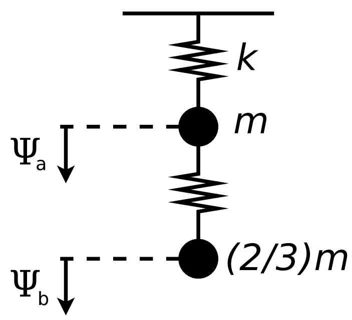
Física 2 (Física) - Cátedra Diana Skigin

Segundo Cuatrimestre de 2021

Guía 2: Sistemas acoplados discretos

Sistemas con más de un grado de libertad

1. Considere el sistema de la figura en ausencia de gravedad

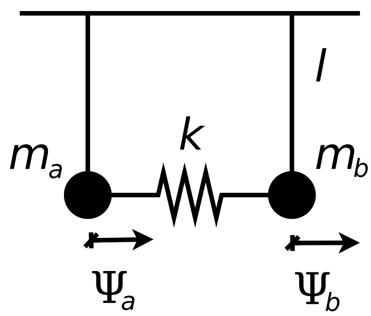


   a) Obtenga sus frecuencias naturales de oscilación y los modos normales correspondientes. Escriba las ecuaciones de movimiento de cada masa.

   b) Sabiendo que a $t = 0$ el sistema satisface las siguientes condiciones: $\Psi_a(0) = 1$, $\Psi_b(0) = 0$ y que se encuentra en reposo, encuentre el movimiento de cada partícula.

   c) Analice cómo se modifica el resultado por la presencia de la gravedad.

2. Considere el sistema de dos péndulos de igual longitud l pero de masas diferentes m_a y m_b, acoplados mediante un resorte de constante k.



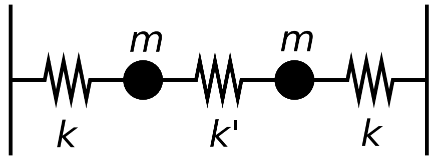
   a) Escriba las ecuaciones de movimiento de cada masa.

   b) Obtenga las frecuencias naturales del sistema y sus modos normales de oscilación. Interprete el significado físico de estos modos normales.

   c) Suponiendo que el acoplamiento es débil, es decir: $k \ll \frac{g}{l}\frac{m_a m_b}{m_a+m_b}$, y que las condiciones iniciales son $\dot{\Psi}_a(0) = 0$, $\dot{\Psi}_b(0) = 0$, $\Psi_a(0) = 0$, y $\Psi_b(0) = 1$; obtenga el movimiento de cada masa y grafíquelo en función del tiempo.

   d) Calcule los valores medios, en un ciclo rápido, de T_a y T_b, donde T indica energía cinética. Grafique $\langle T_a\rangle$ y $\langle T_b\rangle$, y analice las diferencias en el gráfico como función de las diferencias entre las masas ($m_a = m_b$ y m_a muy diferente de m_b). Calcule el valor medio de la energía de interacción entre las dos partículas.

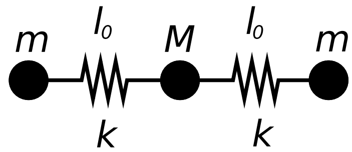
3. Considere el sistema de la figura. Las masas están apoyadas en una mesa sin rozamiento, sujetas a las paredes por resortes de constante k y unidas por otro resorte de constante k'.



   a) Obtenga las frecuencias y los modos transversales del sistema.

   b) ¿Bajo qué condiciones espera observar batidos? ¿Qué son los batidos?

4. Considere el sistema simplificado de la figura que se basa en una molécula triatómica simétrica. En el equilibrio dos átomos de masa m están situados a ambos lados del átomo de masa $M = 2m$ y vinculados por resortes de constante k y longitud natural l_0. Como sólo estamos interesados en analizar los modos longitudinales, supondremos que las masas se encuentran dentro de una canaleta que impide todo tipo de movimiento en la dirección transversal.



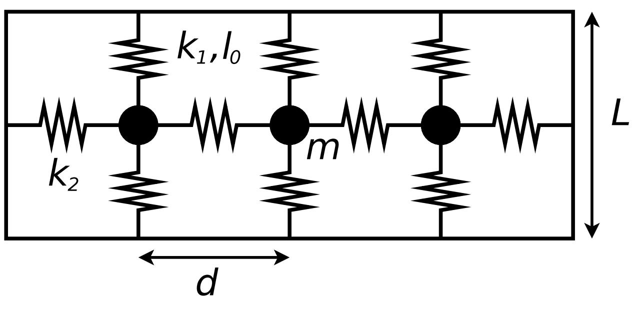
   a) Encuentre las ecuaciones de movimiento de cada masa.

   b) Halle las frecuencias de los modos normales.

   c) Dibuje las configuraciones de cada modo.

   d) Establezca cuáles deben ser las condiciones iniciales para excitar sólo el modo más alto (mayor frecuencia).

5. Considere el sistema de la figura, en la que los resortes verticales tienen longitud natural $l_{0,1}$ y constante k_1, y los horizontales tienen longitud natural $l_{0,2} = 0$ (*slinkies*) y constante k_2.



