Física 2 (Física) - Cátedra Diana Skigin

Segundo Cuatrimestre de 2021

Guía 6: Paquetes de Ondas

Velocidad de grupo y de fase

1. Discuta cuál de estos métodos permite determinar la velocidad de fase y cuál la de grupo:

   a) Medir el tiempo que tarda un pulso sonoro (por ejemplo, un aplauso) en impactar sobre una superficie reflectora ubicada a una distancia conocida. y volver a su punto de partida.

   b) Medir la longitud de un tubo que resuena a una frecuencia conocida (y corregir por efectos de borde).

   c) Medir el tiempo que tarda un pulso lumínoso en recorrer una distancia conocida.

   d) Medir la longitud de una cavidad resonante que oscila en un modo y frecuencia conocidos.

2. Obtenga la velocidad de fase y de grupo para los siguientes casos. Compárelas y discuta en cuales casos ambas velocidades son similares.

   a) Ecuación de ondas clásica.

   b) Ecuación de Klein-Gordon, considerando las siguientes situaciones:

      1) $\omega_0 = 0$, con c y k_0 arbitrarios.

      2) $\omega_0 = 1\,\mathrm{s}^{-1}$ y $c = 1\,\mathrm{m\,s}^{-1}$, con k_0 tomando los valores: $1\,\mathrm{m}^{-1}$, $3\,\mathrm{m}^{-1}$, y $10\,\mathrm{m}^{-1}$.

3. Demuestre que la velocidad de grupo v_g y la velocidad de fase v_f están relacionadas por:

$$v_\mathrm{g} = v_\mathrm{f} - \lambda \frac{dv_\mathrm{f}}{d\lambda}$$

   ¿Cómo es $\frac{dv_\mathrm{f}}{d\lambda}$ en un medio no dispersivo? En ese caso, ¿cómo se relacionan la velocidad de grupo y la de fase?

Paquetes Gaussianos

4. **Función Gaussiana:** Considere la siguiente función de una coordenada arbitraria z:

$$f(z) = A \exp\left[-\frac{(z-\mu)^2}{4\Delta^2}\right],$$

   conocida como función de Gauss (*aka* campana de Gauss, función normal, etc.), cuyos parámetros A, μ y Δ son conocidos.

   a) Muestre analítica o gráficamente que esta función:

   - es definida positiva (si $A > 0$).
   - tiene un único máximo en $z = \mu$.
   - tiende a 0 para $z \to \pm\infty$.

b) Determine el desplazamiento en z respecto a la posición del máximo, necesario para que la altura de la función se reduzca a la mitad. Es decir, obtenga Δz tal que:

$$f(\mu \pm \Delta z) = {}^1\!/_2 f(\mu)$$

Utilice este resultado para definir el ancho de la campana. ¿Qué parámetro de la función determina dicho ancho?

c) ¿A qué altura de la función corresponde el ancho definido por 2Δ?

5. Se quiere investigar la relación entre el ancho de un paquete y el desfasaje de las frecuencias que lo componen.

a) Tome el siguiente pulso con un espectro gaussiano de ancho Δk centrado en k_0 (note que las frecuencias están en fase):

$$\hat{\psi}(k) = A \exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{4\Delta k^2}\right].$$

Calcule $\psi(x)$ y vea que tiene una envolvente Gaussiana que modula una portadora de frecuencia k_0. Note que el pulso está centrado en $x = 0$ y que se cumple la relación $\Delta x \Delta k = {}^1\!/_2$ (el paquete Gaussiano es el de mínima incerteza).

b) Ahora desfase las distintas frecuencias en forma lineal, tal que:

$$\hat{\psi}(k) = A \exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{4\Delta k^2}\right] \exp\left[i\alpha(k-k_0)\right].$$

Calcule $\psi(x)$ y vea que es el mismo pulso que en la parte (a), pero desplazado en α hacia la derecha (una fase lineal sólo corre la función).

c) Ahora agregue una fase cuadrática, es decir:

$$\hat{\psi}(k) = A \exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{4\Delta k^2}\right] \exp\left[i\beta(k-k_0)^2\right].$$

