

Течение несжимаемой жидкости

Захаров ПЕ

2 апреля 2019 г.

Аннотация

...

Глава 1

Стационарное течение несжимаемой жидкости

Введение

Рассматривается численное моделирование стационарного течения несжимаемой жидкости.

1.1 Математические модели описания течений несжимаемой жидкости

1.1.1 Стационарное уравнение Навье-Стокса

Течение жидкости описывается системой уравнений состоящей из уравнения для момента движения и уравнения неразрывности. Для стационарного течения несжимаемой жидкости останутся следующие уравнения в области Ω

$$\rho \mathcal{C}(\mathbf{u}) - \nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}, p) = \rho \mathbf{f}, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.2)$$

где ρ — плотность, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ — скорость жидкости, $\mathcal{C}(\mathbf{u})$ — конвекция скорости, ∇ — оператор набла, $\sigma(\mathbf{u}, p) = 2\mu\epsilon(\mathbf{u}) - pI$ — тензор напряжения, μ — вязкость, $\epsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ — тензор скорости деформации, p — давление, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ — объемные силы.

1.1.2 Формы конвективной части

Конвективную часть уравнения $\mathcal{C}(\mathbf{u})$ можно описывать в четырех различных формах, которые идентичны для непрерывных дифференциальных операторов, но различаются для дискретных операторов:

- $\mathcal{C}(\mathbf{u}) = \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})$ — дивергентная форма, где \otimes — тензорное произведение;
- $\mathcal{C}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ — адвективная форма;

- $\mathcal{C}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})$ — кососимметричная форма;
- $\mathcal{C}(\mathbf{u}) = (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})$ — ротационная форма (rotation form), где для трехмерной области \times — векторное произведение, а для двумерной области $\nabla \times \mathbf{u} := -\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$ и $a \times \mathbf{u} := (-au_2, au_1)^T$ для скаляра a .

1.1.3 Граничные условия

Система уравнений может быть дополнена следующими граничными условиями

- твердая стенка $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (0, 0)$;
- периодические граничные условия $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{x}_{period}, t)$;
- условие симметрии;
- условие на входе;
- условие на выходе;

!!! более подробно каждый вариант граничного условия

1.1.4 Турбулентные течения

...

1.2 Вычислительный алгоритм

1.2.1 Конечно-элементная аппроксимация

Для описания вариационной формулировки уравнения умножаем на тестовые функции, интегрируем по области и понижаем порядок производных

$$\begin{aligned}
 F = & \int_{\Omega} \rho \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \rho \mathcal{C}(\mathbf{u}^{n+1}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\
 & + \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}) \cdot \epsilon(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \sigma(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{s} \\
 & - \int_{\Omega} \rho \mathbf{f}^{n+1} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} q \, d\mathbf{x} = 0,
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $\mathbf{u}^{n+1} \in V, p^{n+1} \in Q, \mathbf{v} \in \hat{V}, q \in \hat{Q}$.

Для аппроксимации скорости используется кусочно-квадратичные функции, а для давления — кусочно-линейные функции, данная комбинация элементов известна как элементы Тэйлор-Худа.

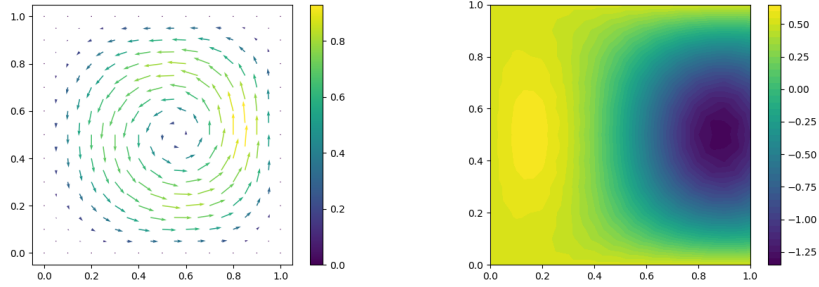


Рис. 1.1: Поле скорости и распределение давления

1.2.2 Численное решение дискретной задачи

Рассмотрим стационарную задачу в единичном квадрате $\Omega = (0, 1)^2$ с точным решением

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_e &= (80e^{x_1}(x_1 - 1)^2 x_1^2 x_2(x_2 - 1)(2x_2 - 1), \\
 &\quad -40e^{x_1}(x_1 - 1)x_1(x_1(3 + x_1) - 2)(x_2 - 1)^2 x_2^2), \\
 p_e &= 10(-424 + 156e + (x_2^2 - x_2)(-456 + e_1^x)(456 + x_1^2)(228 - 5(x_2^2 - x_2)) \\
 &\quad + 2x_1(-228 + (x_2^2 - x_2)) + 2x_1^3(-36 + x_2^2 - x_2) + x_1^4(12 + (x_2^2 - x_2)))).
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Возьмем следующие параметры модели

$$\rho = 1, \quad \mu = 0.01, \quad \mathbf{f} = \rho \mathcal{C}(\mathbf{u}_e) - \nabla \cdot \epsilon(\mathbf{u}_e, p_e).$$

На рис. ??, ?? показаны точные решения задачи.

1.3 Программная реализация

...

1.3.1 Общее описание

...

1.3.2 Структура ПО

...

1.3.3 Ключевые элементы (описание классов)

...

1.3.4 Листинг программы

...

1.4 Тестирование ПО

...

1.4.1 Тестовые задачи (для демонстрации сходимости в зависимости от вычислительных параметров, ...)

...

