Física 2 (Física) - Cátedra Diana Skigin

Segundo Cuatrimestre de 2021

Guía 6: Paquetes de Ondas

1. En lo que sigue, encuentre con cuál de estos métodos se determina la velocidad de fase y con cuál la de grupo.

    a) Medir la velocidad del sonido en el aire, golpeando las manos y determinando el tiempo que transcurre entre el aplauso y el eco de un reflector ubicado a una distancia conocida.

    b) Medir la longitud de un tubo que resuena a una frecuencia conocida (y corregir por efectos de borde).

    c) Determinar la velocidad de la luz midiendo el tiempo que tarda un haz colimado en recorrer una distancia conocida.

    d) Encontrar la longitud de una cavidad resonante que oscila en un modo conocido a una frecuencia conocida.

2. Demuestre que la velocidad de grupo v_g y la velocidad de fase v_f están relacionadas por:

$$v_\mathrm{g} = v_\mathrm{f} - \lambda \frac{dv_\mathrm{f}}{d\lambda}$$

   ¿Cómo es $\frac{dv_\mathrm{f}}{d\lambda}$ en un medio no dispersivo? En ese caso, ¿cómo se relacionan la velocidad de grupo y la de fase?

3. Se quiere investigar la relación entre el ancho de un paquete y el desfasaje de las frecuencias que lo componen.

    a) Tome el siguiente pulso con un espectro gaussiano de ancho Δk centrado en k_0 (note que las frecuencias están en fase):

$$F(k) = A \exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{4\Delta k^2}\right].$$

    Calcule $f(x)$ y vea que tiene una envolvente gaussiana que modula una portadora de frecuencia k_0. Note que el pulso está centrado en $x = 0$ y que se cumple la relación $\Delta x \Delta k = 1/2$ (el paquete gaussiano es el de mínima incerteza).

    b) Ahora desfase las distintas frecuencias en forma lineal, tal que:

$$F(k) = A \exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{4\Delta k^2}\right] \exp\left[i\alpha(k-k_0)\right].$$

    Calcule $f(x)$ y vea que es el mismo pulso que en la parte (a), pero desplazado en α hacia la derecha (una fase lineal sólo corre la función).

    c) Ahora agregue una fase cuadrática, es decir:

$$F(k) = A \exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{4\Delta k^2}\right] \exp\left[i\beta(k-k_0)^2\right].$$

    Calcule $f(x)$ y vea que es un pulso gaussiano centrado en $x = 0$ pero con un ancho Δx que cumple:

$$\Delta x \Delta k = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 16\beta^2 \Delta k^4}.$$

    ¿Es cierto que si se quiere disminuir el ancho de un paquete siempre se debe aumentar Δk? Derive Δx con respecto a Δk de la expresión anterior y analice lo pedido.

Ayuda: $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[(x+a)^2\right] dx = \sqrt{\pi}$.

4. Si $\Psi(\omega)$ corresponde a un espectro de frecuencias cuadrado, o sea $\Psi(\omega) = 1/\Delta\omega$ para ω comprendida en el intervalo de ancho $\Delta\omega$ alrededor de ω_0, y cero en otra parte; vea que $\phi(t)$ está dada por:
$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\sin(t\Delta\omega/2)}{t\Delta\omega/2}\right] e^{i\omega_0 t}$$

   a) Grafique $\Psi(\omega)$ y $|\phi(t)|$.

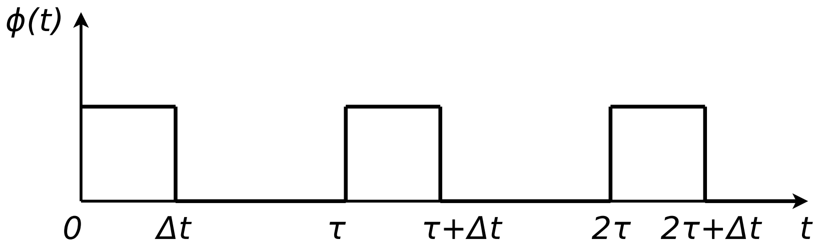
   b) Sea T un tiempo más prolongado que la duración de cualquier experimento que pueda idear. Muestre que si $\Delta\omega$ es suficientemente pequeño como para que $\Delta\omega T \ll 1$, entonces durante un tiempo menor que T, $\phi(t)$ es una función armónica de amplitud y fase casi constante.

