem função de probabilidade Poisson com parâmetro 5, isto é,

$$P(N = k) = \frac{e^{-5}5^k}{k!}, \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

(a) Calcule a probabilidade de que em um minuto não haja emissões de partículas.

(b) Determine a probabilidade de pelo menos uma partícula ser emitida em um minuto.

(c) Qual a probabilidade que, em um minuto, o número de partículas emitidas esteja entre 2 e 5 (inclusive)?

13. Uma vacina contra a gripe é eficiente em 70% dos casos. Sorteamos, ao acaso, 20 dos pacientes vacinados e pergunta-se a probabilidade de obter:

(a) Pelo menos 18 imunizados.

(b) No máximo 4 imunizados.

(c) Não mais do que 3 imunizados.

14. Uma indústria de tintas recebe pedidos de seus vendedores através de fax, telefone e Internet. O número de pedidos que chegam por qualquer meio (no horário comercial) é uma variável aleatória discreta com distribuição Poisson com taxa de 5 pedidos por hora.

    (a) Calcule a probabilidade de mais de 2 pedidos por hora.

    (b) Em um dia de trabalho (8 horas), qual seria a probabilidade de haver 50 pedidos?

    (c) Não haver nenhum pedido, em um dia de trabalho, é um evento raro?

15. Em um estudo sobre o crescimento de jacarés, uma pequena lagoa contém 4 exemplares de espécie A e 5 da espécie B. A evolução de peso e tamanho dos 9 jacarés da lagoa é acompanhada pelos pesquisadores através de capturas periódicas. Determine a probabilidade de, em três jacarés capturados de uma vez, obtemos:

    (a) Todos da espécie A.

    (b) Nem todos serem da espécie B.

    (c) A maioria ser da espécie A.

16. Sendo $X \sim U(0; 4)$, calcule:

    (a) $P(X > 2)$.

    (b) $P(X \geq 2)$.

    (c) $P(1 < X < 2)$.

    (d) $P(1 < X < 2 | X < 3)$.

    (e) $P(X < 3 | 1 < X < 2)$.

17. Admite-se que uma pane pode ocorrer em qualquer ponto de uma rede elétrica de 10km.

    (a) Qual é probabilidade da pane ocorrer nos primeiros 500 metros? E de ocorrer nos 3 quilômetros centrais da rede?

    (b) O custo de reparo da rede depende da distância do centro de serviço ao local da pane. Considere que o centro de serviço está na origem da rede e que o custo é de R$ 200 para distâncias até 3 quilômetros, de R$ 400 entre 3 e 8 e de R$ 1000 para as distâncias acima de 8 quilômetros. Qual é o custo médio do conserto?

18. O tempo necessário para um medicamento contra dor fazer efeito foi modelado de acordo com a densidade Uniforme no intervalo de 5 a 15 (em minutos), tendo por base experimentos conduzidos em animais. Um paciente, que esteja sofrendo dor, recebe o remédio e, supondo válido o modelo mencionado acima, pergunta-se a probabilidade da dor:

    (a) Cessar em até 10 minutos?

    (b) Demorar pelo menos 12 minutos?

    (c) Durar mais de 7 minutos, sabendo-se que durou menos de 10?

19. Suponha que o valor esperado de uma v.a. com distribuição Uniforme contínua é 1 e a variância = 1/12. Encontre a probabilidade da variável assumir valores menores que 3/4.

20. Sendo $X \sim Exp(1)$, determine:

    (a) $P(0 < X < 2)$.

    (b) $P(X < 2)$.

    (c) $P(1 < X < 4)$.

    (d) $P(X > 3)$.

    (e) $P(X < 2|X > 1)$.

21. Suponha que o tempo de vida T de um vírus exposto ao meio ambiente segue uma distribuição Exponencial com parâmetros $\lambda = 1/20$ s. Calcule a probabilidade condicional $P(T > 15|T > 10)$.

22. Seja $X \sim N(4, 1)$. Determine:

    (a) $P(X \leq 4)$.

    (b) $P(4 < X < 5)$.

    (c) $P(2 \leq X < 5)$.

    (d) $P(5 \leq X \leq 7)$.

    (e) $P(X \leq 1)$.

    (f) $P(0 \leq X \leq 2)$.

23. Um indivíduo vai participar de uma competição que consiste em responder questões que são lhe são apresentadas sequencialmente. Com o nível de conhecimento que possui, a chance de acertar uma questão escolhida ao acaso é de 75% . Neste contexto, para cada diferente situação apresentada a seguir, defina a variável aleatória, sua distribuição de probabilidades e calcule a probabilidade solicitada. Se preciso, faça suposições necessárias e adequadas em cada caso.

    (a) Se for responder até errar uma pergunta, qual a probabilidade de conseguir acertar quatro ou mais questões?

    (b) Se for responder cinco perguntas, qual a probabilidade de acertar quatro ou mais?

