

Practica con utilitario 1

Introducción al procesamiento de señales



FACULTAD
DE INGENIERÍA



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE LA PLATA

Joaquin Labarta 03207/3

Pedro Ringuelet 02960/7

En el siguiente informe se lleva a cabo un análisis de señales de variable independiente discreta y de las Transformadas de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD) de estas. Disponemos de una señal con estas condiciones y a través del entorno Octave realizamos el procesamiento de las mismas para llevar una descripción y comparativa de distintos sistemas y comportamientos frecuenciales de interés.

A partir de la señal brindada, realizamos un script (Grafico_Senial.m) para obtener su gráfica (*Figura 1*) y poder comenzar el análisis solicitado. Para ello se introdujo dentro del argumento de la señal el número de alumno 03207/3 (sin la barra separadora) y esta genero la señal particular posteriormente graficada como se muestra en la figura 1.

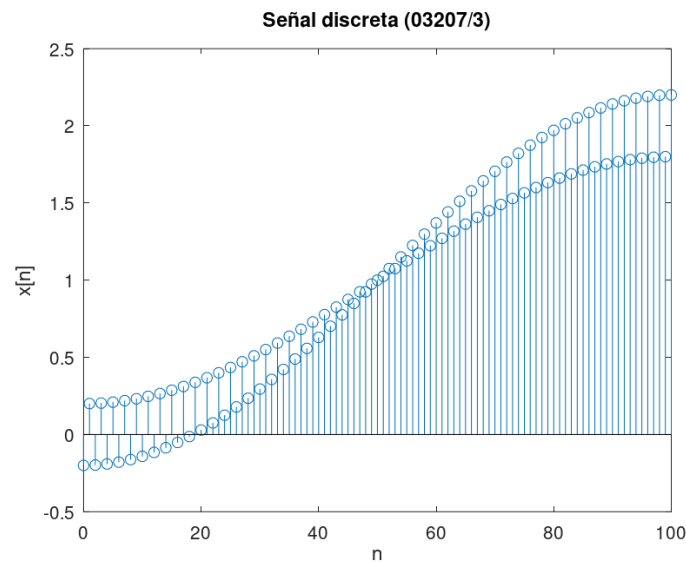


Figura 1

Luego de graficar la señal discreta procedemos a obtener y graficar la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD) de la misma (GraficoTFTD.m). La TFTD es una función de variable continua s de periodo 1 que tomará valores complejos, donde para representarla gráficamente visualizamos por separado el espectro de la magnitud (entre $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$, ya que es de periodo 1) y su fase ya que nos permitirá tener una mirada más clara de las características frecuenciales de la misma.

El gráfico obtenido del módulo de la TFTD (figura 2) nos brinda información sobre sus componentes en frecuencia, allí observamos que los valores que están cercanos al cero pertenecen a frecuencias bajas, mientras que los valores sobre los extremos de la gráfica en

$-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$ serán de frecuencias altas. Claramente la señal analizada tiene un mayor contenido sobre las frecuencias bajas dado el tamaño del lóbulo central.

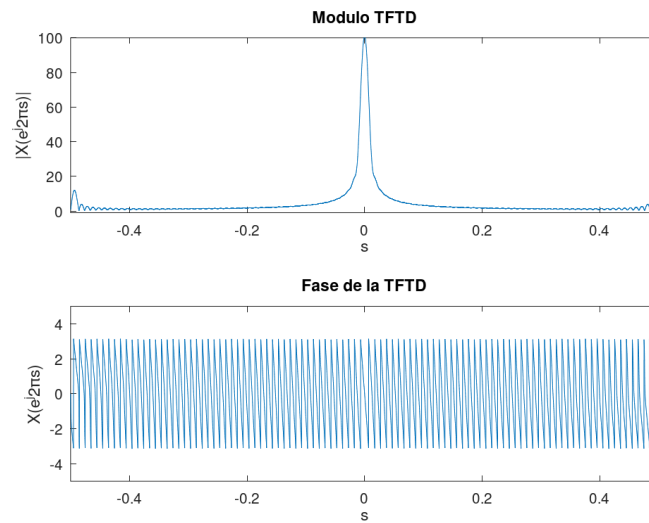


Figura 2

Ahora constamos de cuatro sistemas descritos por sus ecuaciones en diferencias con los cuales se quiere procesar la señal anterior.

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x[n-1]$$

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$$

$$y[n] = \frac{1}{4}x[n] + \frac{1}{4}x[n-1] + \frac{1}{2}y[n-1]$$

$$y[n] = \frac{1}{4}x[n] - \frac{1}{4}x[n-1] - \frac{1}{2}y[n-1]$$

Previamente buscamos conocer de manera analítica la respuesta impulsional $h[n]$ y la respuesta en frecuencia $H(e^{j2\pi s})$ para cada uno de ellos y así saber de qué tipo de sistemas se trata. Para conocer la respuesta impulsional del sistema debemos ingresar a este con una delta de Kronecker y la salida será su $h[n]$; para obtener la respuesta en frecuencia, debemos anti-transformar ambos términos del sistema para luego realizar un despeje de manera tal que

nos quede la relación: $H(e^{j2\pi s}) = Y(e^{j2\pi s}) / X(e^{j2\pi s})$ o bien directamente antitransformar $h[n]$, lo que resulte más sencillo análisis.

Para el sistema 1: Este sistema (*Sistema_1.m* y *RI_S1.m*), por su ecuación en diferencias, es un sistema FIR. Los sistemas FIR se llaman así porque tiene respuesta impulsional finita; a estos se les considera no recursivos ya que no tienen retroalimentación, solo dependen de la entrada en distintos n . Este sistema tiene memoria, es causal, es estable, es invariante al desplazamiento y también es lineal. La respuesta impulsional está dada por

$h[n] = \frac{1}{2} \delta[n] + \frac{1}{2} \delta[n-1]$ y su gráfica es la que se muestra en la *Figura 3.1*.

