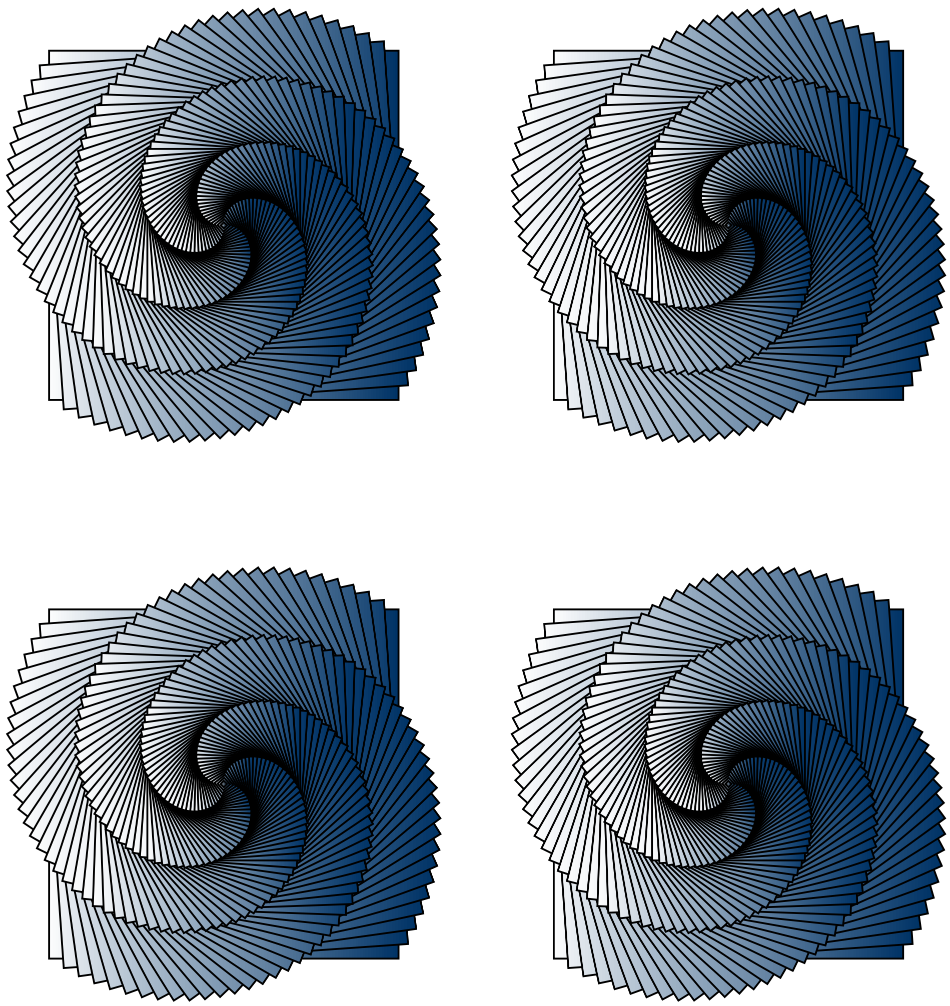
UASD
Universidad Autónoma de Santo Domingo
PRIMADA DE AMÉRICA |
Fundada el 28 de octubre de 1538

Juan Toribio Milane
Francis Álvarez Paulino
Pedro Guzmán Guzmán



ECUACIONES DIFERENCIALES

1e

Primera Edición

Curso Práctico De Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Y Funciones Especiales, Con Aplicaciones.

Francis Álvarez P.
Universidad Autónoma De Santo Domingo

José Angel Gomez
Universidad Autónoma De Santo Domingo

Juan Toribio Milane
Universidad Autónoma De Santo Domingo

Pedro Guzmán G.

Dedicatoria

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Agradecimientos

La culminación de este libro sobre ecuaciones diferenciales no habría sido posible sin el apoyo y la colaboración de muchas personas e instituciones.

En primer lugar, agradezco profundamente a mi familia, cuyo amor y apoyo incondicional me han dado la fuerza para completar este proyecto. Su paciencia y comprensión durante las largas horas de trabajo han sido fundamentales.

A mis colegas y estudiantes, quienes con sus preguntas, comentarios y debates enriquecieron el contenido de este libro. Sus aportes me motivaron a profundizar en los temas y a buscar formas más claras y didácticas de presentar los conceptos.

Agradezco también a la Universidad Autónoma de Santo Domingo (UASD) por brindarme los recursos y el entorno académico necesario para desarrollar este trabajo. Su compromiso con la educación y la investigación ha sido una fuente constante de inspiración.

Finalmente, expreso mi gratitud a todos los lectores que, con su interés en las ecuaciones diferenciales, dan sentido a este esfuerzo. Espero que este libro sea una herramienta útil en su aprendizaje y desarrollo académico.

Pedro Guzmán
Mayo de 2025

Acerca de los Autores

Juan Toribio Milanes Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Juan Toribio Milane

Francis Álvarez Paulino Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Francis Alvarez Paulino

Pedro Guzmán Guzmán Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.
Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae

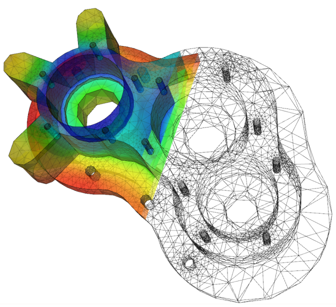
Pedro Guzmán Guzmán

ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Índice general

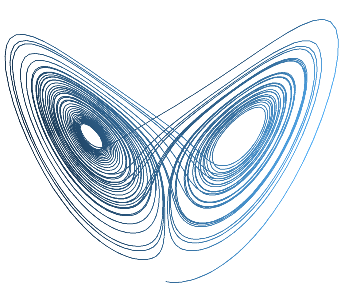
NOTACIÓN **1**

1 INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES **2**



1.1 Preliminares *3*
1.1.1 Definiciones y terminología *3*
1.1.2 Teorema de existencia y unicidad *14*
1.1.3 Método de Picard *20*
1.2 Técnicas elementales de solución de EDO de primer orden *23*
1.2.1 Integración directa *23*
1.2.2 Variables Separables *24*
1.2.3 Ecuaciones diferenciales por sustituciones *29*
1.2.4 Sustitución Lineal *33*
1.2.5 Ecuaciones Diferenciales Exactas *39*
1.2.6 Ecuaciones Diferenciales Lineales de Primer Orden *54*
1.2.7 Ecuaciones que se reducen a ecuaciones lineales *57*
1.3 Ecuaciones Diferenciales Lineales de orden n *62*
1.3.1 Ecuaciones Diferenciales Lineales de orden n homogéneas *75*
1.3.2 Ecuación de Cauchy-Euler *84*
1.3.3 Ecuaciones diferenciales lineales no homogénea de orden n *92*
1.3.4 Método de Anuladores *98*
1.4 Solución de ecuaciones diferenciales por Trasformada de la Laplace *100*
1.4.1 Definiciones y propiedades *101*
1.4.2 Transformada de Laplace inversa y transformada de derivadas *110*
1.4.3 Propiedades Operaciones *118*
1.4.4 Convolución *128*
1.4.5 Transformada de una función periódica *138*
1.4.6 Función de Green *140*
1.5 Aplicaciones de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias *141*
Ejercicio Unidad 1 *150*

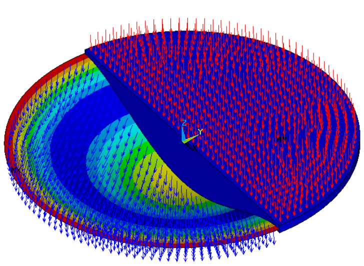
2 FUNCIONES ESPECIALES A PARTIR EDO DE SEGUNDO ORDEN **151**



2.1 Solución de una EDO entorno a un punto ordinario *152*
2.1.1 Solución de una EDO entorno a un punto singular regular *165*
2.2 Ecuación de Hermite. Polinomios de Hermite. *178*
2.2.1 Función Generatriz *183*
2.2.2 Fórmula de Rodrigues *184*
2.2.3 Relación de recurrencia de los polinomios de Hermite *186*
2.2.4 Representación integral de los polinomios de Hermite *187*
2.2.5 Ecuación asociada de los polinomios de Hermite *190*

2.3 Ecuación de Laguerre ***190***
2.3.1 Funciones Generadoras de los polinomios de Laguerre ***194***
2.3.2 Fórmula de Rodrigues para los polinomios de Laguerre ***196***
2.3.3 Relación de recurrencia de los polinomios de Laguerre ***198***
2.3.4 Representación integral de los polinomios de Laguerre ***200***
2.3.5 Ecuación asociada de los polinomios de Laguerre ***204***
2.4 Ecuación de Jacobi. Polinomios de Jacobi. ***204***
2.4.1 Función Generadora de los polinomios de Jacobi ***207***
2.4.2 Operadores Diferenciales de Jacobi ***209***
2.4.3 Polinomios de Hermite como caso particular de los polinomios de Jacobi ***212***
2.4.4 Polinomios de Laguerre como caso particular de los polinomios de Jacobi ***213***
2.4.5 Ecuación asociada de los polinomios de Jacobi ***214***
2.5 Ecuación de Chebyshev. Polinomios de Chebyshev ***214***
2.5.1 Función Generadoradora de los polinomios de Chevyshev ***215***
2.5.2 Fórmula de Rodrigues para los polinomios de Chevyshev ***216***
2.5.3 Relación de recurrencia de los polinomios de Chevyshev ***217***
2.5.4 Polinomios de Chebyshev ***218***
2.5.5 Propiedades de los polinomios de Chevyshev ***220***
2.5.6 Chevyshev Primer tipo ***220***
2.5.7 Chevyshev Segundo tipo ***226***
2.5.8 Chevyshev Tercer tipo ***232***
2.5.9 Chevyshev Cuarto tipo ***241***
2.6 Ecuación Diferencial de Legendre ***248***
2.6.1 La fórmula de Rodrigues para los polinomios de Legendre ***254***
2.6.2 Función generadora de los polinomios de Legendre ***256***
2.6.3 Relación de recurrencia de los polinomios de Legendre ***257***
2.6.4 Polinomios asociados de Legendre ***259***
2.6.5 Propiedades de los polinomios de Legendre ***262***
2.6.6 Funciones de Legendre de segundo tipo ***264***
2.7 Ecuación de Gegenbauer. Polinomios de Gegenbauer. ***264***
2.8 Relación de los polinomios ortogonales clásicos ***268***
2.8.1 Relación de los polinomios de Hermite con los de Laguerre ***268***
2.9 Ecuación diferencial de Bessel ***268***
2.9.1 Función Generadora de la función de Bessel ***273***
2.9.2 Relación de recurrencia de la función Bessel ***273***
2.9.3 Forma integral de la función de Bessel ***274***
2.9.4 Funciones de Bessel de segundo tipo ***275***
2.9.5 Funciones de Bessel de tercer tipo ***277***
2.10 Ecuación de Airy ***278***
2.11 Ecuación Hipergeométrica ***281***
2.12 Funciones Elípticas. SEzgo ***285***
2.13 Polinomios de Euler ***285***
2.14 Polinomios de Bernoulli ***285***
Ejercicio Unidad 2 ***285***

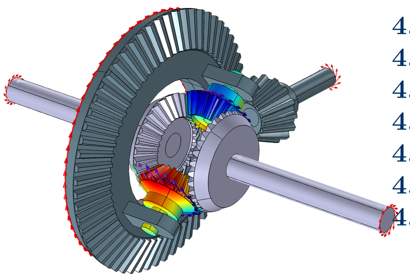
3 FUNCIONES ESPECIALES A PARTIR DE LA FUNCIÓN HIPERGEOMÉTRICA **287**



3.1 Función Hipergeométrica ***288***
3.1.1 Funciones hipergeométricas clásicas ***293***
3.1.2 Función hipergeométrica de Gauss ***295***
3.1.3 Propiedades de la función hipergeométrica ***297***
3.1.4 Ecuación hipergeométrica confluente ***300***
3.2 Ecuaciones diferenciales como caso particular de función Hipergeométrica ***301***
3.2.1 Ecuación de Laguerre como caso particular de la Ecuación Hipergeométrica Confluente de Gauss ***302***

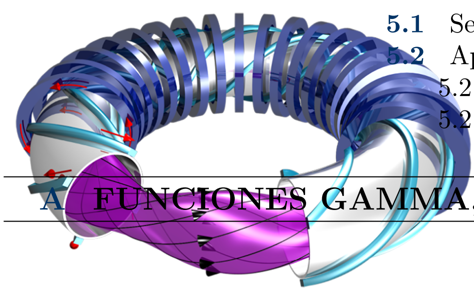
3.2.2 Ecuación de Hermite como caso particular de la ecuación Hipergeométrica confluente *304*
3.2.3 Ecuación de Jacoby como caso particular de la ecuación Hipergeométrica *305*
3.2.4 Ecuación de Chevyshev como caso particular de la ecuación Hipergeométrica *305*
3.2.5 Ecuación de Legendre como caso particular de la ecuación Hipergeométrica *305*
3.3 Ejercicios *308*

4 FUNCIONES ESPECIALES COMO SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE STURM-LOUVILLE **309**



4.1 Función de Green como autofunciones *310*
4.2 Problemas con valores en la frontera *312*
4.3 Obtención de los polinomios de Legendre como solución a S-L *326*
4.4 Obtención de los polinomios de Hermite como solución a S-L *328*
4.5 Obtención de los polinomios de Laguerre como solución a S-L *329*
4.6 Obtención de la función de Bessel como solución a S-L *329*
4.7 Obtención de los polinomios de Chebyshev de 3er y 4to tipo como solución a S-L *329*
4.7.1 Obtención de los polinomios de Chebyshev de 3er tipo como solución a un S-L *329*
4.7.2 Obtención de los polinomios de Chebyshev de 4to tipo como solución a un S-L *330*

5 SERIES DE FOURIER EN BASES A FUNCIONES ESPECIALES **335**



5.1 Series Fourier-Bessel *336*
5.2 Aproximación de funciones utilizando los polinomios de Chebyshev III, IV *339*
5.2.1 Series de Fourier Chebyshev III *339*
5.2.2 Series de Fourier Chebyshev IV *344*

A FUNCIONES GAMMA, BETA Y SÍMBOLO DE POCHHAMMER. **361**

A.1 Propiedades de la función Gamma *361*
A.2 Variable Compleja *364*

B REFERENCIAS **367**

B.1 Reglas de la Derivación *367*
B.2 Tabla de Integrales *369*

RESPUESTA A TODOS LOS PROBLEMAS **379**

BIBLIOGRAFÍA **380**

Índice de figuras

1.1 Notaciones históricas de las derivadas según distintos matemáticos 3
1.1 Notaciones históricas de las derivadas según distintos matemáticos 5
1.2 Ecuaciones diferenciales no lineales 6
1.3 El elemento lineal es tangente a la curva solución en $\left(1, \frac{1}{3}\right)$. . . . 8
1.4 Soluciones particulaes del ejemplo 1.1.6.. 11
1.5 Soluciones particulares del ejemplo 1.1.6. 11
1.6 El elemento lineal es tangente a la curva solución en $(2, -1)$. . . 12
1.8 Campo direccional y soluciones particulares del ejemplo 1.1.8. . 13
1.7 El elemento lineal es tangente a la curva solución en $(2, -1)$. . . 13
1.9 Campo direccional y soluciones particulares del ejemplo 1.1.8. . 14
1.10 Campo direccional y soluciones particulares del ejemplo 1.1.9. . 14
1.11 Solución del PVI de primer y segundo orden. 15
1.12 Por elemplo, $f(x, y) = |y|$ cumple la Condición de Lipschitz pero no es diferenciable en R^2 18
1.13 Solución $y = \dfrac{x^4}{4} - \cos(2x) + C$. 23
1.14 Gráfica del ejemplo 1.3.2 sobre puntos iniciales 24
1.14 Gráfica del ejemplo 1.3.2 sobre puntos iniciales 25
1.15 Gráfica del ejemplo 1.3.3.Se observan los valores de k 26
1.16 Curva solución general $y = (x - C)^2$ y la curva solución singular $y = 0$ de la ecuación diferencial $(y')^2 = 4y$ 27
1.17 Teorema de Euler 29
1.18 Grado de un función homogénea n 29
1.19 Gráfica del ejemplo 1.3.3.Se observan los valores de k 31
1.20 Solución del sistema de ecuaciones ejemplo 1.4.6 36
1.21 Solución del sistema de ecuaciones ejemplo 1.3.7 37
1.22 Jacob Bernoulli y Jacopo Riccati 57
1.22 Jacob Bernoulli y Jacopo Riccati 58
1.23 Conjunto linealmente independiente 67
1.24 (a) Grafica de funciones linealmente dependiente, (b) Equivalencias de funciones hiperbólicas 68
1.25 (a) Grafica de funciones linealmente dependiente, (b) Equivalencias de funciones hiperbólicas 80
1.26 Función continua sin transformada de Laplace $f(t) = e^{t^2}$ 105
1.27 funciones continua que no tienen transformada de Laplace . . . 106
1.27 Funciones continua que no tienen transformada de Laplace . . 107
1.28 Primer teorema de traslación 118
1.29 Función Escalon unitario. 122
1.30 Segundo teorema de traslación. 122
1.31 Función periódica Serpenteante 138
1.32 Función periódica **Diente de Sierra** 139

1.33 Solución de la $x(t)$ 145
1.34 Solución de la $x(t)$ 147
1.35 Solución de la $u_1 + u_2$ pedro 149
1.36 Comparación de solucines segun el método aplicado 149
1.36 Comparación de solucines segun el método aplicado 150

Índice de cuadros

1.2 Soluciones particulares de prueba 98
1.3 Funciones cuya transformada de Laplace no existe 106
1.4 Transformadas de Laplace inversas 110

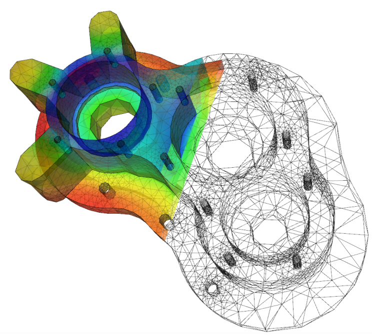
Notación

Notación	Significado
$\mathbb{R}, \mathbb{C}$	Conjuntos de números reales y complejos.
$[a, b]$	Intervalo cerrado de a a b.
$\Gamma(a)$	Función gamma; ver (A.1).
$B(a, b)$	Función beta.
$(a)_n$	Símbolo de Pochhammer (factorial ascendente).
$\partial_x f$	Derivada parcial de f respecto a x.
$\dot{x}(t)$	Derivada temporal de $x(t)$.
$C^k(\Omega)$	Funciones con derivadas continuas hasta orden k en Ω.
∇f	Gradiente de f.
Δf	Laplaciano de f.
$\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$	Matriz diagonal con entradas $a_1, \ldots, a_n$.

1 Capítulo

Introducción a las Ecuaciones Diferenciales

Las ecuaciones diferenciales constituyen la herramienta matemática fundamental para comprender cómo cambian los fenómenos a lo largo del tiempo o del espacio. A través de ellas, podemos modelar desde el movimiento de los cuerpos celestes hasta la dinámica de poblaciones, la propagación del calor y la evolución de sistemas económicos.



Una ecuación diferencial relaciona una función desconocida con sus derivadas, y dependiendo de la cantidad de variables independientes involucradas, se clasifica en ordinaria o parcial. Las ecuaciones diferenciales ordinarias son aquellas que dependen de una sola variable independiente y forman la base de gran parte de la teoría y las aplicaciones iniciales. Por su parte, las ecuaciones en derivadas parciales involucran varias variables y permiten describir fenómenos más complejos en física, ingeniería y biología.

Más allá de encontrar soluciones explícitas, el estudio de estas ecuaciones permite analizar la existencia, unicidad y estabilidad de las soluciones, ofreciendo una visión profunda de los sistemas dinámicos. Este capítulo tiene como propósito introducir al lector en los conceptos fundamentales de las ecuaciones diferenciales, presentar métodos de resolución básicos y mostrar su aplicabilidad a problemas reales, sentando así las bases para los estudios más avanzados que se desarrollarán en los capítulos posteriores.

Pedro modifico aqui

verificando cambios desde Acer laptop

1.1 Preliminares

1.1.1. Definiciones y terminología

Definición 1.1.1: Ecuación Diferencial

Se dice que una ecuación diferencial (ED) es cualquier ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes.

Las siguientes ecuaciones son ejemplos de ecuaciones diferenciales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} = \sin x \qquad x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 \qquad C\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

Con el objetivo de referirnos a las ecuaciones diferenciales (ED), debemos clasificarla por **Tipo, Linealidad y Orden**.

Clasificación por Tipo

Si una ecuación diferencial contiene únicamente derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, se dice que es una **ecuación diferencial ordinaria (EDO)**. Por ejemplo,

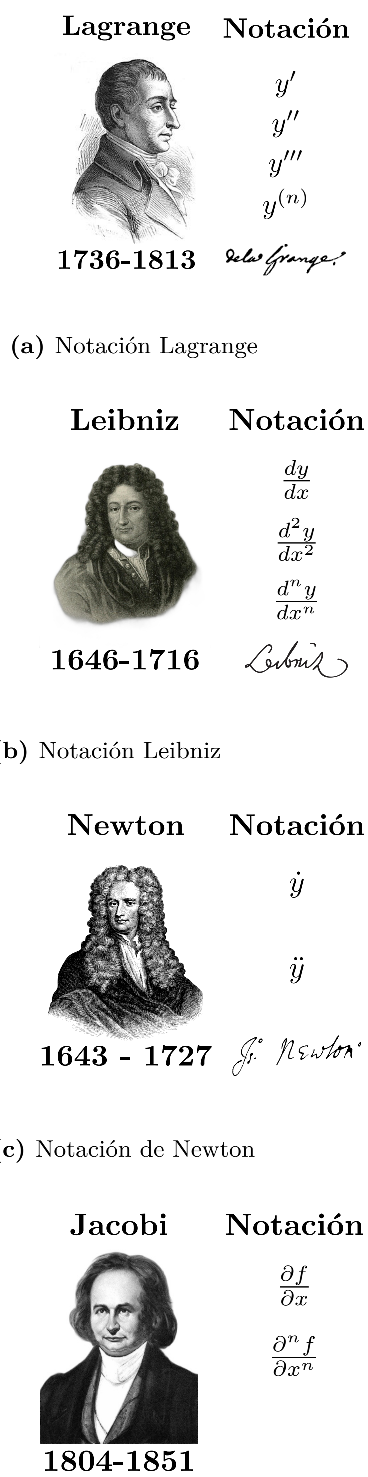
$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0 \qquad y \qquad \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y \tag{1.1}$$

son ecuaciones diferenciales ordinarias. Una ecuación diferencial que contiene derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes se llama **ecuación diferencial parciales (EDP)**. Por ejemplo,

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u(x,y)}{\partial t} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.2}$$

son ecuaciones diferenciales parciales.

Notación
Al momento de expresar una ecuación diferencial ordinaria, existen distintas notaciones que pueden utilizarse según el contexto. A continuación se presenta una comparación concisa de las notaciones de **Leibniz**, **Lagrange** y **Newton**, sus ventajas principales y limitaciones más relevantes.



(a) Notación Lagrange

(b) Notación Leibniz

(c) Notación de Newton

(d) Notación de Jacobi

Figura 1.1: Notaciones históricas de las derivadas según distintos matemáticos

Notación Leibniz

$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$

Ventajas

- Identifica explícitamente la variable dependiente y la independi
- Facilita el uso de cambios de variable y procedimientos de integr
- Resulta adecuada para derivadas de orden superior.

Desventajas

- La notación es extensa y puede dificultar la lectura en desar largos.
- Poco práctica en sistemas grandes o con múltiples ecuaciones.

Notación Lagrange $y',\ y'',$

Ventajas

- Notación compacta y de fácil escritura.
- Apropiada cuando la variable independiente es única y fija.
- Muy utilizada en el tratamiento teórico de las ecuaciones diferen

Desventajas

- No explicita la variable respecto a la cual se deriva.
- Puede generar ambigüedad en contextos multivariables.

Notación Newton

Ventajas

- Muy empleada en física cuando la variable independiente es el ti
- Clara y visualmente intuitiva para derivadas de primer y seg orden.
- Adecuada para describir sistemas dinámicos y ecuaciones de miento.

Desventajas

- No se recomienda para derivadas de orden superior.
- Inadecuada si la variable independiente no es el tiempo.
- Poco utilizada en matemáticas puras o desarrollos simbólicos ge les.

Clasificación por Orden

El orden de una ecuación diferencial (EDO o EDP) representa el orden de la derivada más alta presente en la ecuación. Por ejemplo, las siguientes ecuaciones son de orden $3, 1$ y 2 respectivamente.

$$\begin{aligned} x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y &= 12x^2 \\ (y-x)y' &= y - x + 8 \end{aligned}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3}$$

En ocasiones las ecuaciones diferenciales se escriben en la forma diferencial **M(x,y)dx+N(x,y)dy=0**. En el siguiente ejemplo supondremos que y representa la variable dependiente

$$2xydx + \left(x^2 - 1\right)dy = 0$$

Sabemos que $dy = y'dx$, así la expresión anterior se puede expresar como

$$\begin{aligned} 2xydx + \left(x^2 - 1\right)y'dx &= 0 \\ \left(2xy + \left(x^2 - 1\right)y'\right)dx &= 0 \\ 2xy + \left(x^2 - 1\right)y' &= 0 \end{aligned}$$

De manera simbólica, es posible expresar una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden como una variable dependiente empleando la forma general

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{1.3}$$

donde F es una función con valores reales de $n+2$ variables: $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$. Por motivos prácticos como teóricos, de aquí en adelante debemos suponer que es posible resolver una ecuación diferencial ordinaria presentada en la forma (1.3) únicamente para la derivada más alta $y^{(n)}$ en términos de las variables $n+1$ restantes. La ecuación diferencial

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \tag{1.4}$$

donde f es una función continua con valores reales, se denomina forma normal de (1.3). Para el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer, segundo y tercer orden, se expresan de las siguientes formas

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.5}$$

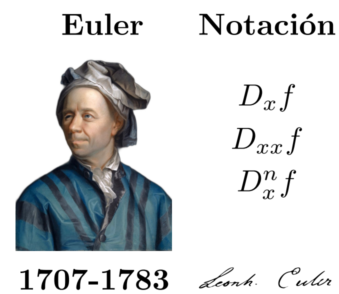
$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y') \tag{1.6}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = f(x, y, y', y'') \tag{1.7}$$

Ejemplo 1.1.1. Expresa la siguiente EDO.

$$(\tan(x) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y))\,dx + \cos(x)\cos(y)dy = 0$$

en la forma normal.



(e) Notación de Euler

Figura 1.1: Notaciones históricas de las derivadas según distintos matemáticos

Orden de una EDO

Segundo orden Primer orden

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4y = e^x$$

Solución 1.1.1 *Reemplazando el diferencial dy*

$$(\tan(x) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y))\,dx + \cos(x)\cos(y)y'dx = 0$$

Por linealidad

$$\begin{aligned}[\tan(x) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) + \cos(x)\cos(y)y']\,dx &= 0\\ \tan(x) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) + \cos(x)\cos(y)y' &= 0\end{aligned}$$

despejando la derivada de mayor orden

$$y' = -\frac{\tan(x) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)}{\cos(x)\cos(y)}$$

donde $f(x,y) = -\dfrac{\tan(x) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)}{\cos(x)\cos(y)}$

Linealidad de una EDO

Término no lineal

$$\frac{dy}{dx} = ye^{y}$$

(a) No lineal e^y

Término no lineal

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

(b) No lineal y^2

Término no lineal

$$\frac{dy^2}{dx^2} = sen(y)$$

(c) No lineal $sen(y)$

Figura 1.2: Ecuaciones diferenciales no lineales

Clasificación por Linealidad

Se dice que una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden (1.3) es lineal si F es lineal en $y, y', \ldots, y^{(n)}$. Esto significa que una EDO de n-ésimo orden es lineal cuando la ecuación (1.3) se puede expresar como

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \tag{1.8}$$

Como casos particulares de la expresión (1.3) se obtienen las ecuaciones diferenciales de ordenes $1, 2$ y 3, escogiendo respectivamente $n = 1, n = 2$ y $n = 3$

$$\begin{aligned} a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y &= g(x)\\ a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y &= g(x)\\ a_3(x)\frac{d^3y}{dx^3} + a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y &= g(x)\end{aligned}$$

- La variable dependiente y así como todas sus derivadas $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ son de primer grado, es decir, la potencia de cada uno de los términos que involucran a y es 1.
- Los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ de $y, y', \ldots, y^{(n)}$ dependen a lo sumo de la variable independiente x.

Las ecuaciones siguientes, a su vez,

$$y' + \tan(x)y = 0, \quad y'' + 5y' + y = 0, \quad \frac{d^3y}{dx^3} + 3\sin(x)\frac{dy}{dx} - 5y = \cos(x),$$

son ecuaciones diferenciales ordinarias de primer, segundo y tercer orden, respectivamente. En caso de que una ecuación diferencial ordinaria no sea lineal, se dice que es **no lineal**. **Teorema de existencia y unicidad, campos de pendientes y el método de picard**.

Definición 1.1.2: Solución de una EDO

Cualquier función $y(x)$, definida en un intervalo I y que tiene al menos n derivadas continuas en I, las cuales cuando se sustituyen en una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden reducen la ecuación a una identidad, se dice que es una **solución** de la ecuación en el intervalo.

En otras palabras, una solución de una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden (1.3) es una función $y(x)$ que posee al menos n derivadas para las que

$$F\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) = 0 \quad \text{para toda } x \text{ en } I$$

Decimos que $y(x)$ satisface la ecuación diferencial en I. Para nuestros propósitos supondremos que una solución $y(x)$ es una función con valores reales. En los siguientes ejemplos mostraremos que una determinada función es solución de una ecuación diferencial, para esto es necesario recordar las reglas de derivación.

Intervalo de solución No podemos pensar en la solución de una ecuación diferencial ordinaria sin simultáneamente pensar en un intervalo. El intervalo I en la definición (1.1.2) también se conoce con otros nombres como son **intervalo de definición**, **intervalo de existencia**, **intervalo de validez**, o **dominio de la solución** y puede ser un intervalo abierto (a, b), un intervalo cerrado $[a, b]$, un intervalo infinito (a, ∞), etcétera.

Ejemplo 1.1.2. Verificación de una solución

Verifique que la función indicada es una solución de la ecuación diferencial dada en el intervalo $(-2, \infty)$.

$$(y - x)y' = y - x + 8; \quad y(x) = x + 4\sqrt{x+2}$$

Solución 1.1.2 *Como podemos notar esta ecuación es de primer orden, y para verificar que la función indicada es solución debemos obtener la primera derivada*

$$y'(x) = 1 + \frac{2}{\sqrt{x+2}}$$

Ahora reemplazamos en la ecuación diferencial la función como su derivada

$$\left(x + 4\sqrt{x+2} - x\right)\left(1 + \frac{2}{\sqrt{x+2}}\right) = x + 4\sqrt{x+2} - x + 8$$

Simplificando y por distributiva

$$4\sqrt{x+2} + 8 = 4\sqrt{x+2} + 8$$

La expresión anterior es una identidad, lo que indica que la función dada es solución de la ecuación diferencial.

Ejemplo 1.1.3. Verificación de una solución

Verifique que la función indicada es una solución de la ecuación diferencial dada en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

$$y'' - 6y' + 13y = 0; \quad y = e^{3x}\cos(2x)$$

Solución 1.1.3 *Para realizar la verificación calculamos la primera y segunda derivada de la función*

$$\begin{aligned}
y'(x) &= -2e^{3x}\sin(2x) + 3e^{3x}\cos(2x) \\
y''(x) &= -4e^{3x}\cos(2x) - 6e^{3x}\sin(2x) - 6e^{3x}\sin(2x) + 9e^{3x}\cos(2x) \\
y''(x) &= 5e^{3x}\cos(2x) - 12e^{3x}\sin(2x)
\end{aligned}$$

Ahora sustituimos en la ecuación deferencial y tenemos

$$e^{3x}[5\cos(2x) - 12\sin(2x)] - e^{3x}[18\cos(3x) - 12\sin(2x)] + 13e^{3x}\cos(2x) = 0$$

Simplificando

$$\begin{aligned}
e^{3x}[5\cos(2x) - 12\sin(2x) - 18\cos(2x) + 12\sin(2x) + 13\cos(2x)] &= 0 \\
e^{3x}(0) &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Curva solución

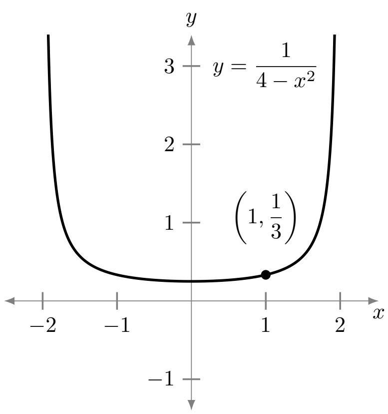


Figura 1.3: El elemento lineal es tangente a la curva solución en $\left(1, \frac{1}{3}\right)$.

Ejemplo 1.1.4. Análisis de dominio: Función vs Solución

Analiza el dominio de ED

$$y' = 2xy^2$$

y de la solución dada por

$$y = \frac{1}{4-x^2}$$

Solución 1.1.4 *Considerando el dominio de la función* $y = \dfrac{1}{4-x^2}$ *que es el conjunto de todos números reales exceptos los números 2 y −2. Un bosquejo de la función se encuentra en la figura 1.3. La función* $y = \dfrac{1}{4-x^2}$ *es discontinua en los valores 2 y −2, también dicha función no es derivable en tales valores ya que existen asíntotas verticales en 2 y −2 como se puede ver en la imagen. Ahora vamos a comprobar que la función* $y = \dfrac{1}{4-x^2}$ *es solución de* $y' = 2xy^2$*, la derivada de la solución es* $y' = \dfrac{2x}{(4-x^2)^2}$ *reemplazando en la ED*

$$\begin{aligned}
y' &= 2xy^2 \\
\frac{2x}{(4-x^2)^2} &= 2x\left(\frac{1}{4-x^2}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\frac{2x}{(4-x^2)^2} = \frac{2x}{(4-x^2)^2}$$

Debemos tener cuenta al decir que $y = \dfrac{1}{4-x^2}$ *es solución de la ED, ya que se tiene que indicar el dominio de la solución donde la función sea derivables, es decir, cualquier intervalo que no contega a* 2 *y* -2*, tales como* $[-4,-2)$*,* $(-4,-2)$*,* $[3,\infty)$*. Claramente los intervalos anteriores son simplemente partes o tramos de las curvas solución* $y = \dfrac{1}{4-x^2}$ *definida para* $-\infty < x < 0$ *y* $0 < x < \infty$*, respectivamente, esto hace que tenga sentido tomar el intervalo* I *tan grande como sea posible. Así tomamos* I *ya sea como* $(-\infty, 0)$ *o* $(0,\infty)$*. Si en un determinado caso me indican tomar la solución que contenga el punto* $\left(1, \dfrac{1}{3}\right)$ *el intervalo de definición de la solución* $y = \dfrac{1}{4-x^2}$ *es* $(0,\infty)$ *ya que es el intervalo más largo que contiene el punto.*

Soluciones Explícitas e Implícitas

En cursos anteriores ya ustedes se han familiarizado con los conceptos de funciones explícitas e implícitas. Una solución explícita se caracteriza por expresar la variable dependiente únicamente en función de la variable independiente y de constantes, es decir, en una forma del tipo $y = \phi(x)$. Para nuestros propósitos, consideraremos una solución explícita como aquella que proporciona una representación funcional directa de y, la cual permite ser manipulada algebraicamente, evaluada numéricamente y diferenciada aplicando las reglas usuales del cálculo. Por ejemplos las funciones y_1, y_2, y_3 son soluciones explícitas respectivamente de las ecuaciones $y'' + 2y' + y = 0$, $xy' + y = \cos(x)$ y $y' - 4(xy)^{\frac{1}{3}} = 0$. En las secciones siguientes notaremos que los métodos aplicados no siempre conducen a una expresión explícita de la solución, como $y = \phi(x)$. Esto sucede con frecuencia al tratar ecuaciones de primer orden, donde es usual encontrar una solución definida implícitamente mediante una relación del tipo $G(x, y(x)) = 0$.

Soliciones explícitas

$$y_1 = xe^x$$
$$y_2 = \frac{\sin(x)}{x}$$
$$y_3 = 2^{\frac{3}{2}}x^2$$

Poner que tambien las soluciones se pueden expresar en forma parameétricas. Buscar en el libro de pita ruiz

Definición 1.1.3: Solución implícita de una EDO

Se dice que una relación $G(x, y(x)) = 0$ es una solución implícita de una ecuación diferencial ordinaria (1.3) en un intervalo I, suponiendo que existe al menos una función ϕ que satisface la relación así como la ecuación diferencial en I.

Poner un ejemplo de una solucion implicita que no exista en un pundo, ver pita ruiz teorema primera version de solucion implicita

Ejemplo 1.1.5. Solución implícita de una ED

Dada la ED

$$2xydx + \left(x^2 - y\right) dy = 0$$

realiza lo que se indica. especificar que pase por un punto para saber que funcion escoger al final

1. Verifica que la relación $-2x^2y + y^2 = 1$ contiene una solución de la forma $y = \phi(x)$ de la ecuación diferencial.
2. Encuentra una solución explícita $y = \phi(x)$ que sea solución de la ecuación diferencial y dé el intervalo de definición de la solución

Solución 1.1.5 *1. Antes de verificar que la relación $-2x^2y + y^2 = 1$ contiene una solución, $y = \phi(x)$ utilizamos la expresión (1.4) para obtener la forma normal de la ecuación dada por*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{y - x^2}$$

Ahora diferenciamos implícitamente la solución y obtenemos

$$\begin{aligned} -2x^2\frac{dy}{dx} - 4xy + 2y\frac{dy}{dx} &= 0 && \textit{Tomando factor común} \\ -2\left(x^2 - y\right)\frac{dy}{dx} - 4xy &= 0 && \textit{Despejado la derivada y simplificando} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{2xy}{y - x^2} \end{aligned}$$

como se ha verificado que la derivada de $-2x^2y + y^2 = 1$ coincide con la formal normal de ED, entonces $-2x^2y + y^2 = 1$ es una solución de dicha ecuación diferencial.

2. Para obtener la función explícta vamos a completar cuadrado en la solución dada, sumando x^4 conveniente tenemos

$$\begin{aligned} -2x^2y + y^2 + x^4 &= 1 + x^4 && \textit{El lado izquierdo se puede expresar como} \\ \left(y - x^2\right)^2 &= 1 + x^4 && \textit{Tomando raíz cuadrada} \\ y - x^2 &= \pm\sqrt{1 + x^4} && \textit{Despejando a y} \\ y &= x^2 \pm \sqrt{1 + x^4} \end{aligned}$$

Como podemos observar el radicando siempre es positivo, así el intervalo de definición de la solución son todos los números reales.

Familias de soluciones

El análisis de ecuaciones diferenciales comparte similitudes con el cálculo integral. En ciertos textos, una solución ϕ es referida como la integral de la ecuación, y su representación gráfica se denomina curva integral. Cuando se encuentra una antiderivada o integral indefinida en cálculo, se introduce una constante de integración c. De manera análoga, al resolver una ecuación diferencial de primer orden de la forma dada en (1.5), se obtiene típicamente una solución que depende de un único parámetro arbitrario c.

Este tipo de solución representa un conjunto definido por $G(x, y, c) = 0$, denominado familia de soluciones uniparamétrica. En el caso de ecuaciones diferenciales de orden n, de la forma dada en (1.3), buscamos una familia de soluciones n-paramétrica representada por $(G(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0)$. Esto implica que una ecuación diferencial puede tener infinitas soluciones asociadas a múltiples valores de sus parámetros. Cuando se fija el valor de los parámetros, obtenemos una **solución particular**. A continuación mostraremos como obtener soluciones particulares de soluciones uniparamétrica y de dos parámetros.

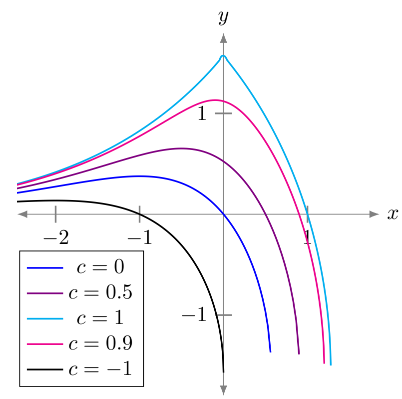


Figura 1.4: Soluciones particulaes del ejemplo 1.1.6..

Ejemplo 1.1.6. Solución particular de una solución uniparamétrica

Dada la ED
$$\left(e^x \sec(y) - \tan(y)\right) + y' = 0$$
verifica que $y = \sin^{-1}\left((c-x)e^x\right)$ es una solución uniparamétrica y obtener las soluciones particulares para $c = 0$ y $c = 4$

Solución 1.1.6 *En primer lugar obtenemos la derivada de la función solución donde tenemos por regla de la cadena*

$$e^x \sec\left(\sin^{-1}\left((c-x)\,e^x\right)\right) - \tan\left(\sin^{-1}\left((c-x)\,e^x\right)\right) + \frac{e^x(c-x-1)}{\sqrt{1-((c-x)e^x)^2}} = 0$$

Por identidades trigonométricas y operaciones con fracciones tenemos lo siguiente

$$\frac{e^x - \sin\left(\sin^{-1}\left((c-x)\,e^x\right)\right)}{\cos\left(\sin^{-1}\left((c-x)\,e^x\right)\right)} + \frac{e^x\,(c-x-1)}{\sqrt{1-\left((c-x)\,e^x\right)^2}} = 0$$

Aplicando en el numerador $\sin\left(\sin^{-1}(u)\right) = u$ *y simplificando llegamos a*

$$\frac{e^x - \left((c-x)\,e^x\right)}{\sqrt{1-\left((c-x)\,e^x\right)^2}} + \frac{e^x\,(c-x-1)}{\sqrt{1-\left((c-x)\,e^x\right)^2}} = 0$$

Tomando factor común $-e^x$ *en la primera fracción*

$$\frac{-e^x\,(c-x-1)}{\sqrt{1-\left((c-x)\,e^x\right)^2}} + \frac{e^x\,(c-x-1)}{\sqrt{1-\left((c-x)\,e^x\right)^2}} = 0$$

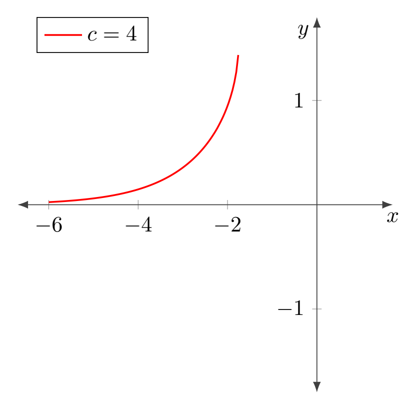
Es claro que la expresión de la izquierda se anula y tenemos la identidad que $0 = 0$ *con lo cual se verifica que la función dada es solución de la ecuación diferencial. Para obtener las soluciones particulares simplemente reemplazamos el valor de la constante indicado en la solución ya verificada, así para* $c = 0$ *tenemos*

$$y = \sin^{-1}\left(-xe^x\right)$$

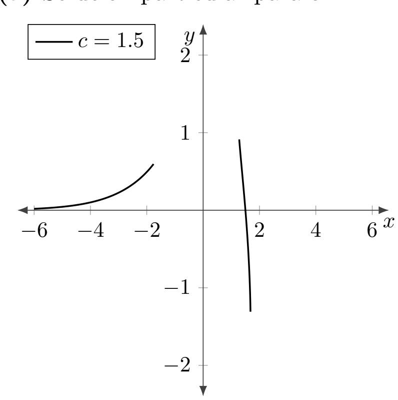
y para $c = 4$

$$y = \sin^{-1}\left((4-x)\,e^x\right)$$

Sin embargo, algunas ecuaciones tienen **soluciones singulares**, es decir, soluciones que no pertenecen a la familia general como se muestra en el siguiente ejemplo.



(a) Solución particular para $c = 4$



(b) Solución particular para $c = 1.5$

Figura 1.5: Soluciones particulares del ejemplo 1.1.6.

Ejemplo 1.1.7. Solución singular de una solución de dos parámetros

Dada la ED no lineal de segundo orden

$$2x^2y'' - y'^2 = 0$$

verifica que $y = \dfrac{2x}{c_1} - \dfrac{2}{c_1^2}\ln(1 + c_1x) + c_2$ es una solución de dos parámetros y obtener las soluciones singular si existe.

Solución 1.1.7 *Para verificar que la función dada es solución calculamos la primera y segunda derivada de la función.*

$$y' = \frac{2}{c_1} - \frac{2}{c_1}\frac{1}{1 + c_1x}; \qquad y'' = \frac{2}{(1 + c_1x)^2}$$

Ahora reemplazamos en la ED

$$\begin{aligned}
2x^2\left(\frac{2}{(1+c_1x)^2}\right) - \left(\frac{2}{c_1}\left(1 - \frac{1}{1+c_1x}\right)^2\right) &= 0 && \textit{Sumando la fracción del segundo término del lado izquierdo}\\
2x^2\left(\frac{2}{(1+c_1x)^2}\right) - \left(\frac{2}{c_1}\left(\frac{c_1x}{1+c_1x}\right)^2\right) &= 0 && \textit{Simplificando y aplicando propiedad distributiva}\\
\frac{4x^2}{(1+c_1x)^2} - \frac{4x^2}{(1+c_1x)^2} &= 0 && \textit{Restando}\\
0 &= 0
\end{aligned}$$

No hay valores para las constantes c_1 y c_2 que nos permita obtener la función $y = x^2$, ahora vamos a verificar que esta función es solución de ED y por lo tanto es una solución singular, calculando la primera y segunda derivada

$$y' = 2x \qquad y'' = 2$$

Reemplazando tenemos

$$\begin{aligned}
2x^2(2) - (2x)^2 &= 0 && \textit{Simplificando}\\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Campos de pendientes
PENDIENTE

Si tenemos una ecuación diferencial de la forma dada en (1.5), una solución $y = y(x)$ de esta ecuación diferencial es una función derivable en su intervalo I de definición, debe también ser continua en I. Por tanto la curva solución correspondiente en I no tiene cortaduras y debe tener una recta tangente en cada punto $(x, y(x))$. La función $f(x, y)$ en la forma normal (1.5) se llama **función pendiente** o **función razón**. La pendiente de la recta tangente en $(x, y(x))$ en una curva solución es el valor de la primera derivada y' en este punto y sabemos de la ecuación (1.5) que es el valor de la **función pendiente** $f(x, y(x))$. Ahora supongamos que (x, y) representa cualquier punto de una región del plano xy en la que está definida la función f. El valor $f(x, y)$ que la función f le asigna al punto representa la pendiente de una recta o que

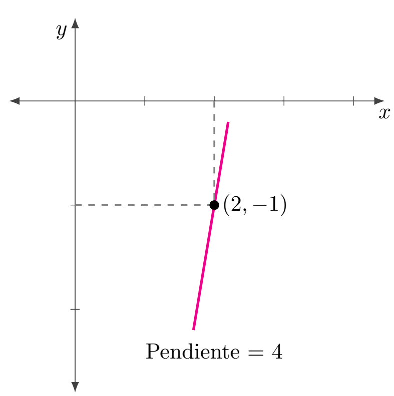


Figura 1.6: El elemento lineal es tangente a la curva solución en $(2, -1)$.

la visualizaremos como un segmento de recta llamado **elemento lineal**. Por ejemplo, considere la ecuación $y' = 2xy^2$ en el punto $(2, -1)$ la pendiente de un elemento linesl es $f(2, -1) = 2(2)(-1)^2 = 4$. La figura 1.6 muestra un segmento de recta con pendiente 4 que pasa por $(2, -1)$. Como se muestra en la figura 1.7 si una curva solución también pasa por el punto $(2, -1)$, lo hace de tal forma que el segmento de recta es tangente a la curva.

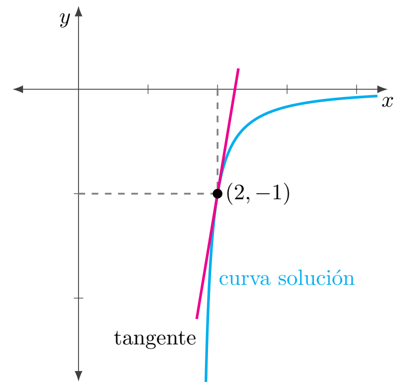


Figura 1.7: El elemento lineal es tangente a la curva solución en $(2, -1)$.

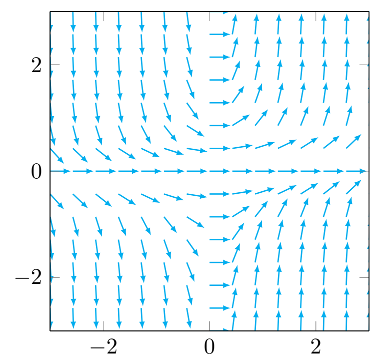
Campos Direccionales

Al realizar una evaluación sistemática de la función f en una cuadrícula de puntos dispuesta en el plano xy, y al representar en cada punto (x, y) un segmento lineal cuya pendiente es igual a $f(x, y)$, se genera lo que conocemos como el **campo direccional** o **campo de pendientes** de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$. Este campo, desde una perspectiva visual, describe la orientación de las trayectorias que conforman las posibles soluciones de la ecuación diferencial. Así, se pueden observar de manera cualitativa características relevantes de las soluciones.

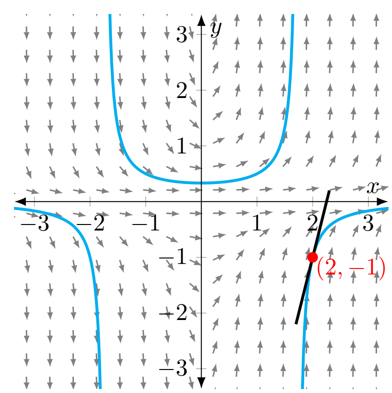
Ejemplo 1.1.8. Campo direccional y comportamiento cualitativo

Dada la ecuación diferencial $y' = 2xy^2$, construya el campo direccional correspondiente y analice su comportamiento para identificar las características cualitativas de las soluciones.

Solución 1.1.8 *El Campo direccional para la ecuación diferencial* $y' = 2xy^2$ *que se muestra en la figura (hacer campo) se obtuvo utilizando un paquete computacional. Observe en la figura 1.7 (a) que cualquier punto en los ejes* x *y* y*, las pendientes son* $f(x, 0) = f(0, y) = 0$*, respectivamente, por lo que los elementos lineales son horizuntales. Además observe que en el primer cuadrante para un valor fijo de* x *los valores de* $f(x, y)$ *aumentan conforme crece* y*, de forma simitar, para una* y *fija los valores de* $f(x, y)$ *aumentan conforme* x *aumenta. Esto significa que conforme* x *y* y *crecen, los elementos lineales serán casimente de formas verticales y tendrán pendiente positiva. En el segundo cuadrante,*$|f(x, y)|$ *aumenta a medida que crecen* $|x|$ *y* y*, por lo que nuevamente los elementos lineales serán casi verticales pero esta vez tendrán pendiente negativa ya que* $f(x)y) = 2xy^2 < 0$ *para* $x < 0, y > 0$*. Leyendo de izquierda a derecha, imaginemos una curva solución que inicia en un punto del segundo cuadrante, se mueve hacia abajo, se hace plana conforme pasa por el eje* y *y después, conforme entra al primer cuadrante, se mueve abruptamente hacia arriba; en otras palabras, su forma sería cóncova hacía arriba. A partir de lo anterior se puede inferir que* $y \to \infty$ *cuando* $x \to \pm\infty$*. Ahora en el tercer cuadrante* $f(x, y)$ *tiene el mismo comportamiento que en el segundo cuadrante, y de igual manera en el cuarto cuadrante el comportamiento de* $f(x, y)$ *es similar al primer cuadrante. Usted debería comprobar que la solución uniparamétrica de* $y' = 2xy^2$ *está dada por* $y = \dfrac{1}{c - x^2}$*. Con objeto de comparar con la figura del campo direccional en la figura(enumerar) se presenta algunas curvas solución de la ecuación diferencial.*

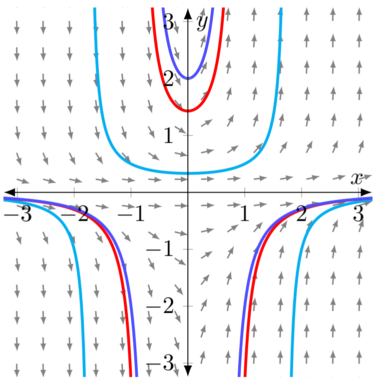


(a) Campo direccional $y' = 2xy^2$.



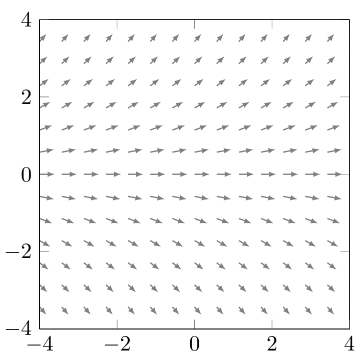
(b) Soluciones particulares en punto $(2, -1)$.

Figura 1.8: Campo direccional y soluciones particulares del ejemplo 1.1.8.

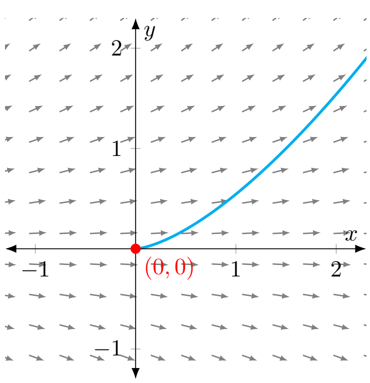


(a) Soluciones particulares para $x > 0$.

Figura 1.9: Campo direccional y soluciones particulares del ejemplo 1.1.8.



(a) Campo direccional de $y' = \sqrt[3]{y}$.



(b) Soluciones particulares para $C = 0$.

Figura 1.10: Campo direccional y soluciones particulares del ejemplo 1.1.9.

Ejemplo 1.1.9. Campo direccional con soluciones particulares

Construya el campo direccional de la ecuación diferencial $y' = \sqrt[3]{y}$ y grafique una solución aproximada que pasa por el punto $(0, 0)$.

Solución 1.1.9 *Este campo direccional igual que el del ejemplo anterior se obtuvo con el paquete computacional PGFplots en LATEX. Como se puede observar en la figura 1.10 (a) y (b), la pendiente para los puntos de la forma* $(x, 0)$ *es cero, lo que nos indica que los elementos lineales son horizontales y están ubicados sobre el eje de las x. Si nos ubicamos en el primer y segundo cuadrante* $(-\infty < x < \infty, y > 0)$ *los valores de* $f(x, y) = \sqrt[3]{y}$ *crecen a medida que los valores de y aumentan. En el caso del tercer y cuarto cuadrante* $(-\infty < x < \infty, y < 0)$ *los valores de* $f(x, y)$ *tienden a decrecer cuando* $\mid y \mid$ *aumentan.*
Como podemos observar en la figura 1.10 (a) que la función $y = 0$ *es solución de la ecuación diferencial y contiene el punto* $(0, 0)$*. Sin embargo en la figura 1.9 (b) notamos que* $y(x) = \left(\frac{2}{3}x\right)^{3/2}, \quad x \geq 0$ *es una solución estrictamente creciente conteniedo también el punto* $(0, 0)$*.*

Como hemos notado en el ejemplo podemos tener un problema un con valores iniciales donde exista la solución y esta no sea única, también puede ser que la solución no satisfaga la condición inicial como se indica más adelante en los ejemplos (indicar los ejemplos), esto de manera natural nos hace cuestionarnos bajo que condiciones un problema de valores iniciales tiene solución y esta sea única, en el siguiente teorema damos respuesta a esta interrogante.

1.1.2. Teorema de existencia y unicidad

La existencia y unicidad de la solución de una ecuación diferencial radica en garantizar que los modelos matemáticos que describen fenómenos reales sean consistentes y predecibles. Estas propiedades aseguran que, bajo ciertas condiciones iniciales, el problema planteado tiene al menos una solución (existencia) y que esta solución es única, eliminando ambigüedades. Esto es fundamental en áreas como la física, la ingeniería y la biología, donde las ecuaciones diferenciales se utilizan para predecir comportamientos de sistemas dinámicos, garantizar la estabilidad de soluciones y validar modelos matemáticos frente a la realidad.
Un problema de valores iniciales es de la forma

$$\text{Resolver:} \quad \frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \tag{1.9}$$

$$\text{Sujeto a:} \quad y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \tag{1.10}$$

donde $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ son constantes reales arbitrarias dadas. Los valores de $y(x)$ y de sus primeras $n-1$ derivadas en un solo punto $x_0, y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$, se llaman condiciones iniciales. El problema dado en (1.9) se llama problema de valores iniciales de n-ésismo orden, como caso particular de este tenemos los problemas de valores iniciales de Primer y Segundo Orden.

$$\text{Resolver:} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.11}$$

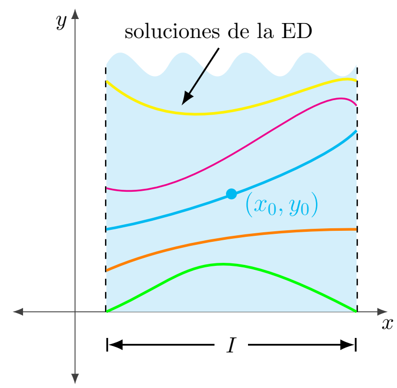
$$\text{Sujeto a:} \quad y(x_0) = y_0 \tag{1.12}$$

y

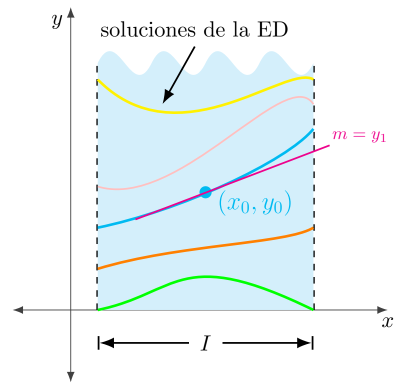
$$\text{Resolver:} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = f(x,y,y') \tag{1.13}$$

$$\text{Sujeto a:} \quad y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1 \tag{1.14}$$

Estos dos problemas son fáciles de interpretar en términos geométricos. Para la ecuación (1.11) estamos buscando una solución de la ecuación diferencial en un intervalo D que contenga a x_0, tal que su gráfica pase por el punto dado (x_0, y_0). En la figura (poner) se muestra en azul una curva solución. Para el problema (1.13) queremos determinar una solución $y(x)$ de la ecuación diferencial $y'' = f(x,y,y')$ en un intervalo D que contenga a x_0 de tal manera que su gráfica no sólo pase por el punto dado (x_0, y_0), sino que también la pendiente a la curva en ese punto sea el número y_1. En la figura (poner) se muestra en azul una curva solución.



(a) Solución del PVI de primer orden.



(b) Solución del PVI de segundo orden.

Figura 1.11: Solución del PVI de primer y segundo orden.

La función $f(x,y)$ en el problema (1.11 se asume que es continua en un dominio D que contiene el punto (x_0, y_0), una solución para este problema en un intervalo J conteniendo x_0, significa que la función $y(x)$ satisface las siguientes condiciones:

1. $y(x_0) = y_0$
2. $y'(x)$ existe para $\forall x \in J$.
3. $\forall x \in J$ los puntos $(x, y(x)) \in D$
4. $y'(x) = f(x, y(x)) \quad \forall x \in J$.

Más adelante demostraremos que la continuidad de la función $f(x,y)$ es suficiente para encontrar al menos una solución en una vecindad suficientemente pequeña del punto (x_0, y_0). En caso de que $f(x,y)$ no sea continua, entonces la naturaleza de la solución de (1.11) no contiene el punto (x_0, y_0), como se mostrará en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 1.1.10. Un problema con valores iniciales sin solución

Resuelva el problema con valores iniciales dada por

$$y' = \frac{2}{x}(y-1) \quad y(0) = 0$$

Solución 1.1.10 *Para este problema de valor inicial tenemos que*

$$f(x,y) = \frac{2}{x}(y-1)$$

cuyo dominio está por

$$D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad x \neq 0\right\}$$

es claro que $f(x,y)$ no es continua en $x = 0$. Se puede verificar que la familia de funciones

$$y(x) = 1 + cx^2, \quad c \in \mathbb{R}$$

satisfacen el problema dado, ahora vamos a comprobar si estas soluciones cumplen con la condición inicial, sustituimos $x = 0$ en la solución

$$y\,(0) = 1 + c\,(0)^2 = 1$$

Lo que evidencia que $y\,(0) \neq 0$ y por los tanto $y(x) = 1 + cx^2$ no es una solución del problema dado.

El empleo de ecuaciones integrales como herramienta para demostrar teoremas de existencia es un procedimiento habitual en la teoría de las ecuaciones diferenciales. En este contexto, se plantea el siguiente teorema.

Teorema 1.1.1: Teorema de existencia y unicidad

Sea $f(x, y)$ continua en el dominio D, entonces cualquier solución (1.11) es también solución de la ecuación integral

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \tag{1.15}$$

y viceversa.

Demostración 1.1.1 *sea $y(x)$ una solución de (1.11), entonces satisface la expresión*

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

Integrando en $[xo, x]$ Tenemos

$$\int_{x_0}^{x} y'(t)dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

Por el teorema fundamental del cálculo tenemos

$$y(x) - y\,(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

Despejando obtenemos (1.15)

$$y(x) = y\,(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

Ahora si $y(x)$ es una solución de (1.15) tenemos

$$y\,(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(t, y(t))dt$$

Por propiedad de la integral definida llegamos a

$$y\,(x_0) = y_0$$

Es decir, satisface la condición inicial. Como $f(x, y)$ es continua, derivando (1.15) y por el teorema fundamental del calculo

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

Por lo tanto el teorema queda demostrado.

En ejemplo anterior notamos que la no continuidad de $f(x,y)$ no garantiza una solución del problema (1.11) que contenga al punto (x_0,y_0). Ahora mostraremos que si $f(x,y)$ es continua, entonces está garantizada la existencia de soluciones.

Ejemplo 1.1.11. Un problema con valores iniciales con dos solución

Resuelva el siguiente problema de valores iniciales dado por

$$y' = y^{2/3} \quad y(0) = 0$$

Solución 1.1.11 *Para este problema tenemos que $f(x,y) = y^{2/3}$ cuyo dominio es todo el plano $\mathbb{R}^2$.*

Es facil de verificar que las funciones $y_1(x) = 0$ y $y_2(x) = \dfrac{x^3}{27}$ satisfacen el problema de valor inicial, es decir

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 0 \\ y_2(0) &= \frac{(0)^3}{27} = 0 \end{aligned}$$

De manera que este problema de valores inciales tiene dos soluciones que satisfacen la condición inicial. Nuestro interés es encontrar una solución y que esta sea única, para asegurar la unicidad de la solución impondremos a la función $f(x,y)$ que cumpla con la siguiente propiedad

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant L\,|y_1 - y_2| \qquad \forall\,(x,y_1),(x,y_2) \in D \tag{1.16}$$

La función $f(x,y)$ se dice que cumple con la condición Uniforme de LIPSCHITZ *en un dominio D si la desigualdad (1.16) se cumple $\forall\,(x,y_1),(x,y_2) \in D$. La constante no negativa L se llama constante de Lipschitz. Ahora vamos a demostrar que $f(x,y) = y^{2/3}$ del ejemplo anterior no cumple con la condición de Lipschitz para valores cercano a $y = 0$, de (1.16) tenemos*

$$\left|y_1^{2/3} - y_2^{2/3}\right| \leq L\,|y_1 - y_2|$$

Usando factorización directa para simplificar $y_1^{2/3} - y_2^{2/3}$ tenemos que

$$y_1^{2/3} - y_2^{2/3} = (y_1 - y_2)\left(y_1^{-1/3} + y_1^{-1/3}y_2^{1/3} + \cdots + y_2^{-1/6}\right)$$

como podemos notar en la expresión anterior cada término del segundo factor tiene un factor $y_1^{-1/3}$ ó $y_2^{-1/3}$

$$\begin{aligned} \left|y_1^{2/3} - y_2^{2/3}\right| &= \left|(y_1 - y_2)\left(y_1^{-1/3} + y_1^{-1/3}y_2^{1/3} + \cdots + y_2^{-1/3}\right)\right| \leqslant L\,|y_1 - y_2| \\ &= |y_1 - y_2|\left|y_1^{-1/3} + y_1^{-1/3}y_2^{1/3} + \cdots y_2^{-1/3}\right| \leqslant L\,|y_1 - y_2| \end{aligned}$$

De la expresión anterior podemos ver que

$$\left|y_1^{-1/3} + y_1^{-1/3}y_2^{1/3} + \cdots + y_2^{-1/3}\right| \leq L$$

Ahora si $y_1 \to 0$ ó $y_2 \to 0$

$$\left|y_1^{-1/3} + y_1^{-1/3}y_2^{1/3} + \cdots + y_2^{-1/3}\right| \to \infty$$

Y L no sería una cota. Pero si y_1 y y_2 estan distante de 0, $y^{-1/3}$ permanece finito y existe un L no negativo tal que

$$\left| y_1^{-1/3} + y_1^{-1/3} y_2^{1/3} + \cdots + y_2^{-1/3} \right| \leq L$$

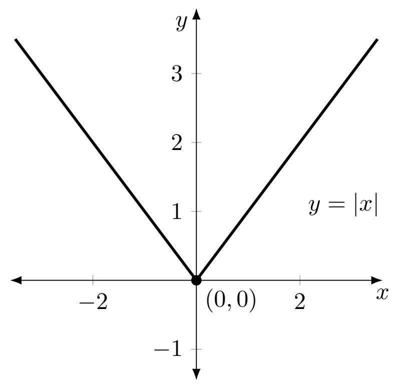


Figura 1.12: Por elemplo, $f(x,y) = |y|$ cumple la Condición de Lipschitz pero no es diferenciable en R^2

Teorema 1.1.2: Condición de Lipschitz

Sea D un dominio convexo y la función $f(x,y)$ diferenciable con respecto a y en D. Entonces, para que la condición de Lipschitz se satisfaga, es necesario y suficiente que

$$\sup_D \left| \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right| \leqslant L \tag{1.17}$$

Demostración 1.1.2 *Como $f(x,y)$ es diferenciable respecto a y y el dominio es convexo en D el teorema de valor medio garantiza*

$$\frac{f(x,y_1) - f(x,y_2)}{y_1 - y_2} = \frac{\partial f(x,y^*)}{\partial y}$$

La expresión anterior es equivalente a

$$f(x,y_1) - f(x,y_2) = \frac{\partial f(x,y^*)}{\partial y}(y_1 - y_2)$$

donde $y_1 < y^* < y_2$. Por propieded de norma

$$\begin{aligned} |f(x,y_1) - f(x,y_2)| &= \left| \frac{\partial f(x,y^*)}{\partial y}(y_1 - y_2) \right| \\ &= \left| \frac{\partial f(x,y^*)}{\partial y}(y_1 - y_2) \right| \leqslant L(y_1 - y_2) \\ &= \left| \frac{\partial F(x,y^*)}{\partial y} \right| |y_1 - y_2| \leq L(y_1 - y_2) \end{aligned}$$

Entonces

$$\sup_D \left| \frac{\partial f(x,y^*)}{\partial y} \right| \leq L$$

En Cambio de la expresión (1.16) implica que

$$\left| \frac{\partial f(x,y_1)}{\partial y_1} \right| = \lim_{y_2 \to y_1} \left| \frac{f(x,y_1) - f(x_2,y_2)}{y_1 - y_2} \right| \leq L$$

En los siguientes ejemplos se muestra como determinar el dominio donde la función dada cumple con la condición de Lipschitz.