5. Sea $\phi(t)$ una función real.

   a) Muestre que su transformada de Fourier $\Psi(\omega)$ cumple $\Psi(\omega) = \Psi(-\omega)$. Use esto para escribir a $\phi(t)$ como superposición de senos y cosenos.

   b) Muestre que la transformada de Fourier $\mathcal{F}$ es lineal, esto quiere decir que
$$\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g)$$
   donde f y g son funciones de x y a y b son constantes.

   c) Tomemos una pulsación que se repite N veces:



   Vea que la transformada de Fourier de un único pulso situado entre $(n\tau, n\tau + \Delta t)$ es igual a la transformada del pulso $(0, \Delta t)$ multiplicado por la fase $e^{in\phi}$. Calcule entonces la transformada de la pulsación cuadrada que se repite en un tiempo largo $T_{largo} = N\tau$.

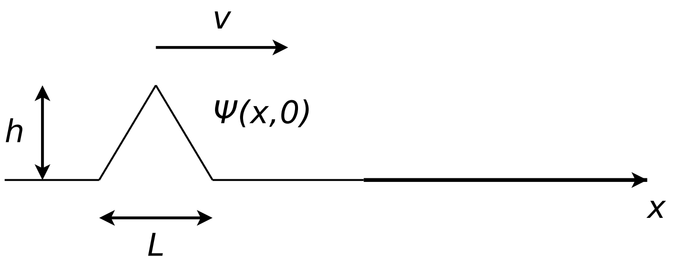
   d) Muestre que para un valor finito de T_{largo} el análisis de Fourier de esta pulsación cuadrada repetida casi periódicamente, consiste en una superposición de armónicos casi discretos de la frecuencia fundamental $\nu_1 = 1/T_1$, siendo realmente cada armónico un continuo de frecuencias que se extiende sobre una banda de ancho $\delta\nu \approx 1/T_{largo}$. Las armónicas más importantes caen entre 0 y $\Delta\nu = 1/\Delta t$.

   e) ¿Por qué vale $\Delta t \Delta\nu \approx 1$ si, en principio, podría valer $\Delta t \Delta\nu \gg 1$? ¿La misma pregunta es aplicable a $\delta\nu$ y T_{largo}?

6. Se tiene un pulso de ancho Δk centrado en k_0 tal que la siguiente es una buena aproximación para la relación de dispersión:
$$\omega(k) = \omega_0(k_0) + \omega'(k_0)(k - k_0) + \frac{1}{2}\omega''(k_0)(k - k_0)^2$$
   Si en $t = 0$ el pulso se propaga hacia $x < 0$, y se escribe:
$$\Psi(x, 0) = A \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(k - k_0)^2}{4\Delta k^2}\right] \exp(ikx)\, dk + c.c.$$

Calcule $\Psi(x,t)$. Vea cuál es la posición y el ancho del paquete como función del tiempo. ¿Es cierto que al viajar por un medio dispersivo cualquier paquete se ensancha?

7. Se tienen dos cuerdas semi–infinitas de distinta densidad lineal de masa, ρ_1 y ρ_2, unidas en un punto y sometidas a una tensión T. Sobre la primera se propaga hacia la derecha una perturbación de la forma indicada en la figura. Se conocen ρ_1, ρ_2, T, L y h. También se considera que los medios son no dispersivos.



   a) Hallar el desplazamiento $y(x,t)$.
   b) Explique cualitativamente como cambian estos resultados si el medio es dispersivo.