    (c) Se for responder até acertar a terceira pergunta, qual a probabilidade de errar apenas uma?

    (d) Se o candidato selecionar aleatoriamente seis questões de um banco de 40 questões das quais o candidato sabe a resposta de 30 delas (75%), qual a probabilidade de acertar ao menos cinco delas.

    Ainda neste contexto considere que o candidato responde, em média, 1,8 questões por minuto.

    (e) Qual a probabilidade de conseguir responder ao menos três questões em três minutos?

    (f) Qual a probabilidade de que o tempo para resposta de uma questão seja superior a 40 segundos?

24. A durabilidade de um tipo de filtro é descrita por uma variável aleatória com distribuição normal de média 60.000 hrs de funcionamento e desvio padrão de 9.000 hrs.

    (a) Se o fabricante garante a duração dos filtros pelas primeiras 47.500 hrs, qual a proporção de filtros que devem ser trocados pela garantia?

    (b) O que aconteceria com a proporção do item anterior se a garantia fosse para as primeiras 45.000 hrs?

    (c) Qual deveria ser a garantia (em hrs) de forma a assegurar que o fabricante trocaria sob garantia no máximo 4% dos filtros?

(d) Se uma indústria comprar cinco (5) filtros, qual será a probabilidade de utilizar a garantia (de 45.000 hrs) para trocar ao menos um (1) dos filtros?.

25. Na comunicação entre servidores, uma mensagem é dividida em n pacotes, os quais são enviados na forma de códigos. Pelo histórico da rede sabe-se que cada pacote tem uma probabilidade de 0,01 de não chegar corretamente a seu destino, e além disto, assume-se que o fato de um pacote chegar ou não corretamente ao destino não altera a probabilidade de chegada correta de outros pacotes. Um programa corretivo, garante o envio correto da mensagem quando o número de pacotes enviados erroneamente não passar de 10% do total de pacotes da mensagem.

    (a) Qual a probabilidade de uma mensagem composta de 20 pacotes ser enviada corretamente?

    (b) E para uma mensagem de 200 pacotes?

26. Em um laticínio, a temperatura ideal do pasteurizador deve ser de 75°C. Se a temperatura ficar inferior a 70°C, o leite poderá ficar com bactérias indesejáveis ao organismo humano. Observações do processo mostram que na forma de operação atual os valores da temperatura seguem uma distribuição normal com média de 74.2°C e desvio padrão de 2.2°C.

    (a) Qual a probabilidade da temperatura ficar inferior a 70°C?

    (b) Qual a probabilidade da temperatura ultrapassar os 75°C desejados?

    (c) Qual a probabilidade de que em 20 pasteurização, alguma(s) dela(s) não atinja a temperatura de 70°C?

    (d) Deseja-se regular equipamentos para alterar a temperatura média do processo para que a probabilidade de ficar inferior a 70°C seja de no máximo 0,0005. Qual deveria ser a nova média de operação?

    (e) Suponha agora que a nova média de operação seja de 74.5°C. Deseja-se então alterar o desvio padrão para satisfazer as condições do ítem anterior. Qual deve ser o novo desvio padrão de operação?

27. Seja X uma variável aleatória com média 4 e variância 2. Use a desigualdade de Chebyshev para obter um limite superior para as seguintes probabilidades:

    (a) $P[\ |X-4| \geq 3]$;

    (b) $P[\ |X-4| \geq 1]$.

28. Suponha que uma moeda honesta seja lançada 100 vezes. Encontre um limite para a probabilidade de que o número de caras seja pelo menos 60 ou no máximo 40.

29. Às vezes esqueço alguns itens quando saio de casa pela manhã, por exemplo:

    - X_1 = meia esquerda, com probabilidade 0,2;
    - X_2 = meia direita, com probabilidade 0,1;
    - X_3 = sapato esquerdo, com probabilidade 0,1;
    - X_4 = sapato direito, com probabilidade 0,3.

    Supondo que eu esqueça os itens de forma independente, use a desigualdade de Chebyshev para limitar superiormente a probabilidade de que eu esqueça 2 ou mais itens.

30. Suponha que os correios processam, em média, 10000 cartas/dia, com variância de 2000.

    (a) O que pode ser dito sobre a probabilidade de que os correios processe entre 8000 e 12000 cartas amanhã?

    (b) Como podemos limitar a probabilidade de processar pelo menos 15000 cartas amanhã?

31. Suponha que o número de itens produzidos em uma fábrica durante uma semana é uma variável aleatória com média de 50 e variância 25. O que se pode dizer sobre a probabilidade de que a produção desta semana esteja entre 40 e 60?

32. Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ duas funções de probabilidade. A divergência de Kullback-Leibler de Q dado P, indicada como

$$D_{KL}(P||Q) = \sum_x P(x) log \frac{P(x)}{Q(x)},$$

refere-se à medida da informação perdida quando Q é usada para aproximar o valor de P. Utilize a Desigualdade de Jensen para mostrar

$$D_{KL}(P||Q) \geq 0$$

Respostas

1. Inicialmente, vamos encontrar a probabilidade das vigas serem aprovadas para uso em construções. Para tanto, seja Y = resistência da viga. Então,

$$\begin{aligned} p_* &= P(Y \geq 3) \\ &= 1 - P(Y < 3) \\ &= 1 - P(Y = 2) \\ &= 1 - 0.1 \\ &= 0.9 \end{aligned}$$

Agora, considere X = número de vigas aptas para construções dentre as $n = 15$. Assim, $X \sim b(15, p_*)$, com $x \in \{0, 1, 2, \cdots, 15\}$.

(a)

$$P(X = 15) = \binom{15}{15} \cdot p_*^{15} \cdot (1 - p_*)^{15-15} = 0.206$$

(b)

$$P(X \geq 13) = P(X = 13) + P(X = 14) + P(X = 15) = 0.816.$$

2. (a)

$$\begin{aligned} P(X \geq 7) &= P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) \\ &= \frac{4}{10}. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(3 < X \leq 7) &= P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) \\ &= \frac{4}{10}. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} P(X < 2 \text{ ou } X \geq 8) &= P(X < 2) + P(X \geq 8) \\ &= P(X = 1) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) \\ &= 0.4. \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} P(X \geq 5 \text{ ou } X \geq 8) &= P(X \geq 5) \\ &= \frac{6}{10}. \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} P(X > 3 \text{ e } X < 6) &= P(3 < X < 6) \\ &= P(X = 4) + P(X = 5) \\ &= \frac{2}{10}. \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} P(X \leq 9 | X \geq 6) &= \frac{P(6 \leq X \leq 9)}{P(X \geq 6)} \\ &= \frac{P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9)}{P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)} \\ &= \frac{4/10}{5/10} \\ &= 0.8. \end{aligned}$$

3. Seja D a variável aleatória que indica a demora em pegar o ônibus. Então,

$$D \sim U_D(1, 20)$$

$$P(D = d) = \frac{1}{20}, \quad \text{com} \quad d \in \{0, 1, 2, \cdots, 20\}$$

(a)

$$\begin{aligned} P(D > 10) &= P(D = 11) + P(D = 12) + \cdots + P(D = 20) \\ &= \frac{10}{20}. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(5 \leq D \leq 10) &= P(D = 5) + P(D = 6) + \ldots + P(D = 10) \\ &= \frac{6}{20}. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} P(D < 5) &= P(D = 1) + \cdots + P(D = 4) \\ &= \frac{4}{20}. \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} P(D \leq 13 | D > 10) &= \frac{P(10 < D \leq 13)}{P(D > 10)} \\ &= \frac{3/20}{10/20}. \end{aligned}$$

4. Seja $X \sim b(15, 0.4)$, então:

$$P(X = x) = \binom{15}{x} \cdot 0.4^x \cdot 0.6^{15-x}, \quad \text{para} \quad x = 0, 1, 2, \cdots, 15.$$

(a)

$$\begin{aligned} P(X \geq 14) &= P(X = 14) + P(X = 15) \\ &= 0. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(8 < X \leq 10) &= P(X = 9) + P(X = 10) \\ &= 0.086. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} P(X < 2 \text{ ou } X \geq 11) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 11) + \cdots + P(X = 15) \\ &= 0.015. \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} P(X \geq 11 \text{ ou } X > 13) &= P(X \geq 11) = P(X = 11) + \cdots + P(X = 15) \\ &= 0.009. \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}P(X > 3 \text{ e } X < 6) &= P(3 < X < 6) = P(X = 4) + P(X = 5) \\ &= 0.313.\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}P(X \leq 13 | X \geq 11) &= \frac{P(11 \leq X \leq 13)}{P(X \geq 11)} \\ &= \frac{P(X = 11) + P(X = 12) + P(X = 13)}{P(X = 11) + P(X = 12) + \ldots + P(X = 15)} \\ &= 0.9968.\end{aligned}$$

5. Suposição: os indivíduos submetidos à cirurgia são (ou não) curados independentemente uns dos outros com probabilidade de cura constante e igual a 0.80. Assim D = número de curados dentre os 15 pacientes é Binomial $(n = 15; p = 0.8)$

   (a)

$$\begin{aligned}P(X = 15) &= \binom{15}{15} \cdot 0.8^{15} \cdot 0.2^{15-15} \\ &= 0.035.\end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned}P(X \leq 13) &= 1 - P(X > 13) \\ &= 1 - [P(X = 14) + P(X = 15)] \\ &= 0.833.\end{aligned}$$

   (c)

$$\begin{aligned}P(X \geq 10) &= P(X = 10) + \cdots + P(X = 15) \\ &= 0.939.\end{aligned}$$

