# Mikroökonomik B
# 4.1 Spiele in strategischer Form, vollständige Information

Dennis Gärtner

3. Juni 2014

# Übersicht

## Annahmen

- **Statisches Spiel:** Spieler wählen Aktionen simultan.
- **Vollständige Information:** Präferenzen aller Spieler über Spielergebnisse sind allgemein bekannt.

## Konzepte

- Repräsentation eines Spiels in strategischer Form (‘Normalform’)
- Dominierte Strategien und iterierte Elimination
- Nash-Gleichgewicht
- Gemischte Strategien
- Existenz eines Nash-Gleichgewichts

## Anwendungen

- Gefangenendilemma
- Duopol-Modelle
- Tragödie der Allmende

# Literaturangaben

- **Gibbons:** Kapitel 1
- **Osborne (2004):** Kapitel 2–4
- **Mas-Collel et al.:** Kapitel 7,8
- **Kreps:** Kapitel 12
- **Jehle & Reny (2001):** Kapitel 7.2
- **Varian (2007):** Kapitel 28

# Beispiel: Das Gefangenendilemma

- Zwei Verdächtigte sitzen für gemeinsames Verbrechen in separaten Verhörzellen.
- Polizei hat nicht genügend Beweise für eine Verurteilung.
- Beide Spieler können entweder schweigen (‘cooperate’) oder den anderen ‘verpfeifen’ (‘defect’).
- Gefängniszeiten: 1 Monat wenn beide schweigen, 6 Monate wenn sich beide gegenseitig belasten; wenn nur einer den andern belastet: sofortige Freilassung, 9 Monate für den andern.

# Beispiel: Das Gefangenendilemma

Wir verwenden eine (Bi)Matrix um diese Information zu organisieren:

| | | Gefangener 2 | |
|---|---|---|---|
| | | *defect* | *cooperate* |
| Gefangener 1 | *defect* | $-6, -6$ | $0, -9$ |
| | *cooperate* | $-9, \ 0$ | $-1, -1$ |

**Konventionen**

1. Zeilen: Entscheidungen ('Strategien') von Spieler 1, Spalten: jene von Spieler 2.
2. in Zellen: Mögliche Ergebnisse des Spieles ('Spielausgänge').
3. Ergebnisse werden als Tupel $(u_1, u_2)$ in Erwartungsnutzeneinheiten angegeben.
4. Der erste Payoff-Eintrag $u_1$ des Ergebnistupels ist jener für Spieler 1, der zweite $u_2$ ist die Auszahlung für Spieler 2.

# Weitere Beispiele

## Matching Pennies

Zwei Spieler legen simultan eine Münze auf den Tisch, welche entweder ‘heads’ oder ‘tails’ zeigt. Zeigen beide das selbe, bekommt Spieler 1 die Münze von Spieler 2, sonst umgekehrt.

| | | P2 *heads* | P2 *tails* |
|---|---|---|---|
| P1 | *heads* | $1, -1$ | $-1, \ \ 1$ |
| | *tails* | $-1, \ \ 1$ | $1, -1$ |

Dies ist ein **Nullsummenspiel** oder ein Spiel mit **purem Konflikt**: Die Grösse des Kuchens ist konstant, es geht nur darum das grösste Stück zu bekommen!

# Weitere Beispiele

## Meeting in New York

Mr. X und Mr. Y wollen sich treffen. Sie können entweder zum Empire State Building gehen ($E$) oder in den Central Park ($C$).

| | | Mr. Y: $E$ | Mr. Y: $C$ |
|---|---|---|---|
| Mr. X | $E$ | $1, 1$ | $0, 0$ |
| | $C$ | $0, 0$ | $1, 1$ |

Dies ist ein **reines Koordinationsspiel**: Spieler wollen das selbe, müssen sich aber koordinieren!

# Weitere Beispiele

## Kampf der Geschlechter

Chris und Pat entscheiden simultan, entweder zu einem Boxkampf oder in die Oper zu gehen. Beide ziehen es vor, gemeinsam statt alleine den Abend zu verbringen, unterscheiden sich aber darin, wo.

| | | Pat | |
|---|---|---|---|
| | | *Fight* | *Opera* |
| Chris | *Fight* | $1, 2$ | $0, 0$ |
| | *Opera* | $0, 0$ | $2, 1$ |

# Weitere Beispiele

## ‘Chicken Game’

Zwei Teenager fahren mit Fahrrädern aufeinander zu. Sie müssen sich gleichzeitig entscheiden, ‘tough’ zu sein (weiter geradeaus zu fahren), oder ‘chicken’ sein (zur Seite lenken). Man ist uncool, wenn man zur Seite lenkt, aber verletzt wenn es keiner tut!

| | | P2 | |
|---|---|---|---|
| | | *tough* | *chicken* |
| P1 | *tough* | $-1, -1$ | $10, 0$ |
| | *chicken* | $0, 10$ | $2, 2$ |

# Spiel in strategischer Form

**Definition: Spiel in strategischer Form (ssf)**

Ein **Spiel in strategischer Form (ssf)** wird vollständig durch $\{N, S, u\}$ beschrieben, wobei

1. Menge von Spielern $N = \{1, \ldots, n\}$.
2. Für jeden Spieler $i \in N$: Menge von *reinen* Strategien $S_i$.
   *Notation:* $S \equiv S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ ('Strategienraum').
3. Für jeden Spieler $i \in N$: Erwartungsnutzen-Auszahlungs-funktionen $u_i : S \mapsto \mathbb{R}$.
   *Notation:* $u(s) \equiv \big(u_1(s), \ldots, u_n(s)\big)$.

Ein ssf wird benutzt um Interaktionen <u>ohne</u> Zeitdimension zu beschreiben.

# Gleichgewichtskonzepte

- Wir haben damit einen formalen Rahmen, um Spiele ('Mehrpersonenentscheidungen') mit simultanen Zügen zu beschreiben.
- Als nächstes: Welches Ergebnis sollten wir erwarten bzw. welches Verhalten einem Spieler raten?
  $\Rightarrow$ Gleichgewichtskonzepte
- Probleme, welche auf uns warten:
  1. 'Rationalität' schwieriger zu operationalisieren als in Ein-Personenentscheidungen.
  2. Schwache Annahmen an Rationalität liefern oft sehr ungenaue Prognose.
- Dementsprechend mehrere Gleichgewichtskonzepte mit zunehmender Stärke der Annahmen betreffend Rationalität (und mehr!).

