

Течение несжимаемой жидкости

Захаров ПЕ

9 апреля 2019 г.

Аннотация

...

Глава 1

Стационарное течение несжимаемой жидкости

Введение

Рассматривается численное моделирование стационарного течения несжимаемой жидкости.

1.1 Математические модели описания течений несжимаемой жидкости

1.1.1 Стационарное уравнение Навье-Стокса

Течение жидкости описывается системой уравнений состоящей из уравнения для момента импульса и уравнения неразрывности. Для описания стационарного течения несжимаемой жидкости используются следующие уравнения в области Ω

$$\rho \mathcal{C}(\mathbf{u}) - \nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}, p) = \rho \mathbf{f}, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.2)$$

где ρ — плотность, $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ — скорость жидкости, $\mathcal{C}(\mathbf{u})$ — конвекция скорости, ∇ — оператор набла, \cdot — скалярное произведение, $\sigma(\mathbf{u}, p) = 2\mu\epsilon(\mathbf{u}) - pI$ — тензор напряжения, μ — вязкость, $\epsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)$ — тензор скорости деформации, p — давление, I — единичный оператор, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ — объемные силы.

1.1.2 Формы конвективной части

Конвективную часть уравнения $\mathcal{C}(\mathbf{u})$ можно записывать в четырех различных формах, которые идентичны для непрерывных дифференциальных операторов, но различаются для дискретных операторов:

- $\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})$ — дивергентная форма;

- $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ — адвективная форма;
- $\frac{1}{2} (\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})$ — кососимметричная форма;
- $(\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})$ — ротационная форма (rotation form);

где \otimes — тензорное произведение, \times — векторное произведение для трехмерной области, а для двумерной области $\nabla \times \mathbf{u} := -\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$ и $a \times \mathbf{u} := (-au_2, au_1)^T$ для скаляра a

1.1.3 Граничные условия

Для задач течения жидкости стандартными являются следующие граничные условия

- условие прилипания (noslip condition) $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (0, 0)$;
- условие скольжения или симметрии (slip condition) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$;
- условие на входе $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_{in}(\mathbf{x})$;
- условие на выходе $p(\mathbf{x}) = p_{out}(\mathbf{x})$, $\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$;
- периодические граничные условия $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{x}_{period})$;

где \mathbf{n} — внешняя нормаль границы. В некоторых задачах граничное условие для давления может не задаваться и тогда используется ограничение

$$\int_{\Omega} p \, d\mathbf{x} = 0,$$

которое дает единственное решение для давления.

1.2 Вычислительный алгоритм

1.2.1 Конечно-элементная аппроксимация

Для задачи без ограничения для давления используется стандартная вариационная задача. Для описания вариационной формулировки уравнений умножаем на тестовые функции, интегрируем по области и понижаем порядок производных. Вариационная задача заключается в нахождении функций $\mathbf{u} \in V, p \in Q$, которые удовлетворяют

$$\begin{aligned} F = \int_{\Omega} \rho \mathcal{C}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}, p) \cdot \epsilon(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \\ - \int_{\Gamma} \dots \\ - \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \nabla \cdot \mathbf{u} q \, d\mathbf{x} = 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\mathbf{u} \in V, p \in Q, \mathbf{v} \in \hat{V}, q \in \hat{Q}$.

Для аппроксимации скорости используется кусочно-квадратичные функции, а для давления — кусочно-линейные функции, данная комбинация элементов известна как элементы Тэйлор-Худа.

