COMMUTATIVE ALGEBRA
PROBLEM SET 1

PETAR HLAD COLIĆ

$$0 \to S[x_1^2, x_1x_2, x_2^3] \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1 \\ -1 \\ x_2^2 \end{pmatrix}} \begin{matrix} S[x_1x_2, x_2^3] \\ \bigoplus \\ S[x_1^2, x_2^3] \\ \bigoplus \\ S[x_1^2, x_1x_2] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1 & x_1^2 & 0 \\ -x_2^2 & 0 & x_1 \\ 0 & -x_2^3 & -x_2 \end{pmatrix}} \begin{matrix} S[x_2^3] \\ \bigoplus \\ S[x_1x_2] \\ \bigoplus \\ S[x_1^2] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_2^3 & x_1x_2 & x_1^2 \end{pmatrix}} S[\emptyset] \to S/I \to 0$$

$$0 \to \begin{matrix} S[x_1x_2, x_2^3] \\ \bigoplus \\ S[x_1^2, x_1x_2] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ -x_2^2 & x_1 \\ 0 & -x_2 \end{pmatrix}} \begin{matrix} S[x_2^3] \\ \bigoplus \\ S[x_1x_2] \\ \bigoplus \\ S[x_1^2] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_2^3 & x_1x_2 & x_1^2 \end{pmatrix}} S[\emptyset] \to S/I \to 0$$

$$0 \to S[x_1x_2, x_2x_3, x_2x_4, x_1x_4] \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ -x_3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \begin{matrix} S[x_2x_3, x_2x_4, x_1x_4] \\ \bigoplus \\ S[x_1x_2, x_2x_4, x_1x_4] \\ \bigoplus \\ S[x_1x_2, x_2x_3, x_1x_4] \\ \bigoplus \\ S[x_1x_2, x_2x_3, x_2x_4] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & -1 & -x_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -x_3 \\ 0 & 0 & x_4 & x_4 \end{pmatrix}} \begin{matrix} S[x_2x_4, x_1x_4] \\ \bigoplus \\ S[x_2x_3, x_1x_4] \\ \bigoplus \\ S[x_2x_3, x_2x_4] \\ \bigoplus \\ S[x_1x_2, x_1x_4] \\ \bigoplus \\ S[x_1x_2, x_2x_4] \\ \bigoplus \\ S[x_1x_2, x_2x_3] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_2 & x_2x_3 & 0 & x_2 & 0 & 0 \\ -x_1 & 0 & x_3 & 0 & x_1 & 0 \\ 0 & -x_1x_4 & -x_4 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & -x_4 & -x_4 & -x_3 \end{pmatrix}} \begin{matrix} S[x_1x_4] \\ \bigoplus \\ S[x_2x_4] \\ \bigoplus \\ S[x_2x_3] \\ \bigoplus \\ S[x_1x_2] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1x_4 & x_2x_4 & x_2x_3 & x_1x_2 \end{pmatrix}} S[\emptyset] \to S/I \to 0$$

$$0 \to S[x_1x_2x_3x_4] \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ -x_3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \begin{matrix} S[x_1x_2x_3x_4] \\ \bigoplus \\ S[x_1x_2x_4] \\ \bigoplus \\ S[x_1x_2x_3x_4] \\ \bigoplus \\ S[x_1x_2x_3x_4] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & -1 & -x_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -x_3 \\ 0 & 0 & x_4 & x_4 \end{pmatrix}} \begin{matrix} S[x_1x_2x_4] \\ \bigoplus \\ S[x_1x_2x_3x_4] \\ \bigoplus \\ S[x_2x_3x_4] \\ \bigoplus \\ S[x_1x_2x_4] \\ \bigoplus \\ S[x_1x_2x_4] \\ \bigoplus \\ S[x_1x_2x_3] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_2 & x_2x_3 & 0 & x_2 & 0 & 0 \\ -x_1 & 0 & x_3 & 0 & x_1 & 0 \\ 0 & -x_1x_4 & -x_4 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & -x_4 & -x_4 & -x_3 \end{pmatrix}} \begin{matrix} S[x_1x_4] \\ \bigoplus \\ S[x_2x_4] \\ \bigoplus \\ S[x_2x_3] \\ \bigoplus \\ S[x_1x_2] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1x_4 & x_2x_4 & x_2x_3 & x_1x_2 \end{pmatrix}} S[\emptyset] \to S/I \to 0$$

