

COMMUTATIVE ALGEBRA
PROBLEM SET 1

PETAR HLAD COLIĆ

$$0 \rightarrow S[x_1^2, x_1x_2, x_2^3] \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1 \\ -1 \\ x_2^2 \end{pmatrix}} \begin{array}{c} S[x_1x_2, x_2^3] \\ \oplus \\ S[x_1^2, x_2^3] \\ \oplus \\ S[x_1^2, x_1x_2] \end{array} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1 & x_1^2 & 0 \\ -x_2^2 & 0 & x_1 \\ 0 & -x_2^3 & -x_2 \end{pmatrix}} \begin{array}{c} S[x_2^3] \\ \oplus \\ S[x_1x_2] \\ \oplus \\ S[x_1^2] \end{array} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_2^3 & x_1x_2 & x_1^2 \end{pmatrix}} S[\emptyset] \rightarrow S/I \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \begin{array}{c} S[x_1x_2, x_2^3] \\ \oplus \\ S[x_1^2, x_1x_2] \end{array} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ -x_2^2 & x_1 \\ 0 & -x_2 \end{pmatrix}} \begin{array}{c} S[x_2^3] \\ \oplus \\ S[x_1x_2] \\ \oplus \\ S[x_1^2] \end{array} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_2^3 & x_1x_2 & x_1^2 \end{pmatrix}} S[\emptyset] \rightarrow S/I \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow S[x_1x_2, x_2x_3, x_2x_4, x_1x_4] \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ -x_3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \begin{array}{c} S[x_2x_3, x_2x_4, x_1x_4] \\ \oplus \\ S[x_1x_2, x_2x_4, x_1x_4] \\ \oplus \\ S[x_1x_2, x_2x_3, x_1x_4] \\ \oplus \\ S[x_1x_2, x_2x_3, x_2x_4] \end{array} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & -1 & -x_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -x_3 \\ 0 & 0 & x_4 & x_4 \end{pmatrix}} \begin{array}{c} S[x_2x_4, x_1x_4] \\ \oplus \\ S[x_2x_3, x_1x_4] \\ \oplus \\ S[x_2x_3, x_2x_4] \\ \oplus \\ S[x_1x_2, x_1x_4] \\ \oplus \\ S[x_1x_2, x_2x_4] \\ \oplus \\ S[x_1x_2, x_2x_3] \end{array} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_2 & x_2x_3 & 0 & x_2 & 0 & 0 \\ -x_1 & 0 & x_3 & 0 & x_1 & 0 \\ 0 & -x_1x_4 & -x_4 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & -x_4 & -x_4 & -x_3 \end{pmatrix}} \begin{array}{c} S[x_1x_4] \\ \oplus \\ S[x_2x_4] \\ \oplus \\ S[x_2x_3] \\ \oplus \\ S[x_1x_2] \end{array} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1x_4 & x_2x_4 & x_2x_3 & x_1x_2 \end{pmatrix}} S[\emptyset] \rightarrow S/I \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow S[x_1x_2x_3x_4] \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ -x_3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \begin{array}{c} S[x_1x_2x_3x_4] \\ \oplus \\ S[x_1x_2x_4] \\ \oplus \\ S[x_1x_2x_3x_4] \\ \oplus \\ S[x_1x_2x_3x_4] \end{array} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & -1 & -x_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -x_3 \\ 0 & 0 & x_4 & x_4 \end{pmatrix}} \begin{array}{c} S[x_1x_2x_4] \\ \oplus \\ S[x_1x_2x_3x_4] \\ \oplus \\ S[x_2x_3x_4] \\ \oplus \\ S[x_1x_2x_4] \\ \oplus \\ S[x_1x_2x_4] \\ \oplus \\ S[x_1x_2x_3] \end{array} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_2 & x_2x_3 & 0 & x_2 & 0 & 0 \\ -x_1 & 0 & x_3 & 0 & x_1 & 0 \\ 0 & -x_1x_4 & -x_4 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & -x_4 & -x_4 & -x_3 \end{pmatrix}} \begin{array}{c} S[x_1x_4] \\ \oplus \\ S[x_2x_4] \\ \oplus \\ S[x_2x_3] \\ \oplus \\ S[x_1x_2] \end{array} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1x_4 & x_2x_4 & x_2x_3 & x_1x_2 \end{pmatrix}} S[\emptyset] \rightarrow S/I \rightarrow 0$$

