

Течение несжимаемой жидкости

Захаров ПЕ

10 апреля 2019 г.

Аннотация

...

Глава 1

Стационарное течение несжимаемой жидкости

Введение

Рассматривается численное моделирование стационарного течения несжимаемой жидкости.

1.1 Математические модели описания течений несжимаемой жидкости

1.1.1 Стационарное уравнение Навье-Стокса

Течение жидкости описывается системой уравнений состоящей из уравнения для момента импульса и уравнения неразрывности. Для описания стационарного течения несжимаемой жидкости используются следующие уравнения в области Ω

$$\rho \mathcal{C}(\mathbf{u}) - \nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}, p) = \rho \mathbf{f}, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.2)$$

где ρ — плотность, $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ — скорость жидкости, $\mathcal{C}(\mathbf{u})$ — конвекция скорости, ∇ — оператор набла, \cdot — скалярное произведение, $\sigma(\mathbf{u}, p) = 2\mu\epsilon(\mathbf{u}) - pI$ — тензор напряжения, μ — вязкость, $\epsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)$ — тензор скорости деформации, p — давление, I — единичный оператор, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ — объемные силы.

1.1.2 Формы конвективной части

Конвективную часть уравнения $\mathcal{C}(\mathbf{u})$ можно записывать в четырех различных формах, которые идентичны для непрерывных дифференциальных операторов, но различаются для дискретных операторов:

- $\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})$ — дивергентная форма;

- $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ — адвективная форма;
- $\frac{1}{2} (\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})$ — кососимметричная форма;
- $(\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})$ — ротационная форма (rotation form);

где \otimes — тензорное произведение, \times — векторное произведение для трехмерной области, а для двумерной области $\nabla \times \mathbf{u} := -\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$ и $a \times \mathbf{u} := (-au_2, au_1)^T$ для скаляра a

1.1.3 Граничные условия

Обозначим границы где задаются условия Дирихле для скорости через Γ_D , а с условиями Неймана — Γ_N . Для задач течения жидкости стандартными являются следующие граничные условия

- условие прилипания (noslip condition) $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (0, 0)$;
- условие скольжения или симметрии (slip condition) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$;
- условие на входе $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_{in}(\mathbf{x})$;
- условие на выходе $p(\mathbf{x}) = p_{out}(\mathbf{x})$, $\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$;
- периодические граничные условия $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{x}_{period})$;

где \mathbf{n} — внешняя нормаль границы. В некоторых задачах граничное условие для давления может не задаваться и тогда используется ограничение

$$\int_{\Omega} p \, d\mathbf{x} = p_a, \quad (1.3)$$

которое дает единственное решение для давления.

1.2 Вычислительный алгоритм

1.2.1 Вариационная задача

Для задачи без ограничения для давления (1.3) используется стандартная вариационная задача. Для описания вариационной формулировки уравнений умножаем на тестовые функции, интегрируем по области и понижаем порядок производных. Вариационная задача заключается в нахождении функций $\mathbf{u} \in V, p \in Q$, которые удовлетворяют

$$\begin{aligned} F &= \int_{\Omega} \rho \mathcal{C}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}, p) \cdot \epsilon(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_{\Gamma_N} \mu (\nabla \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{n} + \mathbf{g} + p \mathbf{I} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, ds \\ &\quad - \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \nabla \cdot \mathbf{u} \, q \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \widehat{V}, \forall q \in \widehat{Q}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $V, \widehat{V} = H^1(\Omega)$ — пространства Соболева для векторных функций, которые удовлетворяют граничным условиям Дирихле для скорости, $Q, \widehat{Q} = L^2(\Omega)$ — квадратично интегрируемые пространства скалярных функций, которые удовлетворяют условиям Дирихле для давления.

1.2.2 Ограничение для давления

Ограничение для давления добавляется в вариационную формулировку используя дополнительную неизвестную как множитель Лагранжа. Вариационная задача: нужно найти функции $\mathbf{u} \in V, p \in Q$, которые удовлетворяют

$$\begin{aligned} F = & \int_{\Omega} \rho \mathcal{C}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}, p) \cdot \epsilon(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \\ & - \int_{\Gamma_N} \mu (\nabla \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{n} + \mathbf{g} + p \mathbf{I} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, ds \\ & - \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \nabla \cdot \mathbf{u} \, q \, d\mathbf{x} \\ & \int_{\Omega} (p - p_a) r \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} c q \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \hat{V}, \forall q \in \hat{Q}, \forall r \in R, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где R — множество действительных чисел.