Ejemplo 1.1.12. Constante de Lipschitz

Determina el dominio en el cual

$$f(x,y) = \frac{y}{1+x^2}$$

Satisface la condición de Lipschitz, luego determina la constante de Lipschitz.

Solución 1.1.12 *Aplicando la condición de Lipschitz dada en (1.16)*

$$\left|\frac{y_1}{1+x^2} - \frac{y_2}{1+x^2}\right| \leq L\,|y_1 - y_2|$$

Simplificando lado izquierdo

$$\left|\frac{y_1 - y_2}{1+x^2}\right| \leq L\,|y_1 - y_2|$$

Aplicando propiedad de la norma

$$\left|\frac{1}{1+x^2}\right| |y_1 - y_2| \leq L\,|y_1 - y_2|$$

La expresión anterior implica que

$$\left|\frac{1}{1+x^2}\right| \leq L$$

Como $\dfrac{1}{1+x^2}$ *siempre es positivo, tenemos*

$$\frac{1}{1+x^2} \leq L \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto la funcón $\dfrac{y}{1+x^2}$ *cumple con la condición de Lipschitz en todo los reales. Es facil comprobar que* $f(x,y)$ *es diferenciable con respecto a* y *en todo* $\mathbb{R}$*, por lo que podemos utilizar la expresión dada en (1.17)*

$$\sup_D \left|\frac{1}{1+x^2}\right| = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto $L = 1$*.*

Para ciertas funciones aplicar directamente la expresión dada en (1.16) no es conveniente, en el siguiente ejemplo mostraremos como utilizar el teorema (1.1.2).

Ejemplo 1.1.13. Constante de Lipschitz

Determina el dominio en el cual

$$f(x,y) = x^2\cos^2(y) + y\sin^2(x)$$

Satisface la condición de Lipschitz, luego determina la constante de Lipschitz.

Solución 1.1.13 *Para determinar el dominio donde* $f(x,y)$ *cumpla la condición de Lipschitz, uitilizaremos el teorema (1.1.2)*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x^2\cos(y)\sin(y) + \sin^2(x)$$

Sabemos que $\cos(y) \leq 1$ *y* $\sin(y) \leq 1$*, de manera que la expresión anterior está acotada si*

$$|x| < a$$

Así el dominio donde se cumple la condicón de Lipschitz es

$$|x| < a \qquad -\infty < y < \infty$$

Ahora para determinar la constante, tenemos que

$$\sup_{D}\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| = \left|-a^2+1\right| = a^2+1 \leqslant L$$

1.1.3. Método de Picard

Ahora vamos a resolver la ecuación integral dada en (1.15) usando el método de aproximaciones sucesivas de **Picard**. Para esto, sea $y_0(x)$ una función continua que suponemos que es la aproximación incial de la solución desconocida de (1.15), entonces definimos $y_1(x)$ como

$$y_1(x) = y_0(x_0) + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y_0(t)\right) dt \tag{1.18}$$

tomamos $y_1(x)$ como nuestra próxima aproximación y sustituimos esta expresión por $y(x)$ en el lado derecho de (1.15) obtendriamos la solución $y_2(x)$. Continuando este proceso, tenemos que $(m+1)$ aproximación $y_{m+1}(x)$ se obtiene de $y_m(x)$ por medio de la expresión

$$y_{m+1}(x) = y_0(x_0) + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y_m(t)\right) dt, m = 0, 1, 2, 3, \ldots, \tag{1.19}$$

Si la secuencia $\{y_m(x)\}$ converge uniformemente a una función continua $y(x)$ en un intervalo J conteniendo x_0 y se tiene que $\forall x \in J$ los puntos $(x, y_m(x)) \in D$, entonces tomando límites en ambos lados de (1.19) tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} y_{m+1}(x) &= y_0(x_0) + \lim_{m\to\infty}\int_{x_0}^{x} f\left(t, y_m(t)\right) dt\\ y(x) &= y_0(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt\end{aligned}$$

Asi obtenemos la solución deseada.

Ejemplo 1.1.14. Solución de una EDO por el método de Picard

Resuelva el problema de valor inicial dado por

$$y'(x) = -y(x), \qquad y(0) = 1$$

si la iteración inicial es $y_0\,(x) = 1$.

Solución 1.1.14 *Resolver el problema anterior es equivalente a resolver la ecuación integral dada por:*

$$y(x) = 1 - \int_{0}^{x} y(t)\, dt.$$

Ahora, utilizando el método de Picard, calculamos las iteraciones:

1. *Primera iteración*

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1-\int_0^x 1\,dt && \textit{Integrando} \\ y_1(x) &= 1-\left(t\Big|_0^x\right) && \textit{Evaluando} \\ y_1(x) &= 1-x. \end{aligned}$$

2. *Segunda iteración*
   Utilizando el resultado de la iteración anterior:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= 1-\int_0^x \big(1-t\big)\,dt && \textit{Integrando} \\ &= 1-\left(t-\frac{t^2}{2}\Big|_0^x\right) && \textit{Evaluando} \\ &= 1-\left(x-\frac{x^2}{2}\right) && \textit{Simplificando} \\ y_2(x) &= 1-x+\frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

3. *Tercera iteración*
   Usando el resultado de la iteración anterior:

$$\begin{aligned} y_3(x) &= 1-\int_0^x \left(1-t+\frac{t^2}{2}\right)dt && \textit{Integrando} \\ &= 1-\left(t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}\Big|_0^x\right) && \textit{Evaluando} \\ &= 1-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right) && \textit{Simplificando} \\ y_3(x) &= 1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}. \end{aligned}$$

4. *Cuarta iteración*
   Utilizando el resultado de la iteración anterior:

$$\begin{aligned} y_4(x) &= 1-\int_0^x \left(1-t+\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}\right)dt && \textit{Integrando} \\ &= 1-\left(t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}-\frac{t^4}{24}\Big|_0^x\right) && \textit{Evaluando} \\ &= 1-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{24}\right) && \textit{Simplificando} \\ y_4(x) &= 1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}. \end{aligned}$$

Como se puede notar cada vez que obtenemos una aproximación, a la aproximación anterior se le suma un término de la forma $(-1)^m\dfrac{x^m}{m!}$, *asi la* $y_m(x)$ *aproximación es*

$$y_m(x)=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^m\frac{x^m}{m!}$$

La expresión del lado derecho se puede expresar en término de una suma, Así

$$y_m(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$$

Romando límite ($m \to \infty$)

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} y_m(x) &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^k}{k!} \\ y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

La serie anterior es conocida de manera que

$$y(x) = e^{-x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto la expresión anterior es la solución del problema con valor inicial.

Ejemplo 1.1.15. Solución de una EDO por el método de Picard

Resuelva el problema de valor inicial dado por

$$y' = xy + 2x - x^3 \qquad y(0) = 0$$

si la iteración inicial es $y_0(x) = 0$.

Solución 1.1.15 1. *Primera iteración*

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \int_0^x \left(2t - t^3\right) dt && \textit{integrando} \\ y_1(x) &= t^2 - \frac{t^4}{4}\Big|_0^x && \textit{Evaluando} \\ y_1(x) &= x^2 - \frac{x^4}{4} \end{aligned}$$

2. *Segunda iteración*

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \int_0^x \left(t\left(t^2 - \frac{t^4}{4}\right) + 2t - t^3\right) dt && \textit{Simplificando el integrando} \\ &= \int_0^x \left(2t - \frac{t^5}{4}\right) dt && \textit{Integrando} \\ &= t^2 - \frac{t^6}{24}\Big|_0^x && \textit{Evaluando} \end{aligned}$$

$$y_2(x) = x^2 - \frac{x^6}{24}$$

3. *Tercera iteración*

$$y_3(x) = \int_0^x \left(t\left(t^2 - \frac{t^6}{24}\right) + 2t - t^3\right) dt \quad \textit{Simplificando el integrando}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^x \left(2t - \frac{t^7}{24}\right) dt \qquad \textit{integrando} \\
&= t^2 - \frac{t^8}{192}\Big|_0^x \qquad \textit{Evaluando} \\
y_3(x) &= x^2 - \frac{x^8}{192}
\end{aligned}
$$

Siguiendo este procedimiento obtenemos que la $y_m(x)$ iteración esta dada por

$$y_m(x) = x^2 - \frac{x^{2(m+1)}}{2^m(m+1)!}$$

Ahora tomando límite

$$
\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} y_m(x) &= x^2 - \lim_{m\to\infty} \frac{x^{2(m+1)}}{2^m(m+1)!} \\
y(x) &= x^2
\end{aligned}
$$

1.2 Técnicas elementales de solución de EDO de primer orden

1.2.1. Integración directa

Las ecuaciones diferenciales de integración directa es uno de los casos más simple que podemos encontrar al resolver una EDO. Fortalecer la introducción. Notacion de derivadas contexto historico. Hablar de diferenciales y diferencias con el incremento.

Definición 1.2.1: Definición

Si $f(x,y)$ es una función de una sola variable, entonces la ecuación de primer orden dada en (1.5) es de integración directa.

Técnica de resolución

Supongamos que $f(x,y) = h(x)$, de manera que la ecuación (1.5) tiene la forma

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= h(x) \\
dy &= h(x)dx \\
\int dy &= \int h(x)dx \\
y &= H(x) + C
\end{aligned}
$$

Donde $H(x)$ es una antiderivada de $h(x)$.

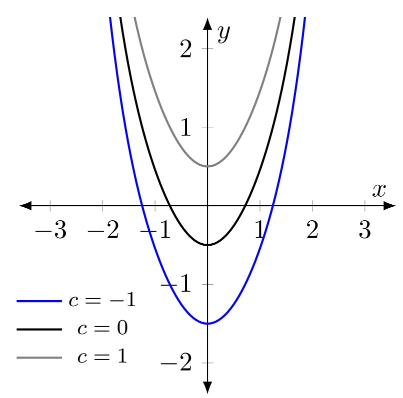


Figura 1.13: Solución $y = \frac{x^4}{4} - \cos(2x) + C$.

Ejemplo 1.2.1. Obtenga la solución de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \sin(2x) + x^3$$

Solución 1.2.1 *Por la definición de diferencial, tenemos*

$$\begin{aligned} dy &= \left(\sin(2x) + x^3\right) dx \\ \int dy &= \int \left(\sin(2x) + x^3\right) dx \\ y &= \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}\cos(2x) + C \end{aligned}$$

1.2.2. Variables Separables

Definición 1.2.2: Definicion

Si $f(x, y) = -h(x)n(y)$ entonces la ecuación de primer orden dada en 1.5 se dice que es separable o que tiene variables separables.

Técnica de resolución

Si en la expresión 1.5 reemplazamos $f(x, y) = -h(x)n(y)$

$$\frac{dy}{dx} = -h(x)n(y)$$

multiplicando por $\frac{dx}{n(y)} \quad n(y) \neq 0$

$$\frac{dy}{dx}\frac{dx}{n(y)} = -h(x)n(y)\frac{dx}{n(y)}$$

por la definición de diferenciales y simplicando llegamos a

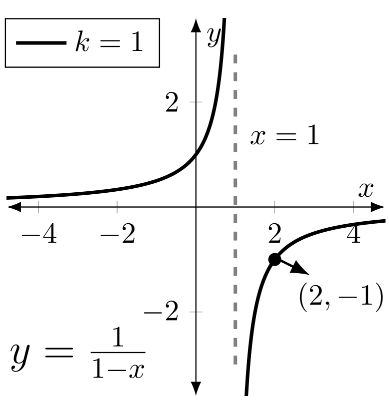
$$\frac{dy}{n(y)} = -h(x)dx$$

la ecuación anterior se resuelve aplicando **integración directa**, integrando tenemos

$$\int \frac{dy}{n(y)} = -\int h(x)dx$$

la solución general es

$$\int \frac{dy}{n(y)} + \int h(x)dx = C \tag{1.20}$$



(a) Punto inicial $(2, -1)$

Figura 1.14: Gráfica del ejemplo 1.3.2 sobre puntos iniciales

Ejemplo 1.2.2. Resolver la ecuación diferencial dada por

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y(1-y)}y' = 0 \quad xy(1-y) \neq 0$$

Solución 1.2.2 *Expresando la ecuación diferencial en la forma normal dada en 1.5*

$$y' = \frac{y(y-1)}{x}$$

donde $f(x,y) = \dfrac{y(y-1)}{x}$ *, de donde es evidente que* $h(x) = -\dfrac{1}{x}$ *y* $n(y) = y(y-1)$

De la expresión 1.20 tenemos que la solución general es

$$\int \frac{1}{y(y-1)} - \int \frac{1}{x}dx = C$$

Aplicando fracciones parciales, tenemos

$$\int \frac{1}{y-1}dy - \int \frac{1}{y}dy - \int \frac{1}{x}dx = C$$

integrando

$$\ln(y-1) - \ln(y) - \ln(x) = C$$

aplicando propiedad de los logarítmos y tomando $C = \ln(k)$

$$\ln\left(\frac{y-1}{y}\right) = \ln(kx)$$

por la propiedad inyectividad

$$\frac{y-1}{y} = kx$$

despejando a y*, obtenemos la solución explícita*

$$y = (1-kx)^{-1} \tag{1.21}$$

A veces cuando obtenemos la solución general, es necesario verificar ciertas soluciones particulares, ya que esta podrían no ser solución de la ecuación diferencial.

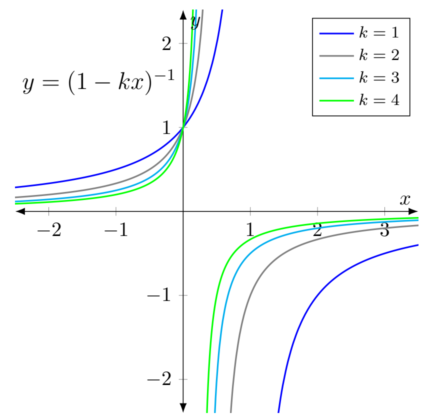
Si escogemos $k = 0$ en la solución general (1.21) se obtiene la función constante $y = 1$, lo cual no es una solución de la ecuación. Otras posibles soluciones se obtienen analizando $xy(1-y)$.

Ejemplo 1.2.3. Resolver la ecuación diferencial dada por

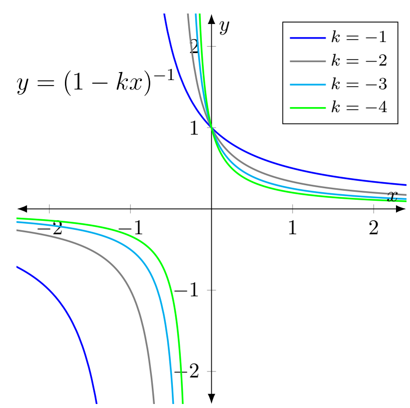
$$x\sin(y) + (x^2+1)\cos(y)y' = 0$$

Solución 1.2.3 *Si expresamos la ecuación diferencial en su forma normal*

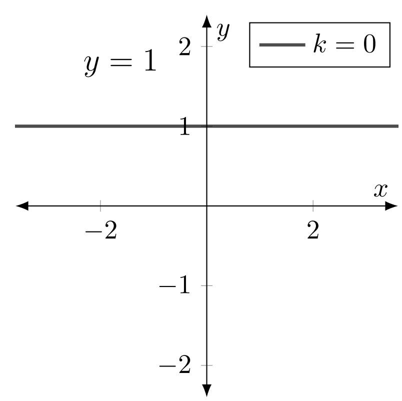
$$\left(x^2+1\right)\cos(y)y' = -x\sin(y)$$
$$y' = -\frac{x\sin(y)}{(x^2+1)\cos(y)}$$



(b) Solución k en $y = (1-kx)^{-1}$

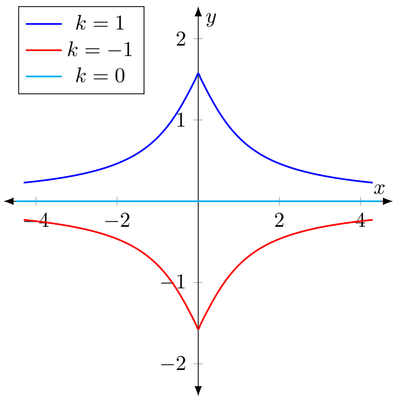


(c) Solución k en $y = (1-kx)^{-1}$

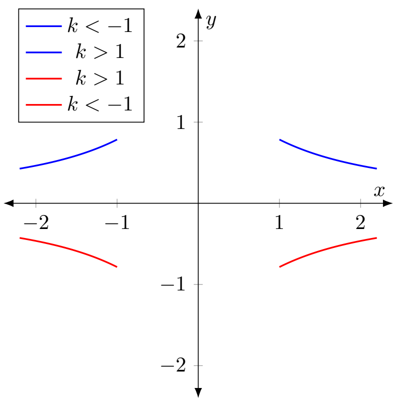


(d) Para $k = 0$

Figura 1.14: Gráfica del ejemplo 1.3.2 sobre puntos iniciales



(a) Para valores de k



(b) Solución c en $y = (1 - kx)^{-1}$

Figura 1.15: Gráfica del ejemplo 1.3.3.Se observan los valores de k .

De la expresión anterior tenemos que

$$f(x,y) = -\frac{x\sin(y)}{(x^2+1)\cos(y)}$$

Así de 1.20 tenemos que la solución general esta dada por las integrales

$$\int \frac{\cos(y)}{\sin(y)}dy + \int \frac{x}{x^2+1}dx = C$$

Resolviendo las integrales obtenemos

$$\ln(\sin(y)) + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) = C$$

Para simplificar el resultado anterior escogemos la constante de la forma $C = \ln(k)$ *, luego aplicando propiedades de los logarítmos*

$$\ln(\sin(y)) = \ln\left(k(x^2+1)^{-1/2}\right)$$

Como sabemos la función logarítmo natural es inyectiva llegamos a la solución general

$$\sin(y) = k\left(x^2+1\right)^{-1/2}$$

Ejemplo 1.2.4. Perdida de una solución

Resolver la ecuación diferencial dada por

$$\frac{dy}{dx} = (y-1)^2$$

Solución 1.2.4 *La función* $f(x,y)$ *es* $f(x,y) = (y-1)^2$, *donde* $n(y) = (y-1)^2$ *y* $h(x) = -1$. *De la expresión (1.20) tenemos*

$$\begin{aligned}
\int (y-1)^{-2}\,dy - \int dx &= C && \textit{Integrando} \\
-(y-1)^{-1} - x &= C && \textit{Despejando} \\
(y-1)^{-1} &= -(x+C) && \textit{Multiplicando por } (y-1) \\
1 &= -(x+C)(y-1) && \textit{Despejando nueva vez} \\
\frac{1}{x+C} &= 1-y \\
y &= 1 - \frac{1}{x+C} && \textit{Simplificando} \\
y &= \frac{x+C-1}{x+C}
\end{aligned}$$

La expresión anterior es la solución uniparamétrica de la ecuación diferencial, se puede comprobar que la solución constante $y = 1$ *no se obtiene a partir de esta solución, pero si es solución de la ED como se verifica en las siguientes lineas*

$$\frac{d}{dx}(1) = (1-1)^2 \qquad \textit{Derivando y simplificando el lado derecho}$$

$$0 = 0$$

en esta solución se perdió al inicio del proceso de solución, como esta solución no se obtiene de la solución general ya sabemos que se llama solución singular.

Observación: Pérdida de una solución

Se debe tener cuidado al separar variables en una ecuación diferencial del tipo

$$\frac{dy}{dx} = -h(x)n(y),$$

ya que si la función $n(y)$ se anula para algún valor $y = r$, entonces la solución constante $y = r$ no aparece en la familia general obtenida al separar variables. Esta solución constante, que satisface la ecuación original pero no aparece en la solución general, se llama **solución singular**.

La ecuación diferencial $(y')^2 = 4y$ puede resolverse separando variables y obteniendo la familia general de soluciones $y = (x + C)^2$ **Figura 1.16** . No obstante, al realizar el paso $\frac{dy}{\sqrt{y}} = \pm 2dx$, se asume que $y > 0$, excluyendo el caso $y = 0$. Al sustituir directamente $y = 0$ en la ecuación original, se verifica que también satisface la ecuación, pues $(y')^2 = 0$. Esta solución constante, que no aparece en la familia general, se denomina **solución singular**.

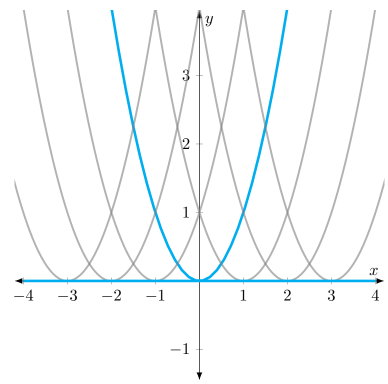


Figura 1.16: Curva solución general $y = (x - C)^2$ y la curva solución singular $y = 0$ de la ecuación diferencial $(y')^2 = 4y$

Ejemplo 1.2.5. Resolver la ecuación diferencial dada por

$$(x + 2y - 1) + 3(x + 2y)y' = 0$$

expresando la ecuación diferencial en la forma normal

Solución 1.2.5

$$3(x + 2y)y' = -(x + 2y - 1)$$
$$y' = -\frac{x + 2y - 1}{3(x + 2y)}$$

Asi $f(x, y) = -\dfrac{x + 2y - 1}{3(x + 2y)}$. *Se puede notar* $f(x, y)$ *no se puede expresar como el producto de las funciones* $h(x)$ *y* $n(y)$*, lo que nos indica que la ecuación dada no es de variable separable. En las secciones siguientes se estudiarán ecuaciones diferenciales de esta naturaleza.*

ecuaciones separable sin primitiva elementales

Ejemplo 1.2.6. Función Error

Resolver la ecuación diferencial dada por

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} y = 0$$

sujeta a $y(0) = 0$.

Solución 1.2.6 *Separando la ecuación diferencial tenemos*

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx \qquad \textit{Integrando de } 0 \textit{ a } x \\ \ln|y(x)| - \ln|y(0)| &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \\ y(x) &= exp\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \right) \end{aligned}$$

La integral obtenida en el paso anterior se conoce como la función error (erf),

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \tag{1.22}$$

Hacer la grafica de la funcion error y que se vea la propiedad que estas mas abajo De los cursos avanzado de calculos se tiene el resultado que

$$\lim_{x \to \infty} erf(x) = 1$$

De manera que la solución de la ED es

$$y(x) = e \qquad x \to \infty$$

Ejemplo 1.2.7. Integral seno de Fresnel

Resolver la ecuación diferencial dada por

$$\frac{dy}{dx} - \sin\left(x^2\right) y = 0$$

sujeta a $y(0) = 5$.

Solución 1.2.7 *Es claro que esta ED de variable separable, integrando de* 0 *a* x

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dy}{y} dt &= \int_0^x \sin\left(t^2\right) dt \\ \ln|y(x)| - \ln|0| &= \int_0^x \sin\left(t^2\right) dt \\ y(x) &= 5 \;\; exp\left(\int_0^x \sin\left(t^2\right) dt \right) \end{aligned}$$

La integral obtenida en el paso anterior se conoce como integral de Fresnel $S(x)$*. En ocasiones se realiza un cambio de variable para obtener la forma* *escalada, de esta forma la solución toma la forma*

$$y(x) \quad = \quad 5\ exp\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}x}\sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt\right) = 5exp\ S\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}t\right)$$

Una propiedad que tiene la función de Fresnel es que

$$\lim_{x\to\infty} S\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}t\right) = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to-\infty} S\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}t\right) = -\frac{1}{2}$$

De manera que la solución puede escribirse de la forma

$$y(x) = \begin{cases} 5\ \exp\left(\sqrt{\frac{\pi}{8}}\right), & x\to\infty, \\ -5\ \exp\left(\sqrt{\frac{\pi}{8}}\right), & x\to-\infty. \end{cases}$$

Hacer la grafica de la funcion de fresnel y de la solucion de la ecuacion para verificar estos resultados.

1.2.3. Ecuaciones diferenciales por sustituciones

Homogénea en grado

En la modelación mediante ecuaciones diferenciales, es frecuente que el fenómeno exhiba similitud: dos situaciones que difieren sólo por un factor de escala (longitudes, alturas, concentraciones, etc. multiplicadas por un mismo $t > 0$) conservan la misma estructura cualitativa. Esta idea de misma forma a distinta escala se formaliza con las funciones homogéneas, que codifican una ley de escalamiento consistente con el problema.

Teorema de Euler
sobre funciones homogéneas

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \frac{\alpha}{\|x_0\|}f(x_0)$$

Figura 1.17: Teorema de Euler

Definición 1.2.3: Definición

Sea f definida por $f : V \to W$ entre dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo F. Entonces se dice que f es homogénea de grado α si:

$$f(k\mathbf{v}) = k^\alpha f(\mathbf{v}), \quad \forall\alpha \in F\backslash\{0\}, \quad \forall\mathbf{v}\in V \tag{1.23}$$

Definición 1.2.4: Definición

Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$. Se dice que esta función es homogénea de grado α (α como número real) si se cumple que

$$f(t\mathbf{x}) = t^\alpha f(\mathbf{x}), \forall x \in U, \forall t > 0 \tag{1.24}$$

Homogeneidad de una EDO

Homogénea de grado n

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

Figura 1.18: Grado de un función homogénea n

Para mayor comprensión de la definición dada (1.2.3) (1.2.4) se presenta los siguientes ejemplos

1. La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) = ax + by$ es homogénea de grado 1, ya que

$$f(tx,ty) = a(tx) + b(ty)$$

tomando factor común en el lado derecho

$$f(tx,ty) = t(ax+by) = tf(x,y)$$

2. La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x,y) = \dfrac{x^2+3xy}{2xy-y^2}$ es homogénea de grado 2, ya que se verifica lo siguiente

$$f(tx,ty) = \frac{(tx)^2 + 3(tx)(ty)}{2(tx)(ty) - (ty)^2}$$

Desarrollando las operaciones del lado derecho de la expresión anterior y extrayendo factor común

$$f(tx,ty) = t^2 \frac{x^2+3xy}{2xy-y^2} = t^2 f(x,t)$$

3. La función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $h(x) = 8x+1$ no es homegénea.

Luego abordar la definición de función homogénea, ahora presentamos la defínción de ecuaciones diferenciales homogéneas de primer orden.

Definición 1.2.5: Definición

Si $F(x,y) = -\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$ tal que $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones homogéneas de grado α, entonces la ecuación 1.5 es una ecuación diferencial homogénea de primer orden de grado α.

Técnica de resolución

Si $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones homogéneas en grado α, se tiene

$$M(xt,xy) = t^\alpha M(x,y)$$

Sea $t = \dfrac{1}{x}$

$$M(1,\frac{y}{x}) = \frac{1}{x^\alpha} M(x,y)$$

Despejando $M(x,y)$

$$M(x,y) \quad = \quad x^\alpha M(1,\frac{y}{x}) \tag{1.25}$$

De igual manera se prueba que

$$N(x,y) \quad = \quad x^\alpha N(1,\frac{y}{x}) \tag{1.26}$$

En la expresión (1.26) podemos tomar la sustitución

$$y \quad = \quad ux$$

Calculando su derivada

$$y' = u + xu'$$

Reemplazando la derivada obtenida anteriormente en la expresión 1.5 tenemos

$$u + u'x = \frac{-x^{\alpha} M(1,u)}{x^{\alpha} N(1,u)} = \frac{-M(1,u)}{N(1,u)}$$

Despejando u'

$$u' = \frac{-1}{x}\left[\frac{M(1,u)}{N(1,u)} + u\right]$$

Como se puede verificar la ecuación anterior es de variables separable, separando las variables e integrando obtenemos la solución general

$$\int \frac{du}{\frac{M(1,u)}{N(1,u)} + u} + \int \frac{1}{x}dx = c \tag{1.27}$$

Ejemplo 1.2.8. Resolver la ecuación diferencial dada por

$$\left(x^2 - 2y^2\right) + xyy' = 0$$

Solución 1.2.8 *Escribiendo la ecuación en la forma normal*

$$y' = -\frac{x^2 - 2y^2}{xy}$$

De la expresión anterior se pueder ver que

$$\begin{aligned} M(x,y) &= x^2 - 2y^2 \\ N(x,y) &= xy \end{aligned}$$

son funciones homogénea de grado 2. Dividiendo por x^2, tenemos

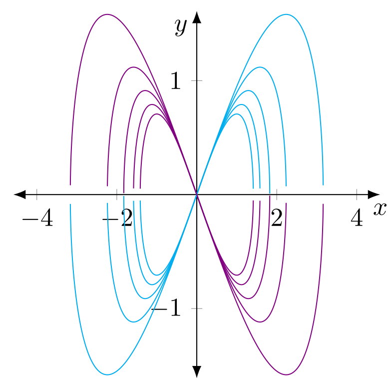
$$y' = -\frac{1 - 2\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}}$$

Tomando el adecuado cambio de variable $u = \frac{y}{x}$ y calculando el diferencial de u

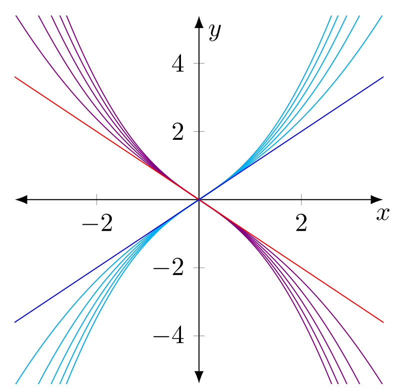
$$u' = \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x}\frac{y}{x}$$

De la expresión anterior $\frac{1}{x}$ es un factor común y reemplazando y'

$$u' = -\frac{1}{x}\left(\frac{1 - 2u^2}{u} + u\right) = -\frac{1}{x}\frac{1 - u^2}{u}$$



(a) Para valores de k



(b) Solución c en $y = (1 - kx)^{-1}$

Figura 1.19: Gráfica del ejemplo 1.3.3.Se observan los valores de k .

Ahora separando variables y multiplicando por 2 obtenemos

$$\frac{2u}{u^2-1}du = \frac{2}{x}dx$$

Integrando

$$\ln\left(u^2-1\right) = 2\ln(x)+\ln(c)$$

Despejando a la variable u

$$u^2 = 1+cx^2$$

Finalmente regresando a la variable original, obtenemos la solución general

$$y = \pm x\sqrt{1+cx^2}$$

Seguir trabajando la grafica

Ejemplo 1.2.9. Resolver la ecuación

$$xy'-y = xe^{y/x}$$

Solución 1.2.9 *Llevando la ecuación a la forma normal*

$$y' = \frac{y+xe^{y/x}}{x}$$

De la expresión anterior tenemos que

$$\begin{aligned} M(x,y) &= -\left(y+xe^{y/x}\right) \\ N(x,y) &= x \end{aligned}$$

Las cuales son funciones homogéneas de grado 1. De las expresiones 1.25 y 1.26 se llega a que

$$\begin{aligned} M(1,u) &= u+e^u \\ N(1,u) &= 1 \end{aligned}$$

La solución general tiene la forma de 1.27

$$\int \frac{du}{\frac{u+e^u}{1}-u}+\int\frac{dx}{x} = c$$

Simplificando

$$\int e^{-u}du+\int\frac{dx}{x} = c$$

Integrando y tomando $c=\ln(k)$

$$-e^{-u}+\ln(x) = \ln(k)$$

Simplificando

$$\ln\left(\frac{x}{k}\right) = e^{-u}$$

Regresando a la variable original

$$\ln\left(\frac{x}{k}\right) = e^{-y/x}$$

1.2.4. Sustitución Lineal

hacer una breve introduccion

$$\frac{dy}{dx} = F(ax + by + c) \tag{1.28}$$

Técnica de resolución

Este tipo de ED de primer orden se reduce a una ecuación de variable separable por medio de la sustitución

$$u = ax + by + c \tag{1.29}$$

Calculando el diferencial de u

$$du = a\,dx + b\,dy$$

Con el cambio de variable la ED se puede expresar

$$\frac{du - a\,dx}{b\,dx} = F(u)$$

Separando las variables

$$du - adx = bF(u)dx$$
$$du = [bF(u) + a]\,dx$$

Ya sabemos que esta ED es separable, para obtener la solución utilizamos el procedimiento desarrollando en la sección 1.2.2

Ejemplo 1.2.10. Sustitución Lineal

$$\frac{dy}{dx} = 1 + e^{y-x+5}$$

Solución 1.2.10 *Sea* $u = y - x + 5$

$$du = dy - dx$$

Reemplazando, tenemos

$$\frac{du + dx}{dx} = 1 + e^{u}$$

Separando

$$du = e^{u}dx$$
$$e^{-u}du = dx$$

Integrando

$$-e^{u} = x + c$$

Cambiando la variable u por x,y

$$-e^{x-y-5} = x + c$$
$$x + e^{x-y-5} = c$$

Ejemplo 1.2.11. Utiliza una sustitución adecuada para resolver la ecuación diferencial dada por

$$\frac{dy}{dx} = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$$

Solución 1.2.11 *Tomando el cambio de variable $u = y - 2x + 3$, calculando el diferencial*

$$du = dy - 2dx$$

Reemplazando en la ecuación diferencial, tenemos

$$\frac{du + 2dx}{dx} = 2 + u^{\frac{1}{2}}$$

Separando las variables

$$\begin{aligned} du &= u^{\frac{1}{2}} dx \\ u^{-\frac{1}{2}} du &= dx \end{aligned}$$

Resolviendo las integrales obtenemos

$$2u^{\frac{1}{2}} = x + c$$

Sustituyendo a u por la expresión de x,y

$$x - 2\sqrt{y - 2x + 3} = c$$

Ejemplo 1.2.12. Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = y - x - 1 + (x - y + 2)^{-1}$$

Solución 1.2.12 *Para resolver esta ecuación diferencial vamos a expresar el lado derecho de la ecuación como una función de $x - y$, es decir,*

$$y - x - 1 + (x - y + 2)^{-1} = -(x - y) - 1 + [(x - y) + 2]^{-1}$$

Así que hacemos $z = x - y$. Para hallar $\frac{dy}{dx}$, derivamos $z = x - y$ con respecto de x para obtener

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= 1 - \frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= 1 - \frac{dz}{dx} \end{aligned}$$

Al sustituir esto en la ED se tiene

$$1-\frac{dz}{dx} = -z-1+(z+2)^{-1}$$

Despejando $\dfrac{dz}{dx}$

$$\frac{dz}{dx} = (z+2)-(z+2)^{-1}$$

Al resolver esta ecuación separable, obtenemos

$$\begin{aligned}\int \frac{z+2}{(z+2)^2-1}dz &= \int dx\\ \frac{1}{2}\ln\left|(z+2)^2-1\right| &= x+c_1\end{aligned}$$

De lo que se sigue

$$(z+2)^2 = ce^{2x}+1$$

Por último, al reemplazar z *por* $x-y$ *se tiene*

$$(x-y+2)^2 = ce^{2x}+1$$

como solución implícita de la ecuación diferencial.

Ecuaciones diferenciales con coeficientes lineales en las dos variables

Técnica de Resolución

Si en ED dada en (1.5) tenemos que $f(x,y) = -\dfrac{ax+by+c}{dx+ey+f}$, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ax+by+c}{dx+ey+f} \tag{1.30}$$

donde a,b,c,d,e,f son números reales, con $M(x,y) = ax+by+c$ y $N(x,y) = dx+ey+f$. Ahora nos interesa resolver el sistema

$$\begin{cases} ax+by=-c\\ dx+ey=-f\end{cases} \tag{1.31}$$

como ya sabemos de la teoría de ecuaciones lineales que el sistema de ecuaciones (1.31) puede ser determinado (solución única ó infinitas soluciones) ó indeterminado. A continuación analizaremos la técnica de solución en cada caso:

1. El sistema de ecuaciones (1.31) tiene solución única, es decir, existe un punto (p,q) que satisface cada una de las ecuaciones del sistema, en este caso tomamos las siguientes sustituciones

$$\begin{aligned} x &= u+p\\ y &= v+q\end{aligned}$$

   con estas sustituciones la ecuación diferencial (1.30) se transforma en

$$\frac{dv}{du} = -\frac{u+kv}{ku+v} \qquad k=\frac{b}{a}\ a\neq 0 \tag{1.32}$$

   esta ecuación obtenida en (1.32) es homogénea en grado 1 y exacta, por lo que se aplicaría cualquier método para su solución.

2. En caso de que el sistema de ecuaciones (1.31) tenga infinitas soluciones, las funciones $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son paralelas, es decir, $M(x,y) = k_1 N(x,y)$ y esto convierte la ecuación (1.30) en separable

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{k_1 N(x,y)}{N(x,y)} = k_1$$

también se puede utilizar el cambio de variable $w = x + k_1 y$.

3. No aplica el método.

Ejemplo 1.2.13. Resolver la siguiente ED utilizando el método descrito anterior

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x-4y-9}{4x+y-2}$$

Solución 1.2.13 *Ya que ED está en la forma normal, tenemos que*

$$M(x,y) = x - 4y - 9 \quad y \quad N(x,y) = 4x + y - 2$$

Ahora nos interesa resolver el siguiente sistema de ecuación

$$\begin{cases} x - 4y = 9 \\ 4x + y = 2 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene que el conjunto solución está dado por $(x,y) = (1,-2)$, *de manera que la sustitución adecuada es*

$$\begin{cases} x = v + 1 \\ y = v - 2 \end{cases}$$

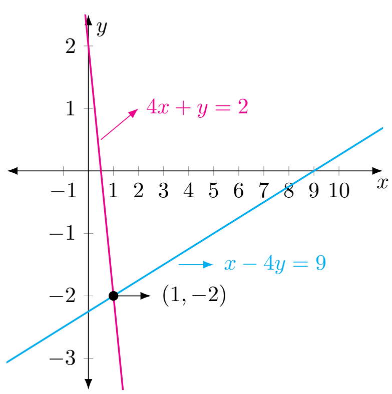


Figura 1.20: Solución del sistema de ecuaciones ejemplo 1.4.6

transformando la ED en

$$\frac{dv}{du} = -\frac{u-4v}{4u+v}$$

como se puede notar esta ED es homogénea de grado 1 , la cual se puede expresar como

$$\frac{dv}{du} = -\frac{1-4\frac{v}{u}}{4+\frac{v}{u}} \tag{1.33}$$

Ahora tomaremos la sustitución $w = \dfrac{v}{u}$, *calculando* $\dfrac{dv}{du}$

$$\frac{dv}{du} = w + u\frac{dw}{du}$$

Reemplazando $\dfrac{dv}{du}$ *y la sustitución indicada anteriormente en 1.33, tenemos*

$$w + u\frac{dw}{du} = -\frac{1-4w}{4+w}$$

Despejando $\dfrac{dw}{du}$ *y simplicando*

$$u\frac{dw}{du} = -\frac{w^2+1}{w+4}$$

como se puede notar esta ED es de variable separable, por lo que se puede escribir como

$$\left(\frac{w}{w^2+1}+\frac{4}{w^2+1}\right)dw = -\frac{du}{u}$$

Estas integrales se realizan por integración directa

$$4\tan^{-1}(w)+\frac{1}{2}\ln\left|w^2+1\right| = -\ln|u|+k$$

Ahora vamos a expresar la solución en términos de las variables originales de la ED, obteniendo así la siguiente expresión

$$\ln\left[(x-1)^2+(y+2)^2\right]+8\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{y+2}{x-1}\right)=c$$

Ejemplo 1.2.14. Resolver la ED dada por

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{-x-2y+1}{2x+y-5}$$

Solución 1.2.14 *De la ED tenemos que las funciones* $M(x,y)$ *y* $N(x,y)$ *son*

$$M(x,y)=-x-2y+1$$
$$N(x,y)=2x+y-5$$

Lo cual conduce a resolver el sistema de ecuación

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+y=5 \end{cases}$$

cuya solución es $(x,y)=(3,-1)$. *Ahora tomaremos la siguiente sustitución*

$$\begin{cases} x=u+3 \\ y=v-1 \end{cases}$$

Reemplazando en las funciones $M(x,y)$ *y* $N(x,y)$

$$\begin{aligned}\frac{M(x,y)}{N(x,y)} &= \frac{-x-2y+1}{2x+y-5}\\ &= \frac{-u-3-2v+2+1}{2u+6+v-1-5}\\ \frac{M(x,y)}{N(x,y)} &= \frac{-u-2v}{2u+v}\end{aligned}$$

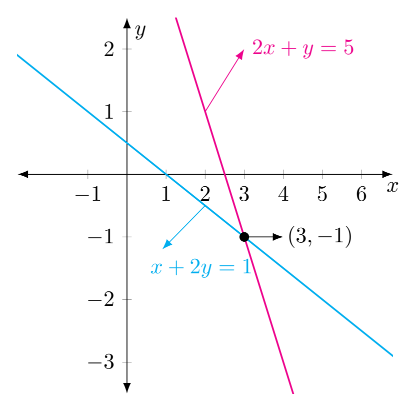


Figura 1.21: Solución del sistema de ecuaciones ejemplo 1.3.7

Con estas susticiones la ED original toma la forma siguiente

$$\frac{dv}{du} = -\frac{u+2v}{2u+v}$$

Se puede determinar que la ED anterior es homogénea de grado 1 , por lo cual se puede expresar

$$\frac{dv}{du} = \frac{1+2\frac{v}{u}}{2+\frac{v}{u}} \tag{1.34}$$

Ahora tomaremos $w = \frac{v}{u}$*, calculando el* $\frac{dv}{du}$*, tenemos*

$$\frac{dv}{du} = w + u\frac{dw}{du}$$

Reemplazando el diferencial obtenido y la sustitución en la expresión (1.34)

$$u\frac{dw}{du} + w = \frac{1+2w}{2+w}$$
$$u\frac{dw}{du} = \frac{1-w^2}{w+2}$$

Separando variable

$$\frac{w+2}{w^2-1}dw + \frac{du}{u} = 0$$

Estas integrales se resuelven por técnicas conocidas en cursos anteriores, aplicando fracciones parciales e integrando llegamos a

$$\frac{3}{2}\ln|w-1| - \frac{1}{2}\ln|w+1| + \ln|u| = k$$

Simplificando

$$\ln\left|\frac{(w-1)^3}{w+1}\right| + \ln\left|u^2\right| = k$$

Ahora vamos a expresar la solución general en término de las variables x *y* y*. Aplicando logarítmo de un producto en el lado izquierdo de la expresión anterior*

$$\ln\left|\frac{(w-1)^3}{w+1}u^2\right| = e^k$$

Expresando el logarítmo natural en la forma exponencial y las variables en término de x *y* y

$$\frac{\frac{(y-x+4)^3}{(x-3)^3}}{\frac{(y+x-2)}{(x-3)}}(x-3)^2 = c$$

Simplificando las fracciones, obtenemos

$$\frac{(y-x+4)^3}{y+x-2} = c$$
$$(x-y-4)^3 = c(x+y-2)$$

Ejemplo 1.2.15. Resolver la ED dada por

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x+2y-1}{2x+4y-2}$$

Solución 1.2.15 *Es claro que las funciones $M(x,y)$ y $N(x,y)$ están dada por*

$$\begin{cases} M(x,y) = x+2y-1 \\ N(x,y) = 2x+4y-2 \end{cases} \tag{1.35}$$

Se puede notar con facilidad que las funciones dadas en 1.35 cumplen con que

$$N(x,y) = 2M(x,y)$$

Lo que nos indica que dichas funciones son paralelas, ya que $N(x,y)$ es un múltiplo constate de $M(x,y)$.
Ahora tomaremos la sustitución $w = x+2y$. Calculando el diferencial total de w

$$dw = dx + 2dy$$
$$\frac{1}{2}[dw - dx] = dy$$

Reemplazando el diferencial total y la sustitución indicada en la ED, llegamos a

$$(w-1)\,dx + [2w-2]\left[\frac{1}{2}(dw-dx)\right] = 0$$

Simplificando

$$\left[w - 1 - 2(w-1)\frac{1}{2}\right]dx + 2(w-1)\frac{1}{2}dw = 0$$

La expresión anterior es equivalente a

$$(w-1)dw = 0$$

Integrando

$$w = c$$

Reemplazando a w por las variables x e y, obtenemos la solución general

$$x + 2y = c$$

1.2.5. Ecuaciones Diferenciales Exactas

Diferencial de una función en dos variables
Si $z = u(x,y)$ es una función de dos variables con primeras derivadas parciales continuas en una región R del plano xy, entonces su diferencial es

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = u_x(x,y)dx + u_y(x,y)dy \tag{1.36}$$

En el caso especial cuando $u(x, y) = k$, donde k es una constante, entonces la ecuación (1.36) implica que

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0$$

No toda ecuación diferencial de primer orden en su forma diferencial representa el diferencial de una función escalar. Para que esto sea cierto, la ecuación diferencial debe cumplir ciertas condiciones de exactitud, relacionadas con la existencia de una función potencial $u(x, y)$, cuyo diferencial total corresponde a la forma diferencial de la ecuación.
Para determinar la función potencial $u(x, y)$, es necesario establecer un procedimiento claro. Este procedimiento se formaliza luego de la siguiente definición.

Definición 1.2.6: Ecuación Diferencial Exacta

Sea una ecuación diferencial de primer orden, como la dada en (1.5), donde $f(x, y) = \dfrac{-M(x, y)}{N(x, y)}$ y su forma diferencial se expresa mediante

$$M(x, y) + N(x, y)\, y' = 0 \tag{1.37}$$

siendo M y N funciones continuas con derivadas parciales M_y y N_x también continuas en el dominio rectángular $S : |x - x_0| < a, |y - y_0| < b \quad (0 < a, b < \infty)$. La ecuación (1.37) se considera exacta si existe una función $u(x, y)$ tal que

$$u_x(x, y) = M(x, y) \tag{1.38}$$

$$u_y(x, y) = N(x, y) \tag{1.39}$$

En los siguientes ejemplos vamos a verificar si determinadas ecuaciones diferenciales de primer orden son exacta.

Ejemplo 1.2.16. Determina si la ecuación diferencial dada es exacta

$$\left(x - y^3 + y^2 \sin(x)\right) dx = \left(3xy^2 + 2y \cos x\right) dy$$

Solución 1.2.16 *En primer lugar expresamos la ED en su forma diferencial, obteniendo*

$$\left(y^3 - x - y^2 \sin(x)\right) + \left(3xy^2 + 2y \cos(x)\right) y' = 0$$

Ahora identificando las funciones M y N, de donde

$$M(x, y) = y^3 - x - y^2 \sin(x) \qquad N(x, y) = 3xy^2 + 2y \cos(x)$$

En este ejemplo las funciones M y N son combinaciones de polinomios y funciones seno y coseno. Tomando como función potencial

$$u(x, y) = -\frac{x^2}{2} + y^2 \cos(x) + xy^3 + k$$

Ahora calculamos las derivadas parciales y obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -x - y^2 \sin(x) + y^3 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y\cos(x) + 3xy^2$$

De acuerdo a la definición (1.2.6) la ecuación diferencial anterior es exacta.

Ejemplo 1.2.17. Determina si la ecuación diferencial dada es exacta

$$\left(2xy^2 - 3\right) + \left(2x^2y + 4\right) y' = 0$$

Solución 1.2.17 *La ecuación diferencial anterior es exacta si existe una función $u(x, y)$ que satisface las condiciones dadas en (1.38) y (1.39). Como se puede notar las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ están dada por*

$$\begin{aligned} M(x, y) &= 2xy^2 - 3 \\ N(x, y) &= 2x^2y + 4 \end{aligned}$$

Como las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son polinomios, esto nos da la idea de que la función potencial también es un polinomio, de manera que si $u(x, y)$ es la función

$$u(x, y) = x^2y^2 - 3x + 4y$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} &= 2xy^2 - 3 = M(x, y) \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} &= 2x^2y + 4 = N(x, y) \end{aligned}$$

Por lo tanto de acuerdo a la definición (1.2.6) la ecuación diferencial anterior es exacta.

Ahora vamos a tratar un importante teorema que nos dada las condiciones suficientes para que una ecuación diferencial sea exacta.

Teorema 1.2.1: Ecuaciones Diferenciales Exactas

Sean las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ y sus derivadas parciales $M_y(x, y)$ y $N_x(x, y)$ continuas en el rectángulo

$$S : |x - x_0| < a, \quad |y - y_0| < b \quad (0 < a, b < \infty)$$

Entonces la ecuación diferencial 1.37 es exacta si y solo si la condición

$$M_y = N_x \tag{1.40}$$

se cumple.

Demostración 1.2.1 $\Rightarrow$ *Si 1.37 es exacta, entonces por hipótesis se verifica 1.38, de donde $u_{xy} = M_y$ y $u_{yx} = N_x$, como M_y y N_x son continua en S, se*

verifica que $u_{xy} = u_{yx}$, es decir, $M_y = N_x$.
$\Leftarrow$ Si $M_y(x,y) = N_x(x,y)$ debemos encontrar una función $u(x,y)$ que satisfaga la expresión 1.37. Integrando en ambos lados de $N_x(x,y) = M(x,y)$, tenemos que $u(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y)$.
Ahora debemos encontrar $g(y)$, por hipótesis sabemos $\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + g'(y) = N(x,y)$, derivando con respecto a x, tenemos que $N_x(x,y) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\int M(x,y)dx = 0$, por continuidad de $M(x,y)$, tenemos $N_x(x,y) - M_y(x,y) = 0$, lo que implica que $N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$ depende solamente de y. Así queda demostrado el teorema.

Referir el teorema de la derivada cruzadas

Técnica de resolución

Dada la ecuación en la forma diferencial $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$, determine si la igualdad de la ecuación (1.40) es válida. Si es así, entonces existe una función u para la que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$$

Podemos determinar u integrando $M(x,y)$ respecto a x mientras y se conserva constante

$$u(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y) \tag{1.41}$$

donde la función arbitraria $g(y)$ es la "constante" de integración. Ahora derivando la expresión (1.41) respecto a y y suponiendo que $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + g'(y) = N(x,y)$$

Se obtiene

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx \tag{1.42}$$

Por último, se integra la ecuación anterior respecto a y y se sustituye el resultado en la ecuación (1.41). La solución implícita de la ecuación es $u(x,y) = k$.
Observaciones importantes

1. Primero, es importante darse cuenta de que la expresión

$$N(x,y) - \left(\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right)$$

es independiente de x, ya que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right] & \qquad \text{Por continuidad de } M(x,y) \\
\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx\right) & \qquad \text{Por la expresión 1.40} \\
\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0 &
\end{aligned}$$

2. Segunda, pudimos iniciar bien el procedimiento anterior con la suposición de que $\partial u/\partial y = N(x,y)$. Después, integrando N respecto a y y derivando este resultado, encontraríamos las ecuaciones que, respectivamente, nos llevaría a una solución análogas a la obtenida en (1.41) y (1.42).

Ejemplo 1.2.18. Determina cuáles de las sigtes ecuaciones diferenciales cumplen con la condición de ser exactas

1. $\left(x^2 - y^2\right) + \left(x^2 + xy\right) y' = 0$
2. $(\sin(y) - y\sin(x)) + (\cos(x) + x\cos(y) - y)\, y' = 0$

Solución 1.2.18 *Para determinar si las ecuaciones diferenciales son exactas, verificaremos si cumplen la condición dada en (1.38).*

1. *Tenemos para la primera ecuación que*

$$\begin{aligned} M(x,y) = x^2 - y^2 \quad &\Rightarrow \quad M_y(x,y) = -2y \\ N(x,y) = x^2 + xy \quad &\Rightarrow \quad N_x(x,y) = 2x + y \end{aligned}$$

como $M_y(x,y) \neq N_x(x,y)$, entonces la ecuación diferencial no es exacta.

2. *Para este caso tenemos*

$$\begin{aligned} M(x,y) = \sin(y) - y\sin(x) \quad &\Rightarrow \quad M_y(x,y) = \cos(y) - \sin(x) \\ N(x,y) = \cos(x) + x\cos(y) - y \quad &\Rightarrow \quad N_x(x,y) = \cos(y) - \sin(x) \end{aligned}$$

es evidente que $M_y(x,y) = N_x(x,y)$, entonces la ecuación diferencial es exacta.

En ejemplos anteriores se determinó que ciertas ecuaciones diferenciales cumplen con la condición de ser exacta, y otras no. Ahora nos planteamos interrogantes como

¿Se puede convertir una ED no exacta en exacta?¿ Qué elemento la transforma en exacta?¿ Cómo se obtiene?

Las respuestas a interrogantes de estas naturalezas están en la sección siguiente.

Factores Integrantes

Definición 1.2.7: Definición

Una función $\mu(x,y)$ distinta de la función nula, se llama factor integrante de la ecuación diferencial 1.37 si la ecuación diferencial

$$\mu M + \mu N y' = 0 \tag{1.43}$$

es exacta.

Si $u(x,y) = c$ es una solución de la ecuación 1.37, entonces y' de la ecuación 1.37 y $u_x + u_y y' = 0$ son las mismas ecuaciones, si

$$\frac{1}{M(x,y)} u_x(x,y) = \frac{1}{N(x,y)} u_y(x,y) = \mu(x,y) \tag{1.44}$$

Donde $\mu(x, y)$ es una función de x e y. Así, tenemos que

$$\mu(M + Ny') = u_x + u_y y' = \frac{du}{dx}$$

y por lo tanto la ecuación 1.43 es exacta, y el factor integrante está dado por la expresión 1.44.
Además, si $\phi(u)$ es una función continua de u, entonces

$$\mu\phi(u)(M + Ny') = \phi(u)\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\int^u \phi(s)ds$$

Lo cual también $\mu\phi(u)$ es un factor integrante de la ecuación 1.37. En ese sentido se presenta en siguiente teorema.

Teorema 1.2.2: Ecuación Diferencial Exacta

Si la ecuación diferencial 1.37 tiene una solución de la forma $u(x, y) = c$, entonces admite un número infinito de factores integrantes.

Sabemos que la función $\mu(x, y)$ es un factor integrante de la ecuación 1.37 si la ecuación 1.43 es exacta, es decir, se verifica que

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x$$

Derivando la expresión anterior obtenemos la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$\mu M_y + M\mu_y \quad = \quad \mu N_x + N\mu_x$$

Que es equivalente a

$$N\mu_x - M\mu_y \quad = \quad \mu(M_y - N_x) \tag{1.45}$$

la solución no trivial de 1.45 nos da un factor integrante de la ecuación 1.37.
Asumiendo que el factor integrante es de la forma $\mu(x, y) = X(x)Y(y)$, tenemos de 1.45

$$N(x, y)\frac{dX}{dx}Y(y) - M(x, y)\frac{dY}{dy}X(x) = X(x)Y(y)(M_y - N_x)$$

Dividiendo por $\mu(x, y) = X(x)Y(y)$ y simplificando

$$\frac{N(x, y)}{dx}\frac{dX}{X(x)} - \frac{M(x, y)}{dy}\frac{dY}{dY} = M_y - N_x$$

Si $M_y - N_x = Ng(x) - Mh(y)$, de la expresión anterior tenemos que

$$\frac{N(x, y)}{dx}\frac{dX}{X(x)} - \frac{M(x, y)}{dy}\frac{dY}{dY} = Ng(x) - Mh(y)$$

Lo cual nos lleva a resolver las siguientes ecuaciones por viriables separables

$$\frac{N(x, y)}{dx}\frac{dX}{X(x)} = Ng(x) \quad \text{y} \quad \frac{M(x, y)}{dy}\frac{dY}{dY} = Mh(y)$$

Simplificando

$$\frac{dX}{X(x)} = g(x)dx \quad \text{y} \quad \frac{M(x,y)}{dy}\frac{dY}{dY} = h(y)dy$$

Integrando obtenemos que

$$X(x) = e^{\int g(x)dx} \quad \text{y} \quad Y(y) = e^{\int h(y)dy} \tag{1.46}$$

Factor integrante de la forma $\mu(x)$

Si en la expresión 1.45 dividimos por $\mu N(x,y)$

$$\frac{1}{\mu}\left(\mu_x - \frac{M}{N}\mu_y\right) = \frac{M_y - N_x}{N} \tag{1.47}$$

Ahora si

$$\frac{M_y - N_x}{N}$$

Entonces nuestra ecuación admite factor integrante que depende solo de x. En efecto si $\mu = \mu(x)$ la ecuación 1.47 queda de la forma

$$\frac{\mu_x}{\mu(x)} = \frac{M_y - N_x}{N} = \phi(x) \tag{1.48}$$

Integrando, tenemos

$$\ln(\mu(x)) = \int \phi(x)dx$$

De manera que llegamos a la fórmula para obtener el factor integrante

$$\mu(x) = e^{\int \phi(x)dx}$$

Acontinuación presentamos ejemplos utilizando dicho factor integrante.