# Beispiel: Das Gefangenendilemma

P2

| | | $d$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| P1 | $d$ | $-6, -6$ | $0, -9$ |
| | $c$ | $-9, \ 0$ | $-1, -1$ |

- Wie sollen sich Spieler in diesem Spiel entscheiden?
- Beachte: Für jede beliebige Strategie des anderen ist ‘defect’ ($d$) strikt besser als ‘cooperate’ ($c$).
- Wir sagen: Strategie $d$ dominiert Strategie $c$ strikt (oder: $c$ wird strikt von $d$ dominiert).
- Es scheint unplausibel, dass ein Spieler jemals eine strikt dominierte Strategie spielt. Im Gefangenendilemma führt dies zur eindeutigen Prognose $(d, d)$.

# Strikt Dominante Strategien

**Definition: Strikte Dominanz**

Eine Strategie $s_i'$ **dominiert Strategie** $s_i''$ **strikt**, wenn für beliebige Strategien $s_{-i} \in S_{-i}$ der anderen Spieler gilt:

$$u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s_i'', s_{-i}).$$

**Notation:** $s_{-i}$ bezeichnet den Vektor $s$ ohne element $s_i$, also $s_{-i} = (s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$.

**Terminologie:** Eine Strategie $s_i$ ist **strikt dominiert**, wenn eine andere Strategie $s_i'$ existiert, welche $s_i$ strikt dominiert.

# Elimination strikt dominierter Strategien

**Gleichgewichtskonzept #1:**
**Elimination von strikt dominierten Strategien (Esds)**

Spieler spielen nie strikt dominierte Strategien.

**Begründung:** Das Spielen einer strikt dominierten Strategie ist irrational weil, egal was ich über die Strategie der anderen Spieler glaube, eine andere Strategie mit einer strikt höheren Auszahlung existiert.

# Was ist nun das Dilemma mit den Gefangenen?

P2

| | | *d* | *c* |
|---|---|---|---|
| P1 | *d* | $-6, -6$ | $0, -9$ |
| | *c* | $-9, \quad 0$ | $-1, -1$ |

**Eindeutige Prognose aus Esds:** Beide Spieler spielen ‘defect’. Dies stellt beide Spieler viel schlechter als wenn beide ‘cooperate’ spielen würden!

# Re-Interpretationen des Gefangenendilemmas

**Wettrüsten:** ‘defect’ entspricht einer Aufrüstung der Streitkräfte, ‘cooperate’ einer Investition des Gelds ins Gesundheits- oder Bildungswesen.

**Konzertbesucher:** ‘cooperate’ entspricht Hinsetzen, ‘defect’ entspricht Aufstehen.

**SUV-Kauf aus Sicherheitsgründen:** ‘cooperate’ entspricht dem Kauf eines kleinen (und billigeren) auto, ‘defect’ dem Kauf eines SUVs. SUV’s sind in einer Kollision mit einem kleineren Auto sicherer (für den SUV-Fahrer!).

# Ein weiteres Beispiel

| | $l$ | $c$ | $r$ |
|---|---|---|---|
| $u$ | 1,0 | 1,2 | 0,1 |
| $d$ | 0,3 | 0,1 | 2,0 |

- P1: Keine strikt dominierte Strategie.
- P2: ‘r’ wird von ‘c’ strikt dominiert.

$\Rightarrow$ Esds liefert 4 mögliche Gleichgewichte.

## Aber…

- P1 <u>weiss</u>, dass ‘r’ für P2 strikt dominiert wird $\Rightarrow$ rational für ihn zu erwarten, dass ‘r’ nie gespielt wird!
- Reduziertes Spiel (‘Streichen’ von ‘r’):

| | $l$ | $c$ |
|---|---|---|
| $u$ | 1,0 | 1,2 |
| $d$ | 0,3 | 0,1 |

- P1: ‘d’ wird nun von ‘u’ dominiert! (und: P2 weiss das…)
- Nach weiterer Iteration: nur $(u, c)$ bleibt übrig.

# Iterierte Elimination strikt dominierter Strategien (Iesds)

**Gleichgewichtskonzept #2:**
**Iterierte Elimination strikt dominierter Strategien (Iesds)**

Spieler spielen nur Strategien, welche die iterierte Elimination strikt dominierter Strategien (Iesds) überleben.

# Anmerkungen: Iesds als Vorhersage-Tool

- **Plus:** Iesds leitet Vorhersage rein durch Rationalität der Spieler (und ‘Common Knowledge’) darüber ab.
- **Minus:** Vorhersagekraft in vielen Spielen schwach. In vielen Spielen existiert z.B. von vornherein keine strikt dominiert Strategie.

# Anmerkungen: Iesds und Rationalität

- Prognose immer plausibel? Betrachten Sie folgendes Spiel (mit extremen Auszahlungswerten):

  P2

  | P1 | $l$ | $r$ |
  |---|---|---|
  | $t$ | $2, 100$ | $-\infty, 99$ |
  | $b$ | $1, 50$ | $2, 49$ |

  Empfehlung: $(t, l)$

  Aber: Spieler 1 muss sich der Rationalität von Spieler 2 <u>sehr</u> sicher sein!

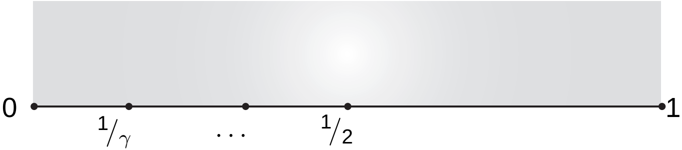
- Iesds unterstellt 'Common Knowledge' über Rationalität: Spieler sind nicht nur selber rational, sondern,
  - andere Spieler <u>wissen</u>, dass andere Spieler rational sind
  - andere Spieler wissen, dass andere Spieler wissen, dass andere Spieler rational sind
  - etc.

  Dies ist keine schwache Annahme!

# Rationalitätsanforderungen von Iesds am Beispiel

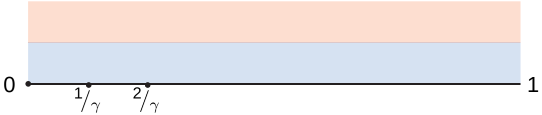
Betrachten wir folgendes Beispiel von Hotelling's Platzierungsspiel:

- Zwei Eisverkäufer A und B verkaufen ein homogenes Gut; sie haben eine diskrete Zahl an möglichen Platzierungen entlang eines Strandes $[0, 1]$: $\{0, \frac{1}{\gamma}, \frac{2}{\gamma}, \ldots, \frac{\gamma}{\gamma}\}$ für gerades $\gamma$ (somit ist ${}^1/_2$ möglich)
- die Verkäufer wählen ihre Platzierung gleichzeitig
- die Konsumenten sind gleichverteilt auf $[0, 1]$ und kaufen ihre Eiscreme vom näher gelegenen Verkäufer (Transportkosten)



Wird Verkäufer A Platzierung 0 vs. $^1/_\gamma$ (bzw 1 vs. $^{n-1}/_\gamma$) wählen?