$$\begin{array}{c}
0 \rightarrow S[x_1x_2x_3x_4x_5] \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1 \\ -1 \\ 1 \\ -x_5 \end{pmatrix}} \begin{array}{c} S[x_2x_3x_4x_5] \\ \oplus \\ S[x_1x_2x_3x_4x_5] \\ \oplus \\ S[x_1x_2x_3x_4x_5] \\ \oplus \\ S[x_1x_2x_3x_4] \end{array} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_2 & x_1x_2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & x_1 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & -x_3 & -x_3 & 0 \\ 0 & x_5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & x_4x_5 & x_4 \end{pmatrix}} \begin{array}{c} S[x_3x_4x_5] \\ \oplus \\ S[x_2x_3x_4x_5] \\ \oplus \\ S[x_2x_3x_4] \\ \oplus \\ S[x_1x_2x_4x_5] \\ \oplus \\ S[x_1x_2x_3x_4] \\ \oplus \\ S[x_1x_2x_3] \end{array} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_3 & x_2x_3 & 0 & x_1x_2 & 0 & 0 \\ -x_5 & 0 & x_2 & 0 & x_1x_2 & 0 \\ 0 & -x_4x_5 & -x_4 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & -x_4x_5 & -x_3x_4 & -x_3 \end{pmatrix}} \begin{array}{c} S[x_4x_5] \\ \oplus \\ S[x_3x_4] \\ \oplus \\ S[x_2x_3] \\ \oplus \\ S[x_1x_2] \end{array} \xrightarrow{(x_4x_5 \quad x_3x_4 \quad x_2x_3 \quad x_1x_2)} S[\emptyset] \rightarrow S/I \rightarrow 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
0 \rightarrow S[x_1x_2x_3x_4x_5] \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \begin{array}{c} S[x_2x_3x_4x_5] \\ \oplus \\ S[x_1x_2x_3x_4x_5] \\ \oplus \\ S[x_1x_2x_3x_4x_5] \\ \oplus \\ S[x_1x_2x_3x_4] \end{array} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_4x_5 & 0 \end{pmatrix}} \begin{array}{c} S[x_3x_4x_5] \\ \oplus \\ S[x_2x_3x_4x_5] \\ \oplus \\ S[x_2x_3x_4] \\ \oplus \\ S[x_1x_2x_4x_5] \\ \oplus \\ S[x_1x_2x_3x_4] \\ \oplus \\ S[x_1x_2x_3] \end{array} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_3 & 0 & 0 & x_1x_2 & 0 & 0 \\ -x_5 & 0 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_4 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & -x_4x_5 & 0 & -x_3 \end{pmatrix}} \begin{array}{c} S[x_4x_5] \\ \oplus \\ S[x_3x_4] \\ \oplus \\ S[x_2x_3] \\ \oplus \\ S[x_1x_2] \end{array} \xrightarrow{(x_4x_5 \quad x_3x_4 \quad x_2x_3 \quad x_1x_2)} S[\emptyset] \rightarrow S/I \rightarrow 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
0 \rightarrow S[x_1x_2x_3x_4x_5] \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ -x_4x_5 \end{pmatrix}} \begin{array}{c} S[x_3x_4x_5] \\ \oplus \\ S[x_2x_3x_4] \\ \oplus \\ S[x_1x_2x_4x_5] \\ \oplus \\ S[x_1x_2x_3] \end{array} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_3 & 0 & x_1x_2 & 0 \\ -x_5 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & -x_4 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & -x_4x_5 & -x_3 \end{pmatrix}} \begin{array}{c} S[x_4x_5] \\ \oplus \\ S[x_3x_4] \\ \oplus \\ S[x_2x_3] \\ \oplus \\ S[x_1x_2] \end{array} \xrightarrow{(x_4x_5 \quad x_3x_4 \quad x_2x_3 \quad x_1x_2)} S[\emptyset] \rightarrow S/I \rightarrow 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
0 \rightarrow \begin{array}{c} S[x_1x_2^3] \\ \oplus \\ S[x_1^2x_2] \end{array} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ -x_2^2 & x_1 \\ 0 & -x_2 \end{pmatrix}} \begin{array}{c} S[x_2^3] \\ \oplus \\ S[x_1x_2] \\ \oplus \\ S[x_1^2] \end{array} \xrightarrow{(x_2^3 \quad x_1x_2 \quad x_1^2)} S[\emptyset] \rightarrow S/I \rightarrow 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