6. Uma variável aleatória com distribuição **Geométrica** pode ser definida de duas maneiras. É importante saber desta possibilidade, para poder usar corretamente cada material. A primeira delas é:

$$X = \text{número de } \textbf{fracassos} \text{ até o primeiro sucesso.}$$

$$P[X = x] = (1-p)^x p, \quad x \in \{0, 1, 2 \cdots\}$$

A segunda é (para evitar confusão, vamos denotar agora a v.a. por outra letra):

$$Y = \text{número total de } \textbf{tentativas} \text{ até o primeiro sucesso.}$$

$$P[Y = y] = (1-p)^{y-1} p, \quad y \in \{1, 2, \cdots\}$$

Considerando $X \sim G(0.4)$, definida como nº de **fracassos** até o primeiro sucesso, temos:

(a)

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= 0.4 \cdot 0.6^3 \\ &= 0.0864. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(2 \leq X < 4) &= P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= 0.23. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} P(X > 1 | X \leq 2) &= \frac{P(1 < X \leq 2)}{P(X \leq 2)} \\ &= \frac{P(X = 2)}{P(X \leq 2)} \\ &= 0.184. \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) \\ &= 0.6. \end{aligned}$$

7. Seja X a v.a. que conta o número de lançamentos anteriores à ocorrência de cara.

$$X \sim G(0.5)$$

$$P[X = x] = (1-p)^x \cdot p, \quad x = \{0, 1, \cdots\}$$

(a)

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= 0.5 \cdot 0.5^0 + 0.5 \cdot 0.5^1 + 0.5 \cdot 0.5^2 \\ &= 0.875. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] \\ &= 0.25. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} P(3 < X \leq 5) &= P(X = 4) + P(X = 5) \\ &= 0.047. \end{aligned}$$

(d) Seja $L =$ número total de lançamentos até ocorrência de cara.

l	1	2	3	4	$\cdots$
x	0	1	2	3	$\cdots$
p_x	0.5	0.25	0.13	0.06	$\cdots$

Para obter o número mínimo de lançamentos da moeda a fim de garantir a ocorrência de cara com no mínimo 0.8 de probabilidade, precisamos obter $l = x + 1$ tal que $P(X \leq x) \geq 0.80$. Temos que

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= P(X = 0) + P(X = 1) \\ &= 0.75 \leq 0.8 \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= 0.875. \end{aligned}$$

Logo o número de lançamentos mínimos necessários é $l = x + 1 = 3$.

8. A v.a. Y tem função de probabilidade Poisson com parâmetro $\lambda = 2$. Ou seja:

$$Y \sim Po(2)$$
$$P(Y = y) = \frac{e^{\lambda}\lambda^{y}}{y!} = \frac{e^{2} \cdot 2^{y}}{y!}$$

(a)

$$\begin{aligned} P(Y < 2) &= P(Y = 0) + P(Y = 1) \\ &= \frac{e^{-2} \cdot 2^{0}}{0!} + \frac{e^{-2} \cdot 2^{1}}{1!} \\ &= 0.406. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(2 \leq Y < 4) &= P(Y = 2) + P(Y = 3) \\ &= 0.451. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} P(Y > 0) &= 1 - P(Y \leq 0) = 1 - P(Y = 0) \\ &= 0.865. \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} P(Y=1|Y<3) &= \frac{P(Y=1)}{P(Y<3)} \\ &= 0.4. \end{aligned}$$

9. A v.a. Y tem função de probabilidade Poisson com parâmetro $\lambda = 1$ por m^2. Ou seja:

$$Y \sim Po(1)$$

$$P(Y=y) = \frac{e^{-1}1^y}{y!}$$

(a)

$$\begin{aligned} P(\geq 1) &= 1 - P(Y<1) = 1 - P(Y=0) \\ &= 1 - \frac{e^1 \cdot 1^0}{0!} \\ &= 0.632. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(Y \leq 2) &= P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) \\ &= 0.92. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} P(2 \leq Y \leq 4) &= P(Y=2) + P(Y=3) + P(Y=4) \\ &= 0.261. \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} P(Y \leq 1) &= P(Y=0) + P(Y=1) \\ &= 0.736. \end{aligned}$$

10. A variável H segue o modelo Hipergeométrico com parâmetros $m = 5$, $n = 5$ e $r = 4$. Então:

$$H \sim HG(m = 5, n = 5, r = 4),$$

$$h = \{max(0, 4 - 5), \cdots, min(4, 5)\} = \{0, \cdots, 4\}.$$

$$P(H = h) = \frac{\binom{m}{h}\binom{n}{r-h}}{\binom{m+n}{r}} = \frac{\binom{5}{h}\binom{5}{4-h}}{\binom{5+5}{4}}$$

(a)

$$\begin{aligned} P(H = 2) &= \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{4-2}}{\binom{5+5}{4}} \\ &= 0.476. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(H \leq 1) &= P(H = 0) + P(H = 1) \\ &= 0.262. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} P(H > 0) &= 1 - P(H = 0) \\ &= 0.976. \end{aligned}$$