Fall 1: B sitzt bei $1/\gamma$
$(0, {}^1/_\gamma) \to ({}^1/_\gamma, {}^1/_\gamma)$:




Fall 2: B sitzt bei 0
$(0, 0) \to ({}^1/_\gamma, 0)$:


Fall 3: B sitzt bei
$^2/_\gamma, {}^3/_\gamma, \ldots, {}^1/_2$
$(0, {}^n/_\gamma) \to ({}^1/_\gamma, {}^n/_\gamma)$:


Nein! $0 \to {}^1/_\gamma$ ist immer profitabel & 0 ist dominiert!

Etwas formeller definieren wir für ein ssf $G = \{N, S, u\}$, dass

- $R_i$ bedeutet, dass Spieler $i$ (Iesds) rational ist und
- $K_i\ X$ bedeutet, dass der Spieler $X$ weiss.

1. $\{0, 1\}$ werden entfernt wenn $K_iG$, $R_i$, $i \in \{A, B\}$, $i \neq j \in \{A, B\}$: zB. wenn B “$K_BG,\ R_B$,” dann wird B nicht $\{0, 1\}$ spielen
2. $\{{}^1/_\gamma, 1 - {}^1/_\gamma\}$ werden entfernt wenn $K_iK_jG$, $K_jR_i$: zB. wenn A “$K_AK_BG,\ K_AR_B$,” dann weiss A dass B nicht $\{{}^1/_\gamma, 1 - {}^1/_\gamma\}$ spielen wird

*h*. $\{{}^{(h-1)}/_\gamma, 1 - {}^{(h-1)}/_\gamma\}$ werden entfernt wenn $\underbrace{K_iK_j\ldots}_{h\times}G$, $\underbrace{K_jK_i\ldots}_{h-1\times}R_i$

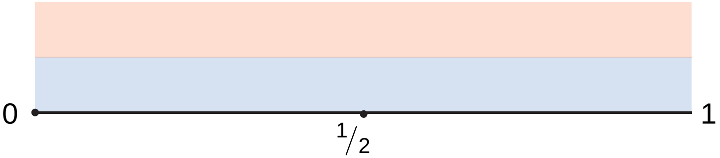
**Def.** $X$ heisst **allgemein bekannt** (common knowledge) unter $i \in \{A, B\}$ wenn $\underbrace{K_i K_j K_i \ldots}_{n\times} X$, $i \neq j$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Iesds benötigt die folgenden Annahmen

1. Rationalität der Spieler
2. diese Rationalität ist allgemein bekannt
3. Spielstruktur $\{N, S, u\}$ ist allgemein bekannt

Durch Wiederholung des obigen Argumentes eliminiert Iesds alle Rasterpunkte mit Ausnahme des mittleren Punktes.

$\Rightarrow$ Somit: eindeutige Handlungsanweisung bzw. Prognose von Iesds ist Platzwahl $({}^1\!/_2, {}^1\!/_2)$.



# Anmerkung: Rationalisierbarkeit (‘Rationalizability’)

- Eine Strategie heisst <u>rationalisierbar</u>, wenn sie mit der Annahme von Rationalität und der allgemeinen Bekanntheit von Rationalität vereinbar ist.
- Eine strikt dominierte Strategie ist nicht rationalisierbar, dh sie ist nie eine beste Antwort, ganz gleich, welche Strategien von den Gegenspielern erwartet werden.
- Eine notwendige Bedingung für die Rationalisierbarkeit einer Strategie ist, dass sie den Prozess der Iesds überlebt.
- Für 2-Personen-Spiele gilt, dass alle Strategien, die Iesds überleben, auch tatsächlich rationalisierbar sind.

# Nash Gleichgewicht

Zurück zum ‘Kampf der Geschlechter’

| | | Pat: *Fight* | Pat: *Opera* |
|---|---|---|---|
| Chris | *Fight* | $1, 2$ | $0, 0$ |
| | *Opera* | $0, 0$ | $2, 1$ |

Iesds liefert keine Spielanleitung—wir benötigen ein mächtigeres Instrument: Nash Gleichgewicht (Nash-GG).

Nash-GG setzt höhere Anforderungen an die Rationalität der Spieler als Iesds: Insbesondere nimmt Nash-GG an, dass die Spieler <u>korrekte Vermutungen</u> darüber haben, welche(s) der möglichen Gleichgewichte tatsächlich gespielt wird!

# Strategienprofile und beste Antworten

**Definition: Strategienprofil**

Ein **Strategienprofil** $s = (s_1, \ldots, s_n)$ ist ein Vektor von Dimension $n$, der für jeden Spieler eine einzelne Strategie $s_i \in S_i$ spezifiziert.

**Definition: Beste Antwort**

Spieler $i$'s **beste Antwort** $\mathcal{B}_i(s_{-i})$ auf die Strategien der Konkurrenten $s_{-i}$, ist die Menge eigener Strategien, welche den höchsten Payoff geben. Formell

$$\mathcal{B}_i(s_{-i}) \equiv \{s_i \in S_i | u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i}),\ \forall s_i' \in S_i\}.$$

# Nash-GG: Wechselseitig beste Antworten

## Definition: Nash Gleichgewicht (Nash-GG)

Ein **Nash Gleichgewicht** (Nash-GG) ist ein Strategienprofil $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ sodass die Strategie $s_i^*$ jeden Spielers $i$ eine beste Antwort auf die Strategien $s_{-i}^*$ der restlichen Spieler darstellt. Damit gilt im Nash-GG für jeden $i \in N$

$$s_i^* \in \mathcal{B}_i(s_{-i}^*), \ \forall i \in N,$$

oder, äquivalent,

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i', s_{-i}^*), \ \forall s_i' \in S_i.$$

D.h.: Zusätzlich zu Rationalität (und ‘Common Knowledge’ darüber) unterstellt N-GG, dass Spieler korrekte Erwartungen über Strategien der anderen haben.

# Beispiel

| | $l$ | $r$ |
|---|---|---|
| $u$ | $3, 2$ | $2, 0$ |
| $d$ | $0, 0$ | $1, 1$ |

Beachten sie, dass

$$\mathcal{B}_1(l) = \{u\},\ \mathcal{B}_1(r) = \{u\}$$

während

$$\mathcal{B}_2(u) = \{l\},\ \mathcal{B}_2(d) = \{r\}.$$

Damit ist das eindeutige Nash-GG $(u, l)$, da

- $s_1^* = \{u\} \in \mathcal{B}_1(s_2^* = \{l\})$ und
- $s_2^* = \{l\} \in \mathcal{B}_2(s_1^* = \{u\})$.