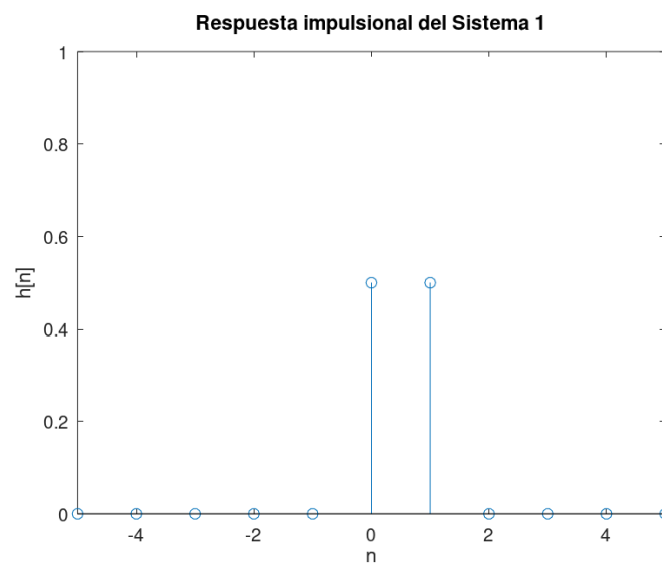


Figura 3.1

Por su parte, la respuesta en frecuencia está dada por la función $H(e^{j2\pi s}) = \frac{1}{2} (1 + e^{-j2\pi s})$ como se muestra en la *Figura 3.2*.

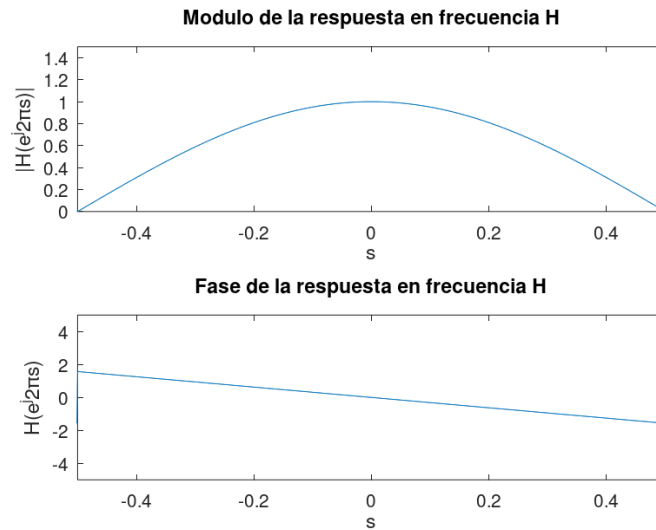


Figura 3.2

Como se puede ver en la gráfica del módulo de la respuesta en frecuencia, este sistema deja pasar frecuencias bajas (filtro pasa-bajos) y luego comienza a atenuarlas lentamente hasta no dejar pasar las frecuencias altas.

Para el sistema 2: este sistema (*Sistema_2.m* y *RI_S2.m*) es también de tipo FIR por los mismos motivos que se mencionaron anteriormente, la única diferencia viene del segundo término de la derecha que tiene el signo cambiado respecto al sistema 1. La expresión de la respuesta impulsional es $h[n] = \frac{1}{2} \delta[n] - \frac{1}{2} \delta[n-1]$ y su gráfica se muestra a continuación en la *Figura 4.1*.

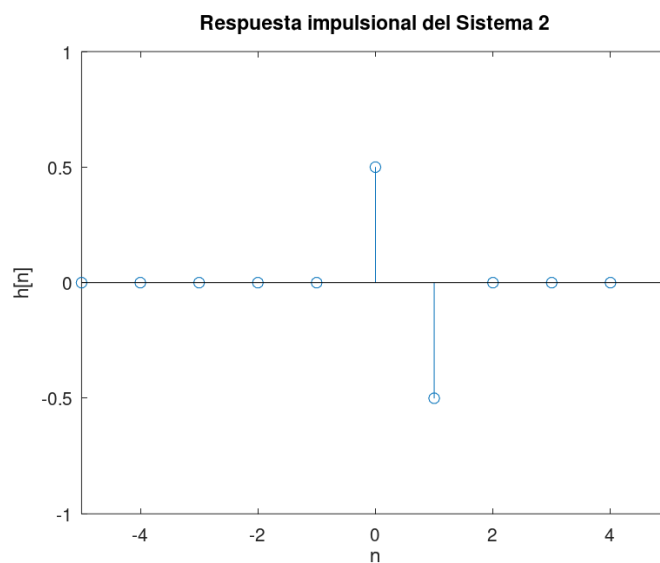


Figura 4.1

Para su respuesta en frecuencia $H(e^{j2\pi s}) = \frac{1}{2} (1 - e^{-j2\pi s})$ si observamos un cambio respecto al sistema 1 ya que en este caso tenemos un filtro pasa-altos, en el cual el sistema deja pasar las frecuencias altas más cercanas a los límites laterales, mientras que atenúa las frecuencias bajas, tal como se observa en la *Figura 4.2*