0 \rightarrow \begin{array}{c} S[x_3x_4x_5] \\ \oplus \\ S[x_2x_3x_4] \\ \oplus \\ S[x_1x_2x_4x_5] \\ \oplus \\ S[x_1x_2x_3] \end{array} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_3 & 0 & x_1x_2 & 0 \\ -x_5 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & -x_4 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & -x_4x_5 & -x_3 \end{pmatrix}} \begin{array}{c} S[x_4x_5] \\ \oplus \\ S[x_3x_4] \\ \oplus \\ S[x_2x_3] \\ \oplus \\ S[x_1x_2] \end{array} \xrightarrow{(x_4x_5 \quad x_3x_4 \quad x_2x_3 \quad x_1x_2)} S[\emptyset] \rightarrow S/I \rightarrow 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
S[x_1x_4x_5] \\
\oplus \\
S[x_3x_4x_5] \\
\oplus \\
S[x_2x_3x_4] \\
\oplus \\
S[x_1x_2x_5] \\
\oplus \\
S[x_1x_2x_3]
\end{array}
\begin{pmatrix}
x_4 & 0 & 0 & x_2 & 0 \\
-x_1 & x_3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -x_5 & x_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -x_4 & 0 & x_1 \\
0 & 0 & 0 & -x_5 & -x_3
\end{pmatrix}
\begin{array}{c}
S[x_1x_5] \\
\oplus \\
S[x_4x_5] \\
\oplus \\
S[x_3x_4] \\
\oplus \\
S[x_2x_3] \\
\oplus \\
S[x_1x_2]
\end{array}
\begin{array}{c}
(x_1x_5 \quad x_4x_5 \quad x_3x_4 \quad x_2x_3 \quad x_1x_2) \\
\rightarrow S[\emptyset] \rightarrow S/I \rightarrow 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} S[x_1x_2x_3x_4x_5] \\
\oplus \\
S[x_1x_2x_3x_4x_5] \\
\oplus \\
S[x_1x_2x_3x_4x_5] \\
\oplus \\
S[x_1x_2x_3x_4x_5]
\end{array}
\begin{pmatrix}
x_2 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-x_1 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\
0 & -x_3 & -x_3 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & x_4 & x_4 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -x_5 & -x_5
\end{pmatrix}
\begin{array}{c}
S[x_1x_3x_4x_5] \\
\oplus \\
S[x_1x_2x_3x_4x_5] \\
\oplus \\
S[x_1x_2x_3x_4x_5] \\
\oplus \\
S[x_2x_3x_4x_5] \\
\oplus \\
S[x_1x_2x_4x_5] \\
\oplus \\
S[x_1x_2x_3x_4x_5] \\
\oplus \\
S[x_1x_2x_3x_4x_5] \\
\oplus \\
S[x_1x_2x_3x_5] \\
\oplus \\
S[x_1x_2x_3x_4x_5] \\
\oplus \\
S[x_1x_2x_3x_4]
\end{array}
\begin{pmatrix}
x_3 & x_2x_3 & 0 & 0 & x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & x_2 & 0 & 0 & x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_1 & 0 & 0 & x_2 & 0 & 0 & x_1x_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -x_4 & -x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & x_1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & 0 \\
0 & 0 & x_1x_5 & x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -x_4 & -x_3x_4 & 0 & -x_3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -x_3 & 0 & -x_3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 & x_5 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 & x_4x_5 & x_4
\end{pmatrix}
\begin{array}{c}
S[x_1x_4x_5] \\
\oplus \\
S[x_1x_3x_4x_5] \\
\oplus \\
S[x_3x_4x_5] \\
\oplus \\
S[x_1x_2x_3x_5] \\
\oplus \\
S[x_2x_3x_4x_5] \\
\oplus \\
S[x_2x_3x_4] \\
\oplus \\
S[x_1x_2x_5] \\
\oplus \\
S[x_1x_2x_4x_5] \\
\oplus \\
S[x_1x_2x_3x_4] \\
\oplus \\
S[x_1x_2x_3]
\end{array}
\begin{pmatrix}
x_4 & x_3x_4 & 0 & x_2x_3 & 0 & 0 & x_2 \\
-x_1 & 0 & x_3 & 0 & x_2x_3 & 0 & 0 \\
0 & -x_1x_5 & -x_5 & 0 & 0 & x_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -x_1x_5 & -x_4x_5 & -x_4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_5
\end{pmatrix}
\end{array}$$

