



主題: Binary search

- 基礎
- 應用
- 作業與自我挑戰



基礎

- What is Search ?
- Binary search
- Linear search



What is Search ?

- 在一堆資料中，把你想要的東西找出來
- 例:
 - 在名單中找看看有沒人叫"王小明"
 - 在一堆數字中，最接近 50 的數字是多少



Binary Search

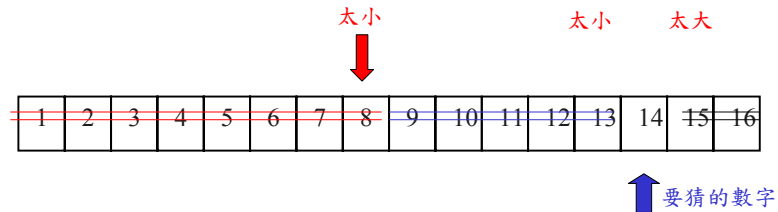
- 什麼情況下能用 binary search ?
 - 資料是 **sorted** (由小到大，或由大到小)
 - 2, 6, 8, 12, 17, 23, 46, 77 (由小到大)
 - 77, 46, 23, 17, 12, 8, 6, 2 (由大到小)
 - 要是資料並不是 **sorted** ???

Binary Search (cont.)

■ 原理

- 查詢中間的資料項，判斷哪一半的資料不符合要求，每次排除一半的候選人

Example: 1 ~ 16 中猜數字



5

Implementation

- lower_bound: 記住目前剩餘之候選人的左邊界
- upper_bound: 記住目前剩餘之候選人的右邊界
- test(k):
 - 給一個 k 值去做測試
 - return 比 k 大那一邊或比 k 小那一邊的候選人還有機會

6

Example

- 猜數字，範圍 1~16 (假設答案為 10)
 - lower_bound = 1, upper_bound = 16: (mid = 8)
猜 8 時，test(8) 會回答太小
==> lower_bound 改為 9
 - lower_bound = 9, upper_bound = 16: (mid = 13)
猜 13 時，test(13) 會回答太大
==> upper_bound 改為 12

7

注意實作時的細節

- definitions of two bounds
 - lower_bound <= target <= upper_bound
 - lower_bound <= target < upper_bound
 - lower_bound < target <= upper_bound
 - lower_bound < target < upper_bound
- how to update the two bounds???

Example: 找 array $A[1..n]$ 中 $\leq x$ 的最後一個 (最大的)

	$A[m] < x$	$A[m] = x$	$A[m] > x$
$L \leq \text{target} < U$	$L = m$	$L = m$	$U = m$
$L \leq \text{target} \leq U$	$L = m$	$L = m$	$U = m - 1$

8

注意實作時的細節 (cont.)

- When to stop???
 - $L = U$, $L+1 = U$, $L \geq U$, $L > U$, ...
- What is the answer when it stops???
 - L , U , $L+1$, $U-1$, ...
- 小心無解
 - check before or after
- 小心有不只一組解 (several same numbers)

Time Complexity

- 在一個 sorted 的 n 筆資料中做 binary search 需要作 $\log_2 n$ 次的 tests
- 例如: $n = 16$
 - $16/2 = 8$; $8/2 = 4$; $4/2 = 2$; $2/2 = 1$
(每次少一半候選人)
 - $\log_2 16 = 4$

Linear Search

- Linear search
 - 把所有資料都檢查一遍，找出你要的東西
 - $O(n)$
 - 最簡單的作法
 - 在資料 unsorted 的情況下，這也是唯一的 search 方法
- 要是給的資料不是一個 sorted 的狀態，要不要先 sort 再做 binary search?
 - 如果只需要在資料中做少量的 search，就不要 sort，直接做 linear search
 - 如果需要很多次的 search，先 sort 會比較有利

應用

- 應用一: 求平方根
- 應用二: H.91.3 侏儸紀公園
- Parametric Search
- 應用三: A.10341 方程式求根
- 應用四: H.97.6 耕者有其田
- 其它應用

應用一: 求平方根

- 給一個整數 Y ，已知 \sqrt{Y} 為整數，求 \sqrt{Y} 為多少？
(假設你不會開根號，只會作 $+$, $-$, $*$, $/$)
- Solution: 將題目轉換為 $X^2 = Y$ ，用 binary search 求 X
 - 以 $Y = 6538249$ 為例
 - $1^2 < 6538249 < 10000^2$ ($L = 1$, $U = 10000$)
 - $1^2 < 6538249 < 5000^2$ ($L = 1$, $U = 5000$)
 - $2500^2 < 6538249 < 5000^2$ ($L = 2500$, $U = 5000$)
 - \vdots
 - $X = 2557$ initial values of L and U ???

13

應用二: H.91.3 侏儸紀公園

- 公園會提供單車，每部車供一人乘騎，旅客先到先借用
- 若是沒有空車，則旅客必須等待
- 如果等待超過 30 分鐘，會放棄等待離開

14

- 已知條件如下:

- 旅客數量 m ($10 \leq m \leq 60$)
- 每位旅客到達公園的時間 (分鐘) t ($1 \leq t \leq 60$)
- 每位旅客騎車逛公園的時間 (分鐘) T ($1 \leq T \leq 60$)

- 請問: 至少需要幾部單車，才能滿足所有的旅客？
(不會因為等待超過 30 分鐘而放棄)

15

Sample

m = 11	5	30	35 分時回來
	5	10	15 分時回來
	10	40	55 分時回來
	15	10	45 分時回來
	30	20	65 分時回來
	35	5	60 分時回來
	35	5	65 分時回來
	40	30	95 分時回來
	45	5	70 分時回來
	50	5	75 分時回來
	50	30	105 分時回來

Assume that there are 2 bicycles.
(等待超過 30 分鐘會放棄)

16

Solution (I): greedy

- 有人來的時候，若是沒有空車
 - (1) 30 分鐘內會有車子回來: 請他等
 - (2) 30 分鐘內沒有車子回來: 多開一輛新車給他
- Example

	available	
A	B	C
61	38	39

 - 1 30 新開一部車 A
 - 2 30 A 車 31 分時會回來 等它
 - 3 35 A 車 61 分時才會回來，不等，開新車 B
 - 4 35 B 車 38 分時才會回來，不等，開新車 C
- 總共需要三部車
- Correct or not???