Ejemplo 1.2.19. Resolver la ecuación diferencial

$$(x - y^2) + 2xyy' = 0 \tag{1.49}$$

Solución 1.2.19 *Sabemos que* $M(x,y) = x - y^2$ *y* $N(x,y) = 2xy$
De manera que $M_y(x,y) = -2y$ *y* $N_x(x,y) = 2y$ *y la ecuación diferencial no es exaacta. Ahora determinaremos el factor integrante de la forma*

$$\phi(x) = \frac{M_y - N_x}{N} = \frac{-2y - 2y}{2xy} = \frac{-4y}{2xy} = \frac{-2}{x}$$

Así el factor integrante está dado por

$$\mu(x) = e^{\int \frac{-2}{x}dx} = e^{\ln(x^{-2})}$$

Por propiedad de los logarítmos se tiene que

$$\mu(x) = x^{-2}$$

Multiplicando la ecuación diferencial 1.49 por el factor integrante $\mu(x) = x^{-2}$*, tenemos*

$$(x^{-1} - x^{-2}y^2) + 2x^{-1}yy' = 0 \tag{1.50}$$

De donde

$$\begin{aligned} M(x,y) = x^{-1} - x^{-2}y^2 \quad &\Rightarrow \quad M_y(x,y) = -2x^{-2}y \\ N(x,y) = 2x^{-1}y \quad &\Rightarrow \quad N_x(x,y) = -2x^{-2}y \end{aligned}$$

Como $M_y(x,y) = N_x(x,y)$ *ecuación 1.50 es exacta.*
Entonces existe una función $u(x,y)$ *tal que*

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int 2x^{-1}y dy \\ u(x,y) &= x^{-1}y^2 + g(x) \end{aligned}$$

Derivado con respecto a x *e igualando a la función* $M(x,y)$

$$u_x(x,y) = -2x^{-2}y^2 + g'(x) = x^{-1} - x^{-2}y^2$$

De donde

$$g'(x) = x^{-1} + 2x^{-2}y^2$$

Integrando ahora respecto a x

$$g(x) = \ln(x) - 2x^{-1}y^2$$

De manera que la solución es

$$u(x,y) = x^{-1}y^2 + \ln(x) - 2x^{-1}y^2 = c$$

Simplificando

$$u(x,y) = y^2 - x\ln(x) = cx$$

Factor integrante de la forma $\mu(y)$

Si en la expresión 1.45 dividimos por $-\mu M(x,y)$

$$\frac{1}{\mu}\left(\frac{-N}{M}\mu_x + \mu_y\right) = \frac{M_y - N_x}{-M} \tag{1.51}$$

Si

$$\frac{M_y - N_x}{-M} = \phi(y)$$

Nuestra ecuación admite factor integrante que depende solo de y*. Así* $\mu = \mu(y)$ *y la ecuación 1.51 queda de la forma*

$$\frac{\mu_y}{\mu(y)} = \frac{M_y - N_x}{-M} = \phi(y)$$

Integrando, tenemos

$$\ln(\mu(y)) = \int \phi(y)dy$$

De manera que llegamos a

$$\mu(y) = e^{\int \phi(y)dy} \tag{1.52}$$

Ejemplo 1.2.20. Resolver la ecuación diferencial

$$y + (y^2 - x)y' = 0 \tag{1.53}$$

Solución 1.2.20 *En primer lugar verificamos si la ecuación es exacta*

$$\begin{aligned} M(x,y) = y &\quad \Rightarrow \quad M_y(x,y) = 1 \\ N(x,y) = y^2 - x &\quad \Rightarrow \quad N_x(x,y) = -1 \end{aligned}$$

Como $M_y(x,y) \neq N_x(x,y)$ la ecuación no es exacta. Ahora procedemos a determinar un factor $\mu(y)$ que convierta la ecuación en exacta.

$$\begin{aligned} \phi(y) &= \frac{M_y - N_x}{-M} \\ \phi(y) &= \frac{1-(-1)}{y} \end{aligned}$$

simplificando

$$\phi(y) = \frac{-2}{y}$$

Así de 1.52

$$\begin{aligned} \mu(y) &= e^{\int \frac{-2}{y}dy} \\ \mu(y) &= e^{\ln(y)^{-2}} \end{aligned}$$

Aplicando propiedad de los logarítmos

$$\mu(y) = y^{-2}$$

Multiplicando la ecuación 1.53 por el factor integrante $\mu(y) = y^{-2}$, tenemos

$$y^{-1} + (1 - xy^{-2})y' = 0 \tag{1.54}$$

De la ecuación 1.54 tenemos que

$$\begin{aligned} M(x,y) = y^{-1} &\quad \Rightarrow \quad M_y(x,y) = -y^{-2} \\ N(x,y) = 1 - xy^{-2} &\quad \Rightarrow \quad N_x = -y^{-2} \end{aligned}$$

La ecuación 1.54 es exacta, así que

$$u(x,y) = \int y^{-1}dx$$

$$u(x,y) = y^{-1}x + g(y)$$

Derivando con respecto a y e igualando N(x, y)

$$u_y(x,y) = -y^{-2}x + g'(y) = 1 - xy^{-2}$$

Despejando g′(x) y simplificando

$$g'(y) = 1$$

Ahora integramos y obtenemos

$$g(y) = y$$

Así la solución es

$$u(x,y) = y + xy^{-1} = c$$

Simplificando

$$y^2 + x = cy$$

Factor integrante de la forma $\mu(xy)$

Sea $\mu(x,y) = h(xy)$, calculando las derivadas parciales, tenemos que

$$\begin{aligned} \mu_x &= yh'(xy) \\ \mu_y(x,y) &= xh'(xy) \end{aligned}$$

La ecuación 1.45 toma la siguiente forma

$$yNh'(xy) - xMh'(xy) = h(xy)(M_y - N_x)$$

Extrayendo factor común

$$h'(xy)(yN - xM) = h(xy)(M_y - N_x)$$

Multiplicando por $\dfrac{1}{h(xy)(yN - xM)}$

$$\frac{h'(xy)}{h(xy)} = \frac{M_y - N_x}{yN - xM}$$

Vamos a suponer que

$$\frac{M_y - N_x}{yN - xM} = \phi(xy) \tag{1.55}$$

depende solamente de xy, haciendo $\nu = xy$, tenemos

$$\frac{h'(\nu)}{h(\nu)} = \phi(\nu)$$

Multiplicando por $d\nu$ y luego integrando, llegamos a la siguiente expresión

$$\ln(h(\nu)) = \int \phi(\nu)d\nu$$

Así

$$\mu(\nu) \quad = \quad h(\nu) = e^{\displaystyle\int \phi(\nu)d\nu} \tag{1.56}$$

Ejemplo 1.2.21. Utiliza el factor de la forma $\mu(xy)$ para resolver la ecuación diferencial

$$y + x(1 - x^2y^2 - x)y' = 0 \tag{1.57}$$

Solución 1.2.21 *Note que*

$$\begin{aligned} M(x,y) &= y & M_y(x,y) = 1 \\ N(x,y) &= x\left(1 - 3x^2y^2\right) & N_x(x,y) = 1 - 9x^2y^2 \end{aligned}$$

lo que evidencia que la ecuación 1.57 no es exacta. Ahora vamos a calcular la función $\phi(xy)$ con la expresión (1.55)

$$\phi(xy) \quad = \quad \frac{M_y - N_x}{yN - xM}$$

Reemplazando tenemos

$$\phi(xy) \quad = \quad \frac{1 - 1 + 9x^2y^2}{xy - 3x^3y^3 - xy}$$

simplicando llevamos a

$$\phi(xy) \quad = \quad \frac{-3}{xy}$$

Utilizando la expresión (1.56) con el resultado anterior

$$\mu \quad = \quad e^{\displaystyle\int \frac{-3}{v}dv} = e^{\ln(v^{-3})} = v^{-3}$$

Por lo tanto

$$\mu(xy) \quad = \quad (xy)^{-3}$$

Ahora multiplicamos la ecuación 1.57 por el factor integrante $\mu(xy) = (xy)^{-3}$ y obtenemos

$$x^{-3}y^{-2} + x^{-2}y^{-3}(1 - 3x^2y^2)y' \quad = \quad 0$$

Simplicando llegamos

$$x^{-3}y^{-2} + (x^{-2}y^{-3} - 3y^{-1})y' \quad = \quad 0 \tag{1.58}$$

de 1.58 tenemos que

$$\begin{aligned} M(x,y) &= x^{-3}y^{-2} & M_y(x,y) = -2x^{-3}y^{-3} \\ N(x,y) &= x^{-2}y^{-3} - 3y^{-1} & N_x(x,y) = -2x^{-3}y^{-3} \end{aligned}$$

Se concluye que la ecuación 1.58 es exacta. Si escogemos la función $N(x,y)$ e integramos, tenemos

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int (x^{-2}y^{-3} - 3y^{-1})dy \\ u(x,y) &= \frac{-x^{-2}y^{-2}}{2} - 3\ln(y) + g(x) \end{aligned}$$

Ahora derivamos la función $u(x,y)$ respecto a la variable x e igualando a $M(x,y)$

$$u_x(x,y) = x^{-3}y^{-2} + g'(x) = x^{-3}y^{-3}$$

De donde

$$g'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(x) = k$$

Por lo tanto

$$u_x(x,y) = \frac{-x^{-2}y^{-2}}{2} - 3\ln(y) = c$$

simplificando llegamos

$$y^6 = c\,e^{-x^2y^2}$$

Factor integrante de la forma $\mu\left(\frac{x}{y}\right)$

Sea $\mu(x,y) = h\left(\frac{x}{y}\right)$ calculando las derivadas parciales

$$\begin{aligned} \mu_x(x,y) &= \frac{h'\left(\frac{x}{y}\right)}{y} \\ \mu_y(x,y) &= \frac{-xh'\left(\frac{x}{y}\right)}{y^2} \end{aligned}$$

Reemplazando las derivadas obtenidas en (1.45)

$$\frac{N}{y}h'\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{xM}{y^2}h'\left(\frac{x}{y}\right) = h\left(\frac{x}{y}\right)(M_y - N_x)$$

Tomando factor común $h'\left(\frac{x}{y}\right)$ en el lado izquierdo

$$h'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{yN + xM}{y^2}\right) = h\left(\frac{x}{y}\right)(M_y - N_x)$$

Multiplicando la expresión anterior por $\dfrac{\frac{yN+xM}{y^2}}{h\left(\frac{x}{y}\right)}$ obtenemos

$$\frac{h'\left(\frac{x}{y}\right)}{h\left(\frac{x}{y}\right)} = \frac{y^2\,(M - y - N_x)}{yN + xM}$$

Ahora suponiendo que

$$\frac{y^2\left(M_y - N_x\right)}{yN + xM} = \phi\left(\frac{x}{y}\right) \tag{1.59}$$

depende solo de $\left(\frac{x}{y}\right)$ *y tomando el parámetro* $\nu = \frac{x}{y}$, *tenemos*

$$\frac{h'(\nu)}{h(\nu)} = \phi(\nu)$$

Integrando

$$\begin{aligned} \int \frac{h'(\nu)}{h(\nu)} d\nu &= \int \phi(\nu)\, d\nu \\ \ln\left(h(\nu)\right) &= \int \phi(\nu)\, d\nu \end{aligned}$$

Por propiedad de los logarítmos tenemos

$$\mu(\nu) = h(\nu) = e^{\int \phi(\nu)\, d\nu}$$

Ejemplo 1.2.22. Resolver la ecuación diferencial

utilizando factor integrante de la forma $\mu\left(\frac{x}{y}\right)$

Solución 1.2.22 Factor integrante de la forma $\mu(x-y)$

Sea $\mu(x,y) = h(x-y)$ *calculando las derivadas parciales*

$$\begin{aligned} \mu_x(x,y) &= h'(x-y) \\ \mu_y(x,y) &= -h'(x-y) \end{aligned}$$

Reemplazando las derivadas obtenidas en (1.45)

$$Nh'(x-y) + Mh'(x-y) = h(x-y)\left(M_y - N_x\right)$$

Tomando factor común $h'(x-y)$ *en el lado izquierdo*

$$h'(x-y)(N+M) = h(x-y)\left(M_y - N_x\right)$$

Multiplicando la expresión anterior por $\frac{1}{h(x-y)(N+M)}$ *obtenemos*

$$\frac{h'(x-y)}{h(x-y)} = \frac{M_y - N_x}{N+M}$$

Ahora suponiendo que

$$\frac{M_y - N_x}{N+M} = \phi(x-y) \tag{1.60}$$

depende solo de $(x-y)$ *y tomando el parámetro* $\nu = x-y$, *tenemos*

$$\frac{h'(\nu)}{h(\nu)} = \phi(\nu)$$

Integrando

$$\begin{aligned} \int \frac{h'(\nu)}{h(\nu)} d\nu &= \int \phi(\nu)\, d\nu \\ \ln(h(\nu)) &= \int \phi(\nu)\, d\nu \end{aligned}$$

Por propiedad de los logarítmos tenemos

$$\mu(\nu) = h(\nu) = e^{\int \phi(\nu)\, d\nu}$$

Ejemplo 1.2.23. Resolver la ecuación diferencial

utilizando factor integrante de la forma $\mu(x-y)$

Solución 1.2.23 Factor integrante de la forma $\mu(x^2+y^2)$

Sea $\mu(x,y) = h(x^2+y^2)$ *calculando las derivadas parciales*

$$\begin{aligned} \mu_x(x,y) &= 2xh'(x^2+y^2) \\ \mu_y(x,y) &= 2yh'(x^2+y^2) \end{aligned}$$

Reemplazando las derivadas obtenidas en 1.45

$$N\left(2xh'(x^2+y^2)\right) - M\left(2yh'(x^2+y^2)\right) = h\left(x^2+y^2\right)(M_y - N_x)$$

Por factor común

$$2h'(x^2+y^2)(xN-yM) = h(x^2+y^2)(M_y-N_x)$$

Si multiplicamos por la expresión $\dfrac{1}{2h(x^2+y^2)(xN-yM)}$ *tenemos*

$$\frac{h'\left(x^2+y^2\right)}{h\left(x^2+y^2\right)} = \frac{M_y-N_x}{2(xN-yM)}$$

Suponiendo que

$$\frac{M_y-N_x}{2(xN-yM)} = \phi(x^2+y^2) \tag{1.61}$$

depende solo de $\left(x^2+y^2\right)$ *y tomando el parámetro* $\nu = x^2+y^2$, *tenemos*

$$\frac{h'(\nu)}{h(\nu)} = \phi(\nu)$$

Integrando

$$ln(h(\nu)) = \int \phi(\nu)\, d\nu$$

Simplificando obtenemos la expresión para el factor integrante $\mu\left(x^2+y^2\right)$

$$\mu(\nu) = h(\nu) = e^{\int \phi(\nu)\, d\nu} \tag{1.62}$$

Ejemplo 1.2.24. Resolver la ecuación diferencial

$$(x + x^4 + 2x^2y^2 + y^4) + yy' = 0 \tag{1.63}$$

utilizando factor integrante de la forma $\mu(x^2 + y^2)$

Solución 1.2.24 *De 1.63 tenemos*

$$\begin{aligned} M(x,y) &= x + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 & M_y(x,y) &= 4x^2y + 4y^3 \\ N(x,y) &= y & N_x(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

ya que $M_y(x,y) \neq N_x(x,y)$ la ecuación 1.63 no es exacta.
Ahora vamos a calcular $\phi(x^2 + y^2)$ con la expresión (1.61)

$$\phi(x^2 + y^2) = \frac{M_y - N_x}{2(xN - yM)} = \frac{4y(x^2 + y^2)}{2(xy - xy - y(x^2 + y^2)^2)}$$

Simplicando

$$\phi(x^2 + y^2) = \frac{4y(x^2 + y^2)}{-2y(x^2 + y^2)^2}$$

De donde

$$\phi(\nu) = \frac{-2\nu}{\nu^2} = \frac{-2}{\nu}$$

Así el factor integrante es

$$\mu(\nu) = e^{\int \frac{-2}{\nu} d\nu}$$

Resolviendo la integral y aplicando propiedad de los logarítmos

$$\mu(\nu) = \nu^{-2} = (x^2 + y^2)^{-2}$$

Multiplicando la ecuación 1.63 por $\mu(\nu)$ llegamos a la expresión

$$(x^2 + y^2)^{-2}(x + x^4 + 2x^2y^2 + y^4) + y(x^2 + y^2)^{-2}y' = 0$$

Simplificando

$$x(x^2 + y^2)^{-2} + 1 + y(x^2 + y^2)^{-2}y' = 0 \tag{1.64}$$

De 1.64 tenemos que

$$\begin{aligned} M(x,y) &= x(x^2 + y^2)^{-2}) + 1 & M_y(x,y) &= -4xy(x^2 + y^2)^{-3} \\ N(x,y) &= y(x^2 + y^2)^{-2} & N_x(x,y) &= -4xy(x^2 + y^2)^{-3} \end{aligned}$$

Así la ecuación 1.64 es exacta. Ahora obtendremos $u(x,y)$ integrando $N(x,y)$

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int y(x^2 + y^2)^{-2} dy \\ u(x,y) &= \frac{-(x^2 + y^2)^{-1}}{2} + g(x) \end{aligned}$$

Derivando $u(x,y)$ con respecto a x e igualando a $M(x,y)$

$$u_x(x,y) = x(x^2+y^2)^{-2} + g'(x) = x(x^2+y^2)^{-2}) + 1$$

Tenemos que

$$g'(x) = 1$$

Integrando

$$g(x) = x$$

Así la función $u(x,y)$ toma la forma

$$u(x,y) = \frac{-(x^2+y^2)^{-1}}{2} + x = c$$

Multiplicando por $-2(x^2+y^2)$ y simplificando

$$(x^2+y^2)(c+2x) = 1$$

que es la solución de 1.63.

Dar formato a esta tabla **Tabla de Factores Integrantes**

$\boldsymbol{v}$	x	y	XY	x − y	$\frac{x}{y}$	x^2+y^2
$\boldsymbol{\phi(v)}$	$\frac{M_y-N_x}{N}$	$\frac{N_x-M_y}{M}$	$\frac{M_y-N_x}{yN-xM}$	$\frac{M_y-N_x}{N+M}$	$\frac{(M_y-N_x)\,y^2}{yN+xM}$	$\frac{M_y-N_x}{2(xN-yM)}$

1.2.6. Ecuaciones Diferenciales Lineales de Primer Orden

En esta sección introduciremos las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, en un primer momento queremos saber si

¿ Se resuelven estas ecuaciones por el método de las exactas? Si admiten un factor integrante**¿ Cómo se obtiene el factor integrantes?**. Antes de responder estas inquietudes vamos a presentar la definición EDLPO(leyenda).

Definición 1.2.8: Definición

Si en la ecuación diferencial (1.5) $f(x,y) = q(x) - p(x)y$, entonces la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = q(x) - p(x)y \tag{1.65}$$

es lineal de primer orden.

En la definición anterior las funciones $p(x)$ y $q(x)$ son continuas en algún intervalo S.

Técnica de resolución

Si queremos aplicar el método de las ecuaciones exactas a la ecuación (1.65) debemos verificar que la ecuación satisface las condiciones dadas en el teorema (1.2.1), es decir

$$\begin{aligned} M(x,y) &= p(x)y - q(x) \qquad & M_y(x,y) = p(x) \\ N(x,y) &= 1 \qquad & N_x(x,y) = 0 \end{aligned}$$

ya que la ecuación (1.65) no cumple con las condiciones especificadas en el teorema (1.2.1) nos interesa determinar un factor integrante que la convierta en una ecuación lineal exacta.
Dado que $M_y(x,y)$ y $N_y(x,y)$ depende únicamente de la variable x, vamos a determinar un factor integrante de la forma $\mu(x)$, aplicando la expresión (1.48)

$$\phi(x) = \frac{p(x)-0}{1} = p(x)$$

por la expresión (1.48) el factor integrante es

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} \tag{1.66}$$

Muttiplicando la ecuación (1.65) por el factor integrante obtenido en (1.66)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\int p(x)dx}[q(x)-p(x)y]}{e^{\int p(x)dx}} \tag{1.67}$$

de modo que

$$\begin{aligned} M(x,y) &= e^{\int p(x)dx}[p(x)y - q(x)] \qquad & N(x,y) = e^{\int p(x)dx} \\ M_y(x,y) &= p(x)e^{\int p(x)dx} \qquad & N_x(x,y) = p(x)e^{\int p(x)dx} \end{aligned}$$

Con lo anteriormente desarrollado la ecuación (1.65) al multiplicarla por (1.66) se convierte en una ecuación diferencial exacta dada expresada en (1.67) la cual se puede resolver el método explicado en (1.2.2).

Ejemplo 1.2.25. Encuentra la solución general de

Encuentra la solución general de

$$y' - (\cot(x))y = 2x\sin(x)$$

utilizando el proceso desarrollado anteriormente

Solución 1.2.25 *Expresando la ecuación diferencial en la forma normal*

$$y' = 2x\sin(x) + \cot(x)y$$

por la expresión (1.66) tenemos

$$\mu(x) \quad = \quad e^{-\int \cot(x)dx}$$

Resolviendo la integral

$$\int \cot(x)dx \quad = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx = \quad \ln(\sin(x))$$

de manera que el factor integrante nos da

$$\mu(x) \quad = e^{-\ln(\sin(x))} = (\sin(x))^{-1} = \quad \csc(x)$$

Ahora vamos a multiplicar la ecuación diferencial por el factor integrante anterior

$$y' \quad = \quad \frac{\csc(x)\left[2x\sin(x) + \cot(x)y\right]}{\csc(x)}$$

Simplificando

$$y' \quad = \quad \frac{2x + \csc(x)\cot(x)y}{\csc(x)}$$

de la expresión anterior tenemos

$$\begin{aligned} M(x,y) &= -\csc(x)\cot(x)y - 2x \\ N(x,y) &= \csc(x) \end{aligned}$$

como la ecuación es exacta, escogemos a $M(x,y)$ para calcular a $u(x,y)$

$$u(x,y) \quad = \quad \int \left[-\csc(x)\cot(x)y - 2x\right]dx$$

$$u(x,y) \quad = \quad \csc(x)y - x^2 + g(y)$$

Derivando la función anterior respecto a y e igualando a $N(x,y)$

$$u_y(x,y) \quad = \quad \csc(x) + g'(y) = \csc(x)$$

Lo que implica que

$$g(y) \quad = \quad c$$

por lo que

$$\csc(x)y - x^2 \quad = \quad k$$

Despejando

$$\begin{aligned} \csc(x)y &= k + x^2 \\ y(x) &= k\sin(x) + x^2\sin(x) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.26. Obtener la solución general de

$$y' + y + x + x^2 + x^3 = 0$$

Solución 1.2.26 *Expresando la ecuación en la forma de (1.65)*

$$y' = -\left(x^3 + x^2 + x\right) - y$$

donde $p(x) = 1$ *y el factor integrante es*

$$\mu(x) = e^{\int dx} = e^x$$

Ahora multiplicamos la ED por el factor integrante

$$y' = \frac{-e^x\left(x^3 + x^2 + x\right) - e^x y}{e^x}$$

de esta expresión obtenemos las funciones $M(x,y)$ *y* $N(x,y)$ *estan dada por*

$$M(x,y) = e^x\left(x^3 + x^2 + x\right) + e^x y \qquad N(x,y) = e^x$$
$$M_y(x,y) = e^x \qquad N_x(x,y) = e^x$$

lo cual se verifica que la ecuación es exacta, asi la función $u(x,y)$ *es*

$$u(x,y) = \int e^x dy$$

$$u(x,y) = e^x y + g(x)$$

derivando con respecto a x *e igualando a* $M(x,y)$

$$u_x(x,y) = e^x y + g'(x) = e^x\left(x^3 + x^2 + x\right) + e^x y$$

implica que

$$g'(x) = e^x\left(x^3 + x^2 + x\right)$$

asi

$$g(x) = \int\left(x^3 e^x + x^2 e^x + x e^x\right) dx$$

Por integración por partes

$$g(x) = e^x\left(x^3 - 2x^2 + 5x - 5\right)$$

reemplazando en la función $u(x,y)$

$$u(x,y) = e^x\left[y + x^3 - 2x^2 + 5x - 5\right] = c$$

Despejando la variable y

$$\begin{aligned} y + x^3 - 2x^2 + 5x - 5 &= ce^{-x} \\ y &= ce^{-x} - x^3 + 2x^2 - 5x + 5 \end{aligned}$$

1.2.7. Ecuaciones que se reducen a ecuaciones lineales

Bernoulli
1654-1705

$$y' + p(x)y = g(x)y^n$$

Ciertas ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden pueden reducirse a ecuaciones lineales con un apropiado cambio de variable, tal es el caso de la ecuación de **Bernoulli** y la de **Riccati**.
Esta parte es para poner en un cuadro de historia

La ecuación de Bernoulli recibe dicho nombre en honor al matemático suizo **Jacob Bernoulli**, posterior a Bernoulli la ecuación fue estudiada, por **Gottfried Leibniz** en 1693 y por **Johann Bernoulli** en 1697.
La ecuación de **Riccati** es una ecuación diferencial ordinaria, no lineal de primer orden, inventada y desarrollada en el siglo $XVIII$ por el matemático italiano **Jacopo Francesco Riccati**, con el fin de analizar la hidrodinámica.
La ecuación de Riccati convocó el esfuerzo de varios matemáticos: **Leibniz, Goldbach, Juan Bernoulli y sus hijos Nicolás y Daniel Bernoulli, y posteriormente, a Euler.**

---

preguntar si la definicion de la ecuacion de bernoulli y ricati de obtendran de la expresion (1.5)

Bernoulli

La ecuación diferencial de Bernoulli, es una ecuación diferencial no lineal de primer orden de la forma

$$p_0(x)y'(x) + p_1(x)y(x) = r(x)y^n(x); \quad n \neq 0, 1 \tag{1.68}$$

Riccati
1676-1754

$y'(x) = a(x)\,y^2(x) + b(x)\,y(x) + c(x)$

(b) Jacopo Riccati matemático italiano conocido por su trabajo en ecuaciones diferenciales y cálculo de variaciones

Figura 1.22: Jacob Bernoulli y Jacopo Riccati

Donde las funciones $p_0(x), p_1(x)$ y $r(x)$ son continuas en un intervalo abierto y $n \in \mathbb{R}$.
Antes de explicar el método de resolver la ecuación de **Bernoulli**, explicaremos a que se reduce la ecuación 1.68 para los valores excluidos de n.

- Si $n = 0$, la ecuación 1.68 se transforma en una ecuación diferencial lineal, cuyo método de resolución se abordó en (1.2.6).
- Si $n = 1$ transforma la ecuación de Bernoulli en una ecuación diferencial separable, la cual explicamos el método en la sección 1.2.2.

Dar formato a esta parte de arriba

Método de resolución

Realizando el cambio de variable

$$w(x) \quad = \quad y^{1-n}(x) \tag{1.69}$$

si derivamos tenemos

$$w'(x) \quad = \quad (1-n)y^{-n}(x)y'(x)$$

Mutiplicando la ecuación de Bernoulli por $(1-n)y^{-n}(x)$

$$(1-n)y^{-n}(x)p_0(x)y'(x) + (1-n)p_1(x)y^{1-n}(x) \quad = \quad (1-n)r(x)$$

Reemplazando la derivada

$$p_0(x)w'(x) + (1-n)p_1(x)w(x) = (1-n)r(x) \tag{1.70}$$

La ecuación diferencial anterior es Lineal.

Ejemplo 1.2.27. Utiliza la sustitución dada en (1.69) para resolver la siguiente ecuación

$$\frac{dy}{dx} = y\left(xy^3 - 1\right)$$

Solución 1.2.27 *En primer lugar expresamos la ecuación dada en la forma (1.68)*

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= xy^4 - y \\ \frac{dy}{dx} + y &= xy^4 \end{aligned}$$

De la expresión anterior se tiene que $p_0(x) = 1, p_1(x) = 1, r(x) = x$ *y* $n = 4$ *, por lo cual la ecuación es de Bernoulli.*
De la expresión (1.70) tenemos

$$w'(x) - 3w(x) = -3x$$

Mutiplicando por el factor integrante e^{-3x} *llegamos*

$$e^{-3x}w'(x) - 3e^{-3x}w(x) = -3xe^{-3x}$$

Observando el lado izquierdo notamos que es la derivada de un producto, asi la expresión se puede escribir como

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-3x}w(x)\right] = -3xe^{-3x}$$

Aplicando diferencial e integrando

$$\begin{aligned} e^{-3x}w(x) &= -\int 3xe^{-3x}dx + c \\ w(x) &= -e^{3x}\int 3xe^{-3x}dx + ce^{3x} \end{aligned}$$

Resolviendo la integral obtenemos

$$w(x) = ce^{3x} + x + \frac{1}{3}$$

Expresando la solución en término de la variable y

$$y(x) = \left(ce^{3x} + x + \frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

Ejemplo 1.2.28. Utiliza la sustición adecuada para resolver la ecuación de Bernoulli dada por

$$\frac{dy}{dx} - y = e^x y^2$$

Solución 1.2.28 *Comparando la ecuación anterior con la ecuación (1.68), tenemos que* $p_0(x) = 1,\ p_1(x) = -1,\ r(x) = e^x,\ n = 2$. *Reemplazando en la expresión (1.70)*

$$w'(x) + w(x) \quad = \quad -e^x$$

El factor integrante es $\mu(x) = x$

$$\begin{aligned} e^x w'(x) + e^x w(x) &= -e^{2x} \\ \frac{d}{dx}\left[e^x w(x)\right] &= -e^{2x} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta el diferencial e integrando tenemos

$$\begin{aligned} e^x w(x) &= -\int e^{2x} dx + c \\ u(x) &= ce^{-x} - \int e^{2x} dx \\ u(x) &= ce^{-x} - \frac{1}{2}e^{2x} \end{aligned}$$

Expresando la variable u *en término de* y *es*

$$y(x) = \frac{1}{ce^{-x} - \frac{1}{2}e^{2x}}$$

Ecuación de Ricatti

$$u'(x) + p_1(x)u(x) + p_2(x) + \overbrace{u^2(x)}^{\text{Término no lineal}} =$$

Definición 1.2.9: Definición

La ecuación diferencial de **Riccati** está dada por la expresión

$$u'(x) + p_1(x)u(x) + p_2(x) + u^2(x) = 0 \tag{1.71}$$

Como se puede verificar la ecuación de **Riccati** no es lineal, en ese sentido nos interesa convertirla en una ecuación lineal. Cabe resaltar que la ecuación de **Riccati** dada 1.2.9 se puede resolver conociendo previamente una solución la cual supondremos que es de la forma $y = u_1(x)$. La ecuación de **Riccati** podemos transformarla en la ecuación de **Bernoulli** o en una ecuación diferencial lineal de acuerdo al cambio de variable utilizado. A continuación vamos a presentar ambos casos

- **Ecuación de Ricati transformada a la ecuación de Bernoulli**
  Para transformar la ecuación de Ricati a la de Bernoulli tomamos la siguiente sustitución
  $$y(x) = z(x) + u_1(x) \tag{1.72}$$
  Dónde $z(x)$ es una función a determinar. Derivando la solución general
  $$y'(x) = z'(x) + u_1'(x)$$
  Sustituyendo en la ecuación (1.2.9)
  $$z'(x) + u_1'(x) + p_1(x)\left(z(x) + u_1(x)\right) + p_2(x) + \left(z(x) + u_1(x)\right)^2 \quad = \quad 0$$

Desarrollando

$$z'(x) + u_1'(x) + p_1(x)z(x) + p_1(x)u_1(x) + p_2(x) + z^2(x) + 2z(x)u_1(x) + u_1^2(x) = 0$$

Como $u_1(x)$ es solución, tenemos

$$u_1'(x) + p_1(x)u_1(x) + p_2(x) + u_1^2(x) = 0$$

Lo que implica que

$$z'(x) + p_1(x)z(x) + z^2(x) + 2z(x)u_1(x) = 0$$

Expresando la ecuación anterior como una ecuación de `Bernoulli` para $n = 2$ y $r(x) = -1$

$$z'(x) + (p_1(x) + 2u_1(x))\, z(x) = -z^2(x) \qquad (1.73)$$

- **Ecuación de Ricati transformada a una ecuación lineal**
  Ahora si nuestro interés es expresar la ecuación de Riccati dada en **??** en una ecuación lineal, Ahora tomaremos la sustitución

$$u(x) = u_1(x) + z^{-1}(x) \qquad (1.74)$$

Al igual que en la sustitución anterior $u_1(x)$ es solución de 1.2.9 y $z(x)$ es función desconocida. Derivando se tiene

$$u'(x) = u_1'(x) - z^{-2}(x)z'(x)$$

Reemplazando en la ecuación (1.2.9)

$$u_1'(x) - z^{-2}(x)z'(x) + p_1(x)\left[u_1(x) + z^{-1}(x)\right] + p_2(x) + \left(u_1(x) + z^{-1}(x)\right)^2 = 0$$

Por distributiva y desarrollando el binomio

$$u_1'(x) - z^{-2}(x)z'(x) + p_1(x)u_1(x) + p_1(x)z^{-1}(x) + p_2(x) + u_1^2(x) + 2u_1(x)z^{-1}(x) + z^{-2}(x) = 0$$

Como $u_1'(x)$ es solución la expresión anterior se reduce a

$$-z^{-2}(x)z'(x) + p_1(x)z^{-1}(x) + 2u_1(x)z^{-1}(x) + z^{-2}(x) = 0$$

Como $z(x) \neq 0$ tenemos

$$z'(x) - p_1(x)z(x) - 2u_1(x)z(x) - 1 = 0$$

Por factor común se puede escribir también como

$$z'(x) - (p_1(x) + 2u_1(x))\, z(x) - 1 = 0 \qquad (1.75)$$

Que es una ecuación lineal.

Ejemplo 1.2.29. Resuelva la ecuación de Ricatti

$$y' = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}y + y^2$$

Transformandola en una ecuación lineal, donde $y_1 = \dfrac{2}{x}$ es una solución de la ecuación.

Solución 1.2.29 *Utilizando la sustitución dada en (1.74), tenemos* $y(x) = \frac{2}{x} + u^{-1}(x)$ *transformando la ecuación en*

$$u'(x) - \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{x}\right) u(x) - 1 = 0$$

$$u'(x) - \frac{5}{x} u(x) = 1$$

Multiplicando por el factor integrante $\mu(x) = x^{-5}$

$$\begin{aligned} x^{-5}u'(x) - 5x^{-6}u(x) &= x^{-6} \\ \frac{d}{dx}\left[x^{-5}u(x)\right] &= x^{-5} \end{aligned}$$

Expresando en la forma diferencial e integrando

$$\begin{aligned} x^{-5}u(x) &= c + \int x^{-5}dx \\ u(x) &= cx^5 + x^5\left(\frac{x^{-4}}{-4}\right) \end{aligned}$$

De manera que

$$u(x) = cx^5 - \frac{1}{4}x$$

$$y(x) = 2x^{-1} + \left(cx^5 - \frac{x}{4}\right)^{-1}$$

1.3 Ecuaciones Diferenciales Lineales de orden n

Definición 1.3.1: Ecuación diferencial lineal de orden n

Una ecuación diferencial lineal de orden n es de la forma

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y^{(\prime)}(x) + a_0(x)y(x) = g(x) \tag{1.76}$$

donde $a_i(x)$ son funciones continuas en el intervalo $I = (x_0, x_1)$ $\forall i = \overline{0, n}$ y $a_n(x) \neq 0$ $\forall x \in I$

Una ecuación diferencial lineal de orden n es de la forma

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y^{(\prime)}(x) + a_0(x)y(x) = g(x) \tag{1.77}$$

donde $a_i(x)$ son funciones continuas en el intervalo $I = (x_0, x_1)$ $\forall i = \overline{0, n}$ y $a_n(x) \neq 0$ $\forall x \in I$.
Ahora vamos a presentar dos formas en la que se puede expresar una ecuación diferencial lineal de orden n:

- El **Operador Sumatoria**

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x)y^{(k)}(x) = g(x) \quad \text{donde} \quad y^{(k)}(x) \equiv \frac{d^k}{dx^k}(y)$$

- Utilizando el **Operador Diferencial** $L\{\quad\}$ definido Por

$$L\{\quad\} = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\frac{d^k}{dx^k}\{\quad\} \tag{1.78}$$

de manera que la ecuación definida en 1.77 se puede escribir como

$$L\{y\} = g(x) \tag{1.79}$$

De acuerdo a la definición (1.3.1) las funciones $a_n(x)$ son continuas en algún intervalo, tomando en cuenta esta importante condición podemos obtener ciertos casos particulares de la ecuación 1.77 los cuales presentamos a continuación.

- Si las funciones $a_n(x) = a_n$, es decir son funciones constantes tenemos el caso de **ecuaciones lineales de orden con coeficientes constantes**.

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = g(x) \tag{1.80}$$

- Si las funciones $a_n(x) = b_n x^n$, donde $b_n \in \mathbb{R}$, es decir, $a_n(x)$ son mútiplo de potencias de x obtenemos la ecuación de **Cauchy-Euler** de orden n, cuya expresión es

$$b_n x^n y^{(n)}(x) + b_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + b_1 x y'(x) + b_0 y(x) = g(x) \tag{1.81}$$

- Si la función $g(x) = 0$ tenemos la ecuación diferencial homogénea de orden n asociada a la ecuación 1.77

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0 \tag{1.82}$$

- Si $g(x) = 0$ en la ecuación (1.80) tenemos la ecuación homogénea asociada con coeficientes constantes

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \tag{1.83}$$

  Y para el caso particular de orden 2 es

$$a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \tag{1.84}$$

  Que utilizando el operador derivada se expresa de una manera más simple como

$$L\{y\} = 0 \tag{1.85}$$

La solución general de la ecuación 1.77 es la combinación lineal de las soluciones de la ecuación (1.82) la cual llamaremos solución complementaria $y_c(x)$ y la solución particular que la denotaremos por $y_p(x)$

$$y(x) = k_1 y_c(x) + k_2 y_p(x) \tag{1.86}$$

donde $k_1 \quad y \quad k_2 \in \mathbb{R}$. La solución general de 1.82 podemos expresarla utilizando la notación sigma como $y_c(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k y_k(x)$, donde $c_k \in \mathbb{R}$ y $y_k(x)$ representa cada una de las soluciones.

Acontinuación vamos a presentar un importantes teoremas sobre la solución complementaria de la ecuación (1.82).

Teorema 1.3.1: Espacio Vectorial Generado

Si $A = \{y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ es el conjunto de las soluciones de la ecuación diferencial (1.82), entonces $\mathbf{S} = gn\{y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ es un espacio vectorial el cual llamaremos el espacio vectorial generado por las combinaciones de A.

Demostración:

Sabemos de algebra lineal que $V = C^0[a,b]$ es el espacio vectorial de las funciones continuas en el intervalo $[a,b]$, también recordamos de cálculo que la combinación lineal de funciones continuas es continuas, lo que significa que $\mathbf{S} \subset V$. Recordado esto solo basta demostrar que $\mathbf{S}$ cumple con los axiomas de subespacio.

- Sean y_0 y y_1 soluciones de la ecuación (1.82) por lo que $Y(x) = c_0y_0 + c_1y_1 \in S$. Demostraremos que $Y(x)$ es una solución

$$\begin{aligned} L\{Y(x)\} &= \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\frac{d^k}{dx^k}\{Y(x)\} \\ L\{y(x)\} &= \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\frac{d^k}{dx^k}\{c_0y_0 + c_1y_1\} \end{aligned}$$

  Por linealidad del operador derivada

$$L\{Y(x)\} = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\left[\frac{d^k}{dx^k}\{c_0y_0\} + \frac{d^k}{dx^k}\{c_1y_1\}\right]$$

  Por propiedad de la sumatoria

$$\begin{aligned} L\{Y(x)\} &= c_0\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\frac{d^k}{dx^k}\{y_0\} + c_1\sum_{k=0}^{n}\frac{d^k}{dx^k}\{y_1\} \\ L\{Y(x)\} &= c_0(0) + c_1(0) \\ L\{Y(x)\} &= 0 \end{aligned}$$

- Ahora vamos a demostrar que la función nula de $V = C^0[a,b]$ está en S, es decir

$$0_V = c_0y_0 + c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n$$

  Vemos que este sistema de ecuación siempre tendrá solución, ya que $c_0 = c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ es una solución.

Demostrado los axiomas de subespacio, $\mathbf{S}$ tiene estructura de un espacio vectorial y queda demostrado el teorema.

---

preguntar si es necesario este corolario, ya que estas explicito en el teorema anterior.

Corolario 1.3.1: Colorario

Sean $y_1, y_2, \ldots, y_k$ soluciones de la ecuación homogénea de n-ésimo orden (1.82) en un intervalo I. Entonces la combinación lineal

$$y(x) = c_0 y_0(x) + c_1 y_1(x) + \cdots + c_m y_m(x)$$

donde las $c_i, i = 0, 1, 2, \ldots, m$ son constantes arbitrarias, también es una solución en el intervalo.

Demostración 1.3.1 *Utilizando la expresión (1.78) para la ecuación (1.82)tenemos*

$$L\{y(x)\} = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) \frac{d^k}{dx^k} \{y(x)\}$$

Si expresamos con el operador sumatoria la combinación lineal de las soluciones homogéneas

$$L\{y(x)\} = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) \frac{d^k}{dx^k} \left\{ \sum_{m=0}^{n} c_m y_m(x) \right\}$$

Por linealidad del operador diferencial

$$L\{y(x)\} = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) \left\{ \sum_{m=0}^{n} \frac{d^k}{dx^k} (c_m y_m(x)) \right\}$$

Por propiedad asociativa del operador

$$\begin{aligned} L\{y(x)\} &= \sum_{m=0}^{n} c_m \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k(x) \frac{d^k}{dx^k} (y_k(x)) \right\} \\ L\{y(x)\} &= \sum_{m=0}^{n} c_m \{0\} \\ L\{y(x)\} &= 0 \end{aligned}$$

Corolario 1.3.2: Colorario

Corolario del Teorema (1.3.1)b

1. Un múltiplo constante $y = c_0 y_0(x)$ de una solución $y_0(x)$ de una ecuación diferencial lineal homogénea también es una solución.

2. Una ecuación diferencial lineal homogénea siempre posee la solución trivial $y = 0$.

Ejemplo 1.3.1.

Las funciones $y_1 = \cosh(2x)$ y $y_2 = \sinh(2x)$ son soluciones de la ecuación lineal homogénea $y'' - 4y = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Verifica que

$$y(x) = c_1 \cosh(2x) + c_2 \sinh(2x)$$

también es solución de la ecuación diferencial.

Solución 1.3.1 *Para verificar que la función dada es solución de la ecuación diferencial, calculamos la segunda derivada*

$$\begin{aligned} y'(x) &= 2c_1 \sinh(2x) + 2c_2 \cosh(2x) \\ y''(x) &= 4c_1 \cosh(2x) + 4c_2 \sinh(2x) = 4\left(c_1 \cosh(2x) + c_2 \sinh(2x)\right) \end{aligned}$$

Ahora reemplazamos en la ED

$$4\left(c_1 \cosh(2x) + c_2 \sinh(2x)\right) - 4\left(c_1 \cosh(2x) + c_2 \sinh(2x)\right) = 0$$

Por lo que la función $y(x) = c_1 \cosh(2x) + c_2 \sinh(2x)$ *es solución de ED.*

Hemos demostrado que la combinación lineal de soluciones de una ED, también es solución. Ahora presentamos la definición de **dependencia e independencia lineal** para determinar si las soluciones son linealmente independiente o linealmente dependiente entre si.

Definición 1.3.2: Dependencia e independencia lineal

Se dice que un conjunto de funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ es linealmente dependiente en un intervalo I si existen constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no todas cero, tales que

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0 \tag{1.87}$$

para toda x en el intervalo. Si el conjunto de funciones no es linealmente dependiente en el intervalo, se dice que es linealmente independiente.

A partir de la ecuación dada en (1.87) se obtiene un sistema de ecuación homogéneo por lo que si dicho sistema tiene solución única, es decir, $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ las funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ son linealmente independientes.
Para mayor comprensión de la definición (1.87) vamos a plantear los siguientes casos

- Sea $A = \{f(x)\}$ un conjunto que contiene únicamente una función. Es claro que si $f(x) = 0$, es decir la función nula, el conjunto A es linealmente dependiente ya que $\alpha f(x) = 0\ \forall \alpha \in \mathrm{R}$. En caso contrario, $f(x) \neq 0$, el conjunto es linealmente independiente por lo que $\alpha f(x) = 0$ si y sólo si $\alpha = 0$.
  De los expresado anteriormente podemos decir que cualquier conjunto que contenga el vector nulo es linealmente dependiente.

- Si $A = \{f_1(x), f_2(x)\}$ es linealmente dependiente en un intervalo, entonces existen constantes c_1 y c_2 que no son ambas cero de manera tal que, para toda x en el intervalo, $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$. Por tanto, si suponemos que $c_1 \neq 0$, se deduce que $f_1(x) = (-c_2/c_1)\, f_2(x)$; es decir, si un conjunto de dos funciones es linealmente dependiente, entonces una función es simplemente un múltiplo constante del otro. A la inversa, si $f_1(x) = c_2 f_2(x)$ para alguna constante c_2, entonces $(-1) \cdot f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$ para toda x en el intervalo. Por tanto, el conjunto de funciones es linealmente dependiente porque al menos una de las constantes (en particular, $c_1 = -1$) no es cero. Se concluye que un conjunto de dos funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ es linealmente independiente cuando ninguna función es un múltiplo constante de la otra en el intervalo.

Ejemplo 1.3.2.Conjunto linealmente independiente

Determina si las funciones $f_1(x) = 1, f_2(x) = e^{ax}$ y $f_3(x) = e^{bx}$, con $a \neq 0, b \neq 0$ y $a \neq b$ son linealmente independiente en R.

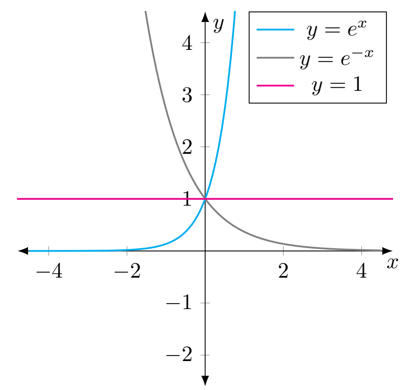


Figura 1.23: Conjunto linealmente independiente .

Solución 1.3.2 *Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot f_1 + \alpha_2 \cdot f_2 + \alpha_3 \cdot f_3 &= 0 \\ \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot e^{ax} + \alpha_3 \cdot e^{bx} &= 0 \end{aligned}$$

esto es,

$$\alpha_1 + \alpha_2 e^{ax} + \alpha_3 e^{bx} = 0$$

En particular, si $x = 0, x = 1$ y $x = 2$ se tiene, respectivamente,

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 e^{a} + \alpha_3 e^{b} &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 e^{2a} + \alpha_3 e^{2b} &= 0 \end{aligned}$$

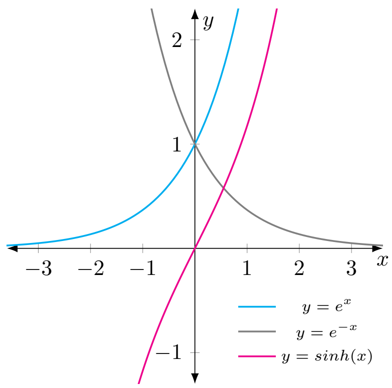
Aplicando a Gauss para resolver el sistema de ecuación tenemos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^a & e^b \\ 1 & e^{2a} & e^{2b} \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & e^a - 1 & e^b - 1 \\ 0 & e^{2a} - 1 & e^{2b} - 1 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{b^b - 1}{e^a - 1} \\ 0 & e^{2a} - 1 & e^{2b} - 1 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dfrac{e^b - 1}{e^a - 1} \\ 0 & 0 & \left(1 - e^b\right)\left(e^a - e^b\right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y $a \neq 0, b \neq 0, a \neq b$, se debe tener $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Por lo que f_1, f_2 y f_3 son L.I. en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.3.3. Determina si las funciones

$\{\sinh(x), e^x, e^{-x}\}$ son linealmente dependiente en R.



(a) Graficas de funciones que son LD

Recuerde

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(b) Funciones hiperbólicas, formas equivalentes

Figura 1.24: (a) Grafica de funciones linealmente dependiente, (b) Equivalencias de funciones hiperbólicas

Solución 1.3.3 *Para determinar que las funciones* $\{\sinh(x), e^x, e^{-x}\}$ *son linealmente dependiente los escalares* α_1, α_2 *y* α_3 *al menos una es diferente de cero, de manera que*

$$\alpha_1 \sinh(x) + \alpha_2 e^x + \alpha_3 e^{-x} = 0$$

Expresando toda la expresión en términos de e^x, e^{-x} *y tomando factor común*

$$\left(\frac{\alpha_1}{2} + \alpha_2\right) e^x + \left(-\frac{\alpha_1}{2} + \alpha_3\right) e^{-x} = 0$$

Obteniendo el sistema de ecuación homogéneo

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_1}{2} + \alpha_2 = 0 \\ \\ -\dfrac{\alpha_1}{2} + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo por Gauss

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Se puede ver que el sistema tiene infinitas soluciones, lo que significa que los vectores son L.D.

Nuestro interés es determinar un conjunto de funciones linealmente independientes como solución de una ecuación diferencial lineal. Aunque se puede utilizar la definición (1.3.2) sin importar la cantidad de funciones que tenga el conjunto solución, pero nos interesa una forma más práctica que nos permita determinar la independencia lineal de vectores, en ese sentido presentamos la siguiente definición.

Definición 1.3.3: Definición

Suponga que cada una de las funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ tiene al menos $n-1$ derivadas. El determinante

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

donde las primas denotan derivadas, se llama el Wronskiano de las funciones.

Teorema 1.3.2: Criterio para soluciones linealmente independientes

Sean $y_1, y_2, \ldots, y_n n$ soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden (1.82) en el intervalo I. El conjunto de soluciones es linealmente independiente en I si y sólo si $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$ para toda x en el intervalo.

Demostración 1.3.2 *Esta demostración vamos a demostrarla en dos partes.*

1. *Supongamos que* $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ *es un conjunto de soluciones linealmente independientes en el intervalo* I*.*
   Procederemos por contradicción.
   Supongamos que existe un punto $x_0 \in I$ *tal que*

   $$W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x_0) = 0.$$

   Entonces, el determinante de la matriz wronskiana evaluada en x_0 *es nulo, lo que implica que las columnas de dicha matriz son linealmente dependientes. Por lo tanto, existen constantes* $c_1, c_2, \ldots, c_n$*, no todas nulas, tales que*

   $$\sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(k)}(x_0) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

   Ahora definamos la función

   $$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$$

   Como la ecuación (1.82) *es lineal y homogénea,* $y(x)$ *también es una solución de dicha ecuación. Además, por las condiciones anteriores,*

   $$y(x_0) = y'(x_0) = \cdots = y^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

   Por el teorema de existencia y unicidad para problemas con valores iniciales, la única solución de (1.82) *que satisface estas condiciones iniciales es la solución trivial* $y(x) \equiv 0$ *en* I*. En consecuencia,*

   $$\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) = 0 \quad \textit{para todo } x \in I.$$

   Dado que $\{y_1, \ldots, y_n\}$ *es linealmente independiente, se deduce que*

   $$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0,$$

   lo cual contradice la elección de los coeficientes. Esta contradicción demuestra que

   $$W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x) \neq 0 \quad \textit{para todo } x \in I.$$

2. *Supongamos ahora que*

   $$W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x_0) \neq 0$$

para algún $x_0 \in I$. Entonces, el determinante de la matriz wronskiana en x_0 es distinto de cero, y por tanto dicha matriz es invertible. Esto implica que el sistema lineal homogéneo

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(k)}(x_0) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

admite únicamente la solución trivial

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

Supongamos que existe una combinación lineal

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) = 0 \quad \textit{para todo } x \in I.$$

Al evaluar esta identidad y sus derivadas hasta orden $n-1$ en x_0, se obtiene el sistema anterior, lo que obliga a que todos los coeficientes c_i sean nulos. Por consiguiente, las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son linealmente independientes en I.

Finalmente, por la fórmula de Abel,

$$W(x) = W(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}\, dt \right),$$

y como la función exponencial nunca se anula, se concluye que

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x) \neq 0 \quad \textit{para todo } x \in I.$$

El teorema (1.3.2) establece que cuando y_1, y_2, y_n son n soluciones de (1.82), el Wronskiano $W(y_1, y_2, y_n)$ es igual a cero o nunca es cero en un intervalo I , es decir las funciones y_1, y_2, y_n son L.D o L.I respectivamente.

Cuando las funciones de un conjunto de solución de la ecuación (1.82) son linealmente independientes, este conjunto recibe un nombre especial que se muestra en la definición siguiente. Conjunto fundamental de soluciones

Definición 1.3.4: Definición

Cualquier conjunto $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de n soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial lineal homogónea de n-ésimo orden (1.82) en un intervalo I es un conjunto fundamental de soluciones en el intervalo.

La existencia del conjunto fundamental de soluciones está garantizada en el siguiente teorema.

Teorema 1.3.3: Existencia de conjunto fundamental de soluciones

Existe un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación (1.82) en un intervalo I.

Demostración 1.3.3 ***Demostración: No tenemos nada***

Cualquier solución de una ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden en un intervalo I se expresa como una combinación lineal de las soluciones linealmente independientes en I, esto es similar al hecho de que cualquier vector en dos o tres dimensiones se puede representar como una combinación lineal de los vectores de una base para tales espacios vectoriales. En otras palabras, los bloques fundamentales para la solución general de la ecuación son n soluciones linealmente independientes $y_1, y_2, .., y_n$.

Teorema 1.3.4: Solución general; ecuaciones homogéneas

Sea $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (1.82) en el intervalo I. Entonces la solución general de la ecuación en el intervalo es

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x),$$

donde $c_i, i = 1, 2, \ldots, n$ son constantes arbitrarias.

Demostración 1.3.4 *Sea $Y(x)$ una solución de la ecuación diferencial en el intervalo I, y sea $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ un conjunto fundamental de soluciones linealmente independientes. Supongamos que $t \in I$ es un punto tal que*

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(t) \neq 0,$$

donde W denota el Wronskiano.
Evaluamos $Y(x)$ y sus derivadas hasta orden $n-1$ en $x = t$. Supongamos que

$$Y(t) = k_1, \quad Y'(t) = k_2, \quad \ldots, \quad Y^{(n-1)}(t) = k_n.$$

Queremos encontrar constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tales que la combinación lineal

$$G(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$$

satisfaga las mismas condiciones iniciales que $Y(x)$ en $x = t$, es decir

$$G(t) = k_1, \quad G'(t) = k_2, \quad \ldots, \quad G^{(n-1)}(t) = k_n.$$

Esto lleva a un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas

$$\begin{aligned} C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + \cdots + C_n y_n(t) &= k_1 \\ C_1 y_1'(t) + C_2 y_2'(t) + \cdots + C_n y_n'(t) &= k_2 \\ &\vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(t) + \cdots + C_n y_n^{(n-1)}(t) &= k_n \end{aligned}$$

La matriz de coeficientes de este sistema es la matriz Wronskiana evaluada en $x = t$. Como, por hipótesis, su determinante es no nulo

$$W(y_1, \ldots, y_n)(t) \neq 0,$$

entonces el sistema tiene una única solución. Es decir, existen constantes únicas $C_1, \ldots, C_n$ tales que

$$G(t) = Y(t), \quad G'(t) = Y'(t), \quad \ldots, \quad G^{(n-1)}(t) = Y^{(n-1)}(t).$$

Puesto que $G(x)$ y $Y(x)$ son soluciones de la misma ecuación diferencial lineal de orden n y satisfacen las mismas condiciones iniciales en $x = t$, por el teorema de existencia y unicidad, se concluye que

$$Y(x) = G(x) = C_1 y_1(x) + \cdots + C_n y_n(x),$$

para todo $x \in I$, lo que prueba que cualquier solución $Y(x)$ puede escribirse como combinación lineal del conjunto fundamental.

Ecuaciones no Homogéneas

Nuestro interés ahora es determinar una función $y_p(x)$ que satisfaga la ecuación (1.77), a esta función la llamaremos solución particular de la ecuación diferencial de orden n. En ese sentido es facil verificar que $y_p(x) = 4$ es solución particular de la ecuación $y'' + 4y = 16$. Ahora si $y_1, y_2, \ldots, y_k$ son soluciones de (1.82) en un intervalo I y y_p es cualquier solución particular de (1.77) en I, entonces la combinación lineal

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_k y_k(x) + y_p$$

es también una solución de la ecuación no homogénea (1.77).

Teorema 1.3.5: Solución general; ecuaciones no homogéneas

Sea y_p cualquier solución particular de la ecuación diferencial lineal no homogénea de n-ésimo orden (1.77) en un intervalo I, y sea $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea asociada (1.82) en I. Entonces la solución general de la ecuación en el intervalo es

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) + y_p, \tag{1.88}$$

donde las $c_i, i = 1, 2, \ldots, n$ son constantes arbitrarias.

Demostración 1.3.5 *Sea L el operador diferencial definido en (1.78) y sean $Y(x)$ y $y_p(x)$ soluciones particulares de la ecuación no homogénea $L(y) = g(x)$. Si se define $u(x) = Y(x) - y_p(x)$, entonces por la linealidad de L se tiene*

$$L(u) = L\{Y(x) - y_p(x)\} = L(Y(x)) - L(y_p(x)) = g(x) - g(x) = 0$$

Esto demuestra que $u(x)$ es una solución de la ecuación homogénea $L(y) = 0$. Así por el teorema (1.3.4), $u(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x)$, y así o

$$Y(x) - y_p(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$
$$Y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) + y_p(x)$$

Función Complementaria

Según el teorema (1.88) que la solución general de una ecuación lineal (1.77) está compuesta por la suma de dos funciones:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) + y_p(x) = y_c(x) + y_p(x)$$

La combinación lineal $y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x)$, que es la solución general de (1.82), se llama función complementaria para la ecuación (1.77). En otras palabras, para resolver una ecuación diferencial lineal no homogénea, primero se resuelve la ecuación homogénea asociada y luego se encuentra una solución particular de la ecuación no homogénea.

Teorema 1.3.6: Solución particulares de EDO no homogénea

Sean $y_{p_1}, y_{p_2}, \ldots, y_{p_k} k$ soluciones particulares de la ecuación diferencial lineal no homogénea de n-ésimo orden (1.77) en un intervalo I que corresponde, a su vez, a k funciones diferentes $g_1, g_2, \ldots, g_k$. Es decir, se supone que y_{p_i} denota una solución particular de la ecuación diferencial correspondiente

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y \quad = \quad g_i(x),$$

donde $i = 1, 2, \ldots, k$. Entonces

$$y_p \quad = \quad y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \cdots + y_{p_k}(x)$$

es una solución particular de

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y \quad = \quad g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_k(x)$$

Demostración 1.3.6 *Sea L el operador diferencial lineal definido en (1.78) y sabemos que cada $y_{p_i}(x)$ satisface $L(y_{p_i}) = g_i(x)$ para $i = 1, 2, \ldots, k$. Definimos*

$$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \cdots + y_{p_k}(x).$$

Aplicando la linealidad del operador L, tenemos

$$\begin{aligned} L(y_p) &= L(y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_k}) \\ &= L(y_{p_1}) + L(y_{p_2}) + \cdots + L(y_{p_k}) \\ &= g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_k(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $y_p(x)$ es una solución particular de la ecuación no homogénea con término $g(x) = g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_k(x)$.

Ejemplo 1.3.4. Combinación de soluciones particulares

Considere la ecuación diferencial

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x + x^2$$

Realiza lo que indica

1. Resuelva la ecuación

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x$$

2. Resuelva la ecuación

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = x^2$$

3. Verifica que la combinación de soluciones particulares es también solución.

Solución 1.3.4 *1. Para resolver la primera parte, utilizamos coeficientes determinados, así que proponemos*

$$y_{p_1}(x) = Ax^3 e^x$$

Calculando las derivadas y aplicamos el operador definido (1.78)

$$L(y_{p_1}) = y'''_{p_1} - 3y''_{p_1} + 3y'_{p_1} - y_{p_1}$$

Sustituyendo y simplificando se obtiene

$$L(y_{p_1}) = 6Ae^x \quad \Rightarrow \quad 6Ae^x = e^x \Rightarrow A = \frac{1}{6}$$

Por tanto, una solución particular es

$$\boxed{y_{p_1}(x) = \frac{1}{6}x^3 e^x}$$

2. *Para este caso proponemos una solución polinómica de la forma*

$$y_{p_2}(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow y'_{p_2} = 2ax + b, \quad y''_{p_2} = 2a, \quad y'''_{p_2} = 0$$

Aplicamos el operador

$$\begin{aligned} L(y_{p_2}) &= 0 - 3(2a) + 3(2ax + b) - (ax^2 + bx + c) \\ &= -6a + 6ax + 3b - ax^2 - bx - c \\ &= -ax^2 + (6a - b)x + (-6a + 3b - c) \end{aligned}$$

Igualamos a x^2

$$-ax^2 + (6a - b)x + (-6a + 3b - c) = x^2$$

Igualando coeficientes

$$\begin{aligned} -a = 1 &\Rightarrow a = -1 \\ 6a - b = 0 &\Rightarrow b = -6 \\ -6a + 3b - c = 0 &\Rightarrow 6 - 18 - c = 0 \Rightarrow c = -12 \end{aligned}$$

Entonces

$$\boxed{y_{p_2}(x) = -x^2 - 6x - 12}$$

Darle un formato colorido a esta soluciones en cuadro

3. *En este caso sumamos las soluciones particulares obtenidas anteriormente*

$$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) = \frac{1}{6}x^3 e^x - x^2 - 6x - 12$$

Aplicamos el operador lineal

$$L(y_p) = L(y_{p_1} + y_{p_2}) = L(y_{p_1}) + L(y_{p_2}) = e^x + x^2$$

1.3.1. Ecuaciones Diferenciales Lineales de orden n homogéneas

Ecuaciones Diferenciales Lineales de orden n homogéneas con coeficientes constantes

Sabemos que una ecuación deferencial Lineal de orden n homogénea con coeficientes constantes está doda por la expresión definida en 1.83, ahora nuestro interés es determinar las soluciones linealmente independientes de la ecuacion diferencial.
Si despejamos la derivada de mayor orden en 1.83

$$a_n y^{(n)}(x) = -\Big(a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y^{(1)}(x) + a_0 y(x)\Big)$$

en esta expresión podemos notar una propiedad importante de la solución de la ecuación $y(x)$, y es que la derivada n-ésima es una combinación lineal de las derivades de menor orden. Una función que Satisface tal condición es $y(x) = e^{rx}$ como sabemos su derivada es una constante por la misma función, en ese sentido vamos a suponer una solución en forma exponencial de la ecuacion diferencial definida en 1.83.
Sea la solución de la forma

$$y(x) = e^{rx}, r \in \mathbb{C} \tag{1.89}$$

Derivando es k-veces llegamos a gue

$$\frac{d^k}{dx^k}[y(x)] = r^k y(x) \quad = \quad r^k e^{rk}$$

sustituyendo la k-esima derivada en 1.85

$$\begin{aligned} L\left(e^{rx}\right) &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(r^k e^{rk}\right) = 0 \\ &= e^{rk}\sum_{k=0}^{n} a_k r^k = 0 \end{aligned}$$

Como $e^{rk} \neq 0$, la expresión anterior queda

$$\sum_{k=0}^{n} a_k r^k = 0 \tag{1.90}$$

la cual es una ecuación polinomial de orden n, y la llamaremos **ecuación característica o ecuación auxiliar**. Sabemos que una ecuación de orden n polinomial, tiene n raíces reales y complejas, de manera que para obtener las soluciones de 1.83 tenemos que determinar las raíces de 1.90. Acontiuación analizaremos los diferentes casos tomando en cuenta las naturalezas de las raíces 1.90, sin pérdida de generalidad lo haremos para el caso de una ecuación de segundo orden

$$a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0 \tag{1.91}$$

Raices reales y distintas

Si las raíces de la ecuación 1.90 son reales simples, es decir, reales distintas, tendremos dos valores de r. En este caso las soluciones particulares son

$$y_1(x) = e^{r_1 x} \quad \text{y} \quad y_2(x) = e^{r_2 x}$$

donde r_1 y r_2 son las raíces de 1.90.
La solución general podemos escribirla como

$$y(x) = A_1 y_1(x) + A_2 y_2(x)$$

donde A_1 y A_2 representan números reales. A modo de ejemplificar lo expresado anteriormente presentamos los siguentes ejemplos

Ejemplo 1.3.5. Resolver la ecuación diferencial dada por

$$y'' + 7y' + 10y = 0$$

Solución 1.3.5 *La ecuación indicial asociado a la ecuación deferencial es*

$$m^2 + 7m + 10 = 0$$

Factorizando

$$(m+5)(m+2) = 0$$

Igualando cada factor a cero, obtenemos las ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} m+5=0 &\quad \Rightarrow \quad m_1 = -5 \\ m+2=0 &\quad \Rightarrow \quad m_2 = -2 \end{aligned}$$

De manera que la solución general es

$$y(x) = A_1 e^{-5x} + A_2 e^{-2x}$$

Ejemplo 1.3.6. Resuelva la ecuación diferencial dada por la expresión

$$y'''(x) + y''(x) - 14y'(x) - 24y(x) = 0$$

Solución 1.3.6 *De 1.90 tenemos la ecuácion de orden* 3

$$r^3 + r^2 - 14r - 24 = 0$$

Para resolver la ecuación utilizaremos el teorema de las raíces racionales .
Los factores del término independiente son

$$P = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24\}$$

Los factores del coeficiente principal

$$b = \{\pm1\}$$

Las posibles raíces racionales son de la forma

$$\frac{P}{b} = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24\}$$

Ahora escogemos valores del conjunto anterior, y utilizando el esquema de Ruffini-Horner determinamos si valor escogido es o no solución escogiendo $r = 1$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 1 & -14 & -24 \\
1 & & 1 & 2 & -12 \\
\hline
 & 1 & 2 & -12 & {\color{red}-36}
\end{array}
$$

como el resto $r = -36$ *es diferente de cero* $r = 1$ *no es raíz de la ecuación.*
Ahora escogemos $r = -2$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 1 & -14 & -24 \\
-2 & & -2 & 2 & 24 \\
\hline
 & 1 & -1 & -12 & {\color{red}0}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|rrr}
 & 1 & -1 & -12 \\
-2 & & -2 & 6 \\
\hline
 & 1 & -3 & {\color{red}-6}
\end{array}
$$

como el segundo resto es diferente de cero, significa que $r = -2$ *es una solución simple de la ecuación auxiliar.*
Los coeficientes $1, -1$ *y* -12 *son los coeficientes de una ecuación de segundo orden*

$$r^2 - r - 12 \quad = \quad 0$$

la cual se puede resolver factorizando

$$
\begin{aligned}
r^2 - r - 12 &= 0 \\
(r-4)(r+3) &= 0
\end{aligned}
$$

Por el teorema del factor cero

$$
\begin{aligned}
r - 4 = 0 &\quad \Rightarrow r_5 = 4 \\
r + 3 = 0 &\quad \Rightarrow r_3 = -3
\end{aligned}
$$

De manera que las soluciones de la ecuación característica asociada a la ecuación es

$$r_1 = -2, r_2 = 4 \;\; y \;\; r_3 = -3$$

Así la solución general es

$$y(x) \quad = \quad A_1 e^{-2x} + A_2 e^{4x} + A_3 e^{-3x}$$

Raices Reales e Iguales

Si las raíces de 1.91 son reales e iguales, significa que el valor del discriminante es cero, es decir $\Delta = a_1^2 - 4a_2 a_0 = 0$ y solamente se obtiene una solución linealmente independiente. Para obtener la segunda solución linealmente independiente utilizaremos un métod que consiste en reducir el orden de la ecuación diferencial, el cual se describe a continuación.

<u>Reducción de orden</u>

En primer lugar vamos a suponer que $y_1(x)$ es una solución de la ecuación diferencial 1.84, nuestro objetivo es encontrar una solución que llamaremos $y_2(x)$ que sea linealmente independiente a $y_1(x)$. Tal solución la tomaremos de la forma

$$y_2(x) = y_1(x)u(x) \tag{1.92}$$

en la cual debemos encontrar la función $u(x)$. Para esto derivaremos nuestra solución $y_2(x)$ y reemplazaremos sus derivadas en 1.84.

$$y'(x) = y_1(x)u'(x) + u(x)y_1'(x)$$
$$y''(x) = u(x)y_1''(x) + 2u'(x)y_1'(x) + u''(x)y_1(x)$$

Sustituyendo en 1.84

$$a_2\left\{u(x)y_1''(x) + 2u'(x)y_1'(x) + u''(x)y_1(x)\right\} + a_1\left\{y_1(x)u'(x) + u(x)y_1'(x)\right\}$$

Agrupando los términos de $u(x)$ y $u'(x)$

$$u(x)\underbrace{\{a_1''(x) + a_1y_1'(x) + a_0y(x)\}}_{0} + a_2y_1(x)u''(x) + \left(2a_2y_1'(x) + a_1y_1(x)\right)u'(x) \quad = \quad 0$$

Esto implica que

$$a_2y_1(x)u''(x) + \left(2a_2y_1'(x) + a_1y_1(x)\right)u'(x) \quad = \quad 0$$

Ahora tomamos $w = u' \Rightarrow w' = u''$

$$a_2y_1(x)u' + \left(2a_2y_1'(x) + a_1y_1(x)\right)w \quad = \quad 0$$

La ecuación anterior es lineal y separable, separando las variables

$$\frac{w'}{w} + \frac{2a_2y_i'(x) + a_1y_1(x)}{a_2y_1(x)} \quad = \quad 0$$
$$\frac{w'}{w} + 2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} + \frac{a_1}{a_2} \quad = \quad 0$$

Por integración directa

$$\ln|w| + 2\ln|y_1(x)| + \frac{a_1}{a_2}x \quad = \quad c$$

Por propiedad de logarítmos

$$\ln\left|wy_1^2(x)\right| + \frac{a_1}{a_2}x \quad = \quad c$$
$$\ln\left|wy_1^2(x)\right| = c - \frac{a_1}{a_2}x$$

Despejando a w

$$wy_1^2(x) \quad = \quad e^{c-\dfrac{a_1}{a_2}x} = c_1e^{-\dfrac{a_1}{a_2}x}$$
$$w \quad = \quad c_1y_1^{-2}(x)e^{-\dfrac{a_1}{a_2}x}$$

Reemplazando a w

$$u' \quad = \quad c_1y_1^{-2}(x)e^{-\dfrac{a_1}{a_2}x}$$

Integrando obtenemos la expresión para $u(x)$

$$u(x) = c_1 \int y_1^{-2}(x) e^{-\frac{a_1}{a_2}x} dx \tag{1.93}$$

Ejemplo 1.3.7. Resolver la ecuación diferencial

$$y'' + 10y' + 25y = 0$$

Solución 1.3.7 *Asumiendo la solución de la forma* $y = e^{mx}$ *y derivando, tenemos*

$$y' = me^{mx}, \quad y'' = m^2 e^{mx}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} m^2 e^{mx} + 10\left(me^{mx}\right) + 25e^{mx} &= 0 \\ m^2 e^{mx} + 10me^{mx} + 25e^{mx} &= 0 \end{aligned}$$

Por factor común tenemos

$$\left(m^2 + 10m + 25\right) e^{mx} = 0$$

De manera que la ecuación indicial es

$$m^2 + 10m + 25 = 0$$

Resolviendo obtenemos que las soluciones son reales e iguales

$$m_1 = m_2 = -5 \Rightarrow y_1 = e^{-5x}$$

Para obtener la segunda solución linealmente independiente, en primer lugar usaremos la expresión 1.93, de donde tenemos

$$u(x) = c_1 \int \left(e^{-5x}\right)^{-2} e^{-10x} dx$$

Simplificando obtenemos que

$$u(x) = c_1 x$$

Reemplazando en (1.92) tenemos que la segunda solución es

$$y_2 = c_2 x e^{-5x}$$

Así la solución general de la ecuación diferencial es la expresión

$$y(x) = c_1 e^{-5x} + c_2 x e^{-5x}$$

Raices complejas y conjugadas

Si el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ es menor que cero, sabemos de la teoría de las ecuaciones polinómicas que las soluciones son complejas y conjugadas, esto es a que hemos supuesto que los coeficientes de la cuación diferencial y de su ecuación caracteristica son reales. Cualquier raiz compleja ocurrirá en pares de complejos conjugados $a\pm$ bi donde a y b son reales y $t = \sqrt{-1}$. Esto hace surgir la pregunta

¿Qué podrá significar una función exponencial como $e^{(a+bi)x}$?

Con el propósito de contestar esta pregunta recordemos la fórmula de Taylor del cálculo elemental para la función exponencial

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{r^4}{4!} + \cdots$$

Si sustituimos $t = ix$ en esta serie, obtenemos

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{n} \frac{(ix)^n}{n!} \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \cdots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) \end{aligned}$$

Dado que las dos series reales del último renglón son las series de Taylor para $\cos(x)$ y $\sin(x)$ respectivamente, se deduce que

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

Este resultado se conoce como fórmula de **Euler**. Debido a ella, definimos la función exponencial e^z, para un número complejo arbitrario $z = x + iy$ como

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

Ejemplo 1.3.8. Resolver la ecuación diferencial

$$4y''(x) + y(x) = 0$$

Solución 1.3.8 *De 1.90 obtenemos la ecuación auxiliar*

$$4r^2 + 1 = 0$$

Cuyas soluciones complejas son

$$r = \pm\frac{1}{2}i$$

De donde $a = 0$ y $b = \frac{1}{2}$ ahora de la expresión **??** *obtenemos la solución general dada por:*

$$y(x) = e^{(0)x}\left[A_1\cos\left(\frac{1}{2}x\right) + A_2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right]$$

$$y(x) = A_1\cos\left(\frac{1}{2}x\right) + A_2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

(a) Brook Taylor

Serie de la función Exponencial

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots$$

(b) Formula de Taylor para calculo elemental.