Typischerweise überprüfen wir ein potentielles Nash-GG $s = (s_i, s_{-i})$ direkt in der ssf auf mögliche profitable Abweichungen. Wenn keine Abweichung gefunden werden kann, dann ist $s$ in der Tat ein Nash-GG.

| | $l$ | $r$ |
|---|---|---|
| $u$ | 3, 2 | 2, 0 |
| $d$ | 0, 0 | 1, 1 |

Wir untersuchen $(d, r)$ und stellen fest, dass

$$u_1(d,r) = 1 < u_1(u,r) = 2$$

dh P1 wird unilateral auf $u$ abweichen und $(d, r)$ ist kein Nash-GG. Versuchen wir $(u, r)$; da

$$u_1(u,r) = 2 > u_1(d,r) = 1 \text{ (ok) aber } u_2(u,r) = 0 < u_2(u,l) = 2$$

wird P2 auf $l$ abweichen und $(u, r)$ kann ebenfalls kein Nash-GG sein.

| | $l$ | $r$ |
|---|---|---|
| $u$ | 3, 2 | 2, 0 |
| $d$ | 0, 0 | 1, 1 |

Der gleiche Test schlägt für $(d, l)$ fehl, aber da

$$u_2(u, l) = 2 > u_2(u, r) = 0, \; u_1(u, l) = 3 > u_1(d, l) = 0$$

können wir $(u, l)$ als Nash-GG bestätigen.

**Beachten sie**: Das Nash-GG ist $(u, l)$ und nicht $(3, 2)$!

# Zwei weitere Beispiele

Hier: Nash bzw. ESDS/IESDS liefern unterschiedliche Prognosen.

Pat

| Chris | f | o |
|---|---|---|
| f | $\underline{1}, \underline{2}$ | $0, 0$ |
| o | $0, 0$ | $\underline{2}, \underline{1}$ |

P2

| P1 | $\ell$ | m | r |
|---|---|---|---|
| U | $\underline{1}, 0$ | $0, 0$ | $0, \underline{1}$ |
| M | $0, 0$ | $\underline{1}, \underline{1}$ | $0, 0$ |
| D | $0, \underline{1}$ | $0, 0$ | $\underline{1}, 0$ |

**ESDS/IESDS:** Alles ist möglich.

**Nash:** Zwei Prognosen.

**ESDS/IESDS:** Alles ist möglich.

**Nash:** Eindeutige Prognose.

# Beispiel: Cournot Duopol

- Firmen $i = 1, 2$ mit Grenzkosten $c$ wählen simultan Output $q_i$.
- Marktpreis ist $P(Q) = a - Q$, wobei $Q = q_1 + q_2$

## Berechnung des Nash-GG

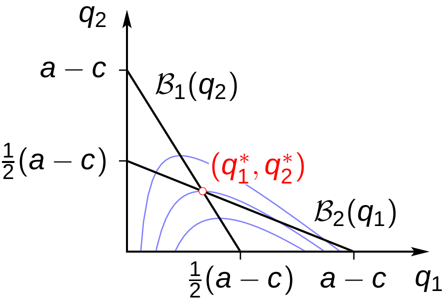
- Firma $i$'s Strategie ist ihr Output $q_i$.
- Firma $i$'s Payoff-Funktion ist $\pi_i(q_i, q_j) = [P(q_1 + q_2) - c] \cdot q_i$
- Firma $i$'s Beste Antwort $\mathcal{B}_i(q_j)$ ist gegeben durch

$$\mathcal{B}_i(q_j) \in \text{argmax}_{q_i} \pi_i(q_i, q_j)$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{B}_i(q_j) = \frac{1}{2}(a - c - q_j)$

- Nash-GG $(q_1^*, q_2^*)$ ist charakterisiert durch Gleichungssystem $\mathcal{B}_1(q_2^*) = q_1^*$ und $\mathcal{B}_2(q_1^*) = q_2^*$.

$\Rightarrow$ $\boxed{q_1^* = q_2^* = \frac{1}{3}(a - c)}$




(helle Linien zeigen Iso-Gewinn-Kurven von Firma 1)

## Bemerkungen

- Gewinnsumme liegt unter Maximum (höherer Output, tieferer Preis).
- Nash-Gleichgewicht ist auch das einzige Strategiepaar, welches Iesds überlebt (siehe z.B. Gibbons pp. 18–21).
- Strategien der Spieler sind *strategische Substitute* weil die besten Antworten in der Strategie des andern *fallen*.

# Cournot Duopol: Diskrete Aktionen

$$P(Q) = 10 - Q,\; c = 1$$

| P1 \ P2 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 8, 0 | 0, 0 | −8, −2 | −16, −6 | −24, −12 | −32, −20 | −40, −30 | −48, −42 | −56, −56 |
| 7 | 14, 0 | 7, 1 | 0, 0 | −7, −3 | −14, −8 | −21, −15 | −28, −24 | −35, −35 | −42, −48 |
| 6 | 18, 0 | 12, 2 | 6, 2 | 0, 0 | −6, −4 | −12, −10 | −18, −18 | −24, −28 | −30, −40 |
| 5 | 20, 0 | 15, 3 | 10, 4 | 5, 3 | 0, 0 | −5, −5 | −10, −12 | −15, −21 | −20, −32 |
| 4 | 20, 0 | 16, 4 | 12, 6 | 8, 6 | 4, 4 | 0, 0 | −4, −6 | −8, −14 | −12, −24 |
| 3 | 18, 0 | 15, 5 | 12, 8 | 9, 9 | 6, 8 | 3, 5 | 0, 0 | −3, −7 | −6, −16 |
| 2 | 14, 0 | 12, 6 | 10, 10 | 8, 12 | 6, 12 | 4, 10 | 2, 6 | 0, 0 | −2, −8 |
| 1 | 8, 0 | 7, 7 | 6, 12 | 5, 15 | 4, 16 | 3, 15 | 2, 12 | 1, 7 | 0, 0 |
| 0 | 0, 0 | 0, 8 | 0, 14 | 0, 18 | 0, 20 | 0, 20 | 0, 18 | 0, 14 | 0, 8 |

# Beispiel: Bertrand-Duopol

Firmen $i = 1, 2$ verkaufen ein homogenes Gut, welches jede Firma in beliebigen Mengen zu Grenzkosten $c \geqslant 0$ produzieren kann. Firmen nennen simultan ihre Preise $p_1, p_2$. Danach erhält Firma $i$ Nachfrage

$$Q_i(p_i, p_j) = \begin{cases} Q(p_i), & \text{für } p_i < p_j, \\ Q(p_i)/2, & \text{für } p_i = p_j, \\ 0, & \text{für } p_i > p_j. \end{cases} \quad \text{und}$$