1.2.3 Конечно-элементная аппроксимация

При дискретизации используются треугольные сетки для двумерных задач и тетраэдральные для трехмерных задач. Для аппроксимации скорости используется кусочно-квадратичные функции, а для давления — кусочно-линейные функции, данная комбинация элементов известна как элементы Тэйлор-Худ.

1.3 Программная реализация

...

1.3.1 Общее описание

...

1.3.2 Структура ПО

...

1.3.3 Ключевые элементы (описание классов)

...

1.3.4 Листинг программы

...

1.4 Тестирование ПО

...

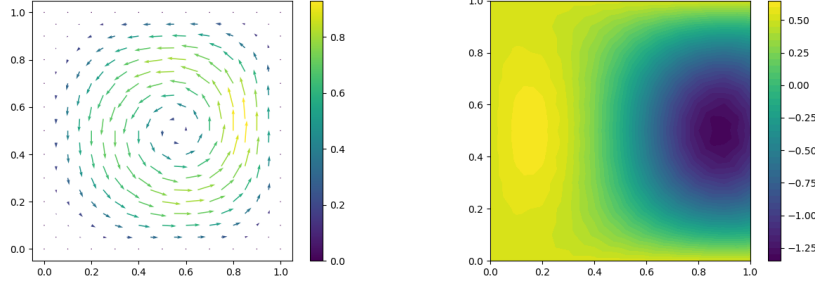


Рис. 1.1: Поле скорости и распределение давления

1.4.1 Тестовые задачи (для демонстрации сходимости в зависимости от вычислительных параметров, ...)

...

Рассмотрим стационарную задачу в единичном квадрате $\Omega = (0,1)^2$ с точным решением

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_e &= (80e^{x_1}(x_1 - 1)^2 x_1^2 x_2(x_2 - 1)(2x_2 - 1), \\ &\quad -40e^{x_1}(x_1 - 1)x_1(x_1(3 + x_1) - 2)(x_2 - 1)^2 x_2^2), \\ p_e &= 10(-424 + 156e + (x_2^2 - x_2)(-456 + e_1^x)(456 + x_1^2)(228 - 5(x_2^2 - x_2)) \\ &\quad + 2x_1(-228 + (x_2^2 - x_2)) + 2x_1^3(-36 + x_2^2 - x_2) + x_1^4(12 + (x_2^2 - x_2)))). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Возьмем следующие параметры модели

$$\rho = 1, \quad \mu = 0.01, \quad \mathbf{f} = \rho \mathcal{C}(\mathbf{u}_e) - \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_e, p_e).$$

На рис. ??, ?? показаны точные решения задачи.

1.4.2 Сходимость аппроксимации по пространству

Для исследования численного решения от размера вычислительной сетки рассматриваем последовательность сеток: 8×8 , 16×16 , 32×32 , 64×64 , 128×128 . Сравниваются различные нормы погрешности скорости и давления:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_e\|_{L^2}, \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_e\|_{L^\infty}, \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_e\|_{H_0^{div}}, \\ \|p - p_e\|_{L^2}, \quad \|p - p_e\|_{L^\infty}, \quad \|p - p_e\|_{H_0^1}. \end{aligned}$$

1.4.3 Прямые линейные решатели

Из сравнения прямых решателей (см. рис. 1.4) наилучшее время показал MUMPS, который имеет параллельное решение системы. На рис. 1.5 приводится сравнение времени параллельного решения решателем MUMPS для вычислительных сеток 128×128 и 256×256 .

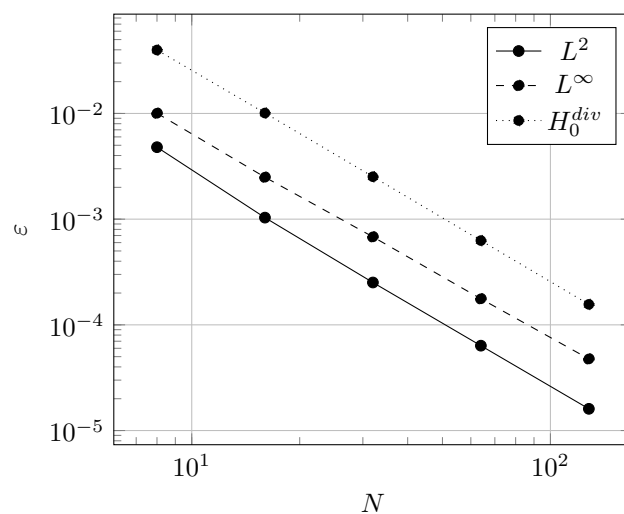


Рис. 1.2: Зависимость нормы погрешности скорости от размера сетки $N \times N$

1.4.4 Итерационные линейные решатели

...