Date: May 26, 2017.

$$0 \to S[x_1x_2x_3x_4x_5] \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1 \\ -1 \\ 1 \\ -x_5 \end{pmatrix}} \begin{matrix} S[x_2x_3x_4x_5] \\ \bigoplus \\ S[x_1x_2x_3x_4x_5] \\ \bigoplus \\ S[x_1x_2x_3x_4] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_2 & x_1x_2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & x_1 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & -x_3 & -x_3 & 0 \\ 0 & x_5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & x_4x_5 & x_4 \end{pmatrix}} \begin{matrix} S[x_3x_4x_5] \\ \bigoplus \\ S[x_2x_3x_4x_5] \\ \bigoplus \\ S[x_2x_3x_4] \\ \bigoplus \\ S[x_1x_2x_4x_5] \\ \bigoplus \\ S[x_1x_2x_3x_4] \\ \bigoplus \\ S[x_1x_2x_3] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_3 & x_2x_3 & 0 & x_1x_2 & 0 & 0 \\ -x_5 & 0 & x_2 & 0 & x_1x_2 & 0 \\ 0 & -x_4x_5 & -x_4 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & -x_4x_5 & -x_3x_4 & -x_3 \end{pmatrix}} \begin{matrix} S[x_4x_5] \\ \bigoplus \\ S[x_3x_4] \\ \bigoplus \\ S[x_2x_3] \\ \bigoplus \\ S[x_1x_2] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_4x_5 & x_3x_4 & x_2x_3 & x_1x_2 \end{pmatrix}} S[\emptyset] \to S/I \to 0$$

$$0 \to S[x_1x_2x_3x_4x_5] \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \begin{matrix} S[x_2x_3x_4x_5] \\ \bigoplus \\ S[x_1x_2x_3x_4x_5] \\ \bigoplus \\ S[x_1x_2x_3x_4] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_4x_5 & 0 \end{pmatrix}} \begin{matrix} S[x_3x_4x_5] \\ \bigoplus \\ S[x_2x_3x_4x_5] \\ \bigoplus \\ S[x_2x_3x_4] \\ \bigoplus \\ S[x_1x_2x_4x_5] \\ \bigoplus \\ S[x_1x_2x_3x_4] \\ \bigoplus \\ S[x_1x_2x_3] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_3 & 0 & 0 & x_1x_2 & 0 & 0 \\ -x_5 & 0 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_4 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & -x_4x_5 & 0 & -x_3 \end{pmatrix}} \begin{matrix} S[x_4x_5] \\ \bigoplus \\ S[x_3x_4] \\ \bigoplus \\ S[x_2x_3] \\ \bigoplus \\ S[x_1x_2] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_4x_5 & x_3x_4 & x_2x_3 & x_1x_2 \end{pmatrix}} S[\emptyset] \to S/I \to 0$$

$$0 \to S[x_1x_2x_3x_4x_5] \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ -x_4x_5 \end{pmatrix}} \begin{matrix} S[x_3x_4x_5] \\ \bigoplus \\ S[x_2x_3x_4] \\ \bigoplus \\ S[x_1x_2x_4x_5] \\ \bigoplus \\ S[x_1x_2x_3] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_3 & 0 & x_1x_2 & 0 \\ -x_5 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & -x_4 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & -x_4x_5 & -x_3 \end{pmatrix}} \begin{matrix} S[x_4x_5] \\ \bigoplus \\ S[x_3x_4] \\ \bigoplus \\ S[x_2x_3] \\ \bigoplus \\ S[x_1x_2] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_4x_5 & x_3x_4 & x_2x_3 & x_1x_2 \end{pmatrix}} S[\emptyset] \to S/I \to 0$$