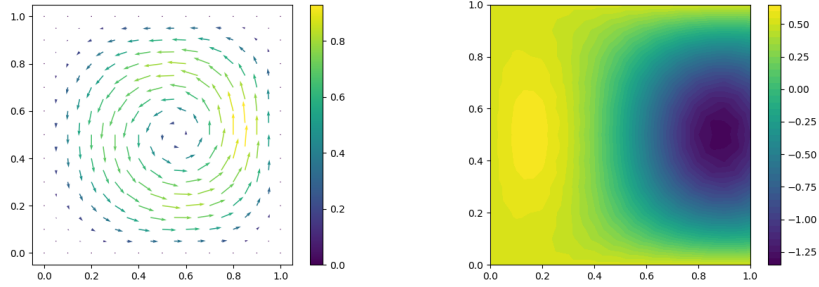


Рис. 1.1: Поле скорости и распределение давления

1.2.2 Численное решение дискретной задачи

Рассмотрим стационарную задачу в единичном квадрате $\Omega = (0, 1)^2$ с точным решением

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_e &= (80e^{x_1}(x_1 - 1)^2 x_1^2 x_2(x_2 - 1)(2x_2 - 1), \\ &\quad -40e^{x_1}(x_1 - 1)x_1(x_1(3 + x_1) - 2)(x_2 - 1)^2 x_2^2), \\ p_e &= 10(-424 + 156e + (x_2^2 - x_2)(-456 + e_1^x)(456 + x_1^2)(228 - 5(x_2^2 - x_2)) \\ &\quad + 2x_1(-228 + (x_2^2 - x_2)) + 2x_1^3(-36 + x_2^2 - x_2) + x_1^4(12 + (x_2^2 - x_2))))). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Возьмем следующие параметры модели

$$\rho = 1, \quad \mu = 0.01, \quad \mathbf{f} = \rho \mathcal{C}(\mathbf{u}_e) - \nabla \cdot \epsilon(\mathbf{u}_e, p_e).$$

На рис. ??, ?? показаны точные решения задачи.

1.3 Программная реализация

...

1.3.1 Общее описание

...

1.3.2 Структура ПО

...

1.3.3 Ключевые элементы (описание классов)

...

1.3.4 Листинг программы

...

1.4 Тестирование ПО

...

1.4.1 Тестовые задачи (для демонстрации сходимости в зависимости от вычислительных параметров, ...)

...

1.4.2 Сходимость аппроксимации по пространству

Для исследования численного решения от размера вычислительной сетки рассматриваем последовательность сеток: 8×8 , 16×16 , 32×32 , 64×64 , 128×128 . Сравниваются различные нормы погрешности скорости и давления:

$$\begin{aligned} &\|u - u_e\|_{L^2}, \quad \|u - u_e\|_{L^\infty}, \quad \|u - u_e\|_{H_0^{div}}, \\ &\|p - p_e\|_{L^2}, \quad \|p - p_e\|_{L^\infty}, \quad \|p - p_e\|_{H_0^1}. \end{aligned}$$

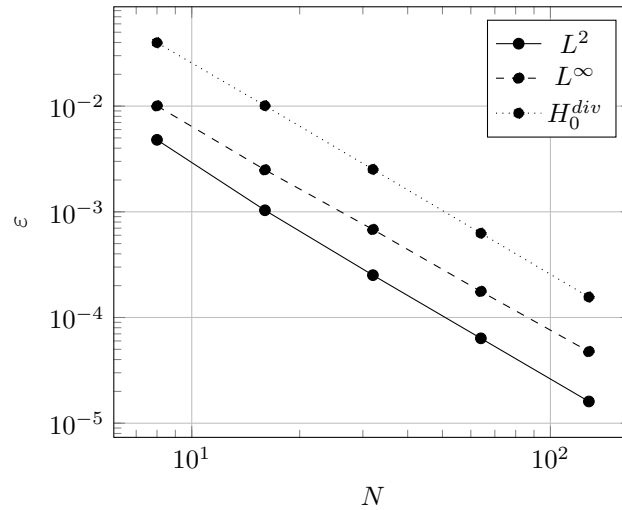


Рис. 1.2: Зависимость нормы погрешности скорости от размера сетки $N \times N$

1.4.3 Прямые линейные решатели

Из сравнения прямых решателей (см. рис. 1.4) наилучшее время показал MUMPS, который имеет параллельное решение системы. На рис. 1.5 приводится сравнение времени параллельного решения решателем MUMPS для вычислительных сеток 128×128 и 256×256 .

