

# Течение несжимаемой жидкости

Захаров ПЕ

22 апреля 2019 г.

## Аннотация

...

# Глава 1

## Стационарное течение несжимаемой жидкости

### Введение

Рассматривается численное моделирование стационарного течения несжимаемой жидкости.

### 1.1 Математические модели описания течений несжимаемой жидкости

#### 1.1.1 Стационарное уравнение Навье-Стокса

Течение жидкости описывается системой уравнений состоящей из уравнения для момента импульса и уравнения неразрывности. Для описания стационарного течения несжимаемой жидкости используются следующие уравнения в области  $\Omega$

$$\rho \mathcal{C}(\mathbf{u}) - \nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}, p) = \rho \mathbf{f}, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.2)$$

где  $\rho$  — плотность,  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  — скорость жидкости,  $\mathcal{C}(\mathbf{u})$  — конвекция скорости,  $\nabla$  — оператор набла,  $\cdot$  — скалярное произведение,  $\sigma(\mathbf{u}, p) = 2\mu\epsilon(\mathbf{u}) - pI$  — тензор напряжения,  $\mu$  — вязкость,  $\epsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)$  — тензор скорости деформации,  $p$  — давление,  $I$  — единичный оператор,  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  — объемные силы.

#### 1.1.2 Формы конвективной части

Конвективную часть уравнения  $\mathcal{C}(\mathbf{u})$  можно записывать в четырех различных формах, которые идентичны для непрерывных дифференциальных операторов, но различаются для дискретных операторов:

- $\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})$  — дивергентная форма;

- $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$  — адвективная форма;
- $\frac{1}{2} (\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})$  — кососимметричная форма;
- $(\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})$  — ротационная форма (rotation form);

где  $\otimes$  — тензорное произведение,  $\times$  — векторное произведение для трехмерной области, а для двумерной области  $\nabla \times \mathbf{u} := -\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$  и  $a \times \mathbf{u} := (-au_2, au_1)^T$  для скаляра  $a$

### 1.1.3 Граничные условия

Обозначим границы где задаются условия Дирихле для скорости через  $\Gamma_d$ , а с условиями Неймана —  $\Gamma_N$ . Для задач течения жидкости стандартными являются следующие граничные условия

- условие прилипания (noslip condition)  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (0, 0)$ ;
- условие скольжения или симметрии (slip condition)  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ ;
- условие на входе  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_{in}(\mathbf{x})$ ;
- условие на выходе  $p(\mathbf{x}) = p_{out}(\mathbf{x})$ ,  $\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ ;
- периодические граничные условия  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{x}_{period})$ ;

где  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль границы. В некоторых задачах граничное условие для давления может не задаваться и тогда используется ограничение

$$\int_{\Omega} p \, d\mathbf{x} = p_a, \quad (1.3)$$

которое дает единственное решение для давления.

## 1.2 Вычислительный алгоритм

### 1.2.1 Вариационная задача

Для задачи без ограничения для давления (1.3) используется стандартная вариационная задача. Для описания вариационной формулировки уравнений умножаем на тестовые функции, интегрируем по области и понижаем порядок производных. Вариационная задача заключается в нахождении функций  $\mathbf{u} \in V, p \in Q$ , которые удовлетворяют

$$\begin{aligned} F &= \int_{\Omega} \rho \mathcal{C}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}, p) \cdot \epsilon(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_{\Gamma_N} \mu (\nabla \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{n} + \mathbf{g} + p \mathbf{I} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{s} \\ &\quad - \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \nabla \cdot \mathbf{u} \, q \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \widehat{V}, \forall q \in \widehat{Q}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $V, \widehat{V} = H^1(\Omega)$  — пространства Соболева для векторных функций, которые удовлетворяют граничным условиям Дирихле для скорости,  $Q, \widehat{Q} = L^2(\Omega)$  — квадратично интегрируемые пространства скалярных функций, которые удовлетворяют условиям Дирихле для давления.