$$0 \to \begin{matrix} S[x_1x_2^3] \\ \bigoplus \\ S[x_1^2x_2] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ -x_2^2 & x_1 \\ 0 & -x_2 \end{pmatrix}} \begin{matrix} S[x_2^3] \\ \bigoplus \\ S[x_1x_2] \\ \bigoplus \\ S[x_1^2] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_2^3 & x_1x_2 & x_1^2 \end{pmatrix}} S[\emptyset] \to S/I \to 0$$

$$0 \to \begin{matrix} S[x_3x_4x_5] \\ \bigoplus \\ S[x_2x_3x_4] \\ \bigoplus \\ S[x_1x_2x_4x_5] \\ \bigoplus \\ S[x_1x_2x_3] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_3 & 0 & x_1x_2 & 0 \\ -x_5 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & -x_4 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & -x_4x_5 & -x_3 \end{pmatrix}} \begin{matrix} S[x_4x_5] \\ \bigoplus \\ S[x_3x_4] \\ \bigoplus \\ S[x_2x_3] \\ \bigoplus \\ S[x_1x_2] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_4x_5 & x_3x_4 & x_2x_3 & x_1x_2 \end{pmatrix}} S[\emptyset] \to S/I \to 0$$

$$0 \to \begin{matrix} S[x_1x_4x_5] \\ \oplus \\ S[x_3x_4x_5] \\ \oplus \\ S[x_2x_3x_4] \\ \oplus \\ S[x_1x_2x_5] \\ \oplus \\ S[x_1x_2x_3] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_4 & 0 & 0 & x_2 & 0 \\ -x_1 & x_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_5 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_4 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & -x_5 & -x_3 \end{pmatrix}} \begin{matrix} S[x_1x_5] \\ \oplus \\ S[x_4x_5] \\ \oplus \\ S[x_3x_4] \\ \oplus \\ S[x_2x_3] \\ \oplus \\ S[x_1x_2] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1x_5 & x_4x_5 & x_3x_4 & x_2x_3 & x_1x_2 \end{pmatrix}} S[\emptyset] \to S/I \to 0$$

$$0 \to S[x_1x_2x_3x_4x_5] \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{matrix} S[x_1x_2x_3x_4x_5] \\ \oplus \\ S[x_1x_2x_3x_4x_5] \\ \oplus \\ S[x_1x_2x_3x_4x_5] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_2 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_1 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & -x_3 & -x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & x_4 & x_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -x_5 & -x_5 \end{pmatrix}} \begin{matrix} S[x_1x_3x_4x_5] \\ \oplus \\ S[x_1x_2x_3x_4x_5] \\ \oplus \\ S[x_1x_2x_3x_4x_5] \\ \oplus \\ S[x_2x_3x_4x_5] \\ \oplus \\ S[x_1x_2x_4x_5] \\ \oplus \\ S[x_1x_2x_3x_4x_5] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_3 & x_2x_3 & 0 & 0 & x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & x_2 & 0 & 0 & x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 & x_2 & 0 & 0 & x_1x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_4 & -x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_1x_5 & x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x_4 & -x_3x_4 & 0 & -x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -x_3 & 0 & -x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 & x_5 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 & x_4x_5 & x_4 \end{pmatrix}} \begin{matrix} S[x_1x_4x_5] \\ \oplus \\ S[x_1x_3x_4x_5] \\ \oplus \\ S[x_3x_4x_5] \\ \oplus \\ S[x_1x_2x_3x_5] \\ \oplus \\ S[x_2x_3x_4x_5] \\ \oplus \\ S[x_1x_2x_5] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_4 & x_3x_4 & 0 & x_2x_3 & 0 & 0 & x_2 & \\ -x_1 & 0 & x_3 & 0 & x_2x_3 & 0 & 0 & \\ 0 & -x_1x_5 & -x_5 & 0 & 0 & x_2 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & -x_1x_5 & -x_4x_5 & -x_4 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_5 & \end{pmatrix}} \begin{matrix} \\ \oplus \\ S[x_1x_2x_4x_5] \\ \oplus \\ S[x_1x_2x_3x_4] \\ \oplus \\ S[x_1x_2x_3] \end{matrix}$$