$$0 \rightarrow S^1(-5) \rightarrow S^5(-5) \rightarrow \begin{array}{c} S^5(-4) \\ \oplus \\ S^5(-5) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} S^5(-3) \\ \oplus \\ S^5(-4) \end{array} \rightarrow S^5(-2) \rightarrow S[\emptyset] \rightarrow S/I \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow S^5(-3) \rightarrow S^5(-2) \rightarrow S[\emptyset] \rightarrow S/I \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow S^1(-5) \rightarrow \begin{array}{c} S^3(-3) \\ \oplus \\ S^1(-4) \end{array} \rightarrow S^4(-2) \rightarrow S[\emptyset] \rightarrow S/I \rightarrow 0$$

$$\begin{array}{rcccc}
& 0 & 1 & 2 & 3 \\
\text{total :} & 1 & 4 & 4 & 1 \\
0 : & 1 & . & . & . \\
1 : & . & 4 & 3 & . \\
2 : & . & . & 1 & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
& & & & 0 & 1 & 2 & 3 & \\
& & & & \text{total :} & 1 & 4 & 4 & 1 \\
& & & & 0 : & 1 & . & . & . \\
& & & & 1 : & . & 4 & 3 & . \\
& & & & 2 : & . & . & 1 & 1 \\
\\
& & & S^1(-16) & S^9(-14) & S^2(-11) & & & \\
& & & \oplus & \oplus & \oplus & S^2(-8) & & \\
& S^2(-19) & S^{14}(-17) & S^{32}(-15) & S^{31}(-12) & & & & \\
& \oplus & \oplus & \oplus & \oplus & S^4(-9) & S^9(-6) & & \\
& S^2(-21) & S^6(-18) & S^{37}(-16) & S^{30}(-13) & \oplus & \oplus & & \\
0 \rightarrow & \oplus & \rightarrow \oplus & \rightarrow \oplus & \rightarrow \oplus & \rightarrow S^{56}(-10) & \rightarrow S^2(-7) & \rightarrow S^{11}(-4) & \rightarrow S[\emptyset] \rightarrow S/I \rightarrow 0 \\
& S^1(-22) & S^6(-19) & S^6(-17) & S^{71}(-14) & \oplus & \oplus & & \\
& \oplus & \oplus & \oplus & \oplus & S^{10}(-11) & S^{38}(-8) & & \\
& S^1(-24) & S^{11}(-20) & S^{22}(-18) & S^2(-15) & \oplus & & & \\
& & \oplus & \oplus & \oplus & S^{42}(-12) & & & \\
& & S^2(-22) & S^1(-20) & S^{12}(-16) & & & & \\
\\
& & & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
& & & & \text{total :} & 1 & 11 & 49 & 114 & 148 & 107 & 40 & 6 \\
& & & & 0 : & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\
& & & & 1 : & . & . & . & . & . & . & . & . \\
& & & & 2 : & . & . & . & . & . & . & . & . \\
& & & & 3 : & . & 11 & . & . & . & . & . & . \\
& & & & 4 : & . & . & 9 & . & . & . & . & . \\
& & & & 5 : & . & . & 2 & 2 & . & . & . & . \\
& & & & 6 : & . & . & 38 & 4 & . & . & . & . \\
& & & & 7 : & . & . & . & 56 & 2 & . & . & . \\
& & & & 8 : & . & . & . & 10 & 31 & . & . & . \\
& & & & 9 : & . & . & . & 42 & 30 & 9 & . & . \\
& & & & 10 : & . & . & . & . & 71 & 32 & 1 & . \\
& & & & 11 : & . & . & . & . & 2 & 37 & 14 & . \\
& & & & 12 : & . & . & . & . & 12 & 6 & 6 & 2 \\
& & & & 13 : & . & . & . & . & . & 22 & 6 & . \\
& & & & 14 : & . & . & . & . & . & . & 11 & 2 \\
& & & & 15 : & . & . & . & . & . & 1 & . & 1 \\
& & & & 16 : & . & . & . & . & . & . & 2 & . \\
& & & & 17 : & . & . & . & . & . & . & . & 1 \\
& & & & 18 : & . & . & . & . & . & . & . & . \\
& & & & 19 : & . & . & . & . & . & . & . & . \\
& & & & 20 : & . & . & . & . & . & . & . & . \\
& & & & 21 : & . & . & . & . & . & . & . & . \\
\\
& & & & 0 \rightarrow S^2(-3) \rightarrow S^3(-2) \rightarrow S[\emptyset] \rightarrow S/I \rightarrow 0 \\
& & & & & & 0 & 1 & 2 \\
& & & & & & \text{total :} & 1 & 3 & 2 \\
& & & & & & 0 : & 1 & . & . \\
& & & & & & 1 : & . & 3 & 2 \\
& & & & & & 2 : & . & . & .
\end{array}$$

