



LISTA 2 – CE304 TEORIA DA PROBABILIDADE 1

Prof. Benito Olivares Aguilera

2024/1

Cálculo de Probabilidades e propriedades

1. Um dado honesto é lançado duas vezes e as faces resultantes observadas.

Considere os eventos:

A = “a soma dos resultados é ímpar”;

B = “o resultado do primeiro lançamento é ímpar”;

C = “o produto dos resultados é ímpar”.

Calcule as probabilidades desses eventos definindo um espaço de probabilidade a partir de:

i) $\Omega_1 = \{(\omega_i, \omega_j) / 1 \leq \omega_i \leq 6, i, j = 1, 2, \dots, 6\}$

ii) $\Omega_2 = \{(p, p), (p, i), (i, p), (i, i)\}$, onde p e i denotam a ocorrência de face par e ímpar, respectivamente.

Comente sobre as vantagens de utilizar um ou outro espaço amostral.

2. Considere $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ um espaço amostral. Verifique que a função dada por:

$$f(\omega) = \frac{|\omega - 3|}{9}, \forall \omega \in \Omega$$

e é aditiva para a união de conjuntos disjuntos, é uma probabilidade na sigma-álgebra das partes de Ω . Se considerarmos esse espaço de probabilidade como modelo para o lançamento de um dado, podemos afirmar que tanto faz apostar nos ímpares ou nos pares?

3. Sejam A_1, A_2, \dots eventos aleatórios. A partir dos Axiomas de Kolmogorov mostre que

a) $P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) \geq 1 - \sum_{k=1}^n P(A_k^c).$

b) Se $P(A_k) \geq 1 - \varepsilon$, para $k=1, 2, \dots, n$, então $P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) \geq 1 - n\varepsilon.$

c) $P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) \geq 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k^c).$

4. Sejam A, B e C eventos aleatórios num mesmo espaço de probabilidade. Mostre formalmente que

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$

b) $P(A^c \cup B) = P(A \cap B) - P(A) + 1.$

c) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$

5. Considere dois eventos A e B mutuamente exclusivos, com $P(A) = 0,3$ e $P(B) = 0,5$.
Calcule:
- $P(A \cap B)$.
 - $P(A \cup B)$.
 - $P(A/B)$.
 - $P(A^c \cap B^c)$.
6. Um dado é tal que a probabilidade de cada ponto é proporcional ao valor do ponto. Se você ganha 10 reais se sair um número par e perde 10 reais se sair ímpar, seria um jogo justo utilizando esse dado? Com quais valores de prêmio você aceitaria jogar com esse dado?
7. (Problema de Gombauld-Pascal) O que é mais provável: a) obter pelo menos um “6” jogando um dado 4 vezes ou b) obter um par de “6” pelo menos uma vez jogando dois dados simultaneamente 24 vezes?
8. Uma universidade tem 8 mil alunos dos quais 2 mil são considerados esportistas. Temos, ainda, que 400 alunos são do curso de Economia diurno, 550 da Economia noturno, 250 são esportistas e da Economia diurno e 150 são esportistas e da Economia noturno. Um aluno é escolhido, ao acaso, e pergunta-se a probabilidade de:
- Ser esportista.
 - Não ser da Economia.
 - Ser esportista ou aluno da Economia.
 - Não ser esportista, nem aluno da Economia.
 - Sabendo que o aluno escolhido não é esportista, qual a probabilidade de não ser aluno da Economia?
9. Um candidato a motorista treina na autoescola e acredita que passa no exame com probabilidade 0,7. Se não passar, fará mais treinamento, o que ele estima que lhe aumentará em 10% a probabilidade de passar, isto é, no segundo exame passará com 0,77 de probabilidade.
- Supondo que ele continue acreditando nesse aumento de possibilidade, em que exame será aprovado com certeza?
 - Qual é a probabilidade de serem necessários mais de 2 exames?
10. Escolhe-se ao acaso um número entre 1 e 50. Se o número é primo, qual a probabilidade que ele seja ímpar?
11. Uma ligação telefônica pode ocorrer a qualquer instante entre 9:00 e 11:00h. Qual a probabilidade que ela ocorra entre 9:30 e 10:45h?
12. Seleciona-se, ao acaso, um ponto (x, y) do retângulo $R = \{(x, y)/0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b\}$, com a e b positivos. Determine a probabilidade:

- a) Da abscissa x ser inferior à ordenada y .
 b) Do ponto satisfazer a desigualdade $bx + ay \leq ab/2$.
 c) Do ponto satisfazer a desigualdade $x + y < 1/3$.
13. (Urna de Pólya) Uma urna contém a bolas azuis e b bolas brancas. Uma bola é retirada ao acaso e depois devolvida à urna junto com mais c bolas da mesma cor. A seguir, uma segunda bola é retirada aleatoriamente da urna. Qual a probabilidade que ela seja azul?
14. Uma estudante leva dois livros para ler durante as férias. A probabilidade de ela gostar do primeiro livro é de 0,5, de gostar do segundo livro é de 0,4 e de gostar de ambos os livros é de 0,3. Qual é a probabilidade de que ela não goste de nenhum dos livros?
15. Se três bolas são retiradas aleatoriamente de um recipiente contendo 6 bolas brancas e 5 bolas pretas, qual é a probabilidade de que uma das bolas seja branca e as outras duas sejam pretas?
16. Um total de 36 sócios de um clube joga tênis, 28 jogam squash e 18 jogam boliche. Além disso, 22 dos sócios jogam tênis e squash, 12 jogam tênis e boliche, 9 jogam squash e boliche, e 4 jogam todos os três esportes. Quantos sócios desse clube jogam pelo menos um dos três esportes?

Independência

17. Se A e B são independentes, prove que também são independentes:
 a) A e B^c
 b) A^c e B
 c) A^c e B^c .
18. Suponha que A, B e C são eventos mutuamente independentes. Mostre que

$$P(C/A \cap B) = P(C).$$
19. Seja Q o quadrado unitário no plano. Defina os seguintes eventos:

$$A = \{(x, y)/0 \leq x \leq 1/2, 0 \leq y \leq 1\} \text{ e}$$

$$B = \{(x, y)/0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1/4\}.$$
 Mostre que A e B são independentes.
20. Sejam A, B e C eventos em (Ω, \mathcal{A}, P) que nunca ocorrem simultaneamente e são independentes a pares. Se $P(A) = P(B) = P(C) = x$, encontre o maior valor possível para x .
21. Sejam A_1, A_2, \dots, A_n eventos aleatórios independentes tais que $P(A_i) = p_i, i = 1, 2, \dots, n$. Obtenha a probabilidade dos seguintes eventos, em termos das probabilidades p_i :
- a) A ocorrência de nenhum dos A_i .

- b) A ocorrência de pelo menos um dos A_i .
- c) A ocorrência de exatamente um dos A_i .
- e) A ocorrência de todos os A_i .

Probabilidade Condicional e Teorema de Bayes

22. Se $P(B) = 0,4$; $P(A) = 0,7$ e $P(A \cap B) = 0,3$; calcule $P(A/B^c)$.
23. Verifique se são válidas as afirmações:
- a) Se $P(A) = 1/3$ e $P(B/A) = 3/5$ então A e B não podem ser disjuntos.
 - b) Se $P(A) = 1/2$, $P(B/A) = 1$ e $P(A/B) = 1/2$ então A não pode estar contido em B.
24. Suponha que a população de uma certa cidade é composta por 40% de homens e 60% de mulheres. Suponha que 50% dos homens e 30% das mulheres são fumantes. Encontre a probabilidade de que um fumante, escolhido ao acaso, seja homem.
25. Duas máquinas A e B produzem 3000 peças em um dia. A máquina A produz 1000 peças, das quais 3 % são defeituosas. A máquina B produz as restantes 2000, das quais 1 % são defeituosas. Da produção total em um dia uma peça é escolhida ao acaso e, examinando-a, constata-se que é defeituosa. Qual é a probabilidade de que a peça tenha sido produzida pela máquina A?
26. (Moeda de Bertrand) Há três caixas idênticas. A primeira contém duas moedas de ouro, a segunda contém uma moeda de ouro e outra de prata, e a terceira, duas moedas de prata. Uma caixa é selecionada ao acaso e da mesma é escolhida uma moeda, também ao acaso. Se a moeda escolhida é de ouro, qual a probabilidade de que a outra moeda da caixa escolhida também seja de ouro?
27. Um teste laboratorial de sangue consegue detectar uma certa doença em 95% dos casos, quando ela realmente está presente. Sabe-se que um falso positivo (isto é, o teste acusar a doença em uma pessoa saudável) ocorre em 1% dos casos. Se atualmente 0.5% da população apresenta essa doença, qual a probabilidade de uma pessoa realmente ser portadora da doença se o seu teste resultou positivo?
28. Suponha que em um teste de múltipla escolha, a probabilidade de um aluno saber a resposta correta é p . Havendo n alternativas, se ele sabe a resposta ele responde corretamente com probabilidade 1; se não sabe, ele “chuta” (escolhe aleatoriamente) uma alternativa. Qual a probabilidade que ele sabia a resposta, dado que a pergunta foi respondida corretamente? Calcule o limite desta probabilidade se (i) $n \rightarrow \infty$ com p fixo e (ii) $p \rightarrow 0$ com n fixo.