Física 2 (Física) – Cátedra Diana Skigin

Segundo Cuatrimestre de 2021

Repaso: Números Complejos

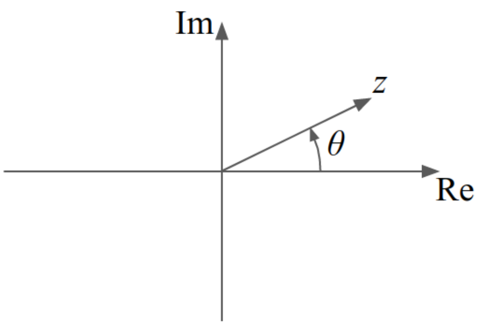
1. Para cada uno de los siguientes números, halle sus partes real e imaginaria, y dibújelos en el plano complejo:

   a) 0
   b) 1
   c) -1
   d) i
   e) $-i$
   f) i^2
   g) $1+i$
   h) $0i$
   i) $1/2$
   j) $(1/2)i$
   k) π
   l) πi
   m) $-1-i$
   n) $a+bi$ (considere todas las combinaciones posibles de a y b positivos y negativos)
   ñ) $\cos(\theta)+i\sin(\theta)$ (considere todos los valores posibles de θ en un intervalo de longitud 2π)
   o) $(a^2+b^2)^{1/2}$
   p) $(a^2-b^2)^{1/2}$
   q) $i(a^2+b^2)^{1/2}$
   r) $i(a^2-b^2)^{1/2}$

   Nota: a, b y θ son números reales.

2. Para un número complejo z, se define su módulo $|z|$ como la distancia euclídea que separa a z del origen del plano complejo. Escriba la expresión más general para el módulo de z en función de sus partes real e imaginaria, y luego aplíquela a cada caso del primer ejercicio.

3. Se define el argumento $\arg(z)$ de un número complejo z como el ángulo θ formado entre el eje real y la línea que va desde el origen a z, considerando positivo al sentido de giro que va desde el eje $\mathfrak{Re}^+$ hacia el eje $\mathfrak{Im}^+$.



Halle el argumento para todos los números complejos del primer ejercicio.

4. Se define el conjugado de un número complejo $z = a + bi$ como $\overline{z} = a - bi$.

   a) Verifique que el conjugado de un número real es ese mismo número real.
   b) Verifique que el conjugado de un número imaginario puro es ese mismo número multiplicado por -1.
   c) Verifique que el conjugado de un número complejo arbitrario corresponde a una reflexión (en el plano complejo) del número original respecto al eje real.
   d) ¿Cuál es el conjugado de 0?

   Nota: El conjugado de z suele representarse también como z^*.

5. Obtenga el conjugado para todos los números del primer ejercicio, y determine sus partes real e imaginaria, su módulo y su argumento. Si es posible, use los resultados anteriores para ahorrar cuentas.

6. Verifique la siguiente identidad:

$$z\overline{z} = |z|^2$$

7. Halle las partes real e imaginaria de los siguientes números:

   a) $\frac{1+i}{1-i}$
   b) $\frac{1+i}{1+i}$
   c) $(1+i)(1-i)$
   d) $(1+i)^2$
   e) $(1+i)^3$
   f) $(1+i)^4$
   g) $\sqrt{(1+i)(1-i)}$
   h) i^0
   i) i^n (con n entero positivo)
   j) $1/i^n$ (con n entero positivo)
   k) $1/(a+bi)$ (con a y b número reales, y $|a+bi|$ distinto de 0)
   l) $1/(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

   Ayuda: Puede ser útil emplear la identidad del ejercicio anterior para trabajar con denominadores complejos.

8. ¿Cuáles de los siguientes datos me permiten determinar completamente a un número complejo cualquiera?

   a) Su parte real y su parte imaginaria
   b) Su parte real y la parte imaginaria de su conjugado
   c) Las partes real e imaginaria de su conjugado
   d) Su módulo y su parte real
   e) Su módulo y su parte imaginaria
   f) Su módulo y su argumento
   g) Su argumento y su parte real
   h) Su argumento y su parte imaginaria

9. Compare el plano complejo con el plano $\mathbb{R}^2$. Analice similitudes y diferencias entre vectores de $\mathbb{R}^2$ y números complejos. ¿Es posible pensar a un número complejo como un vector? ¿Qué forma de representar un número complejo se parece a la representación cartesiana de un vector? ¿Y a la representación polar?

10. Considere la fórmula de Euler:
$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$
A partir de la misma, demuestre la identidad de Euler:
$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

11. Un número complejo z puede representarse en forma polar de la siguiente manera:
$$z = |z|e^{i\arg(z)}$$
    a) Obtenga las partes real e imaginaria a partir de dicha representación.
    b) Verifique, a partir de la definición de complejo conjugado, que el conjugado de $e^{i\theta}$ es $e^{-i\theta}$.

12. Obtenga y grafique las partes real e imaginaria de las siguientes funciones del tiempo:
    a) $\exp(i\omega t)$
    b) $\exp(-i\omega t)$
    c) $\exp(i(\omega t + \pi/2))$
    d) $\exp(i(\omega t - \pi/2))$
    e) $\exp(i\omega_1 t) + \exp(i\omega_2 t)$
    f) $i\exp(i\omega t)$
    g) $-\exp(i\omega t)$
    h) $1/2(\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t))$
    i) $-1/2i(\exp(i\omega t) - \exp(-i\omega t))$

13. A partir de la fórmula de Euler, demuestre que:
    a) $\cos(x) = 1/2(e^{ix} + e^{-ix})$
    b) $\sin(x) = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$
    c) $\cosh(x) = \cos(ix)$ (con x real)
    d) $\sinh(x) = -i\sin(ix)$ (con x real)

14. Verifique la identidad trigonométrica del coseno de la suma y resta de ángulos mediante la fórmula de Euler. **Ayuda:** obtenga la parte real de $\exp(ix)exp(\pm iy)$. ¿Cómo puede obtener la identidad correspondiente al seno?

15. Use la fórmula de Euler para hallar la raíz cuadrada de i (escrita mediante sus partes real e imaginaria).