$$0 \to S^1(-5) \to S^5(-5) \to \begin{matrix} S^5(-4) \\ \oplus \\ S^5(-5) \end{matrix} \to \begin{matrix} S^5(-3) \\ \oplus \\ S^5(-4) \end{matrix} \to S^5(-2) \to S[\emptyset] \to S/I \to 0$$

$$0 \to S^5(-3) \to S^5(-2) \to S[\emptyset] \to S/I \to 0$$

$$0 \to S^1(-5) \to \begin{matrix} S^3(-3) \\ \oplus \\ S^1(-4) \end{matrix} \to S^4(-2) \to S[\emptyset] \to S/I \to 0$$

	0	1	2	3
total :	1	4	4	1
0 :	1	.	.	.
1 :	.	4	3	.
2 :	.	.	1	1

	0	1	2	3
total :	1	4	4	1
0 :	1	.	.	.
1 :	.	4	3	.
2 :	.	.	1	1

$$0 \to \begin{matrix} S^2(-19) \\ \oplus \\ S^2(-21) \\ \oplus \\ S^1(-22) \\ \oplus \\ S^1(-24) \end{matrix} \to \begin{matrix} S^1(-16) \\ \oplus \\ S^{14}(-17) \\ \oplus \\ S^6(-18) \\ \oplus \\ S^6(-19) \\ \oplus \\ S^{11}(-20) \\ \oplus \\ S^2(-22) \end{matrix} \to \begin{matrix} S^9(-14) \\ \oplus \\ S^{32}(-15) \\ \oplus \\ S^{37}(-16) \\ \oplus \\ S^6(-17) \\ \oplus \\ S^{22}(-18) \\ \oplus \\ S^1(-20) \end{matrix} \to \begin{matrix} S^2(-11) \\ \oplus \\ S^{31}(-12) \\ \oplus \\ S^{30}(-13) \\ \oplus \\ S^{71}(-14) \\ \oplus \\ S^2(-15) \\ \oplus \\ S^{12}(-16) \end{matrix} \to \begin{matrix} S^2(-8) \\ \oplus \\ S^4(-9) \\ \oplus \\ S^{56}(-10) \\ \oplus \\ S^{10}(-11) \\ \oplus \\ S^{42}(-12) \end{matrix} \to \begin{matrix} S^9(-6) \\ \oplus \\ S^2(-7) \\ \oplus \\ S^{38}(-8) \end{matrix} \to S^{11}(-4) \to S[\emptyset] \to S/I \to 0$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
total :	1	11	49	114	148	107	40	6
0 :	1	.	.	.	.	.	.	.
1 :	.	.	.	.	.	.	.	.
2 :	.	.	.	.	.	.	.	.
3 :	.	11	.	.	.	.	.	.
4 :	.	.	9	.	.	.	.	.
5 :	.	.	2	2	.	.	.	.
6 :	.	.	38	4	.	.	.	.
7 :	.	.	.	56	2	.	.	.
8 :	.	.	.	10	31	.	.	.
9 :	.	.	.	42	30	9	.	.
10 :	.	.	.	.	71	32	1	.
11 :	.	.	.	.	2	37	14	.
12 :	.	.	.	.	12	6	6	2
13 :	.	.	.	.	.	22	6	.
14 :	.	.	.	.	.	.	11	2
15 :	.	.	.	.	.	1	.	1
16 :	.	.	.	.	.	.	2	.
17 :	.	.	.	.	.	.	.	1
18 :	.	.	.	.	.	.	.	.
19 :	.	.	.	.	.	.	.	.
20 :	.	.	.	.	.	.	.	.
21 :	.	.	.	.	.	.	.	.

$$0 \to S^2(-3) \to S^3(-2) \to S[\emptyset] \to S/I \to 0$$

	0	1	2
total :	1	3	2
0 :	1	.	.
1 :	.	3	2
2 :	.	.	.