**Behauptung 1:** $p_1^* = p_2^* = c$ ist ein Nash-GG.

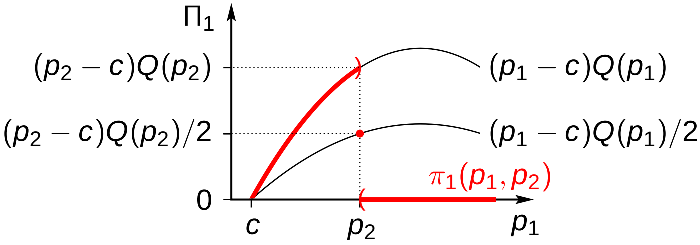
Gegeben $p_j = c$ erhält Firma $i$ für $p_i = c$ $\pi_i = 0$. Für $p_i > c$ gilt ebenfalls $\pi_i = 0$ (keine Nachfrage), und für $p_i < c$ gilt $\pi_i < 0$.
$\rightarrow$ $p_i = c$ ist somit eine beste Antwort auf $p_j = c$.

**Behauptung 2:** $p_1^* = p_2^* = c$ ist das *einzige* Nash-GG.

Wir zeigen dies in den folgenden Schritten:

1. **$p_i \geqslant c$ ($i = 1, 2$) in jedem Nash-GG.**
   Firma mit kleinerem $p_i$ würde strikt negative Gewinne machen. Die Firma kann aber durch $p_i = c$ stets einen Gewinn von Null machen, womit $p_i < c$ für diese Firma keine beste Antwort sein kann.
2. **$p_i = c, p_j > c$ ($i \neq j$) kann kein Nash-GG sein.**
   Firma $i$: volle Nachfrage, aber $\pi_i = 0$. Durch leichtes Anheben von $p_i$: weiterhin positive Nachfrage bei positiver Marge, und somit $\pi_i > 0$.
3. **$p_1, p_2 > c$ kann kein Nash-GG sein.**
   - Nehmen wir an $p_1 \geqslant p_2$ (Argument für $p_2 \geqslant p_1$ analog). $\Rightarrow \pi_1 \leqslant (p_2 - c)Q(p_2)/2$ (Hälfte der Nachfrage für $p_2 = p_1$, Null sonst).
   - Indem sie $p_1 = p_2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, erhält Firma 1 gesamte Nachfrage und macht Gewinn $(p_1 - \varepsilon - c)Q(p_2 - \varepsilon)$. Für $\varepsilon$ klein kommt dies beliebig nahe an $(p_2 - c)Q(p_2) > (p_2 - c)Q(p_2)/2$, womit eine solche Abweichung profitabel wäre.

Graphische Illustration: $\pi_1(p_1, p_2)$ für fixiertes $p_2 > c$:




Dieses Resultat ist als **Bertrand Paradox** bekannt: Wenn Firmen in *Preisen* konkurrieren, so genügen 2 Firmen um dasselbe Ergebnis wie perfekter Wettbewerb zu produzieren.

**Intuition:** So lange Firmen $p_1, p_2 > c$ setzen haben Firmen stets Anreiz, den anderen zu unterbieten, um damit die gesamte Nachfrage zu ‘stehlen’.

# Beispiel: Die Tragödie der Allmende

- Bauern $i = 1, \ldots, N$ lassen je ihre Kühe auf der Dorfwiese weiden.
- Bauer $i$ besitzt $g_i$ Kühe, und $G \equiv g_1 + \cdots + g_N$.
- Der Wert einer Kuh ist $v(G)$, mit $v' < 0$ und $v'' < 0$; eine Kuh kostet $c$.
- Bauern wählen Anfang Frühling simultan ihre $g_i$.

**Nash-GG?**

- Bauer $i$'s Payoff ist $g_i \cdot [v(G) - c] = g_i \cdot [v(g_i + g_{-i}) - c]$.
- FOC: $v(g_i + g_{-i}) + g_i v'(g_i + g_{-i}) = c$.
- Im Nash-GG gilt dies für jeden Bauer. Aufsummieren und Teilen durch $N$ gibt:

$$v(G^*) + \frac{1}{N} G^* v'(G^*) = c.$$

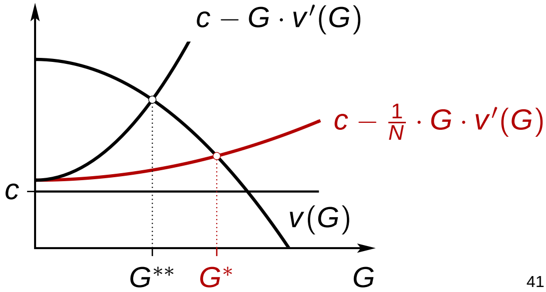
# Beispiel: Die Tragödie der Allmende

**Was ist nun die Tragödie?**

- Das soziale Optimum $G^{**}$ maximiert $Gv(G) - Gc$, was zu folgender FOC führt:

$$v(G^{**}) + G^{**}v'(G^{**}) = c.$$

- Ein Vergleich mit der Nash-GG-Bedingung oben zeigt, dass $G^{*} > G^{**}$: Im Nash-GG grasen also zu viele Kühe auf der Dorfwiese!



# Vergleich der Gleichgewichtskonzepte

**3 Konzepte** um den Ausgang eines Spiels in strategischer Form vorherzusagen:

1. Eliminierung strikt dominierter Strategien (Esds);
2. *Iterierte* Eliminierung strikt dominierter Strategien (Iesds);
3. Nash Gleichgewicht.

**Frage:** Wie verhalten sich die Prognosen zueinander?

**Offensichtlich:** Iesds ist stärker als Esds weil jede Iteration die Vorhersage weiter einengt.
Genauer: Jedes Strategieprofil $(s_1, \ldots, s_n)$, welches Iesds überlebt, überlebt auch Esds.

$\Rightarrow$ **Wie passt Nash hinein?**

# Vergleich der Gleichgewichtskonzepte

**Resultat: Nash vs. Iesds**

Jedes Nash-Gleichgewicht $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ überlebt Iesds.