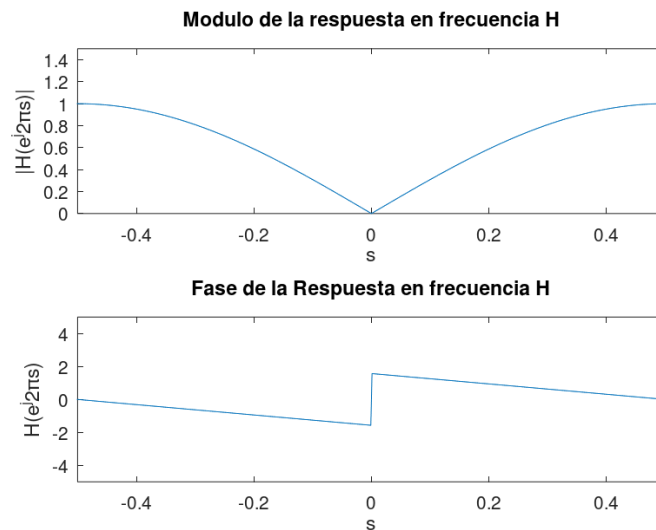


Figura 4.2

Para el sistema 3: Aquí, a diferencia de los casos anteriores, tenemos un sistema que es de respuesta impulsional finita (*Sistema_3.m* y *RI_S3.m*), también llamado IIR. Estos sistemas son de tipo auto-regresivos, esto significa que se necesitan conocer valores en instantes anteriores de la salida para conocer la salida en un instante dado; lo que hace que se dé esto, mirando su ecuación en diferencias, es el término de $y[n-1]$ que corresponde a un término de salida anterior. La respuesta impulsional de este será la mostrada abajo analítica y gráficamente (*Figura 5.1*). $h[n] = \frac{1}{4} \delta[n] + \frac{1}{4} \delta[n-1] + \frac{1}{2} h[n-1]$. La gráfica de la $h[n]$ va decreciendo exponencialmente, comportándose como una serie geométrica; mientras que la respuesta en frecuencia será $H(e^{j2\pi s}) = [\frac{1}{4} (1 + e^{-j2\pi s})] / [1 - (\frac{1}{2})e^{-j2\pi s}]$ donde su gráfica (*Figura 5.2*) nos muestra que este sistema es un filtro pasa-bajos como en el sistema 1, a diferencia de que en este caso deja pasar menos frecuencias medias, es decir, tiene una caída más pronunciada en cuanto al módulo entre las frecuencias bajas y las altas por eso se ve un pico más empinado que en el primer sistema visto, lo que hace que sea un filtro mejor al anteriormente mencionado, y también se ve una diferencia en las fases que marca esta misma tendencia.

A partir de su respuesta en frecuencia la podemos anti-transformar y obtener así la ecuación que define a la respuesta impulsional, que está descrita por:

$$h[n] = \text{IFTD}^{-1} \{H(e^{j2\pi s})\} = \frac{1}{2} \wedge^{(n+1)} \cdot (\frac{1}{2} \cdot u[n] + u[n-1])$$

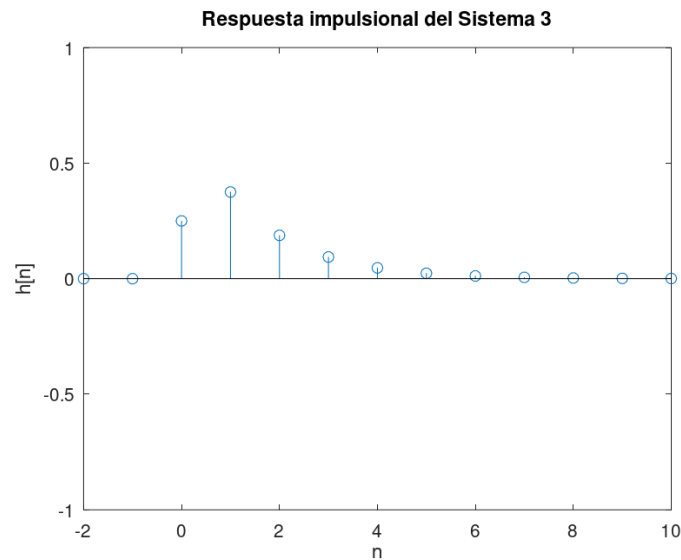


Figura 5.1

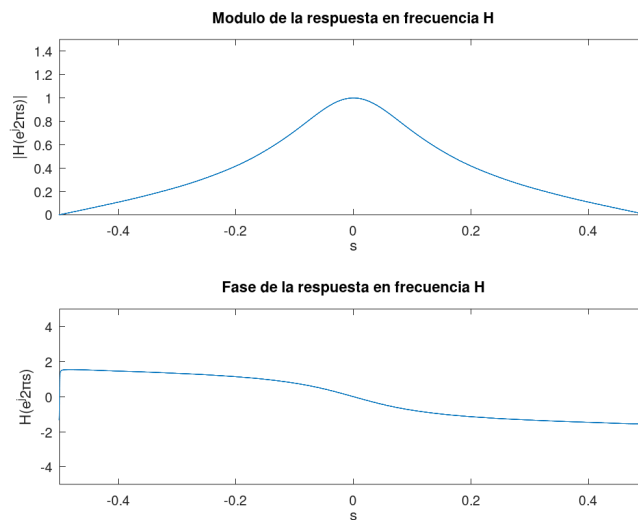


Figura 5.2

Para el sistema 4: Análogamente al sistema 3, este sistema (*Sistema_4.m* y *RI_S4.m*) corresponde a un sistema de respuesta impulsional infinita (*Figura 6.1*) IIR cuya respuesta en frecuencia construye un filtro pasa-altos (*Figura 6.2*), atenuando las frecuencias bajas y dejando pasar las frecuencias más altas de manera un poco más abrupta que el sistema 2, por lo que lo vuelve un mejor filtro con respecto al mencionado. La ecuación que describe su respuesta impulsional y la que describe su respuesta en frecuencia son

$h[n] = \frac{1}{4} \delta[n] - \frac{1}{4} \delta[n-1] - \frac{1}{2} h[n-1]$ que irá decreciendo exponencialmente, con valores en el eje y positivos cuando n es par y en el eje y negativo cuando n es impar. Y $H(e^{j2\pi s}) = \frac{1}{4} (1 - e^{-j2\pi s}) / [1 + \frac{1}{2} e^{-j2\pi s}]$ será su respuesta en frecuencia y anti-transformando esta obtenemos su respuesta impulsional descrita por $h[n] = \frac{1}{4} \cdot ((-\frac{1}{2})^n \cdot u[n] - (-\frac{1}{2})^{(n-1)} \cdot u[n-1])$ que irá decreciendo exponencialmente, con valores en el eje y positivos cuando n es par y en el eje y negativo cuando n es impar.