$$0 \rightarrow S^1(-5) \rightarrow \begin{array}{c} S^2(-4) \\ \oplus \\ S^2(-5) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} S^3(-3) \\ \oplus \\ S^3(-4) \end{array} \rightarrow S^4(-2) \rightarrow S[\emptyset] \rightarrow S/I \rightarrow 0$$

$$\begin{array}{cccccc} & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \text{total :} & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 0 : & 1 & . & . & . & . \\ 1 : & . & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 : & . & . & 3 & 2 & . \\ 3 : & . & . & . & . & . \\ 4 : & . & . & . & . & . \\ 5 : & . & . & . & . & . \end{array}$$

$$0 \rightarrow R[x_1^2 x_2^3 x_3] \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1 \\ -1 \\ x_2^2 x_3 \end{pmatrix}} \begin{array}{c} R[x_1 x_2^3 x_3] \\ \oplus \\ R[x_1^2 x_2^3 x_3] \\ \oplus \\ R[x_1^2 x_2] \end{array} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1 & x_1^2 & 0 \\ -x_2^2 x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & -x_2^3 x_3 & -x_2 \end{pmatrix}} \begin{array}{c} R[x_2^3 x_3] \\ \oplus \\ R[x_1 x_2] \\ \oplus \\ R[x_1^2] \end{array} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_2^3 x_3 & x_1 x_2 & x_1^2 \end{pmatrix}} R/I \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow R^1(-6) \rightarrow \begin{array}{c} R^1(-3) \\ \oplus \\ R^1(-5) \\ \oplus \\ R^1(-6) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} R^2(-2) \\ \oplus \\ R^1(-4) \end{array} \rightarrow R/I \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \begin{array}{c} R[x_1 x_2^3 x_3] \\ \oplus \\ R[x_1^2 x_2] \end{array} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ -x_2^2 x_3 & x_1 \\ 0 & -x_2 \end{pmatrix}} \begin{array}{c} R[x_2^3 x_3] \\ \oplus \\ R[x_1 x_2] \\ \oplus \\ R[x_1^2] \end{array} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_2^3 x_3 & x_1 x_2 & x_1^2 \end{pmatrix}} R/I \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \begin{array}{c} R[x_1 x_2^3 x_3] \\ \oplus \\ R[x_1^2 x_2] \end{array} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ -x_2^2 x_3 & x_1 \\ 0 & -x_2 \end{pmatrix}} \begin{array}{c} R[x_2^3 x_3] \\ \oplus \\ R[x_1 x_2] \\ \oplus \\ R[x_1^2] \end{array} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_2^3 x_3 & x_1 x_2 & x_1^2 \end{pmatrix}} R/I \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \begin{array}{c} R[x_1 x_3] \\ \oplus \\ R[x_2 x_3] \\ \oplus \\ R[x_1 x_2] \end{array} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1 x_3 & x_2 x_3 & x_1 x_2 \end{pmatrix}} R/I \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow R[x_1^2 x_2^3 x_3] \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1 \\ -1 \\ x_2^2 x_3 \end{pmatrix}} \begin{array}{c} R[x_1 x_2^3 x_3] \\ \oplus \\ R[x_1^2 x_2^3 x_3] \\ \oplus \\ R[x_1^2 x_2] \end{array} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1 & x_1^2 & 0 \\ -x_2^2 x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & -x_2^3 x_3 & -x_2 \end{pmatrix}} \begin{array}{c} R[x_2^3 x_3] \\ \oplus \\ R[x_1 x_2] \\ \oplus \\ R[x_1^2] \end{array} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_2^3 x_3 & x_1 x_2 & x_1^2 \end{pmatrix}} R/I \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \begin{matrix} R[x_1x_2^3x_3] \\ \oplus \\ R[x_1^2x_2] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \\ -x_2^2x_3 & -x_1 \end{pmatrix}} \begin{matrix} R[x_2^3x_3] \\ \oplus \\ R[x_1^2] \\ \oplus \\ R[x_1x_2] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_2^3x_3 & x_1^2 & x_1x_2 \end{pmatrix}} R/I \rightarrow 0$$