Serie de Taylor

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

(c) Serie de Taylor sen(x) y $\cos(x)$.

Figura 1.25: (a) Grafica de funciones linealmente dependiente, (b) Equivalencias de funciones hiperbólicas

Ejemplo 1.3.9. Resolver la ecuación diferencial

$$4y''(x) + 5y'(x) + 3y(x) = 0$$

Solución 1.3.9 *De 1.90 tenemos la siguiente ecuación auxiliar*

$$4r^2 + 5r + 3 = 0$$

Completando cuadrado llegamos a la expresión

$$\left(r + \frac{5}{8}\right)^2 = \frac{23}{64}$$

Resolviendo obtenemos las soluciones

$$r + \frac{5}{8} = \pm\frac{\sqrt{23}}{8}$$

$$r_1 = -\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{23}}{8} \quad y \quad r_2 = -\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{23}}{8}$$

Por **??** *tenemos que*

$$y(x) = e^{-\frac{5}{8}x}\left[A_1 \cos\left(\frac{\sqrt{27}}{8}x\right) + A_2 \sin(\sqrt{8}x)\right]$$

Ejemplo 1.3.10. Ecuaciones con Raíces reales e iguales y distintas

Resolver la ecuación diferencial dada por

$$3y'''''(x) - 10y''''(x) - 6y'''(x) + 24y''(x) + 11y'(x) - 6y(x) = 0$$

Solución 1.3.10 *De 1.90 tenemos*

$$3r^5 - 10r^4 - 6r^3 + 24r^2 + 11r - 6 = 0$$

Los factores del término independiente son

$$P = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}$$

Los factores del coeficiente principal

$$b = \{\pm1, \pm3\}$$

De manera que las posibles raíces racionales son

$$\frac{p}{b} = \left\{\pm1, \pm\frac{1}{3}, \pm2, \pm\frac{2}{3}, \pm3, \pm6\right\}$$

Aplicacando el esquema de Ruffini-Horner

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 3 & -10 & -6 & 24 & 11 & -6 \\ -1 & & -3 & 13 & -7 & -17 & 6 \\ \hline & 3 & -13 & 7 & 17 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & -13 & 7 & 17 & -6 \\ -1 & & -3 & 16 & -23 & 6 \\ \hline & 3 & -16 & 23 & -6 & 0 \end{array}$$

Probando con $r = 2$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 3 & -10 & -6 & 24 & 11 & -6 \\ 2 & & 6 & -8 & -28 & -8 & 6 \\ \hline & 3 & -4 & -14 & -4 & 3 & 0 \end{array}$$

Probando con $r = 3$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 3 & -10 & -6 & 24 & 11 & -6 \\ 3 & & 9 & -3 & -27 & -9 & 6 \\ \hline & 3 & -1 & -9 & -3 & 2 & 0 \end{array}$$

Probando con $r = \frac{1}{3}$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 3 & -10 & -6 & 24 & 11 & -6 \\ \frac{1}{3} & & 1 & -3 & -3 & 7 & 6 \\ \hline & 3 & -9 & -9 & 21 & 18 & 0 \end{array}$$

Las soluciones son $r_1 = r_2 = -1$*, es decir,* -1 *es raíz con multiplicidad dos,* $r_3 = 2, r_4 = 3$ *y* $r_5 = \frac{1}{3}$ *son raíces simples. Tomando en cuenta las raíces reales e iguales y distintas tenemos la solución general dada por*

$$y(x) = A_1 e^{-x} + A_2 x e^{-x} + A_3 e^{2x} + A_4 e^{3x} + A_5 e^{x/3}$$

Ejemplo 1.3.11.Ecuaciones con Raíces reales y complejas

Resolver la ecuación diferencial dada por

$$y'''''(x) + 7y''''(x) + 17y'''(x) + 15y''(x) = 0$$

Solución 1.3.11 *La ecuación indicial asociada a la ecuación diferencial es*

$$r^5 + 7r^4 + 17r^3 + 15r^2 = 0$$

Tomando factor común

$$r^2\left(r^3 + 7r^2 + 17r + 15\right) = 0$$

Por el teorema del factor cero, tenemos $r = 0$ *es raíz con multiplicidad dos*

$$r^3 + 7r^2 + 17r + 15 = 0$$

Sabemos que las raíces racionales son los divisores de 15

$$\frac{p}{b} = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15\}$$

Por Ruffini-Horner, probando con $r = -3$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 7 & 17 & 15 \\ -3 & & -3 & -12 & -15 \\ \hline & 1 & 4 & 5 & 0 \end{array}$$

Los últimos coeficientes representan una ecuación de segundo orden

$$r^2 + 4r + 5 = 0$$

Completando cuadrado

$$(r+2)^2 + 1 = 0$$

Resolviendo obtenemos las soluciones

$$r_2 = -2 + i, r_3 = -2 - i$$

Así la solución general es

$$y(x) = A_1 + A_2 x + A_3 e^{-3x} + e^{-2x}\left[A_4 \cos(x) + A_5 \sin(x)\right]$$

Ahora vamos a resolver dos ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden de suma importancia dado que aparecen conmunmente en diversos problemas de aplicaciones

Ejemplo 1.3.12. Resuelva la ecuación diferencial de segundo orden dada por la expresión

$$y'' + k^2 y = 0$$

donde k es un número real.

Solución 1.3.12 *La ecuación auxiliar asociada a la ecuación diferencial es*

$$m^2 + k^2 = 0$$

Al resolver la ecuación tenemos que las raíces son imaginarias

$$m_1 = ki \quad y \quad m_2 = -ki$$

De la expresión anterior notamos que $\alpha = 0$ y $\beta = k$ de manera que la solución general de la ED es

$$y = c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx)$$

Ejemplo 1.3.13. Resuelva la ecuación diferencial de segundo orden dada por la expresión

$$y'' - k^2 y = 0$$

donde k es un número real.

Solución 1.3.13 *De la expresión (1.91) tenemos que la ecuación indicial estas dada por*

$$m^2 - k^2 = 0$$

Cuyas raíces reales están dada por $m_1 = k$ *y* $m_2 = -k$ *de manera que la solución general de la ED es*

$$y = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-x}$$

Observe que si se elige $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ *y* $c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = -\frac{1}{2}$ *en la exprsión anterior, se obtienen las soluciones particulares*

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}\left(e^{kx} + e^{-kx}\right) = \cosh(kx) \\ y &= \frac{1}{2}\left(e^{kx} - e^{-kx}\right) = \sinh(kx) \end{aligned}$$

Puesto que $\cosh(kx)$ *y* $\sinh(kx)$ *son linealmente independientes en algún intervalo del eje* x*, una forma alternativa para la solución general es*

$$y = c_1 \cosh(kx) + c_2 \sinh(kx)$$

1.3.2. Ecuación de Cauchy-Euler

Si en la ecuación (1.77) las funciones $a_n(x) = b_n x^n$, donde $b_n \in \mathbb{R}$, es decir, $a_n(x)$ son mútiplo de potencias de x obtenemos la ecuación de **Cauchy-Euler** de orden n, cuya expresión es

$$b_n x^n y^{(n)}(x) + b_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + b_1 x y'(x) + b_0 y(x) = g(x) \tag{1.94}$$

que en término del operador L es

$$L(y(x)) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \frac{d^k}{dx^k}[y(x)] = g(x) \tag{1.95}$$

Si $g(x) = 0$ tenemos la ecuación diferencial homogénea de orden n asociada a la ecuación de Cauchy-Euler.

$$b_n x^n y^{(n)}(x) + b_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + b_1 x y'(x) + b_0 y(x) = 0 \tag{1.96}$$

La característica observable de este tipo de ecuación es que el grado $k = n, n-1, \ldots, 1, 0$ de los coeficientes monomiales x^k coincide con el orden k de la derivación y^k :

$$\overset{\text{mismo}}{a_n x^{n} \frac{d^{n} y}{dx^{n}}} + \overset{\text{mismo}}{a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}} + \cdots \tag{1.97}$$

Un caso que analizaremos de manera particular es la ecuación de segundo orden dada por la expresión

$$x^2 y'' + a x y' + b y = 0 \tag{1.98}$$

Que en la forma normal es

$$y'' + \frac{a}{x} y' + \frac{b}{x^2} y = 0 \tag{1.99}$$

Técnica de solución:
Para la ecuación de Cauchy-Euler probaremos una solución de la forma

$$y(x) = x^m, m \in \mathbb{C} \tag{1.100}$$

m es un valor que se debe encontrar. Análogo al proceso de las ecuaciones con coeficientes constantes homogéneas derivaremos la función dada en 1.100 y reemplazaremos las derivadas en la ecuación de cauchy-Euler homogénea. Derivando la solución 1.100 obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= mx^{m-1} \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= m(m-1)x^{m-2} \\
\frac{d^3y}{dx^3} &= m(m-1)(m-2)x^{m-3} \\
&\vdots \\
\frac{d^ky}{dx^k} &= \frac{m!}{(m-k)!}x^{m-k}
\end{aligned}$$

Reemplazando la k-enésima derivada en 1.95

$$\begin{aligned}
L(y(x)) &= \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \frac{m!}{(m-k)!} x^{m-k} = 0 \\
L(y(x)) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k m!}{(m-k)!} x^m = 0
\end{aligned}$$

Como x^m no depende de k

$$L(y(x)) = x^m \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k m!}{(m-k)!} = 0$$

$x^m \neq 0 \quad \forall m$ tenemos que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k m!}{(m-k)!} = 0 \tag{1.101}$$

La expresión anterior la llamaremos **ecuación característica o auxiliar de la ecuación de Cauchy-Euler**.
Nuestro interés es encontrar los valores de m que satisfacen la expresión 1.101 la cual es una ecuación polinomica de orden n, de acuerdo a la naturaleza de sus soluciones tendremos las soluciones a la ecuación de Cauchy-Euler. Al igual que la ecuación con coeficiente constante analizaremos los casos para orden 2 y generalizaremos los mismos.

1. **Soluciones reales distintas**
   Si las soluciones de la ecuación auxiliar asociada a 1.98 son reales y distintas, entonces se obtienen dos soluciones linealmante independiente. Ahora presentamos varios ejemplos ilustrando este caso.

   > **Ejemplo 1.3.14.** Resuelva la ED dada por
   >
   > $$x^2y''(x) + 7xy'(x) - 7y(x) = 0$$

Solución 1.3.14 *En primer lugar obtendremos la ecuación indicial, así de la expresión 1.101 tenemos*

$$m(m-1)+7m-7=0$$

Tomando factor común, tenemos

$$(m+7)(m-1)=0$$

Así las soluciones son $m_1=-7 \quad m_2=1$, *por lo tanto la solución general es*

$$y=c_1x^{-7}+c_2x$$

Ejemplo 1.3.15. Resolver la ecuación diferencial dada por

$$12x^3y'''(x)+8x^2y''(x)-3xy'(x)-2y(x) \quad = \quad 0$$

Solución 1.3.15 *De 1.101 tenemos que la ecuación indicial es*

$$12m(m-1)(m-2)+8m(m-1)-3m-2=0$$

Desarollando

$$12m^3+8m^2-3m-2=0$$

Por factor común

$$4m^2(3m+2)-(3m+2)=0$$

$$\left(4m^2-1\right)(3m+2)=0$$
$$4m^2-1=0 \quad 0^{-}3m+2=0$$
$$m_1=\frac{1}{2}, m_2=-\frac{1}{2} \quad m_3=-\frac{2}{3}$$

De manera que la solución general es

$$y(x)=A_1x^{\frac{1}{2}}+A_2x^{-\frac{1}{2}}+A_3x^{-\frac{2}{3}}$$

2. **Soluciones reales e iguales**
   Para obtener la segunda solución linealmente independiente, usaremos la expresión de reducción de orden obtenida en 1.93. Supongamos que conocemos la primera solución de la ecuación de cauchy-Euler de la forma $y=x^m$, donde m es la solución obtenida de 1.101 y por la fórmula general es $m=1-a$.
   De 1.99 tenemos

$$\int \frac{a}{x}dx=\ln(x)^a$$

Así

$$y_2(x)=x^m\int \frac{e^{-\ln(x)^a}}{x^{2\left(\frac{1-a}{2}\right)}}dx$$

Simplificando

$$y_2(x)=x^m\int x^{-a}\cdot x^{a-1}dx$$

$$y_2(x)=x^m\int \frac{1}{x}dx$$

Integrando se obtiene la segunda solución linealmente independiente

$$y_2(x) = x^m \ln(x)$$

Así la solución general es

$$y = c_1 x^m + c_2 x^m \ln(x)$$

NOTA
Para ecuaciones de orden superior, si m es una raíz de multiplicidad k, entonces se puede demostrar que

$$x^m, \quad x^m \ln x, \quad x^m (\ln x)^2, \ldots, \quad x^m (\ln x)^{k-1}$$

son k soluciones linealmente independientes. En correspondencia, la solución general de la ecuación diferencial debe contener una combinación lineal de estas k soluciones.

Ejemplo 1.3.16. Resuelva la ecuación diferencial dada por

$$x^2 y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x) \quad = \quad 0$$

Solución 1.3.16 *Para obtener la ecuación auxiliar utilizaremos la expresión 1.101, así*

$$m(m-1) - 3m + 4 = 0$$

Simplificando

$$m^2 - 4m + 4 = 0$$

Factorizando obtenemos que las soluciones son reales e iguales $m_1 = m_2 = 2$, *de manera que la solución general es*

$$y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln(x)$$

Ejemplo 1.3.17. Obtenga la solución al resolver la ecuación diferencial

$$x^4 y''''(x) - 2x^3 y'''(x) + 2y'(x) - y(x) \quad = \quad 0$$

Solución 1.3.17 *De la expresión 1.101*

$$m(m-1)(m-2)(m-3) - 2m(m-1)(m-2) + 2m - 1 = 0$$

Desarrollando y simplificando obtenemos

$$m^4 - 2m^3 + 2m - 1 = 0$$

factorizando por agrupacion de terminos

$$\left(m^2+1\right)\left(m^2-1\right)-2m\left(m^2-1\right)=0$$
$$\left(m^2-1\right)\left(m^2-2m+1\right)=0$$
$$(m+1)(m-1)(m-1)^2=0$$
$$(m+1)(m-1)^3=0$$
$$m+1=0 \quad 0 \quad m-1=0$$
$$m_1=-1 \quad m_2=m_3=m_4=1$$

Así la solución general es

$$y(x)=A_1x^{-1}+A_2x+A_3x\ln(x)+A_4x\ln^2(x).$$

3. **Soluciones complejas y conjugadas**
   Si las raíces de 1.101 son el par conjugado $m_1=\alpha+i\beta, m_2=\alpha-i\beta$, donde α y $\beta>0$ son reales, entonces una solución es

$$y=C_1x^{\alpha+i\beta}+C_2x^{\alpha-i\beta}$$

Pero cuando las raíces de la ecuación auxiliar son complejas, como en el caso de las ecuaciones con coeficientes constantes, se desea escribir la solución sólo en términos de funciones reales. Observemos la identidad

$$x^{i\beta}=\left(e^{\ln x}\right)^{i\beta}=e^{i\beta\ln x},$$

que, por la fórmula de Euler, es lo mismo que

$$x^{i\beta}=\cos(\beta\ln x)+i\operatorname{sen}(\beta\ln x)$$

De forma similar, $x^{-i\beta}=\cos(\beta\ln x)-i\operatorname{sen}(\beta\ln x)$ Si se suman y restan los dos últimos resultados, se obtiene

$$x^{i\beta}+x^{-i\beta}=2\cos(\beta\ln x) \quad \text{y} \quad x^{i\beta}-x^{-i\beta}=2i\operatorname{sen}(\beta\ln x),$$

respectivamente. Del hecho de que $y=C_1x^{\alpha+i\beta}+C_2x^{\alpha-i\beta}$ es una solución para cualquier valor de las constantes, note, a su vez, para $C_1=C_2=1$ y $C_1=1, C_2=-1$ que

$$y_1=x^\alpha\left(x^{i\beta}+x^{-i\beta}\right) \quad \text{y} \quad y_2=x^\alpha\left(x^{i\beta}-x^{-i\beta}\right)$$
$$y_1=2x^\alpha\cos(\beta\ln x) \quad \text{y} \quad y_2=2ix^\alpha\operatorname{sen}(\beta\ln x)$$

también son soluciones. Como

$$W\left(x^\alpha\cos(\beta\ln x), x^\alpha\operatorname{sen}(\beta\ln x)\right) \quad = \quad \beta x^{2a-1}\neq 0, \beta>0$$

en el intervalo $(0,\infty)$, se concluye que

$$y_1=x^\alpha\cos(\beta\ln x) \quad \text{y} \quad y_2=x^\alpha\operatorname{sen}(\beta\ln x)$$

constituyen un conjunto fundamental de soluciones reales de la ecuación diferencial. Así la solución general es

$$y=x^\alpha\left[c_1\cos(\beta\ln x)+c_2\operatorname{sen}(\beta\ln x)\right] \tag{1.102}$$

Ejemplo 1.3.18. Resuelva la ED dada por

$$x^2y''(x)+3xy'(x)+5y(x) \quad = \quad 0$$

Solución 1.3.18 *De 1.101 tenemos que la ecuación auxiliar asociada a la ecuación diferencial es*

$$m(m-1)+3m+5=0$$

Desarrollando

$$m^2+2m+5=0$$

Aplica la fórmula obtenemos que las soluciones son complejas y conjugadas, dadas por

$$x_1=-1+2i \quad x_2=-1-2i$$

De la expresión anterior se obtiene la solución general dada por

$$y=x^{-1}\left[c_1\cos(2\ln(x))+c_2\sin(2\ln(x))\right]$$

SOLUCIONES PARA $x<0$

En el análisis anterior hemos resuelto las ecuaciones de Cauchy-Euler para $x>0$. Una forma de resolver una ecuación de Cauchy-Euler para $x<0$ es cambiar la variable independiente por medio de la sustitución $t=-x$ (lo que implica $t>0$) y usando la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=-\frac{dy}{dt} \tag{1.103}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx}=\frac{d^2y}{dt^2} \tag{1.104}$$

Ejemplo 1.3.19. Resuelva la ecuación diferencial

$$4x^2y''+y = 0$$

en el intervalo $(-\infty,0)$, sujeta a las condiciones $y(-1)=2, y'(-1)=4$

Solución 1.3.19 *De (1.101) tenemos*

$$4m(m-1)+1 = 0$$

Resolviendo la ecuación característica tenemos que $m=\dfrac{1}{2}$ *es solución con multiplicidad doble. De forma que la solución general es*

$$y(t) = (c_1+c_2\ln(x))\,t^{\frac{1}{2}}$$

Por las condiciones iniciales tenemos

$$y(1) = c_1=2$$

$$y'(1) = 1+c_2=4\to c_2=3$$

Así la solución general para variable t

$$y=2(t)^{1/2}+3(t)^{1/2}\ln(t)$$

y en término de x es

$$y=2(-x)^{1/2}+3(-x)^{1/2}\ln(-x), x<0$$

UNA FORMA DISTINTA
Una ecuación de segundo orden de la forma

$$(x-x_0)^2\frac{d^2y}{dx^2}+a(x-x_0)\frac{dy}{dx}+by=0 \tag{1.105}$$

también es una ecuación de Cauchy-Euler. Observe que 1.105 se reduce a 1.98 cuando $x_0=0$.
Podemos resolver 1.105 como lo hicimos con 1.98, es decir, buscando soluciones de $y=(x-x_0)^m$ y usando

$$\frac{dy}{dx}=m(x-x_0)^{m-1} \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=m(m-1)(x-x_0)^{m-2}.$$

De forma alterna, podemos reducir a 1.105 a la forma familiar 1.98 por medio del cambio de variable independiente $t=x-x_0$, resolver la ecuación reducida y sustituir de nuevo. Realizando el cambio de variable indicado y por la regla de la cadena la ecuación 1.105 se transforma en

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+a\frac{dy}{dt}+by = 0 \tag{1.106}$$

Ejemplo 1.3.20. Utiliza la técnica desarrollada anteriormente para resolver la ED

$$(x-1)^2y''-(x-1)y'+5y = 0$$

Solución 1.3.20 *Haciendo el cambio de variable $t=x-1$, la ED se transforma en*

$$t^2y''-y'+5y=0$$

Ya esta ED tiene la forma de las resueltas anteriormente, de manera que su ecuación indicial es

$$m(m-1)-m+5=m^2-2m+5=0$$

que por la fórmula general de segundo grado su solución es $m_1=1+2i$ y $m_2=1-2i$ y la solución general es

$$y=(x-1)\left[c_1\cos(2\ln(x-1))+c_2\sin(2\ln(x-1))\right]$$

Ejemplo 1.3.21. Utilice $y=(x-x_0)^m$ para resolver la ecuación diferencial

$$(x+3)^2y''-8(x+3)y'+14y = 0$$

Solución 1.3.21 *De la ecuación (1.101) tenemos que la ecuación característica es*

$$m(m-1)-8m+14 = m^2-9m+14=0$$

Resolviendo obtenemos las soluciones $m_1=7$ y $m_2=2$, de manera que la solución general es

$$y(x) = c_1(x+3)^7+c_2(x+3)^2$$

La ecuación de Cauchy-Euler dada en 1.98 con un cambio de variable se transforma en una ecuación de coeficiente constante. La sustitución $x = e^t$ transforma 1.98 en una ecuación con coeficientes constantes en la nueva variable independiente t.
Utilizando la regla de la cadena se tiene la primera y segunda derivada respecto a la nueva variable t.

$$\frac{dy}{dt} = x\frac{dy}{dx} \tag{1.107}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + x^2\frac{d^2y}{dx^2} \tag{1.108}$$

Sustituyendo las derivadas obtenidas en la expresión 1.98

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + a\frac{dy}{dt} + by = 0$$

Simplificando obtenemos la siguiente ecuación con coeficiente constante

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (a-1)\frac{dy}{dt} + by = 0 \tag{1.109}$$

Ejemplo 1.3.22. Resolver la ED

$$x^2y'' + xy' - y = 0$$

utilizando la sustitución $x = e^t$ y obtenga la solución general

Solución 1.3.22 *De (1.109) la ecuación obtenida es*

$$\frac{d^2y}{dt^2} - y = 0$$

Esta es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes. La ecuación característica asociada es

$$r^2 - 1 = 0$$

Las raíces de esta ecuación son

$$r_1 = 1, \quad r_2 = -1.$$

La solución general en términos de t es

$$y(t) = c_1e^t + c_2e^{-t}$$

Dado que ($x = e^t$), tenemos que ($t = \ln(x)$). Sustituyendo esta relación en la solución general obtenemos

$$y(x) = c_1x + \frac{c_2}{x}$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y(x) = c_1x + \frac{c_2}{x}$$

1.3.3. Ecuaciones diferenciales lineales no homogénea de orden n

Coeficientes Indeterminado

Para resolver una ecuación diferencial lineal no homogénea

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = g(x) \tag{1.110}$$

debemos hacer dos cosas:

1. Encontrar la función complementaria y_c
2. Encontrar cualquier solución particular y_p de la ecuación no homogénea. La solución general de 1.110 en un intervalo I es $y = y_c + y_p$.

La función complementaria y_c es la solución general de la ED homogénea asociada de 1.110, es decir,

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

En la sección previa vimos cómo resolver esta clase de ecuaciones cuando los coeficientes eran constantes. Por lo tanto, nuestro objetivo en esta sección es examinar un método para obtener soluciones particulares.
Método de solución
En este método, la idea básica es una conjetura (en realidad un supuesto razonable) acerca de la forma de y_p; esta conjetura es motivada por los tipos de funciones que componen la función de entrada $g(x)$. El método general está limitado a ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas como 1.110, donde

- los coeficientes $a_i, i = 0, 1, \ldots, n$ son constantes.
- $g(x)$ es una constante, una función polinomial, una función exponencial $e^{\alpha x}$, las funciones trigonométricas $\operatorname{sen} \beta x$ o $\cos \beta x$, o sumas y productos finitos de estas funciones.

Las siguientes funciones son algunos ejemplos de los tipos de entradas $g(x)$ apropiados para este análisis:

$$g(x) = 10, \quad g(x) = x^2 - 5x, \quad g(x) = 15x - 6 + 8e^{-x}$$
$$g(x) = \operatorname{sen} 3x - 5x \cos 2x, \quad g(x) = xe^x \operatorname{sen} x + \left(3x^2 - 1\right) e^{-4x}$$

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad P(x)e^{\alpha x}$$

$$P(x)e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x \qquad P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x$$

donde n es un entero no negativo y α y β son números reales. El método de coeficientes indeterminados no es aplicable a ecuaciones de la forma 1.110 cuando

$$g(x) = \ln x, \quad g(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \tan x, \quad g(x) = \operatorname{sen}^{-1} x,$$

y así sucesivamente. Las ecuaciones diferenciales donde la entrada $g(x)$ es una función de este último tipo se considerarán en la sección **??**

El conjunto de funciones constituido por constantes, polinomios, exponenciales $e^{\alpha x}$, senos y cosenos tiene la extraordinaria propiedad de que las derivadas de sus sumas y productos son de nuevo sumas y productos de constantes, polinomios, exponenciales $e^{\alpha x}$, senos y cosenos. Dado que la combinación lineal de las derivadas $a_n y_p^{(n)} + a_{n-1} y_p^{(n-1)} + \cdots + a_1 y_p' + a_0 y_p$ debe ser idéntica a $g(x)$, parece razonable suponer que y_p tiene la misma forma que $g(x)$. Los siguientes ejemplos ilustran el método básico.

Teorema 1.3.7: Soluciones Particulares EDNH

Demostrar que las soluciones particulares de (1.110) forman un espacio vectorial.

Demostración 1.3.7 *hacer*

Ejemplo 1.3.23. Resuelva la siguiente ecuación diferencial por coeficientes indeterminado

$$y'' - y = e^{2x}$$

sujeta a las condiciones $y(0) = 0, y'(0) = 0$

Solución 1.3.23 *Resolviendo la EDH asociada*

$$y'' - y = 0$$

tenemos que

$$y_c(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$$

Ahora supondremos una solución de la forma

$$y_p(x) = Ae^{2x}$$

Obteniendo la $y_p'(x)$ y $y_p''(x)$

$$y_p'(x) = 2Ae^{2x}$$
$$y_p''(x) = 4Ae^{2x}$$

Sustituyendo en la ED

$$4Ae^{2x} - Ae^{2x} = e^{2x}$$

Simplificando

$$(3A)e^{2x} = e^{2x}$$

Por igualdad

$$A = \frac{1}{3}$$

La solución particular es $y_p(x) = \frac{1}{3}e^{2x}$ *y la solución general es*

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}$$

Aplicando las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 + \frac{1}{3} = 0 \\ y'(0) &= c_1 - c_2 + \frac{2}{3} = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema en las variables c_1 *y* c_2*, obtenemos la solución particular*

$$y(x) = -\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{6}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}$$

Ejemplo 1.3.24. Resuelva la ED dada por

$$\frac{1}{4}y'' + y' + y = x^2 - 2x$$

Solución 1.3.24 *En primer lugar resolvemos la ecuación homogénea asociada, cuya ecuación característica es La ecuación característica es:*

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$

Factorizando tenemos

$$(r+2)^2 = 0$$

Por lo tanto

$$r = -2$$

es raíz con multiplicidad 2.La solución general de la ecuación homogénea es

$$y_c(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$$

Dado que el término no homogéneo es $\left(x^2 - 2x\right)$*, proponemos una solución particular de la forma*

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

Calculamos las derivadas

$$y_p'(x) = 2Ax + B, \quad y_p''(x) = 2A$$

Sustituimos estas expresiones en la ecuación original

$$\frac{1}{4}(2A) + (2Ax + B) + (Ax^2 + Bx + C) = x^2 - 2x,$$

lo que simplifica a

$$\frac{1}{2}A + 2Ax + B + Ax^2 + Bx + C \quad = \quad x^2 - 2x$$

Agrupando los términos semejantes del lado izquierdo

$$Ax^2 + (2A + B)x + \left(\frac{1}{2}A + B + C\right) \quad = \quad x^2 - 2x$$

Como podemos ver la expresión anterior es una igualdad entre dos polinomios de orden dos, de manera que nuestro interés es calcular los valores de A, B *y* C*. Igualando los coeficientes de términos semejantes se forma el siguiente sistema de ecuación.*

$$\begin{cases} A = 1 \\ 2A + B = -2 \\ \frac{1}{2}A + B + C = 0 \end{cases}$$

Cuya solución está dada por $A = 1, B = -4$ *y* $C = \dfrac{7}{2}$*. Así la solución particular es*

$$y_p(x) = x^2 - 4x + 7/2$$

y la solución general es

$$y(x) \quad = \quad c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}x^2 - 4x + 7/2$$

Ejemplo 1.3.25. Resuelva la ED dada por

$$y'' + 3y \quad = \quad -48x^2e^{3x}$$

Solución 1.3.25 *Lo primero es resolver la ecuación homogénea asociada cuya ecuación característica correspondiente es:*

$$r^2 + 3 \quad = \quad 0$$

lo que nos da las raíces complejas:

$$r \quad = \quad \pm i\sqrt{3}$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_c(x) \quad = \quad c_1\cos(\sqrt{3}x) + c_2\sin(\sqrt{3}x)$$

Dado que el término no homogéneo es $-48x^2e^{3x}$*, proponemos una solución particular de la forma*

$$y_p(x) \quad = \quad e^{3x}\left(Ax^2 + Bx + C\right)$$

Esta forma se elige porque tenemos un polinomio de grado 2 multiplicado por la exponencial e^{3x}*. Derivando tenemos*

$$y_p'(x) \quad = \quad \frac{d}{dx}\left(e^{3x}\left(Ax^2 + Bx + C\right)\right)$$

Usamos la regla del producto

$$y_p'(x) = 3e^{3x}\left(Ax^2+Bx+C\right)+e^{3x}(2Ax+B)$$

Simplificamos

$$y_p'(x) = e^{3x}\left(3\left(Ax^2+Bx+C\right)+2Ax+B\right)$$
$$y_p'(x) = e^{3x}\left(3Ax^2+3Bx+3C+2Ax+B\right)$$
$$y_p'(x) = e^{3x}\left(3Ax^2+(3B+2A)x+(3C+B)\right)$$

Ahora calculamos la segunda derivada

$$y_p''(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{3x}\left(3Ax^2+(3B+2A)x+(3C+B)\right)\right)$$

Aplicamos la regla del producto de nuevo

$$y_p''(x) = 3e^{3x}\left(3Ax^2+(3B+2A)x+(3C+B)\right)+e^{3x}(6Ax+(3B+2A))$$

Simplificamos:

$$y_p''(x) = e^{3x}\left(9Ax^2+3(3B+2A)x+3(3C+B)+6Ax+(3B+2A)\right)$$
$$y_p''(x) = e^{3x}\left(9Ax^2+(9B+12A)x+(9C+6B+2A)\right)$$

reemplazando en la ecuación diferencial

$$e^{3x}\left(9Ax^2+(9B+12A)x+(9C+6B+2A)\right)+3e^{3x}\left(Ax^2+Bx+C\right) = -48x^2e^{3x}$$

Por factor Común y simplificando tenemos

$$12Ax^2+(12B+12A)x+(12C+6B+2A) = -48x^2$$

Igualando los coeficientes de los términos Semejantes, tenemos el sistema

$$\begin{cases} A=-4 \\ A+B=0 \\ A+3B+6C=0 \end{cases}$$

Cuya solución es $A=-4, B=4$ y $C=-4/3$, de manera que la solución particular es

$$y_p(x) = e^{3x}\left(-4x^2+4x-4/3\right)$$

Y la solución es

$$y_p(x) = c_1\cos(\sqrt{3}x)+c_2\sin(\sqrt{3}x)+e^{3x}\left(-4x^2+4x-4/3\right)$$

Ejemplo 1.3.26. Resuelva la ED dada por

$$y''+4y = 3\sin(2x)$$

Solución 1.3.26 *Primero, resolvemos la ecuación homogénea asociada cuya ecuación característica es*

$$r^2 + 4 = 0$$

Resolviendo

$$r^2 = -4 \implies r = \pm 2i$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_c(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$$

Para encontrar la solución particular $y_p(x)$*, proponemos una forma basada en el término no homogéneo* $3\sin(2x)$*. Dado que en la solución de la homogénea asociada se obtuvo un solución* $\sin(2x)$ *y* $\cos(2x)$ *, para eliminar la dependencia lineal de la solución particular, proponemos una solución de la forma*

$$y_p(x) = x\,(A\cos(2x) + B\sin(2x))$$

Calculamos las derivadas primera y segunda

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= A\cos(2x) + B\sin(2x) + x(-2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)) \\ y_p'(x) &= A\cos(2x) + B\sin(2x) - 2Ax\sin(2x) + 2Bx\cos(2x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p''(x) = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x) - 2A\sin(2x) + 2B\cos(2x) + \\ x(-4A\cos(2x) - 4B\sin(2x)) \\ y_p''(x) = -4A\sin(2x) + 4B\cos(2x) - 4Ax\cos(2x) - 4Bx\sin(2x) \end{aligned}$$

Sustituimos $y_p(x)$ *y sus derivadas en la ecuación diferencial*

$$\begin{aligned} -4A\sin(2x) + 4B\cos(2x) - 4Ax\cos(2x) - 4Bx\sin(2x) + \\ 4x(A\cos(2x) + B\sin(2x)) = 3\sin(2x) \end{aligned}$$

Simplificamos

$$-4A\sin(2x) + 4B\cos(2x) = 3\sin(2x)$$

Igualamos los coeficientes de $\sin(2x)$ *y* $\cos(2x)$ *en ambos lados de la ecuación*

$$\begin{aligned} -4A &= 3 \implies A = -\frac{3}{4} \\ 4B &= 0 \implies B = 0 \end{aligned}$$

La solución particular es

$$y_p(x) = x\left(-\frac{3}{4}\cos(2x)\right) = -\frac{3}{4}x\cos(2x)$$

La solución general de la ecuación diferencial es

$$y(x) = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x) - \frac{3}{4}x\cos(2x)$$

Ejemplo 1.3.27. Resuelva la ED dada por

$$y'' - 2y' + 5y = e^x \cos(2x)$$

Solución 1.3.27 *La ecuación característica asociada a la ecuación homogénea está dada por*

$$r^2 - 2r + 5 = 0$$

Resolviendo

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = 1 \pm 2i$$

Por lo tanto, la solución general para la homogénea es

$$y_c(x) = e^x \left(c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)\right)$$

Caso 1
Ninguna función de la solución particular supuesta es una solución de la ecuación diferencial homogénea asociada. En la tabla 4.1 se muestran algunos ejemplos específicos de g(x) en (1) junto con la forma correspondiente de la solución particular. Por supuesto, se da por sentado que ninguna función de la solución particular supuesta y_p se duplica por una función en la función complementaria y_c.

$g(x)$	Forma de y_p
1. 1 (cualquier constante)	A
2. $5x+7$	$Ax+B$
3. $3x^2-2$	Ax^2+Bx+C
4. x^3-x+1	Ax^3+Bx^2+Cx+E
5. $\sin(4x)$	$A\cos(4x)+B\sin(4x)$
6. $\cos(4x)$	$A\cos(4x)+B\sin(4x)$
7. e^{5x}	Ae^{5x}
8. $(9x-2)e^{5x}$	$(Ax+B)e^{5x}$
9. x^2e^{5x}	$(Ax^2+Bx+C)e^{5x}$
10. $e^{3x}\sin(4x)$	$Ae^{3x}\cos(4x)+Be^{3x}\sin(4x)$
11. $5x^2\sin(4x)$	$(Ax^2+Bx+C)\cos(4x)+(Ex^2+Fx+G)\sin(4x)$
12. $xe^{3x}\cos(4x)$	$(Ax+B)e^{3x}\cos(4x)+(Cx+E)e^{3x}\sin(4x)$

Cuadro 1.2: Soluciones particulares de prueba

dar formato al cuadro
Caso 2

1.3.4. Método de Anuladores

Definición 1.3.5: Anulador

Si L es un operador diferencial lineal con coeficientes constantes y f es una función suficientemente derivable tal que

$$L(f(x)) \quad = \quad 0$$

entonces se dice que L es un anulador de la función.

En término de la definición anterior presentamos algunos anuladores, el operador D anula a las funciones constantes $f(x) = k$, ya que

$$Dk = 0$$

de igual manera el operador D^3 anula a $f(x) = x^2$

$$D^3 x^2 = 0$$

Como se puede notar en los ejemplos anteriores el orden del operador es un grado mayor que el grado del término, para establecer algunos resultado importantes sobre el operador D vamos a utilizar la ecuación caracateristica dada en la expresión 1.90.

1. **Soluciones reales distintas**

Proposición 1.3.1: Operador Diferencial

El operador diferencial D^n anula cada una de las funciones

$$1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$$

y su combinación lineal.

Demostración 1.3.8 *Sea* $f(x)$ *la combinación lineal de* $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ *dada por*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$$

donde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
D^n(f(x)) &= D^n(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}) \\
&= D^n a_0 + D^n a_1 x + D^n a_2 x^2 + \ldots + D^n a_{n-1} x^{n-1} \\
&= D^n a_0 + a_1 D^n x + a_2 D^n x^2 + \ldots + a_{n-1} D^n x^{n-1} \\
D^n(f(x)) &= 0
\end{aligned}$$

2. **Soluciones reales e iguales**

Proposición 1.3.2: Operador Diferencial $(D - \alpha)^n$

El operador diferencial $(D - \alpha)^n$ anula cada una de las funciones

$$e^{ax}, xe^{ax}, x^2 e^{ax}, \ldots, x^{n-1} e^{ax}$$

Demostración 1.3.9 *Esta demostración la realizaremos por inducción, sea*

$$f(x) = a_1 e^{\alpha x} + a_2 x e^{\alpha x} + a_2 x^2 e^{\alpha x} + \cdots + a_n x^{n-1} e^{\alpha x}$$

Para $n = 1$

$$\begin{aligned}(D-\alpha)f(x) &= (D-\alpha)a_1 e^{\alpha x}\\ &= Da_1 e^{\alpha x} - a_1 \alpha e^{\alpha x}\\ &= a_1 D e^{\alpha x} - a_1 \alpha e^{\alpha x}\\ &= a_1 \alpha e^{\alpha x} - a_1 \alpha e^{\alpha x}\\ (D-\alpha)f(x) &= 0\end{aligned}$$

Suponemos que se cumple $n = k$

$$(D-\alpha)^k f(x) = (D-\alpha)^k \left\{a_1 e^{\alpha x} + a_2 x e^{\alpha x} + a_2 x^2 e^{\alpha x} + \cdots + a_k x^{k-1} e^{\alpha x}\right\}$$

Ahora probaremos que se cumple para $n = k + 1$

$$\begin{aligned}(D-\alpha)^{k+1} f(x) &= (D-\alpha)^k (D-\alpha) f(x)\\ &= \left(D(D-\alpha)^k - \alpha(D-\alpha)^k\right) f(x)\\ &= D\left((D-\alpha)^k + (x)\right) - \alpha(D-\alpha)^k f(x)\\ &= D(0) - \alpha(0)\\ &= 0\end{aligned}$$

3. **Soluciones complejas**

Proposición 1.3.3: $\left[D^2 - 2\alpha D + \left(\alpha^2 + \beta^2\right)\right]^n$

El operador diferencial $\left[D^2 - 2\alpha D + \left(\alpha^2 + \beta^2\right)\right]^n$ anula cada una de las funciones

$$\begin{array}{lllll} e^{\alpha x}\cos\beta x, & xe^{\alpha x}\cos\beta x, & x^2 e^{\alpha x}\cos\beta x, & \ldots, & x^{n-1}e^{\alpha x}\cos\beta x\\ e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x, & xe^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x, & x^2 e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x, & \ldots, & x^{n-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x\end{array}$$

1.4 Solución de ecuaciones diferenciales por Trasformada de la L

La transformada de Laplace, una herramienta matemática fundamental, debe su nombre al célebre matemático y astrónomo francés **Pierre-Simon Laplace** (1749-1827). Laplace desarrolló esta técnica en el siglo XVIII, en el contexto de sus investigaciones sobre la teoría de probabilidades y las ecuaciones diferenciales. Su trabajo ha dejado una huella indeleble en diversas disciplinas científicas y de ingeniería.

La transformada de Laplace es una técnica que permite convertir una función de una variable real, generalmente el tiempo, en una función de una variable compleja. Esta transformación facilita la resolución de ecuaciones diferenciales, al convertir problemas complejos en problemas algebraicos más sencillos. Su utilidad se extiende a campos como la ingeniería, la física y el control de sistemas, donde se emplea para analizar y diseñar sistemas lineales e invariantes en el tiempo.

1.4.1. Definiciones y propiedades

Definición 1.4.1: Transformada de Laplace

Supongamos que f es una función de variable real o compleja de variable $t > 0$ y s es un parametro real o complejo. Definimos la transformada de Laplace de f como

$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L}(f(t)) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \\ &= \lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau e^{-st} f(t)dt \end{aligned} \tag{1.111}$$

Siempre que el límite existe. En caso de que el límite exista se dice que la integral converge, en caso contrario diverge.

Hacer un grafico que ilustre la definicion de la transformada Ahora vamos a realizar ejemplos de como utilizar la definición (1.111) para calcular la transformada de Laplace.

Ejemplo 1.4.1. Transformada de una función constante

Calcula la transformada de la función $f(t) = b$

donde $b \in \mathbb{R}$

Solución 1.4.1 *De la expresión (1.111) tenemos*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(b) &= \int_0^\infty e^{-st}\,(b)\,dt \\ &= b \lim_{\tau\to\infty} \left(\frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_0^\tau \right) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(b) = b \lim_{\tau\to\infty} \left(\frac{e^{-s\tau}}{-s} + \frac{1}{s} \right) \tag{1.112}$$

Como $s \in \mathbb{C}$ es de la forma $s = a + ik$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, en ese sentido vamos analizar los siguientes casos de forma tal que el límite obtenido en la expresión exista

1. *Es claro que si $a = k = 0$, entonces $s = 0$. Por lo tanto el límite obtenido en (1.112) y la transformada de $f(t) = b$ no existen.*

2. *Si $s = a + ik$, tal que $a > 0$, tenemos de la expresión (1.112)*

$$\mathcal{L}(b) = b \lim_{\tau\to\infty} \left(\frac{e^{-(a+ik)\tau}}{-(a+ik)} + \frac{1}{(a+ik)} \right)$$

Por la fórmula de Euler, obtenemos

$$\mathcal{L}(b) = b \lim_{\tau\to\infty} \left(\frac{\cos(k\tau) - \sin(k\tau)}{-e^{a\tau}(a+ik)} + \frac{1}{(a+ik)} \right)$$

Aplicando propiedades de los límites y el hecho que $\mid e^{ik\tau} \mid \leq \mid e^{a\tau} \mid$, tenemos

$$\mathcal{L}(b) = \frac{b}{(a+ik)} = \frac{b}{s}$$

3. *De manera similar $s = a + ik$, tal que $a < 0$, tenemos de la expresión (1.112)*

$$\mathcal{L}(b) = b \lim_{\tau \to \infty} \left(\frac{e^{-(a+ik)\tau}}{-(a+ik)} + \frac{1}{(a+ik)} \right)$$

Por la fórmula de Euler, obtenemos

$$\mathcal{L}(b) = b \lim_{\tau \to \infty} \left(\frac{e^{a\tau}\left(\cos(k\tau) - \sin(k\tau)\right)}{-(a+ik)} + \frac{1}{(a+ik)} \right)$$

Sabiendo el hecho de que $\mid e^{a\tau} \mid < \infty$, el límite anterior no existe.

Por lo tanto

$$\mathcal{L}(b) = \frac{b}{s} \quad (Re(s) > 0)$$

Ejemplo 1.4.2. Transformada de una función exponencial

Calcula la transformada de la función $f(t) = e^{bt}$

donde $b \in \mathbb{R}$

Solución 1.4.2 *De la expresión (1.111) tenemos*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(e^{bt}) = F(s) &= \int_0^\infty e^{-st} e^{bt} dt = \int_0^\infty e^{(b-s)t} dt \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \int_0^\tau e^{(b-s)t} dt = \lim_{\tau \to \infty} \left[\frac{1}{b-s} e^{(b-s)t} \right]_0^\tau \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \left[\frac{1}{b-s} e^{(b-s)\tau} - \frac{1}{b-s} \right]
\end{aligned}$$

Vamos analizar el límite anterior para los siguientes caso

1. *Si $a = k = 0$, entonces $s = 0$, por lo que el límite anterior podemos expresarlo como*

$$\mathcal{L}(e^{bt}) = \lim_{\tau \to \infty} \left[\frac{1}{b} e^{b\tau} - \frac{1}{b} \right]$$

y es claro que el límite anterior no existe, lo que significa que la transformada de Laplace no existe para el caso de $s = 0$.

2. *Si $s = a + ik$, entonces*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(e^{bt}) &= \lim_{\tau \to \infty} \left[\frac{1}{b-(a+ik)} e^{(b-(a+ik)\tau} - \frac{1}{b-(a+ik)} \right] \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \left[\frac{1}{(b-a)-ik} e^{((b-a)-ik)\tau} - \frac{1}{(b-a)-ik} \right]
\end{aligned}$$

Tomando en cuenta el signo de $Re(b-s)$, tenemos lo siguiente caso

a) *Si $Re(b-s) > 0$, es decir, $b - a > 0$*

$$\mathcal{L}(e^{bt}) = \lim_{\tau \to \infty} \left[\frac{1}{(b-a)-ik} e^{(b-a)\tau} \left(\cos(ik\tau) - \sin(ik\tau)\right) - \frac{1}{(b-a)-ik} \right]$$

Como $\mid e^{(b-a)\tau} \mid < \infty$, el límite anterior no existe, y por lo tanto la transformada de Laplace no existe para este caso.

b) *Si* $Re(b-s) < 0$, *es decir,* $b - a < 0$

$$\mathcal{L}(e^{bt}) = \lim_{\tau\to\infty}\left[\frac{\cos(ik\tau) - \sin(ik\tau)}{((b-a)-ik)e^{(b-a)\tau}} - \frac{1}{(b-a)-ik}\right]$$

Teniendo pendiente que $\mid e^{ik\tau} \mid \leq \mid e^{(b-a)\tau} \mid \Rightarrow \dfrac{\mid e^{ik\tau} \mid}{\mid e^{(b-a)\tau} \mid}\Big|_{\tau\to\infty} \to 0$
de manera que

$$\mathcal{L}(e^{bt}) = -\frac{1}{(b-a)-ik} = \frac{1}{s-b} \quad (Re(b-s) < 0) \tag{1.113}$$

Hacer graficas para cierto valores de b de $f(t) = e^{bt}$ *y de su transformada*

Ejemplo 1.4.3. Transformada de una función potencial

Calcula la transformada de la función $f(t) = t^n$

donde $n \in \mathbb{Z}^+$

Solución 1.4.3 *De la expresión (1.111) tenemos*

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st} t^n \, dt \tag{1.114}$$

Para simplificar la integral, hacemos el cambio de variable $u = st$*. Por lo tanto,* $du = s\,dt$ *y* $t = \dfrac{u}{s}$*. Entonces, la integral se transforma en*

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st} t^n \, dt = \int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{u}{s}\right)^n \frac{du}{s}$$

Reorganizando los términos

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{1}{s^{n+1}}\int_0^\infty e^{-u} u^n \, du$$

La integral anterior tiene una relación directa con la función Gamma $\Gamma(x)$*, por lo tanto:*

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{1}{s^{n+1}}\int_0^\infty e^{-u} u^n \, du = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \tag{1.115}$$

Ahora vamos a demostrar un importante teorema sobre la linealidad

Teorema 1.4.1: Linealidad de la Transformada de Laplace

Suponga que $\mathcal{L}[f](s)$ y $\mathcal{L}[g](s)$ están definidas para $s > a$, y α y β son números reales. Entonces

$$\mathcal{L}[\alpha f + \beta g](s) = \alpha F(s) + \beta G(s)$$

para $s > a$.

Demostración 1.4.1 *Por hipótesis,* $\int_0^\infty e^{-st f}(t)dt$ *y* $\int_0^\infty e^{-st} g(t)dt$ *convergen para* $s > a$. *Entonces*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\alpha f + \beta g](s) &= \int_0^\infty e^{-st}(\alpha f(t) + \beta g(t))dt \\ &= \alpha \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt + \beta \int_0^\infty e^{-st} g(t)dt = \alpha F(s) + \beta G(s)\end{aligned}$$

para $s > a$.

Esta conclusión se extiende para cualquier suma finita:

$$\mathcal{L}\left[\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n\right](s) = \alpha_1 F_1(s) + \cdots + \alpha_n F_n(s),$$

para todo s tal que cada $F_j(s)$ esté definida.

Ejemplo 1.4.4. Transformada de la función seno y coseno

Calcula la transformada de las funciones trigonométricas $\sin t$ y $\cos(t)$

Solución 1.4.4 *Antes de calcular la transformada, primero recordamos que*

$$e^{iw} = \cos(w) + i\sin(w) \quad w \in \mathbb{R} \tag{1.116}$$

$$e^{-iw} = \cos(w) - i\sin(w) \tag{1.117}$$

Calculando la transformada de $e^{i\omega t}$, *tenemos*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(e^{i\omega t}\right) &= \int_0^\infty e^{-st} e^{i\omega t} dt \\ &= \lim_{\tau \to \infty} \left. \frac{e^{(i\omega - s)t}}{i\omega - s} \right|_0^\tau \\ &= \frac{1}{s - i\omega}\end{aligned}$$

Donde $\lim_{\tau \to \infty} \left|e^{i\omega\tau} e^{-s\tau}\right| = \lim_{\tau \to \infty} e^{-x\tau} = 0$, *siempre y cuando* $x = \mathcal{R}e(s) > 0$. *De manera similar tenemos que* $\mathcal{L}\left(e^{-i\omega t}\right) = 1/(s + i\omega)$ *por el teorema dado en (1.4.1) y de (1.116)*

$$\frac{\mathcal{L}\left(e^{i\omega t}\right) + \mathcal{L}\left(e^{-i\omega t}\right)}{2} = \mathcal{L}\left(\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}\right) = \mathcal{L}(\cos \omega t)$$

Y consecuentemente,

$$\mathcal{L}(\cos \omega t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - i\omega} + \frac{1}{s + i\omega}\right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \tag{1.118}$$

De forma similar,

$$\mathcal{L}(\sin \omega t) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s - i\omega} - \frac{1}{s + i\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (\mathcal{R}e(s) > 0) \tag{1.119}$$

No toda función tiene una transformada de Laplace, ya que $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ puede no converger para cualquier valor real de s. Considere condiciones sobre f para asegurar que f tiene una transformada de Laplace.
Una condición necesaria obvia es que $\int_0^k e^{-st} f(t)dt$ tiene que estar definida para todo $k > 0$, ya que $\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$. Para que esto suceda, es suficiente que f sea continua a pedazos en $[0, k]$ para todo número k positivo, en ese sentido se presenta la siguiente definición.

Definición 1.4.2: Continuidad a pedazos

Supongamos que f es una función de variable real o compleja de variable $t > 0$ y s es un parametro real o complejo. Definimos la transformada de Laplace de f como f es continua a pedazos en $[a, b]$ si hay puntos

$$a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < b$$

tal que f es continua en cada intervalo abierto $(a, t_1), (t_{j-1}, t_j)$ y (t_n, b) y todos los límites laterales siguientes son finitos:

$$\lim_{t\to a+} f(t), \quad \lim_{t\to t_j-} f(t), \quad \lim_{t\to t_j+} f(t) \quad \text{y} \quad \lim_{t\to b-} f(t)$$

Hacer graficas de un funcion continua por tramos Esto significa que f es continua en $[a, b]$ excepto quizá en un número finito de puntos, en cada uno de los cuales f tiene límites laterales finitos en todo el intervalo. Las únicas discontinuidades que una función continua a pedazos f puede tener en $[a, b]$ son un número finito de saltos de discontinuidades (huecos de anchura finita en la gráfica). Mostrar ejemplos que ilustren la definicion de continuidad a pedazos
Si f es continua a pedazos en $[0, \tau]$, entonces $e^{-st}f(t)$ también lo es y $\int_0^\tau e^{-st} f(t)dt$ existe. La existencia de $\int_0^\tau e^{-st} f(t)dt$ para todo τ positivo no asegura la existencia de $\lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau e^{-st} f(t)dt$.

Ejemplo 1.4.5. Una función continua sin transformada de Laplace

Determina la transformada de Laplace de la función $f(t) = e^{t^2}$

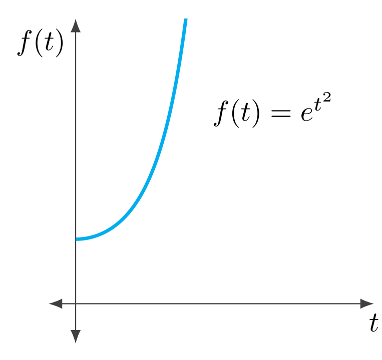


Figura 1.26: Función continua sin transformada de Laplace $f(t) = e^{t^2}$

Solución 1.4.5 *Por las propiedades de continuidad, es claro que la función* $f(t) = e^{t^2}$ *es continua en todo intervalo* $[0, k]$, *ahora vamos a calcular la transformada*

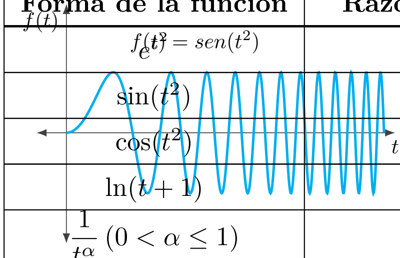
$$\mathcal{L}(e^{t^2}) = \int_0^\infty e^{-st} e^{t^2} dt$$

pero la integral anterior diverge para todo valor real de s. *Así, para la convergencia de* $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$, *es necesaria otra condición sobre* f. *La forma de esta integral sugiere una condición que es suficiente.*

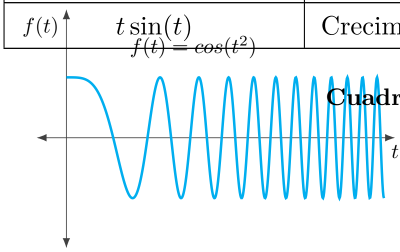
A continuación, se presenta una tabla con ejemplos de funciones continuas que no tienen transformada de Laplace, junto con la razón de por qué la integral de Laplace no converge.

Forma de la función	Razón por la que no existe su transformada de Laplace
e^{t^2}	Crecimiento demasiado rápido cuando $t \to \infty$
$\sin(t^2)$	Oscilaciones rápidas y no amortiguadas para $t \to \infty$
$\cos(t^2)$	Oscilaciones rápidas y no amortiguadas para $t \to \infty$
$\ln(t+1)$	Crecimiento indefinido aunque lento cuando $t \to \infty$
$\frac{1}{t^\alpha}\ (0 < \alpha \leq 1)$	Divergencia cerca de $t = 0$
$e^t \sin(e^t)$	Crecimiento exponencial combinado con oscilaciones
$t\sin(t)$	Crecimiento lineal con oscilaciones no amortiguadas cuando $t \to \infty$

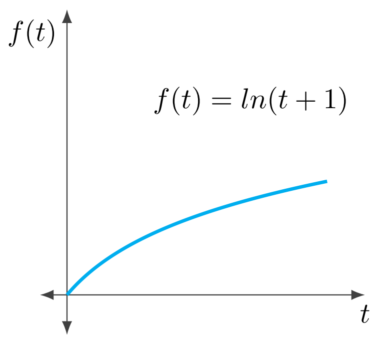
Cuadro 1.3: Funciones cuya transformada de Laplace no existe



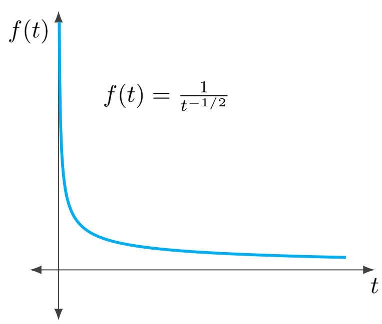
(a) Función $\sin(t^2)$



(b) Función $\cos(t^2)$



(c) Función $\ln(t+1)$



(d) Función $t^{-1/2}$

Figura 1.27: funciones continua que no tienen transformada de Laplace

Poner la definicion de orden exponencial y ejemplos graficos Los ejemplos anteriores sugieren un conjunto de condiciones que son suficientes para que una función tenga una transformada de Laplace.

Teorema 1.4.2: Existencia de Transformada de Laplace

Suponga que f es continua a pedazos en $[0, k]$ para todo k positivo. También que existen números M y b, tales que $|f(t)| \leq Me^{bt}$ para $t \geq 0$. Entonces $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ converge para $s > b$, por tanto $\mathcal{L}[f](s)$ está definida para $s > b$.

Demostración 1.4.2 *Si, para algunos números M y b, se tiene $|f(t)| \leq Me^{bt}$, entonces*

$$e^{-st}|f(t)| \leq Me^{(b-s)t} \qquad \text{para } s \geq b$$

Pero

$$\int_0^\infty Me^{(b-s)t}dt$$

converge $(aM/(s-b))$ si $b - s < 0$, o $s > b$. Entonces, por comparación, $\int_0^\infty e^{-st}|f(t)|dt$ también converge si $s > b$, de donde $\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ converge si $s > b$. Libro peter o neil pag 7

Las condiciones del teorema son suficientes, pero no necesarias para que una función tenga una transformada de Laplace, aquí presentamos un ejemplo

Ejemplo 1.4.6. Función discontinua con Transformada de Laplace

Calcula la transformada de Laplace para la función definida por $f(t) = t^{-1/2}$ con $t > 0$

Solución 1.4.6 *Esta función no es continua a pedazos en ningún* $[0, k]$ *ya que* $\lim_{t \to 0^+} t^{-1/2} = \infty$. *Sin embargo,* $\int_0^k e^{-st} t^{-1/2} dt$ *existe para todo* k *y* $s > 0$ *positivos. Más aún,*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(t)) &= \int_0^{\infty} e^{-st} t^{-1/2} dt \quad \left(\textit{tomando el siguiente cambio de variable} \quad x = t^{1/2} \right) \\
&= 2 \int_0^{\infty} e^{-sx^2} dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{s}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz \quad (\textit{ sea } z = x\sqrt{s}) \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{s}}
\end{aligned}
$$

Ahora vamos a calcular la transformada de Laplace de algunas funciones especiales.

Ejemplo 1.4.7. Transformada de los polinomios de Laguerre

Calcula la transformada de Laplace para los polinomios de Laguerre

Solución 1.4.7 *Sabemos que loos polinomios de Laguerre tienen la siguiente forma*

$$
L_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-t)^k}{k!}
$$

Sustituyendo esto en la definición (1.111), obtenemos

$$
\mathcal{L}\{L_n(t)\} = \mathcal{L}\left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-t)^k}{k!} \right\}
$$

*Aplicando la linealidad de la transformada dada el teorema (**??**), podemos escribir*

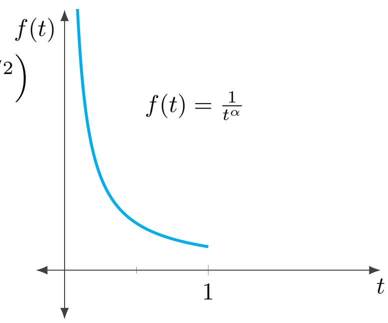
$$
\mathcal{L}\{L_n(t)\} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} \mathcal{L}\{t^k\}
$$

La transformada de Laplace de $\mathcal{L}\{t^k\}$ *es conocida y está en la expresión (1.132), sustituyendo en la expresión anterior*

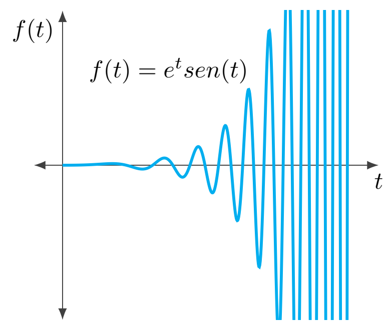
$$
\mathcal{L}\{L_n(t)\} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{k!}{s^{k+1}} = \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{-1}{s} \right)^k
$$

La sumatoria del lado derecho es la expresión binomial de $(1+x)^n$ *para* $x = \dfrac{-1}{s}$, *utilizando este resultado*

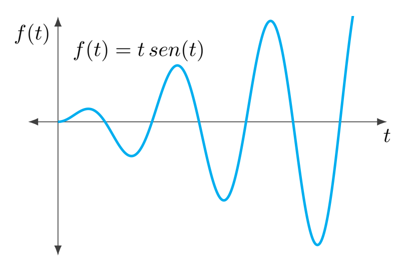
$$
\mathcal{L}\{L_n(t)\} = \frac{1}{s} \left(1 - \frac{1}{s} \right)^n
$$



(e) Función $\dfrac{1}{t^\alpha}$



(f) Función $e^t \sin(e^t)$



(g) Función $t \sin(t)$

Figura 1.27: Funciones continua que no tienen transformada de Laplace

Simplificando la expresión anterior obtenemos el resultado final

$$\mathcal{L}(L_n(t)) \quad = \quad \frac{1}{s}\left(\frac{s-1}{s}\right)^n \tag{1.120}$$

Ejemplo 1.4.8. Transformada de los polinomios de Hermite $(H_{2n}(t))$

Calcula la transformada de Laplace para los polinomios de Hermite $(H_{2n}(t))$ dado por la expresión

$$f(t) \quad = \quad \frac{n!}{(2n)!\sqrt{\pi t}} H_{2n}(t)$$

Solución 1.4.8

$$\mathcal{L}(H_{2n}(t)) \quad = \quad \frac{(1-s)^n}{s^{n+1/2}} \tag{1.121}$$

Ejemplo 1.4.9. Transformada de los polinomios de Hermite $(H_{2n+1}(t))$

Calcula la transformada de Laplace para los polinomios de Hermite $(H_{2n+1}(t))$ dado por la expresión

$$f(t) \quad = \quad \frac{-n!}{\sqrt{\pi}(2n+1)!} H_{2n+1}(t)$$

Solución 1.4.9

$$\mathcal{L}(H_{2n}(t)) \quad = \quad \frac{(1-s)^n}{s^{n+3/2}} \tag{1.122}$$

Ejemplo 1.4.10. Transformada de las funciones Bessel de orden cero

Calcula la transformada de Laplace de las funciones Bessel de orden cero $J_0(at)$

Solución 1.4.10 *La función de Bessel de orden cero tiene la siguiente representación en serie*

$$J_0(at) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{at}{2}\right)^{2n}$$

Aplicamos la definición dada en (1.111)

$$\mathcal{L}\{J_0(at)\} = \int_0^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{at}{2}\right)^{2n}\right) e^{-st}\, dt$$

Dado que la serie es absolutamente convergente, podemos intercambiar el orden de la suma y la integral:

$$\mathcal{L}\{J_0(at)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{a}{2}\right)^{2n} \int_0^{\infty} t^{2n} e^{-st}\, dt$$

Utilizando el resultado obtenido en (1.115) y sustituyendo en la expresión anterior

$$\mathcal{L}\{J_0(at)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} \frac{(2n)!}{s^{2n+1}}$$

Podemos simplificar la expresión usando la relación $\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}$*, el coeficiente binomial central:*

$$\mathcal{L}\{J_0(at)\} = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(-\frac{a^2}{4s^2}\right)^n$$

Esta es una serie geométrica cuyo resultado es conocido:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(-\frac{a^2}{4s^2}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{s^2}}}$$

Sustituyendo en la expresión de la transformada de Laplace, obtenemos:

$$\mathcal{L}\{J_0(at)\} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{s^2}}}$$

Simplificando:

$$\mathcal{L}\{J_0(at)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$$

Ejemplo 1.4.11. Transformada de los polinomios de Jacoby

Calcula la transformada de Laplace de los polinomios de Jacoby $J_n(at)$

Solución 1.4.11 *Usamos la expresión en términos de sumatoria para* J_n

$$J_n(at) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{at}{2}\right)^{n+2k}$$

Sustituimos esta expresión en la definición dada en (1.111)

$$\mathcal{L}\{J_n(at)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{at}{2}\right)^{n+2k}\right) dt$$

Dado que la serie converge uniformemente en el intervalo de integración, podemos intercambiar la suma y la integral:

$$\mathcal{L}\{J_n(at)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{a}{2}\right)^{n+2k} \int_0^{\infty} e^{-st} t^{n+2k} dt$$

Ahora utilizando el resultado obtenido en (1.115) y expresando este resultado en término de la función gamma tenemos

$$\mathcal{L}\{J_n(at)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{a}{2}\right)^{n+2k} \cdot \frac{\Gamma(n+2k+1)}{s^{n+2k+1}}$$

$$\mathcal{L}(J_n(at)) = \frac{1}{a^n} \frac{\left(\sqrt{s^2+a^2}-s\right)^n}{\sqrt{s^2+a^2}} \tag{1.123}$$

Ejemplo 1.4.12. Transformada de la función Delta de Dirac

Calcula la transformada de Laplace de la función Delta de Dirac $\delta(t-a)$

Solución 1.4.12 *En primer lugar vamos a recordar la propiedad "selección de valor" de la función Delta de Dirac La función Delta de Dirac que implica que, para cualquier función* $f(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a) \tag{1.124}$$

de la definición de la transformada tenemos

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\delta(t-a)dt$$

por la propiedad (1.124) tenemos que

$$\mathcal{L}(\delta(t-a)) \quad = \quad e^{-as} \tag{1.125}$$

1.4.2. Transformada de Laplace inversa y transformada de derivadas

EL PROBLEMA INVERSO Si $F(s)$ representa la transformada de Laplace de una función $f(t)$, es decir, $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, se dice entonces que $f(t)$ es la transformada de Laplace inversa de $F(s)$ y se escribe $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$. En el caso de los ejemplos desarrollados de la sección (especificar) tenemos la siguiente tabla

Transformada	**Transformada Inversa**
$\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{1}{s^n}$	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad n > 1$
$\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}$	$\sin(at)$
$\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(at)$
$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$	e^{at}
$\mathcal{L}\{\cosh(at)\} = \dfrac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$
$\mathcal{L}\{\sinh(at)\} = \dfrac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh(at)$

Cuadro 1.4: Transformadas de Laplace inversas

Ahora a traves de varios ejemplos mostraremos como calcular la transformada inversa

Ejemplo 1.4.13. Transformada inversa de laplace de la forma $\dfrac{1}{s^n}$

Calcula la transformada inversa de

$$F(s) = \frac{1}{s^3}$$

Solución 1.4.13 *Observando las transformadas inversas de laplace dada en la tabla(enumerar), tenemos*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} \\
&= \frac{t^2}{2!} \\
\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= \frac{t^2}{2}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.4.14. Transformada inversa de laplace de la forma $\dfrac{a}{s^2+a^2}$

Calcula la transformada inversa de

$$F(s) = \frac{5}{s^2+49}$$

Solución 1.4.14 *Como se puede notar la función $F(s)$ no es ninguna de las fórmulas de la tabla (enumerar), lo que significa que debemos reacomodar la función para luego aplicar la fórmula. En primer lugar multiplicaremos por $\frac{7}{7}$*

$$F(s) = \frac{5}{s^2+49}\,\frac{7}{7}$$
$$F(s) = \frac{5}{7}\,\frac{7}{s^2+49}$$

Tomando transformada inversa

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{5}{7}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7}{s^2+49}\right\}$$

Aplicando la fórmula de la transformada inversa

$$f(t) = \frac{5}{7}\sin(7t)$$

$\mathcal{L}^{-1}$ es una trasnformada lineal

La transformada de Laplace inversa es también una transformada lineal para las constantes α y β

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} \tag{1.126}$$

donde F y G son las transformadas de algunas funciones f y g. Este resultado se extiende a cualquier combinación lineal finita de transformadas de Laplace.