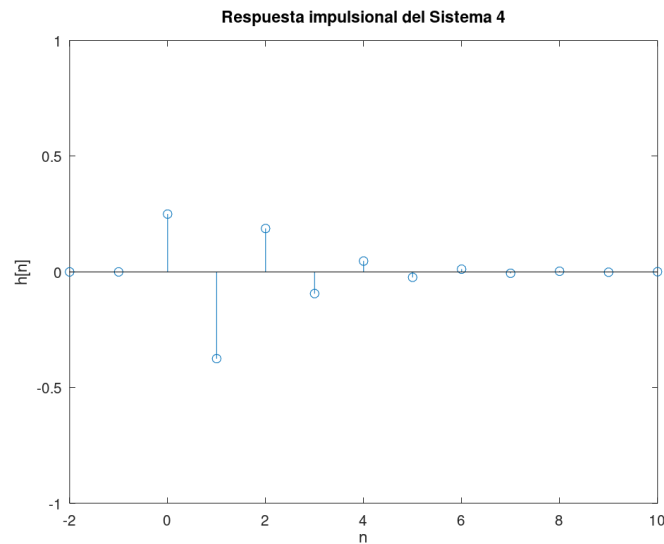


Figura 6.1

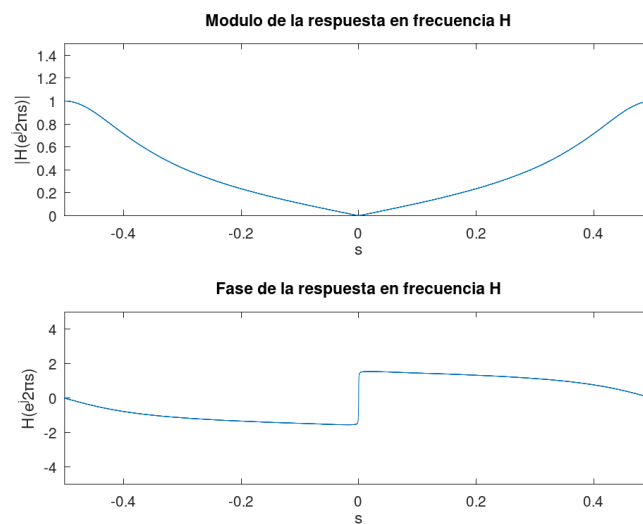


Figura 6.2

Conociendo estos sistemas y la señal con la que empezamos trabajando en este informe, queremos ver cómo reacciona cada uno de estos cuando se le ingresa esta señal, para luego

ver la transformada de la salida $Y(e^{j2\pi s})$ e identificar sus componentes frecuenciales y confirmar de que se cumple lo previamente analizado.

Cuando ingresamos la señal en el sistema 1 (*Figura 7.1*) y le calculamos su TFTD (*Figura 7.2*), podemos ver que efectivamente desaparecen las componentes de frecuencias altas que aparecían representadas en los límites de la figura 2, confirmando que estamos tratando con un filtro pasa-bajos.

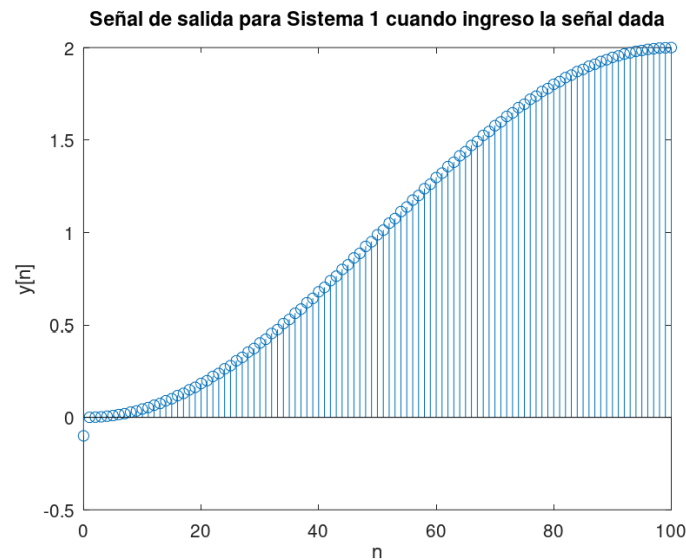


Figura 7.1

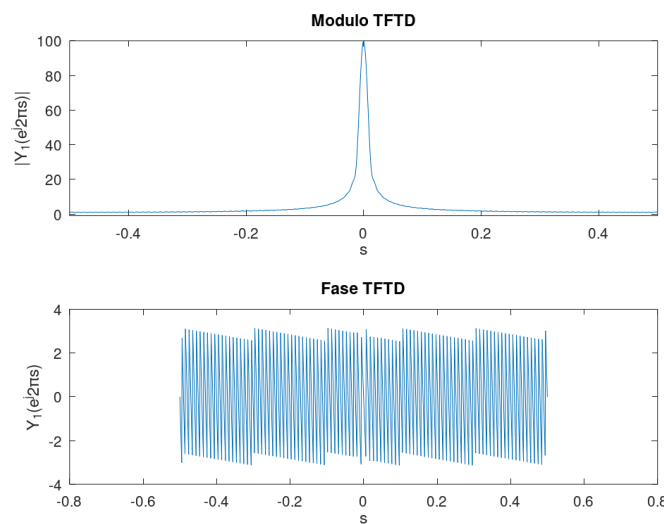


Figura 7.2

De la misma manera, proponemos como señal de entrada al sistema 2 la señal que obtenemos al principio del informe, obteniendo la señal de salida de la *Figura 8.1*; luego realizamos el cálculo de su TFD y obtenemos su grafica en módulo y fase (*Figura 8.2*)

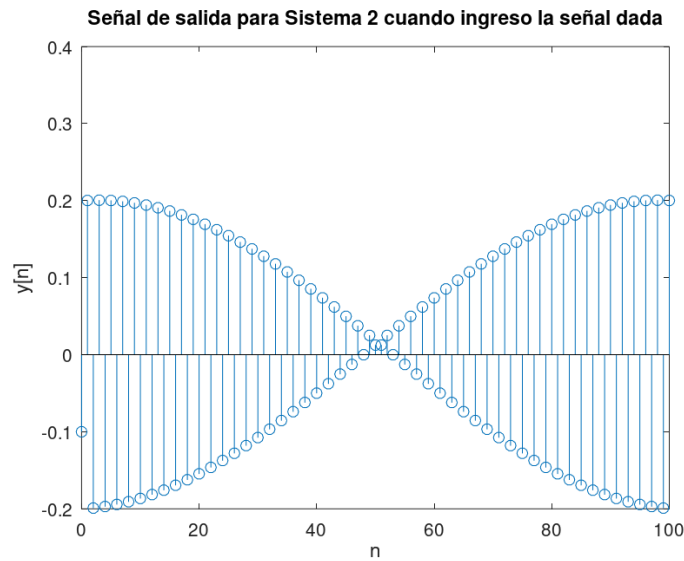


Figura 8.1

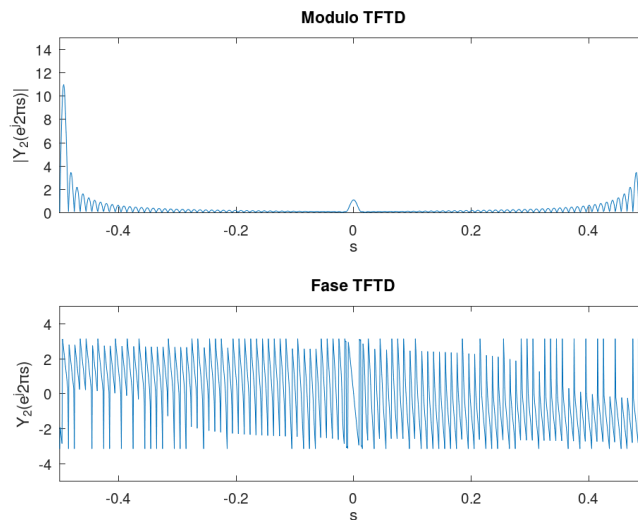


Figura 8.2

Nuevamente, como vimos en el análisis previo de la respuesta impulsional en frecuencia (*Figura 4.2*) al ingresar la señal vemos que este sistema se comporta como un pasa altos, dejando pasar más las frecuencias que se encuentran sobre los límites de la gráfica.

Cuando ingreso con la señal al sistema 3 (*Figura 9.1*), obtengo algo muy similar al sistema 1 ya que sus ecuaciones en diferencias eran similares salvo por el factor de auto-regresión $y[n-1]$. Lo que podemos notar gráficamente (*S1 vs S4.m*) y haciendo una comparativa con lo anteriormente mostrado, es que la diferencia viene dada por cómo se atenúan las frecuencias altas; en el caso de este sistema (*Figura 9.2*), al ser auto regresivo, las frecuencias altas son eliminadas más efectivamente que el sistema 1. (*Figura 9.3*)

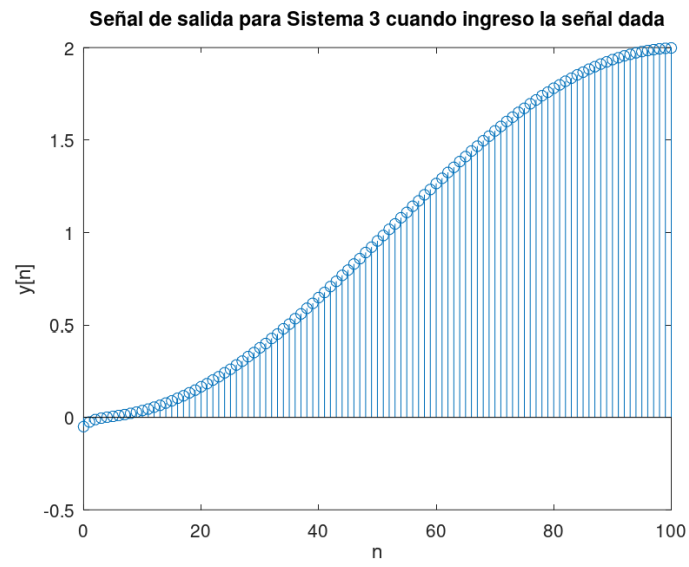


Figura 9.1

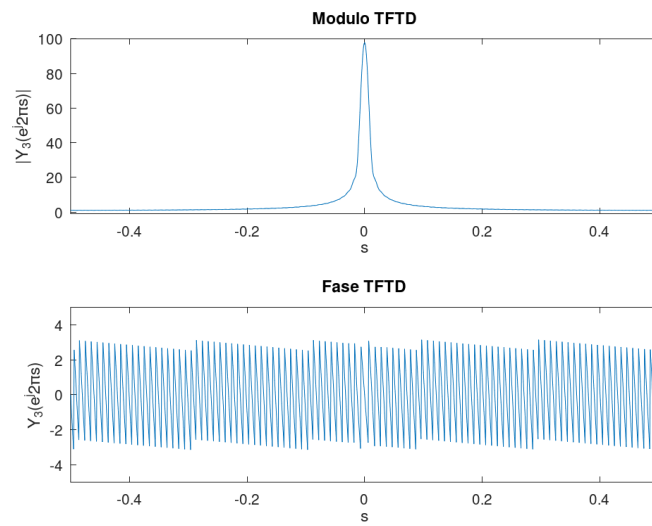


Figura 9.2

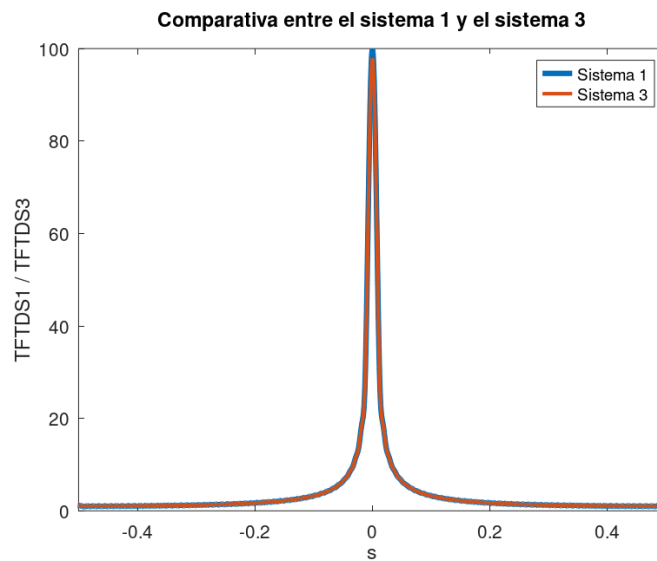


Figura 9.3

Por último, lo que sucede entre los sistemas 1 y 3, sucede también con los sistemas 2 y 4; ambos sistemas son pasa altos pero dada la auto regresión del sistema 4, que atenúa de manera más efectiva las frecuencias bajas como se puede ver por el tamaño del lóbulo central (*S2vsS4.m*) lo que lo convierte en un filtro de mejor calidad con respecto al 2 (*Figura 10.3*). Podemos ver en la *Figura 10.1* y *10.2* la representación gráfica de la salida del sistema y de su TFTD en modulo y fase.

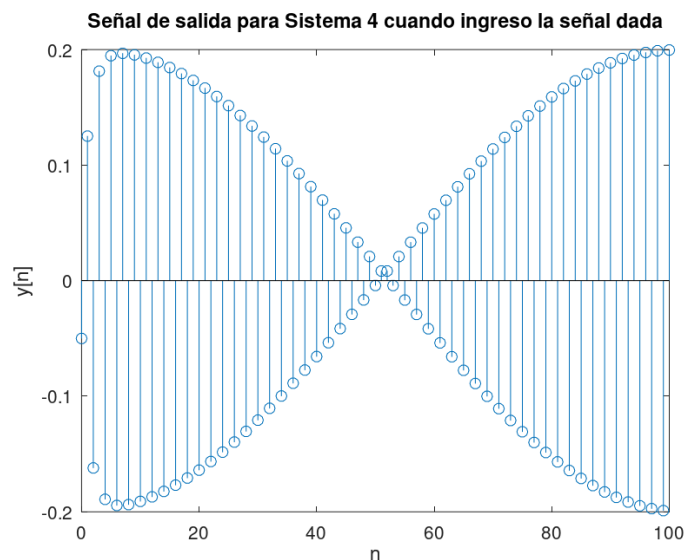


Figura 10.1

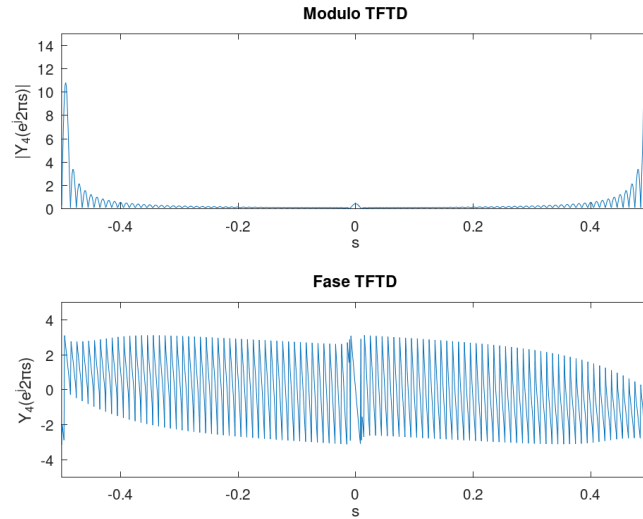


Figura 10.2

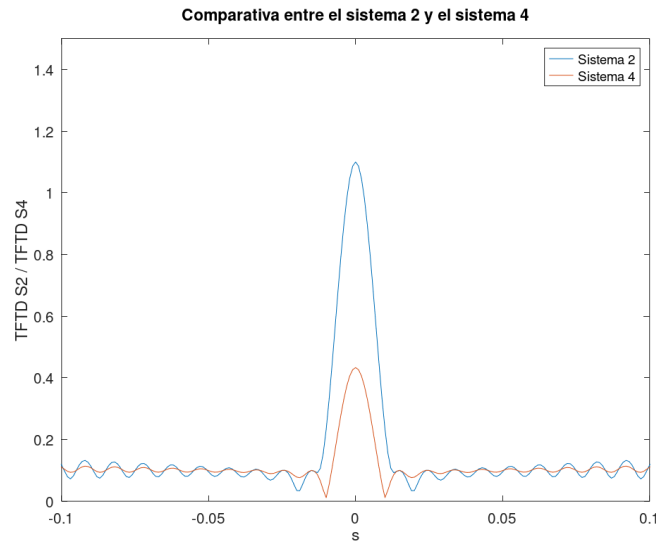


Figura 10.3

Continuando con el análisis de señales a través del entorno Octave, se nos presenta un script que contiene una respuesta impulsional, que llamamos $hA[n]$, correspondiente a un SLID FIR (de respuesta impulsional finita) que modela el comportamiento de un canal digital con dos ecos, la cual se muestra en la *Figura 11.1*.

Leyendo el gráfico, podemos obtener analíticamente la ecuación que define a la respuesta impulsional como: $hA[n] = \delta[n] - 0,45 \cdot \delta[n-8820] + 0,2025 \cdot \delta[n-17640]$ y a partir de ella obtener la ecuación en diferencias que representa al sistema

$$y[n] = x[n] - 0,45 \cdot x[n-8820] + 0,2025 \cdot x[n-17640]$$

Analizando $h_A[n]$ podemos determinar que, dada su condición de ser unilateral a la derecha, es decir, que existe a partir de $n=0$, este sistema será estable en el sentido de entrada acotada – salida acotada; característica que también podemos conjeturar a partir de que contamos con un SLID FIR. Esto nos sirve también para comprender que este sistema será causal dado que la salida no anticipa valores futuros de la entrada; el sistema se encuentra “apagado” instantes previos a $n=0$.

Para corroborar que las ecuaciones halladas analíticamente corresponden al sistema que se está analizando, implementamos en el entorno de desarrollo la función (*SistemaE2.m* y *Ejercicio2_2.m*) que represente a esta ecuación en diferencias para posteriormente ingresar a este con una delta de Kronecker y compararla con la $h_A[n]$, donde se puede ver en la *Figura 11.2* que ambos resultados se corresponden.

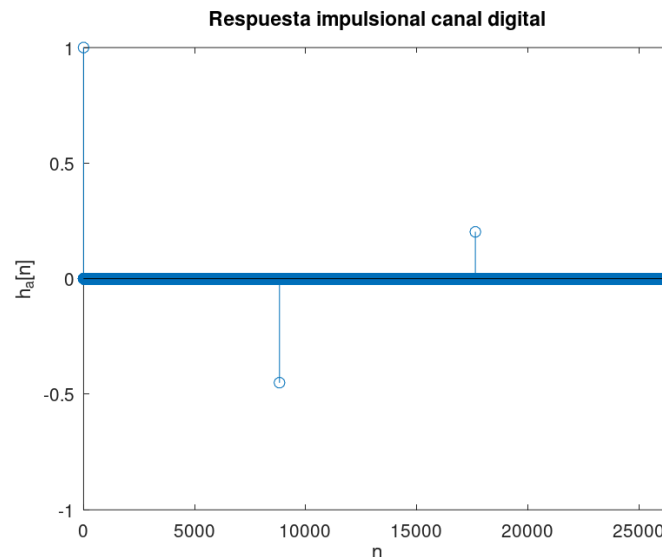


Figura 11.1

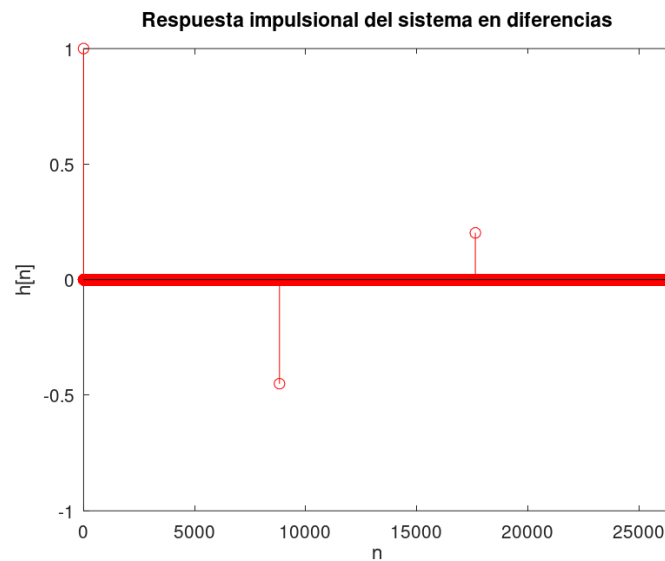


Figura 11.2

A partir de este análisis previo, nos interesa ver cómo se comporta el sistema cuando se le ingresa una señal de audio dada, es decir, cómo varía esta señal al ingresarse al sistema comparada con cómo se la escucha por sí misma. La señal auditiva que se nos brinda se oye como un pitido sin ecos, que al ingresar al sistema, el cual como se mencionó anteriormente consta de dos de estos, va a escucharse con réplicas de menor amplitud dadas las componentes de estos. En la *Figura 12* podemos ver representadas en el tiempo tanto la señal de entrada (arriba) como la salida del sistema (abajo); se puede observar en la segunda de estas como aparecen las réplicas de menor amplitud que sonaran como los ecos de la señal de audio (*Ejercicio_2_3.m*).

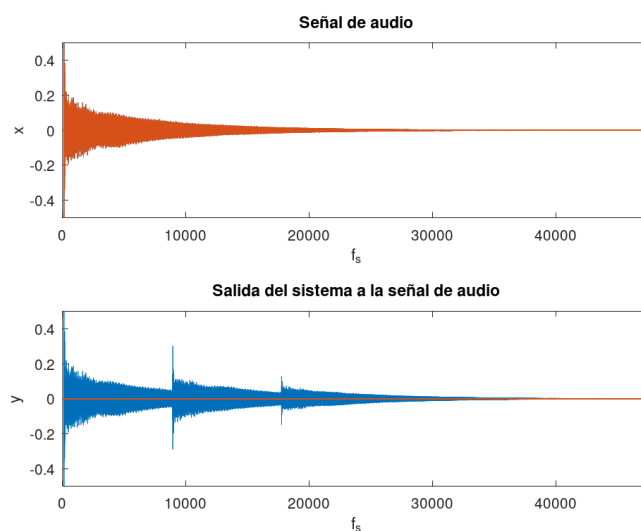
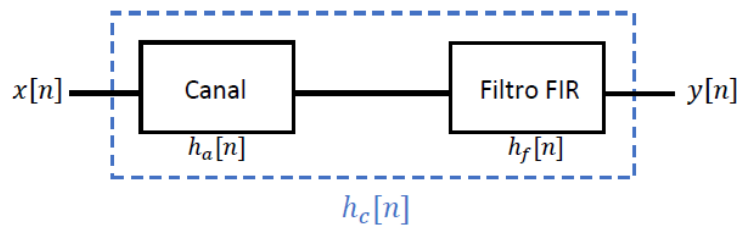


Figura 12

Si queremos corregir este efecto producido por en canal, debemos intentar colocar un filtro FIR en cascada con el canal intentando que la respuesta impulsional del sistema se asemeje a una $\delta[n]$ para que así se logren atenuar las réplicas.

Para ello primero representamos al sistema en cuestión (*Esquema 1*), poniendo en cascada el filtro FIR y el canal y generando una nueva respuesta impulsional $h_c[n]$ que estará determinada a partir de la convolución entre las respuestas impulsionales tanto del canal (la cual obtuvimos anteriormente) y la del filtro propuesto. Entonces, la descripción de esta nueva respuesta impulsional que buscaremos acercar a una delta de Kronecker en 0 será:

$$h_c[n] = \{h_a[n] * h_f\}[n]$$



Esquema 1

Si proponemos como idea inicial un filtro de una rama de retardo $yf[n]=x[n]-\alpha.x[n-n0]$ obtenemos como respuesta impulsional $hf[n]=\delta[n]-\alpha.\delta[n-n0]$ la cual deberemos evolucionar con $ha[n]$ y así ver si la respuesta impulsional del sistema en su totalidad se comporta efectivamente como una delta de Kronecker y eliminar las réplicas.

Analíticamente encontramos que, al hacer la convolución, necesitamos encontrar los valores de α y $n0$ de tal manera de acercarnos al resultado deseado. El desarrollo de la convolución mencionada resulta en:

$$h_c[n]=\delta[n]-0,45.\delta[n-8820]+0,2025.\delta[n-17640]-\alpha.\delta[n-n0]+\alpha.0,45.\delta[n-8820-n0]-\alpha.0,2025.\delta[n-17640-n0]$$

Dónde encontramos que, si me quiero acercar a que la respuesta impulsional del sistema completo sea una delta de manera tal que se anulen las repeticiones en el tiempo, los valores deberán ser $\alpha = -0,45$ y $n0 = 8820$; donde más allá de ello, estos valores también generan una réplica de baja amplitud en el tiempo que, por más de que se escuche casi perfecto el sonido (*CanalFiltro1.m* y *Ejercicio_2_45.m*), hay que saber que existe este eco, cómo se enseña en la *Figura 13*. La respuesta impulsional del sistema será $h_c[n]=\delta[n] +0,0911625.\delta[n-26460]$ y su ecuación en diferencias que define al mismo es

$$y[n]=x[n] + 0,0911625.x[n-26460]$$

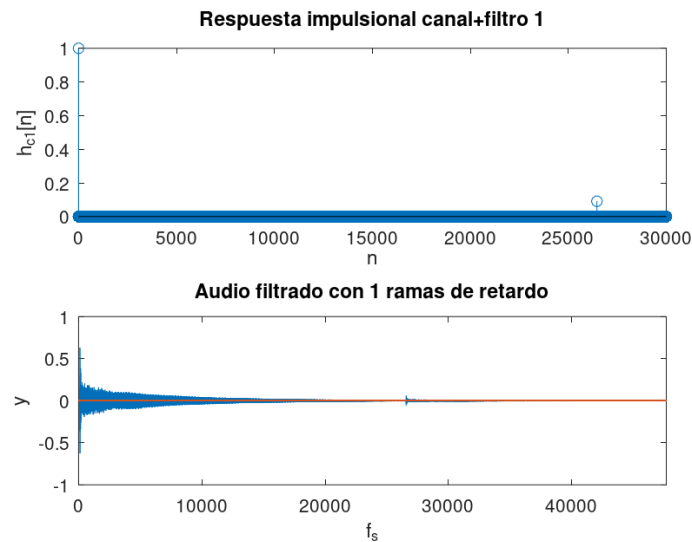


Figura 13

Estos resultados nos acercan al deseado, pero aún no es perfecto; por ello planteamos, de la misma manera, un filtrado con dos ramas de retardo representado por

$$yf[n]=x[n]-\alpha.x[n-n0]-\beta.x[n-n1] \text{ y con respuesta impulsional}$$

$hf[n]=h[n]-\alpha.h[n-n0]-\beta.h[n-n1]$ donde al realizar la convolución para obtener la respuesta impulsional y la salida del sistema obtenemos ecuaciones que dependen por su puesto de las incógnitas β y $n1$, donde determinamos que para lograr eliminar la réplica indeseada del

filtrado anterior deberían ser $\beta = 0,091125$ y $n1=26460$, quedándonos una respuesta impulsional descrita por la ecuación $hc2[n]=\delta[n]-0,041.\delta[n-35280]+0,018.\delta[n-44100]$ y una salida del sistema dada por la ecuación en diferencias

$$y[n]=x[n]-0,041.x[n-35280]+0,018.x[n-44100], \text{ como se grafica en la Figura 14.}$$

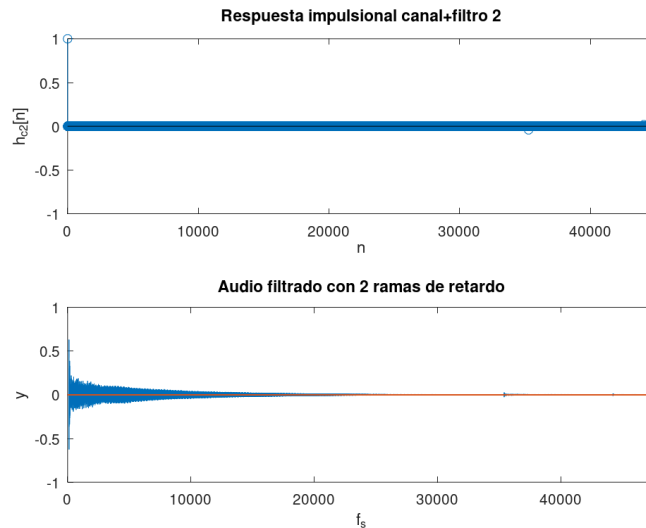


Figura 14

Buscando perfeccionar este filtrado, se propone la realización de uno con 3 ramas de retardo que, como venimos viendo, al agregar estas ramas y convolucionar las respuestas impulsionales de estos con la del canal, al ser esta una convolución de deltas, inevitablemente seguirán apareciendo réplicas/ecos en la salida del sistema con amplitud menor y aún más alejadas del origen, lo que ajusta mejor el sonido final buscado. De la misma manera que anteriormente, busquemos eliminar la delta de mayor amplitud que genera un eco más fuerte y aplicando un filtrado de tipo $yf[n]=x[n]-\alpha.x[n-n0]-\beta.x[n-n1]-\gamma.x[n-n2]$ y con un planteo idéntico a los anteriores llegaremos a la conclusión de que para eliminar este eco debemos considerar a $\gamma=-0,041$ y a $n2=35280$ obteniendo así una nueva respuesta impulsional del canal (*CanalFiltro3.m* y *Ejercicio_2_45*) $hc3[n]=\delta[n]+0,036.\delta[n-44100]-0,08.\delta[n-52920]$ y una filtración del audio como se observa en la *Figura 15*.

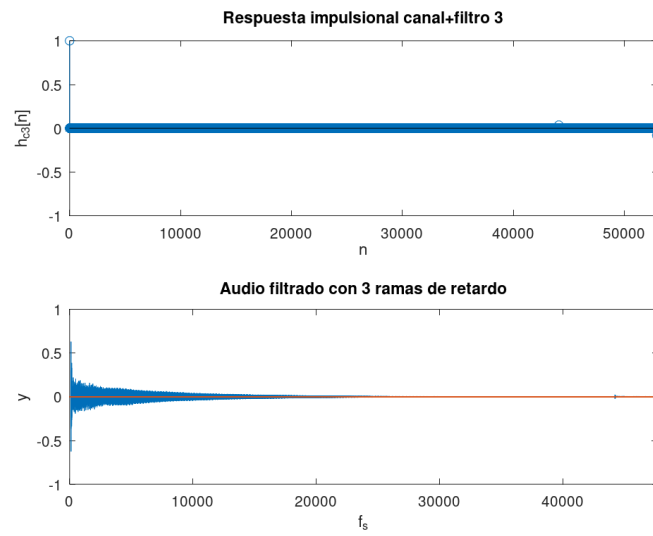


Figura 15