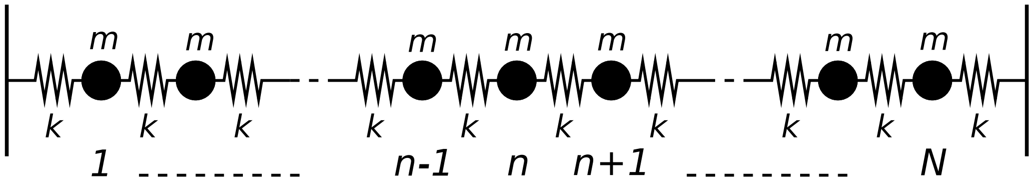
   a) Calcule las frecuencias propias y los modos normales.

   b) Considere que las condiciones iniciales son tales que el sistema oscila horizontalmente, estando su movimiento descripto por una superposición de los dos primeros modos. Halle la energía cinética de cada masa y la energía potencial del sistema, el promedio temporal de las mismas y la frecuencia de pulsación ω_p.

Datos: $l_{0,1}$, k_1, $l_{0,2}$, k_2, L, d, m.

Sistemas con muchos grados de libertad

6. Considere el sistema de N masas mostrado en la figura.



   a) Usando la aproximación de pequeños ángulos, escriba la ecuación de movimiento transversal para la partícula enésima.

   b) Proponga una solución de la forma:

$$\Psi_n^{(p)}(t) = A^{(p)} \cos\left(nk^{(p)}a + \alpha^{(p)}\right) \cos\left(\omega^{(p)}t + \phi^{(p)}\right)$$

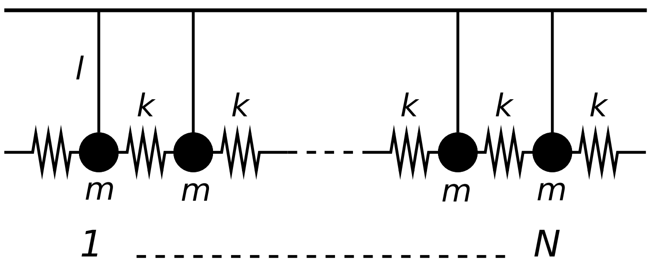
   Halle la relación de dispersión y grafíquela. ¿Depende esta relación de las condiciones de contorno? ¿Cuánto vale la frecuencia más baja? ¿Qué representa dicho modo?

   c) Obtenga las frecuencias correspondientes a los modos normales cuando ambos extremos están libres (atención: ¿cómo sería un "extremo libre" en esta configuración?) y escriba la solución general para la masa enésima.

   d) Ídem anterior, pero considerando que el extremo izquierdo está libre y el derecho fijo a la pared.

   e) Particularice los resultados de los dos ítems anteriores para el caso en que $N = 3$.

7. Considere el sistema de péndulos acoplados de la figura.



   a) Escriba la ecuación de movimiento. Proponga una solución semejante a la del problema anterior y halle la relación de dispersión. Compárela con la obtenida en el problema anterior. ¿Cuánto vale la frecuencia más baja? ¿Qué representa dicho modo?

   b) Obtenga las frecuencias correspondientes a los modos normales cuando los resortes de los extremos están fijos y dé las condiciones iniciales para excitar el primer armónico.

   c) Idem anterior, pero para el caso en que uno de los resortes de los extremos está libre.

8. Considere el sistema de dos péndulos acoplados, tal que uno de ellos es impulsado por una fuerza $F = F_0 \cos(\Omega t)$. Desprecie el amortiguamiento. Muestre que:

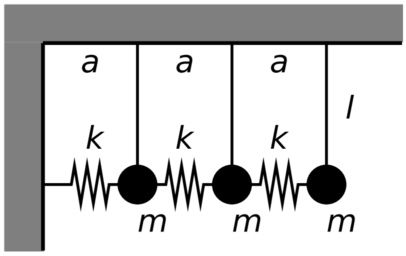
$$\Psi_\mathrm{a} \approx \frac{F_0}{2M} \cos(\Omega t) \left[\frac{1}{\omega_1^2 - \Omega^2} + \frac{1}{\omega_2^2 - \Omega^2}\right];$$

$$\Psi_\mathrm{b} \approx \frac{F_0}{2M} \cos(\Omega t) \left[\frac{1}{\omega_1^2 - \Omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2 - \Omega^2}\right];$$

$$\frac{\Psi_\mathrm{b}}{\Psi_\mathrm{a}} \approx \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2 - 2\Omega^2};$$

donde ω_1 es la menor de las frecuencias modales, ω_2 es la mayor y Ω es la frecuencia de excitación.

9. Considere el sistema de tres péndulos acoplados que se muestra en la figura.



a) Escriba la ecuación de movimiento para cada masa y encuentre las frecuencias propias y los modos normales del sistema.

b) Suponga que en el extremo libre se aplica una fuerza $F = F_0 \cos(\omega t)$. Escriba la ecuación de movimiento para cada masa y encuentre la solución estacionaria para cada modo. ¿Cuáles son las frecuencias de resonancia?