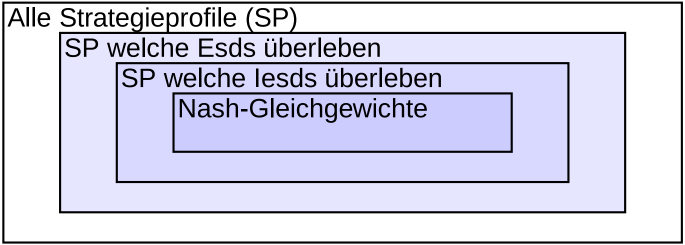
**Beweis (durch Widerspruch):**

- Sei $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ ein Nash-GG welches Iesds nicht überlebt.
- Bezeichne $s_i^*$ die erste dieser Strategien, welche durch Iesds eliminiert wird.
- Eliminierung von $s_i^*$ impliziert, dass für Spieler $i$ eine andere noch nicht eliminierte Strategie $s_i' \in S_i$ existiert, sodass
$$u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s_i^*, s_{-i}) \qquad (\clubsuit)$$
für alle $s_{-i}$, welche nocht nicht eliminiert wurden.
- Da per Annahme $s_{-i}^*$ noch nicht eliminiert wurden, gilt $(\clubsuit)$ insbesondere mit $s_{-i}' = s_{-i}^*$ – ein Widerspruch: $s_i^*$ kann damit keine beste Antwort auf $s_{-i}^*$ und $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ somit kein Nash-GG gewesen sein! $\blacksquare$

# Vergleich der Gleichgewichtskonzepte

1. Eliminierung strikt dominierter Strategien (Esds)
2. *Iteratierte* Eliminierung strikt dominierter Strategien (Iesds)
3. Nash-Gleichgewicht


D.h.: Vorhersagen werden präziser, aber basieren auf *stärkeren* Annahmen.



# Eine Anmerkung zur (iterierten) Eliminierung schwach dominierter Strategien

**Definition: Schwache Dominanz**

Eine Strategie $s_i'$ **dominiert Strategie** $s_i''$ **schwach**, wenn für beliebige Strategien $s_{-i} \in S_{-i}$ der anderen Spieler gilt:

$$u_i(s_i', s_{-i}) \geq u_i(s_i'', s_{-i}).$$

Warum ist iterierte Eliminierung schwach dominierter Strategien problematisch?

- Das Spielen einer schwach dominierten Strategie ist für gewisse Strategien der anderen rational.
- Im Gegensatz zu Iesds kann die Eliminierung schwach dominierter Strategien je nach Reihenfolge der Eliminierung zu unterschiedlichen Vorhersagen kommen.
- Kann zur Eliminierung von Nash-Gleichgewichten führen.

# Eine Anmerkung zur (iterierten) Eliminierung schwach dominierter Strategien

Ein Beispiel:

| | | P2 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | L | M | R |
| P1 | U | $\underline{1}, \underline{1}$ | $\underline{1}, \underline{1}$ | $0, 0$ |
| | D | $0, 0$ | $\underline{1}, \underline{2}$ | $\underline{1}, \underline{2}$ |

**Trotzdem:** Konzept hat gewisse Attraktivität – speziell als Selektionskriterium bei multiplen Nash-Gleichgewichten.

# Gemischte Strategien: Motivation

Betrachten Sie nochmals das Spiel ‘Matching Pennies’:

P2

| P1 | | $h$ $(p_2)$ | $t$ $(1-p_2)$ |
|---|---|---|---|
| | $(p_1)$ $h$ | $1, -1$ | $-1, \quad 1$ |
| | $(1-p_1)$ $t$ | $-1, \quad 1$ | $1, -1$ |

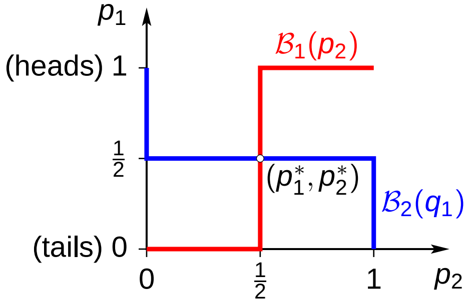
- Hier existiert <u>kein</u> Nash-GG in reinen Strategien!
- Intuition: Spieler haben gegensätzliche Interessen – für jede Strategie existiert Gegenstrategie, die gewinnt!
- Lassen wir nun Spieler ‘mischen’: Spieler $i$ glaubt Spieler $j \neq i$ spielt $h$ mit Wahrscheinlichkeit $p_j$.
- Strategien nun gegeben durch $p_i \in [0,1]$ (wobei $p_i = 0, 1$ ‘pure’ Strategien sind).
- Wie lauten die besten Antworten $\mathcal{B}_i(p_j)$?

- Beispiel: P1 präferiert *h* gegenüber *t* strikt g.d.w.

$$1 \cdot p_2 + (-1) \cdot (1 - p_2) > -1 \cdot p_2 + 1 \cdot (1 - p_2) \quad \Leftrightarrow \quad p_2 > \tfrac{1}{2}$$

- Beste Antworten (Korrespondenzen, keine Funktionen!) sind somit:

$$\mathcal{B}_1(p_2) = \begin{cases} 0, & p_2 < \frac{1}{2} \\ [0,1], & p_2 = \frac{1}{2} \\ 1, & p_2 > \frac{1}{2} \end{cases}, \qquad \mathcal{B}_2(p_1) = \begin{cases} 1, & p_1 < \frac{1}{2} \\ [0,1], & p_1 = \frac{1}{2} \\ 0, & p_1 > \frac{1}{2} \end{cases}.$$




- Eindeutiges Nash-GG bei $p_1^* = p_2^* = \frac{1}{2}$.
- Beide Spieler sind indifferent zwischen h/t.

# Gemischte Strategien

Wir bezeichnen die Menge von Wahrscheinlichkeitsverteilungen über $S_i$ als $\Delta(S_i)$ und die Kardinalität von $S_i$ als $|S_i|$.

**Definition: Gemischte Strategien**

Eine **gemischte Strategie** $\sigma_i$ ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über Spieler $i$'s reiner Strategiemenge $S_i$. Wir bezeichnen die Menge der gemischten Strategien von Spieler $i$ als $\Sigma_i = \Delta(S_i)$.