### 1.2.2 Ограничение для давления

Ограничение для давления добавляется в вариационную формулировку используя дополнительную неизвестную как множитель Лагранжа. Вариационная задача: нужно найти функции  $\mathbf{u} \in V, p \in Q$ , которые удовлетворяют

$$\begin{aligned} F = & \int_{\Omega} \rho \mathcal{C}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}, p) \cdot \epsilon(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \\ & - \int_{\Gamma_N} \mu (\nabla \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{n} + \mathbf{g} + p \mathbf{I} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, ds \\ & - \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \nabla \cdot \mathbf{u} \, q \, d\mathbf{x} \\ & \int_{\Omega} (p - p_a) r \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} c q \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \hat{V}, \forall q \in \hat{Q}, \forall r \in R, \end{aligned} \tag{1.5}$$

где  $R$  — множество действительных чисел.

### 1.2.3 Конечно-элементная аппроксимация

При дискретизации используются треугольные сетки для двумерных задач и тетраэдральные для трехмерных задач. Для аппроксимации скорости используется кусочно-квадратичные функции, а для давления — кусочно-линейные функции, данная комбинация элементов известна как элементы Тэйлор-Худ.

## 1.3 Программная реализация

...

### 1.3.1 Общее описание

...

### 1.3.2 Структура ПО

...

### 1.3.3 Ключевые элементы (описание классов)

...

### 1.3.4 Листинг программы

...

## 1.4 Тестирование ПО

...

### 1.4.1 Тестовые задачи (для демонстрации сходимости в зависимости от вычислительных параметров, ...)

Рассмотрим стационарную задачу в единичном квадрате  $\Omega = (0, 1)^2$  с точным решением

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_e &= (80e^{x_1}(x_1 - 1)^2x_1^2x_2(x_2 - 1)(2x_2 - 1), \\ &\quad -40e^{x_1}(x_1 - 1)x_1(x_1(3 + x_1) - 2)(x_2 - 1)^2x_2^2), \\ p_e &= 10(-424 + 156e + (x_2^2 - x_2)(-456 + e^{x_1})(456 + x_1^2)(228 - 5(x_2^2 - x_2)) \\ &\quad + 2x_1(-228 + (x_2^2 - x_2)) + 2x_1^3(-36 + x_2^2 - x_2) + x_1^4(12 + (x_2^2 - x_2)))). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Граничное и дополнительное условия

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_e, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad \int_{\Omega} p \, d\mathbf{x} = 0.$$

Возьмем следующие параметры модели

$$\rho = 1, \quad \mu = 0.01, \quad \mathbf{f} = \rho \mathcal{C}(\mathbf{u}_e) - \nabla \cdot \epsilon(\mathbf{u}_e, p_e).$$