Al momento de evaluar la transformada inversa de laplace, puede que una función de s no esté en la forma en la que se pueda aplicar una de la fórmula presentada en la tabla, una forma de lograr esto es aplicar fracciones parciales.

Ejemplo 1.4.15. Transformada inversa de laplace de la forma $\dfrac{2}{s^2+a^2}$

Calcula la transformada inversa de

$$F(s) = \frac{4s}{4s^2+1}$$

Solución 1.4.15 *En primer reescriberemos $F(s)$ de manera que podamos aplicar algunas de las fórmulas dadas en la tabla (enumerar). Factorizando el denominador*

$$F(s) = \frac{4s}{4\left(s^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right)}$$

Simplificando y tomando transformada inversa

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right\}$$

Obtenemos el resultado final

$$f(t) = \cos\left(\frac{1}{2}t\right)$$

Ejemplo 1.4.16. Transformada inversa de laplace de las formas $\dfrac{a}{s^2+a^2}$ y $\dfrac{s}{s^2+a^2}$

Calcula la transformada inversa de

$$F(s) = \frac{2s-6}{s^2+9}$$

Solución 1.4.16 *En primer lugar vamos a separar la fracción para el denominador común*

$$F(s) = \frac{2s}{s^2+9} - \frac{6}{s^2+9}$$

Por linealidad de la transformada inversa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+9}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^2+9}\right\} \\ &= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\} \end{aligned}$$

Aplicando las fórmulas de transformadas inversas tenemos

$$f(t) = 2\cos(3t) - 2\sin 3t = 2\left(\cos(3t) - \sin(3t)\right)$$

Ejemplo 1.4.17. Transformada inversa de laplace de la forma $\dfrac{1}{s-a}$

Calcula la transformada inversa de

$$F(s) = \frac{s}{s^2+2s-3}$$

Solución 1.4.17 *En primer lugar realizaremos la descomposición en fracciones parciales*

$$F(s) = \frac{s}{(s-1)(s+3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+3}$$

Realizando el proceso para calcular los valores para A y B, la función anterior podemos reescribirla

$$F(s) = \frac{1}{4(s-1)} + \frac{3}{4(s+3)}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace

$$f(t) = \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}$$

Por las fórmulas dadas en la tabla obtenemos el resultado final

$$f(t) = \frac{1}{4}e^{t} + \frac{3}{4}e^{-3t}$$

Ejemplo 1.4.18. Transformada inversa de laplace de la forma $\dfrac{1}{s-a}$, $\dfrac{s-a}{(s-a)^2+a^2}$ y $\dfrac{1}{(s-a)^2+a^2}$

Calcula la transformada inversa de

$$F(s) = \frac{s+3}{s^3-3s^2+4s-2}$$

Solución 1.4.18 *En primer lugar aplicamos fracciones parciales*

$$F(s) = \frac{s+3}{(s-1)(s^2-2s+2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2-2s+2}$$

donde debemos calcular los valores de A, B, y C.
Multiplicamos ambos lados por $(s-1)(s^2-2s+2)$ para eliminar los denominadores

$$s+3 = A(s^2-2s+2) + (Bs+C)(s-1)$$

Desarrollamos los términos en el lado derecho de la expresión anterior

$$s+3 = As^2 - 2As + 2A + Bs^2 + Cs - Bs - C$$

Agrupamos los términos en potencias de s

$$s + 3 \quad = \quad (A+B)s^2 + (C - 2A - B)s + (2A - C)$$

Igualamos los coeficientes en ambos lados de la ecuación para obtener un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} &A + B = 0 \\ &C - 2A - B = 1 \\ &2A - C = 3 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuación obtenemos que $A = 4$, $B = -4$, y $C = 5$. Ahora podemos escribir $F(s)$ como

$$F(s) \quad = \quad \frac{4}{s-1} + \frac{-4s+5}{s^2 - 2s + 2}$$

Ahora factorizamos el trinomio del denominador, de forma que la expresión anterior se expresa como

$$F(s) \quad = \quad \frac{4}{s-1} - 4\frac{s-1}{(s-1)^2+1} + \frac{1}{(s-1)^2+1}$$

Calculando la transformada inversa tenemos

$$f(t) \quad = \quad 4e^t - 4\cosh(t) + \sinh(t)$$

Teorema 1.4.3: Transformada de Laplace de una derivada

Sea f continua en $[0, \infty)$ y suponga que f' es continua a pedazos en $[0, \tau]$ para todo τ positivo. Suponga también que $\lim\limits_{\tau\to\infty} e^{-s\tau} f(\tau) = 0$ si $s > 0$. Entonces

$$\mathcal{L}\left[f'\right](s) = sF(s) - f(0) \tag{1.127}$$

Es decir, la transformada de la Laplace f' es s veces la transformada de f evaluada en s, menos el valor de la función evaluada en cero.

Demostración 1.4.3 *Aplicando la definición de transformada de Laplace, tenemos En primer lugar aplicamos integración por partes, con $u = e^{-st}$ y $d\nu = f'(t)dt$. Para $k > 0$,*

$$\begin{aligned} \int_0^\tau e^{-st} f'(t)dt &= \left[e^{-st} f(t)\right]_0^\tau - \int_0^\tau -se^{-st} f(t)dt \\ &= e^{-s\tau} f(k) - f(0) + s\int_0^\tau e^{-st} f(t)dt \end{aligned}$$

Tome el límite conforme $\tau \to \infty$ por hipótesis $e^{-sk} f(k) \to 0$ de manera que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[f'\right](s) &= \lim_{k\to\infty}\left[e^{-s\tau} f(\tau) - f(0) + s\int_0^\tau e^{-st} f(t)dt\right] \\ &= -f(0) + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = -f(0) + sF(s) \\ \mathcal{L}\left[f'\right](s) &= sF(s) - f(0) \end{aligned}$$

Para problemas que involucran ecuaciones diferenciales de segundo orden o mayor, se necesita una expresión que generaliza el teorema anterior para derivadas superiores. $f^{(j)}$ denota la j-ésima derivada de f y $f^{(0)} = f$.

Teorema 1.4.4: Transformada de Laplace de una derivada superior

Suponga que $f, f', \cdots, f^{n-1}$ son continuas en $[0, 1)$, y $f^{(n)}$ es continua a pedazos en $[0, \tau]$ para todo τ positivo. También que $\lim\limits_{\tau\to\infty} e^{-s\tau} f^{j}(\tau) = 0$ para $s > 0$ y para $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Entonces

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \tag{1.128}$$

Demostración 1.4.4 *Para demostrar este teorema utilizaremos inducción matemática, lo cual desarrollaremos a continuación*

- *Probaremos que la expresión se cumple para $n = 2$.*

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = \mathcal{L}\{f'(t)\}' = s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0).$$

  Sustituyendo la expresión obtenida en (1.127)

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s(s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)) - f'(0),$$

  lo que simplifica a

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$

- *Ahora supondremos que la fórmula es válida para la n-ésima derivada*

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

- *Ahora demostraremos que esto es cierto para $(n+1)$. Aplicamos la transformada de Laplace a $(f^{(n+1)}(t))$*

$$\mathcal{L}\{f^{(n+1)}(t)\} = s\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} - f^{(n)}(0).$$

  Sustituyendo la hipótesis de inducción para $(\mathcal{L}f^{(n)}(t))$

$$\mathcal{L}\{f^{(n+1)}(t)\} = s\left(s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)\right) - f^{(n)}(0).$$

  Distribuyendo el factor (s)

$$\mathcal{L}\{f^{(n+1)}(t)\} = s^{n+1}\mathcal{L}\{f(t)\} - s^n f(0) - s^{n-1}f'(0) - \cdots - sf^{(n-1)}(0) - f^{(n)}(0)$$

  Por lo tanto, la fórmula es válida para $(n+1)$, completando la demostración por inducción.

La **transformada de Laplace** es una técnica matemática utilizada principalmente para resolver **ecuaciones diferenciales** lineales, ya que transforma funciones dependientes del tiempo en funciones dependientes de una variable compleja s. Esto permite convertir ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas, que son más fáciles de manejar.

Utilidad clave

- **Simplificación del problema**: En lugar de resolver ecuaciones diferenciales complejas directamente, la transformada de Laplace las convierte en problemas algebraicos.
- **Condiciones iniciales**: La transformada de Laplace incorpora las condiciones iniciales de manera natural, evitando pasos adicionales en su tratamiento.
- **Aplicación en sistemas dinámicos**: Es muy útil en campos como la ingeniería, donde se aplican a sistemas eléctricos, mecánicos o de control.

Lineamientos
A continuación, presentaremos algunas directrices a seguir para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias.

1. Toma la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación. Esto da como resultado lo que se llama la ecuación transformada.
2. Obtén una ecuación $\mathcal{L}(y) = F(s)$, donde $F(s)$ es una expresión algebraica en la variable s.
3. Aplica la transformada inversa para obtener la solución $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$

En los siguientes ejemplos desarrollaremos los pasos para resolver EDO con transformada de Laplace, denotaremos por $Y(s), X(s)$ las transformadas de Laplace de las funciones $y(t), x(t)$ respectivamente.

Ejemplo 1.4.19. Solución EDO por transformada de Laplace

Utiliza la transformada de Laplace para resolver la ED dada por

$$y'' - 6y' + 9y \quad = \quad t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$$

Solución 1.4.19 *En primer aplicamos la transformada de Laplace, luego por la expresión(1.128), tenemos*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y''(t)\} &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) \\
\mathcal{L}\{y'(t)\} &= sY(s) - y(0) \\
\mathcal{L}\{y(t)\} &= Y(s) \\
\mathcal{L}\{t\} &= \frac{1}{s^2}
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial original

$$s^2Y(s) - s \cdot 0 - 1 - 6(sY(s) - 0) + 9Y(s) \quad = \quad \frac{1}{s^2}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales y simplificando

$$s^2Y(s) - 1 - 6sY(s) + 9Y(s) \quad = \quad \frac{1}{s^2}$$

Agrupamos los términos de $Y(s)$

$$(s^2 - 6s + 9)Y(s) = \frac{1}{s^2} + 1$$

Factorizando el lado izquierdo de la expresión anterior y despejando $Y(s)$

$$Y(s) \quad = \frac{1}{(s-3)^2}\left(\frac{1}{s^2}+1\right) = \quad \frac{s^2+1}{(s-3)^2 s^2}$$

Queremos descomponer $Y(s)$ *en fracciones parciales, por lo que planteamos la siguiente ecuación*

$$Y(s) \quad = \frac{s^2+1}{(s-3)^2 s^2} = \quad \frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s-3}+\frac{D}{(s-3)^2} \tag{1.129}$$

Multiplicamos ambos lados por el denominador común $(s-3)^2 s^2$ *para obtener:*

$$s^2+1 = As(s-3)^2 + B(s-3)^2 s + Cs(s-3) + Ds^2$$

Expandiendo los términos del lado derecho, obtenemos:

$$s^2+1 = A(s^3-6s^2+9s) + B(s^2-6s+9) + C(s^3-3s^2) + Ds^2$$

Agrupamos términos por potencias de s:

$$s^2+1 = (A+C)s^3 + (-6A+B-3C+D)s^2 + (9A-6B)s + 9B$$

Ahora igualando los coeficientes de los términos correspondientes tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -6A+B-3C+D=1 \\ 9A-6B=0 \\ 9B=1 \end{cases}$$

De la cuarta ecuación $9B=1$, *despejamos* B

$$B=\frac{1}{9}$$

Ahora sustituimos el valor de B *en la tercera ecuación y obtenemos que*

$$A=\frac{2}{27}$$

De la primera ecuación obtenemos que

$$C=-\frac{2}{27}$$

Sustituimos los valores ya conocido en la segunda ecuación

$$-6\cdot\frac{2}{27}+\frac{1}{9}-3\cdot\left(-\frac{2}{27}\right)+D=1$$

Simplificamos cada término llegamos a

$$D=\frac{10}{9}$$

Por lo tanto, los valores de las variables son

$$A = \frac{2}{27}, \quad B = \frac{1}{9}, \quad C = -\frac{2}{27}, \quad D = \frac{10}{9}$$

Ahora la expresión (1.129) se puede expresar como

$$Y(s) \quad = \quad \frac{2/27}{s} + \frac{1/9}{s^2} + \frac{-2/27}{s-3} + \frac{10/9}{(s-3)^2}$$

Por lo tanto, la transformada inversa de $Y(s)$ es:

$$y(t) = \frac{2}{27} + \frac{1}{9}t - \frac{2}{27}e^{3t} + \frac{10}{9}te^{3t}$$

1.4.3. Propiedades Operaciones

Traslación en el eje s

Teorema 1.4.5: Primer teorema de traslación

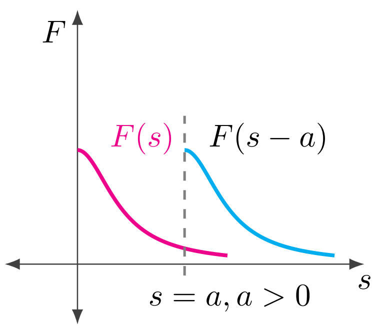
Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ y a es cualquier número real, entonces

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} \quad = \quad F(s-a) \qquad (1.130)$$

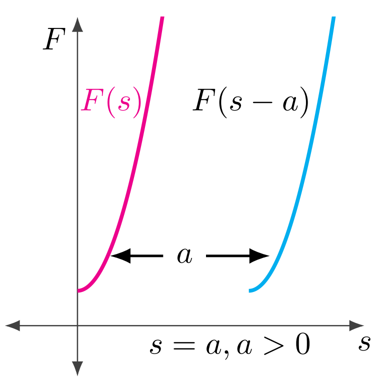
Demostración 1.4.5 *La demostración es inmediata, aplicando la definición de transformada (1.111)*

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} \quad = \int_0^{\infty} e^{-st}e^{at}f(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}f(t)dt = \quad F(s-a)$$

Si se considera s una variable real, entonces la gráfica de $F(s-a)$ es la gráfica de $F(s)$ desplazada en el eje s por la cantidad $|a|$. Si $a > 0$, la gráfica de $F(s)$ se desplaza a unidades a la derecha, mientras que si $a < 0$, la gráfica se desplaza $|a|$ unidades a la izquierda. Véase la figura (hacer la figura).



(a) Desplazamiento en el eje s.



(b) Desplazamiento en el eje s.

Figura 1.28: Primer teorema de traslación

Ejemplo 1.4.20. Primer teorema de traslación

Calcula la transformada de Laplace de

$$f(t) = t^2e^{at}$$

Solución 1.4.20 *Como*

$$\mathcal{L}\{t^2\} \quad = \quad \frac{2}{s^3}$$

Entonces por (1.130)

$$\mathcal{L}\{t^2e^{at}\} \quad = \quad \frac{2}{(s-a)^3} \quad (\mathcal{R}e(s) > a)$$

De manera general

$$\mathcal{L}\{t^ne^{at}\} \quad = \quad \frac{n!}{(s-a)^{n+1}},\ n = 0, 1, 2, 3, ... \quad (\mathcal{R}e(s) > a) \qquad (1.131)$$

Lo cual nos permite obtener la siguiente fórmula para la transformada inversa

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-a)^{n+1}}\right) = \frac{1}{n!}t^n e^{at}, \quad t \geq 0 \tag{1.132}$$

Ejemplo 1.4.21. Dos forma de calcular la transformada de Laplace

Calcula la transformada de Laplace de

$$f(t) = e^{-3t}\cos(5t)$$

a. Utilizando la definición de transformada de Laplace dada en (1.111)

b. Utilizando el teorema (1.4.5)

Solución 1.4.21 *a. Por la definición de transformada de Laplace (1.111)*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{e^{-3t}\cos(5t)\right\} &= \int_0^\infty e^{-st}e^{-3t}\cos(5t)dt \\ &= \int_0^\infty e^{(-s-3)t}\cos(5t)dt\end{aligned}$$

Ahora vamos aplicar integración por partes para resolver la integral anterior, tomando

$$\begin{aligned} u &= \cos(5t) \quad du = & -5\sin(5t)dt \\ dv &= e^{(-s-3)t}dt \quad v = & -\frac{e^{(-s-3)t}}{s+3}\end{aligned}$$

De forma que la transformada de Laplace se puede escribir

$$\mathcal{L}\left\{e^{-3t}\cos(5t)\right\} = -\frac{e^{(-s-3)t}\cos(5t)}{s+3}\Bigg|_0^\infty - \frac{5}{s+3}\int_0^\infty e^{(-s-3)t\sin(5t)}dt$$

Evaluando la primera expresión de lado derecho y simplificando

$$\mathcal{L}\left\{e^{-3t}\cos(5t)\right\} = -\frac{1}{s+3} - \frac{5}{s+3}\int_0^\infty e^{(-s-3)t\sin(5t)}dt$$

Como podemos notar la integrar del lado derecho puede aplicarse integración por partes, por lo tanto

$$\begin{aligned} u &= \sin(5t) \quad du = & 5\cos(5t)dt \\ dv &= e^{(-s-3)t}dt \quad v = & -\frac{e^{(-s-3)t}}{s+3}\end{aligned}$$

Reemplazando en la integral anterior, tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{e^{-3t}\cos(5t)\right\} = &-\frac{1}{s+3} \\ &-\frac{5}{s+3}\left[-\frac{e^{-(s+3)t}\sin(5t)}{s+3}\Bigg|_0^\infty + \frac{5}{s+3}\int_0^\infty e^{-(s+3)t}\cos(5t)\,dt\right]\end{aligned}$$

Evaluando y simplificando llegamos a

$$\mathcal{L}\left\{e^{-3t}\cos(5t)\right\} = \frac{1}{s+3} - \frac{25}{(s+3)^2}\int_0^{\infty} e^{(-s-3)t\cos(5t)}dt$$

Observamos que la integral de lado es la misma del lado izquierdo, de manera que agrupando términos semejantes y despejando la integral tenemos

$$\mathcal{L}\left\{e^{-3t}\cos(5t)\right\} = \frac{1}{s+3} \times \frac{(s+3)^2}{(s+3)^2+25}$$

Simplificando obtenemos el resultado esperado

$$\mathcal{L}\left\{e^{-3t}\cos(5t)\right\} = \frac{s+3}{(s+3)^2+25}$$

b. Ahora vamos a obtener el mismo resultado anterior pero utilizando la expresión (1.130), como se puede notar

$$f(t) = \cos(5t)$$

y

$$\mathcal{L}\left\{\cos(5t)\right\} = F(s) = \frac{s}{s^2+25}$$

Evaluando la función $F(s)$ en $s+3$, tenemos el resultado final

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+3)^2+25}$$

Ejemplo 1.4.22. Solución EDO por transformada de Laplace

Utiliza la transformada de Laplace para resolver la ED dada por

$$y'' - y' = e^t \cos t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$$

Solución 1.4.22 *Sabemos de la expresión (1.128) que la transformada de Laplace de $y'(t)$ y $y''(t)$ son*

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0)$$

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$$

Dado que $y(0) = 0$ y $y'(0) = 0$, obtenemos

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s), \quad \mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2Y(s)$$

De manera que la ED se transforma en

$$s^2Y(s) - sY(s) = \mathcal{L}\{e^t \cos t\}$$

Para obtener la transformada de $e^t \cos t$, utilizamos la expresión (1.130), por lo tanto tenemos

$$s^2Y(s) - sY(s) = \frac{s-1}{(s-1)^2+1}$$

Factorizamos $Y(s)$

$$s(s-1)Y(s) = \frac{s-1}{(s-1)^2+1}$$

Despejamos $Y(s)$ dividiendo por $s(s-1)$

$$Y(s) = \frac{1}{s((s-1)^2+1)}$$

Queremos descomponer $Y(s)$ en fracciones parciales

$$\frac{1}{s((s-1)^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B(s-1)+C}{(s-1)^2+1}$$

Multiplicamos ambos lados por $s((s-1)^2+1)$ para eliminar denominadores

$$1 = A((s-1)^2+1) + s(B(s-1)+C)$$

Expandiendo el lado derecho y factorizando obtenemos

$$1 = (A+B)s^2 + (-2A-B+C)s + 2A$$

Igualamos los coeficientes de s^2, s, y el término constante:

$$\begin{aligned} A+B &= 0 \\ -2A-B+C &= 0 \\ 2A &= 1 \end{aligned}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones

- *De $2A = 1$, obtenemos $A = \frac{1}{2}$.*
- *Sustituyendo $A = \frac{1}{2}$ en $A+B=0$, obtenemos $B = -\frac{1}{2}$.*
- *Sustituyendo $A = \frac{1}{2}$ y $B = -\frac{1}{2}$ en $-2A-B+C=0$, obtenemos:*

$$-2\left(\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, tenemos

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{2}$$

La descomposición en fracciones parciales es

$$Y(s) = \frac{1}{2s} + \frac{-\frac{1}{2}s+1}{(s-1)^2+1}$$

Aplicamos la transformada inversa de Laplace a cada término

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} \quad = \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2s} + \frac{-\frac{1}{2}s+1}{(s-1)^2+1}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{2}s+1}{(s-1)^2+1}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{2}(s-1)}{(s-1)^2+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/2}{(s-1)^2+1}\right\}$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación diferencial es

$$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^t\cos(t) + \frac{1}{2}e^t\sin(t)$$

Traslación en el eje t

Función de heaviside
La función escalón de Heaviside, también llamada función escalón unitario o de causalidad a la derecha del cero, debe su nombre al matemático inglés Oliver Heaviside.

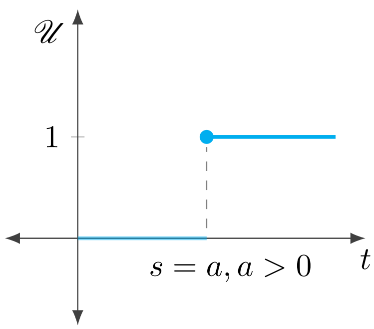


Figura 1.29: Función Escalon unitario.

$$u : \mathbb{R} \to \{0,1\}$$
$$x \mapsto u(x)$$

que se define de esta forma:

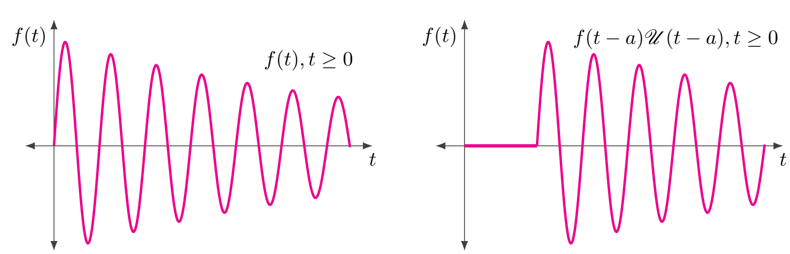
$$u(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 1, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Esta parte de la funcion heaviside tomar en cuenta si se puede poner en el apéndice o dejar como pequena introduccion aqui

Teorema 1.4.6: Segundo teorema de traslación

Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ y $a > 0$, entonces

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}F(s) \tag{1.133}$$



(a) Desplazamiento en el eje t **(b)** Desplazamiento en el eje $f(t-a)$

Figura 1.30: Segundo teorema de traslación.

Demostración 1.4.6 *Por la propiedad de intervalo aditivo de integrales,*

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t-a)\mathcal{U}(t-a)dt$$

se puede escribir como dos integrales

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} &= \int_0^a e^{-st}f(t-a)\underbrace{\mathcal{U}(t-a)}_{\substack{cero\ para\\ 0\le t<a}}dt + \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)\underbrace{\mathcal{U}(t-a)}_{\substack{uno\ para\\ t\ge a}}dt\\ &= \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)dt.\end{aligned}$$

Ahora si hacemos $v = t - a, dv = dt$ en la última integral, entonces

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-s(v+a)}f(v)dv = e^{-as}\int_0^\infty e^{-sv}f(v)dv = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\}$$

Si queremos encontrar la transformada de la función escalo unitario, es decir, $\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)\}$, se puede notar que $f(t-a) = 1$ lo que implica que $f(t) = 1$ y $\mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$, por lo tanto

$$\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s} \tag{1.134}$$

De la expresión (1.133) dada en el teorema (**??**) tenemos la fórmula para obtener la transformada inversa dada por

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-as}F(s)\right\} = f(t-a)\mathcal{U}(t-a) \quad a>0 \tag{1.135}$$

Ejemplo 1.4.23. Solución EDO por transformada de Laplace

Utiliza la transformada de Laplace para resolver la ED dada por

$$y'' + 4y = \sin(t)\mathcal{U}(t-2\pi), \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$$

Solución 1.4.23 *En primer lugar tomamos la transformada de Laplace a la ecuación dada*

$$\mathcal{L}\{y''+4y\} = \mathcal{L}\{\sin(t)\mathcal{U}(t-2\pi)\}$$

*Aplicando los resultados obtenidos en el teorema (**??**)*

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s) = \mathcal{L}\{\sin(t-2\pi)\mathcal{U}(t-2\pi)\}$$

De las condiciones iniciales y de la expresión (1.133)

$$s^2Y(s) - s + 4Y(s) = \frac{e^{-2\pi}}{s^2+1}$$

Simplificando y despejando $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{s+\dfrac{e^{-2\pi}}{s^2+1}}{s^2+4} = \frac{s}{s^2+4} + \frac{e^{-2\pi}}{(s^2+4)(s^2+1)}$$

Tomando transformada inversa

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2\pi s}}{(s^2+4)(s^2+1)}\right\}$$

De las expresiones (tablaenumerar) y (1.135)

$$y(t) \quad = \quad \cos(2t) + \mathcal{U}(t-2\pi)\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+4)(s^2+1)}\right\}$$

Para obtener la transformada inversa restante vamos a utilizar fracciones parciales, por lo que expresión anterior queda

$$y(t) \quad = \quad \cos(2t) + \mathcal{U}(t-2\pi)\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+4}\right)\right\}$$

Como se puede notar las transformadas inversas que resultan son inmediatas, por lo que

$$y(t) \quad = \quad \cos(2t) + \frac{1}{3}\mathcal{U}(t-2\pi)\big(\sin(t) - \sin(2t)\big)$$

Derivadas de una transformada

Multiplicación de una función por t^n

La transformada de Laplace del producto de una función $f(t)$ con t^n se puede encontrar derivando la transformada de Laplace de $f(t)$. Para motivar este resultado, se supone que $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existe y que es posible intercambiar el orden de la derivada y la integral(teorema de leibniz). Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}F(s) &= \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt \\
&= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\left[e^{-st}f(t)\right]\,dt \\
&= -\int_0^\infty e^{-st}tf(t)\,dt \\
&= -\mathcal{L}\{tf(t)\},
\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Se puede usar este último resultado para encontrar la transformada de Laplace de $t^2f(t)$

$$\mathcal{L}\left\{t^2f(t)\right\} = \mathcal{L}\{t\cdot tf(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}\left(-\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}\right) = \frac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Los dos casos anteriores sugieren el resultado general para $\mathcal{L}\{t^nf(t)\}$ el cual se presenta como teorema a continuación.

Teorema 1.4.7: Derivadas de transformadas

Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ y $n = 1, 2, 3, ...$ entonces

$$\mathcal{L}\{t^nf(t)\} \quad = \quad (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s) \tag{1.136}$$

Demostración 1.4.7 *Hacer por inducción matematica*
Como caso particular de (1.136) tenemos para $n = 1$

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s)$$

Tomando transformada inversa a ambos lados

$$\mathcal{L}^{-1}\Big\{\mathcal{L}\{tf(t)\}\Big\} = -\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{d}{ds}F(s)\Big\}$$

Simplificando

$$f(t) = -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{d}{ds}F(s)\Big\} \tag{1.137}$$

Ejemplo 1.4.24. Derivadas de una transformada de Laplace

Calcula la transformada de Laplace de

$$f(t) = t^3 \sinh(2x)$$

Utilizando el teorema (1.4.7)

Solución 1.4.24 *De la expresión (1.136)*

$$\mathcal{L}\{t^3 \sinh(2x)\} = -\frac{d^3}{dx^3}\{\sinh(2x)\}$$

De los resultados presentados en la tabla(enumerarde transformada)

$$\mathcal{L}\{t^3 \sinh(2x)\} = -\frac{d^3}{ds^3}\{\frac{2}{s^2-4}\}$$

Ahora vamos a proceder a calcular las derivadas

$$\begin{aligned}
\frac{d^3}{ds^3}\left(\frac{2}{s^2-4}\right) &= \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s^2-4}\right)\right) \\
&= \frac{d}{ds}\left(\frac{d}{ds}\left(\frac{-4s}{(s^2-4)^2}\right)\right) \\
&= \frac{d}{ds}\left(\frac{16s^2}{(s^2-4)^3} - \frac{4}{(s^2-4)^2}\right) \\
&= 48s\left(\frac{1}{(s^2-4)^3} - \frac{2s^2}{(s^2-4)^4}\right)
\end{aligned}$$

De donde concluimos que

$$\mathcal{L}\{t^3 \sinh(2x)\} = 48s\left(\frac{2s^2}{(s^2-4)^4} - \frac{1}{(s^2-4)^3}\right)$$

Ejemplo 1.4.25. Transformada inversa de Laplace de una derivada

Calcula la transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \log\left(\frac{s+a}{s+b}\right)$$

Solución 1.4.25 *Aplicando la expresión (1.137)*

$$\begin{aligned} f(t) &= -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\log\left(\frac{s+a}{s+b}\right)\right\} \\ &= -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}\right\} \end{aligned}$$

Por linealidad de la transformada inversa y por transformada inversas básicas tenemos

$$f(t) = \frac{1}{t}\left(e^{-bt}-e^{-at}\right)$$

El siguiente ejemplo muestra la importancia de los teoremas (1.4.5) y (1.4.7) al momento de calcular la transformada de Laplace

Ejemplo 1.4.26. Tres forma de calcular una transformada de Laplace

Calcula la transformada de Laplace de

$$f(t) = t^2e^t$$

a. Utilizando la definición de transformada de Laplace dada en (1.111)

b. Utilizando el teorema (1.4.5)

c. Utilizando el teorema (1.4.7)

Solución 1.4.26 *a. Utilizando la expresión (1.111) de la definición de la transformada de Laplace,*

$$\mathcal{L}\{t^2e^t\} = \int_0^\infty t^2e^{(1-s)t}\,dt$$

Usamos la integración por partes para resolver la integral. Ahora tomamos

$$u = t^2, \quad dv = e^{(1-s)t}\,dt$$

Entonces,

$$du = 2t\,dt, \quad v = \frac{e^{(1-s)t}}{1-s}$$

Aplicando integración por partes:

$$\int t^2e^{(1-s)t}\,dt = t^2\cdot\frac{e^{(1-s)t}}{1-s}\bigg|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{(1-s)t}}{1-s}\cdot 2t\,dt$$

Al evaluar en los límites de integración, obtenemos que

$$\lim_{t\to\infty} t^2e^{(1-s)t} = 0 \quad \text{(para } s>1\text{)}$$

Por lo tanto, el primer término es cero y la integral se reduce a la expresión

$$\int_0^\infty t^2 e^{(1-s)t}\,dt = \frac{2}{1-s}\int_0^\infty te^{(1-s)t}\,dt \tag{1.138}$$

Para resolver esta nueva integral, aplicamos integración por partes nuevamente.

Tomamos:

$$u = t, \quad dv = e^{(1-s)t}\,dt$$

Entonces,

$$du = dt, \quad v = \frac{e^{(1-s)t}}{1-s}$$

Aplicando integración por partes nuevamente:

$$\int te^{(1-s)t}\,dt = t\cdot\frac{e^{(1-s)t}}{1-s}\bigg|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{(1-s)t}}{1-s}\,dt$$

Como antes, al evaluar en los límites de integración, obtenemos cero para el primer término (siempre que $s > 1$). Por lo tanto,

$$\int_0^\infty te^{(1-s)t}\,dt = \frac{1}{1-s}\int_0^\infty e^{(1-s)t}\,dt$$

Ahora nos queda una integral exponencial simple:

$$\int_0^\infty e^{(1-s)t}\,dt = \frac{1}{s-1} \quad \textit{(para } s>1\textit{)}$$

Entonces,

$$\int_0^\infty te^{(1-s)t}\,dt = \frac{1}{(1-s)^2}$$

Sustituyendo este resultado en la expresión (1.138), obtenemos

$$\int_0^\infty t^2 e^{(1-s)t}\,dt = \frac{2}{1-s}\cdot\frac{1}{(1-s)^2} = \frac{2}{(s-1)^3}$$

Así obtenemos la transformada de Laplace para t^2e^t

$$\mathcal{L}\{t^2e^t\} = \frac{2}{(s-1)^3}$$

b. De la expresión (1.130) dada el primer teorema de traslación, identicamos

- *$g(t) = t^2$, cuya transformada de Laplace $\mathcal{L}\{t^2\}$ se puede calcular directamente.*
- *$a = 1$, ya que el exponente de e^t es t.*

Usando la propiedad de la transformada de Laplace para potencias de t

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$$

donde $n = 2$, esto da

$$\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{\Gamma(3)}{s^3} = \frac{2}{s^3}$$

Ahora, aplicamos el teorema de traslación, de modo que

$$\mathcal{L}\{e^t \cdot t^2\} = \mathcal{L}\{t^2\}\Big|_{s\to s-1} = \frac{2}{(s-1)^3}$$

Así la transformada de Laplace es

$$\mathcal{L}\{t^2 e^t\} = \frac{2}{(s-1)^3}$$

c. *Aplicando la expresión (1.136)*

$$\mathcal{L}\{t^2 e^t\} = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-1}\right)$$

Procedemos a calcular la segunda derivada respecto a s

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-1}\right) = -\frac{1}{(s-1)^2},$$

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-1}\right) = \frac{2}{(s-1)^3}.$$

Por lo tanto, la transformada de Laplace de $f(t) = t^2 e^t$ es

$$\mathcal{L}\{t^2 e^t\} = \frac{2}{(s-1)^3}$$

1.4.4. Convolución

La convolución de dos funciones, $f(t)$ y $g(t)$, definidas para $t > 0$, juega un papel importante en diversas aplicaciones físicas.
La convolución se da mediante la integral

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau \tag{1.139}$$

la cual, por supuesto, existe si f y g son, digamos, funciones por tramos continuas. Al sustituir $u = t - \tau$ se obtiene

$$(f * g)(t) = \int_0^t g(u)f(t-u)\,du = (g * f)(t)$$

es decir, la convolución es **conmutativa**. Otras propiedades de la convolución se dan a continuación

Propiedad 1.4.1: Propiedades de la Convolución

Sean las funciones $f, g,$ y h funciones continuas por tramos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial

1. $$c(f * g) = cf * g = f * cg \quad \text{(Propiedad homogénea. c es una constante)} \tag{1.140}$$

2. $$f * (g * h) = (f * g) * h \quad \text{(Propiedad asociativa)} \tag{1.141}$$

3. $$f * (g + h) = (f * g) + (f * h) \quad \text{(Propiedad distributiva)} \tag{1.142}$$

Propiedad 1.4.2: Propiedades de la Convolución

Sean las funciones $f, g,$ y h funciones continuas por tramos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial

1. $c(f * g) = cf * g = f * cg$ (Propiedad homogénea. c es una constante)
2. $f * (g * h) = (f * g) * h$ (Propiedad asociativa)
3. $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$ (Propiedad distributiva)

Solución 1.4.27 *1.*

$$c(f * g) = c \int_0^t f(\tau) g(t - \tau)\, d\tau.$$

Dado que c es una constante, podemos introducirla en la integral

$$c(f * g) = \int_0^t (cf(\tau)) g(t - \tau)\, d\tau.$$

Observamos que la expresión anterior corresponde a la definición de la convolución de $(cf) * g$

$$c(f*g) = \left((cf)*g\right)(t).$$

Ahora vamos a demostrar $c(f*g) = f*(cg)$

$$f*(cg) = \int_0^t f(\tau)(cg(t-\tau))\,d\tau.$$

Debido a que c *es una constante, podemos sacarla fuera de la integral*

$$f*(cg) = c\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau.$$

Esto es precisamente $c(f*g)$*, lo que demuestra que*

$$c(f*g) = f*(cg).$$

Por lo que hemos demostrado que

$$c(f*g) = (cf)*g = f*(cg),$$

lo cual confirma la propiedad homogénea de la convolución para una constante c*.*

2.

$$\begin{aligned}
[f*(g*h)](t) &= \int_0^t f(\tau)(g*h)(t-\tau)\,d\tau \\
&= \int_0^t f(\tau)\left(\int_0^{t-\tau} g(x)h(t-\tau-x)\,dx\right)d\tau \\
&= \int_0^t \left(\int_\tau^t f(\tau)g(u-\tau)h(t-u)\,du\right)d\tau \quad (x=u-\tau) \\
&= \int_0^t \left(\int_0^u f(\tau)g(u-\tau)\,d\tau\right)h(t-u)\,du \\
&= [(f*g)*h](t)
\end{aligned}$$

3. De acuerdo con la definición de la convolución, tenemos

$$(f*(g+h))(t) = \int_0^t f(\tau)(g+h)(t-\tau)\,d\tau.$$

Expandiendo la expresión dentro de la integral

$$(f*(g+h))(t) = \int_0^t f(\tau)\left(g(t-\tau)+h(t-\tau)\right)\,d\tau.$$

Aplicando la propiedad de linealidad de la integral

$$(f*(g+h))(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau + \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)\,d\tau.$$

Por lo tanto, hemos demostrado que

$$(f*(g+h))(t) = (f*g)(t) + (f*h)(t),$$

o, en forma más compacta:=

$$f * (g + h) = (f * g) + (f * h).$$

Esto completa la demostración de la propiedad distributiva de la convolución.

Ahora mostraremos como utilizaar (1.139) para calcular convolución.

Ejemplo 1.4.27. Convolución de $t * e^t$

Utiliza (1.139) para calcular la convolución de

$$h(t) = t * e^t$$

Solución 1.4.28 *Tomando como $f(t) = e^t$ y $g(t) = t$ tenemos*

$$(f * g)(t) = \int_0^t e^\tau (t - \tau) d\tau$$

Por integració por partes obtenemos

$$(f * g)(t) = te^\tau\big|_0^t - (\tau e^\tau - e^\tau)\big|_0^t$$

Evaluando en los límites de integración

$$(f * g)(t) = e^t - t - 1$$

Una de las propiedades más significativas que posee la convolución en relación con la transformada de Laplace es que la transformada de Laplace de la convolución de dos funciones es el producto de sus transformadas de Laplace.

Teorema 1.4.8: Teorema de Convolución

Si $f(t)$ y $g(t)$ son funciones continuas por tramos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial α, entonces

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s) \quad (\mathcal{R}e(s) > \alpha) \tag{1.143}$$

Demostración 1.4.8 *Comencemos con el producto*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f(t)) \cdot \mathcal{L}(g(t)) &= \left(\int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)\, d\tau\right)\left(\int_0^\infty e^{-su} g(u)\, du\right) \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-s(\tau+u)} f(\tau)g(u)\, du\right) d\tau.\end{aligned}$$

Sustituyendo $t = \tau + u$, y observando que τ es fija en la integral interior, por lo que $du = dt$, tenemos

$$\mathcal{L}(f(t)) \cdot \mathcal{L}(g(t)) = \int_0^\infty \left(\int_\tau^\infty e^{-st} f(\tau)g(t - \tau)\, dt\right) d\tau. \tag{1.144}$$

Si definimos $g(t) = 0$ para $t < 0$, entonces $g(t - \tau) = 0$ para $t < \tau$, y podemos escribir (1.144) como

$$\mathcal{L}(f(t)) \cdot \mathcal{L}(g(t)) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st} f(\tau) g(t-\tau)\, dt\, d\tau.$$

Debido a las hipótesis sobre f y g, las integrales de Laplace de f y g convergen absolutamente y, por lo tanto,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \left| e^{-st} f(\tau) g(t-\tau) \right| \, dt\, d\tau.$$

Converge. Este hecho nos permite invertir el orden de integración, de modo que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(t)) \cdot \mathcal{L}(g(t)) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st} f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau\, dt \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^t e^{-st} f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau \right) dt \\
&= \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau \right) dt \\
&= \mathcal{L}[(f * g)(t)].
\end{aligned}$$

Ahora mostramos como utilizar el teorema de convolución para calcular la transformada de Laplace.

Ejemplo 1.4.28. Transformada de una convolución

Calcula la transformada de Laplace de

$$\mathcal{L}\left\{ e^{2t} * \sin(t) \right\}$$

Solución 1.4.29 *Por el teorema (1.143) tenemos que*

$$\mathcal{L}\left\{ e^{2t} * \sin(t) \right\} = \mathcal{L}\left\{ e^{2t} \right\} \mathcal{L}\left\{ \sin(t) \right\}$$

De las expresiones (1.113) y (1.119) tenemos

$$\mathcal{L}\left\{ e^{2t} * \sin(t) \right\} = \left(\frac{1}{s-2} \right) \left(\frac{1}{s^2+1} \right) = \frac{1}{(s-2)\left(s^2+1\right)}$$

Transformada de una integral Cuando $g(t) = 1$ y $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s) = 1/s$, el teorema de convolución implica que la transformada de Laplace de la integral de f es

$$\mathcal{L}\left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} = \frac{F(s)}{s} \tag{1.145}$$

La forma inversa de (1.145),

$$\int_0^t f(\tau) d\tau = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{F(s)}{s} \right\} \tag{1.146}$$

se puede usar en lugar de las fracciones parciales cuando s^n es un factor del denominador y $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ es fácil de integrar.

Ejemplo 1.4.29. Transformada de una convolución

Calcula la transformada de Laplace de

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{-\tau}\cos(\tau)d\tau\right\}$$

Solución 1.4.30 *Escogiendo como $f(t) = e^{-t}\cos(t)$ y de la expresión (1.145) tenemos que*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{-\tau}\cos(\tau)d\tau\right\} = \frac{\mathcal{L}\left\{e^{-t}\cos(t)\right\}}{s}$$

La transformada anterior se obtiene de inmediato utilizando el resultado obtenido en (1.130), de manera que se obtiene el siguiente resultado

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{-\tau}\cos(\tau)d\tau\right\} = \frac{s-1}{s\left((s-1)^2+1\right)}$$

Ejemplo 1.4.30. Transformada de una convolución

Calcula la transformada de Laplace de

$$\mathcal{L}\left\{t\int_0^t \sin(\tau)d\tau\right\}$$

Solución 1.4.31 *En este ejemplo vamos a calcular la transformada de t por una convolución. De la expresión (1.136)*

$$\mathcal{L}\left\{t\int_0^t \sin(\tau)d\tau\right\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left\{\int_0^t \sin(\tau)d\tau\right\}$$

De la expresión (1.145)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{t\int_0^t \sin(\tau)d\tau\right\} &= -\frac{d}{ds}\frac{\mathcal{L}\left\{\sin(t)\right\}}{s}\\ &= -\frac{d}{ds}\frac{1}{s(s^2+1)}\end{aligned}$$

Derivando obtenemos el resultado final

$$\mathcal{L}\left\{t\int_0^t \sin(\tau)d\tau\right\} = \frac{3s^2+1}{(s^3+s)^2}$$

INVERSA DEL TOEREMA (1.143)

El teorema de convolución en ocasiones es útil para encontrar la transformada de Laplace inversa del producto de dos transformadas de Laplace. Del teorema (1.143), se tiene

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f * g \tag{1.147}$$

Ejemplo 1.4.31. Transformada inversa como una convolución

Utiliza la forma inversa del teorema de convolución para calcular la transforma de Laplace inversa de

$$F(s) = \frac{2}{\left((s-1)^2+1\right)^2}$$

Solución 1.4.32 *La función $F(s)$ se expresar de la forma*

$$F(s) = 2\left(\frac{1}{(s-1)^2+1}\right)\left(\frac{1}{(s-1)^2+1}\right)$$

Tomando transformada inversa de Laplace tenemos

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{(s-1)^2+1}\right)\left(\frac{1}{(s-1)^2+1}\right)\right\} \tag{1.148}$$

En la expresión anterior, podemos ver la transformada inversa de Laplace de un producto, lo cual nos indica que podemos utilizar el resultado obtenido en (1.147)

$$\begin{aligned} f(t) &= 2\int_0^t e^{-\tau}\sin(\tau)e^{-(t-\tau)}\sin((t-\tau))d\tau \\ &= 2\int_0^t e^{-t}\sin(\tau)\sin((t-\tau))d\tau \end{aligned}$$

Para simplificar el integrando, vamos a utilizar la identidad trigonométrica de producto seno a diferencia de coseno

$$f(t) = e^{-t}\int_0^t \cos(2\tau-t)-\cos(t)d\tau$$

Integrando

$$f(t) = e^{-t}\left\{\frac{1}{2}\sin(2\tau-t)-\cos(t)\tau\bigg|_0^t\right\}$$

Evaluando los límites de integración y simplificando obtenemos el resultado final

$$f(t) = e^{-t}\Big\{\sin(t)-t\cos(t)\Big\} \tag{1.149}$$

Ejemplo 1.4.32. Solución EDO por transformada de Laplace

Utiliza la transformada de Laplace para resolver la ED dada por

$$y' - y = te^t\sin(t), \quad y(0) = 0$$

Solución 1.4.33 *Tomando transformada de Laplace*

$$\mathcal{L}\{y'-y\} = \mathcal{L}\{te^t\sin(t)\}$$

Aplicamos (1.128) al lado izquierdo de la expresión anterior y simplificando obtenemos

$$(s-1)\,Y(s) = \mathcal{L}\{te^t \sin(t)\} \tag{1.150}$$

Ahora calculamos la transformada de Laplace de la función $f(t) = te^t \sin(t)$ *Aplicando la expresión (1.136) del teorema derivadas de una transformada*

$$\mathcal{L}\{te^t \sin(t)\} = -\frac{d}{ds}\left(e^t \sin(t)\right).$$

Para obtener esta transformada aplicamos la expresión (1.130)

$$\mathcal{L}\{te^t \sin(t)\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s-1)^2+1}\right).$$

Ahora procedemos a derivar respecto a s

$$\mathcal{L}\{te^t \sin(t)\} = \frac{2(s-1)}{\left((s-1)^2+1\right)^2}$$

Reemplazando la expresión anterior en (1.150)

$$(s-1)\,Y(s) = \frac{2(s-1)}{\left((s-1)^2+1\right)^2}$$

Despejando $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{2}{\left((s-1)^2+1\right)^2}$$

Tomando transformada inversa de Laplace tenemos que

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{\left((s-1)^2+1\right)^2}\}$$

Como se puede notar la transformada invesa de Laplace anterior es la misma obtenida en (1.148) cuyo resultado está en la expresión (1.149), utilizando dichas expresiones tenemos

$$y(t) = e^{-t}\Big\{\sin(t) - t\cos(t)\Big\}$$

Ecuación Integral

Una ecuación de la forma

$$f(t) = p(t) + \int_0^t k(t,\tau) f(\tau) d\tau \tag{1.151}$$

se llama ecuación integral, donde $f(t)$ es una función desconocida. Cuando el kernel $k(t,\tau)$ tiene la forma particular de

$$k(t,\tau) = g(t-\tau)$$

la integral representa una convolución. En este caso, podemos utilizar la transformada de Laplace para obtener su solución.

Técnica de resolución

Consideramos que la integral de la expresión (1.151) representa una convolución, y que las funciones p y $k(t,\tau)$ son conocidas, tomando transformada de Laplace en ambos lados tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\left\{p(t)+\int_0^t k(t,\tau)f(\tau)d\tau\right\}\\
&= \mathcal{L}\{p(t)\}+\mathcal{L}\left\{\int_0^t k(t,\tau)f(\tau)d\tau\right\}\\
F(s) &= P(s)+F(s)G(s)
\end{aligned}$$

Despejando la función $F(s)$

$$F(s)=\frac{P(s)}{1-G(s)} \tag{1.152}$$

La solución explícita de (1.151) se obtiene tomando transformada inversa de (1.152).

Ejemplo 1.4.33. Solución de una ecuación integral

Resuelva la ecuación integral dada por

$$x(t)=e^{-t}+\int_0^t \sin(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

Solución 1.4.34 *Podemos ver que esta ecuación es de la forma dada en (1.151), entonces su solución está dada por la expresión (1.152). Así*

$$X(s)=\frac{\mathcal{L}\{e^{-t}\}}{1-\mathcal{L}\{\sin(t)\}}$$

Esta transformadas ya son conocidas, reemplazandolas en la expresión anterior tenemos

$$X(s)=\frac{\frac{1}{s+1}}{1-\frac{1}{s^2+1}}$$

Simplificando

$$X(s)=\frac{s^2+1}{s^2(s+1)}$$

Aplicando fracciones parciales el lado derecho de la expresión anterior se puede expresar de la sigte manera

$$X(s)=\frac{2}{s+1}+\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}$$

Tomando transformada de Laplace inversa

$$x(t)=2e^{-t}+t-1$$

Ejemplo 1.4.34. Solución de una ecuación integral

Resuelva la ecuación integral dada por

$$te^{-bt} = \int_0^t x(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Solución 1.4.35 *Tomando transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación anterior tenemos*

$$\mathcal{L}\{te^{-bt}\} = \mathcal{L}\{\int_0^t x(\tau)x(t-\tau)d\tau\}$$

La transformada del lado izquierdo se obtiene de la expresión (1.130) y la transformada del lado derecho es una convolución, así obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s+b)^2} &= (X(s))^2 \\ X(s) = \frac{1}{s+b} \end{aligned}$$

Tomando transformada inversa, tenemos que la solución es

$$x(t) = e^{-bt}$$

Ejemplo 1.4.35. Solución de una ecuación integral

Resuelva la ecuación integral dada por

$$\sin(t) = \int_0^t x''(\tau)x(t-\tau)d\tau, \quad x(0) = x'(0) = 0$$

Solución 1.4.36 *Tomamos transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación dada*

$$\mathcal{L}\{\sin(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t x''(\tau)x(t-\tau)d\tau\right\}$$

De las expresiones (1.119) y (1.128) tenemos

$$\frac{1}{s^2+1} = \big(s^2X(s) - sx(0) - x'(0)\big)X(s)$$

Por las condiciones iniciales y despejando a $X(s)$

$$X(s) = \frac{1}{s^3\left(s^2+1\right)}$$

Tomando transformada inversa, y a la expresión del lado derecho aplicando la forma inversa del teorema de convolución dado en la expresión (1.147)

$$x(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \tau^2 \sin(t-\tau)d\tau$$

Resolviendo esta integral llevamos al resultado

$$x(t) = t^2 + \cos(t) - 1$$

1.4.5. Transformada de una función periódica

Hasta este momento hemos determinado $\mathcal{L}$ de las funciones periódicas $\sin(\omega t)$ y $\cos(\omega t)$, que son funciones suaves y continuas (es decir, son diferenciables). Sin embargo, en muchas aplicaciones de ingeniería frecuentemente encontramos funciones periódicas que tienen un comportamiento discontinuo. Poner grafica

Teorema 1.4.9: Transformada de una función periódica

Si $f(t)$ es continua por tramos en $[0,\infty)$, de orden exponencial y periódica con periodo T, entonces

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt \tag{1.153}$$

Demostración 1.4.9 *Aplicamos la definición de transformada de Laplace para la función f*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

La integral anterior podemos expresarla como

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st}f(t)dt + \int_T^\infty e^{-st}f(t)dt$$

Haciendo el cambio de variable $t = u + T$, la última integral se convierte en

$$\begin{aligned}\int_T^\infty e^{-st}f(t)dt &= \int_0^\infty e^{-s(u+T)}f(u+T)du\\ &= e^{-sT}\int_0^\infty e^{-su}f(u)du\\ &= e^{-sT}\mathcal{L}\{f(t)\}\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^T e^{-st}f(t)dt + e^{-sT}\mathcal{L}\{f(t)\}\\ \mathcal{L}\{f(t)\} - e^{-sT}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^T e^{-st}f(t)dt\\ \left(1-e^{-sT}\right)\mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^T e^{-st}f(t)dt\\ \mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt\end{aligned}$$

Ejemplo 1.4.36. Transformada de una Función Periódica

Determina la transformada de la función periódica `Serpenteante`

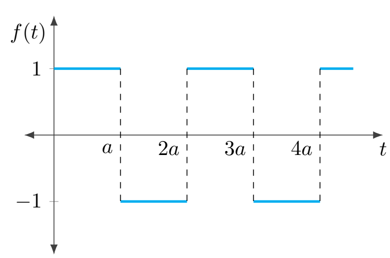


Figura 1.31: Función periódica Serpenteante

Solución 1.4.37 *En primer vamos a obtener la expresión que define la función Serpenteante*

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le a \\ -1 & a < t \le 2a \end{cases} \tag{1.154}$$

Ahora aplicamos la definición de transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

La integral anterior podemos expresar como

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-2as}} \left\{ \int_0^a e^{-st} f(t)dt - \int_0^a e^{-st} f(t)dt \right\}$$

Integrando

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-2as}} \left\{ \frac{-1}{s} e^{-st} \bigg|_0^a + \frac{1}{s} e^{-st} \bigg|_a^{2a} \right\}$$

Tomando $\frac{1}{s}$ *como factor común y evaluando los límites de integración*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s\left(1-e^{-2as}\right)} \left\{ 1 - 2e^{-as} + e^{-2as} \right\}$$

Factorizando tanto en el numerador como en el denominador

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s\left(1-e^{-as}\right)\left(1+e^{-as}\right)} \left\{ \left(1-e^{-2as}\right)^2 \right\}$$

Simplificando

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1-e^{-2as}}{s\left(1+e^{-as}\right)}$$

Ejemplo 1.4.37. Transformada de una Función Periódica

Determina la transformada de la función periódica `Diente de Sierra`

Solución 1.4.38 *La gráfica presentada en (Citar la imagen d la funcion diente de sierra) es de la función Diente de Sierra, que podemos expresarla*

$$f(t) = \frac{a}{b} t \quad 0 \leq t \leq b \tag{1.155}$$

Esta función es periódica con periodo $T = b$.
Aplicando la expresión (1.153) para transformada de funciones periódicas

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sb}} \int_0^b \frac{a}{b} t e^{-st} dt$$

Aplicando integración por partes tenemos

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{a}{b(1-e^{-sb})} \left(-\frac{b}{s} e^{-sb} - \frac{1}{s^2} e^{-sb} + \frac{1}{s^2} \right)$$

Simplificando

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{a}{bs^2(e^{sb}-1)} \left(e^{-sb} - 1 - sb \right)$$

Distribuyendo el factor $\dfrac{1}{bs(e^{sb}-1)}$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{a}{s} \left(\frac{1}{bs} - \frac{1}{e^{sb}-1} \right)$$

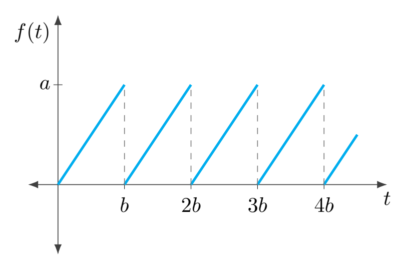


Figura 1.32: Función periódica **Diente de Sierra**

1.4.6. Función de Green

Introduccion

Construcción de función de Green utilizando variación de parámetro

desarrollo

Construcción de función de Green utilizando la función δ de Dirac

De la ecuación (1.3.1) como caso particular tenemos

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x) + a_2(x)y(x) = g(x)$$

Escogiendo $g(x) = -f(x)$ y utilizando el operador (1.78)

$$L[y(x)] = -f(x) \quad 0 < x < 1$$

Supongamos que existe una función para la cual

$$L[G(x,t)] = -\delta(x-t) \tag{1.156}$$

Multiplicamos (1.156) por $f(t)$ e integramos respecto a t, $0 \leq t \leq 1$:

$$\int_0^1 L[G(x,t)]f(t)\,dt = -\int_0^1 \delta(x-t)f(t)\,dt = -f(x)$$

Supongamos además que

$$\int_0^1 L[G(x,t)]f(t)\,dt = L\left[\int_0^1 G(x,t)f(t)\,dt\right]$$

Entonces tenemos

$$L\left[\int_0^1 G(x,t)f(t)\,dt\right] = \int_0^1 L[G(x,t)]f(t)\,dt = -f(x)$$

Tomando

$$y(x) = \int_0^1 G(x,t)f(t)\,dt$$

La ecuación a resolver es

$$L\left(y(x)\right) = L\left[\int_0^1 G(x,t)f(t)\,dt\right] = -f(x) \tag{1.157}$$

Los pasos anteriormente mostrado son un poco plausible, hemos operado con una función $G(x,t)$ sin conocerla, además hemos supuesto que $G(x,t)$ satisface ciertas condiciones, y que son suficientes para determinar $G(x,t)$.
Para construir la función de Green utilizando la función δ de Dirac, primero fijamos t con $0 < t < 1$.
Encontraremos $G(x,t)$, tal que $G(x,t)$ satisfaga la ecuación homogénea

$$L[G(x,t)] = 0 \quad \begin{cases} 0 \leq x < t \\ t < x \leq 1 \end{cases}$$

Para ello se encuentran dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea $L[y] = 0$. Supongamos que estas dos soluciones son $y_1(x)$ e $y_2(x)$. Luego hay constantes, $c_i(t), \quad i = 1, ..., 4$ que dependen de t, para lo cual

$$G(x,t) = \begin{cases} c_1(t)y_1(x) + c_2(t)y_2(x) & 0 \leq x < t \\ \\ c_3(t)y_1(x) + c_4(t)y_2(x) & t < x \leq 1 \end{cases} \tag{1.158}$$

Una vez que hemos encontrado cada $c_i(t)$, conocemos $G(x,t)$.

1. $G(0,t) = 0$
2. $G(1,t) = 0$
3. $\lim\limits_{x \uparrow t} G(x,t) = \lim\limits_{x \downarrow t} G(x,t)$
4. $\lim\limits_{x \downarrow t} \dfrac{dG(x,t)}{dx} - \lim\limits_{x \uparrow t} \dfrac{dG(x,t)}{dx} = -\dfrac{1}{a_0(t)}$
5. $G(x,t) = G(t,x)$

1.5 Aplicaciones de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Técnica de Resolución
Consideremos el siguiente sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1(t) \\ \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2(t) \end{aligned}\right\} \tag{1.159}$$

Con las condiciones iniciales

$$x_1(0) = x_{10} \quad \text{and} \quad x_2(0) = x_{20}, \tag{1.160}$$

Donde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ son constantes.
Expresando el sistema de ecuación en la forma matricial

$$x \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \frac{dx}{dt} \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{pmatrix}, \quad A \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$b(t) \equiv \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix} \text{ y } x_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix},$$

Podemos escribir el sistema (1.160) como un sistema diferencial matricial como

$$\frac{dx}{dt} = Ax + b(t), \quad x(0) = x_0 \tag{1.161}$$

Tomamos la transformada de Laplace del sistema con las condiciones iniciales para obtener

$$(s - a_{11})\, X_1 - a_{12} X_2 = x_{10} + B_1(s)$$

$$-a_{21} X_1 + (s - a_{22})\, X_2 = x_{20} + B_2(s)$$

Las soluciones del sistema son

$$X_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} x_{10} + B_1(s) & -a_{12} \\ x_{20} + B_2(s) & s - a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & s - a_{22} \end{vmatrix}} \tag{1.162}$$

,

$$X_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} s - a_{11} & x_{10} + B_1(s) \\ -a_{21} & x_{20} + B_2(s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & s - a_{22} \end{vmatrix}} \tag{1.163}$$

Al expandir estos determinantes, obtenemos los resultados para $X_1(s)$ y $X_2(s)$, y las soluciones para $x_1(t)$ y $x_2(t)$ se puede encontrar tomando transformada inversa.

Ejemplo 1.5.1. Solución de un SED Matricial

Resuelve el sistema diferencial matricial.

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Donde

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solución 1.5.1 *El sistema dado es equivalente a*

$$\frac{dx_1}{dt} - x_2 = 0$$
$$\frac{dx_2}{dt} + 2x_1 - 3x_2 = 0$$

con

$$x_1(0) = 0 \quad \textit{and} \quad x_2(0) = 1.$$

Tomando la transformada de Laplace del sistema con las condiciones iniciales dadas, encontramos

$$sX_1 - X_2 = 0$$

$$2X_1 + (s-3)X_2 = 1$$

De las expresiones (1.162) y (1.163)

$$X_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & s-3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & -1 \\ 2 & s-3 \end{vmatrix}}$$

,

$$X_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} s & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & -1 \\ 2 & s-3 \end{vmatrix}}$$

Expandiendo los determinantes, tenemos que

$$X_1 = \frac{1}{s(s-3)+2} \quad X_2 = \frac{2}{s(s-3)+2}$$

Aplicando fracciones parciales, el sistema tiene la solución

$$X_1(s) = \frac{1}{s^2-3s+2} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1},$$
$$X_2(s) = \frac{s}{s^2-3s+2} = \frac{2}{s-2} - \frac{1}{s-1}.$$

Ahora tomando transformada inversa, obtenemos

$$x_1(t) = e^{2t} - e^t, \quad x_2(t) = 2e^{2t} - e^t.$$

En la notación matricial, la solución es

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} - e^t \\ 2e^{2t} - e^t \end{pmatrix}$$

Sistema Masa/Resorte

Ejemplo 1.5.2. Sistema Resorte/Masa Movimiento Forzado

Una masa que pesa 16 libras alarga $\frac{8}{3}$ pie un resorte. La masa se libera inicialmente desde el reposo desde un punto 2 pies abajo de la posición de equilibrio y el movimiento posterior ocurre en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a $\frac{1}{2}$ de la velocidad instantánea. Encuentre la ecuación de movimiento si se aplica a la masa una fuerza externa igual a $f(t) = 10\cos(3t)$.

Solución 1.5.2 *Se tiene que :*

Peso w	$w = 16$ libras		
Masa m	$m = \dfrac{W}{g}$	$m = \dfrac{16\,libra}{32\,pies/s^2}$	$m = \dfrac{1}{2}slug$
Constante k	$k = \dfrac{F}{x}$	$k = \dfrac{16\,libra}{\frac{8}{3}\,pie}$	$k = 6\,libra/pie$

Ecuación del movimiento forzado:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$

1. *Sustituimos los valores :*

$$12\frac{d^2x}{dt^2} + 12\frac{dx}{dt} + 6x = 10\cos(3t)$$

2. *Simplificando :*

$$x'' + x' + 12x = 20\cos(3t); \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 0$$

3. *Aplicando la transformada de Laplace:*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x'' + x' + 12x\} &= \mathcal{L}\{20\cos(3t)\} \\ \mathcal{L}\{x''\} + \mathcal{L}\{x'\} + 12\mathcal{L}\{x\} &= 20\mathcal{L}\{\cos(3t)\} \\ (s^2X - sx(0) - x'(0)) + (sX - x(0)) + 12X &= \frac{20s}{s^2+9} \\ s^2X - s^2 - 0 + sX - 2 + 12X &= \frac{20s}{s^2+9} \\ X(s^2 + s + 12) &= \frac{20s}{s^2+9} + 2s + 2 \end{aligned}$$

4. *Despejando X :*

$$X(s) = \frac{20s}{(s^2+9)(s^2+s+12)} + \frac{2s+2}{s^2+s+12}$$

5. *Descomponer en fracciones parciales :*

$$\frac{20s}{(s^2+9)(s^2+s+12)} = \frac{As+B}{s^2+9} + \frac{Cs+D}{s^2+s+12}$$

$$20s = A + Cs^3 + A + B + Ds^2 + 12A + B + 9Cs + 12B + 9D$$

6. *Resolver el sistema de ecuaciones:*

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ A + B + D &= 0 \\ 12A + B + 9C &= 20 \\ 12B + 9D &= 0 \end{aligned}$$

$$A = \frac{10}{3}, \quad B = 10, \quad C = -\frac{10}{3}, \quad D = -\frac{40}{3}$$

7. *Sustituyendo los valores y simplicando:*

$$\frac{20s}{(s^2+9)(s^2)+s+12} = \frac{10(s+3)}{3(s^2+9)} - \frac{10(s+4)}{3(s^2+s+12)}$$

8. *Retomando el paso 4 y simplificando:*

$$X(s) = \frac{10(s+3)}{3(s^2+9)} - \frac{4s+34}{3(s^2+s+12)}$$

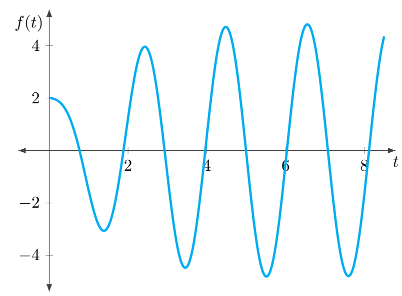


Figura 1.33: Solución de la $x(t)$

$$X(s) = \frac{10}{3}\cdot\frac{s}{s^2+9} + \frac{10}{3}\cdot\frac{3}{s^2+9} - \frac{4}{3}\cdot\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{47}}{2}\right)^2} - \frac{32}{3\left(\frac{\sqrt{47}}{2}\right)}\cdot\frac{\frac{\sqrt{47}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{47}}{2}\right)^2}$$

9. *Transformada inversa:*

$$x(t) = \frac{10}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+(3)^2}\right\} + \frac{10}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+(3)^2}\right\} - \frac{4}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{47}}{2}\right)^2}\right\} - \frac{32}{3\left(\frac{\sqrt{47}}{2}\right)}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{\sqrt{47}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{47}}{2}\right)^2}\right\}$$

10. *Aplicamos la transformada inversa y simplimficamos :*

$$x(t) = \frac{10}{3}\left(\cos(3t)+\operatorname{sen}(3t)\right) + e^{-\frac{1}{2}t}\left(-\frac{4}{3}\cos\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) - \frac{64}{3\sqrt{47}}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right)\right)$$

Ejemplo 1.5.3. Sistema Resorte/Masa Movimiento Forzado por coeficiente indeterminado

Una masa que pesa 16 libras alarga $\frac{8}{3}$ pie un resorte. La masa se libera inicialmente desde el reposo desde un punto 2 pies abajo de la posición de equilibrio y el movimiento posterior ocurre en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a $\frac{1}{2}$ de la velocidad instantánea. Encuentre la ecuación de movimiento si se aplica a la masa una fuerza externa igual a $f(t) = 10\cos(3t)$.