**Annahme:** Jeder Spieler trifft seine zufällige Auswahl einer reinen Strategie unabhängig von anderen Spielern.

**Bemerkung:** $\Sigma_i$ ist ein $|S_i|$-dimensionaler Simplex

$$\Sigma_i = \{\mathbf{p} \in [0,1]^{|S_i|} : \sum_j p_j = 1\}.$$

# Gemischte Erweiterung eines Spiels

**Definition: Gemischte Erweiterung eines Spiels**

Die **gemischte Erweiterung** des ssf $\{N, S, u\}$ ist das ssf $\{N, \Sigma, u\}$ in dem $i$'s Auszahlungsfunktion $u_i : \times_{j \in N} \Sigma_j \mapsto \mathbb{R}$ jedem gemischten Strategienprofil $\sigma \in \times_{j \in N} \Sigma_j$ den Erwartungsnutzen der Lotterie $\sigma$ zuordnet

$$u_i(\sigma) = \sum_{\substack{(s_1, \ldots, s_n) \\ \in S_1 \times \cdots \times S_n \\ \uparrow \\ \text{Summe über alle möglichen} \\ \text{reinen Strategienprofile} \\ \text{(Ergebnisse)}}} \underbrace{p_1(s_1) \cdot p_2(s_2) \cdot \ldots \cdot p_n(s_n)}_{\text{W'keit dieses Strategienprofils}} \cdot \underbrace{u_i(s_1, \ldots, s_n)}_{\text{Payoff dieses Strategienprofils}},$$

# Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien

**Definition: Nash-GG in gemischten Strategien**

Ein **Nash-GG in gemischten Strategien** $\sigma^* = (\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*)$ eines ssf ist ein Nash-GG seiner gemischten Erweiterung sodass für jeden $i \in N$ gilt

$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*) \quad \text{für alle } \sigma_i \in \Sigma_i.$$

# Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien: Eigenschaften

**Resultat**

Es sei $\sigma^*$ ein Nash-GG in gemischten Strategien. Dann gilt für jeden Spieler $i \in N$, dass jede reine Strategie $s_i \in S_i$, welcher $\sigma_i^*$ strikt positive Wahrscheinlichkeit zuordnet, eine beste Antwort auf $\sigma_{-i}^*$ darstellt.

**Warum?**

- Erwartungsnutzen sind linear in den Ergebniswahrscheinlichkeiten, z.B. $U = p_1 u_1(s_1', \sigma_{-1}) + p_2 u_1(s_1'', \sigma_{-1})$.
- Wenn daher ein Spieler eine gemischte Strategie in einem Nash-GG verwendet, muss er indifferent zwischen allen reinen Strategien sein, welchen die gemischte Strategie positive Wahrscheinlichkeit zuordnet. D.h.: $u_1(s_1', \sigma_{-1}) = u_1(s_1'', \sigma_{-1})$, wann immer sowohl $p_1 > 0$ als auch $p_2 > 0$.

# Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien: Alternativdefinition

- Nutzen des mischenden Spielers also unabhängig von den verwendeten Mischungswahrscheinlichkeiten.
- Daher: Es reicht, zu überprüfen, ob ein Spieler eine profitable Abweichung in <u>reinen</u> Strategien hat.
- Daraus ergibt sich folgende Alternativdefinition:

**(Alternativ-)Definition Nash-GG in gemischten Strategien**

Ein gemischtes Strategienprofil $\sigma^*$ ist ein Nash-GG, wenn für alle Spieler $i$ gilt, dass

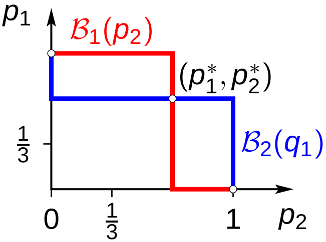
$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(s_i, \sigma_{-i}^*) \text{ für alle } s_i \in S_i.$$

# Zurück zum Kampf der Geschlechter

| | $f$ $(p_2)$ | $o$ $(1-p_2)$ |
|---|---|---|
| $(1-p_1)$ $f$ | $1, 2$ | $0, 0$ |
| $(p_1)$ $o$ | $0, 0$ | $2, 1$ |

Beste (gemischte) Antworten:

$$\mathcal{B}_1(p_2) = \begin{cases} 1, & p_2 < \frac{2}{3} \\ [0,1], & p_2 = \frac{2}{3} \\ 0, & p_2 > \frac{2}{3} \end{cases}, \qquad \mathcal{B}_2(p_1) = \begin{cases} 1, & p_1 < \frac{2}{3} \\ [0,1], & p_1 = \frac{2}{3} \\ 0, & p_1 > \frac{2}{3} \end{cases}.$$




- Nash-GG: $(f, f)$, $(o, o)$, sowie $(p_1 = \frac{2}{3}, p_2 = \frac{2}{3})$.

# Aber welches Nash-GG wählen die Spieler?

Sind (wie im letzten Beispiel) mehrere Nash-GG vorhanden, dann ist es wesentlich, dass die Spieler das gleiche Nash-GG auswählen. Dies könnte plausibel sein durch

- Evolutionäre Überlegungen (Nash 1950, Maynard-Smith 1982)
- Fokus Punkte (Schelling 1960): Normen, Konventionen etc.
- Kommunikation vor dem Spiel: ‘cheap talk,’ ‘burning money’
- (Pareto) Dominanz- oder Risiko Überlegungen
- Veränderung der Rationalitätsannahmen: ‘Gleichgewichtsverfeinerung.’

# Gemischte Strategien in ‘Meeting in New York’

Betrachten Sie eine Verallgemeinerung von ‘Meeting in New York’, in welcher Spieler dem Meeting im Empire State Building einen Nutzen von $c > 0$ zuschreiben:

| | | Mr. Y | |
|---|---|---|---|
| | | $E$ $(q)$ | $C$ $(1-q)$ |
| Mr. X | $E$ $(p)$ | $c, c$ | $0, 0$ |
| | $C$ $(1-p)$ | $0, 0$ | $1, 1$ |

Das (einzige) Nash-GG in (strikt) gemischten Strategien hat $p = q = 1/(1 + c)$.

**Frage:** Warum sinken $p$ und $q$ in $c$ (Spieler gehen also <u>seltener</u> ins Empire State Building je <u>stärker</u> sie ein dortiges Meeting präferieren?

Wenn Sie dies beantworten können, haben Sie verstanden, worum es bei Nash-GG in gemischten Strategien geht!

# Nash-GG in gem. Strategien: Anmerkungen

- In jedem Nash-GG in gemischten Strategien wird jeder Spieler durch das Mischverhalten anderer indifferent zwischen Strategien gemacht, zwischen welchen er selber mischt.
- Esds und Iesds lassen sich auf gemischte Strategien erweitern (gemischte Strategien können reine dominieren!).

## Wie lassen sich gemischte Strategien interpretieren?

- Spieler werfen explizit eine Münze.
- Grosse Population zufällig aufeinandertreffender Spieler, in welcher jeder Einzelne eine reine Strategie spielt.

# Existenz

Wenn wir in einem ssf nach einem Nash-GG suchen, werden wir immer eines finden?

**Satz (Nash 1950)**

Jedes endliche Spiel in strategischer Form $\{N, S, u\}$ besitzt ein Nash Gleichgewicht $\sigma^* \in \Delta(S)$.

Die Existenzfrage für unendliche ssf ist ähnlich beantwortbar aber technisch anspruchsvoller.