11. Pelos dados do enunciado temos uma típica situação onde o modelo Hipergeométrico é aplicável, com $n = 12$, $m = 3$ e $r = 4$. Seja $D =$ número de peças defeituosas dentre as 4.

$$D \sim HG(n = 9, m = 3, r = 4), \quad d = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$P(D = d) = \frac{\binom{m}{d}\binom{n}{r-d}}{\binom{m+n}{r}} = \frac{\binom{3}{d}\binom{9}{4-d}}{\binom{9+3}{4}}$$

(a)

$$\begin{aligned} P(D \geq 2) &= 1 - P(D < 2) \\ &= 1 - [P(D = 0) + P(D = 1)] \\ &= 1 - \frac{\binom{3}{0}\binom{9}{4-0}}{\binom{9+3}{4}} - \frac{\binom{3}{1}\binom{9}{4-1}}{\binom{9+3}{4}} \\ &= 0.236. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(D \leq 1) &= P(D = 0) + P(D = 1) \\ &= 0.764. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} P(\text{No mínimo 1 boa}) &= P(D \leq 3) \\ &= 1. \end{aligned}$$

12. Seja: N = número de partículas emitidas em 1 minuto. O laboratório admite que N tem função de probabilidade Poisson com parâmetro 5, isto é,

$$P(N = k) = \frac{e^{-5}5^k}{k!}, \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

(a)

$$\begin{aligned} P(N = 0) &= \frac{e^{-5}5^0}{0!} \\ &= 0.007. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(N \geq 1) &= 1 - P(N = 0) \\ &= 0.993. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} P(2 \leq N \leq 5) &= P(N = 2) + P(N = 3) + P(N = 4) + P(N = 5) \\ &= 0.576. \end{aligned}$$

13. Seja Y = número de pacientes imunizados dentre 20 pacientes vacinados.

$$Y \sim b(n = 20, p = 0.7)$$

$$P(Y = y) = \binom{20}{y} \cdot 0.7^y \cdot 0.3^{20-y}, \quad y = \{0, 1, \cdots, 20\}$$

(a)

$$\begin{aligned} P(Y \geq 18) &= P(Y=18)+P(Y=19)+P(Y=20) \\ &= 0.0355. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(Y \leq 4) &= P(Y=0)+\cdots+P(Y=4) \\ &= 5.55 \times 10^{-6}. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} P(Y \leq 3) &= P(Y=0)+\cdots+P(Y=3) \\ &= 5.43 \times 10^{-7}. \end{aligned}$$

14. O número de pedidos que chegam por qualquer meio (no horário comercial) é uma variável aleatória discreta com distribuição Poisson com taxa de 5 pedidos por hora.

$$Y \sim Po(5)$$

$$P(Y=y)=\frac{e^{-5}5^{y}}{y!}, \quad y=\{0,1,2,\cdots\}$$

(a)

$$\begin{aligned} P(Y>2) &= 1-P(Y\leq 2) \\ &= 1-[P(Y=0)+P(Y=1)+P(Y=2)] \\ &= 0.875. \end{aligned}$$

(b) $\lambda = 5 \cdot 8 = 40$

$$P(Y=50)=\frac{e^{-40}40^{50}}{50!}=0.018$$

(c) $\lambda = 40$

$$P(Y=0)=\frac{e^{-40}40^{0}}{0!}=0.$$

15. Seja X = número de jacarés da espécie A.

$$X \sim HG(m=4, n=5, r=3)$$

$$P(X=x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{5}{3-x}}{\binom{5+4}{3}}, \quad \text{para } x = 0, 1, 2, 3.$$

(a)

$$\begin{aligned} P(X=3) &= \frac{\binom{4}{3}\binom{5}{3-3}}{\binom{5+4}{3}} \\ &= 0.048. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(X>0) &= 1 - P(X=0) \\ &= 1 - \frac{\binom{4}{3}\binom{5}{3-0}}{\binom{9}{3}} \\ &= 0.881. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= P(X=2) + P(X=3) \\ &= \frac{\binom{4}{2}\binom{5}{3-2} + \binom{4}{3}\binom{5}{3-3}}{\binom{9}{3}} \\ &= 0.405. \end{aligned}$$

16. (a)

$$\begin{aligned} P(X>2) &= \int_2^4 f_x dx \\ &= \frac{1}{4}(4-2) = 1/2. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= P(X>2) \\ &= 1/2. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} P(1 < X < 2) &= \int_1^2 f_x dx \\ &= \frac{1}{4}(2-1) = 1/4. \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} P(1 < X < 2 | X < 3) &= \frac{P(1 < X < 2)}{P(X < 3)} \\ &= \frac{1/4}{\int_0^3 f_x dx} \\ &= \frac{1/4}{3/4} = 1/3. \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} P(X < 3 | 1 < X < 2) &= \frac{P(1 < X < 2)}{P(1 < X < 2)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

17. Admite-se que uma pane pode ocorrer em qualquer ponto de uma rede elétrica de 10km.

$$X \sim U(0, 10)$$

$$f(x) = \frac{1}{10}, \quad 0 \leq x \leq 10$$

(a)

$$P(X < 0.5) = \int_0^{0.5} \frac{1}{10} dx = \frac{0.5}{10}.$$

$$P(3.5 \leq X \leq 6.5) = \int_3^6 \frac{1}{10} dx = \frac{3}{10}.$$

(b) Seja C = custo de reparo.