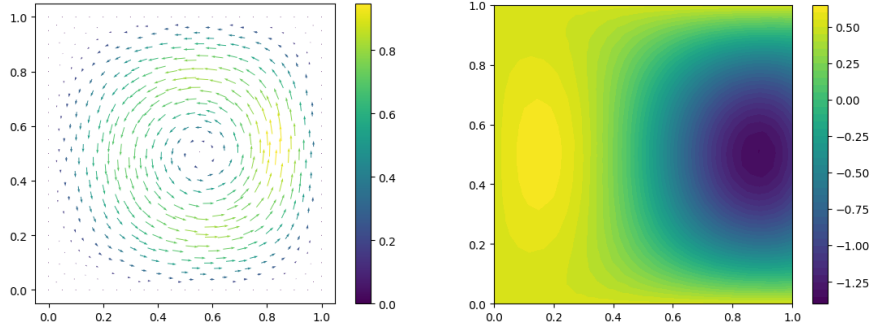


Рис. 1.1: Поле скорости и распределение давления

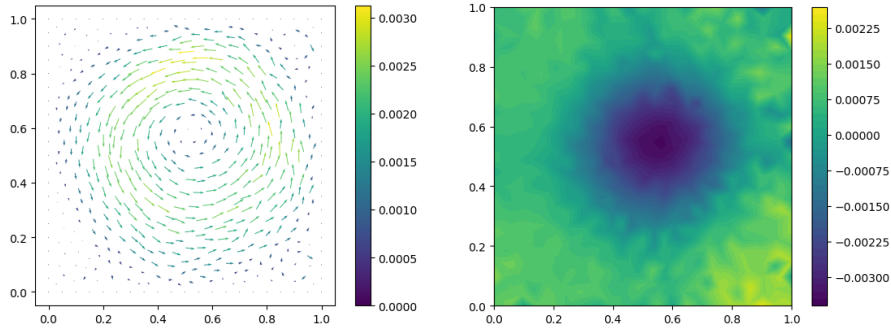


Рис. 1.2: Погрешности скорости и давления

### 1.4.2 Сходимость аппроксимации по пространству

Для исследования численного решения от размера вычислительной сетки рассматриваем последовательность сеток:  $8 \times 8$ ,  $16 \times 16$ ,  $32 \times 32$ ,  $64 \times 64$ ,  $128 \times$

128. Сравниваются различные нормы погрешности скорости и давления:

$$\begin{aligned} & \|u - u_e\|_{L^2}, \quad \|u - u_e\|_{L^\infty}, \quad \|u - u_e\|_{H_0^{div}}, \\ & \|p - p_e\|_{L^2}, \quad \|p - p_e\|_{L^\infty}, \quad \|p - p_e\|_{H_0^1}. \end{aligned}$$

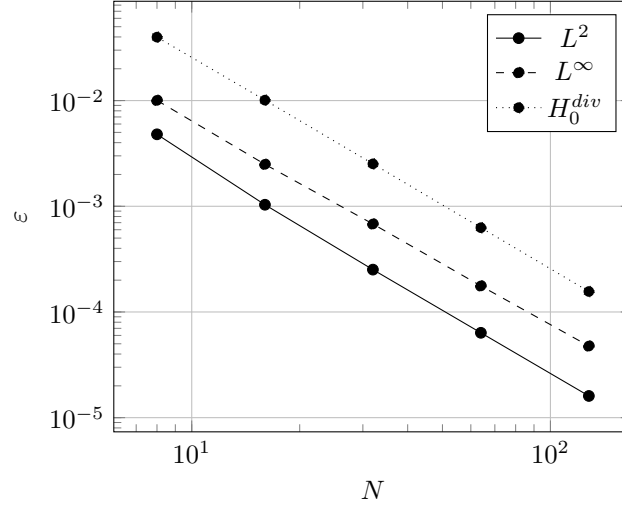


Рис. 1.3: Зависимость нормы погрешности скорости от размера сетки  $N \times N$

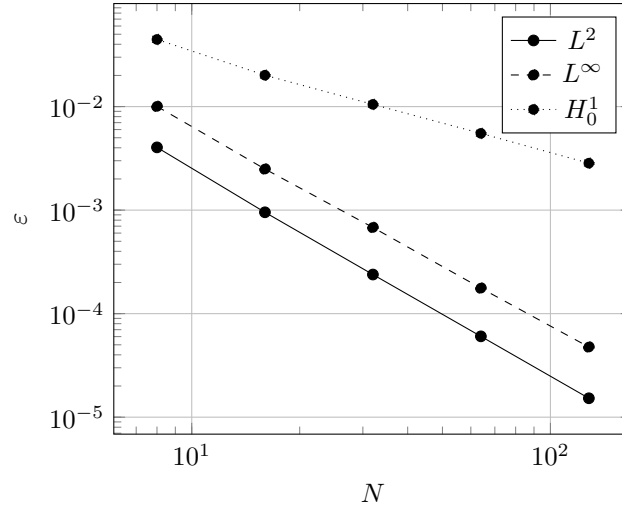


Рис. 1.4: Зависимость нормы погрешности давления от размера сетки  $N \times N$

### 1.4.3 Прямые линейные решатели

Из сравнения прямых решателей (см. рис. 1.5) наилучшее время показал MUMPS, который имеет параллельное решение системы. На рис. 1.6 приводится сравнение времени параллельного решения решателем MUMPS для вычислительных сеток  $128 \times 128$  и  $256 \times 256$ .