Solución 1.5.3 *Plantamiento del problema:*

1. *Punto de partidad:*

$$x'' + x' + 12x = 20\cos(3t); \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 0$$

2. *Empezamos encontrando la solución de la ecuación homogénea x_c*

$$x'' + x' + 12x = 0$$

a) *Aplicando el método de coeficientes constantes*

$$x = e^{rt} \quad x' = re^{rt} \quad x'' = r^2 e^{rt}$$

b) *Sustituimos y obtenemos factor comun:*

$$r^2 e^{rt} + re^{rt} + 12e^{rt} = 0$$
$$e^{rt}\left(r^2 + r + 12\right) = 0$$

c) *Igualamos a $r^2 + r + 12 = 0$ y obtenemos los ceros:*

$$r_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{47}}{2}i \quad r_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{47}}{2}i$$

Las raíces son del tipo $\alpha + \beta i$,movimiento subamortiguado

3. *La solución general de la ecuación homogénea es:*

$$x_c = e^{\alpha t}\left(c_1\cos(\beta t) + c_2\sin(\beta t)\right)$$

$$x_c(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(c_1\cos\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) + c_2\sin\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right)\right)$$

4. *Ahora para encontrar la solución particular x_p tenemos:*

$$x_p = A\cos(3t) + B\,\mathrm{sen}(3t)$$
$$x_p' = -3A\,\mathrm{sen}(3t) + 3B\cos(3t)$$
$$x_p'' = -9A\cos(3t) - 9B\,\mathrm{sen}(3t)$$

a) *Sustituyendo la ecuación e igualamos obtenemos:*

$$3A + 3B\cos(3t) - 3A\sin(3t) + 3B\sin(3t) = 20\cos(3t) + 0\sin(3t)$$

$$\begin{cases} 3A + 3B = 20 \\ -3A + 3B = 0 \end{cases}$$

$$A = B = \frac{10}{3}$$

b) *Obtenemos un* x_p :

$$x_p(t) = \frac{10}{3}\cos(3t) + \frac{10}{3}\sin(3t)$$

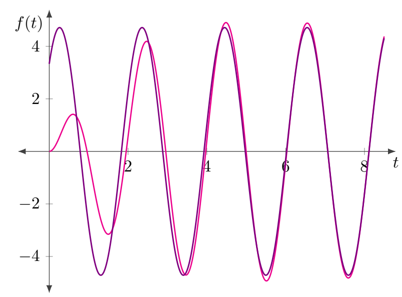


Figura 1.34: Solución de la $x(t)$

5. *La solución general es:* $x(t) = x_c(t) + x_p(t)$

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(c_1\cos\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) + c_2\sin\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right)\right) + \frac{10}{3}\cos(3t) + \frac{10}{3}\sin(3t)$$

6. *Para los valores iniciales* $x(0) = 2, \quad x'(0) = 0$ *:*

   a) *Para* $x(0) = 2$ *tenemos un* $c_1 = -\frac{4}{3}$

   b) *Para* $x'(0) = 0$ *tenemos un* $c_2 = -\frac{64}{3\sqrt{47}}$

7. *L a ecuación de movimiento cuando se aplica a la masa una fuerza externa igual a* $f(t) = 10\cos(3t)$ *:*

8. *Aplicamos la transformada inversa y simplimficamos :*

$$x(t) = \frac{10}{3}\left(\cos(3t) + \operatorname{sen}(3t)\right) + e^{-\frac{1}{2}t}\left(-\frac{4}{3}\cos\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) - \frac{64}{3\sqrt{47}}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right)\right)$$

Ejemplo 1.5.4. Sistema Resorte/Masa Movimiento Forzado por variación de parametro

Una masa que pesa 16 libras alarga $\frac{8}{3}$ pie un resorte. La masa se libera inicialmente desde el reposo desde un punto 2 pies abajo de la posición de equilibrio y el movimiento posterior ocurre en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a $\frac{1}{2}$ de la velocidad instantánea. Encuentre la ecuación de movimiento si se aplica a la masa una fuerza externa igual a $f(t) = 10\cos(3t)$.

Solución 1.5.4 *Plantemiento del problema:*

1. *Punto de partidad:*

$$x'' + x' + 12x = 20\cos(3t); \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 0$$

2. *Siguiendo el método de coeficientes indeterminados, comenzamos buscando la solución complementaria x_c. Para ello, aplicamos la sustitución $x = e^{rt}$ en la ecuación homogénea $x'' + x' + 12x = 0$. Calculamos las derivadas necesarias:*

$$x' = re^{rt}, \quad x'' = r^2e^{rt}.$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación, obtenemos:

$$r^2e^{rt} + re^{rt} + 12e^{rt} = 0.$$

Al factorizar e^{rt}, que nunca es igual a cero, se reduce a la ecuación característica:

$$r^2 + r + 12 = 0.$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática, encontramos las soluciones::

$$r_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{47}}{2}i \quad r_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{47}}{2}i$$

La solución y_c :

$$x_c = e^{\alpha t}\left(c_1\cos(\beta t) + c_2\sin(\beta t)\right)$$

$$x_c(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(c_1\cos\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) + c_2\sin\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right)\right)$$

3. *Buscamos la solución particular x_p :*

$$x_p = u_1(t)x_1(t) + u_2(t)x_2(t)$$

$$x_p(t) = u_1(t)e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) + u_2(t)e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right)$$

a) *Buscando los valores de $x_1(t)$ y $x_2(t)$:*

$$x_1(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\tfrac{\sqrt{47}}{2}t\right) \rightarrow \quad x_1'(t) = -\tfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\tfrac{\sqrt{47}}{2}t\right) - \tfrac{\sqrt{47}}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\tfrac{\sqrt{47}}{2}t\right)$$

$$x_2(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\tfrac{\sqrt{47}}{2}t\right) \rightarrow \quad x_2'(t) = -\tfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\tfrac{\sqrt{47}}{2}t\right) + \tfrac{\sqrt{47}}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\tfrac{\sqrt{47}}{2}t\right)$$

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}, \quad W_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & x_2(t) \\ f(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}, \quad W_2(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & 0 \\ f(t) & x_1'(t) \end{vmatrix}$$

b) *Al evaluar obtenemos los valores :*

$$\begin{cases} W(t) = \sqrt{47}e^{-t} \\ W_1(t) = -20e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{47}}{2}t)\cos(3t) \\ W_2(t) = 20e^{-\frac{1}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{47}}{2}t)\cos(3t) \end{cases}$$

$$u_1' = \frac{-x_2(t)f(t)}{W(t)}, \quad u_2' = \frac{x_1(t)f(t)}{W(t)}$$

Integrando para encontrar los valores de u_1' y u_2':

$$u_1(t) = \int \frac{-x_2(t)f(t)}{W(t)}\,dt, \quad u_2(t) = \int \frac{x_1(t)f(t)}{W(t)}\,dt$$

Sumando los valores de $u_1' + u_2'$:

$$u_1+u_2 = \int \frac{20e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{47}}{2}t)\cos(3t)}{\frac{\sqrt{47}}{2}e^{-t}}\,dt + \int \frac{20e^{-\frac{1}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{47}}{2}t)\cos(3t)}{\frac{\sqrt{47}}{2}e^{-t}}\,dt$$

Simplificando:

$$u_1+u_2 = \int \frac{40e^{\frac{1}{2}t}\left[\sin(\frac{\sqrt{47}}{2}t)+\cos(\frac{\sqrt{47}}{2}t)\right]\cos(3t)}{\sqrt{47}}\,dt$$

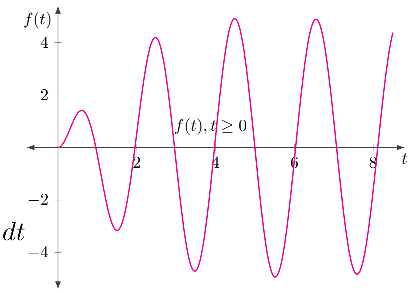


Figura 1.35: Solución de la $u_1 + u_2$ pedro

Ejemplo 1.5.5. Sistema Resorte/Masa Movimiento Forzado por función de Green

Una masa que pesa 16 libras alarga $\frac{8}{3}$ pie un resorte. La masa se libera inicialmente desde el reposo desde un punto 2 pies abajo de la posición de equilibrio y el movimiento posterior ocurre en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a $\frac{1}{2}$ de la velocidad instantánea. Encuentre la ecuación de movimiento si se aplica a la masa una fuerza externa igual a $f(t) = 10\cos(3t)$.

Solución 1.5.5 *1. Punto de partida:*

$$x'' + x' + 12x = 20\cos(3t); \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 0$$

2. La solución x_c :

$$x_c = e^{\alpha t}\left(c_1\cos(\beta t) + c_2\sin(\beta t)\right)$$

$$x_c(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(c_1\cos\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) + c_2\sin\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right)\right)$$

a) *Haciendo el cambio a la variable s:*

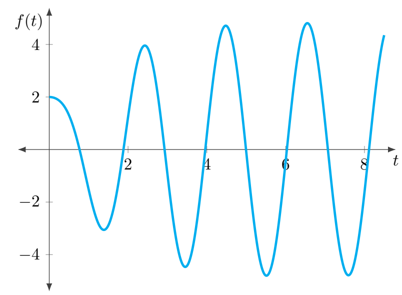
$$x_1(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) \rightarrow \quad x_1(t) = e^{-\frac{1}{2}s}\cos\left(\frac{\sqrt{47}}{2}s\right)$$

$$x_2(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{47}}{2}t\right) \rightarrow \quad x_2(t) = e^{-\frac{1}{2}s}\sin\left(\frac{\sqrt{47}}{2}s\right)$$

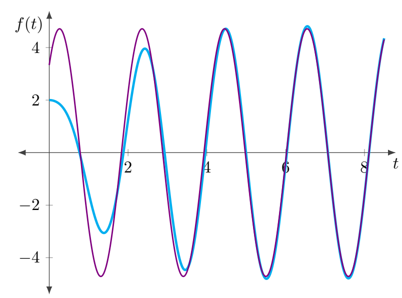
b) *Función de Green :*

$$G(t,s) = \frac{x_1(s)x_2(t) - x_1(t)x_2(s)}{W(s)}$$

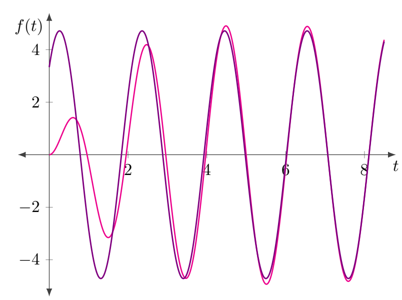
$$G(t,s) = \frac{2e^{\frac{s-t}{2}}\,\mathrm{sen}(\frac{\sqrt{47}t - \sqrt{47}s}{2})}{\sqrt{47}}$$



(a) Laplace

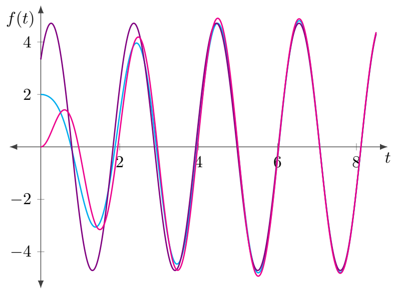


(b) Coeficiente indeterminado



(c) Por variación de parametro

Figura 1.36: Comparación de solucines segun el método aplicado



(d) Cada gráfica segun el método utilizado para su solución

Figura 1.36: Comparación de solucines segun el método aplicado

3. Para encontrar y_p

$$x_p(t) = \int_{t_0}^{t} G(t,s)F(s)ds$$

$$x_p(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{40e^{\frac{s-t}{2}}\,\mathrm{sen}(\frac{\sqrt{47}t-\sqrt{47}s}{2})cos(3s)}{\sqrt{47}}ds$$

1.5.1 Ejercicio

In problem 1.-3., determine whether the given differential equation is separable

1. $\frac{dy}{dx} - \sin(x+y) = 0$

2. $\frac{dy}{dx} = 4y^2 - 3y + 1$

3. $\frac{ds}{dt} = t\ln(s^{2t}) + 8t^2$

In problem 4.-7., solve the equation

4. $\frac{dx}{dt} = 3xt^2$

5. $y^{-1}dy + ye^{\cos x}\sin x dx = 0$

6. $(x + xy^2)dx + ye^{\cos x}\sin x dx = 0$

7. $\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t+1} + 4t^2 + 4t$, $y(1) = 10$

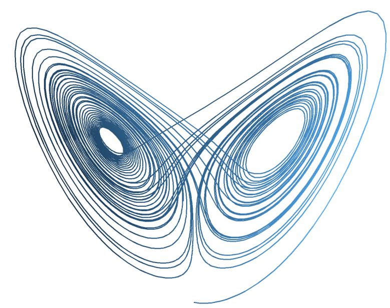
1.5.2 Ejercicio

Another exercise.

If you don't need a horizontal list, you can simply use `\Question`

2 Capítulo

Funciones Especiales a Partir EDO de Segundo Orden



En este capítulo se exploran diversas ecuaciones diferenciales especiales y sus soluciones, muchas de las cuales aparecen de manera recurrente en física matemática, mecánica cuántica, teoría de potenciales y análisis numérico. A lo largo de las secciones se estudiarán las ecuaciones de Laguerre, Jacobi, Chebyshev, Hermite, Bessel y Legendre, junto con sus polinomios asociados y propiedades fundamentales. Estos polinomios ortogonales no solo ofrecen soluciones exactas a problemas concretos, sino que también proporcionan herramientas poderosas para aproximaciones y expansiones en series.

Asimismo, se abordarán ecuaciones menos convencionales, como las de Airy, Gegenbauer y las funciones elípticas de SEzgo, que surgen en contextos más avanzados de análisis matemático y física aplicada. Cada sección incluye tanto la formulación general de la ecuación como las propiedades de sus soluciones y relaciones entre los distintos polinomios y funciones especiales. La comprensión de estas ecuaciones y sus soluciones es esencial para abordar problemas complejos que involucran simetrías, condiciones de contorno y series ortogonales, consolidando así una base sólida para estudios posteriores en matemáticas aplicadas y física teórica.

2.1 Solución de una EDO entorno a un punto ordinario

Repaso sobre series de potencias

Definición 2.1.1: EDO homogénea

Una ecuación diferencial lineal de segundo orden es de la forma

$$y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) \quad = \quad 0 \tag{2.1}$$

donde $p_1(x) \quad y \quad p_2(x)$ son funciones continuas en algún intervalo J.

Definición 2.1.2: Series de potencia

Una serie de potencia es una serie de funciones de la forma

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m (x - x_0)^m \quad = \quad c_0 + c_1 (x - x_0) + c_2 (x - x_0)^2 + \cdots + c_m (x - x_0)^m + \cdots \tag{2.2}$$

donde los c_m son coeficientes para $m = 0, 1, \cdots$ y el punto x_0 es independiente de x. El punto x_0 se llama punto de expansión de la serie.

Ahora mencionamos algunas propiedades importantes de series que se necesitarán mas adelante

Propiedad 2.1.1: Propiedades de series

1. Se dice que una serie de potencias

   $$\sum_{m=0}^{\infty} c_m (x - x_0)^m$$

   converge en un punto x si

   $$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n} c_m (x - x_0)^m$$

   existe. Es claro que la serie converge en $x = x_0$; puede converger para todo x, o puede converger para algunos valores de x y no para otros.

2. Se dice que una serie de potencias

   $$\sum_{m=0}^{\infty} c_m (x - x_0)^m$$

   converge absolutamente en un punto x si la serie

   $$\sum_{m=0}^{\infty} |c_m (x - x_0)^m|$$

converge. Si la serie converge absolutamente, entonces la serie también converge; sin embargo, la recíproca no es necesariamente verdadera.

3. Si la serie
$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m \left(x - x_0\right)^m$$
converge absolutamente para $|x - x_0| < \mu$ y diverge para $|x - x_0| > \mu$, entonces a μ se le llama el radio de convergencia. Para una serie que no converge en ningún punto excepto en x_0, se define $\mu = 0$; y para una serie que converge para todo x, se dice que μ es infinito.

4. **Criterio del cociente**. Si, para un valor fijo de x,
$$\lim_{m\to\infty} \left| \frac{c_{m+1}(x - x_0)^{m+1}}{c_m(x - x_0)^m} \right| = L,$$
entonces la serie de potencias
$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m(x - x_0)^m$$
converge absolutamente para los valores de x tales que $L < 1$, y diverge cuando $L > 1$. Si $L = 1$, el criterio no permite concluir nada.

5. **Criterio de comparación**. Si tenemos dos series de potencias
$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m(x - x_0)^m \quad \text{y} \quad \sum_{m=0}^{\infty} C_m(x - x_0)^m,$$
donde $|c_m| \leq C_m$ para $m = 0, 1, \ldots,$ y si la serie
$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m(x - x_0)^m$$
converge para $|x - x_0| < \mu$, entonces la serie
$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m(x - x_0)^m$$
también converge para $|x - x_0| < \mu$.

6. Si una serie
$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m(x - x_0)^m$$
es convergente para $|x - x_0| < \mu$, entonces para cualquier x tal que $|x - x_0| = \mu_0 < \mu$, existe una constante M tal que
$$|c_m|\, \mu_0^m \leq M \quad \text{para } m = 0, 1, \ldots$$

7. La derivada de una serie de potencias se obtiene derivando término a término; es decir, si

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x - x_0)^m,$$

entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= c_1 + 2c_2(x - x_0) + 3c_3(x - x_0)^2 + \cdots \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} mc_m (x - x_0)^{m-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) c_{m+1} (x - x_0)^m \end{aligned}$$

Además, los radios de convergencia de estas dos series son iguales.

Buscar diferentes definiciones de analiticidad y realizar una pequeña introducción. AGREGAR UNA GRAFICA DEL INTERVALO DE CONVERGENCIA DE LAS SERIES VER DENNI ZILL

Definición 2.1.3: Función analítica

Una función $f(x)$ es analítica en $x = x_0$ si puede expresarse en serie de potencia en potencias de $(x - x_0)$ en algún intervalo de la forma $|x - x_0| < \mu$, donde $\mu > 0$. Si $f(x)$ es analítica en $x = x_0$, entonces

$$f(x) \quad = \quad \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x - x_0)^m, \quad |x - x_0| < \mu \tag{2.3}$$

donde $c_m = f^{(m)}(x_0)/m!, m = 0, 1, \cdots$ que es la misma expansión de Taylor de $f(x)$ en x_0.

Como sabemos de cursos de cálculo las siguientes funciones son analíticas en el intervalo dado centrada en $x_0 = 0$.

Función	**Serie de potencias**	**Intervalo de convergencia**
e^x	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$(-\infty, \infty)$
$\sin(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$	$(-\infty, \infty)$
$\cos(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$	$(-\infty, \infty)$
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$	$(-1, 1]$
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$(-1, 1)$

$\arctan(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$	$[-1,1]$
$\arcsin(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}$	$[-1,1]$
$\sinh(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$(-\infty,\infty)$
$\cosh(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$(-\infty,\infty)$

Definición 2.1.4: Puntos ordinario y singular

Si en un punto $x = x_0$ las funciones $p_1(x) \quad y \quad p_2(x)$ son analíticas, entonces x_0 se llama punto ordinario de la ecuación 2.1. En caso de que las funciones $p_1(x) \quad y \quad p_2(x)$ no sean analíticas en x_0 se dice que es un punto singular de 2.1.

Ejemplo 2.1.1. Punto ordinario y singular de una ecuación diferencial

Determina si $x = x_0$ es un punto ordinario o singular de las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $$xy'' + \sin(x)y = 0, \quad x_0 = 0$$

2. $$(x^2 - 2x)y'' + 5(x-1)y' + 3y = 0, \quad x_0 = 1$$

3. $$y'' + e^x y' + (1 + x^2)y = 0$$

4. **Ecuación de Riccati-Bessel**

$$x^2 y'' - (x^2 - k)y = 0, \quad -\infty < k < \infty \tag{2.4}$$

Solución 2.1.1 *1.*

$$y'' + \frac{\sin(x)}{x} y = 0, x \neq 0 \qquad \textit{forma normal}$$

$$p_2(x) = \frac{\sin(x)}{x} \qquad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$p_2(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$p_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$$

Por lo tanto $x_0 = 0$ *es un punto ordinario de* $xy'' + \sin(x)y = 0$.

2.

$$y'' + \frac{5(x-1)}{x^2-2x}y' + \frac{3}{x^2-2x}y = 0, x \neq 0, 2 \qquad \textit{forma normal}$$

$$p_1(x) = 5\frac{x-1}{x^2-2x} \quad p_2(x) = \frac{3}{x^2-2x}$$

Como $p_1(x)$ y $p_2(x)$ son diferenciable en $x = 1$, entonces funciones analiticas.

3.

$$y'' + e^x y' + \left(1+x^2\right)y = 0$$

$$p_1(x) = e^x \qquad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$p_2(x) = 1 + x^2$ *es diferenciable por lo tanto es analítica*

4.

$$y'' - \frac{x^2-k}{x^2}y = 0$$

$$p_2(x) = \frac{x^2-k}{x^2}$$

$p_2(x)$ no es analítica en $x_0 = 0$, tiene una singularidad esencial.

Habiendo clasificado los puntos de diversas ecuaciones diferenciales como ordinarios o singulares, estamos en posición de aplicar ese análisis para construir soluciones. En particular, cuando el punto es ordinario, podemos resolver la ecuación mediante una serie de potencias centrada en dicho punto. A continuación, abordaremos este proceso retomando algunas de las ecuaciones ya estudiadas.

Iniciamos este apartado presentando un teorema que presenta las condiciones suficientes para obtener una solución en series de potencia entorno a un punto ordinario.

Teorema 2.1.1: Solución de una EDO entorno a un punto ordinario

Sean las funciones $p_1(x)$ y $p_2(x)$ analíticas en $x = x_0$; por lo tanto pueden ser expresadas como series de potencia en $(x - x_0)$ en algún intervalo $|x - x_0| < \mu$. Entonces, la ecuación definida en 2.1 con las condiciones iniciales

$$y(x_0) = c_0 \quad \text{y} \quad y'(x_0) = c_1 \tag{2.5}$$

tienen una única solución $y(x)$ analítica en x_0, que puede ser expresada como

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x - x_0)^m \tag{2.6}$$

en un intervalo $\mid x - x_0 \mid < \mu$. Los coeficientes $c_m, m \geq 2$ de 2.6 se obtienen sustituyendolo directamente en la ecuación definida en 2.1.1

Demostración 2.1.1 *Escribir esta demostracion con la notacion del libro*
Sin perder generalidad, asumiremos $x_0 = 0$ *sean*

$$p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{p}_m x^m \quad q(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \widetilde{q}_m x^m \quad |x| < \mu$$

y

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \quad con \quad y(x_0) = c_0 \quad y'(x_0) = c_1 \tag{2.7}$$

Entonces

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) c_{m+1} x^m \\ y''(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) c_{m+2} x^m \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} p_1(x) y'(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{m} (k+1) c_{k+1} \bar{p}_{m-k} \right) x^m \\ p_2(x) y(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{m} c_k \widetilde{p}_{m-k} \right) x^m \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación diferencial 2.1, tenemos:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[(m+2)(m+1) c_{m+2} + \sum_{k=0}^{m} (k+1) c_{k+1} \bar{p}_{m-k} + \sum_{k=0}^{m} c_k \widetilde{p}_{m-k} \right] x^m = 0$$

Así, $y(x)$ *es una solución de la ecuación diferencial 2.1 si, y solo si la constante* c_m*, satisface la relación de recurrencia:*

$$c_{m+2} = -\frac{1}{(m+2)(m+1)} \left[\sum_{k=0}^{m} (k+1) c_{k+1} \bar{p}_{m-k} + c_k \widetilde{p}_{m-k} \right] \quad m \geq 0$$

Luego, con $m \to m-2$:

$$c_m = -\frac{1}{(m)(m-1)} \left[\sum_{k=0}^{m-2} (k+1) c_{k+1} \bar{p}_{m-k-2} + c_k \widetilde{p}_{m-k-2} \right] \quad m \geq 2 \tag{2.8}$$

A través de esta relación $c_2, c_3, \cdots$ *pueden ser obtenidos sucesivamente como combinación lineal de* c_0 *y* c_1.

Ahora debemos probar que la serie con estos coeficientes converge para $|x| < \mu$. *Ya que las series de* $p_1(x)$ *y* $p_1(x)$*, convergen para* $|x| < \mu$*, para algún* $|x| = \mu_0 < \mu$*, existe una constante* $M > 0$ *tal que:*

$$|\bar{p}_j| \mu_0^j \leq M \quad y \quad |\widetilde{p}_j| \mu_0^j \leq M \quad j = 0, 1, 2, \cdots . \tag{2.9}$$

Utilizando (2.8) *y* (2.9) *encontramos:*

$$|c_m| \leq \frac{M}{m(m-1)} \left[\sum_{k=0}^{m-2} \left\{ \frac{(k+1)|c_{k+1}|}{\mu_0^{m-k-2}} + \frac{|c_k|}{\mu_0^{m-k-2}} \right\} \right] + \frac{M |c_{m-1}| \mu_0}{m(m-1)} \quad m \geq 2 \tag{2.10}$$

donde el término $\dfrac{M|c_{m-1}|\mu_0}{m(m-1)}$, *ha sido agregado con un propósito que aclararemos más adelante. Ahora definiremos la constante positiva* C_m *por la ecuación*
$C_0 = |c_0|$,
$C_1 = |c_1|$,

$$C_m = Mm(m-1)\left[\sum_{k=0}^{m-2}\left\{\frac{(k+1)C_{k+1}}{\mu_0^{m-k-2}} + \frac{C_k}{\mu_0^{m-k-2}}\right\}\right] + \frac{MC_{m-1}\mu_0}{m(m-1)},\ m \geq 2 \qquad (2.11)$$

De 2.10 y 2.11 es evidente que $|c_m| \leq C_m$, $m = 0, 1, 2, \cdots$ *. Luego, haciendo tender* $m \to m+1$ *en 2.11 obtenemos:*

$$C_{m+1} = \frac{M}{m(m+1)}\left[\sum_{k=0}^{m-1}\left\{\frac{(k+1)C_{k+1}}{\mu_0^{m-k-1}} + \frac{C_k}{\mu_0^{m-k-1}}\right\}\right] + \frac{MC_m\mu_0}{m(m+1)}$$

y ya que

$$\mu_0 C_{m+1} = \frac{M\mu_0}{m(m+1)}\left[\sum_{k=0}^{m-2}\left\{\frac{(k+1)C_{k+1}}{\mu_0^{m-k-1}} + \frac{C_k}{\mu_0^{m-k-1}}\right\}\right] + \frac{M\mu_0}{m(m+1)}[mC_m + C_{m-1}] + \frac{MC_m\mu_0^2}{m(m+1)} \qquad (2.12)$$

Combinando 2.11 y 2.12 conseguimos:

$$\mu_0 C_{m+1} = \frac{M}{m(m+1)}\left[\frac{m(m-1)}{M}C_m - \mu_0 C_{m-1}\right] + \frac{M\mu_0}{m(m+1)}[mC_m + C_{m-1}] + \frac{MC_m\mu_0^2}{m(m+1)}$$

Simplificando:

$$\mu_0 C_{m+1} = \frac{m-1}{m+1}C_m + \frac{mM\mu_0 C_m}{m(m+1)} + \frac{MC_m\mu_0^2}{m(m+1)} \qquad (2.13)$$

Así, como consecuencia de haber agregado la expresión $\frac{M|c_{m-1}|\mu_0}{m(m-1)}$ *en 2.10 hemos llegado a una relación de recurrencia de dos términos 2.13 desde la cual tenemos:*

$$\begin{aligned} |\frac{C_{m+1}x^{m+1}}{C_m x^m}| &= \frac{m(m-1) + mM\mu_0 + M\mu_0^2}{\mu_0 m(m+1)}|x| \\ \Rightarrow \lim_{m\to\infty} |\frac{C_{m+1}x^{m+1}}{C_m x^m}| &= \frac{|x|}{\mu_0}. \end{aligned}$$

Entonces, la prueba del radio establece que las series $\sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m$ *convergen para* $|x| < \mu_0$, *y por la prueba de comparación se sigue que las series* $\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ *convergen absolutamente en* $|x| < \mu_0$. *Ya que* $\mu_0 \in (0, \mu_0)$ *es arbitrario, las series convergen absolutamente en el intervalo* $|x| < \mu_0$.

Por lo tanto, hemos demostrado que la función la cual es analítica en $x = x_0$ *es una solución del problema 2.1, con valor inicial 2.7 si, y solo si los coeficientes de la expansión en series de potencias satisfacen la relación 2.10. También se sigue que esta será la única solución.*

Ejemplo 2.1.2.

Resuelva la ED
$$\left(x^2+2\right)y''+3xy'-y=0$$
alrededor del punto ordinario $x_0=0$

Solución 2.1.2 *Por el teorema (2.1.1) la solución alrededor de $x_0=0$ es de la forma (2.6), de manera que*

$$\left(x^2+2\right)y''=\sum_{m=0}^{\infty}m(m-1)c_m x^m+2\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)c_{m+2}x^m$$

$$3xy'=3\sum_{m=0}^{\infty}mc_m x^m$$

Reemplazando en la ED

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[\left(m^2+2m-1\right)c_m+2\left(m+2\right)\left(m+1\right)c_{m+2}\right]x^m=0$$

$$c_{m+2}=\frac{-\left(m^2+2m-1\right)}{2\left(m+2\right)\left(m+1\right)}c_m\quad\forall m\geq 0\quad \textit{Relación de recurrencia}$$

Desarrollando los términos de la relación anterior

$m=0$
$$c_2=\frac{-(-1)}{2(2)(1)}c_0$$
$m=2$
$$c_4=\frac{-(7)}{2(4)(3)}c_2=\frac{(-1)^2(-1)(7)}{2^2(4)(3)(2)(1)}c_0$$
$m=4$
$$c_6=\frac{-(23)}{2(6)(5)}c_4=\frac{(-1)^3(-1)(7)(23)}{2^3(6)(5)(4)(3)(2)(1)}c_0$$
$m=6$
$$c_8=\frac{-(47)}{2(8)(7)}c_6=\frac{(-1)^4(-1)(7)(23)(47)}{2^4(8)(7)(6)(5)(4)(3)(2)(1)}c_0$$
$\vdots$
$$c_{2m}=\frac{(-1)^m(-1)(7)\ldots\left(4m^2-4m-1\right)}{2^m m!}c_0\quad\forall m\geq 1$$

$m=1$
$$c_3=\frac{(-2)}{2(3)(2)}c_1$$
$m=3$
$$c_5=\frac{(-14)}{2(5)(4)}c_3=\frac{(-1)^2 2\cdot 14}{2^2(5)(4)(3)(2)}c_1$$
$m=5$
$$c_7=\frac{(-34)}{2(7)(6)}c_5=\frac{(-1)^3 2\cdot 14\cdot 34}{2^3(7)(6)(5)(4)(3)(2)}c_1$$
$m=7$
$$c_9=\frac{(-62)}{2(9)(8)}c_7=\frac{(-1)^4 2\cdot 14\cdot 34\cdot 62}{2^4(9)(8)(7)(6)(5)(4)(3)(2)}c_1$$
$\vdots$
$$c_{2m+1}=\frac{(-1)^m 2\cdot 14\cdot 34\ldots\left(4m^2-2\right)}{2^m m!}c_1\quad\forall m\geq 1$$

De esta forma la solución es

$$y(x)=c_0\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(-1)(7)\ldots\left(4m^2-4m-1\right)}{2^m m!}x^{2m}\right]+c_1\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m 2\cdot 14\cdot 34\ldots\left(4m^2-2\right)}{2^m m!}c_1 x^{2m+1}\right]$$

Ejemplo 2.1.3.

Resuelva la ED

$$y'' + e^x y' + \left(1 + x^2\right) y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Solución 2.1.3

Ejemplo 2.1.4. Solución en serie no centrada en el origen

Resuelva la ED

$$\left(x^2 - 2x\right) y'' + 5(x-1)y' + 3y = 0$$

entorno al punto ordinario $x_0 = 1$

Solución 2.1.4 *Como $x_0 = 1$ es un punto ordinario, tenemos Una solución en serie de la forma $y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x-1)^m$*

$$\begin{aligned}\left(x^2 - 2x\right) y'' = (x-1)^2 & \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1)c_m(x-1)^{m-2} \\ & - \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)c_{m+2}(x-1)^m\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(x^2 - 2x\right) y'' = & \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1)c_m(x-1)^m \\ & - \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)c_{m+2}(x-1)^m \quad (2.14)\end{aligned}$$

$$5(x-1)y' = 5(x-1)\sum_{m=0}^{\infty} mc_m(x-1)^{m-1} = 5\sum_{m=0}^{\infty} mc_m(x-1)^m \quad (2.15)$$

$$3y = 3\sum_{m=0}^{\infty} c_m(x-1)^m \quad (2.16)$$

Sumando las expresiones (2.14),(2.15) y (2.16)

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty} m(m-1)c_m(x-1)^m - & \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)c_{m+2}(x-1)^m \\ & + 5\sum_{m=0}^{\infty} mc_m(x-1)^m + 3\sum_{m=0}^{\infty} c_m(x-1)^m = 0\end{aligned}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[(m(m-1)+5m+3)c_m-(m+2)(m+1)c_{m+2}\right](x-1)^m=0$$
$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[(m+1)(m+3)c_m-(m+1)(m+2)c_{m+2}\right](x-1)^m=0$$

De la expresión anterior obtenemos la relación de recurrencia

$$c_{m+2}=\frac{m+3}{m+2}c_m \quad \forall m\geq 0$$

Desarrollando los términos de la relación anterior

$$\begin{array}{l|l}
m=0 & m=1 \\
c_2=\dfrac{3}{2}c_0 & c_3=\dfrac{2^1\cdot 2}{3}c_1 \\
m=2 & m=3 \\
c_4=\dfrac{5}{4}c_2=\dfrac{5\cdot 3}{2^2\cdot 2}c_0 & c_5=\dfrac{6}{5}c_3=\dfrac{2^2\cdot 3\cdot 2}{5\cdot 3}c_1 \\
m=4 & m=5 \\
c_6=\dfrac{7}{6}c_4=\dfrac{7\cdot 5\cdot 3}{2^3\cdot 3\cdot 2}c_0 & c_7=\dfrac{8}{7}c_5=\dfrac{2^3\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{7\cdot 5\cdot 3}c_1 \\
m=6 & m=7 \\
c_8=\dfrac{9}{8}c_6=\dfrac{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3}{2^4\cdot 4\cdot 3\cdot 2}c_0 & c_9=\dfrac{10}{9}c_7=\dfrac{2^4\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3}c_1 \\
\vdots & \vdots \\
c_{2m}=\dfrac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2m+1)}{2^m m!}c_0 \quad \forall m\geq 0 & c_{2m+1}=\dfrac{2^m(2m+1)!}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2m+1)}c_1 \quad \forall m\geq 0
\end{array}$$

La solución podemos expresarla como

$$\begin{aligned}
y(x)&=\left(c_0+c_2(x-1)^2+c_4(x-1)^4+\cdots\right)\\
&\quad+\left(c_1(x-1)+c_3(x-1)^3+c_5(x-1)^5+\cdots\right)
\end{aligned}$$
$$y(x)=c_0\sum_{m=0}^{\infty}\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2m+1)}{2^m m!}(x-1)^{2m}+c_1\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^m(2m+1)!}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2m+1)}(x-1)^{2m+1}.$$

En el estudio de soluciones en serie de ecuaciones diferenciales ordinarias, resulta particularmente ventajoso desarrollar dichas soluciones en torno al punto $x_0=0$. Esta elección no obedece a una mera preferencia arbitraria, sino a las **ventajas operacionales** que ofrece el origen en los procesos algebraicos y analíticos implicados: la manipulación de potencias, derivadas sucesivas y el desarrollo de coeficientes se simplifican sustancialmente cuando la serie está centrada en el cero.

Por tal motivo, cuando la ecuación diferencial posee un **punto ordinario** $x=x_0\neq 0$, es común y matemáticamente justificado efectuar un **cambio de variable** del tipo $t=x-x_0$. Con esta transformación, el problema se expresa en términos de una variable desplazada, permitiendo así que la **serie de potencias resultante esté centrada en** $t=0$, lo cual preserva la estructura analítica del problema original, pero facilita considerablemente el trabajo técnico.

A continuación, se presenta la justificación formal de este procedimiento y se demuestra que dicha transformación conserva la naturaleza del punto ordinario, así como la equivalencia entre las soluciones desarrolladas en ambas variables. Sea $x = x_0$ un punto ordinario de (2.1), entonces existe una solución en serie de potencia garantizada en el teorema (2.6) de la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \quad |x - x_0| < \mu$$

Realizando el cambio de variable $x = t + x_0$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} \qquad = \frac{dy}{dx}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Reemplazando en (2.1)

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p_1(t + x_0)\frac{dy}{dt} + p_2(t + x_0)\,y(t) = 0$$
$$p_1(x) = p_1(t + x_0) = \bar{p}_1(t)$$
$$p_2(x) = p_2(t + x_0) = \bar{p}_2(t)$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \bar{p}_1(t)\frac{dy}{dt} + \bar{p}_2(t)y(t) = 0$$

$t = 0$ es un punto ordinario de esta ecuación diferencial y tiene una solución en serie centrada en cero dada por la expresión (2.6).

Ejemplo 2.1.5. Solución en serie no centrada en el origen

Resuelva la ED
$$y'' - 2(x + 3)y' - 3y = 0$$
entorno al punto ordinario $x_0 = -3$

Solución 2.1.5 *Utilizando la técnica explicada anteriormente la ecuación diferencial se transforma en*

$$y'' - 2ty' - 3y = 0$$

donde $t_0 = 0$ *es un punto ordinario. así tenemos*

$$3y = 3\sum_{m=0}^{\infty} c_m t^m,$$
$$2ty' = 2\sum_{m=0}^{\infty} m c_m t^m,$$
$$y'' = \sum_{m=0}^{\infty}(m + 2)(m + 1)c_{m+2}t^m$$

Sumando estas serie

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[(m + 2)(m + 1)c_{m+2} - (2m + 3)c_m\right]t^m = 0$$

Igualando el coeficiente a cero obtenemos la relación de recurrencia

$$c_{m+2} = \frac{2m+3}{(m+2)(m+1)}c_m \quad \forall m \geq 0$$

$m = 0$

$$c_2 = \frac{3}{(2)(1)}c_0$$

$m = 2$

$$c_4 = \frac{7}{(4)(3)}c_2 = \frac{7 \cdot 3}{(4)(3)(2)(1)}c_0$$

$m = 4$

$$c_6 = \frac{11}{(6)(5)}c_4 = \frac{11 \cdot 7 \cdot 3}{(6)(5)(4)(3)(2)(1)}c_0$$

$$\vdots$$

$$c_{2m} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4m-1)}{(2m)!}c_0 \quad \forall m \geq 1$$

$m = 1$

$$c_3 = \frac{5}{(3)(2)}c_1$$

$m = 3$

$$c_5 = \frac{9}{(5)(4)}c_3 = \frac{9 \cdot 5}{(5)(4)(3)(2)}c_1$$

$m = 5$

$$c_7 = \frac{13}{(7)(6)}c_5 = \frac{13 \cdot 9 \cdot 5}{(7)(6)(5)(4)(3)(2)}c_1$$

$$\vdots$$

$$c_{2m+1} = \frac{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdots (4m+1)}{(2m+1)!}c_1 \quad \forall m \geq 1$$

Así la solución es

$$y(t) = c_0\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4m-1)}{(2m)!}t^{2m}\right] + c_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdots (4m+1)}{(2m+1)!}t^{2m+1}$$

$$y(x) = c_0\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4m-1)}{(2m)!}(x+3)^{2m}\right] + c_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdots (4m+1)}{(2m+1)!}(x+3)^{2m+1}$$

Definición 2.1.5: Punto singular regular

Un punto singular x_0 en el cual las funciones $p(x) = (x-x_0)p_1(x)$ y $q(x) = (x-x_0)^2 p_2(x)$ sean analíticas se llama un punto singular regular de 2.1. Así una ecuación diferencial de segundo orden con un punto singular regular x_0 tiene la forma

$$y'' + \frac{p(x)}{(x-x_0)}y' + \frac{q(x)}{(x-x_0)^2}y = 0 \tag{2.17}$$

donde las funciones $p(x)$ y $q(x)$ son analíticas en $x = x_0$.
Si un punto singular x_0 no es un regular, entonces se llama punto singular irregular.

Ejemplo 2.1.6. Punto singular e irregular de una ED

Determina si el punto indicado es singular o irregular

1.

$$2xy'' - y' + 2y = 0 \qquad x_0 = 0 \tag{2.18}$$

2.

$$y'' + \frac{1}{x(x-1)^2}y' + \frac{8}{x(x-1)}y = 0 \qquad x_0 = 0,\ x_0 = 1$$

Solución 2.1.6 *1.*

$$y'' - \frac{1}{2x}y' + \frac{1}{x}y = 0 \qquad \textit{Forma normal}$$

$$p_1(x) = \frac{1}{2x}, \qquad p_2(x) = \frac{1}{x}$$

$$p(x) = x \cdot p_1(x) = x\left(\frac{1}{2x}\right) = \frac{1}{2}, \qquad q(x) = x^2 \cdot p_2(x) = x^2\left(\frac{1}{x}\right) = x$$

En $x_0 = 0$, tanto $p(x)$ como $q(x)$ son analíticas, es un punto singular regular

2.

$$p_1(x) = \frac{1}{x(x-1)^2}, \qquad p_2(x) = \frac{8}{x(x-1)} \qquad \textit{Singularidades en } x_0 = 0,\ x_0 = 1$$

Para $x_0 = 0$

$$p(x) = x \cdot p_1(x) = x\left(\frac{1}{x(x-1)^2}\right) = \frac{1}{(x-1)^2},$$

$$q(x) = x^2 \cdot p_2(x) = x^2\left(\frac{8}{x(x-1)}\right) = \frac{8x}{x-1}$$

En $x_0 = 0$, $p(x)$ y $q(x)$ son analíticas, es un punto singular regular

Para $x_0 = 1$

$$p(x) = (x-1) \cdot p_1(x) = (x-1)\left(\frac{1}{x(x-1)^2}\right) = \frac{1}{x(x-1)},$$

$$q(x) = (x-1)^2 \cdot p_2(x) = (x-1)^2\left(\frac{8}{x(x-1)}\right) = x\,(x-1)$$

En $x_0 = 1$, $p(x)$ no es analíticas, es un punto singular irregular

Si tenemos la ecuación de Cauchy-Euler de segundo orden $x^2y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x) = 0$, tiene un punto singular regular en $x = 0$. Las soluciones de esta ecuación está dada por la expresión **??** en el intervalo $(0, \infty)$ donde $y_1 = x^2$ y $y_2 = x^2 \ln x$. Si se intenta encontrar una solución en serie de potencias respecto al punto singular regular $x = 0$ (en particular, $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$), se tendría éxito en obtener sólo la solución polinomial $y_1 = x^2$. El hecho de que no se obtuviera la segunda solución no es sorprendente porque $\ln x$ (y en consecuencia $y_2 = x^2 \ln x$) no es analítica en $x = 0$, es decir, y_2 no tiene un desarrollo en serie de Taylor centrado en $x = 0$.

Para resolver ecuaciones diferenciales entorno a un punto singular regular, se emplea el siguiente teorema, llamado de teorema de Frobenius.

2.1.1. Solución de una EDO entorno a un punto singular regular

Teorema 2.1.2: Teorema de Frobenius

Si $x = x_0$ es un punto singular regular de 2.1, entonces existe al menos una solución en serie de la forma

$$y(x) \quad = \quad \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x - x_0)^{m+r} \tag{2.19}$$

donde r es la constante por determinar. Esta serie converge al menos en un intervalo del tipo
$0 < x - x_0 < R$.

Demostración 2.1.2 *Derivando la expresión (2.19) obtenemos*

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \left(x - x_0\right)^{m+r} \qquad c_0 \neq 0$$
$$y' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) c_m \left(x - x_0\right)^{m+r-1} \qquad c_0 \neq 0$$
$$y'' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) c_m \left(x - x_0\right)^{m+r-2} \qquad c_0 \neq 0$$

Ahora para la demostración tomaremos la forma general de la ecuación de Euler dada en (1.98) con un punto singular regular en $x_0 = 0$. Reemplazando en la forma normal obtenida en (1.99), tenemos

$$x^{r-2}\left(\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_m x^m\right) + \frac{1}{x}\left(\sum_{m=0}^{\infty} p_m x^m\right)\left(x^{r-1}\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_m x^m\right)$$
$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} q_m x^m\right)\left(x^r \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m\right) = 0$$

Realizando las operaciones y un corrimiento nos queda

$$x^{r-2}\sum_{m=0}^{\infty}\left\{(m+r)(m+r-1)c_m + \sum_{k=0}^{m}\left[(k+r)p_{m-k} + q_{m-k}\right]c_k\right\}x^m = 0$$

Igualando a cero los coeficientes de la serie, tenemos la relación de recurrencia

$$(m+r)(m+r-1)c_m + \sum_{k=0}^{m}\left[(k+r)p_{m-k} + q_{m-k}\right]c_k = 0 \quad \forall m \geq 1 \tag{2.20}$$

Como queremos despejar a $\boldsymbol{c_m}$, aislamos el término que lo contiene y notamos que cuando $\boldsymbol{k = m}$, p_0 y q_0 aparecen de esta forma $\left[(m+r)p_0 + q_0\right]c_m$ Entonces, la sumatoria se separa

$$\sum_{k=0}^{m}\left[(k+r)p_{m-k} + q_{m-k}\right]c_k = \left[(m+r)p_0 + q_0\right]c_m + \sum_{k=0}^{m-1}\left[(k+r)p_{m-k} + q_{m-k}\right]c_k$$

Ahora factorizando a c_m y despejando

$$\left[(m+r)(m+r-1)+(m+r)p_0+q_0\right]c_m=-\sum_{k=0}^{m-1}\left[(k+r)p_{m-k}+q_{m-k}\right]c_k$$

Entonces, esto se puede expresar como

$$\begin{aligned} F(m+r)c_m &= \left[(m+r)(m+r-1)+(m+r)p_0+q_0\right]c_m \\ &= -\sum_{k=0}^{m-1}\left[(k+r)p_{m-k}+q_{m-k}\right]c_k \quad \forall m\geq 1 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Además, un cálculo simple nos muestra que

$$F(m+r)=F(r)+m\,(2r+p_0+m-1)=0 \tag{2.22}$$

Analizando que ocurre cuando una de estas expresiones se anula para algún m : Ya sabemos que $F(r)=0$,

$$F(m+r)=m\,(2r+p_0+m-1)$$

Entonces, $F(m+r)=0$, si:

$$\begin{aligned} &m\,(2r+p_0+m-1)=0 \\ &m=0 \quad \vee \quad (2r+p_0+m-1)=0 \end{aligned}$$

Como estamos analizando $m\geq 1$, la única posibilidad es

$$2r+p_0+m-1=0 \quad\Longrightarrow\quad m=1-2r-p_0$$

De donde si tenemos que

$$r_1+r_2=1-p_0\Rightarrow 2r=r_1+r_2-2\,(r_2-r)$$

Si $r=r_1\vee r_2$, entonces de la expresión (2.22)

$$m=\pm\,(r_2-r_1)$$

Teorema 2.1.3: Punto Singular

Sean las funciones $p(x)$ y $q(x)$ analítica en $x=0$, y por lo tanto pueden ser expresada como serie de potencia dada en 2.6 para $\mid x\mid<\mu$. Además, sean r_1yr_2 las soluciones de la ecuación indicial

$$F(r) \quad = \quad r(r-1)+p_0r+q_0 \tag{2.23}$$

entonces

1. Si $Re(r_1)\geq Re(r_2)$ y r_1-r_2 no es un entero no negativo, entonces las dos soluciones linealmente independiente de 2.17 son

$$y_1(x) \quad = \quad |x|^{r_1}\sum_{m=0}^{\infty}c_mx^m \tag{2.24}$$

y

$$y_2(x) = |x|^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{c}_m x^m \tag{2.25}$$

2. Si las raices de la ecuación indicial son iguales, es decir, $r_2 = r_1$, entonces las dos dos soluciones linealmente independiente de 2.17 son 2.24 y

$$y_2(x) \quad = \quad y_1(x) \ln|x| + |x|^{r_1} \sum_{m=1}^{\infty} d_m x^m \tag{2.26}$$

3. Si las raíces de la ecuación indicial cumplen que $r_1 - r_2 = n$(un entero positivo) entonces las dos dos soluciones linealmente independiente de 2.17 son 2.24 y

$$y_2(x) \quad = \quad c y_1(x) \ln|x| + |x|^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} e_m x^m \tag{2.27}$$

donde los coeficientes $c_m, \bar{c}_m, d_m, e_m$ y la constante c se determinan sustituyendo la serie de $y(x)$ en la ecuación 2.17.

Demostración 2.1.3 *1. **Caso 1:***
De la expresión (2.22) tenemos

$$\begin{aligned} F(r) = (r - r_1)(r - r_2) \Rightarrow F(m + r_1) &= (m + r_1 - r_1)(m + r_1 - r_2) \\ &= m(m + r_1 - r_2) \end{aligned}$$

Por lo tanto tomando la norma

$$|F(r_1 + m)| \geq m(m - |r_1 - r_2|) \tag{2.28}$$

Ahora vamos a asumir que existen constantes $M > 0$ y $\mu_0 < \mu$ tales que

$$|p_i| \mu_0^i \leq M \quad \wedge \quad |q_i| \mu_0^i \leq M \quad \forall i \geq 0$$

Entonces, a partir de (2.28) y la relación de recurrencia de (2.21), obtenemos

$$m(m - |r_1 - r_2|) |c_m| \leq M \sum_{k=0}^{\infty} (k + |r_1| + 1) \mu_0^{-m+k} |c_k| \quad \forall m \geq 1$$

Si planteamos una secuencia auxiliar C_i que acota a $|c_i|$

$$C_i = |c_i| \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

Entonces

$$i(i - |r_1 - r_2|) C_i \leq M \sum_{k=0}^{i-1} (k + |r_1| + 1) \mu_0^{-i+k} C_k \quad i = n, n+1, \cdots \tag{2.29}$$

Esta relación por inducción permite probar que

$$|c_m| = C_m \quad \forall m \geq 0$$

A partir de la expresión (3.4), se obtiene la relación

$$\frac{C_m}{C_{m-1}} = \frac{(m-1)\,(m-1-|r_1-r_2|) + M\,(m+|r_1|)}{\mu_0 m\,(m-|r_1-r_2|)}$$

Esto implica que

$$\lim_{m\to\infty}\left|\frac{C_m x^m}{C_{m-1}x^{m-1}}\right| = \frac{|x|}{\mu_0} \quad \Rightarrow \quad \textit{Converge si } |x| < \mu_0$$

Por el criterio de la razón, la serie $\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ *converge si* $|x| < \mu_0$*, por tanto también converge* $\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ *por comparación.*

Sin embargo, si μ_0 *es arbitrario,* $\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ *converge para* $|x| < \mu$*. Finalmente, la presencia del factor* $|x|^{r_1}$ *introduce un Punto Singular en el origen de la solución. Ya podemos decir que* $|x|^{r_1}\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ *es una solución de la EDO y es analítica para* $0 < |x| < \mu$*.*
Si reemplazamos r_1 *por* r_2*, con las consideraciones ya mencionadas, entonces* $|x|^{r_2}\sum_{m=0}^{\infty} \bar{c}_m x^m$ *es la segunda solución de la EDO y también es analítica para* $0 < |x| < \mu$*.*

2. ***Caso 2:***
   Tenemos la EDO, donde

$$\mathcal{L}_2[y(x)] = y'' + \frac{p(x)}{x}y' + \frac{q(x)}{x^2}y$$

Al aplicar el método de Frobenius, se obtiene una ecuación indicial $F(r) = 0$*, la cual tiene raíces repetidas* $r_1 = r_2$*. Ya sabemos que*

$$F\,(r_1) = \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)_{r=r_1} = 0$$

Y también sabemos que

$$y_1(x) = |x|^{r_1}\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \quad \textit{en el intervalo } 0 < |x| < \mu$$

De (2.20) no asumimos a $\boldsymbol{r}$ *como una solución de la ecuación indicial, es decir, que la tomamos con una parámetro variable, no necesariamente igual a* r_1*. Entonces, aplicando el operador* $\mathcal{L}_2$ *y suponiendo que los coeficientes* c_m *satisfacen la relación de recurrencia (2.20), se obtiene*

$$\mathcal{L}_2[y(x)] = c_0 x^{r-2} F(r)$$

Donde $\quad y(x) = x^r \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ *Diferenciando a (25) respecto a* $\boldsymbol{r}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}\mathcal{L}_2[y(x)] &= \mathcal{L}_2\left[\frac{\partial y(x)}{\partial r}\right] \\ &= c_0 x^{r-2}\left[\frac{dF(r)}{dr} + F(r)\ln x\right] \end{aligned}$$

Como sabemos que $F(r_1) = 0 \quad \wedge \quad \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)_{r=r_1} = 0$, *se obtiene*

$$\mathcal{L}_2\left[\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)_{r=r_1}\right] = 0$$

Lo que implica que $\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)_{r=r_1}$ *es la segunda solución formal Dicho esto, partimos de que:*

$$y(x) = x^r \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$$

Entonces,

$$\frac{\partial y(x)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(x^r \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m\right)$$

Derivando, se obtiene

$$\frac{\partial y(x)}{\partial r} = x^r \ln x \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m + x^r \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial c_m}{\partial r} x^m$$

Factorizamos

$$\frac{\partial y(x)}{\partial r} = x^r\left(\ln x \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial c_m}{\partial r} x^m\right)$$

Ahora evaluamos $r = r_1$

$$\left.\frac{\partial y(x)}{\partial r}\right|_{r=r_1} = x^{r_1}\left(\ln x \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m + \sum_{m=0}^{\infty} \left.\frac{\partial c_m}{\partial r}\right|_{r=r_1} x^m\right)$$

Separando los términos

$$\left.\frac{\partial y(x)}{\partial r}\right|_{r=r_1} = \underbrace{x^{r_1} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m}_{y_1(x)} \cdot \ln x + x^{r_1} \sum_{m=0}^{\infty} \left.\frac{\partial c_m}{\partial r}\right|_{r=r_1} x^m$$

Entonces, nos queda

$$y_2(x) = y_1(x) \cdot \ln x + x^{r_1} \sum_{m=0}^{\infty} d_m x^m$$

Donde, como notamos

$$y_2(x) = \left.\frac{\partial y(x)}{\partial r}\right|_{r=r_1}; \quad y_1(x) = x^{r_1} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m; \quad d_m = \left.\frac{\partial c_m}{\partial r}\right|_{r=r_1} \qquad \forall m \geq 0$$

Ya aquí, como c_0 *no depende de* $\boldsymbol{r}$*, tenemos que* $d_0 = 0$ *y entonces*

$$\sum_{m=0}^{\infty} d_m x^m = \sum_{m=1}^{\infty} d_m x^m$$

Entonces, nos queda que la segunda solución será de la forma

$$y_2(x) = y_1(x) \ln|x| + |x|^{r_1} \sum_{m=1}^{\infty} d_m x^m$$

3. ***Caso 3:***
Tenemos la EDO , el Método de Frobenius nos lleva a resolver la ecuación indicial $F(r) = 0$*, cuyas raíces son* r_1 *y* r_2*, y se cumple que:* $r_1 - r_2 = n \in \mathbb{Z}^+$

Como es sabido, el método nos garantiza una primera solución correspondiente a r_1*, de la forma (2.24) y esta es analítica para* $0 < |x| < \mu$*.*

$$y_1(x) = x^{r_1} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$$

En correspondencia con r_2*, podemos obtener* $c_m(r_2)$ *para* $m = 1, 2, 3, \cdots, n-1$ *como un múltiplo lineal de* c_0 *a partir de la relación de recurrencia (2.21). Sin embargo, al intentar calcular* $c_m(r_2)$*, se obtiene*

$$F(r_2 + m) = F(r_1) \qquad \textit{Donde, sabemos que } F(r_1) = 0$$

Esto hace que $c_m(r_2)$ *sea indeterminado, lo que interrumpe la construcción directa de la segunda solución. Ahora como en el caso anterior de las raíces repetidas, introducimos la derivada con respecto a* $\boldsymbol{r}$ *para generar una segunda solución L.I. a la que ya tenemos.*

Donde

$$y_2(x) = \left.\frac{\partial y(x)}{\partial r}\right|_{r=r_2}$$

$$y(x) = x^r \sum_{m=0}^{\infty} c_m(r) x^m$$

Entonces, esto nos queda

$$\frac{\partial y(x)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(x^r \sum_{m=0}^{\infty} c_m(r) x^m\right)$$

Aplicando la regla del producto:

$$\frac{\partial y(x)}{\partial r} = \left(x^r \ln|x| \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m\right) + \left(x^r \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial c_m}{\partial r} x^m\right)$$

Ahora evaluamos la derivada en $r = r_2$*, para obtener la segunda solución* $y_2(x)$

$$
\begin{aligned}
y_2(x) &= \left.\frac{\partial y(x)}{\partial r}\right|_{r=r_2} \\
&= \underbrace{\left(x^{r_2}\ln x\sum_{m=0}^{\infty} c_m\left(r_2\right)x^m\right)}_{1^{er}\ \ término} + \underbrace{\left(x^{r_2}\sum_{m=0}^{\infty}\left.\frac{\partial c_m}{\partial r}\right|_{r=r_2} x^m\right)}_{2^{do}\ \ término}
\end{aligned}
$$

El primer término es un múltiplo logarítmico de la primera solución $y_1(x)$ si consideramos que $\sum_{m=0}^{\infty} c_m\left(r_2\right)x^m$ y $\sum_{m=0}^{\infty} c_m\left(r_1\right)x^m$ son proporcionales.
El segundo término es una serie regular

$$
x^{r_2}\sum_{m=0}^{\infty} e_m x^m \qquad donde\ : e_m = \left.\frac{\partial c_m}{\partial r}\right|_{r=r_2} \qquad \forall m \geq 0
$$

Ya aquí tenemos la misma forma de (2.27), donde

$$
C = \lim_{r\to r_2}\left(r-r_2\right)c_m(r)
$$

Por lo que, finalmente nos queda

$$
y_2(x) = Cy_1(x)\ln|x| + |x|^{r_2}\sum_{m=0}^{\infty} e_m x^m
$$

Donde, claramente esta solución $y_2(x)$ también es analítica para $0 < |x| < \mu$.

Ejemplo 2.1.7. Ecuación Diferencial con diferencia de raíces indiciales no entera

Resuelva la ecuación diferencial dada por la expresión

$$
2xy'' - y' + 2y = 0
$$

Solución 2.1.7 *Del ejemplo(enumerar ejemplo) (2.18) $x_0 = 0$ es un punto singular regular y por el teorema (2.1.2) sabemos que al menos hay una solución de la forma (2.19)*

$$
\begin{aligned}
2xy'' &= 2\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-1} \\
y' &= \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_m x^{m+r-1}
\end{aligned}
$$

Reemplazando en la ED

$$
\sum_{m=0}^{\infty}[2(m+r)(m+r-1)-(m+r)]c_m x^{m+r-1} + 2\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0
$$

$$
\underbrace{\left[2r^2-3r\right]}_{Ecuación\ Indicial} c_0 x^{r-1} + \sum_{m=1}^{\infty}\underbrace{\left[[2(m+r)(m+r-1)-(m+r)]c_m + 2c_{m-1}\right]}_{Relación\ de\ Recurrencia} x^{m+r-1} = 0
$$

Resolviendo la ecuación indicial

$$2r^2 - 3r = 0 \qquad r_1 = 0 \; r_2 = \frac{3}{2} \quad r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}^+$$

La ecuación de recurrencia es

$$c_m = \frac{-2}{2(m+r)(m+r-1)-(m+r)} c_{m-1} \quad \forall m \geq 1 \tag{2.30}$$

Si $r_1 = 0$ en (2.30)

$$c_m = \frac{-2}{(2m-3)m} c_{m-1} \quad \forall m \geq 1$$

Desarrollamos los términos

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{-2}{(2(1)-3)1} c_0 = \frac{-2}{-1} c_0 = \frac{2}{1} c_0 \\
c_2 &= \frac{-2}{(2(2)-3)2} c_1 = \frac{-2(2)}{(1)2} c_0 = -\frac{2^2}{(1)(2)} c_0 \\
c_3 &= \frac{-2}{(2(3)-3)3} c_2 = \frac{-2 \cdot (-2)^2}{(1)(2)(3)3} c_0 = \frac{2^3}{3! \cdot 3} c_0 \\
c_4 &= \frac{-2}{(2(4)-3)4} c_3 = \frac{-2 \cdot (2)^3}{(1)(2)(3)(3)(5)4} c_0 = -\frac{2^4}{4! \cdot 3 \cdot 5} c_0
\end{aligned}$$

La solución para este caso es

$$y_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}(2)^m}{m! \displaystyle\prod_{k=1}^{m-2} (2k+1)} x^m \tag{2.31}$$

Si $r_2 = \frac{3}{2}$ en (2.30)

$$c_m = \frac{-1}{(m+3/2)m} c_{m-1}$$

Desarrollando esta relación de recurrencia

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{-1}{(1+3/2)1} c_0 = \frac{-1}{1 \cdot \frac{5}{2}} c_0 = -\frac{2}{1 \cdot 5} c_0 \\
c_2 &= \frac{-1}{(2+3/2)2} c_1 = \frac{-1(-2)}{\left(\frac{7}{2}\right) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5} c_0 = \frac{(2)^2}{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7} c_0 \\
c_3 &= \frac{-1}{(3+3/2)3} c_2 = \frac{-1(2)^2}{\left(\frac{9}{2}\right) 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7} c_0 = -\frac{(2)^3}{3! \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} c_0 \\
c_4 &= \frac{-1}{(4+3/2)^4} c_3 = \frac{-1 \cdot -(2)^3}{\left(\frac{11}{2}\right) 4 \cdot 3! \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} c_0 = \frac{(2)^4}{4! \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} c_0
\end{aligned}$$

La segunda solución es

$$y_2(x) = x^{\frac{3}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-2)^m}{m! \displaystyle\prod_{k=1}^{m-1} (3+2k)} x^m \tag{2.32}$$

Por lo tanto la solución general es

$$y(x) = c_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}(2)^m}{m! \prod\limits_{k=1}^{m-2}(2k+1)} x^m + c_2 x^{\frac{3}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-2)^m}{m! \prod\limits_{k=1}^{m-1}(3+2k)} x^m \tag{2.33}$$

Ejemplo 2.1.8. Ecuación Diferencial con Raíces Indiciales Repetidas

Resuelva la ecuación diferencial dada por la expresión

$$x^2 y'' + \left(x^2 - x\right) y' + y \quad = \quad 0$$

Solución 2.1.8 *De la definición (2.1.5), $x_0 = 0$ es un punto singular regular. Derivando la solución en serie y reemplazando*

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_{m-1}(m-1+r)x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m \left[(m+r)((m+r-2)+1)\right] x^{m+r} = 0$$

$$x^r \left[c_0 \left(r(r-2)+1\right)\right] + \sum_{m=1}^{\infty} \left[c_m \left((m+r)(m+r-2)+1\right) + c_{m-1}(m-1+r)\right] x^m = 0$$

Igualando los coeficientes a cero

$$[r(r-2)+1]\, c_0 = 0, \quad c_0 \neq 0 \Rightarrow r = 1 \qquad \textit{(Ecuación indicial)}$$

$$c_m = \frac{1-m-r}{(m+r)(m+r-2)+1} c_{m-1} \qquad \textit{(Relación de recurrencia)}$$

$$\textit{Para } r = 1: \quad c_m = \frac{-m}{m^2} c_{m-1}$$

Obteniendo los términos de la relación anterior

$$c_1 = \frac{-1}{1} c_0 = -c_0$$

$$c_2 = \frac{-2}{4} c_1 = -\frac{1}{2} c_1 = \frac{(-1)^2}{2!} c_0$$

$$c_3 = \frac{-3}{9} c_2 = -\frac{1}{3} c_2 = \frac{(-1)^3}{3!} c_0$$

$$\vdots$$

$$c_m = \frac{(-1)^m}{m!} c_0$$

Así, una solución está dada por:

$$y_0(x) = c_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} x^m$$

Para obtener la segunda solución linealmente independiente, utilizamos la expresión (2.25) dada en el teorema (2.1.3).