Calcule $\psi(x)$ y vea que es un pulso gaussiano centrado en $x = 0$ pero con un ancho Δx que cumple:

$$\Delta x \Delta k = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 16\beta^2 \Delta k^4}.$$

Verifique que el producto de ambos anchos cumple la relación de incerteza general $\Delta x \Delta k \geq {}^1\!/_2$, y luego determine el valor de β tal que se cumpla la relación de mínima incerteza $\Delta x \Delta k = {}^1\!/_2$.

d) A partir del resultado anterior, discuta si es cierto que, si se quiere disminuir el ancho espacial de un paquete (Δx), *siempre* se debe aumentar su ancho espectral (Δk). ¿Contradice esto a la relación de incerteza mínima?

Sugerencia: Puede ser útil obtener Δx como función de Δk, y luego graficar o derivar la primera en función de la segunda.

Ayuda: $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[(x+a)^2\right] dx = \sqrt{\pi}$.

6. Repita el ejercicio anterior, considerando que el espectro $\hat{\psi}(k)$ corresponde a un pulso que se propaga en un medio arbitrario evaluado en $t = 0$. Resuelva analíticamente a partir de la linealización de la relación de dispersión y halle $\psi(x,t)$ en cada caso. ¿Qué supuestos debe verificar el espectro para que el desarrollo sea lo más exacto posible?

7. Se tiene un pulso de ancho Δk centrado en k_0 tal que la siguiente es una buena aproximación para la relación de dispersión:

$$\omega(k) = \omega_0(k_0) + \omega'(k_0)(k-k_0) + \frac{1}{2}\omega''(k_0)(k-k_0)^2$$

donde $\omega' = \frac{d\omega}{dk}$ y $\omega'' = \frac{d^2\omega}{dk^2}$. Si en $t=0$ el pulso se propaga hacia $x<0$, y se escribe:

$$\psi(x,0) = \mathfrak{Re}\left[A\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{4\Delta k^2}\right]\exp(ikx)\,dk\right],$$

calcule $\psi(x,t)$. Obtenga la posición y el ancho del paquete como función del tiempo. ¿Es cierto que cualquier paquete se ensancha al viajar por un medio dispersivo?

Propiedades de la transformada de Fourier

8. Sea $f(t)$ una función real del tiempo. Muestre que su transformada de Fourier $\mathcal{F}[f]$ es una función de la frecuencia angular $\hat{f}(\omega)$ que cumple $\overline{\hat{f}(\omega)} = \hat{f}(-\omega)$. Use esto para escribir a $f(t)$ como superposición de senos y cosenos.

9. Muestre que la transformada de Fourier $\mathcal{F}$ es una transformación lineal, es decir:

$$\mathcal{F}[af+bg] = a\mathcal{F}[f] + b\mathcal{F}[g]$$

donde f y g son funciones de x, y a y b son constantes.

Paquetes cuadrados

10. Considere un espectro de frecuencias cuadrado, centrado en una frecuencia angular ω_0 y de ancho $\Delta\omega$:

$$\hat{\phi}(\omega) = \begin{cases} \Delta\omega^{-1}, & \text{si } \omega \in [\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}] \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases} \tag{1}$$

   a) Grafique el espectro $\hat{\phi}(\omega)$.

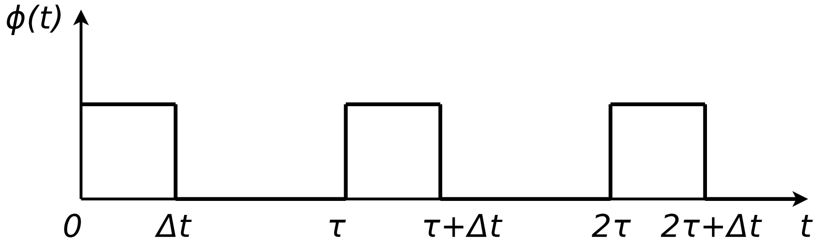
   b) Verifique que este espectro corresponde a una función $\phi(t)$ dada por:

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(\frac{\Delta\omega}{2}t)}{\frac{\Delta\omega}{2}t}\right]e^{i\omega_0 t}$$

   y grafique su módulo $|\phi(t)|$.

   c) Sea T un tiempo más prolongado que la duración de cualquier experimento que pueda idear. Muestre que si $\Delta\omega$ es suficientemente pequeño como para que $\Delta\omega T \ll 1$, entonces durante un tiempo menor que T, $\phi(t)$ es una función armónica de amplitud y fase prácticamente constantes. Elija valores numéricos razonables para T y $\Delta\omega$, y grafique el espectro correspondiente.

11. Considere una secuencia de pulsos de duración Δt y amplitud A_0 que se repiten N veces con período τ (con $\tau < \Delta t$), dando lugar a la siguiente señal $\phi(t)$:



a) Considere la función que describe a un pulso situado en el intervalo $[n\tau,(n+1)\tau]$:

$$\phi_n(t) = \begin{cases} A_0, & \text{si } t \in [n\tau, n\tau + \Delta t] \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases} \tag{2}$$

de forma que $\phi(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \phi_n(t)$. Compruebe que la transformada de $\phi_n(t)$ es igual a la transformada de $\phi_0(t)$, multiplicada por una fase $e^{in\theta}$.

b) Obtenga $\hat{\phi}_0(\omega)$ y a partir de la misma obtenga $\hat{\phi}(\omega)$.

c) Grafique el espectro de amplitudes $|\hat{\phi}(\omega)|$ o bien de energías $|\hat{\phi}(\omega)|^2$.
Ayuda: Puede resultarle útil la siguiente identidad para series geométricas:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-2i\alpha n} = \frac{\mathrm{e}^{-2i\alpha N} - 1}{\mathrm{e}^{-2i\alpha} - 1} = \mathrm{e}^{-i\alpha(N-1)} \frac{\sin(\alpha N)}{\sin(\alpha)}$$

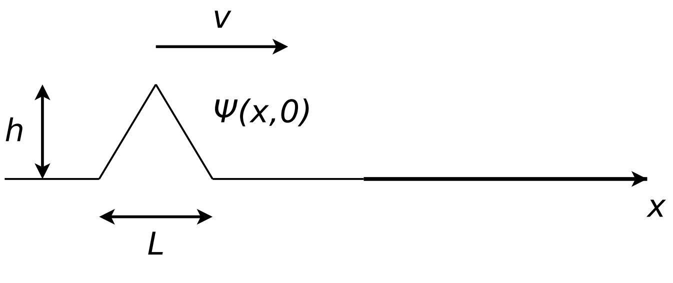
con $\alpha = \pi\nu\tau$.

d) Considere la duración total de la señal $T_{\text{tot}} = N\tau$. Verifique que, para un valor finito de T_{tot}, el espectro está formado por una superposición de armónicos casi discretos de la frecuencia fundamental $\nu_1 = \tau^{-1}$, siendo realmente cada armónico un continuo de frecuencias que se extiende sobre una banda de ancho $\Delta\nu \approx T_{\text{tot}}^{-1}$. Verifique también que los componentes armónicos más importantes se encuentran en el intervalo de frecuencias dado por $[0, \nu_{\text{máx}}]$, con $\nu_{\text{máx}} = \Delta t^{-1}$.

e) ¿Por qué vale $\nu_{\text{máx}}\Delta t \approx 1$ si, en principio, podría valer $\nu_{\text{máx}}\Delta t \gg 1$? ¿La misma pregunta es aplicable a $\Delta\nu$ y T_{tot}?

Propagación de paquetes en interfaces

12. Se tienen dos cuerdas semi–infinitas de distinta densidad lineal de masa, μ_1 y μ_2, unidas en un punto y sometidas a una tensión T_0. Sobre la primera, se propaga hacia la derecha una perturbación de la forma indicada en la figura, a velocidad v. Se conocen μ_1, μ_2, T_0, L y h.



a) Hallar el desplazamiento $\psi(x,t)$ considerando que los medios son no dispersivos.

b) Explique cualitativamente cómo cambian estos resultados si el segundo medio es dispersivo.