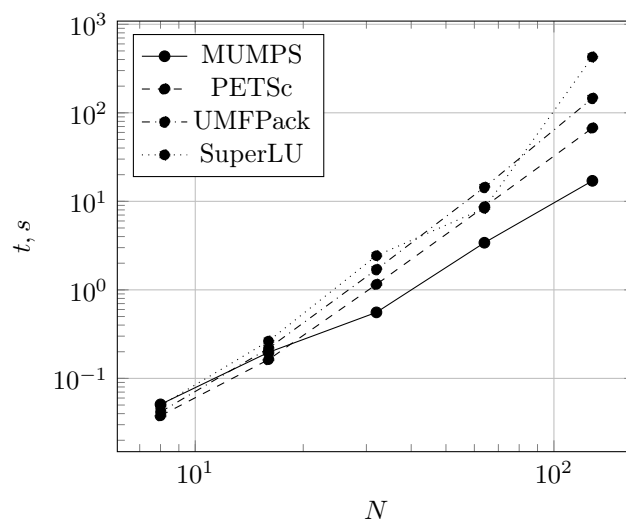


Рис. 1.5: Время решения прямых решателей от размера сетки  $N \times N$

#### 1.4.4 Итерационные линейные решатели

...

#### 1.4.5 Преобуславливатели линейных решателей

...

#### 1.4.6 Результаты по параллелизации

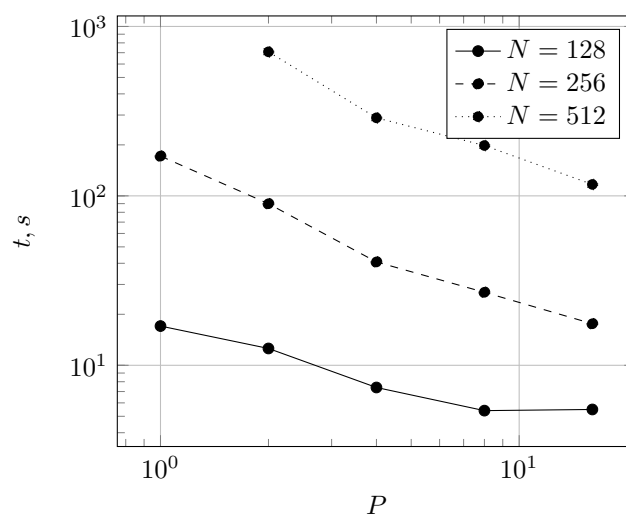


Рис. 1.6: Время решения решателя MUMPS от количества процессов  $P$



## 1.5 Верификация ПО

...

### 1.5.1 Матрица верификации (общее описание набор задач)

...

### 1.5.2 Задача 1

Рассмотрим течение Пуазейля в единичном квадрате. Будем использовать следующее точное решение, которое описывает лиминарное течение между двумя пластинами

$$\mathbf{u}_e = (0.5/\mu x_1(1 - x_1), 0), \quad p_e = 1 - x_0,$$

Сверху и снизу области находятся пластины (твердые стенки), слева и справа задаем давления. Граничные условия будут следующими

$$\mathbf{u} = (0, 0), \quad x_1 = 0, 1, \quad p = 1, \quad x_0 = 0, \quad p = 0, \quad x_0 = 1.$$