C	200	400	1000
p_c	p_1	p_2	p_3

$$
\begin{aligned}
p_1 &= P(C=200) &= P(X \leq 3) &= \int_0^3 \frac{1}{10}dx &= \frac{3}{10}. \\
p_2 &= P(C=400) &= P(3 \leq X \leq 8) &= \int_3^8 \frac{1}{10}dx &= \frac{5}{10}. \\
p_3 &= P(C=1000) &= P(X > 8) &= \int_8^1 0\frac{1}{10}dx &= \frac{2}{10}.
\end{aligned}
$$

$$E(C) = 200 \cdot p_1 + 400 \cdot p_2 + 1000 \cdot p_3 = 460.$$

18. Seja $T =$ tempo até o medicamento fazer efeito.

$$T \sim U(5, 15)$$

$$f(t) = \frac{1}{15-5}, \quad 5 \leq t \leq 15.$$

(a)

$$
\begin{aligned}
P(T \leq 10) &= \int_5^{10} f_t \; dt \\
&= \int_5^{10} \frac{1}{10} \; dt \\
&= 5/10.
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
P(T > 12) &= \int_{12}^{15} \frac{1}{10} \; dt \\
&= 3/10.
\end{aligned}
$$

(c)

$$\begin{aligned} P(T > 7 | T < 10) &= \frac{P(7 < T < 10)}{P(T < 10)} \\ &= \frac{\int_7^{10} 1/10 \; dt}{\int_5^{10} 1/10 \; dt} \\ &= \frac{3/10}{5/10} \\ &= 3/5. \end{aligned}$$

19.

$$\begin{aligned} X &\sim U(a, b) \\ E(X) &= \frac{a+b}{2} = 1 \\ Var(X) &= \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Assim, temos $(2 - 2a)^2 = 1 \rightarrow (4a^2 - 8a + 3) = 0$. Resolvendo esta equação temos que $a = 0.5$ e $b = 1.5$ ou $a = 1.5$ e $b = 0.5$. Como $(a < b)$ então a solução é $X \sim U(0.5, 1.5)$.

$$P(X < 3/4) = \int_{0.5}^{0.75} \frac{1}{1.5 - 0.5} \; dx = 0.25$$

20. (a)

$$\begin{aligned} P(0 < X < 2) &= \int_0^2 e^{-x} \; dx \\ &= -e^{-2} + e^0 \\ &= 0.865. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(X < 2) &= \int_0^2 e^{-x} \; dx \\ &= -e^{-2} + 1 \\ &= 0.865. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} P(1 < X < 4) &= \int_1^4 e^{-x} dx \\ &= -e^{-4} + e^{-1} \\ &= 0.35. \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} P(X > 3) &= 1 - P(X \leq 3) \\ &= 0.05. \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} P(X < 2|X > 1) &= \frac{P(1 < X < 2)}{P(X > 1)} \\ &= 0.632. \end{aligned}$$

21. Seja $T =$ tempo de vida de um vírus exposto ao meio ambiente.

$$T \sim Exp(1/20)$$

$$f(t) = \frac{1}{20} \cdot e^{-\left(\frac{1}{20}\right)t}, \quad t \geq 0$$

$$\begin{aligned} P(T > 15|T > 10) &= \frac{P(T > 15)}{P(T > 10)} \\ &= \frac{\int_{15}^{\infty} \frac{1}{20} \cdot e^{-\left(\frac{1}{20}\right)t}\ dt}{\int_{10}^{\infty} \frac{1}{20} \cdot e^{-\left(\frac{1}{20}\right)t}\ dt} \\ &= \frac{0.472}{0.607} \\ &= 0.779 \end{aligned}$$

22.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

(a)

$$\begin{aligned} P(X \leq 4) &= \int_{-\infty}^{4} f(x)dx \\ &= 0.5. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(4 < X < 5) &= P(X < 5) - P(X < 4) \\ &= 0.341. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} P(2 \leq X < 5) &= P(X < 5) - P(X < 2) \\ &= 0.819. \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} P(5 \leq X \leq 7) &= P(X < 7) - P(X < 5) \\ &= 0.157. \end{aligned}$$

(e)

$$P(X \leq 1) = 0.001.$$

(f)

$$P(0 \leq X \leq 2) = 0.023.$$

23. (a) Seja X = número de acertos até o primeiro erro.