1.4.2 Сходимость аппроксимации по пространству

Для исследования численного решения от размера вычислительной сетки рассматриваем последовательность сеток: 8×8 , 16×16 , 32×32 , 64×64 , 128×128 . Сравниваются различные нормы погрешности скорости и давления:

$$\begin{aligned} &\|u - u_e\|_{L^2}, \quad \|u - u_e\|_{L^\infty}, \quad \|u - u_e\|_{H_0^{div}}, \\ &\|p - p_e\|_{L^2}, \quad \|p - p_e\|_{L^\infty}, \quad \|p - p_e\|_{H_0^1}. \end{aligned}$$

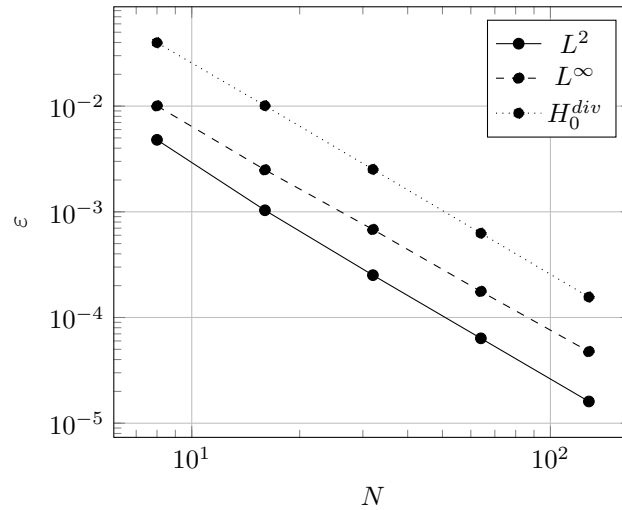


Рис. 1.2: Зависимость нормы погрешности скорости от размера сетки $N \times N$

1.4.3 Прямые линейные решатели

Из сравнения прямых решателей (см. рис. 1.4) наилучшее время показал MUMPS, который имеет параллельное решение системы. На рис. 1.5 приводится сравнение времени параллельного решения решателем MUMPS для вычислительных сеток 128×128 и 256×256 .

1.4.4 Итерационные линейные решатели

...

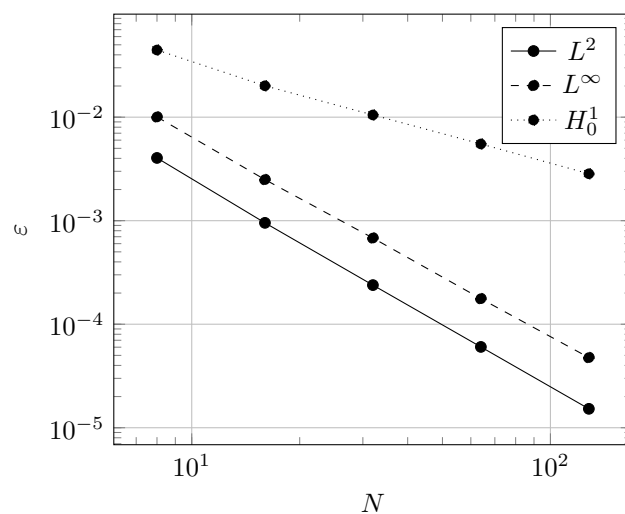


Рис. 1.3: Зависимость нормы погрешности давления от размера сетки $N \times N$

1.4.5 Преобуславливатели линейных решателей

...

1.4.6 Результаты по параллелизации

...

1.5 Верификация ПО

...

1.5.1 Матрица верификации (общее описание набор задач)

...

1.5.2 Задача 1

...

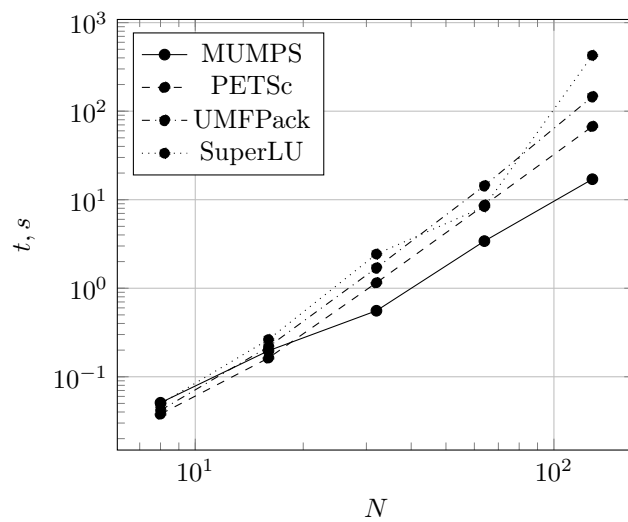


Рис. 1.4: Время решения прямых решателей от размера сетки $N \times N$

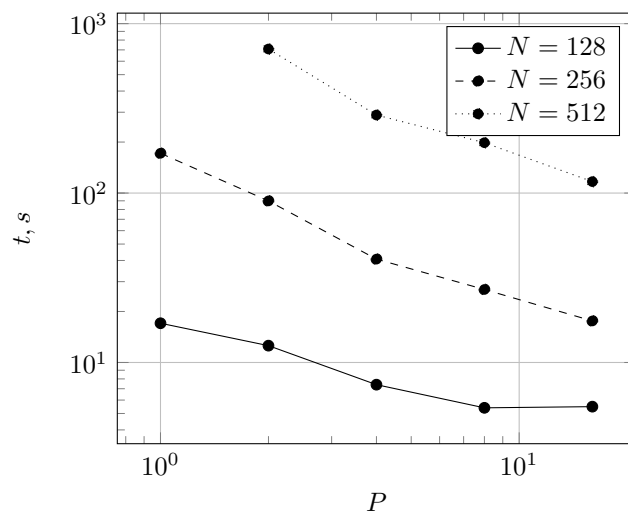


Рис. 1.5: Время решения решателя MUMPS от количества процессов P