	0	1	2	3	4	5		0	1	2	3	4	5		0	1	2	3	4
total :	1	5	10	10	5	1	total :	1	5	10	10	5	1	total :	1	5	7	4	1
0 :	1	0 :	1	0 :	1
1 :	.	5	4	3	2	1	1 :	.	5	4	3	2	1	1 :	.	5	4	.	.
2 :	.	.	6	6	3	.	2 :	.	.	6	6	3	.	2 :	.	.	3	4	1
3 :	.	.	.	1	.	.	3 :	.	.	.	1	.	.	3 :
4 :	4 :	4 :
5 :	5 :	5 :
6 :	6 :	6 :

$$0 \rightarrow R[x_1x_2x_3x_4x_5x_6] \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ -x_4 \\ x_6 \end{pmatrix}} \begin{matrix} R[x_2x_3x_4x_5x_6] \\ \oplus \\ R[x_1x_2x_4x_5x_6] \\ \oplus \\ R[x_1x_2x_3x_5x_6] \\ \oplus \\ R[x_1x_2x_3x_4x_5] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & x_1x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & x_1 & 0 \\ -x_5x_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_4 & -x_3 & 0 \\ 0 & x_6 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & x_5x_6 & -x_4x_5 \end{pmatrix}} \begin{matrix} R[x_4x_5x_6] \\ \oplus \\ R[x_3x_4x_5] \\ \oplus \\ R[x_2x_3x_5x_6] \\ \oplus \\ R[x_2x_3x_4] \\ \oplus \\ R[x_1x_2x_5x_6] \\ \oplus \\ R[x_1x_2x_4x_5] \\ \oplus \\ R[x_1x_2x_3] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_4 & 0 & x_2x_3 & 0 & x_1x_2 & 0 & 0 \\ -x_6 & x_3 & 0 & 0 & 0 & x_1x_2 & 0 \\ 0 & -x_5 & 0 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_5x_6 & -x_4 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x_5x_6 & -x_4x_5 & -x_3 \end{pmatrix}} \begin{matrix} R[x_5x_6] \\ \oplus \\ R[x_4x_5] \\ \oplus \\ R[x_3x_4] \\ \oplus \\ R[x_2x_3] \\ \oplus \\ R[x_1x_2] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_5x_6 & x_4x_5 & x_3x_4 & x_2x_3 & x_1x_2 \end{pmatrix}} R/I \rightarrow 0$$

E-mail address: petar.hlad@gmail.com