$$X \sim \mathrm{G}(0.25)$$

$$\begin{aligned} P[X \geq 4] &= 1 - P[X \leq 3] \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{3} (1 - 0.25)^i (0.25) \\ &= 0.316. \end{aligned}$$

(b) Seja X = número de acertos em cinco perguntas.

$$X \sim \mathrm{b}(\mathrm{n}=5, \mathrm{p}=0.75)$$

$$\begin{aligned}
P[X \geq 4] &= P[X=4]+P[X=5] \\
&= \sum_{i=4}^{5} \binom{5}{i} 0.75^{i}(1-0.75)^{5-i} \\
&= 0.633.
\end{aligned}$$

(c) Seja X = número de erros até o terceiro acerto.

$$X \sim \mathrm{BN}(\mathrm{r}=3, \mathrm{p}=0.75)$$

$$\begin{aligned}
P[X=1] &= \binom{3+1-1}{3-1} 0,75^{3}(1-0.75)^{1} \\
&= 0.316.
\end{aligned}$$

(d) Seja X = número de acertos nas seis questões selecionadas.

$$X \sim \mathrm{HG}(30, 10, 6)$$

$$\begin{aligned}
P[X \geq 5] &= P[X=5]+P[X=6] \\
&= \sum_{i=5}^{6} \frac{\binom{30}{i}\binom{10}{6-i}}{\binom{40}{6}} \\
&= 0.526.
\end{aligned}$$

(e) Seja X = número de questões respondidas em 3 minutos.

$$X \sim \mathrm{Po}(3 \cdot 1.8 = 5.4)$$

$$\begin{aligned}
P[X \geq 3] &= 1 - P[X \leq 2] \\
&= 1 - \sum_{i=0}^{2} \frac{\mathrm{e}^{-5.4} 5.4^{\mathrm{i}}}{i!} \\
&= 0.905.
\end{aligned}$$

(f) Seja X = tempo (em min.) para responder uma questão.

$$\begin{aligned} X &\sim \text{Exp}(\lambda = 1.8) \\ P[X \geq 40/60] &= \int_{40/60}^{\infty} 1.8\mathrm{e}^{-1.8\mathrm{x}}\mathrm{dx} \\ &= 0.301. \end{aligned}$$

24.

$$X \sim N(60.000, 9.000^2)$$

(a)

$$\begin{aligned} P[X < 47500] &= P\left[Z < \frac{47500 - 60000}{9000}\right] \\ &= P\left[Z < -1.389\right] \\ &= 0.082. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P[X < 45000] &= P\left[Z < \frac{45000 - 60000}{9000}\right] \\ &= P\left[Z < -1.667\right] \\ &= 0.048. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} P[X < t] &= 0,04 \ \ ; \ \ t =? \\ P\left[Z < \frac{t - 60000}{9000}\right] &= 0,04 \\ z &= -1.751 \\ \frac{t - 60000}{9000} &= -1.751 \\ t &= 60000 + 9000(-1.751) \\ &= 4.4243825 \times 10^4. \end{aligned}$$

(d) Seja Y = número de filtros trocados sob garantia dentre 5 comprados.

$$Y \sim b\,(n = 5, p = P[X < 45000] = 0.048)$$

$$\begin{aligned} P[Y \geq 1] &= 1 - P[Y = 0] \\ &= 0.217 \end{aligned}$$

25. (a) Seja X = número de pacotes incorretos em 20 pacotes.

$$X \sim b(\ n = 20, p = 0.01\ )$$

$$\text{Limite} \ : \ 10\% \text{ de } 20 \text{ pacotes} = 2 \text{ pacotes}$$

$$\begin{aligned} P[X \leq 2] &= P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2] \\ &= \sum_0^2 \binom{20}{x} (0.01)^x (1 - 0.01)^{20-x} \\ &= 0.999 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} X &\sim b(n = 200, p = 0.01) \\ &\approx N\left[\mu = n \cdot p = 2\ ,\ \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p) = 1.98\right] \end{aligned}$$

A aproximação normal não é muito acurada pois $np < 5$, porém conveniente

$$\begin{aligned} P[X \leq 20] &= P[X = 0] + P[X = 1] + \ldots + P[X = 20] \\ &= \sum_0^{20} \binom{200}{x} (0.01)^x (1 - 0.01)^{200-x} \\ &\approx P[X_N < 20.5] \\ &= P\left[Z < \frac{20.5 - 2}{\sqrt{1.98}}\right] \\ &\approx 1 \end{aligned}$$

26. Seja X = temperatura do pasteurizador.

$$X \sim N(74.2; 2.2^2)$$

(a)

$$P[X < 70] = P\left[Z < \frac{70 - 74.2}{2.2}\right] = 0.0281.$$

(b)

$$P[X > 75] = P\left[Z < \frac{75 - 74.2}{2.2}\right] = 0.3581.$$

(c) Seja Y = número de pasteurizações que não atingem $70°C$.