Параметры модели

$$\rho = 1, \quad \mu = 1, \quad \mathbf{f} = \rho \mathcal{C}(\mathbf{u}_e) - \nabla \cdot \epsilon(\mathbf{u}_e, p_e).$$

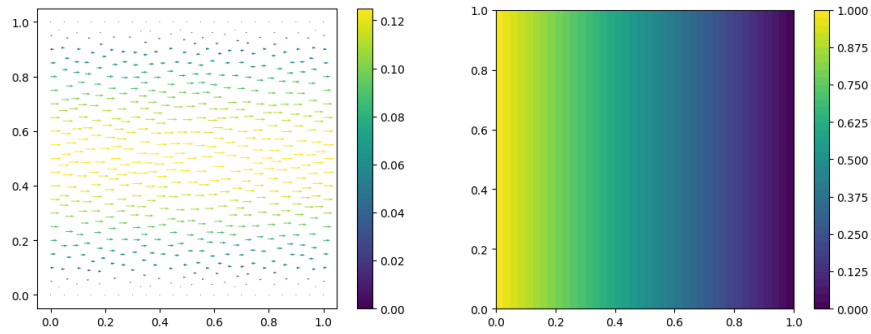


Рис. 1.7: Поле скорости и распределение давления

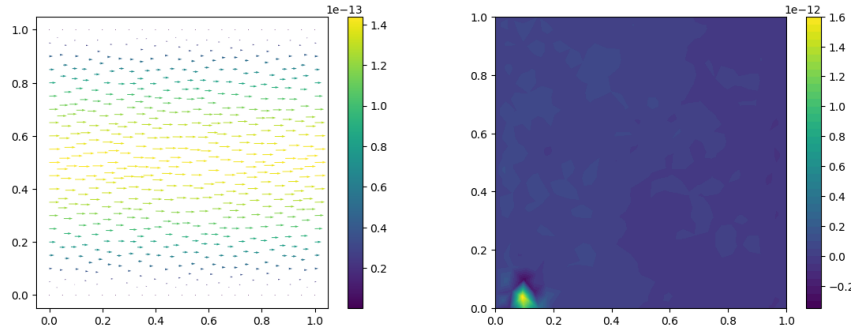


Рис. 1.8: Погрешности скорости и давления

### 1.5.3 Задача 2

Рассмотрим другую задачу в единичном квадрате, которая называется течением Лукаса. Точное решение

$$\mathbf{u}_e = (-\cos(\pi x_0)/\pi, -x_1 \sin(\pi x_0)), \quad p_e = 0.$$

Граничные и дополнительные условия

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_e, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad \int_{\Omega} p \, d\mathbf{x} = 0.$$

Параметры модели

$$\rho = 1, \quad \mu = 1, \quad \mathbf{f} = \rho \mathcal{C}(\mathbf{u}_e) - \nabla \cdot \epsilon(\mathbf{u}_e, p_e).$$