De la relación de recurrencia obtenemos

$$c_m(r) = \frac{-1}{m+r-1}c_{m-1}, \quad \forall m \geq 1 \qquad \textit{(Desarrollando los términos)}$$

$$c_1(r) = \frac{-1}{r}c_0$$

$$c_2(r) = \frac{-1}{r+1}\cdot\frac{-1}{r}c_0 = \frac{(-1)^2}{r(r+1)}c_0$$

$$c_3(r) = \frac{(-1)^3}{r(r+1)(r+2)}c_0$$

$$\vdots$$

$$c_m(r) = \frac{(-1)^m}{\prod_{k=0}^{m-1}(r+k)}c_0$$

Por propiedad de los logaritmos

$$\ln|c_m(r)| = \ln(c_0) - \ln\left(\prod_{k=0}^{m-1}(r+k)\right) = \ln(c_0) - \sum_{k=0}^{m-1}\ln|r+k|$$

$$\frac{c_m'(r)}{c_m(r)} = -\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{r+k}$$

$$c_m'(r) = -c_m(r)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{r+k}$$

$$d_m = \frac{(-1)^{m+1}}{m!}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k+1}$$

Sustituyendo esta expresión en (2.25), obtenemos la segunda solución

$$y_1(x) = y_0(x)\ln(x) + x\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{m+1}}{m!}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k+1}\right)x^m$$

Por lo tanto, la solución general está dada por

$$y(x) = c_0\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}x^m + c_1\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}x^m\ln(x) + x\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{m+1}}{m!}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k+1}\right)x^m\right]$$

Ejemplo 2.1.9. Ecuación Diferencial con diferencia de raíces indiciales entera positiva

Resuelva la ecuación diferencial dada por la expresión

$$x^2y'' + 2xy' + xy = 0$$

Solución 2.1.9 *En primer lugar verificamos que si $x_0 = 0$ es un punto singular regular, de forma que la forma normal de la ED*

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{1}{x}y = 0$$

es facil verificar que $p(x)$ y $q(x)$ son analítica en $x_0 = 0$, por lo tanto es un punto singular regular. Así está garantizada una solución de la forma dada en (2.19), derivando y sustituyendo en la ecuación diferencial

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r} + 2\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{m+r+1} = 0$$

Factorizando las dos primeras series

$$\sum_{m=0}^{\infty}[(m+r)(m+r+1)]c_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{m+r+1} = 0$$

Igualamos los índices y exponentes de las dos sumatorias:

$$[(r)(r+1)]c_0 x^r + \sum_{m=1}^{\infty}[(m+r)(m+r+1)]c_m x^{m+r} + \sum_{m=1}^{\infty}c_{m-1}x^{m+r} = 0$$

Factorizando las series

$$\underbrace{[(r)(r+1)]}_{\text{Ecuación Indicial}} c_0 x^r + \sum_{m=1}^{\infty}\underbrace{[((m+r)(m+r+1)c_m) + c_{m-1}]}_{\text{Relación de Recurrencia}} x^{m+r} = 0$$

La ecuación indicial está dada por

$$r(r+1) = 0$$

Con soluciones $r_1 = 0$ y $r_2 = -1$ cuya diferencia es uno. Igualando a cero el coeficiente de la sumatoria, tenemos

$$(m+r)(m+r+1)c_m + c_{m-1} = 0$$

Despejando c_m

$$c_m = \frac{-1}{(m+r)(m+r+1)}c_{m-1} \quad \forall m \geq 1 \tag{2.34}$$

Ahora sustituyendo $r_1 = 0$ en (2.34)

$$c_m = \frac{-1}{(m)(m+1)}c_{m-1} \quad \forall m \geq 1$$

Desarrollando los coeficientes

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{-1}{(1)(1+1)}c_0 = \frac{-1}{(1)(2)}c_0 \\
c_2 &= \frac{-1}{(2)(2+1)}c_1 = \frac{(-1)^2}{(1)(2)(2)(3)}c_0 \\
c_3 &= \frac{-1}{(3)(3+1)}c_2 = \frac{(-1)^3}{(1)(2)(2)(3)(3)(4)}c_0 \\
c_4 &= \frac{-1}{(4)(4+1)}c_3 = \frac{(-1)^4}{(1)(2)(2)(3)(3)(4)(4)(5)}c_0 \\
&\vdots \\
c_m &= \frac{(-1)^m}{m!(m+1)!}c_0
\end{aligned}$$

De igual forma desarrollamos los coeficientes de (2.34) para $r_2 = -1$

$$c_m = \frac{-1}{(m-1)(m)} c_{m-1} \quad \forall m \geq 1$$

Desarrollando

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{-1}{(1-1)(1)} c_0 = \frac{-1}{(0)(1)} c_0 \\
c_2 &= \frac{-1}{(1)(2)} c_1 = \frac{(-1)^2}{(0)(1)(1)(2)} c_0 \\
c_3 &= \frac{-1}{(2)(3)} c_2 = \frac{(-1)^3}{(0)(1)(1)(2)(2)(3)} c_0 \\
c_4 &= \frac{-1}{(3)(4)} c_3 = \frac{(-1)^4}{(0)(1)(1)(2)(2)(3)(3)(4)} c_0
\end{aligned}$$

$$c_m = \frac{(-1)^m}{(m-1)!m!} c_0 \tag{2.35}$$

Ahora reemplazando en (2.19) obtenemos la solución

$$y_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+1)!} x^m$$

Como la diferencia de las raíces indiciales es un entero positivo la segunda solución linealmente independiente se obtiene utilizando la expresión dada en (2.27), donde

$$e_m = \left.\frac{\partial c_m}{\partial r}\right|_{r=r_2} \qquad \forall m \geq 0$$

Ahora vamos a desarrollar la relación de recurrencia (2.34) para obtener una expresión que dependa unicamente de r

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{-1}{(1+r)(r+2)} c_0 = \frac{-1}{(r+1)(r+2)} c_0 \\
c_2 &= \frac{-1}{(2+r)(r+3)} c_1 = \frac{(-1)^2}{(r+1)(r+2)(2+r)(r+3)} c_0 \\
c_3 &= \frac{-1}{(3+r)(r+4)} c_2 = \frac{(-1)^3}{(r+1)(r+2)(2+r)(r+3)(3+r)(r+4)} c_0 \\
c_4 &= \frac{-1}{(4+r)(r+5)} c_3 = \frac{(-1)^4}{(r+1)(r+2)(2+r)(r+3)(3+r)(r+4)(4+r)(r+5)} c_0
\end{aligned}$$

$$c_m = \frac{(-1)^m}{(r+1)(r+2)^2 \cdots (r+m)^2(m+r+1)} c_0 \tag{2.36}$$

Para simplificar el proceso, escogemos $c_0 = 1$. *Ahora vamos a calcular la constante* C

$$\begin{aligned}
C &= \lim_{r \to r_2} (r - r_2)\, c_m(r) \\
C &= \lim_{r \to -1} (r - (-1)) c_m(r) \\
C &= \lim_{r \to -1} (r+1) c_m(r)
\end{aligned}$$

Recordando que

$$c_m(r) = \frac{(-1)^m}{(r+1)(r+2)^2\cdots(r+m)^2(m+r+1)}c_0$$
$$c_1 = \frac{-(1)}{(r+1)(r+2)}$$

$$\begin{aligned} C &= \lim_{r\to -1}(r+1)c_1(r) \\ &= \lim_{r\to -1}\frac{(-1)(r+1)}{(r+1)(r+2)} \\ &= \lim_{r\to -1}\frac{(-1)}{(r+2)} \\ &= \frac{(-1)}{(-1+2)} \\ C &= -1 \end{aligned}$$

Luego de realizar esto, la expresión (2.36) nos queda

$$c_m(r) = \frac{(-1)^m}{(r+2)^2\cdots(r+m)^2(m+r+1)} \tag{2.37}$$

Diferenciando logarítmicamente a (2.37) para obtener a e_m, *tenemos lo siguiente*

$$\begin{aligned} \ln(c_m(r)) &= \ln(F(m,r)) \\ &= \ln\left(\frac{(-1)^m}{(r+2)^2\cdots(r+m)^2(m+r+1)}\right) \\ \ln(c_m(r)) &= \ln(-1)^m - \sum_{i=2}^{m}\ln(r+i)^2 - \ln(m+r+1) \\ \frac{\partial(\ln(c_m(r)))}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r}\left[\ln(-1)^m - \sum_{i=2}^{m}\ln(r+i)^2 - \ln(m+r+1)\right] \\ \frac{c_m'(r)}{c_m(r)} &= \left[0 - 2\sum_{i=2}^{m}\frac{1}{r+i} - \frac{1}{m+r+1}\right] \\ c_m'(r) &= c_m(r)\left[-2\sum_{i=2}^{m}\frac{1}{r+i} - \frac{1}{m+r+1}\right] \end{aligned}$$

Como $e_m = \left.\frac{\partial c_m}{\partial r}\right|_{r=r_2}$, *entonces* $e_m = c_m'(r_2)$

$$c_m'(r) = c_m(r)\left[-2\sum_{i=2}^{m}\frac{1}{r+i} - \frac{1}{m+r+1}\right] \quad \textit{Sabemos que } e_m = c_m'(r_2)\ :$$

Convenientemente establecemos que $e_0 = c_0'(-1) = 1$ *:*

$$c_m'(r_2) = c_m(r_2)\left[-2\sum_{i=2}^{m}\frac{1}{r+i} - \frac{1}{m+r+1}\right]_{r=r_2}$$

Ya calculamos $c_m(r_2)$ *en (2.35), recordando que* $r_2 = -1$ *:*

$$e_m = \frac{(-1)^m}{(m-1)!m!}\left[-2\sum_{i=2}^{m}\frac{1}{-1+i} - \frac{1}{m}\right]$$

Simplificando la sumatoria, proponemos la siguiente sustitución:

$$-1+i=k \quad \textit{Despejando } i: -1+1+i = k+1$$
$$i = k+1$$

Ajustando los límite de la sumatoria:

$$\textit{Si } i = m \to k = m-1$$
$$\textit{Si } i = 2 \to k = 1$$

Por lo que nos queda:

$$e_m = \frac{(-1)^m}{(m-1)!m!}\left[-2\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k} - \frac{1}{m}\right]$$
$$e_m = \frac{(-1)^m}{(m-1)!m!}\left[-2\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k} - \frac{1}{m}\right]$$

Como ya hemos determinado a e_m, ahora podemos construir la segunda solución en términos de series de potencias, la cual recordando :

$$y_2(x) = Cy_1(x)\ln|x| + |x|^{r_2}\sum_{m=0}^{\infty} e_m x^m \quad C=-1 \quad , \quad r_2$$
$$y_2(x) = -y_1(x)\ln(x) + x^{-1}\left[1 - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m-1)!m!}\left(2\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k} + \frac{1}{m}\right)x^m\right]$$

$$r_2 = -1$$

Soluciones de la EDO dada en términos de Series de Potencias

$$y_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(m+1)!}x^m$$
$$y_2(x) = -y_1(x)\ln(x) + x^{-1}\left[1 - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m-1)!m!}\left(2\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k} + \frac{1}{m}\right)x^m\right]$$

2.2 Ecuación de Hermite. Polinomios de Hermite.

Tesis milane de fisica

La ecuación diferencial de Hermite está dada por:

$$y''(x) - 2xy'(x) + \lambda y(x) = 0 \tag{2.38}$$

Nótese que el punto $x_0 = 0$ es un punto ordinario de la ecuación diferencial (2.38). Esto implica, por el teorema (2.1.2) que (2.38) admite una solución de

la forma
$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(x - x_0)^m$. Ahora, sea

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m, \quad \text{con}\, c_0 \neq 0, \tag{2.39}$$

solución de (2.38) alrededor del punto $x_0 = 0$. Entonces, derivando (2.39) se obtiene:

$$y'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} (m) c_m x^{m-1} \tag{2.40}$$

y

$$y''(x) = \sum_{m=2}^{\infty} (m)(m-1) c_m x^{m-2} \tag{2.41}$$

Luego, sustituyendo(2.39), (2.40), y(2.41) en (2.38) se obtiene:

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) c_m x^{m-2} - 2\sum_{m=1}^{\infty} m c_m x^m + 2a \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = 0$$

Ahora, con $m \to m+2$ se obtiene:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) c_{m+2} x^m - 2\sum_{m=1}^{\infty} m c_m x^m + \lambda \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = 0$$

$$\Rightarrow 2c_2 + \sum_{m=1}^{\infty} (m+2)(m+1) c_{m+2} x^m - 2\sum_{m=1}^{\infty} m c_m x^m + 2ac_0 + \lambda \sum_{m=1}^{\infty} c_m x^m = 0$$

Factorizando se obtiene:

$$2c_2 + \lambda c_0 + \left(\sum_{m=1}^{\infty} (m+2)(m+1) c_{m+2} + (-2m + \lambda)) c_m \right) x^m = 0$$

Esto es posible si: $2c_2 + \lambda c_0 = 0$ y $(m+2)(m+1)c_{m+2} + (-2m + \lambda))c_m = 0$, de donde se obtiene la relación de recurrencia

$$c_{m+2} = -\frac{(\lambda - 2m)}{(m+2)(m+1)} c_m \, \forall m \in N/m \geq 0 \tag{2.42}$$

Ahora dándole valores pares a m, de (2.42) se obtiene:

$$\begin{aligned}
&Si\, m = 0 \Rightarrow c_2 = -\frac{\lambda}{2} c_0. \\
&Si\, m = 2 \Rightarrow c_4 = -\frac{(\lambda - 4)}{4 \cdot 3} c_2 = \frac{\lambda(\lambda - 4)}{4 \cdot 3 \cdot 2} c_0. \\
&Si\, m = 4 \Rightarrow c_6 = -\frac{(\lambda - 8)}{6 \cdot 5} c_4 = -\frac{\lambda(\lambda - 8)(\lambda - 4)}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} c_0. \\
&Si\, m = 6 \Rightarrow c_8 = -\frac{(\lambda - 12)}{8 \cdot 7} c_6 = \frac{\lambda(\lambda - 12)(\lambda - 8)(\lambda - 4)}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} c_0. \\
&\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow c_{2m} = (-1)^m \frac{\lambda(\lambda-4)(\lambda-8)(\lambda-12)\cdots(\lambda+4-4m)}{(2m)!} c_0 \quad m \geq 1 \quad (2.43)$$

Analizar la expresion equiv para $\lambda = 2a$

Luego, $(a+2-2m)\cdots(a-4)(a-2)a = \prod_{k=0}^{m}(a+2-2k) = 2^m \prod_{k=0}^{m}(\frac{a}{2}+1-k) = 2^m \frac{\Gamma(\frac{a}{2}+1)}{\Gamma(\frac{a}{2}-m+1)}$.

Así,

$$c_{2m} = \frac{(-1)^m 2^{2m}}{(2m)!} \frac{\Gamma(\frac{a}{2}+1)}{\Gamma(\frac{a}{2}-m+1)} c_0, \; m = 0, 1, 2, \cdots \quad (2.44)$$

Ahora dándole valores impares a m, de (2.42) se obtiene:

$$Si\, m = 1 \Rightarrow c_3 = -\frac{\lambda-2}{3\cdot 2} c_1.$$
$$Si\, m = 3 \Rightarrow c_5 = -\frac{(\lambda-6)}{5\cdot(4)} c_3 = \frac{(\lambda-2)(\lambda-6)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} c_1.$$
$$Si\, m = 5 \Rightarrow c_7 = -\frac{(\lambda-10)}{7\cdot 6} c_5 = -\frac{(\lambda-10)(\lambda-6)(\lambda-2)}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} c_1.$$
$$Si\, m = 7 \Rightarrow c_9 = -\frac{(\lambda-14)}{9\cdot 8} c_7 = \frac{(\lambda-14)(\lambda-10)(\lambda-6)(\lambda-2)}{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} c_1.$$
$$\vdots$$

$$\Rightarrow c_{2m+1} = (-1)^m \frac{(\lambda-2)(\lambda-6)(\lambda-10)(\lambda-14)\cdots(\lambda-(4m-2))}{(2m+1)!} c_1 \quad m \geq 1 \quad (2.45)$$

Analizar la expresion equiv para $\lambda = 2a$

Luego, $(a-(2m-1))\cdots(a-7)(a-5)(a-3)(a-1) = \prod_{k=0}^{m}(a-2k+1) = 2^m \prod_{k=0}^{m}(\frac{a}{2}-k+\frac{1}{2})$.

$$\Rightarrow (a-(2m-1))\cdots(a-7)(a-5)(a-3)(a-1) = 2^m \frac{\Gamma(\frac{a}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{a}{2}-m+\frac{1}{2})},$$

As'i,

$$c_{2m+1} = \frac{(-1)^m}{2\cdot(2m+1)!} \frac{2^{2m+1}\Gamma(\frac{a}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{a}{2}-m+\frac{1}{2})} c_1, \; m = 0, 1, 2, \cdots \quad (2.46)$$

Luego, sustituyendo (2.44) y (2.46) en (2.39) $y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$, *con* $c_0 \neq 0$, se obtienen respectivamente:

$$c_0 y_0(x) = c_0 x^0 \left(1 - \frac{2a}{2!}x^2 + \frac{2^2(a-2)}{4!}x^4 - \cdots\right) = c_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \frac{\Gamma(\frac{a}{2}+1)}{\Gamma(\frac{a}{2}-m+1)} (2x)^{2m};\; y \quad (2.47)$$

$$c_1 y_1(x) = c_1 \left(x - \frac{2(a-1)}{3!}x^3 + \frac{2^2(a-1)(a-3)}{5!}x^5 - \cdots\right)$$

$$\Rightarrow c_1 y_1(x) = c_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2\cdot(2m+1)!} \frac{\Gamma(\frac{a}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{a}{2}-m+\frac{1}{2})} (2x)^{2m+1}, \quad (2.48)$$

As'i, la soluci'on general de la ecuaci'on diferencial (2.38) queda determinada por (2.47) y (2.48):

$$y(x) = c_0 y_0(x) + c_1 y_1(x) = c_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \frac{\Gamma(\frac{a}{2}+1)}{\Gamma(\frac{a}{2}-m+1)}(2x)^{2m} +$$

$$c_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2\cdot(2m+1)!} \frac{\Gamma(\frac{a}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{a}{2}-m+\frac{1}{2})}(2x)^{2m+1}; \qquad (2.49)$$

donde $c_0 y_0(x)$ y $c_1 y_1(x)$ representan las soluciones par e impar, respectivamente, de la ecuaci'on diferencial (2.38).
Finalmente, una forma para obtener los polinomios de Hermite, es tomar la constante de normalización $c_n = 2^n$, e iniciar un proceso regresivo a partir de la f'ormula de recurrencia (2.42):

$$c_{m+2} = -\frac{2(a-m)}{(m+2)(m+1)} c_m \, \forall m \in N/m \geq 0.$$

Ahora, despejando a c_m de (2.42), haciendo $m \to m-2$ y tomando $a = n$ se obtiene:

$$c_{m-2} = -\frac{m(m-1)}{2(n-m+2)} c_m, \forall m \in N/m \leq n+2. \qquad (2.50)$$

As'i, haciendo $m = n$ y sustituyendo la constante de normalizaci'on en la expresi'on anterior se tiene:

$$c_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{2(n-n+2)} c_m = -\frac{n(n-1)}{2^2} 2^n = -n(n-1)2^{n-2}.$$

De igual forma, tomando en (2.50) $m \to n-2$ y sustituyendo c_{n-2} respectivamente se obtiene:

$$c_{n-4} = -\frac{(n-2)(n-3)}{2(n-n+4)} c_{n-2} = \frac{(n-2)(n-3)}{2\cdot 2^2} n(n-1)2^{n-2} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)2^{n-4}}{2}.$$

As'i mismo, tomando en (2.50) $m \to n-4$ y sustituyendo c_{n-4} respectivamente se obtiene:

$$c_{n-6} = -\frac{(n-4)(n-5)}{2(n-n+6)} c_{n-4} = \frac{(n-4)(n-5)}{3\cdot 2^2} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)2^{n-4}}{2}.$$

$$\Rightarrow c_{n-6} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)2^{n-6}}{3\cdot 2}.$$

Siguiendo este procedimiento de manera iterativa se obtienen los llamados **coeficientes de los polinomios de Hermite:** $c_{n-2m} = \frac{(-1)^m \, n! \, 2^{n-2m}}{m! \, (n-2m)!}$, que al sustituirlos en (2.39) $y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ se concluye:

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = \sum_{m=0}^{M} c_{n-2m} x^{n-2m} = \sum_{m=0}^{M} \frac{(-1)^m \, n! \, 2^{n-2m}}{m! \, (n-2m)!} x^{n-2m};$$

donde $M = \frac{n}{2}$ si n es par y $M = \frac{n-1}{2}$ si n es impar $\Rightarrow M = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ (funci'on mayor entero).

$$\Rightarrow H_n(x) = \sum_{m=0}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \frac{(-1)^m \, n! \, 2^{n-2m}}{m! \, (n-2m)!} x^{n-2m}. \textbf{Polinomios de Hermite.} \qquad (2.51)$$

Ejemplo 2.2.1. Calcule los primeros cuatro polinomios de Hermite

Calcule los primeros cuatro polinomios de Hermite utilizando la expresión (2.51)

Solución 2.2.1 *Para* $n = 0$

$$H_0(x) = \sum_{m=0}^{0} \frac{(-1)^m 0! 2^{-2m}}{m!(-2m)!} x^{-2m}$$
$$H_0(x) = 1$$

Para $n = 1$

$$H_1(x) = \sum_{m=0}^{0} \frac{(-1)^m 1! 2^{1-2m}}{m!(1-2m)!} x^{1-2m}$$

Desarrollando la Sumatoria

$$H_1(x) = \frac{(-1)^0(1)2}{(1)(1)} x$$
$$H_1(x) = 2x$$

Para $n = 2$

$$H_2(x) = \sum_{m=0}^{1} \frac{(-1)^m 2! 2^{2-2m}}{m!(2-2m)!} x^{2-2m}$$

Desarrollando la serie

$$H_2(x) = \frac{(-1)^0 2! 2^2}{0!2!} x^2 + \frac{(-1)^1 2! 2^0}{2!0!} x^0$$

Simplificando

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

Para $n = 3$

$$H_3(x) = \sum_{m=0}^{1} \frac{(-1)^m 3! 2^{3-2m}}{m!(3-2m)!} x^{3-2m}$$

Desarrollando

$$H_3(x) = \frac{(-1)^0 3! 2^3}{0!3!} x^3 + \frac{(-1)^1 3!(2)}{(1)(1)} x$$

Simplificando

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

Siguiendo el mismo proceso se obtienen los demás polinomios. En la siguiente tabla se presenta hasta el polinomio de grado nueve.

n	$H_n(x)$
0	$H_0(x) = 1$
1	$H_1(x) = 2x$
2	$H_2(x) = 4x^2 - 2$
3	$H_3(x) = 8x^3 - 12x$
4	$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$
5	$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$
6	$H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$
7	$H_7(x) = 128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1680x$
8	$H_8(x) = 256x^8 - 3584x^6 + 13440x^4 - 13440x^2 + 1680$
9	$H_9(x) = 512x^9 - 9216x^7 + 48384x^5 - 80640x^3 + 30240x$

Agregar graficos de los polinomios

$$
\begin{aligned}
&He_1(x) = 1\\
&He_1(x) = x^2\\
&He_2(x) = x^2 - 1\\
&He_{\mathrm{n}}(x) = x^3 - 3x\\
&He_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3\\
&He_5(x) = x^5 - 10x^3 + 15x\\
&He_6(x) = x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15\\
&He_7(x) = x^7 - 21x^5 + 105x^3 - 105x\\
&He_8(x) = x^8 - 28x^6 + 210x^4 - 420x^2 + 105\\
&He_9(x) = x^9 - 36x^7 + 378x^5 - 1260x^3 + 945x_1,\\
&He_{10}(x) = x^{20} - 45x^8 + 630x^6 - 3150x^4 + 4725x^2 - 945
\end{aligned}
$$

Demostrar como obtienen los mónicos

2.2.1. Función Generatriz

Proposición 2.2.1: La función generatriz de los polinomios de Hermite

La función generatriz de los polinomios de Hermite está dada por

$$G(x,t) \quad = \quad e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{n!} \tag{2.52}$$

Demostración 2.2.1 *Recordemos que* $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$. *Así, expandiendo la serie* e^{2xt-t^2}, *tenemos:*

$$\begin{aligned} G(x,t) &= e^{2xt-t^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2xt)^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(-t^2\right)^m}{m!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2x)^n}{n!} \frac{(t)^{n+2m}}{m!} \end{aligned}$$

Tomando el cambio de índices $n \to n-2m$

$$\begin{aligned} G(x,t) &= e^{2xt-t^2} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2m}^{\infty} \frac{(-1)^m (2x)^{n-2m} t^n}{m!(n-2m)!} \frac{n!}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m n! (2x)^{n-2m}}{m!(n-2m)!} \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

$$G(x,z) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

Como se deseaba probar.

2.2.2. Fórmula de Rodrigues

Teorema 2.2.1: La fórmula de Rodrigues para los polinomios de Hermite

La fórmula de Rodrigues para los polinomios de Hermite es

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \tag{2.53}$$

Demostración 2.2.2 *Para demostrar el teorema (2.2.1), supondremos una solución de la ecuación de Hermite dada en (2.2) de la forma*

$$y = (-1)^n e^{x^2} D^n e^{-x^2}, (D = d/dx) \tag{2.54}$$

Si expresamos la ecuación de Hermite como

$$\left(e^{-x^2} y'\right)' + 2ne^{-x^2} y = 0 \tag{2.55}$$

Derivando la expresión (2.54)

$$y' = (-1)^n e^{x^2} \left(2xD^n e^{-x^2} + D^n \left(De^{-x^2}\right)\right)$$

Aplicando la derivada de un producto y tomando factor común obtenemos la siguiente expresión

$$\left(e^{-x^2} y'\right)' = (-1)^n \left[2D^n e^{-x^2} + 2xD^n \left(De^{-x^2}\right) + D^{n+1} \left(-2xe\right.\right.$$

Simplificando la expresión en el corchete

$$\left(e^{-x^2} y'\right)' = 2n(-1)^{n+1} D^n e^{-x^2} = -2ne^{-x^2} y$$

Reemplazando la expresión anterior en (2.55) demostramos que (2.54) satisface la ecuación de Hermite.
Como hemos demostrado que la solución de la ecuación Hermite son los polinomios de Hermite dado por $H_n(x)$, lo que significa que

$$H_n(x) = c(-1)^n e^{x^2} D^n e^{-x^2}$$

Donde c es una constante. Ahora vamos a proceder a determinar el valor de c.
Para $n = 0$

$$\begin{aligned} H_0(x) &= c(-1)^0 e^{x^2} D^0 e^{-x^2} \\ &= ce^{x^2} e^{-x^2} \\ H_0(x) &= c \end{aligned}$$

para $n = 1$

$$\begin{aligned} H_1(x) &= c(-1)^1 e^{x^2} D' e^{-x^2} \\ &= -ce^{x^2} \left(-2xe^{-x^2}\right) \\ H_1(x) &= 2cx \end{aligned}$$

Para $n = 2$

$$\begin{aligned} H_2(x) &= c(-1)^2 e^{x^2} D^2 e^{-x^2} \\ &= ce^{x^2} \left(4x^2 - 2\right) e^{-x^2} \\ H_2(x) &= c\left(4x^2 - 2\right) \end{aligned}$$

Para $n = 3$

$$\begin{aligned} H_3(x) &= c(-1)^3 e^{x^2} D^3 e^{-x^2} \\ &= -ce^{x^2} \left(-8x^3 + 12x\right) e^{-x^2} \\ H_3(x) &= c\left(8x^3 - 12x\right) \end{aligned}$$

Para $n = 4$

$$\begin{aligned} H_4(x) &= c(-1)^4 e^{x^2} b^4 e^{-x^2} \\ &= ce^{x^2} \left(16x^4 - 48x^2 + 12\right) e^{-x^2} \\ H_4(x) &= c\left(16x^4 - 48x^2 + 12\right) \end{aligned}$$

Siguiendo el mismo proceso obtenemos los demas polinomios. Ahora comparando con los polinomios obtenidos anteriormente con los de la tabla (2.2)

$H_0(x) = 1$	$c(1) = H_0(x)$
$H_1(x) = 2x$	$c(2x) = H_1(x)$
$H_2(x) = 4x^2 - 2$	$c\left(4x^2 - 2\right) = H_2(x)$
$H_3(x) = 8x^3 - 12x$	$c\left(8x^3 - 12x\right) = H_3(x)$
$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$	$c\left(16x^4 - 48x^2 + 12\right) = H_4(x)$

Comparando el coeficiente principal de los polinomios, vemos que el valor de la constante c es uno, de esta manera queda demostrado el teorema.

2.2.3. Relación de recurrencia de los polinomios de Hermite

Teorema 2.2.2: Los polinomios de Hermites

Los polinomios de Hermites satisfacen la relación de tres términos dadas por

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \quad H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x \tag{2.56}$$

Demostración 2.2.3 *Derivando respecto a la variable t la expresión (2.52)*

$$(2x - 2t)e^{2xt - t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(x)\frac{nt^{n-1}}{n!}$$

Aplicando propiedad distributiva y reescribiendo la sumatoria

$$2x\left(e^{2xt-t^2}\right) - 2t\left(e^{2xt-t^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} H_{n+1}(x)\frac{(n+1)t^n}{(n+1)!}$$

Por la expresión (2.52), tenemos

$$2x\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} - 2t\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} H_{n+1}(x)\frac{(n+1)t^n}{(n+1)!}$$

$$2x\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} - 2\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} H_{n+1}(x)\frac{(n+1)t^n}{(n+1)!}$$

Agrupando los términos semejantes

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[2x\frac{H_n(x)}{n!} - \frac{(n+1)H_{n+1}(x)}{(n+1)!}\right]t^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^{n+1}}{n!} = 0$$

Desarrollando el primer término

$$(2xH_0(x) - H_1(x)) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[2x\frac{H_n(x)}{n!} - \frac{(n+1)H_{n+1}(x)}{(n+1)!}\right]t^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} H_{n-1}(x)\frac{t^n}{(n-1)!} = 0$$

Sumando nueva vez términos Semejantes

$$(2xH_0(x) - H_1(x)) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[2x\frac{H_n(x)}{n!} - \frac{(n+1)H_{n+1}(x)}{(n+1)!} - \frac{2H_{n-1}(x)}{(n-1)!}\right]t^n = 0$$

Igualando a cero, tenemos

$$\begin{cases} 2xH_0(x) - H_1(x) = 0 \\ 2x\dfrac{H_n(x)}{n!} - \dfrac{(n+1)H_{n+1}(x)}{(n+1)!} - \dfrac{2H_{n-1}(x)}{(n-1)!} = 0 \end{cases}$$

Ahora despejando el polinomio de mayor grado

$$H_1(x) = 2xH_0(x)$$

$$H_{n+1}(x) = n!\left[2x\frac{H_n(x)}{n!} - \frac{2H_{n-1}(x)}{(n-1)!}\right] = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

con lo que queda demostrado el teorema.

Ejemplo 2.2.2. Utiliza la relación de recurrencia de los polinomios de Hermite

Utiliza la relación de recurrencia de los polinomios de Hermite para calcular los polinomios $H_2(x)$ y $H_3(x)$

Solución 2.2.2 *Para $n = 1$, tenemos*

$$H_2(x) = 2xH_1(x) - 2(1)H_0(x)$$

Reemplazando

$$H_2(x) = 2x(2x) - 2(1)$$
$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

Para $n = 2$

$$H_3(x) = 2xH_2(x) - 2(2)H_1(x)$$

Reemplazando

$$H_3(x) = 2x\left(4x^2 - 2\right) - 4(2x)$$
$$H_3(x) = 8x^3 - 4x - 8x$$

Simplificando

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

2.2.4. Representación integral de los polinomios de Hermite

Teorema 2.2.3: Los polinomios de Hermite

Los polinomios de Hermite

$$H_n(x) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \frac{(-1)^m n! 2^{n-2m}}{m!(n-2m)!} x^{n-2m}$$

satisfacen la expresión

$$H_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{2xt-t^2}}{t^{n+1}} dt \tag{2.57}$$

donde C es un contorno que rodea el origen en dirección contraria a las agujas del reloj.

Demostración 2.2.4 *Recordemos la fórmula generatriz de los polinomios de Hermite 2.52 la cual está dada por:*

$$G(x,t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{n!}$$

Así, calculando la derivada k-ésima con respecto a t tenemos:

$$\frac{d^k}{dt^k}\left[e^{2xt-t^2}\right] = \frac{d^k}{dt^k}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{n!}\right]$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[e^{2xt-t^2}\right] &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nH_n(x)t^{n-1}}{n!};\ \frac{d^2}{dt^2}\left[e^{2xt-t^2}\right] \\
&= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)H_n(x)t^{n-2}}{n!} \\
\frac{d^k}{dt^k}\left[e^{2xt-t^2}\right] &= \sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{H_n(x)t^{n-k}}{n!} \\
\frac{d^k}{dt^k}\left[e^{2xt-t^2}\right] &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_{n+k}(x)t^{n}}{(n)!} \\
\frac{d^k}{dt^k}\left[e^{2xt-t^2}\right]_{t=0} &= \left[H_k(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n+k}(x)t^{n}}{(n)!}\right]_{t=0} \\
\frac{d^n}{dt^n}\left[e^{2xt-t^2}\right]_{t=0} &= H_n(x) \\
\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz &= \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \\
f^{(n)}(z_0) &= \frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \\
\frac{d^n}{dt^n}\left[e^{2xt-t^2}\right]_{t=0} &= f^{(n)}(0)=H_n(x) \\
H_n(x) &= \frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{e^{2xt-t^2}}{t^{n+1}}dt
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.3. Utiliza la fórmula integral de los polinomios de Hermite

Utiliza la fórmula integral de los polinomios de Hermite para calcular $H_0(x), H_1(x), H_2(x)$, y $H_3(x)$

Solución 2.2.3

- *Para* $n=0$

$$H_0(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{e^{2xt-t^2}}{t}dt$$

Como $to=0$ *es un polo simple, tenemos del teorema (**??**) que*

$$H_0(x) = \frac{2\pi i}{2\pi i}\operatorname{Res}(f(t),0)$$

*Por la expresión (**??**)*

$$H_0(x)=\lim_{t\to 0} t\left[\frac{e^{2xt-t^2}}{t}\right]$$

Evaluando el límite y simplificando

$$H_0(x) = 1$$

- *Para* $n=1$

$$H_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{e^{2xt-t^2}}{t^2}dt$$

*podemos ver que $t_0 = 0$ es un polo de orden 2, asi del teorema (**??**) tenemos*

$$H_1(x) = \frac{2\pi i}{2\pi i} \operatorname{Res}(f(t), 0)$$

*Aplicando la expresión (**??**)*

$$H_1(x) = \lim_{t\to 0} \frac{d}{dt}\left[t^2 \frac{e^{2xt} - t^2}{t^2}\right] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{dt}\left[e^{2xt-t^2}\right]$$

Derivando

$$H_1(x) = \lim_{t\to 0} e^{2xt-t^2}(2x - 2t)$$

Evaluando el límite

$$H_1(x) = 2x$$

- *Para $n = 2$*

$$H_2(x) = \frac{2}{2\pi i} \oint_c \frac{e^{2xt-t^2}}{t^3} dt$$

*Podemos notar que $t_0 = 0$ es un polo de orden 3, utilizando la expresión (**??**) dada en el torema (**??**), obtenemos que*

$$H_2(x) = 2 \operatorname{Res}(f(t), 0)$$

*Utilizando la expresión del residuo (**??**) dada en el teorema (**??**), tenemos*

$$H_2(x) = 2\frac{1}{2} \lim_{t\to 0} \frac{d^2}{dt^2}\left[t^3 \frac{e^{2xt-t^2}}{t^3}\right]$$

Simplificando y calculando las derivadas

$$H_2(x) = \lim_{t\to 0} e^{2xt-t^2}\left(4t^2 - 8xt + 4x^2 - 2\right)$$

Evaluando el límite

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

- *Para $n = 3$*

$$H_3(x) = \frac{6}{2\pi i} \oint_c \frac{e^{2xt-t^2}}{t^4} dt$$

*Es evidente que $t_0 = 0$ es un polo de orden 4 , de tal manera que aplicando la expresión (**??**) llegamos a*

$$H_3(x) = 6 \operatorname{Res}(f(t), 0)$$

*Por la expresión (**??**) tenemos*

$$H_3(x) = 6\frac{1}{6} \lim_{t\to 0} \frac{d^3}{dt^3}\left[t^4 \frac{e^{2xt-t^2}}{t^4}\right]$$

Simplificando y derivando

$$H_3(x) = \lim_{t\to 0}\left[-4e^{2xt-t^2}\left(2t^3-6t^2x+t\left(6x^2-3\right)-2x^3+3x\right)\right]$$

Evaluando el límite

$$H_3(x) = -4\left(-2x^3+3x\right)$$

Simplificando

$$H_3(x) = 8x^3-12x$$

2.2.5. Ecuación asociada de los polinomios de Hermite

Trabajar esta parte

2.3 Ecuación de Laguerre

$$xy''+(\alpha+1-x)y'+by = 0 \tag{2.58}$$

Expresando 2.58 en su forma normal se obtiene

$$y''+\frac{(\alpha+1-x)}{x}y'+\frac{xb}{x^2}y = 0 \tag{2.59}$$

Comparando 2.59 con la expresión general de una ecuación ordinaria de segundo orden dada en su forma normal, se tiene que $P(x)=(\alpha+1-x) \quad y \quad q(x)=bx$, de donde $x_0=0$ es un punto singular regular de 2.58, por lo tanto existe una solución en serie de potencias de la forma

$$y(x)=(x-x_0)^r\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(x-x_0\right)^n \qquad c_0\neq 0$$

La ecuación indicial de 2.58 viene dada por

$$\begin{aligned} r(r-1)+(\alpha+1)r+0 &= 0\\ r(x-1+\alpha+1) = &= 0\\ r(r+\alpha) &= 0 \end{aligned}$$

con $r=0 \quad$ y $\quad r=-\alpha$ son las soluciones de la ecuación indicial. Tomando soluciones en series de potencias y calculando sus derivadas tenemos

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}\\ y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)x^{n+r-1}\\ y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-2} \end{aligned}$$

Sustituyendo en 2.58, tenemos

$$\begin{aligned}
x^r\left[\sum_{n=0}^{n}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n-1}+(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+r)x^n+b\sum_{n=0}^{1}c_nx^n\right] &= 0\\
\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+r)[n+r-1+\alpha+1]x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n[b-n-r]x^n &= 0\\
\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+r)(n+r+\alpha)x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n[b-n-r]x^n &= 0\\
x^{-1}c_0r(r+\alpha)+\sum_{n=0}^{\infty}c_{n+1}(n+1+r)(n+1+r+\alpha)x^n\sum_{n=0}^{\infty}c_n[b-n-r]x^n &= 0\\
c_0r(r+\alpha)x^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}[c_{n+1}(n+1+r)(n+1+r+\alpha)+c_n(b-n-r)]x^n &= 0
\end{aligned}$$

De lo anterior se llega a que la ecuación indicial es

$$r(r+\alpha) \quad = \quad 0$$

cuyas soluciones son $r_1=0$ y $r_2=-\alpha$. Ahora igualando el coeficiente de x^n a cero, obtenemos

$$c_{n+1}(n+1+r)(n+1+r+\alpha)+c_n(b-n-r)=0 \quad n\geq 0 \tag{2.60}$$

Como la expresión anterior contiene a r, y conocemos los valores al resolver la ecuación indicial, reemplazaremos estos valores para obtener una expresión en cada caso.

- Para $r=0$

$$c_{n+1}(n+1)(n+1+\alpha)+c_n(b-n) \qquad =0 \quad \forall n\geq 0 \tag{2.61}$$

- Para $r=-\alpha$

$$c_{n+1}(n+1-\alpha)(n+1)+c_n(b-n+\alpha) \quad = \quad 0 \quad n\geq 0 \tag{2.62}$$

Haciendo un cambio de variable en las expresiones anteriores y despejando a c_{n+1}

$$c_m=\frac{m-b-1}{m(m+\alpha)}c_{m-1} \quad \forall m\geq 1 \tag{2.63}$$

$$c_m=\frac{m-\alpha-b-1}{m(m-\alpha)}c_{m-1} \quad \forall m\geq 1 \tag{2.64}$$

Ahora desarrollaremos las expresiones (2.63) y (2.64) asignando valores a la variable m

- Desarrollando la expresión 2.63
  Para $m=1$

$$c_1 \quad = \quad \frac{1-b-1}{\alpha+1}c_0=\frac{(0-b)}{\alpha+1}c_0$$

Para $m = 2$

$$c_2 = \frac{1-b}{2(\alpha+2)}c_1 = \frac{(0-b)(1-b)}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}c_0$$

Para $m = 3$

$$c_3 = \frac{2-b}{3(\alpha+3)}c_2 = \frac{(0-b)(1-b)(2-b)}{3\cdot 2(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}c_0$$

Para $m = 4$

$$c_4 = \frac{3-b}{4(\alpha+4)}c_3 = \frac{(0-b)(1-b)(2-b)(3-b)}{4\cdot 3\cdot 2(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)}c_0$$

Siguiendo el mismo desarrollo, llegamos a que

$$c_m = \frac{(0-b)(1-b)(2-b)\cdots(m-1-b)}{m!(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+m)}c_0 \quad \forall m \geq 1 \qquad (2.65)$$

Expresando (2.65) como productoria

$$c_m = \prod_{i=1}^{m}\frac{i-1-b}{i(\alpha+i)}c_0 \quad m \geq 1$$

Utilizando la relación de la función gamma con la productoria dada en (A.4)

$$c_m = \frac{(-1)^m\Gamma(\alpha+1)\Gamma(b+1)}{m!\Gamma(m+\alpha+1)\Gamma(b+1-m)}c_0 \quad \forall m \geq 0 \qquad (2.66)$$

De manera que primera solución es

$$y_1(x) = c_0\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\Gamma(\alpha+1)\Gamma(b+1)}{m!\Gamma(m+\alpha+1)\Gamma(b+1-m)}x^m \qquad (2.67)$$

- Ahora desarrollando la expresión 2.64
  Para $m = 1$

$$c_1 = (-1)^1\frac{\alpha+b}{1!(1-\alpha)}c_0$$

Para $m = 2$

$$c_2 = (-1)^2\frac{(\alpha+b)(\alpha+b-1)}{2!(1-\alpha)(2-\alpha)}c_0$$

Para $m = 3$

$$c_3 = (-1)^3\frac{(\alpha+b)(\alpha+b-1)(\alpha+b-2)}{3!(1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)}c_0$$

Para $m = 4$

$$c_4 = (-1)^4\frac{(\alpha+b-0)(\alpha+b-1)(\alpha+b-2)(\alpha+b-3)}{4!(1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)(4-\alpha)}c_0$$

Siguiendo el desarrollo se llega a la expresión general

$$c_m = \frac{(-1)^m \prod_{i=0}^{m-1} (\alpha + b - i)}{m! \prod_{i=1}^{m} (i - \alpha)} c_0$$

$$c_m = \frac{(-1)^m \Gamma(\alpha + b + 1)\Gamma(1 - \alpha)}{m!\Gamma(\alpha + b + 1 - m)\Gamma(m + 1 - \alpha)} c_0 \tag{2.68}$$

Así la segunda solución está por la expresión

$$y_2(x) = c_0 |x|^{-\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(\alpha + b + 1)\Gamma(1 - \alpha)}{\Gamma(\alpha + b + 1 - m)\Gamma(m + 1 - \alpha)} x^m \tag{2.69}$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación de Laguerre dada en (2.58) es

$$y(x) = A \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(\alpha + 1)\Gamma(b + 1)}{m!\Gamma(m + \alpha + 1)\Gamma(b + 1 - m)} x^m + B|x|^{-\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(\alpha + b + 1)\Gamma(1 - \alpha)}{\Gamma(\alpha + b + 1 - m)\Gamma(m + 1 - \alpha)} x^m \tag{2.70}$$

determinar el intervalo de convergencia de las soluciones en series

Para obtener los polinomios de Laguerre tomamos $b = n$ en la expresión (2.67) y la mutiplicamos por $\dfrac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n!\Gamma(\alpha + 1)}$

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n!\Gamma(\alpha + 1)} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m \Gamma(\alpha + 1)\Gamma^{(b+1)} x^m}{m!\Gamma(m + \alpha + 1)\Gamma(n + 1 - m)}$$

Introduciendo el factor $\dfrac{1}{n!\Gamma(\alpha + 1)}$ en la sumatoria

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \Gamma(\alpha + n + 1) \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m x^m}{m!\Gamma(m + \alpha + 1)\Gamma(n + 1 - m)}$$

Por la propiedad (A.2) tenemos

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \Gamma(\alpha + n + 1) \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m x^m}{m!(n - m)!\Gamma(m + \alpha + 1)} \tag{2.71}$$

Tomando $\alpha = 0$, obtenemos los polinomios de Laguerre de orden n que se representa por $L_n(x)$ y su expresión es

$$L_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} (-x)^m \tag{2.72}$$

programar wx maxima los polinomios asociados de laguerre y graficar para diferentes valores de α incluyendo $\alpha = 0$

Ejemplo 2.3.1. Polinomio de Laguerre

Utiliza la expresión (2.72) para obtener los primeros 7 polinomios de Laguerre.

Solución 2.3.1 *sdd*

n	$L_n(x)$
0	1
1	$-x+1$
2	$\left(x^2-4x+2\right)/2$
3	$\left(-x^3+9x^2-18x+6\right)/6$
4	$\left(x^4-16x^3+72x^2-96x+24\right)/24$
5	$\left(-x^5+25x^4-200x^3+600x^2-600x+120\right)/120$
6	$\left(x^6-36x^5+450x^4-2400x^3+5400x^2-4320x+720\right)/720$

Aclarar que pueden haber mas de una funcion generadoora

2.3.1. Funciones Generadoras de los polinomios de Laguerre

Función Generatriz de los polinomios de Laguerre

Proposición 2.3.1: La función generatriz de los polinomios de Laguerre

La función generatriz de los polinomios de Laguerre está dada por la expresión:

$$G(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) z^n \tag{2.73}$$

Demostración 2.3.1 *Sea la función $G(x,z)=\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)z^n$ desarrollando esta función obtenemos:*

$$G(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!}\left(\begin{array}{c} n \\ \\ m \end{array}\right)(-x)^m z^n = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{m!}(-x)^m \left(\begin{array}{c} n \\ \\ m \end{array}\right) z^n$$

Tomando el cambio de índices $k=n-m$:

$$G(x,z) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(-x)^m \left(\begin{array}{c} m+k \\ \\ m \end{array}\right) z^{m+k} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(-x)^m z^m \sum_{k=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} m+k \\ \\ m \end{array}\right) z^k$$

Pero $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} m+k \\ \\ m \end{array}\right) z^k = \left(\frac{1}{1-z}\right)^{m+1}$*, cuando $|x|<1$. Lo que implica*

$$G(x,z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(-x)^m z^m \left(\frac{1}{1-z}\right)^{m+1}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{-xz}{1-z}\right)^m \left(\frac{1}{1-z}\right) \frac{1}{m!} \\
G(x,z) &= \left(\frac{1}{1-z}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{-xz}{1-z}\right)^m \frac{1}{m!}
\end{aligned}
$$

Recordemos que

$$
e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}
$$

lo que nos lleva a:

$$
\begin{aligned}
G(x,z) &= \left(\frac{1}{1-z}\right) e^{\frac{-xz}{1-z}} \\
G(x,z) &= \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) z^n
\end{aligned}
$$

Función Generadora para los polinomios de Laguerre

Teorema 2.3.1: Función generadora de los polinomios de Laguerre

La función generadora de los polinomios de Laguerre es

$$
G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) t^n \tag{2.74}
$$

donde

$$
G(x,t) = (1-t)^{-1-\alpha} \exp\left(-\frac{xt}{(1-t)}\right) \tag{2.75}
$$

Demostración 2.3.2 *dar el intervalo de convergia de la serie*
Para realizar esta demostración, demostraremos que la expresión de la sumatoria en (2.74) es la expresión dada en (2.75).
Reemplazando la expresión (2.71) en la sumatoria

$$
\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{n} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)(-x)^m}{m!(n-m)!\Gamma(m+\alpha+1)}\right] t^n
$$

La sumatoria se puede expresar como

$$
\sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{n=m}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)t^n}{m!(n-m)!\Gamma(m+\alpha+1)}\right] (-x)^m
$$

Tomando el índice $k = n - m$

$$
\sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+m+\alpha+1)t^{k+m}}{m!k!\Gamma(m+\alpha+1)}\right] (-x)^m
$$

Separando las dos sumatorias

$$
\sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{t^m(-x)^m}{m!\Gamma(m+\alpha+1)}\right] \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\Gamma(k+m+\alpha+1)}{k!} t^k\right]
$$

Expresando la expresión de gamma a factorial

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{t^m(-x)^m}{m!(m+\alpha)!}\right]\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(m+k+\alpha)!}{k!}t^k\right]$$

Multiplicando por $\dfrac{(m+\alpha)!}{(m+\alpha)!}$ *y por defunición de coeficiente binomial, llegamos a*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{(-xt)^m}{m!}\right]\sum_{k=0}^{\infty}\left[\begin{pmatrix} k+m+\alpha \\ k \end{pmatrix} t^k\right]$$

Sabemos que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left[\begin{pmatrix} k+m+\alpha \\ k \end{pmatrix} t^k\right] = \left(\frac{1}{1-t}\right)^{m+\alpha+1}$ *reemplazando tenemos*

$$\left(\frac{1}{1-t}\right)^{\alpha+1}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{1}{m!}\left(\frac{-xt}{1-t}\right)^m\right]$$

Aplicando la serie de la función exponencial

$$(1-t)^{-1-\alpha}e^{\dfrac{-xt}{1-t}}$$

Por lo tanto

$$G(x,t) \quad = \quad (1-t)^{-1-\alpha}e^{\dfrac{-xt}{1-t}}$$

Lo cual demuestra el teorema.

2.3.2. Fórmula de Rodrigues para los polinomios de Laguerre

Teorema 2.3.2: Fórmula de Rodrigues

La fórmula de Rodrigues para los polinomios de Laguerre está dada por

$$L_n^{(\alpha)}(x) \quad = \quad \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x}x^{n+\alpha}\right) \tag{2.76}$$

Demostración 2.3.3 *Para demostrar la fórmula de Rodrigues, en primer lugar aplicamos la regla de Leibniz para derivada e-nésima, es decir*

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x}x^{n+\alpha}\right) = \sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}(-1)^k e^{-x}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)}x^{\alpha+k}$$

Sustituyendo la expresión anterior en (2.76), tenemos que

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ \\ k \end{pmatrix} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} e^{-x} x^{\alpha+k}$$

Simplificando obtenemos la expresión (2.71)

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)(-x)^k}{k!(n-k)!\Gamma(\alpha+k+1)}$$

Con lo cual queda demostrado el teorema. Como caso particular para $\alpha = 0$, tenemos

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(n+1)(-x)^k}{k!(n-k)!\Gamma(k+1)}$$

Ejemplo 2.3.2. Utiliza la fórmula de Rodrigues

Utiliza la fórmula de Rodrigues dada en (2.76) para obtener $L_0^{(\alpha)}(x), L_1^{(\alpha)}(x)$ y $L_2^{(\alpha)}(x)$

Solución 2.3.2 *tomando el valor de $n = 0$, tenemos*

$$L_0^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{(0)!} \frac{d^{(0)}}{dx^{(0)}} \left(e^{-x} x^{\alpha}\right)$$

El caso $n = 0$ significa no derivar la función, así

$$L_0^{(\alpha)}(x) = e^x x^{-\alpha} \left(e^{-x} x^{\alpha}\right)$$

Simplificando

$$L_0^{(\alpha)}(x) = 1$$

Para el caso de $n = 1$, tenemos

$$L_1^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{1!} \frac{d}{dx} \left(e^{-x} x^{1+\alpha}\right)$$

Realizando la derivada de un producto, tenemos que

$$L_1^{(\alpha)}(x) = e^x x^{-\alpha} \left((\alpha+1) e^x x^{\alpha} - e^{-\alpha} x^{\alpha+1}\right)$$

Simplificando
$L_1^{(\alpha)}(x) = \alpha + 1 - x$
Para $n = 2$

$$L_2^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{2!} \frac{d^2}{dx^2} \left(e^{-x} x^{2+\alpha}\right)$$

Realizando la segunda derivada

$$L_2^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{2} \left[e^{-x} x^{\alpha} \left(\alpha^2 + \alpha(3-2x) + x^2 - 4x + 2\right)\right]$$

Simplificando

$$L_2^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{2} \left[x^2 - (4+2\alpha)x + \left(\alpha^2 + 3\alpha + 2\right)\right]$$

2.3.3. Relación de recurrencia de los polinomios de Laguerre

Teorema 2.3.3: Polinomios de Laguerre

Los polinomios de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$ satisfacen la siguiente relación a tres términos

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) \quad = \quad \frac{2n+\alpha+1-x}{n+1} L_n^{(\alpha)}(x) - \frac{n+\alpha}{n+1} L_{n-1}^{(\alpha)}(x) \quad (2.77)$$

donde

$$L_0^{(\alpha)}(x) = 1, \quad L_1^{(\alpha)}(x) = 1+\alpha-x$$

Demostración 2.3.4 *Derivando ambos lados la expresión (2.74) con respecto a t, tenemos*

$$-x(1-t)^{-1-\alpha}(1-t)^{-2} e^{-\frac{xt}{1-t}} + (\alpha+1)(1-t)^{-2-\alpha} e^{-\frac{xt}{1-t}} \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) L_{n+1}^{(\alpha)}(x) t^n$$

Mutiplicando por $(1-t)^2$

$$-x(1-t)^{-1-\alpha} e^{\frac{-xt}{1-t}} + (\alpha+1)(1-t)(1-t)^{-1-\alpha} e^{-\frac{xt}{1-t}} = (1-t)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) L_{n+1}(x) t^n$$

Por la función generadora de los polinomios de Laguerre dado (2.74), tenemos que

$$-x \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) t^n + (\alpha+1)(1-t) \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) t^n = (1-t)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) L_{n+1}^{(\alpha)}(x) t^n$$

Desarrollando la segunda y tercera serie

$$-x \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) t^n + (\alpha+1) \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) t^n - (\alpha+1) \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) L_{n+1}^{(\alpha)}(x) t^n$$

$$- 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) L_{n+1}^{(\alpha)}(x) t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) L_{n+1}^{(\alpha)}(x) t^{n+2}$$

Agrupando terminos semejantes

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[-x L_n^{(\alpha)}(x) + (\alpha+1) L_n^{(\alpha)}(x) - (n+1) L_{n+1}^{(\alpha)}(x) \right] t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(\alpha+1) L_n^{(\alpha)}(x) - 2(n+1) L_{n+1}^{(\alpha)} \right.$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) L_{n+}^{(\alpha)}$$

Desarrollando los dos primeros términos

$$\left((\alpha-x+1) L_0^{(\alpha)}(x) - L_1^{(\alpha)}(x) \right) + \left((\alpha-x+1) L_1^{(\alpha)}(x) - 2 L_2^{(\alpha)}(x) \right) t$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left[-x L_n^{(\alpha)}(x) + (\alpha+1) L_n^{(\alpha)}(x) - (n+1) L_{n+1}^{(\alpha)}(x) \right] t^n = \left((\alpha+1) L_0^{(\alpha)}(x) - 2 L_1^{(\alpha)}(x) \right) t$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\alpha+1) L_n^{(\alpha)}(x) - 2(n+1) L_{n+1}^{(\alpha)}(\alpha) \right] t^{n+1} + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) L_{n-1}^{(\alpha)}(x) t^n$$

Por agrupación de términos

$$\Big((\alpha-x+1)L_0^{(\alpha)}(x)-L_1^{(\alpha)}(x)\Big)+\Big((\alpha-x+3)L_1^{(\alpha)}(x)-2L_2^{(\alpha)}(x)-(\alpha+1)L_0^{(\alpha)}(\alpha)\Big)t$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\Big[-xL_n^{(\alpha)}(x)+(\alpha+1)L_n^{(\alpha)}(x)-(n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x)-(n-1)L_{n-1}^{(\alpha)}(x)\Big]t^n=\sum_{n=2}^{\infty}\Big[(\alpha+1)L_{n-1}^{(\alpha)}(x)-2nL_n^{\alpha}(x)\Big]t^n$$

Agrupando términos nueva vez

$$\Big[(\alpha-x+1)L_0^{(\alpha)}(x)-L_1^{(\alpha)}(x)\Big]+\Big[(\alpha-x+3)L_1^{(\alpha)}(x)-2L_2^{(\alpha)}(x)-(\alpha+1)L_0^{(\alpha)}(x)\Big]t$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\Big[(2n+\alpha+1+-x)L_n^{(\alpha)}(x)-(n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x)-(n+\alpha)\,L_{n-1}^{(\alpha)}(x)\Big]t^n=0$$

Iqualando a cero los coeficientes

$$\begin{cases}(\alpha-x+1)L_0^{(\alpha)}(x)-L_1^{(\alpha)}(x)=0\\[2mm] (\alpha-x+3)L_1^{(\alpha)}(x)-2L_2^{(\alpha)}(x)-(\alpha+1)L_0^{(\alpha)}(x)=0\\[2mm] (2n+\alpha+1+-x)L_n^{(\alpha)}(x)-(n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x)-(n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x)=0\end{cases}$$

Despejando el polinomio de mayor grado, tenemos

$$L_1^{(\alpha)}(x)=(\alpha-x+1)L_0^{(\alpha)}(x)$$
$$L_2^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{2}\Big[(\alpha+1)L_0^{(\alpha)}(x)-(\alpha-x+3)L_1^{(\alpha)}(x)\Big]$$
$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{n+1}\Big[(2n+\alpha-x+1)L_n^{(\alpha)}(x)-(n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x)\Big]\quad\forall n>1$$

Se puede comprobar que la expresión $L_{n+1}^{(\alpha)}(x)$*, contiene la expresión* $L_2^{(\alpha)}(x)$*, por lo tanto tenemos que*

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{n+1}\Big[(2n+\alpha-x+1)L_n^{(\alpha)}(x)-(n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x)\Big]\quad\forall n\geq 1$$

Lo cual queda demostrado el teorema.

Ejemplo 2.3.3. Obtenga el polinomio

Obtenga el polinomio $L_3^{(\alpha)}(x)$ de Laguerre utilizando la expresion (2.77) y los resultados obtenidos en el ejemplo (2.3.2)

Solución 2.3.3 *para* $n=2$*, tenemos*

$$L_3^{(\alpha)}(x)=\frac{5+\alpha-x}{3}L_2^{(\alpha)}(x)-\frac{2+\alpha}{\alpha+1}L_1^{(\alpha)}(x)$$

Reemplazando $L_2^{(\alpha)}(x)$ *y* $L_1^{(\alpha)}(x)$*, tenemos*

$$L_3^{(\alpha)}(x)=\frac{5+\alpha-x}{3}\Big[\frac{1}{2}\big(x^2-(4+2\alpha)x+\big(\alpha^2+3\alpha+2\big)\Big]$$
$$-\frac{2+\alpha}{\alpha+1}[\alpha+1-x]$$

Realizando el producto

$$\begin{aligned} L_3^{(\alpha)}(x) = & \frac{5+\alpha}{6}x^2 - 2(2+\alpha)\frac{(5+\alpha)}{6}x + \frac{(5+\alpha)}{6}\left(\alpha^2+3\alpha+2\right) \\ & -\frac{x^3}{6} - \frac{2(\alpha+2)}{6}x^2 + \frac{\left(\alpha^2+3\alpha+2\right)}{6}x \\ & -(2+\alpha) + \frac{(2+\alpha)}{\alpha+1}x \end{aligned}$$

Sumando los términos semejantes

$$\begin{aligned} L_3^{(\alpha)}(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{1}{6}(5+\alpha-2\alpha-4)x^2 + \frac{1}{6}\left(-(4+2\alpha)(5+\alpha)+\alpha^2+3\alpha+2+\frac{12+6\alpha}{\alpha+1}\right)x \\ + \frac{1}{6}\left[(5+\alpha)\left(\alpha^2+3\alpha+2\right)-(\alpha+2)\right] \end{aligned}$$

Simplificando

$$L_3^{(\alpha)}(x) \quad = \quad -\frac{x^3}{6} + \frac{1}{6}(1-\alpha)x^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{-6-23\alpha-12\alpha^2-\alpha^3}{\alpha+1}\right)x + \frac{1}{6}\left(\alpha^3+8\alpha^2+16\alpha+8\right)$$

2.3.4. Representación integral de los polinomios de Laguerre

Teorema 2.3.4: Los polinomios de Laguerre

Los polinomios de Laguerre

$$L_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!}\left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array}\right)(-x)^m,$$

satisfacen la expresión:

$$L_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{\frac{-xz}{1-z}}}{(1-z)z^{n+1}}dz \tag{2.78}$$

donde C es un contorno simple que rodea el origen en dirección contraria a las agujas del reloj sin incluir la singularidad en $z=1$. La expresión (2.78) se conoce como **forma integral de los polinomios de Laguerre en variable compleja**.

Demostración 2.3.5 *Recordemos que la fórmula generatriz de los polinomios de Laguerre 2.73 está dada por:*

$$\frac{e^{\frac{-xz}{1-z}}}{(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)z^n$$

Ahora, calculando la derivada enésima tenemos:

$$\frac{d^n}{dz^n}\left[\frac{e^{\frac{-xz}{1-z}}}{(1-z)}\right] = \frac{d^n}{dz^n}\left[\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) z^n\right]$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\left[\frac{e^{\frac{-xz}{1-z}}}{(1-z)}\right] &= \sum_{n=1}^{\infty} n L_n(x) z^{n-1} \\
\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{e^{\frac{-zz}{1-z}}}{(1-z)}\right] &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) L_n(x) z^{n-2} \\
\frac{d^k}{dz^k}\left[\frac{e^{\frac{-xz}{1-z}}}{(1-z)}\right] &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} L_n(x) z^{n-k} \\
\frac{d^k}{dz^k}\left[\frac{e^{\frac{-xz}{1-z}}}{(1-z)}\right] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{(n)!} L_{n+k}(x) z^{n} \\
\frac{d^k}{dz^k}\left[\frac{e^{\frac{-xz}{1-z}}}{(1-z)}\right]_{z=0} &= \left[L_k(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+k)!}{(n)!} L_{n+k}(x) z^{n}\right]_{z=0} \\
\frac{d^n}{dz^n}\left[\frac{e^{\frac{-xz}{1-z}}}{(1-z)}\right]_{z=0} &= L_n(x)
\end{aligned}$$

Así, por el teorema de la integral de Cauchy [ver teorema A.1] tenemos:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \Rightarrow f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

$$\Rightarrow \frac{d^n}{dz^n}\left[\frac{e^{\frac{-xz}{1-z}}}{(1-z)}\right]_{z=0} = f^{(n)}(0) = L_n(x) \Rightarrow L_n(x) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{\frac{-xz}{1-z}}}{(1-z)z^{n+1}} dz$$

Ejemplo 2.3.4. Polinomios de Laguerre

Utiliza la fórmula de la integral de los polinomios de Laguerre para calcular los polinomios $L_1(x)$ y, $L_2(x)$

Solución 2.3.4

- *Para* $n = 1$

$$L_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{e^{\frac{-xz}{1-z}}}{(1-z)z^2} dz$$

Como podemos ver en la expresión anterior $z_0 = 0$ es un polo de orden 2, aplicando la expresión (??) dada en el teorema (??) tenemos

$$L_1(x) = \operatorname{Res}(f(t), 0)$$

Por la expresión (??) tenemos

$$L_1(x) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left[z^2 \frac{e^{\frac{-xz}{1-z}}}{(1-z)z^2}\right]$$

Simplificando y derivando obtenemos

$$L_1(x) = \lim_{z\to 0} \frac{e^{\frac{xz}{z-1}}(x+z-1)}{(z-1)^3}$$

Evaluando el limite

$$L_1(x) = 1 - x$$

- *Para $n = 2$*

$$L_2(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{e^{\frac{-xz}{1-z}}}{(1-z)z^3}dz$$

Podemos notar en la expresión anterior que $z_0 = 0$ es un polo de orden 3, aplicando la expresión (??) dada en el teorema (??)

$$L_2(x) = \operatorname{Res}(f(z), 0)$$

Por la expresión (??) tenemos

$$L_2(x) = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2}\left[z^3 \frac{e^{\frac{-xz}{1-z}}}{(1-z)z^3}\right]$$

Simplificando y calculando la derivadao

$$L_2(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{xz}{1-z}}\left[-\frac{2xz}{(1-z)^2} - \frac{2x}{1-z} + \left(-\frac{xz}{(1-z)^2} - \frac{x}{1-z}\right)^2 - \frac{2xz}{(1-z)^3} - \frac{2x}{(1-z)^2} + \frac{2}{(1-z)^3}\right]$$

Evaluando el límite, tenemos

$$L_2(x) = \frac{1}{2}\left[-2x + x^2 - 2x^2 + 2\right]$$

Simplificando

$$L_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

A continuación se presenta una definición para obtener los polinomios mónicos de Laguerre utilizando los operadores de subida y bajada, para profundizar más en el tema [ver [1]].

Definición 2.3.1: Operador Identidad

Sea I el operador identidad. Definimos los operadores de subida y bajada de los polinomios mónicos de Laguerre como

$$\tilde{\mathcal{L}}_n^{\downarrow} := \frac{x}{\gamma_n}\frac{d}{dx} - \frac{n}{\gamma_n} I \tag{2.79}$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_n^{\uparrow} := -x\frac{d}{dx} + (x - n - \alpha) I \tag{2.80}$$

donde $\gamma_n = n(n + \alpha)$, ademas se tiene para todo valor de $n \geq 1$

$$\tilde{\mathcal{L}}_n^{\downarrow}[L_n^{\alpha}(x)] := L_{n-1}^{\alpha}(x) \tag{2.81}$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_n^{\uparrow}[L_{n-1}^{\alpha}(x)] := L_n^{\alpha}(x) \tag{2.82}$$

Ahora vamos a obtener algunos de los polinomios de Laguerre $L_n(x)$ utilizando los operadores de subida y bajada.

