Física 2 (Física) - Cátedra Diana Skigin

Segundo Cuatrimestre de 2021

Guía 3: Sistemas continuos

Condiciones de contorno en cuerdas y tubos

1. Se tiene una cuerda de longitud L y densidad lineal de masa μ sometida a una tensión T_0. Proponga como solución de la ecuación de ondas para un modo normal a la expresión: $\Psi(x,t) = A\sin(kx+\varphi)\cos(\omega t+\theta)$. Tome el sistema de coordenadas con $x=0$ en un extremo de la cuerda y $x=L$ en el otro. Encuentre la forma particular que adopta la solución propuesta en los siguientes casos:

   a) $\Psi(0,t) = \Psi(L,t) = 0$ (ambos extremos están fijos).

   b) $\Psi(0,t) = 0$ y $\frac{\partial\Psi}{\partial x}(L,t) = 0$ (un extremo está fijo y el otro está libre). ¿Imponer que un extremo se encuentre "libre" es equivalente a no imponer condiciones de contorno sobre ese extremo? ¿Cómo lograría un extremo "libre" para la cuerda?

   c) $\frac{\partial\Psi}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial\Psi}{\partial x}(L,t) = 0$ (ambos extremos se encuentran libres). ¿A qué corresponde el modo de frecuencia mínima? ¿Cuánto vale la frecuencia de oscilación de ese modo?

   d) Ahora tome un sistema de coordenadas con $x=0$ en el centro de la cuerda. Halle la forma que adopta la solución general propuesta si $\Psi(-L/2,t) = \Psi(L/2,t) = 0$ (ambos extremos fijos).

2. Se tiene una cuerda de 20 cm de longitud y 5 g de masa, sometida a una tensión de 120 N. Calcule sus modos naturales de oscilación. ¿Son todos audibles para el oído humano?

3. Las cuatro cuerdas de un violín, considere que todas son de igual longitud, emiten en su modo fundamental las notas: sol$_2$ (198/s); re$_3$ (297/s); la$_3$ (440/s) y mi$_4$ (660/s). La primera cuerda es de aluminio ($\rho = 2.6$ g/cm^3 y diámetro $d_1 = 0.09\,\text{cm}$); las dos siguientes son de otro material ($\rho = 1.2$ g/cm^3) y diámetros $d_2 = 0.12\,\text{cm}$ y $d_3 = 0.1\,\text{cm}$, y la cuarta es de acero ($\rho = 7.5$ g/cm^3) y diámetro $d_4 = 0.1\,\text{cm}$. Calcular las tensiones a las que deben estar sometidas con respecto a la primera.

4. Se tiene un tubo de longitud L. Considere las siguientes posibilidades:

   - Está cerrado en ambos extremos, lleno de aire en su interior.
   - Tiene un extremo cerrado y el otro abierto.
   - Ambos extremos están abiertos.

   Datos: velocidad de propagación de las ondas v_s, L, P_0 (presión atmosférica), $\rho_0 = \gamma P_0/v_s^2$.

   Hallar, para cada una de dichas situaciones:

   a) Las posibles longitudes de onda con las que puede vibrar el aire en el tubo, y sus correspondientes frecuencias.

   b) Elija un sistema de referencia conveniente, y escriba la expresión más general para el desplazamiento de las partículas $\Psi(x,t)$. En dicha expresión, ¿qué parámetros conoce? ¿De qué dependen los parámetros que no conoce?

   c) A partir de la expresión hallada en (b), hallar $\delta p(x,t)$ (presión en cada punto, tomando como referencia la atmosférica). ¿Cuál es la diferencia de fase entre ellas? ¿Cuánto vale la amplitud de presión?

d) Hallar $\rho(x,t)$ (densidad). ¿Cuánto vale su amplitud?

5. *a*) ¿Qué longitud debe tener un tubo de órgano abierto en ambos extremos para que produzca en el aire un sonido de 440 Hz?

   b) ¿Qué longitud deberá tener un tubo de órgano cerrado en uno de sus extremos para que produzca el mismo tono en su primer armónico?

6. Se tiene un tubo cerrado en uno de sus extremos; su longitud es menor a 1m. Se acerca al extremo abierto un diapasón que está vibrando con $\nu = 440\,\mathrm{Hz}$. Considere $v_s = 330$ m/s.

   a) Hallar las posibles longitudes del tubo para que haya resonancia. Para cada una de ellas, ¿en qué modo está vibrando el aire contenido en el tubo?

   b) Repetir (a) si el tubo está abierto en ambos extremos.

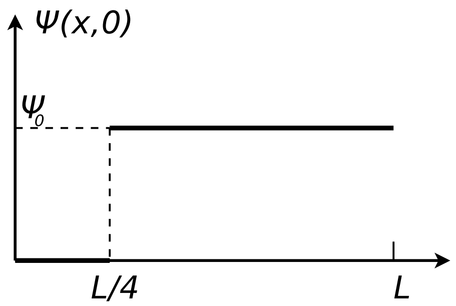
Condiciones iniciales en cuerdas y tubos

7. Considere una cuerda de longitud L, de densidad de masa uniforme μ_0 sujeta en ambos extremos y sometida a una tensión T_0. A $t = 0$ la cuerda se suelta de modo que su forma está dada por la siguiente función: $\Psi(x,0) = H(x) = \sin(\pi x/L) + (1/3)\sin(3\pi x/L) + (1/5)\sin(5\pi x/L)$, si se toma un sistema de coordenadas tiene $x = 0$ en un extremo de la soga y $x = L$ en el otro.

   a) Halle $\Psi(x,t)$.

   b) Grafique $\Psi(x,t)$ para $\omega_1 t = 0, \pi/5, \pi/3$ y $\pi/2$. ¿Qué clase de simetría tiene $\Psi(x,t)$ alrededor de $\omega_1 t = \pi/2$? ¿y alrededor de π?. ¿Cómo espera que sea $\Psi(x,t)$ para $\omega_1 t = 2\pi$? (ω_1 es la frecuencia fundamental).

8. Considere una cuerda de longitud L, de densidad de masa uniforme μ_0 sometida a una tensión T_0, con un extremo fijo y el otro libre. Se le da a la cuerda la forma mostrada en la figura, y a $t = 0$ se la suelta.



   a) Usando el sistema de coordenadas indicado en la figura, halle $\Psi(x,t)$.

   b) Graficar $\Psi(x,t)$ para $\omega_1 t = 0, \pi$ y 2π.

   c) Si tomara un sistema de coordenadas con el origen en el extremo libre de la cuerda, diga qué es lo que cambiaría. ¿Es conveniente ese sistema?

9. Considere una cuerda de longitud L, siendo T_0 su tensión y μ_0 su densidad lineal. Sea $\Phi(x,t)$ la elongación de la cuerda.

   a) Escriba la expresión más general que representa un modo normal en dicha cuerda, es decir, la expresión más general de una onda estacionaria.

b) Sabiendo que la cuerda tiene un extremo libre y otro fijo, y que el sistema de coordenadas con el que trabaja es tal que el extremo libre está en $x = 0$ y el extremo fijo está en $x = L$, imponga las condiciones de contorno y determine las constantes pertinentes.

c) Usando la relación de dispersión, obtenga las posibles frecuencias temporales ν_n.

d) Si $\Phi(x,0) = 0$ y $\dot{\Phi}(x,0) = V_0 \cos\left(\frac{3\pi}{2L}x\right)$, siendo $0 \leq x \leq L$, obtenga la amplitud y fase de cada modo y halle $\Phi(x,t)$.

10. Dada una cuerda de longitud L y densidad de masa uniforme μ, sometida a una tensión T_0 con ambos extremos fijos, demostrar que si $\Phi(x,0)$ y $\dot{\Phi}(x,0)$ son simétricas con respecto al centro de la cuerda, los modos con números de onda $k_p = 2p\pi/L$ no se excitan.

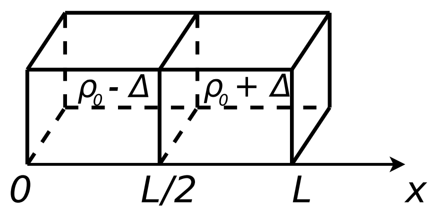
11. Considere una cuerda de longitud L sujeta en ambos extremos y sometida a una tensión T_0, que consta de dos tramos: uno de longitud L_1 y densidad de masa uniforme μ_1, y otro de longitud L_2 y densidad de masa uniforme μ_2.

    a) Halle la expresión más general para un modo normal en dicha cuerda. Plantee las condiciones de contorno y halle las condiciones que deben cumplir los distintos parámetros.

    b) Considere que $L_1 = 3L_2$ y que $\mu_2 = 9\mu_1$. Hallar los modos normales en este caso.

12. Se tiene una cuerda de longitud L y densidad de masa uniforme μ, sometida a una tensión T_0 y fija en ambos extremos. Se tiene además que una fuerza de amortiguamiento proporcional a la velocidad de la cuerda actúa en cada punto de la misma. Hallar la forma más general de $\Phi(x,t)$.

13. Se tiene un tubo de longitud L cerrado en ambos extremos como se indica en la figura. El tubo presenta un tabique ubicado en la mitad del mismo. De un lado del tabique hay un gas de densidad $\rho_0 - \Delta$ y del otro lado hay un gas de densidad $\rho_0 + \Delta$ (considere $\Delta \ll \rho_0$). Todo el gas se encuentra en reposo. A $t = 0$ se quita el tabique y se deja evolucionar al sistema.



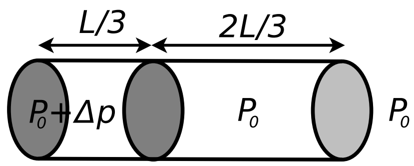
    a) Escriba la expresión para un modo normal $\Psi_n(x,t)$ en el tubo, imponiendo las condiciones de contorno. ¿Cuáles son las longitudes de onda permitidas? (Ψ es el desplazamiento de los elementos del gas).

    b) Escriba la expresión de $\rho(x,0)$ y de $\Psi(x,0)$; grafíquelas. Sugerencia: hallar $\Psi(x,0)$ a partir de $\rho(x,0)$ usando las condiciones de contorno.

    c) Usando las condiciones iniciales, halle $\Psi(x,t)$. Calcule $\rho(x,0)$.

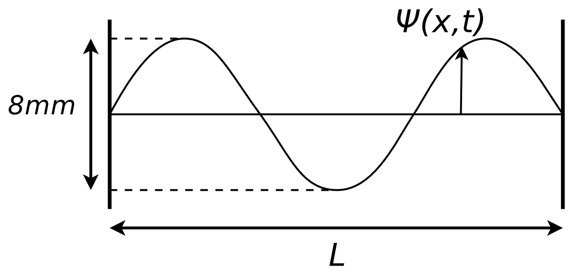
    Datos: ρ_0, Δ, L, velocidad del sonido en el gas v_{s}.

14. Se tiene un tubo dividido en dos regiones separadas por un tabique. En una de ellas se tiene una presión $P = P_0 + \Delta p$ (constante). La otra región está abierta a la atmósfera, teniendo presión P_0. A $t = 0$ se remueve el tabique. Hallar $\delta p(x,t)$, $\Psi(x,t)$ y $\delta\rho(x,t)$.



Datos: P_0, $\Delta p \ll P_0$, L, γ y la velocidad del sonido en el gas $v_{\rm s}$.

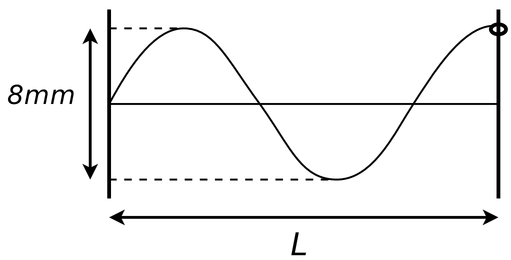
15. Se tiene una cuerda de longitud $L = 0{,}6\,$m, fija en sus dos extremos, que se encuentra oscilando en uno de sus modos normales como se muestra en la figura. La velocidad de propagación de las ondas en dicha cuerda es $v = 80$ m/s.



   a) Escribir $\Psi(x,t)$ (la elongación en un punto de la cuerda), sabiendo que a $t = 0$ la elongación de todos los puntos es nula; que la amplitud total máxima de la onda es de 8 mm, y que $\dot{\Psi}(L/2,0) > 0$.

   b) Hallar $\Psi_1(x - vt)$ y $\Psi_2(x + vt)$ tales que $\Psi(x,t) = \Psi_1(x - vt) + \Psi_2(x + vt)$; es decir, escribir a $\Psi(x,t)$ como la superposición de dos ondas viajeras.

16. Se tiene una cuerda de longitud L =1 m, con un extremo fijo y uno libre, oscilando en el modo normal que se muestra en la figura. La velocidad de propagación de las ondas en dicha cuerda es $v = 80$ m/s, y el desplazamiento de las partículas a $t = 0$ es el máximo posible para este modo, siendo $\Psi(L,0) > 0$. La amplitud total máxima es de 8 mm.

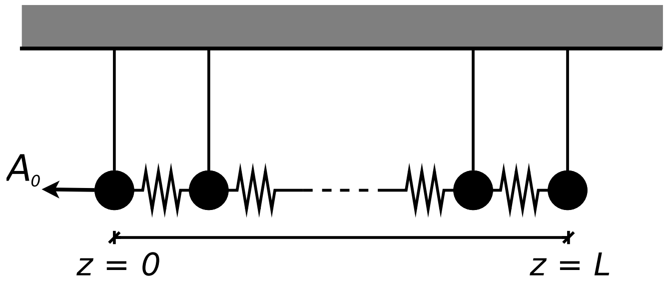


   a) Resolver, para esta situación, todo lo pedido en el problema anterior.

   b) Si ahora la cuerda está oscilando en un modo normal arbitrario n, con las mismas condiciones iniciales dadas arriba, repetir (a) (expresar en función de n).

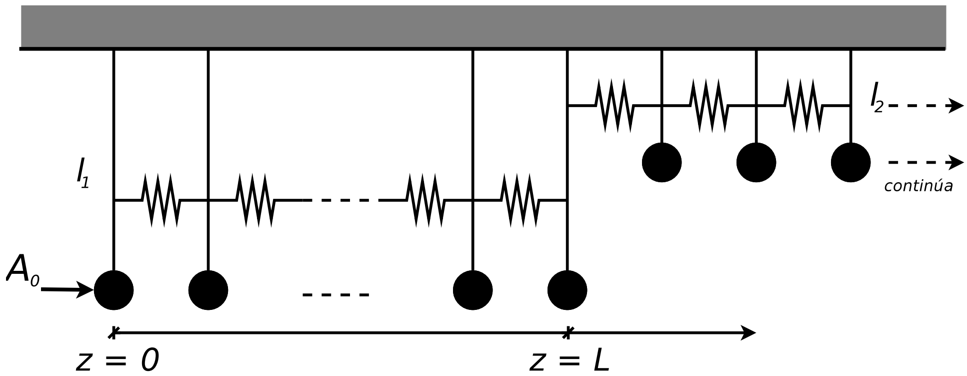
Ecuación de Klein-Gordon

17. Considere un arreglo lineal de péndulos acoplados excitados cuyo extremo inferior está en $z = 0$ y unidos a una pared rígida en $z = L$, como se muestra en la figura.



Se aplica una fuerza externa en función del tiempo a la primera masa ($z = 0$), de forma tal que se conoce su amplitud $\Psi(0, t) = A_0 \cos(\Omega t)$. Halle el movimiento estacionario del sistema y discuta las hipótesis que hace. Compare con el caso de extremo derecho fijo a una pared (o sea: agregando un resorte a la derecha de la última masa y uniéndolo a la pared).

18. Considere un sistema de péndulos acoplados con un cambio brusco en ω_0^2 en $z = L$, según se esquematiza en la figura. Halle el movimiento estacionario del sistema y discuta las hipótesis quee hace.



19. Para el sistema esquematizado en la figura, calcule $\Psi_n(t)$, si $\Omega < \omega_{\min}$.