

1ª LISTA DE EXERCÍCIOS CE308 – TEORIA DA PROBABILIDADE 2

Prof. Benito Olivares Aguilera

2º Sem./2023

1. Considere a função de distribuição conjunta

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ ou } y < 0 \text{ ou } x \geq y; \\ \frac{2x^2y^2 - x^4}{16}, & 0 \leq x < y, 0 \leq y < 2; \\ \frac{8x^2 - x^4}{16}, & 0 \leq x < 2, y \geq 2; \\ 1, & x \geq 2, y \geq 2, x < y. \end{cases}$$

- Desenhe a região de definição R .
 - Obtenha as funções de distribuição marginais de X e Y .
 - Calcule a densidade conjunta de X e Y .
 - Calcule as densidades marginais de X e Y de duas formas diferentes.
 - São X e Y independentes?
2. Seja (X, Y, Z) um vetor aleatório com função densidade conjunta dada por:

$$f(x, y, z) = \begin{cases} kxy^2z, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{2} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- Encontre o valor da constante k .
 - Encontre as distribuições marginais.
 - Calcule a probabilidade $P((X, Y, Z) \in C)$, sendo C o cubo de aresta um.
3. Uma urna contém três bolas numeradas 1, 2 e 3. Duas bolas são retiradas sucessivamente da urna, ao acaso e sem reposição. Seja X o número da primeira bola retirada e Y o número da segunda.
- Descreva a distribuição conjunta de X e Y .
 - Calcule $P(X < Y)$.
4. No lançamento de dois dados, seja X a variável aleatória que representa a soma das faces e seja Y o valor absoluto da diferença.
- Apresente o espaço amostral do experimento e a função de probabilidade conjunta de X e Y .
 - São X e Y independentes?

5. Sejam X e Y variáveis aleatórias relacionadas pela função:

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-(2x + \frac{y}{2})}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

- a) É $f(x, y)$ uma densidade conjunta?
- b) X e Y são independentes?
- c) Encontre as densidades marginais de X e Y .
- d) Quanto vale $P(X \leq 1, Y \leq 2)$?

6. Sejam X e Y variáveis aleatórias com densidade conjunta dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{c. c.} \end{cases}$$

- a) Mostre que $f(x, y)$ é uma densidade conjunta.
- b) Encontre as densidades marginais de X e Y .
- c) X e Y são independentes?
- d) Quanto vale $P(X \leq 1/2, Y \leq 1/2)$?

7. Dois tetraedros (dados com quatro faces) com as faces numeradas de 1 a 4 são lançados e os números das faces voltadas para baixo são observados. Sejam X e Y as seguintes variáveis aleatórias:

X : **maior** dos números observados;

Y : **menor** dos números observados.

- a) Descreva o espaço amostral Ω para esse experimento.
- b) A que eventos de Ω corresponde o evento $[X=4, Y=1]$?
- c) Encontre a distribuição conjunta de X e Y .
- d) Calcule as distribuições marginais.
- e) X e Y são independentes?

8. Seja $f(x, y) = k, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x + y \leq 1$.

- a) Encontre o valor da constante k para que f seja uma densidade.
- b) Calcule $P(X \leq 1/2, Y \leq 1/2)$.
- c) Calcule as densidades marginais.
- d) X e Y são independentes?

9. Calcule as densidades marginais se X e Y têm densidade conjunta dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

10. Sejam X e Y variáveis aleatórias com densidade conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda y}, & 0 \leq x \leq y \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Calcule as densidades marginais de X e Y.

11. Denote por $p(x, y)$ a probabilidade $P(X=x, Y=y)$. Dadas as probabilidades

$$p(0, 10) = p(0, 20) = 2/18; p(1, 10) = p(1, 30) = 3/18; p(1, 20) = p(2, 30) = 4/18.$$

- a) Calcule a distribuição de Y dada X.
- b) Calcule $P(Y > 10 | X = 1)$.

12. Sejam X e Y variáveis aleatórias com distribuição conjunta dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Calcule as distribuições marginais de X e Y. Elas são independentes?

13. Sejam X_1, X_2 variáveis aleatórias independentes, cada uma com distribuição geométrica definida por

$$P(X_i = n) = p(1 - p)^n, n = 0, 1, 2, \dots; i = 1, 2.$$

Calcule $P(X_1 = X_2)$ e $P(X_1 < X_2)$.

14. Considere um círculo de raio r e centro na origem, e suponha que um ponto é aleatoriamente selecionado no círculo. Sejam X e Y as coordenadas do ponto escolhido.

- a) Determine a função densidade conjunta;
- b) Encontre as densidades marginais de X e de Y;
- c) Encontre a probabilidade de que a distância da origem ao ponto selecionado não seja maior do que a ($a > 0$).

15. Numa certa confecção, uma máquina de costura industrial é utilizada, na parte da manhã, para costuras simples e na parte da tarde, para fazer arremates. Sejam as variáveis aleatórias

X: número de vezes que a máquina pára devido a problemas, na parte da manhã.
Y: número de vezes que a máquina pára devido a problemas, na parte da tarde.
A partir de longos períodos de observação, a seguinte distribuição de probabilidade conjunta de X e Y foi determinada

X \ Y	0	1	2
0	0.1	0.2	0.2
1	0.04	0.08	0.08
2	0.06	0.12	0.12

- Encontre a Função Distribuição (Acumulada) Conjunta de X e Y
- Encontre as distribuições marginais
- Encontre a distribuição condicional de X dado Y=2 e a distribuição condicional de Y dado X=0.

- 16.** A superfície de tensão X_1 e a acidez X_2 de um certo composto químico são variáveis aleatórias com densidade conjunta dada por

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{3}(3 - x_1 - x_2), 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 2.$$

Verificar se a superfície de tensão depende da acidez.

- 17.** Sejam X e Y com densidade conjunta

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi}, (x, y) \in R, \text{ sendo } R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

- Calcule as marginais e verifique se X e Y são independentes.
- Determine a densidade condicional de X dado que $Y = 1/2$.

- 18.** Seja $(X, Y) \sim U(R)$. Diga se as variáveis são independentes quando:

- R é o quadrado unitário.
- R é o triângulo de vértices (0,0), (0,1) e (1,0).

- 19.** Suponha que a densidade do vetor (X, Y) seja:

$$f(x, y) = \begin{cases} k(x^2 + y), & 0 \leq y \leq 1 - x^2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine:

- o valor da constante k;
- as densidades marginais de X e Y;
- o gráfico aproximado das marginais.
- $P(Y < X)$;
- $P(0 \leq X < 1/2)$.
- A expressão geral da função distribuição.

20. Suponha que X e Y são variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial de parâmetros λ_1 e λ_2 ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$) respectivamente. Mostre que, para $k > 0$,

$$P(X - kY > 0) = \lambda_2 / (k\lambda_1 + \lambda_2).$$

21. Suponha que X e Y tenham densidade conjunta dada por

$$f(x, y) = \frac{1 + xy}{k}, -1 < x < 1, -1 < y < 1.$$

- a) Encontre a constante k .
- b) Discuta a veracidade da afirmação: “se X^2 e Y^2 são independentes, então X e Y também são independentes”.

Sugestão:

- i. Verifique que $P(X^2 \leq x, Y^2 \leq y) = P(X^2 \leq x) P(Y^2 \leq y)$
- ii. Verifique se X e Y são independentes.
- iii. Estabeleça sua conclusão.