17

Solution (II): binary search

- 如果已經知道腳踏車的數目，我們可以寫一個程式去模擬(simulation)，測試是否足夠
 - 旅客到達時，有空車就借用，沒有空車就等待下一輛車回來
- 對總共需要的車數做 binary search!
- 比如說旅客總共有 10 個人則去測 5 部車夠不夠，如果不夠，那 8 部車夠不夠，依此類推

18

- upper_bound
 - 一開始設為旅客總人數 m
 - 一人一部一定夠用
- lower_bound
 - 一開始設為 1
 - 至少需要一部車
- test(k)
 - 給定車的數量 k 後，以模擬去決定夠不夠用

19

Program structure

```

initialize();
while (upper_bound != lower_bound) {
    mid = (upper_bound + lower_bound)/2;
    if test(mid) = enough
        upper_bound = mid;
    else
        lower_bound = mid + 1;
}
answer = lower_bound
  
```

???

Time: $O(m^2 \times \log m) \approx 10^4$, or $O(m \times \log^2 m) \approx 10^3$ (using a heap)
 How about linear search ???

20

Parametric Search

- Solution space is a set of **integers**
- There is a function **test(k)**, which can be used to prune all $i < k$ or $i > k$
- Use binary search to find the answer

21

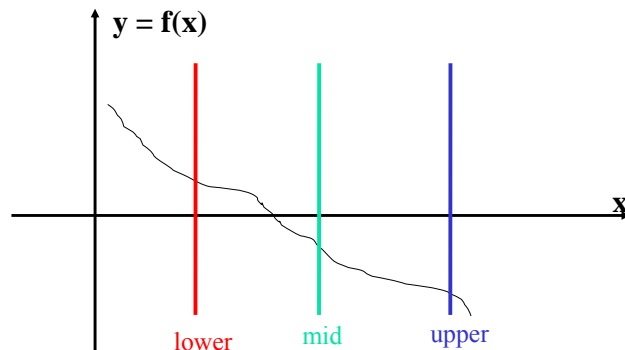
應用三: A.10341 方程式求根

- 給定下面方程式的係數 p, q, r, s, t, u
 - $f(x) = p \cdot e^{-x} + q \cdot \sin(x) + r \cdot \cos(x) + s \cdot \tan(x) + t \cdot x^2 + u$
 - $0 \leq p, r \leq 20$ and $-20 \leq q, s, t \leq 0$
- 求在 $x \in [0, 1]$ 中 $f(x) = 0$ 的解
 - 輸出到小數點以下第四位 (四捨五入)
- 在 $0 \leq x \leq 1$ 中, $f(x)$ 是一個遞減的方程式
 - $e^{-x}, \cos(x)$ 遞減, 且係數 $p, r \geq 0$
 - $\sin(x), \tan(x), x^2$ 遞增, 且係數 $q, s, t \leq 0$

22

Observation

- 任意代兩點 x_1, x_2 進遞減方程式中, 若 $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, 則在 x_1 到 x_2 之中一定有一個點 x_3 使得 $f(x_3) = 0$



23

Solution: binary search

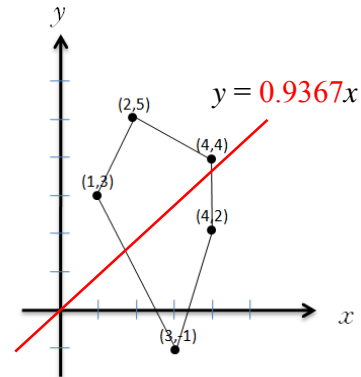
- 設 $upper = 1, lower = 0, mid = (upper + lower)/2$, 若 $f(mid)$ 的 **值等於 0** 的話, mid 就是方程式的根, 否則看 $f(mid) \cdot f(upper)$ 和 $f(mid) \cdot f(lower)$ 哪個 **值小於 0**, 則往那個方向做 binary search
- **When to stop???**
- **What is the answer when it stop, lower or upper?**

24

應用四: H.97.6 耕者有其田

- 給定一塊凸多邊形的田地 (頂點的個數 $N \leq 100$)
- 找出一條通過原點的直線 $y = ax$ ，剛好等分劃過這塊農地。

- 輸出係數 a 的值到
小數點以下第四位 (四捨五入)
- Solution: binary search



其它應用 (forerun)

- 大數除法
- 大數開次方
- 數值方法
- 模擬題求迴圈

作業與自我挑戰

- 作業
 - 練習題
 - A.10341 方程式求根
<http://uva.onlinejudge.org/external/103/10341.html>
 - 挑戰題
 - AF.2003-2729 The Solar System
<https://icpcarchive.ecs.baylor.edu/external/27/2729.html>
 - A.714 Copying Books <http://uva.onlinejudge.org/external/7/714.html>
- 自我挑戰
 - A. 10587 Mayor's Posters
<http://uva.onlinejudge.org/external/105/10587.html>
 - AF. 2001-2477 Ferries
<https://icpcarchive.ecs.baylor.edu/external/24/2477.html>
 - A.10567 Helping Fill Bates
<http://uva.onlinejudge.org/external/105/10567.html>