1.4.5 Преобуславливатели линейных решателей

...

1.4.6 Результаты по параллелизации

...

1.5 Верификация ПО

...

1.5.1 Матрица верификации (общее описание набор задач)

...

1.5.2 Задача 1

...

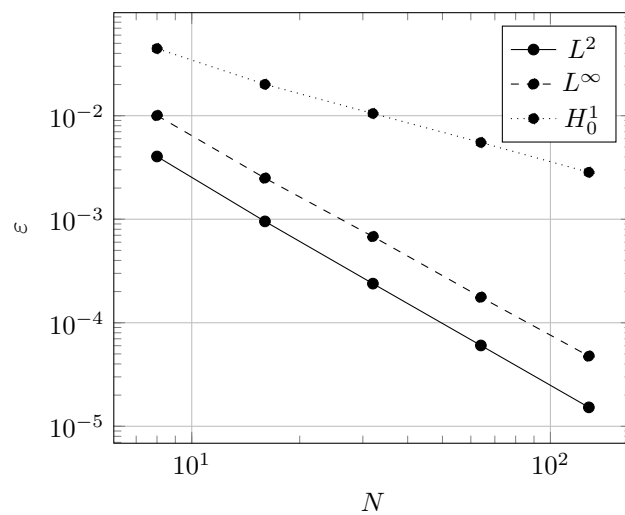


Рис. 1.3: Зависимость нормы погрешности давления от размера сетки $N \times N$

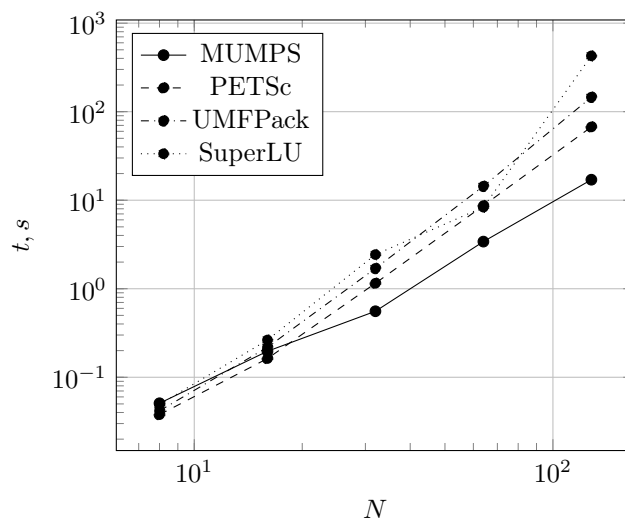


Рис. 1.4: Время решения прямых решателей от размера сетки $N \times N$

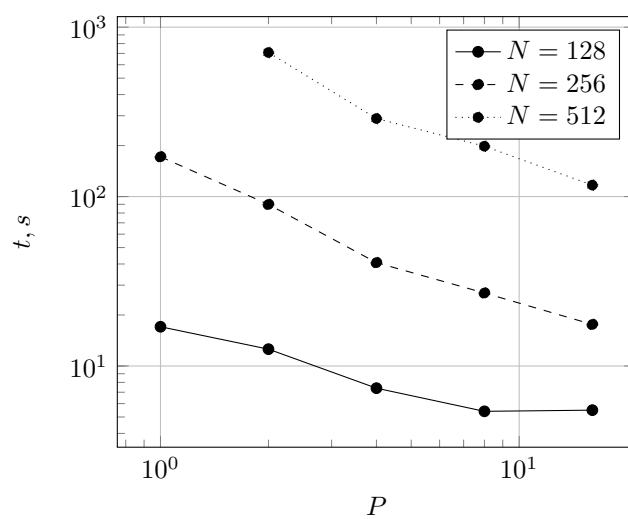


Рис. 1.5: Время решения решателя MUMPS от количества процессов P