$$0 \to S^1(-5) \to \begin{matrix} S^2(-4) \\ \bigoplus \\ S^2(-5) \end{matrix} \to \begin{matrix} S^3(-3) \\ \bigoplus \\ S^3(-4) \end{matrix} \to S^4(-2) \to S[\emptyset] \to S/I \to 0$$

	0	1	2	3	4
total :	1	4	6	4	1
0 :	1	.	.	.	.
1 :	.	4	3	2	1
2 :	.	.	3	2	.
3 :	.	.	.	.	.
4 :	.	.	.	.	.
5 :	.	.	.	.	.

$$0 \to R[x_1^2x_2^3x_3] \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1 \\ -1 \\ x_2^2x_3 \end{pmatrix}} \begin{matrix} R[x_1x_2^3x_3] \\ \bigoplus \\ R[x_1^2x_2^3x_3] \\ \bigoplus \\ R[x_1^2x_2] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1 & x_1^2 & 0 \\ -x_2^2x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & -x_2^3x_3 & -x_2 \end{pmatrix}} \begin{matrix} R[x_2^3x_3] \\ \bigoplus \\ R[x_1x_2] \\ \bigoplus \\ R[x_1^2] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_2^3x_3 & x_1x_2 & x_1^2 \end{pmatrix}} R/I \to 0$$

$$0 \to R^1(-6) \to \begin{matrix} R^1(-3) \\ \bigoplus \\ R^1(-5) \\ \bigoplus \\ R^1(-6) \end{matrix} \to \begin{matrix} R^2(-2) \\ \bigoplus \\ R^1(-4) \end{matrix} \to R/I \to 0$$

$$0 \to \begin{matrix} R[x_1x_2^3x_3] \\ \bigoplus \\ R[x_1^2x_2] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ -x_2^2x_3 & x_1 \\ 0 & -x_2 \end{pmatrix}} \begin{matrix} R[x_2^3x_3] \\ \bigoplus \\ R[x_1x_2] \\ \bigoplus \\ R[x_1^2] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_2^3x_3 & x_1x_2 & x_1^2 \end{pmatrix}} R/I \to 0$$

$$0 \to \begin{matrix} R[x_1x_2^3x_3] \\ \bigoplus \\ R[x_1^2x_2] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ -x_2^2x_3 & x_1 \\ 0 & -x_2 \end{pmatrix}} \begin{matrix} R[x_2^3x_3] \\ \bigoplus \\ R[x_1x_2] \\ \bigoplus \\ R[x_1^2] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_2^3x_3 & x_1x_2 & x_1^2 \end{pmatrix}} R/I \to 0$$

$$0 \to \begin{matrix} R[x_1x_3] \\ \bigoplus \\ R[x_2x_3] \\ \bigoplus \\ R[x_1x_2] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1x_3 & x_2x_3 & x_1x_2 \end{pmatrix}} R/I \to 0$$

$$0 \to R[x_1^2x_2^3x_3] \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1 \\ -1 \\ x_2^2x_3 \end{pmatrix}} \begin{matrix} R[x_1x_2^3x_3] \\ \bigoplus \\ R[x_1^2x_2^3x_3] \\ \bigoplus \\ R[x_1^2x_2] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1 & x_1^2 & 0 \\ -x_2^2x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & -x_2^3x_3 & -x_2 \end{pmatrix}} \begin{matrix} R[x_2^3x_3] \\ \bigoplus \\ R[x_1x_2] \\ \bigoplus \\ R[x_1^2] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_2^3x_3 & x_1x_2 & x_1^2 \end{pmatrix}} R/I \to 0$$

$$0 \to \begin{matrix} R[x_1x_2^3x_3] \\ \bigoplus \\ R[x_1^2x_2] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \\ -x_2^2x_3 & -x_1 \end{pmatrix}} \begin{matrix} R[x_2^3x_3] \\ \bigoplus \\ R[x_1^2] \\ \bigoplus \\ R[x_1x_2] \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_2^3x_3 & x_1^2 & x_1x_2 \end{pmatrix}} R/I \to 0$$

E-mail address: petar.hlad@gmail.com