1.4.4 Итерационные линейные решатели

...

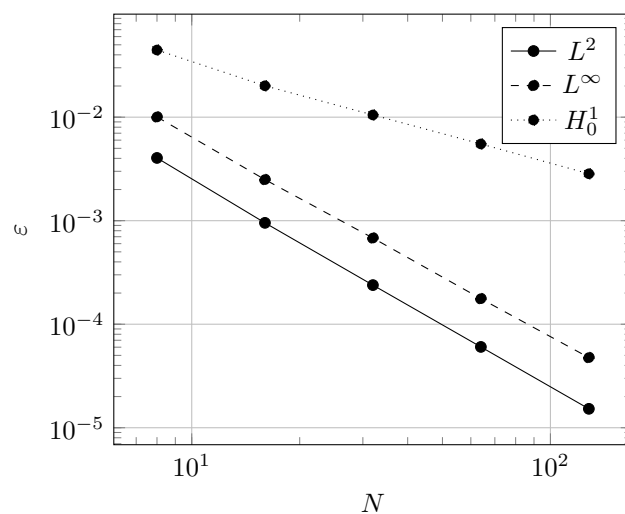


Рис. 1.3: Зависимость нормы погрешности давления от размера сетки $N \times N$

1.4.5 Преобуславливатели линейных решателей

...

1.4.6 Результаты по параллелизации

...

1.5 Верификация ПО

...

1.5.1 Матрица верификации (общее описание набор задач)

...

1.5.2 Задача 1

...

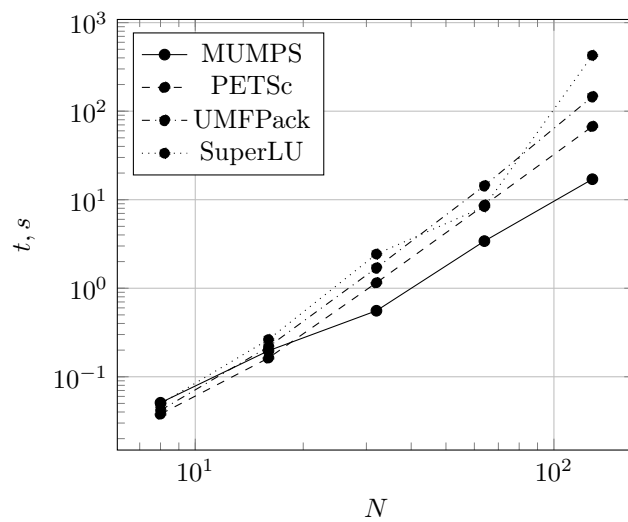


Рис. 1.4: Время решения прямых решателей от размера сетки $N \times N$

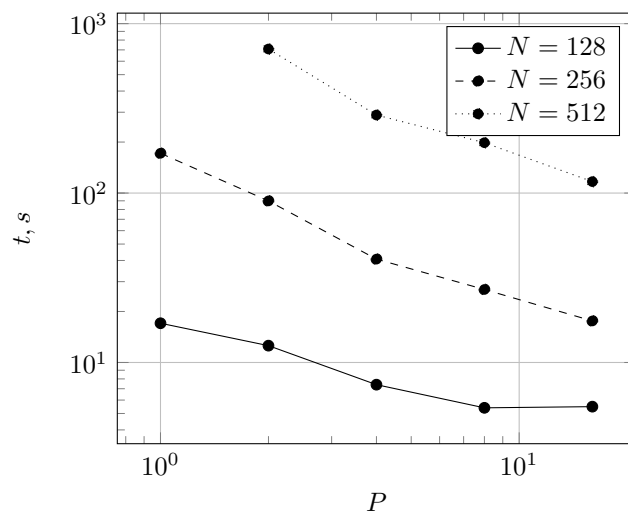


Рис. 1.5: Время решения решателя MUMPS от количества процессов P