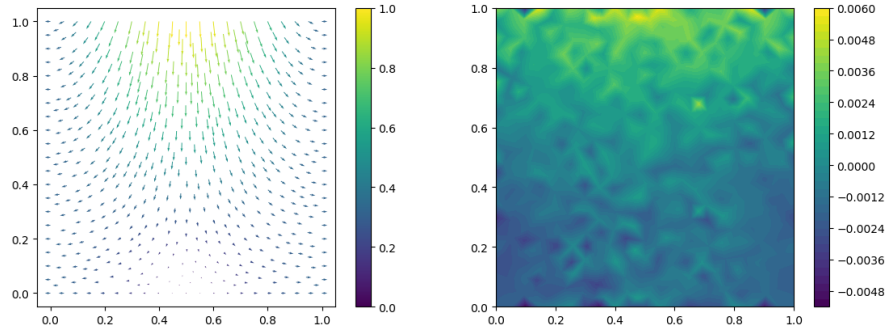


Рис. 1.9: Поле скорости и распределение давления

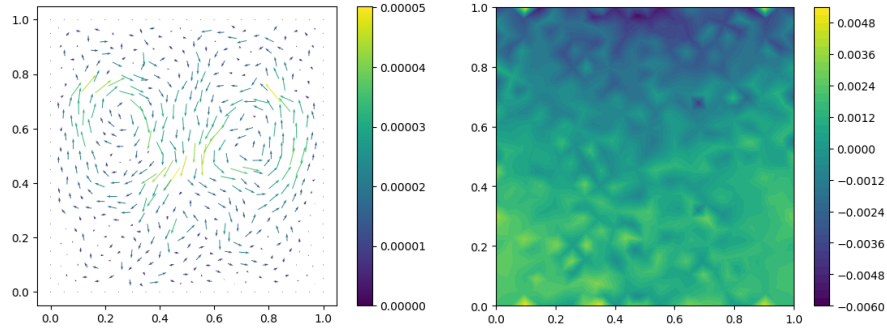


Рис. 1.10: Погрешности скорости и давления

### 1.5.4 Задача 3

Рассмотрим задачу в единичном квадрате с центром в начале координат  $\Omega = (-0.5, 0.5)^2$ . Данное точное решение называется вихрем Тейлора

$$\mathbf{u}_e = (-\cos(\pi x_0) \sin(\pi x_1), \sin(\pi x_0) \cos(\pi x_1)),$$

$$p_e = -\rho/4(\cos(2\pi x_0) + \cos(2\pi x_1)).$$

Граничные и дополнительные условия

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_e, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad \int_{\Omega} p \, d\mathbf{x} = 0.$$

Параметры модели

$$\rho = 1, \quad \mu = 1, \quad \mathbf{f} = \rho \mathcal{C}(\mathbf{u}_e) - \nabla \cdot \epsilon(\mathbf{u}_e, p_e).$$

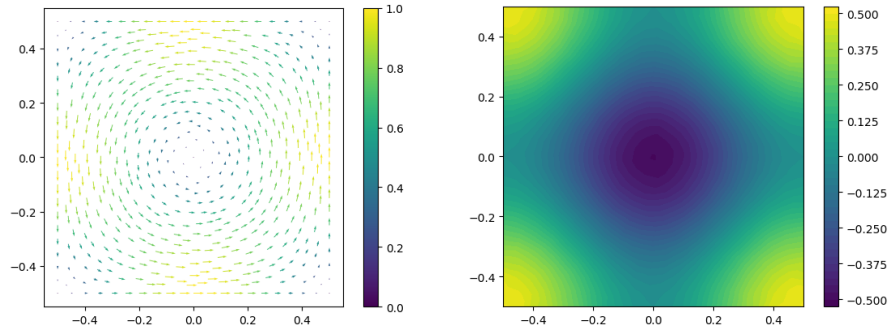


Рис. 1.11: Поле скорости и распределение давления

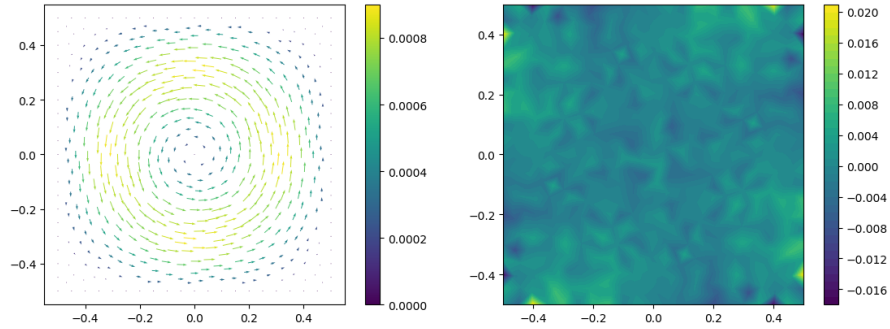


Рис. 1.12: Погрешности скорости и давления

### 1.5.5 Задача 4

Рассмотрим задачу в единичном квадрате без точного решения. Снизу и слева расположены твердые стенки

$$\mathbf{u} = (0, 0), \quad x_0 = 0, \quad \mathbf{u} = (0, 0), \quad x_1 = 0,$$

сверху задаем профиль скорости

$$\mathbf{u} = (0, -\sin(\pi(x_0^3 - 3x_0^2 + 3x_0))) , \quad x_1 = 1,$$

а справа условие на выходе

$$\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad x_0 = 1.$$

Также добавляем дополнительное условие для давления

$$\int_{\Omega} p \, d\mathbf{x} = 0.$$

Параметры модели

$$\rho = 1, \quad \mu = 1, \quad \mathbf{f} = (0, 0).$$

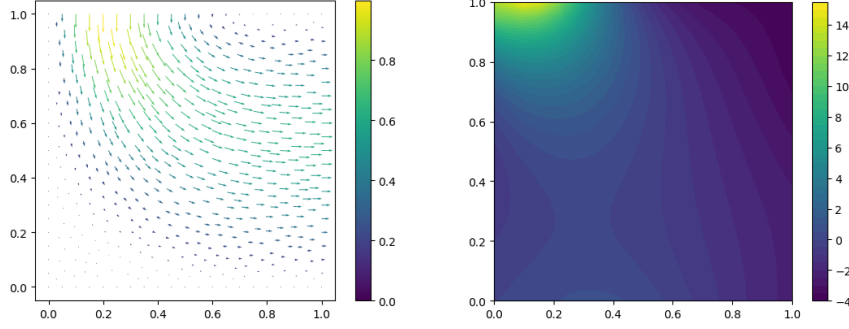


Рис. 1.13: Поле скорости и распределение давления

### 1.5.6 Задача 5

Рассмотрим задачу течения в канале с длиной  $L = 1$  и высотой широкой части  $H = 0.4$ . Слева расположена узкая часть канала с высотой  $h = 0.2$ , где задаем граничное условие на входе

$$\mathbf{u} = ((h - x_1)(h + x_1)/h^2, 0), \quad x_0 = 0.$$

На нижней границе задаем условие симметрии или по другому скольжения

$$\mathbf{u}_1 = 0, \quad x_1 = 0.$$

Справа определяем условие на выходе

$$\nabla(u) \cdot \mathbf{n} = (0, 0), \quad x_0 = L, \quad p = 0, \quad x_0 = L.$$

Оставшуюся верхнюю часть границы обозначим через  $\Gamma_t$  и задаем условие твердой стенки

$$\mathbf{u} = (0, 0), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_t.$$

Параметры модели

$$\rho = 1, \quad \mu = 1, \quad \mathbf{f} = (0, 0).$$

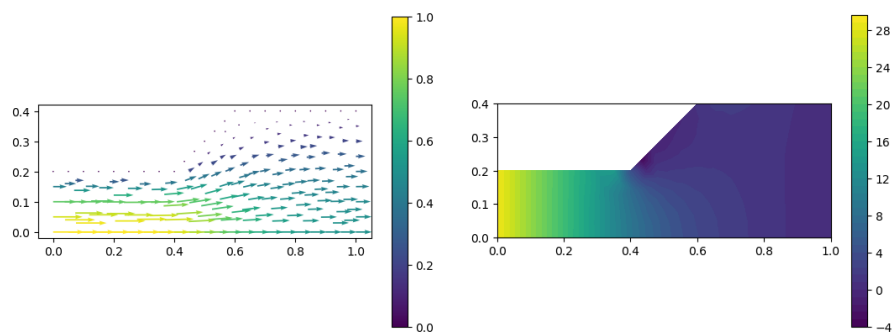


Рис. 1.14: Поле скорости и распределение давления