# Beweis

Wie im Kampf der Geschlechter lässt sich die Existenzfrage auf die Frage zurückführen, wann die Menge der Überschneidungen der besten Antwortskorrespondenzen

$$\mathcal{B}_i(\sigma_{-i}) = \{\sigma_i \in \Sigma_i | u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}),\ \forall \sigma_i' \in \Sigma_i\}$$

nicht leer ist. Nash beantwortete diese Frage indem er eine Abbildung $\mathcal{B} : \Sigma \mapsto \Sigma$ definierte, in der

$$\mathcal{B}(\sigma) = (\underbrace{\mathcal{B}_1(\sigma_{-1})}_{\sigma_1}, \ldots, \underbrace{\mathcal{B}_n(\sigma_{-n})}_{\sigma_n}).$$

Gegeben dass

- $\mathcal{B}(\sigma)$ eine stetige Funktion ist und
- $\Sigma$ nicht leer, kompakt (dh abgeschlossen & beschränkt) und konvex ist,

gilt *Brouwer's Fixpunktsatz* der besagt, dass ein Fixpunkt $\sigma^* \in \Sigma$ existiert, sodass

$$\sigma^* \in \mathcal{B}(\sigma^*).$$

Dies impliziert laut Definition von $\mathcal{B}(\sigma)$, dass für alle $i \in N$

$$\sigma_i^* \in \mathcal{B}(\sigma_{-i}^*).$$

Dies ist die Existenzbedingung für Nash-GG in gemischten Strategien.

**Satz** (Brouwer 1910): Es sei $K$ eine nicht leere, kompakte und konvexe Menge in $\mathbb{R}^n$ und $f : K \mapsto K$ eine stetige Funktion. Dann hat $f$ einen Fixpunkt $\mathbf{x}^* \in K$, dh einen Punkt $\mathbf{x}^*$ für den gilt, dass

$$f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*.$$

**Beweis** für $n = 1$: Wir betrachten das Einheitsintervall $x \in [0, 1] =: K$ das $f$ auf sich selbst abbildet. Wir suchen nach Fixpunkten $f(x) - x = 0$. Wir wissen, dass $f(x) - x$ stetig ist weil $f(x)$ stetig ist. Laut Definition von $K$ und $f$ gilt sowohl

$$0 \leq f(x) \leq 1 \text{ als auch } 0 \leq x \leq 1.$$

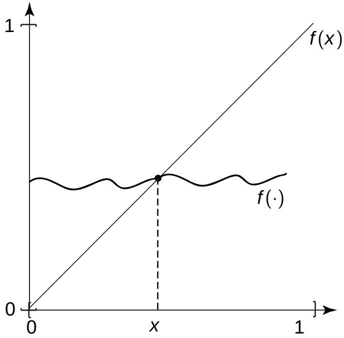
Also gilt

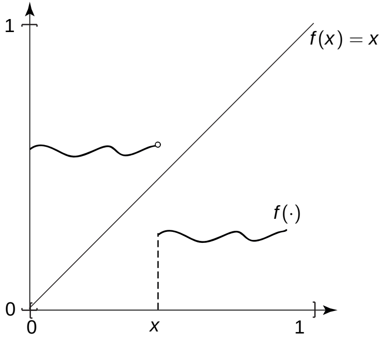
- $f(x) - x \geq 0$ (bzw $f(x) \geq x$) für $x = 0$ und
- $f(x) - x \leq 0$ (bzw $f(x) \leq x$) für $x = 1$.

Für $n > 1$: Sperner's Lemma.

# Intuition

Da der Graph der Fixpunktfunktion $f(x) - x$ über der Abszisse beginnt und unter der Abszisse endet und die Abbildung stetig ist, muss es einen Punkt geben an dem die Funktion die Abszisse schneidet. An diesem Punkt gilt $f(x) - x = 0$ (bzw $f(x) = x$), es handelt sich also um einen Fixpunkt. Wir zeichnen nun bloss $f(x)$.



# Epilog: Das Einführungsspiel

Sie erinnern sich an das Spiel aus der Einführung:

## Ein Spiel

Jeder von Ihnen schreibt eine ganze Zahl zwischen 0 und 100 auf. Ziel ist, 2/3 des Durchschnitts der angegebenen Zahlen zu erraten. Genauer: Jeder Student, welcher die höchste Zahl errät, welche nicht grösser als 2/3 des Durchschnitts ist, erhält ein Schoggi-Stengeli.

# Was ist das Nash-Gleichgewicht?

- Es kann offensichtlich keine beste Antwort sein, mehr als $^2/_3$ des Durchschnitts der anderen zu bieten, also

$$x_i^* = \mathcal{B}_i(x_{-i}^*) \leq \frac{2}{3}\frac{1}{n-1}\sum_{j \neq i} x_j^*.$$

- Aufsummieren über alle Spieler $i$ ergibt

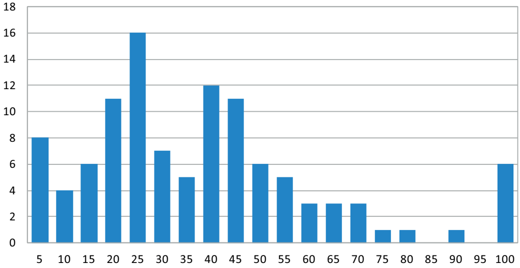
$$\sum_i x_i^* \leq \frac{2}{3}\frac{n-1}{n-1}\sum_i x_i^*.$$

- Da $^2/_3 < 1$ kann dies nur gelten, wenn $\sum_i x_i = 0$, was wiederum $x_1^* = x_2^* = \ldots = x_n^* = 0$ impliziert.

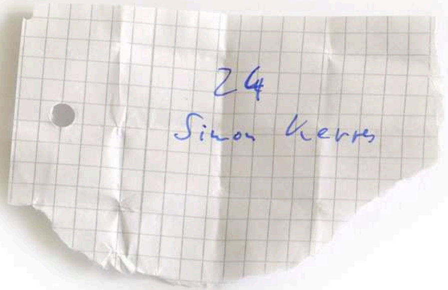
$\Rightarrow$ Im einzigen Nash-GG verteilt der Dozent also Schoggi-Stengeli **an alle**!

# Ihr Feedback

| | 2013 | 2012 | 2011 |
|---|---|---|---|
| ► 109 (gültige) Rückmeldungen | | | |
| ► 3 Mal die 100 | | | |
| ► 12 Zahlen über 66 (11%) | 9% | 7% | 24% |
| ► Durchschnitt: 36.3 | | | |
| ► 2/3 des Durchschnitts: **24.2** | 22.8 | 21.8 | 27.6 |



# Und der Gewinner ist. . .



# . . . sowie: