

1. En lo que sigue, encuentre con cuál de estos métodos se determina la velocidad de fase y con cuál la de grupo.
  - a) Medir la velocidad del sonido en el aire, golpeando las manos y determinando el tiempo que transcurre entre el aplauso y el eco de un reflector ubicado a una distancia conocida.
  - b) Medir la longitud de un tubo que resuena a una frecuencia conocida (y corregir por efectos de borde).
  - c) Determinar la velocidad de la luz midiendo el tiempo que tarda un haz colimado en recorrer una distancia conocida.
  - d) Encontrar la longitud de una cavidad resonante que oscila en un modo conocido a una frecuencia conocida.

2. Demuestre que la velocidad de grupo  $v_g$  y la velocidad de fase  $v_f$  están relacionadas por:

$$v_g = v_f - \lambda \frac{dv_f}{d\lambda}$$

¿Cómo es  $\frac{dv_f}{d\lambda}$  en un medio no dispersivo? En ese caso, ¿cómo se relacionan la velocidad de grupo y la de fase?

3. Se quiere investigar la relación entre el ancho de un paquete y el desfase de las frecuencias que lo componen.

- a) Tome el siguiente pulso con un espectro gaussiano de ancho  $\Delta k$  centrado en  $k_0$  (note que las frecuencias están en fase):

$$F(k) = A \exp \left[ -\frac{(k - k_0)^2}{4\Delta k^2} \right].$$

Calcule  $f(x)$  y vea que tiene una envolvente gaussiana que modula una portadora de frecuencia  $k_0$ . Note que el pulso está centrado en  $x = 0$  y que se cumple la relación  $\Delta x \Delta k = 1/2$  (el paquete gaussiano es el de mínima incerteza).

- b) Ahora desfase las distintas frecuencias en forma lineal, tal que:

$$F(k) = A \exp \left[ -\frac{(k - k_0)^2}{4\Delta k^2} \right] \exp[i\alpha(k - k_0)].$$

Calcule  $f(x)$  y vea que es el mismo pulso que en la parte (a), pero desplazado en  $\alpha$  hacia la derecha (una fase lineal sólo corre la función).

- c) Ahora agregue una fase cuadrática, es decir:

$$F(k) = A \exp \left[ -\frac{(k - k_0)^2}{4\Delta k^2} \right] \exp[i\beta(k - k_0)^2].$$

Calcule  $f(x)$  y vea que es un pulso gaussiano centrado en  $x = 0$  pero con un ancho  $\Delta x$  que cumple:

$$\Delta x \Delta k = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 16\beta^2 \Delta k^4}.$$

¿Es cierto que si se quiere disminuir el ancho de un paquete siempre se debe aumentar  $\Delta k$ ? Derive  $\Delta x$  con respecto a  $\Delta k$  de la expresión anterior y analice lo pedido.

**Ayuda:**  $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp [-(x+a)^2] dx = \sqrt{\pi}$ .

4. Si  $\Psi(\omega)$  corresponde a un espectro de frecuencias cuadrado, o sea  $\Psi(\omega) = 1/\Delta\omega$  para  $\omega$  comprendida en el intervalo de ancho  $\Delta\omega$  alrededor de  $\omega_0$ , y cero en otra parte; vea que  $\phi(t)$  está dada por:

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{\sin(t\Delta\omega/2)}{t\Delta\omega/2} \right] e^{i\omega_0 t}$$

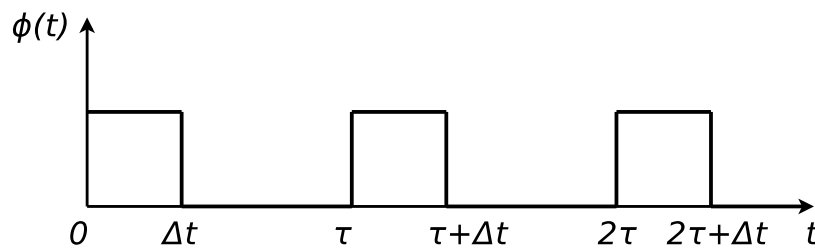
- a) Grafique  $\Psi(\omega)$  y  $|\phi(t)|$ .
- b) Sea  $T$  un tiempo más prolongado que la duración de cualquier experimento que pueda idear. Muestre que si  $\Delta\omega$  es suficientemente pequeño como para que  $\Delta\omega T \ll 1$ , entonces durante un tiempo menor que  $T$ ,  $\phi(t)$  es una función armónica de amplitud y fase casi constante.
5. Sea  $\phi(t)$  una función real.

- a) Muestre que su transformada de Fourier  $\Psi(\omega)$  cumple  $\Psi(\omega) = \Psi(-\omega)$ . Use esto para escribir a  $\phi(t)$  como superposición de senos y cosenos.
- b) Muestre que la transformada de Fourier  $\mathcal{F}$  es lineal, esto quiere decir que

$$\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g)$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones de  $x$  y  $a$  y  $b$  son constantes.

- c) Tomemos una pulsación que se repite  $N$  veces:



Vea que la transformada de Fourier de un único pulso situado entre  $(n\tau, n\tau + \Delta t)$  es igual a la transformada del pulso  $(0, \Delta t)$  multiplicado por la fase  $e^{in\phi}$ . Calcule entonces la transformada de la pulsación cuadrada que se repite en un tiempo largo  $T_{largo} = N\tau$ .

- d) Muestre que para un valor finito de  $T_{largo}$  el análisis de Fourier de esta pulsación cuadrada repetida casi periódicamente, consiste en una superposición de armónicos casi discretos de la frecuencia fundamental  $\nu_1 = 1/T_1$ , siendo realmente cada armónico un continuo de frecuencias que se extiende sobre una banda de ancho  $\delta\nu \approx 1/T_{largo}$ . Las armónicas más importantes caen entre 0 y  $\Delta\nu = 1/\Delta t$ .
- e) ¿Por qué vale  $\Delta t \Delta\nu \approx 1$  si, en principio, podría valer  $\Delta t \Delta\nu \gg 1$ ? ¿La misma pregunta es aplicable a  $\delta\nu$  y  $T_{largo}$ ?
6. Se tiene un pulso de ancho  $\Delta k$  centrado en  $k_0$  tal que la siguiente es una buena aproximación para la relación de dispersión:

$$\omega(k) = \omega_0(k_0) + \omega'(k_0)(k - k_0) + \frac{1}{2}\omega''(k_0)(k - k_0)^2$$

Si en  $t = 0$  el pulso se propaga hacia  $x < 0$ , y se escribe:

$$\Psi(x, 0) = A \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ -\frac{(k - k_0)^2}{4\Delta k^2} \right] \exp(ikx) dk + c.c.$$

---

Calcule  $\Psi(x, t)$ . Vea cuál es la posición y el ancho del paquete como función del tiempo.  
¿Es cierto que al viajar por un medio dispersivo cualquier paquete se ensancha?