$$\begin{aligned} Y &\sim b(20, p) \\ p &= P[X < 70] = 0.0281 \\ P[Y \geq 1] &= 1 - P[Y = 0] = 0.435. \end{aligned}$$

(d) Note que

$$\begin{aligned} P[X < 70|\mu_0] = 0.0005 \\ z_{0.0005} = (x - \mu_0)/\sigma \\ -3.291 = (70 - \mu_0)/2.2 \\ \mu_0 = 70 - 2.2(-3.291) = 77.26 \end{aligned}$$

(e) Note que

$$\begin{aligned} P[X < 70|\sigma_0] = 0.0005 \\ z_{0.0005} = (x - 74.2)/\sigma_0 \\ -3.291 = (70 - 74.2)/\sigma_0 \\ \sigma_0 = (70 - 74.2)/(-3.291) = 1.28 \end{aligned}$$

27. (a) $P\,[\ |X - 4| \geq 3] \leq \dfrac{2}{3^2} \approx 0,22.$

(b) $P[\ |X-4| \geq 1] \leq \dfrac{2}{1^2} = 2$

(Note que essa desigualdade é uma aproximação, e às vezes não muito informativa!).

28. Seja X o número de vezes que a moeda cai em cara. Sabemos que X tem uma distribuição binomial com média 50 e variância $100 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 25$. Por Chebyshev, temos:

$$\begin{aligned} P(X < 40 \cup X > 60) &= P(|X-\mu| \geq 10) \leq \frac{25}{10^2} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Obs.: a probabilidade real desse evento acontecer é de cerca de 5%.

29. Seja $X_1 = 1$ quando eu esquecer minha meia esquerda e 0 caso contrário. Da mesma forma, $X_2 = 1$ quando eu esquecer minha meia direita, $X_3 = 1$ quando eu esquecer meu sapato esquerdo e $X_4 = 1$ quando eu esquecer meu sapato direito. Assim, $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.

$$\begin{aligned} E[X] &= E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] + E[X_4] \\ &= 0.2 + 0.1 + 0.1 + 0.3 \\ &= 0.7. \end{aligned}$$

Sabendo que $E(X_i^2) = E(X_i),\ \forall i = 1:4$, temos:

- $Var(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2 = 0.2 - 0.2^2 = 0.16$;
- $Var(X_2) = E(X_2^2) - E(X_2)^2 = 0.1 - 0.1^2 = 0.09$;
- $Var(X_3) = E(X_3^2) - E(X_3)^2 = 0.1 - 0.1^2 = 0.09$;
- $Var(X_4) = E(X_4^2) - E(X_4)^2 = 0.3 - 0.3^2 = 0.21$.

Então, $Var(X) = Var[X_1] + Var[X_2] + Var[X_3] + Var[X_4] = 0.55$.

$$\begin{aligned} P\left(|X - E[X]| \geq k\right) &\leq \frac{Var(X)}{k^2} \\ P\left(|X - 0.7| \geq k\right) &\leq \frac{0.55}{k^2} \end{aligned}$$

Considerando $k = 1.3$, temos:

$$P\left(|X - 0.7| \geq 1.3\right) = P(X \geq 2) \quad \leq \quad \frac{0.55}{1.3^2} = 0.3254.$$

30. (a)

$$\begin{aligned} P(8000 < X < 12000) &= P(-2000 < X - 1000 < 2000) \\ &= P(|X - 10000| < 2000) \end{aligned}$$

Por Chebyshev, temos:

$$P(|X - 10000| \geq 2000) \leq \frac{2000}{2000^2} = \frac{1}{2000}.$$

Então,

$$\begin{aligned} P(8000 < X < 12000) &= 1 - P(|X - 10000| \geq 2000) \\ &= 0.9995 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(X \geq 15000) &= P(X - 10000 \geq 5000) \\ &\leq P(X - 10000 \geq 5000 \ \text{ e } \ X - 10000 \leq -5000) \\ &= P(|X - 10000| \geq 5000) \quad \text{(por Chebyshev)} \\ &\leq \frac{2000}{5000^2} \\ &= \frac{1}{12500} \end{aligned}$$

31. Por Chebyshev:

$$P(|X - 50| \geq 10) \leq \frac{25}{10^2} = \frac{1}{4}$$

Então,

$$P(|X - 50| < 10) \geq 1 - P(|X - 50| \geq 10) = \frac{3}{4}$$

32.

$$
\begin{aligned}
-D_{KL}(P||Q) &= -\sum_x P(x) log \frac{P(x)}{Q(x)} \\
&= E_P\left[log \frac{Q(x)}{P(x)}\right] \qquad \text{(pela Desigualdade de Jensen)} \\
&\leq log\left(E_P\left[\frac{Q(x)}{P(x)}\right]\right) \\
&= log\left(\sum_x P(x) log \frac{Q(x)}{P(x)}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$