Ejemplo 2.3.5. Polinomio Mónico

Utiliza el operador escala de subida para obtener los polinomios mónicos $L_2(x), L_3(x)$ y $L_4(x)$ de Laquerre.

Solución 2.3.5 *Sabemos que* $L_0(x) = 1$ *y* $L_1(x) = x - 1$ *entonces tenemos*

$$L_2(x) = \tilde{\mathcal{L}}_n^{\uparrow}[L_1(x)]$$

Aplicando la expresión (2.82)

$$L_2(x) = -x\frac{d}{dx}(x-1) + (x-2)(x-1)$$
$$L_2(x) = -x(1) + x^2 - 3x + 2$$
$$L_2(x) = x^2 - 4x + 2$$

$$L_3(x) = \tilde{\mathcal{L}}_n^{\uparrow}[L_2(x)]$$

Aplicando el operador de subida

$$L_3(x) = -x\frac{d}{dx}\left(x^2 - 4x + 2\right) + (x-3)\left(x^2 - 4x + 2\right)$$
$$L_3(x) = -x(2x-4) + x^3 - 7x^2 + 14x - 6$$
$$L_3(x) = -2x^2 + 4x + x^3 - 7x^2 + 14x - 6$$
$$L_3(x) = x^3 - 9x^2 + 18x - 6$$

$$L_4(x) = \tilde{\mathcal{L}}_n^{\uparrow}[L_3(x)]$$

$$L_4(x) = -x\frac{d}{dx}\left[x^3 - 9x^2 + 18x - 6\right] + (x-4)\left(x^3 - 9x^2 + 18x - 6\right)$$
$$L_4(x) = -x\left(3x^2 - 18x + 18\right) + x^4 - 13x^3 + 54x^2 - 78x + 24$$
$$L_4(x) = -3x^3 + 18x^2 - 18x + x^4 - 13x^3 + 54x^2 - 78x + 24$$
$$L_4(x) = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24$$

orden de los polinomios de este capitulo: Chevyshhev y tipos. Laguerre y asociados. Jacobi y los ultraesfericos. laguerre y hermite. bernoulli. Airy. Hipergeometrica.
dar ejemplos de aplicaciones de poliomios de Laguerre con referencia actualizada, mecanica cuantica, etc... Antes de los polinomios de Jacobi deben estar legendre, chevyshev y tipos y todo los casos que se obtienen a partir de los Jacobi.(trabajar los polinomios de intervalo acotado seguido, luego los no acotados.) En el caso legendre trabajar los legendre asociados y la generalizacion de fejer (ver sego)
seguir el esquema de Laguerre en los demas polinomios

2.3.5. Ecuación asociada de los polinomios de Laguerre

Trabajar esta parte

2.4 Ecuación de Jacobi. Polinomios de Jacobi.

Ecuación de Jacobi:

$$(1-x^2)y''(x)+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]y'(x)+\gamma y(x) \quad = \quad 0 \tag{2.83}$$

con $\gamma = n(n+\alpha+\beta+1)$, de la forma normal se determina

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \frac{\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x}{1-x^2} \\ p_2(x) &= \frac{\gamma}{1-x^2} \end{aligned}$$

por lo tanto $x_0 = \pm 1$, entonces 2.83 tiene una solución de la forma dada en 2.19.
Obteniendo las derivadas de 2.19, tenemos

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-1)^{n+r}; \quad y'=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)(x-1)^{n+r-1}$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)(n+r-1)(x-1)^{n+r-2}$$

Reemplazando en cada término se tiene

$$\left(1-x^2\right)y''=-(x+1)(x-1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)(n+r-1)(x-1)^{n+r-2}$$

$$\left(1-x^2\right)y''=-(x+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)(n+r-1)(x-1)^{n+r-1}$$

$$[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]y'=-[2(\alpha+1)+(\alpha+\beta+2)(x-1)]\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)(x-1)^{n+r-1}$$

$$=-2(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)(x-1)^{n+r-1}-(\alpha+\beta+2)\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)(x-1)^{n+r}$$

Sustituyendo los resultados anteriores en 2.83, tenemos

$$-(x+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)(n+r-1)(x-1)^{n+r-1} - 2(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)(x-1)^{n+r-1}$$
$$-(\alpha+\beta+2)\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)(x-1)^{n+r} + \gamma\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-1)^{n+r} = 0$$

Desarrollando el primer término de la segunda y haciendo un corrimiendo

$$-(x+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)(n+r-1)(x-1)^{n+r-1} - 2(\alpha+1)rc_0(x-1)^{r-1} - 2(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+x+1)(x-1)^{n+r}$$
$$-(\alpha+\beta+2)\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)(x-1)^{n+r} + y\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-1)^{n+r} = 0$$

Llamando $B = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)(n+r-1)(x-1)^{n+r-1}$ y agrupando las series semejantes

$$-2(\alpha+1)rc_0(x-1)^{r-1} - (x+1)B + \sum_{n=0}^{\infty}\left[(\gamma-(\alpha+\beta+2)(n+r))c_n - 2(\alpha+1)(n+r+1)c_{n+1}\right](x-1)^{n+r} = 0$$

Acomodando

$$\begin{aligned} -(X+1)B &= -XB + B - B - B \\ -(X+1)B &= -(x-1)B - 2B \end{aligned}$$

Así

$$-(X+1)B = -\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)(n+r-1)(x-1)^{n+r} - 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)(n+r-1)(x-1)^{n+r-1}$$

Tomando el primer término de la segunda serie

$$-(X+1)B = -2c_0r(r-1)(x-1)^{r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)(n+r-1)(x-1)^{n+r} - 2\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+r+1)(n+r)(x-1)^{n+r}$$

Organizando todo los términos

$$2(x-1)^{r-1}rc_0\,(-r-\alpha) + \sum_{n=0}^{\infty}[(\gamma-(\alpha+\beta+2)(n+r)-(n+r)(n+r-1))c_n$$
$$-[2(\alpha+1)(n+r+1)+2(n+r)(n+r+1)]c_{n+1}](x-1)^{n+r} = 0$$

Simplificando

$$2(x-1)^{r-1}rc_0\,(-r-\alpha) + \sum_{n=0}^{\infty}[(\gamma-(n+r)(\alpha+\beta+n+r+1))c_n$$
$$-2(n+r+1)(n+r+\alpha+1)c_{n+1}](x-1)^{n+r} = 0$$

Iqualando los coeficients a cero.

$$\begin{cases} 2(x-1)^{r-1}rc_0(-r-\alpha)=0 \Rightarrow r=0 \wedge r=-\alpha \\ [\gamma-(n+r)(\alpha+\beta+n+r+1)]c_n-2(n+r+1)(n+r+\alpha+1)c_{n+1}=0 \quad \forall n\geq 0 \end{cases}$$

Despejando a c_{n+1}

$$c_{n+1} = \frac{\gamma-(n+r)(\alpha+\beta+n+r+1)}{2(n+r+1)(n+r+\alpha+1)}c_n \quad n\geq 0$$

Tomando el caso de $r=0$, tenemos

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \frac{\gamma-n(\alpha+\beta+n+1)}{2(n+1)(n+\alpha+1)}c_n \\ c_{n+1} &= \frac{\gamma_v-\gamma_n}{2(n+1)(n+\alpha+1)}c_n \quad \forall n\geq 0 \end{aligned}$$

Desarrollando los términos

$$\begin{aligned} n=0 \longrightarrow c_1 &= \frac{\gamma_v-\gamma_0}{2(1)(\alpha+1)}c_0 \\ n=1 \longrightarrow c_2 &= \frac{\gamma_v-\gamma_1}{2(2)(\alpha+2)}\frac{\gamma_v-\gamma_0}{2(1)(\alpha+1)}c_0 \\ &\vdots \\ c_2 &= \frac{(\gamma_v-\gamma_0)(\gamma_v-\gamma_1)}{2^2 2!(\alpha+1)(\alpha+2)}c_0 \\ c_n &= \frac{(\gamma_v-\gamma_0)(\gamma_v-\gamma_1)\cdots(\gamma_v-\gamma_{n-1})}{2^n n!(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)(\alpha+n)}c_0 \end{aligned}$$

Simplificando las expresiones del numerador y denominador

$$\begin{aligned} \gamma_v-\gamma_{n-1} &= v(\alpha+\beta+v+1)-(n-1)(\alpha+\beta+n) \\ &= v(\alpha+\beta)+v(v+1)-(n-1)(\alpha+\beta)-n(n-1) \\ &= (\alpha+\beta)(v-n+1)+v^2+v-n^2+n \\ &= (\alpha+\beta)(v-n+1)+(v-n)(v+n)+(v+n) \\ &= (\alpha+\beta)(v-n+1)+(v+n)(v-n+1) \\ \gamma_v-\gamma_{n-1} &= (v-n+1)(\alpha+\beta+v+n) \end{aligned}$$

$$(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)(\alpha+n) = (\alpha+1)_n = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)}$$

ver video en youtube

2.4.1. Función Generadora de los polinomios de Jacobi

Teorema 2.4.1: La función generadora de los polinomios de Jacobi

La función generadora de los polinomios de jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ está dada por:

$$F(x,r) = 2^{\alpha+\beta}R^{-1}(1-r+R)^{-\alpha}(1+r+R)^{-\beta}; R = (1-2xr+r^2)^{1/2} \tag{2.84}$$

Demostración 2.4.1 *Sea $\phi(y) = \frac{y^2-1}{2}$ en la expresión 2.151, entonces*

$$r = (y-x)\frac{2}{y^2-1} = \frac{2y-2x}{y^2-1}$$

$$ry^2 - r = 2y - 2x$$

$$ry^2 - 2y = r - 2x$$

completando cuadrado

$$(y - \frac{1}{r})^2 = \frac{1-2xr+r^2}{r^2}$$

$$y - \frac{1}{r} = -\frac{\left(1-2xr+r^2\right)^{1/2}}{r}$$

$$y = \frac{1}{r} - \frac{\left(1-2xr+r^2\right)^{1/2}}{r}$$

$$y = \frac{1}{r} - \frac{R}{r}$$

Derivando la expresión **??** *con respecto a la variable x, obtenemos*

$$f'(y)\frac{dy}{dx} = f'(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left\{f'(x)\frac{(x^2-1)^n}{2^n}\right\}$$

tomando $f'(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ y sabemos que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{R}$ la expresión anterior se convierte en

$$\frac{(1-y)^{\alpha}(1+y)^{\beta}}{R} = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left\{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\frac{(x^2-1)^n}{2^n}\right\}$$

$$\frac{(1-y)^{\alpha}(1+y)^{\beta}}{R} = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n r^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left\{(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right\}$$

Aplicando la fórmula de rodrigues para los polinomios de jacobi, tenemos

$$\frac{(1-y)^{\alpha}(1+y)^{\beta}}{R} = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

$$(\frac{1-y}{1-x})^{\alpha}(\frac{1+y}{1+x})^{\beta} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

Expresando $\dfrac{1-y}{1-x}, \dfrac{1+y}{1+x}$ en término de r y s, tenemos

$$1 - y = 1 - (\frac{1}{r} - \frac{R}{r})$$

$$1 - y = \frac{r-1+R}{r}$$

Sabemos que $R^2 = 1 - 2xr + r^2$*, despejando la variable* x*, tenemos*

$$x = \frac{1 + r^2 - R^2}{2r}$$

De donde

$$1 - x = \frac{(r - 1 + R)(r - 1 - R)}{2r}$$

y

$$\frac{1+y}{1+x} = \frac{r - R + 1}{r} \cdot \frac{2r}{(r - R + 1)(r + R + 1)} = \frac{2}{r + R + 1}$$

Entonces tenemos

$$2^{\alpha+\beta} R^{-1}(1 - r + R)^{-\alpha}(1 + r + R)^{-\beta} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

Finalmente

$$2^{\alpha+\beta} R^{-1}(1 - r + R)^{-\alpha}(1 + r + R)^{-\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

Lo que demuestra el teorema

2.4.2. Operadores Diferenciales de Jacobi

Definición 2.4.1: Operadores Diferenciales de Jacobi

Sea $\mathfrak{I}$ el operador identidad. Definimos los dos operadores diferenciables de Jacobi como

$$\widehat{\mathfrak{L}}_n^{\downarrow} := -\frac{\widehat{a}_n(x)}{\widehat{b}_n}\mathfrak{I} + \frac{1-x^2}{\widehat{b}_n}\frac{d}{dx} \quad \text{(operador diferencial de bajada de Jacobi),} \tag{2.85}$$

$$\widehat{\mathfrak{L}}_n^{\uparrow} := -\frac{\widehat{c}_n(x)}{\widehat{d}_n}\mathfrak{I} + \frac{1-x^2}{\widehat{d}_n}\frac{d}{dx} \quad \text{(operador diferencial de subida de Jacobi)} \tag{2.86}$$

donde

$$\widehat{a}_n(x) = -\frac{n((2n+\alpha+\beta)x+\beta-\alpha)}{2n+\alpha+\beta} \tag{2.87}$$

$$\widehat{b}_n = \frac{4n(n+\alpha)(n+\beta)(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)^2(2n+\alpha+\beta-1)} \tag{2.88}$$

$$\widehat{c}_n(x) = \frac{(n+\alpha+\beta)((2n+\alpha+\beta)x+\alpha-\beta)}{2n+\alpha+\beta} \tag{2.89}$$

y

$$\widehat{d}_n = -(2n+\alpha+\beta-1) \tag{2.90}$$

Si $n \geq 1$ se tiene que para toda secuencia $\left\{P_n^{\alpha,\beta}\right\}_{n\geqslant 0}$ se cumple

$$\widehat{\mathfrak{L}}_n^{\downarrow}\left[P_n^{\alpha,\beta}(x)\right] = -\frac{\widehat{a}_n(x)}{\widehat{b}_n}P_n^{\alpha,\beta}(x) + \frac{1-x^2}{\widehat{b}_n}\left(P_n^{\alpha,\beta}(x)\right)' = P_{n-1}^{\alpha,\beta}(x) \tag{2.91}$$

$$\widehat{\mathfrak{L}}_n^{\uparrow}\left[P_{n-1}^{\alpha,\beta}(x)\right] = -\frac{\widehat{c}_n(x)}{\widehat{d}_n}P_{n-1}^{\alpha,\beta}(x) + \frac{1-x^2}{\widehat{d}_n}\left(P_{n-1}^{\alpha,\beta}(x)\right)' = P_n^{\alpha,\beta}(x) \tag{2.92}$$

Ejemplo 2.4.1. Obtener los polinomios de Legendre

Utiliza el operador diferencial de subida de Jacobi para obtener los polinomios de Legendre $P_1(x), P_2(x)$ y $P_3(x)$.

Solución 2.4.1 *Como los polinomios de Legendre se obtienen como caso particular de los de Jacobi para el caso $\alpha=\beta=0$, tenemos que:*

$$\begin{aligned} P_1(x) = P_1^{(0,0)}(x) &= \widehat{\mathfrak{L}}_n^{\uparrow}\left[P_0^{(0,0)}(x)\right] \\ &= \left(-\frac{\hat{c}_1(x)}{\hat{d}_1}\mathfrak{I} + \frac{1-x^2}{\hat{d}_1}\frac{d}{dx}\right)\left(P_0^{(0,0)}(x)\right) \\ &= -\frac{\hat{c}_1(x)}{\hat{d}_1}\mathfrak{I}\left(P_0^{(0,0)}(x)\right) + \frac{1-x^2}{\hat{d}_1}\frac{d}{dx}\left(P_0^{(0,0)}(x)\right) \end{aligned}$$

Reemplazando $P_0^{(0,0)}(x)$

$$P_1(x) = P_1^{(0,0)}(x) = -\frac{\hat{c}_1(x)}{d_1}(1) + \frac{1-x^2}{d_n}\frac{d}{dx}(1)$$

Aplicando el operador derivada

$$= \frac{\hat{c}_1(x)}{\hat{d}_1}$$

obteniendo el valor de $\hat{c}_1(x)$ *y* $\hat{d}_1$*, utilizando las expresiones (2.89), (2.90) respectivamente*

$$P_1(x) = P_1^{(0,0)}(x) = -\frac{x}{-1}$$

$$P_1(x) = P_1^{(0,0)}(x) = x$$

Para $n = 2$

$$\begin{aligned} P_2(x) = P_2^{(0,0)}(x) &= \widehat{\mathfrak{L}}_n^{\uparrow}\left[P_1^{(0,0)}(x)\right] \\ &= \left(-\frac{\hat{c}_n(x)}{\hat{d}_n}\mathfrak{I} + \frac{1-x^2}{\hat{d}_n}\frac{d}{dx}\right)\left(P_1^{(0,0)}(x)\right) \\ &= -\frac{\hat{c}_n(x)}{\hat{d}_n}\mathfrak{I}\left(P_1^{(0,0)}(x)\right) + \frac{1-x^2}{\hat{d}_n}\frac{d}{dx}\left(P_1^{(0,0)}(x)\right) \end{aligned}$$

Reemplazando $P_1^{(0,0)}(x)$ *y aplicando la definición de los operadores*

$$P_2(x) = P_2^{(0,0)}(x) = -\frac{\hat{c}_n(x)}{d_n}(x) + \frac{1-x^2}{\hat{d}_n}(1)$$

Utilizando las expresiones (2.89)y (2.90) para obtener $\hat{c}_2(x)$ *y* $\hat{d}_2$*, tenemos*

$$P_2(x) = P_2^{(0,0)}(x) = -\frac{2x}{-3}(x) + \frac{1-x^2}{-3}$$

Simplificando

$$P_2(x) = P_2^{(0,0)}(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

Para $n = 3$

$$\begin{aligned} P_3(x) = P_3^{(0,0)}(x) &= \widehat{\mathfrak{L}}_n^{\uparrow}\left[P_2^{(0,0)}(x)\right] \\ &= \left(-\frac{\hat{c}_3(x)}{\hat{d}_3}\mathfrak{I} + \frac{1-x^2}{\hat{d}_3}\frac{d}{dx}\right)\left(P_2^{(0,0)}(x)\right) \\ &= -\frac{\hat{c}_2(x)}{\hat{d}_3}\mathfrak{I}\left(P_2^{(0,0)}(x)\right) + \frac{1-x^2}{\hat{d}_3}\frac{d}{dx}\left(P_2^{(0,0)}(x)\right) \end{aligned}$$

Reemplazando $P_2^{(0,0)}(x)$ *y aplicando los operadores*

$$P_3(x) = P_3^{(0,0)}(x) = -\frac{\hat{c}_3(x)}{\hat{d}_3}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1-x^2}{\hat{d}_3}(2x)$$

Por las expresiones (2.89)y (2.90) tenemos

$$P_2(x) = P_2^{(0,0)}(x) = -\frac{3x}{-5}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1-x^2}{-5}(2x)$$

Simplificando

$$P_2(x) = P_2^{(0,0)}(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$$

2.4.3. Polinomios de Hermite como caso particular de los polinomios de Jacobi

En este apartado se obtendran los polinomios mónicos $H_0(x), H_1(x), ..$ de Hermite como particular de los polinomios de Jacobi.

Ejemplo 2.4.2. Polinomios mónico de Hermite

Utiliza la definición dada en (3.1.3) para calcular los 3 primeros polinomios mónico de Hermite

Solución 2.4.2 *Sabemos de [2] los polinomios mónicos de Hermite se obtienen a partir de:*

$$H_n(x) = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{n!}{\alpha^{\frac{n}{2}}} \mathrm{P_n}^{(\alpha,\alpha)}\left(\alpha^{-\frac{1}{2}}x\right) \tag{2.93}$$

Así:

$$H_0(x) = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{0!}{\alpha^{\frac{0}{2}}} P_0^{(\alpha,\alpha)}\left(\alpha^{-\frac{1}{2}}x\right)$$

Simplificando y por la expresión 3.29 obtenemos

$$H_0(x) = 1$$

De igual manera

$$H_1(x) = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1!}{\alpha^{\frac{1}{2}}} P_1^{(\alpha_1\alpha)}\left(\alpha^{-\frac{1}{2}}x\right)$$

De la expresión 3.30 tenemos

$$H_1(x) = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}} \times \frac{1}{2}\left[(2\alpha+2)\frac{x}{\alpha^{1/2}}\right]$$

Simplificando y tomando límite se obtiene

$$H_1(x) = x$$

De manera similar

$$H_2(x) = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{2!}{\alpha^{\frac{2}{2}}} P_2^{(\alpha,\alpha)}\left(\alpha^{-\frac{1}{2}}x\right)$$

De la expresión 3.31, tenemos

$$H_2(x) = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{2}{\alpha}\left[\frac{1}{8}\left\{-4-2\alpha+(2\alpha+4)(2\alpha+3)\frac{x^2}{\alpha}\right\}\right]$$

Desarrollando y simplificando

$$H_2(x) = \lim_{\alpha\to\infty}\left\{-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}+\frac{4\alpha^2+14x+12}{4\alpha^2}x^2\right\}$$

Tomando límite

$$H_2(x) = x^2 - \frac{1}{2}$$

2.4.4. Polinomios de Laguerre como caso particular de los polinomios de Jacobi

De [**?**, 4.2.18] presenta una expresión para obtener los polinomios de laguerre no mónico a partir de los de Jacobi, en este apartado obtendremos los mismos pero mónico.
La expresión para obtener los polinomios mónicos de Laguerre está dada por:

$$L_n^{(\alpha)}(x) \quad = \quad \lim_{\beta\to\infty} (-n)_n P_n^{(\alpha,\beta)} \left(1 - 2\beta^{-1}x\right) \tag{2.94}$$

Así, para el caso de $n = 0$, tenemos

$$L_0^{(\alpha)}(x) = \lim_{\beta\to\infty} (0)_0 P_0^{(\alpha,\beta)} \left(1 - 2\beta^{-1}x\right)$$

De 3.29

$$L_0^{(\alpha)}(x) = 1$$

De igual manera se obtiene el polinomio lineal de Laguerre

$$\begin{aligned} L_1^{(\alpha)}(x) &= \lim_{\beta\to\infty} (-1)_1 P_1^{(\alpha,\beta)} \left(1 - 2\beta^{-1}x\right) \\ &= \lim_{\beta\to\infty} -\frac{1}{2}\left[\alpha - \beta + (\alpha+\beta+2)\left(1 - 2\beta^{-1}x\right)\right] \end{aligned}$$

Simplicando

$$L_1^{(\alpha)}(x) = \lim_{\beta\to\infty} -\frac{1}{2}\left[2\alpha + 2 + \left(-2\alpha\beta^{-1} - 2 - 4\beta^{-1}\right)x\right]$$

Tomando límite y simplificando la expresión

$$L_1^{(\alpha)}(x) = x - \alpha - 1$$

Si queremos el polinomio cuadrático , tenemos que

$$L_2^{(\alpha)}(x) = \lim_{\beta\to\infty} (-2)_2\, P_2^{(\alpha,\beta)} \left(1 - 2\beta^{-1}x\right)$$

$$\begin{aligned} L_2^{(\alpha)}(x) = \lim_{\beta\to\infty} &\frac{(-2)_2}{8}\left\{-4 - (\alpha+\beta) + (\alpha-\beta)^2 + 2(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+3)\left(1 - 2\beta^{-1}x\right)\right\} \\ &+ \frac{(-2)_2}{8}(\alpha+\beta+4)(\alpha+\beta+3)\left(1 - 2\beta^{-1}x\right)^2 \end{aligned}$$

$$L_2^{(\alpha)}(x) = \lim_{\beta\to\infty} \frac{(-2)_2}{8}\left\{4(\alpha+1)(\alpha+2) - 8\beta^{-1}(\alpha+\beta+3)(\alpha+2)x + 4\beta^{-2}(\alpha+\beta+4)(\alpha+\beta+3)x^2\right\}$$

Tomando límites y simplicando

$$L_2^{(\alpha)}(x) = x^2 - 2(\alpha+2)x + (\alpha+1)(\alpha+2)$$

Aplicacion en cuantica en thesis de geronimo y en la thesis de rodolgo la transformacion de jacobi en la ecuacion de calor

2.4.5. Ecuación asociada de los polinomios de Jacobi

Trabajar esta parte

2.5 Ecuación de Chebyshev. Polinomios de Chebyshev

$$\left(1-x^2\right)y''-xy'+a^2y = 0 \tag{2.95}$$

Expresando la ecuación 2.95 en su forma normal

$$y''+\frac{-x}{(1-x^2)}y'+\frac{a^2}{1-x^2}y = 0$$

verifamos que $x_0=0$ es un punto ordinario, por el teorema tal.... existe una solución en serie de potencias.
Derivando la solución en serie y reemplazandola en 2.95 tenemos la expresión

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)c_m x^{m-2}+\sum_{m=2}^{\infty} -m(m-1)c_m x^m+\sum_{m=1}^{\infty} -mc_m x^m+\sum_{m=0}^{\infty} a^2 c_m x^m = 0$$

Desarrollando los dos primeros términos de las sumatorias con subíndices $m=0$ y $m=1$ y sumando las series semejantes se obtiene

$$a^2c_0+\left(a^2-1\right)c_1x+\sum_{m=2}^{\infty} c_m\left[a^2-m-m^2+m\right]x^m+\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)c_m x^{m-2} = 0$$

Obteniendo los dos primeros términos de la última serie de la expresión anterior y haciendo un cambio llegamos a

$$(a^2c_0+2c_2)+[\left(a^2-1\right)c_1+(2)(3)c_3]x+\sum_{m=2}^{\infty}\left[(a^2-m^2)c_m+(m+1)(m+2)c_{m+2}\right]x^m = 0$$

Aplicando igualdad de polinomios obtenemos

$$\begin{cases} a^2c_0+(1)(2)c_2=0 \\ \left(a^2-1\right)c_1+(2)(3)c_3=0 \\ \left(a^2-m^2\right)c_m+(m+1)(m+2)c_{m+2}=0 \quad \forall m\geq 2 \end{cases}$$

Desarrollando c_{m+2}

$$c_{m+2} = \frac{\left(m^2-a^2\right)}{(m+1)(m+2)}c_m$$

Ahora desarrollaremos los términos pares

$$\text{si } m=0\rightarrow \quad c_2 = \frac{0^2-a^2}{(1)(2)}c_0$$

$$\begin{aligned}
\text{si } m = 2 \rightarrow \quad c_4 &= \frac{\left(2^2-a^2\right)}{(3)(4)}\frac{\left(-a^2\right)}{(1)(2)}c_0 \\
c_4 &= \frac{-a^2\left(2^2-a^2\right)}{4!}c_0 \\
\text{si } m = 4 \rightarrow \quad c_6 &= \frac{-a^2\left(2^2-a^2\right)\left(4^2-a^2\right)}{4!(5)(6)}c_0 \\
c_6 &= \frac{-a^2\left(2^2-a^2\right)\left(4^2-a^2\right)}{6!}c_0
\end{aligned}$$

Desarrollando los demás términos llegamos a expresión

$$c_{2m} = \frac{-a^2\left(2^2-a^2\right)\left(4^2-a^2\right)\cdots\left[(2m-2)^2-a^2\right]}{(2m)!}c_0 \quad m \geq 1 \tag{2.96}$$

Desarrollando los términos impares

$$\begin{aligned}
\text{si } m = 1 \rightarrow \quad c_3 &= \frac{1^2-a^2}{(2)(3)}c_1 \\
\text{si } m = 3 \rightarrow \quad c_5 &= \frac{\left(3^2-a^2\right)}{(4)(5)}\frac{1^2-a^2}{(2)(3)}c_1 \\
c_5 &= \frac{\left(1^2-a^2\right)\left(3^2-a^2\right)}{5!}c_1 \\
\text{si } m = 5 \rightarrow \quad c_7 &= \frac{\left(5^2-a^2\right)}{(6)(7)}\frac{\left(1^2-a^2\right)\left(3^2-a^2\right)}{5!}c_1 \\
c_7 &= \frac{\left(1^2-a^2\right)\left(3^2-a^2\right)\left(5^2-a^2\right)}{7!}c_1
\end{aligned}$$

Siguiendo ese mismo desarrollo se obtiene

$$c_{2m+1} = \frac{\left(1^2-a^2\right)\left(3^2-a^2\right)\cdots\left[(2m-1)^2-a^2\right]}{(2m+1)!}c_1 \quad m \geq 1 \tag{2.97}$$

Reemplazando 2.97 y 2.96 en la expresión de series citar, se obtiene la solución para la ecuación de Chevished dada por

$$y = c_0\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m)!}\prod_{i=1}^{m}\left[(2i-2)^2-a^2\right]x^{2m}\right] + c_1\left[x+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)!}\prod_{i=1}^{m}\left[(2i-1)^2-a^2\right]\right]x^{2m+1} \tag{2.98}$$

2.5.1. Función Generadoradora de los polinomios de Chevyshev

Teorema 2.5.1: Función generadora de los polinomios de Chevyshev

La función generadora de los polinomios de Chevyshev está dada por

$$\frac{1-t^2}{1-2tx+t^2} = T_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(x)t^n \tag{2.99}$$

Demostración 2.5.1 *Por la serie geométrica, tenemos que*

$$\left(1-t^2\right)(1-t(2x-t))^{-1} = \left(1-t^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}t^n(2x-t)^n$$

clearly the constant term is 1 , and the coefficient of t^n is

$$(2x)^n + \sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^m \left\{ \begin{pmatrix} n-m \\ m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-m-1 \\ m-1 \end{pmatrix} \right\} (2x)^{n-2m}$$

$$= \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n(-1)^m (n-m-1)!}{m!(n-2m)!} (2x)^{n-2m} = 2T_n(x)$$

2.5.2. Fórmula de Rodrigues para los polinomios de Chevyshev

Teorema 2.5.2: La fórmula de Rodrigues para los polinomios de Chevyshev

La fórmula de Rodrigues para los polinomios de Chevyshev es

$$T_n(x) = \frac{(-2)^n n!}{(2n)!} \left(1-x^2\right)^{1/2} \frac{d^n}{dx^n} \left(1-x^2\right)^{n-1/2} \tag{2.100}$$

Demostración 2.5.2 *Sea* $z = \left(1-x^2\right)^{n-1/2}$ *para obtener*

$$\left(1-x^2\right) z' + (2n-1)zx = 0$$

Derivando esta relación $(n+1)$ *veces, obtenemos*

$$\left(1-x^2\right) D^{n+2} z - 3x D^{n+1} z + \left(n^2-1\right) D^n z = 0$$

Ahora si tomamos $w = \left(1-x^2\right)^{1/2} D^n z$, *llegamos a*

$$\left(1-x^2\right) w'' - xw' + n^2 w = 0$$
$$\left(1-x^2\right)^{1/2} \left[\left(1-x^2\right) D^{n+2} z - 3x D^{n+1} z + \left(n^2-1\right) D^n z\right] = 0$$

De esta expresión podemos notar que $w(x)$ *y* $T_n(x)$ *son las soluciones polinomiales de la ecuación de chevyshev, y por lo tanto* $T_n(x) = kw(x)$, *donde* k *es una constante a determinar.*

Por la fórmula de Leibniz podemos expresar

$$\left(1-x^2\right)^{1/2} D^n \left(1-x^2\right)^{n-1/2} = \left(1-x^2\right)^{1/2} \sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} D^{n-j} (1+x)^{n-1/2} D^j (1-x)^{n-1/2} \tag{2.101}$$

Calculando las derivadas de la sumatoria

$$D^{(n-1)} (1+x)^{n-1/2} = \frac{(n-1/2)!}{(J-\frac{1}{2})!} (x+1)^{j-1/2}$$

$$D^J (1-x)^{n-1/2} = (-1)^J \frac{(n-1/2)!}{(n-1/2-1)!} (1-x)^{n-1/2-J}$$

Reemplazando las derivadas en (2.101) y simplificando

$$\left(1-x^2\right)^{1/2} D^n \left(1-x^2\right)^{n-1/2} = n!(-1)^n \sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} n-1/2 \\ \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-1/2 \\ \\ n-1 \end{pmatrix} (x-1)^{n-1}(x+1)^j$$

Por la identidad de vandermonde tenemos

$$\left(1-x^2\right)^{1/2} D^n \left(1-x^2\right)^{n-1/2} = (-1)^n n! \begin{pmatrix} 2n-1 \\ \\ n \end{pmatrix}$$

Comparando el coeficiente de x^n en ambos lados de $T_n(x) = cw(x)$, determinamos que

$$c = \frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n)!}$$

2.5.3. Relación de recurrencia de los polinomios de Chevyshev

Teorema 2.5.3: Los polinomios de Chevyshev

Los polinomios de Chevyshev $(T_n(x))$ satisfacen la relación de recurrencia dada por

$$T_{n+1}(x) \quad = \quad 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1 \tag{2.102}$$

Demostración 2.5.3 *De la identidad trigonométrica de producto a suma, tenemos*

$$\cos\left((n+1)\cos^{-1}(x)\right) + \cos\left((n-1)\cos^{-1}(x)\right) = 2\cos\left(n\cos^{-1}(x)\right)\cos\left(\cos^{-1}(x)\right)$$

De la expresión (2.106) llegamos a

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$$

Despejando $T_{n+1}(x)$ se demuestra la expresión

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Ejemplo 2.5.1. Polinomios de Chevyshev

Utiliza la relación de recurrencia de los polinomios de chevyshev para obtener $T_2(x), T_3(x)$ y $T_4(x)$.

Solución 2.5.1 *Para $n = 1$, tenemos*

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x)$$

Reemplazando $T_1(x)$ y $T_0(x)$

$$T_2(x) = 2x(x) - (1)$$

Simplificando

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

Para el caso de $n = 2$

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x)$$

Reemplazando $T_2(x)$ *y* $T_1(x)$

$$T_3(x) = 2x\left(2x^2 - 1\right) - x$$

Simplificando

$$\begin{aligned} T_3(x) &= 4x^3 - 2x - x \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \end{aligned}$$

Para $n = 3$, *tenemos*

$$T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x)$$

Sustituyendo $T_3(x)$ *y* $T_2(x)$

$$t_4(x) = 2x\left(4x^3 - 3x\right) - \left(2x^2 - 1\right)$$

Aplicando propiedad distributiva

$$T_4(x) = 8x^4 - 6x^2 - 2x^2 + 1$$

simplificando

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

2.5.4. Polinomios de Chebyshev

Si en la expresión 2.95 se toma $a = n$

$$\left(1 - x^2\right)y'' - xy' + n^2y = 0 \qquad (2.103)$$

Ahora tomaremos

$$x = \cos(t) \quad x \leq 1 \qquad (2.104)$$

derivando tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \\ \frac{d}{dt}\left[\frac{dy}{dt}\right] &= \frac{d}{dt}\left[\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}\right] \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dt^2} \end{aligned}$$

Obteniendo las derivadas indicadas

$$\frac{dx}{dt} = -\operatorname{sen}(t) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\cos(t)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\csc(t)\frac{dy}{dt}$$

reemplazando tenemos

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \text{sen}^2(t)\frac{d^2y}{dx^2} + (-\csc(t))(-\cos(t))\frac{dy}{dt}$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \text{sen}^2(t)\frac{d^2y}{dx^2} + \cot(t)\frac{dy}{dt}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \csc^2(t)\frac{d^2y}{dt^2} - \csc^2(t)\cot(t)\frac{dy}{dt}$$

Sustituyendo las derivadas en 2.103

$$\left(1-\cos^2(t)\right)\left[\csc^2(t)\frac{d^2y}{dt^2} - \csc^2(t)\cot(t)\frac{dy}{dt}\right] + \cos(t)\csc(t)\frac{dy}{dt} + n^2y \quad = \quad 0$$

Por identidades trigonométricas llegamos a la expresión

$$\frac{d^2y}{dt^2} + n^2y \quad = \quad 0 \tag{2.105}$$

lo cual es una ecuación de segundo orden con coeficientes constantes. Sabemos que las soluciones 2.105 es de la forma

$$y(t) \quad = \quad e^{rt}$$

Obteniendo la segunda derivada y reemplazando en 2.105 se llega a la expresión

$$\begin{aligned} e^{r^t}r^2 + n^2e^{rt} &= 0 \\ e^{rt}\left[r^2+n^2\right] &= 0 \end{aligned}$$

como $e^{rt} \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} r^2+n^2 &= 0 \\ r &= \pm ni \end{aligned}$$

Así la solución de 2.105 es

$$y(t) = c_0e^{-nti} + c_1e^{nti}$$

Expresando la solución en términos de seno y coseno

$$y(t) \quad = \quad A\cos(nt) + B\sin(nt) \quad \text{donde} \quad A = c_1 + c_0 \quad \text{y} \quad B = i(c_1 - c_0)$$

Reemplazando 2.104 en la expresión anterior

$$y(t) \quad = \quad A\cos(n\cos^{-1}(x)) + B\sin(n\cos^{-1}(x)) \quad x \leq 1$$

Escogiendo

$$T_n(x) \quad = \quad \cos(n\cos^{-1}(x)) \quad n \geq 0 \tag{2.106}$$

obtenemos los polinomios de Chebyshev.

$$\begin{aligned} \text{si } n = 0 \rightarrow \quad T_0(x) &= \cos(0) \\ T_0(x) &= 1 \\ \text{si } n = 1 \rightarrow \quad T_1(x) &= \cos(\cos^{-1}(x)) \\ T_1(x) &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{si } n=2 \rightarrow \quad T_2(x) &= \cos(2\cos^{-1}(x)) \\
T_2(x) &= 2\cos^2(\cos^{-1}(x)) - 1 \\
T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\
\text{si } n=3 \rightarrow \quad T_3(x) &= \cos(3\cos^{-1}(x)) \\
T_3(x) &= 4\cos^3(\cos^{-1}(x)) - 3\cos(\cos^{-1}(x)) \\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&T_0(x) = 1 \\
&T_1(x) = x \\
&T_2(x) = 2x^2 - 1 \\
&T_3(x) = 4x^3 - 3x \\
&T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \\
&T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x \\
&\mathrm{T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1} \\
&T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x \\
&T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1 \\
&T_9(x) = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x \\
&T_{10}(x) = 512x^{10} - 1280x^8 + 1120x^6 - 400x^4 + 50x^2 - 1 \\
&T_{11}(x) = 1024x^{11} - 2816x^9 + 2816x^7 - 1232x^5 + 220x^3 - 11x
\end{aligned}$$

agregar graficos en wxmaxima

2.5.5. Propiedades de los polinomios de Chevyshev

2.5.6. Chevyshev Primer tipo

Tomando $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ en la ecuación de Jacobi 2.83 se obtiene la ecuación de Chevyshed de primer tipo

$$\left(1 - x^2\right) y''(x) - xy'(x) + \gamma y(x) = 0 \tag{2.107}$$

Donde $x_0 = 0$ es un punto ordinario, de manera que por el toerema 2.1.1 existe una solución de la forma dada en 2.6. Derivando 2.6 y reemplazando en 2.107 se tiene

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)c_m x^{m-2} - \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)c_m x^m - \sum_{m=1}^{\infty} mc_m x^m + \gamma^2 \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = 0$$

$$\sum_{m=-2}^{\infty} (m+2)(m+1)c_{m+2} x^m - \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)c_m x^m - \sum_{m=1}^{\infty} mc_m x^m + \gamma^2 \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = 0$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)c_{m+2} x^m - \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1)c_m x^m - \sum_{m=0}^{\infty} mc_m x^m + \gamma^2 \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = 0$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[c_{m+2}(m+2)(m+1) - c_m \left(m(m-1) + m - \gamma^2\right)\right] x^m = 0$$

Igualando los coeficientes a cero

$$c_{m+2} = \frac{m^2 - \gamma^2}{(m+2)(m+1)} c_m \quad \forall m \geqslant 0 \tag{2.108}$$

Para el caso en que m es par tenemos que se cumple que:

$$\begin{aligned}
m = 0 \to c_2 &= \frac{\left(0^2 - \gamma^2\right)}{2!} c_0 \\
m = 2 \to c_4 &= \frac{\left(2^2 - \gamma^2\right)\left(0^2 - \gamma^2\right)}{4!} c_0 \\
&\vdots \\
c_{2m} &= \frac{\prod_{i=0}^{m-1} \left((2i)^2 - \gamma^2\right)}{(2m)!} c_0
\end{aligned}$$

Para los casos en que m es impar tenemos que se cumple que:

$$\begin{aligned}
m = 1 \to c_3 &= \frac{\left(1^2 - \gamma^2\right)}{3!} c_1 \\
m = 3 \to c_5 &= \frac{\left(3^2 - \gamma^2\right)\left(1^2 - \gamma^2\right)}{5!} c_1 \\
&\vdots \\
c_{2m+1} &= \frac{\prod_{i=0}^{m-1} \left((2i+1)^2 - \gamma^2\right)}{(2m+1)!} c_1
\end{aligned}$$

De manera que la solución general de 2.107 es la expresión

$$y(x) = c_0 \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{m-1} \left((2i)^2 - \gamma^2\right)}{(2m)!} x^{2m} \right] + c_1 \left[x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{m-1} \left((2i+1)^2 - \gamma^2\right)}{(2m+1)!} x^{2m+1} \right] \tag{2.109}$$

Los polinomios de Chevyshev T_m de primer tipo se obtienen multiplicando P_m por las constantes c_0 y c_1, donde [?] presenta que tales constantes son $c_0 = (-1)^{m/2}$ y $c_1 = m(-1)^{m/2}$. A continuación presentamos los primeros diez polinomios de Chevyshev de primer tipo

$$
\begin{aligned}
&T_0(x) = 1\\
&T_1(x) = x\\
&T_2(x) = 2x^2 - 1\\
&T_3(x) = 4x^3 - 3x\\
&T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1\\
&T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x\\
&T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1\\
&T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x\\
&T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1\\
&T_9(x) = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x\\
&T_{10}(x) = 512x^{10} - 1280x^8 + 1120x^6 - 400x^4 + 50x^2 - 1
\end{aligned}
$$

Obtención de los polinomios de Chevishev de segundo tipo como proceso de Gramm-Schmidt

Los polinomios de Chebyshev del primer tipo $T_n(x)$ se pueden obtener usando el Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt para polinomios en el dominio $(-1,1)$ con el factor de peso $1/\sqrt{1-x^2}$ [13], pág. 61 . A continuación se presenta el proceso correspondiente:
Tomando $R_0(x) = 1, R_1(x) = x + a_{1,0}, R_2(x) = x^2 + a_{2,1}x + a_{2,0}, R_3(x) = x^3 + a_{3,2}x^2 + a_{3,1}x + a_{3,0}$ hasta $R_n(x)$ donde las constantes o coeficientes $a_{n,m}$ son determinadas por la condición de ortogonalidad. Antes de obtener los polinomios $R_n(x)$ demostraremos que estos polinomios son ortogonales.
La ecuación diferencial 2.107 para $y = R_m(x)$ se puede escribir en forma de un problema de Sturm Liouville [13] página 63:

$$\left(1-x^2\right) R_m''(x) - xR_m'(x) + \lambda R_m(x) = 0$$

Escribimos la ED en la forma estandar:

$$R_m''(x) - \frac{x}{(1-x^2)} R_m'(x) + \frac{\lambda}{(1-x^2)} R_m(x) = 0$$

Tomando a

$$\mu = e^{\displaystyle\int P(x)dx} = e^{-\displaystyle\int \frac{x}{(1-x^2)}dx} = e^{\ln\left|1-x^2\right|^{1/2}} \rightarrow \mu = \left(1-x^2\right)^{1/2}$$

Multiplicando nuestra última expresión por μ :

$$\left(1-x^2\right)^{1/2} R_m''(x) - \left(1-x^2\right)^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)} R_m'(x) + \left(1-x^2\right)^{1/2} \frac{\lambda}{(1-x^2)} R_m(x) = 0$$

$$\left(1-x^2\right)^{1/2} R_m''(x) - \frac{x}{(1-x^2)^{1/2}} R_m'(x) + \frac{\lambda}{(1-x^2)^{1/2}} R_m(x) = 0$$

Es de conocimiento que:

$$\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)^{1/2}\right) = -\frac{x}{(1-x^2)^{1/2}}$$

Por lo que:

$$\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)^{1/2}\frac{d}{dx}\left(R_m(x)\right)\right)=-\frac{\lambda}{\left(1-x^2\right)^{1/2}}R_m(x)$$

Para $\lambda = m^2$

$$\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)^{1/2}\frac{d}{dx}\left(R_m(x)\right)\right)=-\frac{m^2}{\left(1-x^2\right)^{1/2}}R_m(x) \tag{2.110}$$

Multiplicando e integrando por $R_n(x)$ con $n \neq m$:

$$\int_{-1}^{1} R_n(x)\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)^{1/2}\frac{d}{dx}\left(R_m(x)\right)\right)dx=-m^2\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}R_m(x)R_n(x) \tag{2.111}$$

Al integrar por parte la expresión

$$\int_{-1}^{1} R_n(x)\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)^{1/2}\frac{d}{dx}\left(R_m(x)\right)\right)dx \tag{2.112}$$

seleccionando a $u = R_n(x)$ y a $v = \int \frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)^{1/2}\frac{d}{dx}\left(R_m(x)\right)\right)dx$, se tiene que la misma es igual a:

$$\left(1-x^2\right)^{1/2}R_n(x)R'_m(x)\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^{1/2}R'_n(x)R'_m(x)dx$$

Puesto que al evaluar $\left(1-x^2\right)^{1/2}$ en -1 y 1 el resultado es cero, la integral 2.112 queda reducida a:

$$\int_{-1}^{1} R_n(x)\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)^{1/2}\frac{d}{dx}\left(R_m(x)\right)\right)dx=-\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^{1/2}R'_n(x)R'_m(x)dx$$

Por lo que:

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}R'_n(x)R'_m(x)dx=m^2\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}R_m(x)R_n(x)$$

Si seguimos el mismo procedimiento que el anterior pero con m y n intercambiados, se obtendrá una ecuación identica, con la diferencia que el coeficiente m^2 será sustituido por un n^2. Si restamos una de estas ecuaciones de la otra:

$$\left[m^2-n^2\right]\int_{-1}^{1}\frac{R_n(x)R_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=0$$

Para $n \neq m$

$$\int_{-1}^{1}\frac{R_n(x)R_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=0 \tag{2.113}$$

Los polinomios $R_n(x)$ satisfacen así las mismas relaciones de ortogonalidad que los polinomios de Chebyshev del primer tipo y por lo tanto deben ser múltiplos de ellos.
Ya demostrado que los polinomios $R_n(x)$ son ortogonales respecto a la función de peso,vamos a presentar la obtención de los primeros cuatro polinomios:

- $R_0(x) = 1$
- Para la obtención de $R_1(x)$

$$\int_{-1}^{1} w(x)R_1(x)R_0(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(1)\left(x + a_{1,0}\right)dx = 0$$
$$\to \int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + a_{1,0}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0 \to a_{1,0} = 0 \to R_1($$

- Para la obtención de $R_2(x)$

$$\int_{-1}^{1} w(x)R_2(x)R_1(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(x)\left(x^2 + a_{2,1}x + a_{2,0}\right)dx = 0$$
$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx + a_{2,1}\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx + a_{2,0}\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0 \to a_{2,1} = 0$$
$$\int_{-1}^{1} w(x)R_2(x)R_0(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(x^2 + a_{2,1}x + a_{2,0}\right)dx = 0$$
$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx + a_{2,1}\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + a_{2,0}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \to a_{2,0} = -\frac{1}{2} \to R_2(x) =$$

- Para la obtención de $R_3(x)$

$$\int_{-1}^{1} w(x)R_3(x)R_0(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(x^3 + a_{3,2}x^2 + a_{3,1}x + a_{3,0}\right)dx =$$
$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} + a_{3,2}\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + a_{3,1}\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + a_{3,0}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \to a_{3,0} =$$

$$\int_{-1}^{1} w(x)R_3(x)R_1(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(x^3 + a_{3,2}x^2 + a_{3,1}x + a_{3,0}\right)(x)dx = 0$$
$$\int_{-1}^{1} \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}dx + a_{3,2}\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx + a_{3,1}\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx + a_{3,0}\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \to a_{3}$$
$$\int_{-1}^{1} w(x)R_3(x)R_2(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(x^3 + a_{3,2}x^2 + a_{3,1}x + a_{3,0}\right)\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)dx = 0$$
$$\int_{-1}^{1} \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx + a_{3,2}\int_{-1}^{1} \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}dx - \frac{1}{2}a_{3,2}\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx +$$
$$a_{3,1}\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx - \frac{1}{2}a_{3,1}\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + a_{3,0}\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx - \frac{1}{2}a_{3,0}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}d$$
$$\to a_{3,2} = 0 \to R_3(x) = x^3 - \frac{3}{4}x$$

Siguiendo el mismo proceso obtenemos los demás polinomios $R_n(x)$

$$
\begin{aligned}
&R_0(x) = 1\\
&R_1(x) = x\\
&R_2(x) = x^2 - \frac{1}{2}\\
&R_3(x) = x^3 - \frac{3}{4}x\\
&R_4(x) = x^4 - x^2 + \frac{1}{8}\\
&R_5(x) = x^5 - \frac{20}{16}x^3 + \frac{5}{16}x\\
&R_6(x) = x^6 - \frac{48}{32}x^4 + \frac{18}{32}x^2 - \frac{1}{32}\\
&R_7(x) = x^7 - \frac{112}{64}x^5 + \frac{56}{64}x^3 - \frac{7}{64}x\\
&R_8(x) = x^8 - \frac{256}{128}x^6 + \frac{160}{128}x^4 - \frac{32}{128}x^2 + \frac{1}{128}\\
&R_9(x) = x^9 - \frac{576}{256}x^7 + \frac{432}{256}x^5 - \frac{120}{256}x^3 + \frac{9}{250}x\\
&R_{10}(x) = x^{10} - \frac{1280}{512}x^8 + \frac{1120}{512}x^6 - \frac{400}{512}x^4 + \frac{50x^2}{512} - \frac{1}{512}
\end{aligned}
$$

Obtención de los polinomios de Chevishev de primer tipo a partir de la relación de recurrencia a tres términos

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \tag{2.114}$$

ahora obtendremos los polinomios desde $T_2(x)$ a $T_7(x)$

$$
\begin{aligned}
&T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x(x) - 1 = 2x^2 - 1\\
&T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x\left(2x^2 - 1\right) - x = 4x^3 - 3x\\
&T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 2x\left(4x^3 - 3x\right) - \left(2x^2 - 1\right) = 8x^4 - 8x^2 + 1\\
&T_5(x) = 2xT_4(x) - T_3(x) = 2x\left(8x^4 - 8x^2 + 1\right) - \left(4x^3 - 3x\right) = 16x^5 - 20x^3 + 5x\\
&T_6(x) = 2xT_5(x) - T_4(x) = 2x\left(16x^5 - 20x^3 + 5x\right) - \left(8x^4 - 8x^2 + 1\right) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1\\
&T_7(x) = 2xT_6(x) - T_5(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x
\end{aligned}
$$

Obtención de los polinomios de Chevishev de primer tipo a partir de la fórmula generadora

Iniciamos a asignar valores a n :

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n T_n(x) = \frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2} = w(x,t)$$

Para este proceso nos vamos a auxiliarnos de la definición de polinomio de Maclaurin, gracias a la cual podemos plantear lo siguiente:

$$T_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial t^n} w(x,t) \equiv \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(\frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2}\right)_{t=0}$$

$$n=0 \to T_0(x) = \frac{1}{0!}\frac{\partial^0}{\partial t^0}\left(\frac{1-xt}{1-2xt+t^2}\right)_{t=0} = \frac{1}{0!}\left[\frac{1-xt}{1-2xt+t^2}\right]_{t=0} = 1$$
$$n=1 \to T_1(x) = \frac{1}{1!}\frac{\partial^1}{\partial t^1}\left(\frac{1-xt}{1-2xt+t^2}\right)_{t=0} = \frac{1}{1!}\left[\frac{xt^2+x-2t}{\left(1-2xt+t^2\right)^2}\right]_{t=0} = x$$
$$n=2 \to T_2(x) = \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{1-xt}{1-2xt+t^2}\right)_{t=0} = \frac{1}{2!}\left[\frac{2\left(2x^2-xt-3xt+3t^2-1\right)}{\left(1-2xt-t^2\right)^3}\right]_{t=0} = 2x^2-1$$
$$n=3 \to T_3(x) = \frac{1}{3!}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\left(\frac{1-xt}{1-2xt+t^2}\right)_{t=0} = \frac{1}{3!}\left(6\left(4x^3-3x\right)\right) = 4x^3-3x$$
$$n=4 \to T_4(x) = \frac{1}{4!}\frac{\partial^4}{\partial t^4}\left(\frac{1-xt}{1-2xt+t^2}\right)_{t=0} = \frac{1}{4!}\left[24\left(8x^4-8x^2-1\right)\right] = 8x^4-8x^2-1$$
$$n=5 \to T_5(x) = \frac{1}{5!}\frac{\partial^5}{\partial t^5}\left(\frac{1-xt}{1-2xt+t^2}\right)_{t=0} = 16x^5-20x^3+5x$$

2.5.7. Chevyshev Segundo tipo

La ecuación diferencial que satisface los polinomios de Chevyshev de segundo tipo, se obtiene a partir de 2.83 con los parámetros $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$

$$\left(1-x^2\right)y''-3xy'+\gamma y=0 \tag{2.115}$$

Derivando y reemplazando en 2.115 tenemos

$$\sum_{m=2}^{\infty} c_m m(m-1)x^{m-2} - \sum_{m=2}^{\infty} c_m m(m-1)x^m - 3\sum_{m=1}^{\infty} c_m m x^m + \gamma\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = 0$$
$$\sum_{m=0}^{\infty} c_{m+2}(m+2)(m+1)x^m - \sum_{m=2}^{\infty} c_m m(m-1)x^m - 3\sum_{m=1}^{\infty} c_m m x^m + \gamma\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = 0$$
$$2(1)c_2 + (3)(2)c_3x + \sum_{m=2}^{\infty} c_{m+2}(m+2)(m+1)x^m - \sum_{m=2}^{\infty} c_m m(m-1)x^m - 3c_1x$$
$$-3\sum_{m=2}^{\infty} c_m m x^m + \gamma c_0 + \gamma c_1 x + \gamma\sum_{m=2}^{\infty} c_m x^m = 0$$

De dónde se obtienen las siguientes expresiones:

$$2c_2+\gamma c_0=0$$
$$\left(6c_3-3c_1+\gamma c_1\right)x=0$$
$$\sum_{m=2}^{\infty}\left[c_{m+2}(m+2)(m+1)-c_m((m)(m-1)+3m-\gamma)\right]x^m=0$$

Igualando cada una de las mismas a cero, se tiene la expresión de recurrencia:

$$c_{m+2} = \frac{m(m-1)+3m-\gamma}{(m+2)(m+1)}c_m \equiv \frac{m(m+2)-\gamma}{(m+2)(m+1)}c_m$$

Para el caso en que m es par tenemos que se cumple que:

$$c_{2m} = \frac{\prod_{i=0}^{m-1}\left[(2i)(2i+2)-\gamma\right]}{(2m)!}c_0$$

Para los casos en que m es impar tenemos que se cumple que:

$$
\begin{aligned}
m = 1 \rightarrow c_3 &= \frac{(3) - \gamma}{(3)(2)} c_1 \\
m = 3 \rightarrow c_5 &= \frac{(3)(5) - \gamma}{(5)(4)} \frac{(3) - \gamma}{(3)(2)} c_1 \\
m = 5 \rightarrow c_7 &= \frac{(5)(7) - \gamma}{(7)(6)} \frac{(3)(5) - \gamma}{(5)(4)} \frac{(3) - \gamma}{(3)(2)} c_1 \\
c_{2m+1} &= \frac{\prod_{i=0}^{m-1} [(2i+1)((2i+1)+2) - \gamma]}{(2m+1)!} c_1
\end{aligned}
$$

La solución general de 2.115 es

$$
y = c_0 \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{m-1} [(2i)(2i+2) - \gamma]}{(2m)!} x^{2m} \right] + c_1 \left[x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{m-1} [(2i+1)((2i+1)+2) - \gamma]}{(2m+1)!} x^{2m+1} \right] \tag{2.116}
$$

Los polinomios de Chevyshev U_m de segundo tipo con $\gamma = m(m+2)$ se obtienen multiplicando P_m por las constantes c_0 y c_1, donde [**?**] presenta que tales constantes son $c_0 = (-1)^{m/2}$ y $c_1 = 2^{m+1}(-1)^m$. A continuación presentamos los diez primeros polinomios de Chevyshev de segundo orden

$$
\begin{aligned}
U_0(x) &= 1 \\
U_1(x) &= 2x \\
U_2(x) &= 4x^2 - 1 \\
U_3(x) &= 8x^3 - 4x \\
U_4(x) &= 16x^4 - 12x^2 + 1 \\
U_5(x) &= 32x^5 - 32x^3 + 6x \\
U_6(x) &= 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1 \\
U_7(x) &= 128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x \\
U_8(x) &= 256x^8 - 448x^6 + 240x^4 - 40x^2 + 1 \\
U_9(x) &= 512x^9 - 1024x^7 + 672x^5 - 160x^3 + 10x \\
U_{10}(x) &= 1024x^{10} - 2304x^8 + 1792x^6 - 560x^4 + 60x^2 + 1
\end{aligned}
$$

Teorema 2.5.4: Polinomios de Chevyshev de segundo tipo

La función generadora de los polinomios de Chevyshev de segundo tipo es

$$
\frac{1}{1 - 2tx + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) t^n \tag{2.117}
$$

Demostración 2.5.4 *jjg*

Teorema 2.5.5: Los polinomios de chevyshev de segundo

Los polinomios de chevyshev de segundo tipo satisfacen la relación de recurrencia dada por

$$U_{n+1}(x) \quad = \quad 2xU_n(x) - U_{n-1}(x), \quad U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x \tag{2.118}$$

Demostración 2.5.5 *Por la identidad trigonométrica sabemos*

$$\sin((n+2)\theta) + \sin(n\theta) \quad = \quad 2\sin((n+1)\theta)\cos(\theta) \tag{2.119}$$

Tomando $\theta = \cos^{-1}(x)$ *en la expresión (2.119)*

$$\sin\left((n+2)\cos^{-1}(x)\right) + \sin\left(n\cos^{-1}(x)\right) \quad = \quad 2\sin\left((n+1)\cos^{-1}(x)\right)\cos\left(\cos^{-1}(x)\right)$$

Por la definición de los polinomios de Chevysev, tenemos que

$$\sin\left(\cos^{-1}(x)\right)u_{n+1}(x) + \sin\left(\cos^{-1}(x)\right)u_{n-1}(x) \quad = \quad 2x\sin\left(\cos^{-1}(x)\right)u_n(x)$$

Tomando factor común

$$\sin\left(\cos^{-1}(x)\right)[u_{n+1}(x) + u_{n-1}(x)] \quad = \quad \sin\left(\cos^{-1}(x)\right)[2xu_n(x)]$$

Por igualdad de expresiones

$$u_{n+1}(x) + u_{n-1}(x) \quad = \quad 2xu_n(x)$$

Despejando $u_{n+1}(x)$ *obtenemos el resultado esperado*

$$u_{n+1}(x) \quad = \quad 2xu_n(x) - u_{n-1}(x) \quad \forall n \geq 1$$

Teorema 2.5.6: Los polinomios de chevyshev de segundo tipo

Los polinomios de chevyshev de segundo tipo se obtienen partir de la siguiente fórmula de Rodrigues

$$U_n(x) \quad = \quad \frac{(-2)^n(n+1)!}{(2n+1)!}\left(1-x^2\right)^{-1/2}\frac{d^n}{dx^n}\left(1-x^2\right)^{n+1/2} \tag{2.120}$$

Demostración 2.5.6 *sjjs*

Obtención de los polinomios de Chevishev de segundo tipo como proceso de Gramm-Schmidt

Los polinomios de Chebyshev de segundo tipo $U_n(x)$ se pueden obtener usando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt para polinomios en el dominio $(-1,1)$ con la función de peso $\sqrt{1-x^2}$ [13] pág. 73. A continuación se presenta el proceso correspondiente:
Tomando $R_0(x) = 1, R_1(x) = x + a_{1,0}, R_2(x) = x^2 + a_{2,1}x + a_{2,0}, R_3(x) = x^3 + a_{3,2}x^2 + a_{3,1}x + a_{3,0}$ hasta $R_n(x)$ donde las constantes $a_{n,m}$ son determinadas por la condición de ortogonalidad. Para este proceso, solo vamos a presentar la obtención de los primeros cuatro polinomios:

- $R_0(x) = 1$

- Para la obtención de $R_1(x)$

$$\int_{-1}^{1} w(x)R_1(x)R_0(x)dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}(1)\left(x+a_{1,0}\right)dx = 0$$
$$\to \int_{-1}^{1}(x)\sqrt{1-x^2}dx + a_{1,0}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx = 0 \to a_{1,0} = 0 \to R_1(x) = x$$

Para la obtención de $R_2(x)$

$$\int_{-1}^{1} w(x)R_2(x)R_1(x)dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}(x)\left(x^2+a_{2,1}x+a_{2,0}\right)dx = 0$$
$$\int_{-1}^{1} x^3\sqrt{1-x^2}dx + a_{2,1}\int_{-1}^{1}\left(x^2\right)\sqrt{1-x^2}dx + a_{2,0}\int_{-1}^{1}(x)\sqrt{1-x^2}dx = 0 \to a_{2,1} = 0$$
$$\int_{-1}^{1} w(x)R_2(x)R_0(x)dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\left(x^2+a_{2,1}x+a_{2,0}\right)dx = 0$$
$$\int_{-1}^{1}\left(x^2\right)\sqrt{1-x^2}dx + a_{2,1}\int_{-1}^{1}(x)\sqrt{1-x^2}dx + a_{2,0}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx = 0 \to a_{2,0} = -\frac{1}{4} \to R_2(x) = x^2 - \frac{1}{4}$$

Para la obtención de $R_3(x)$

$$\int_{-1}^{1} w(x)R_3(x)R_0(x)dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\left(x^3+a_{3,2}x^2+a_{3,1}x+a_{3,0}\right)dx = 0$$
$$\int_{-1}^{1}\left(x^3\right)\sqrt{1-x^2} + a_{3,2}\int_{-1}^{1}\left(x^2\right)\sqrt{1-x^2} + a_{3,1}\int_{-1}^{1}(x)\sqrt{1-x^2} + a_{3,0}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2} = 0$$
$$\to a_{3,2}(\pi/8) + (\pi/2)a_{3,0} = 0$$
$$\int_{-1}^{1} w(x)R_3(x)R_1(x)dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\left(x^3+a_{3,2}x^2+a_{3,1}x+a_{3,0}\right)(x)dx = 0$$
$$\int_{-1}^{1}\left(x^4\right)\sqrt{1-x^2}dx + a_{3,2}\int_{-1}^{1}\left(x^3\right)\sqrt{1-x^2}dx + a_{3,1}\int_{-1}^{1}\left(x^2\right)\sqrt{1-x^2}dx + a_{3,0}\int_{-1}^{1}(x)\sqrt{1-x^2}dx$$
$$\to a_{3,1} = -\frac{1}{2}$$

$$\int_{-1}^{1} w(x)R_3(x)R_2(x)dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\left(x^3+a_{3,2}x^2+a_{3,1}x+a_{3,0}\right)\left(x^2-\frac{1}{4}\right)dx = 0$$
$$\int_{-1}^{1}\left(x^5\right)\sqrt{1-x^2}dx - \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\left(x^3\right)\sqrt{1-x^2}dx + a_{3,2}\int_{-1}^{1}\left(x^4\right)\sqrt{1-x^2}dx - \frac{1}{4}a_{3,2}\int_{-1}^{1}\left(x^2\right)\sqrt{1-x^2}dx +$$
$$a_{3,1}\int_{-1}^{1}\left(x^3\right)\sqrt{1-x^2}dx - \frac{1}{4}a_{3,1}\int_{-1}^{1}(x)\sqrt{1-x^2}dx + a_{3,0}\int_{-1}^{1}\left(x^2\right)\sqrt{1-x^2}dx - \frac{1}{4}a_{3,0}\int_{-1}^{1}(1)\sqrt{1-x^2}dx$$
$$\to a_{3,2} = 0 \to R_3(x) = x^3 - \frac{1}{2}x$$

Siguiendo este mismo proceso obtenemos los demás polinomios $R_n(x)$, a continuación se presentan los primeros diez.

$$
\begin{aligned}
R_0(x) &= 1\\
R_1(x) &= x\\
R_2(x) &= x^2 - \frac{1}{4}\\
R_3(x) &= x^3 - \frac{4}{8}x\\
R_4(x) &= x^4 - \frac{12}{16}x^2 + \frac{1}{16}\\
R_5(x) &= x^5 - x^3 + \frac{6}{32}x\\
R_6(x) &= x^6 - \frac{80}{64}x^4 + \frac{24}{64}x^2 + \frac{1}{64}\\
R_7(x) &= x^7 - \frac{192}{128}x^5 + \frac{80}{128}x^3 - \frac{8}{128}x\\
R_8(x) &= x^8 - \frac{448}{256}x^6 + \frac{240}{256}x^4 - \frac{40}{256}x^2 + \frac{1}{256}\\
R_9(x) &= x^9 - \frac{1024}{512}x^7 + \frac{672}{512}x^5 - \frac{160}{512}x^3 + \frac{10}{512}x\\
R_{10}(x) &= x^{10} - \frac{2304}{1024}x^8 + \frac{1792}{1024}x^6 - \frac{560}{1024}x^4 + \frac{60}{1024}x^2 + \frac{1}{1024}
\end{aligned}
$$

Obtención de los polinomios de Chevishev de tercer tipo a partir de la relación de recurrencia a tres términos

Los polinomios de Chebyshev al ser ortogonales tienen una relación de recurrrencia a tres términos dado por la siguiente expresión

$$U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x) = 2xU_n(x) \tag{2.121}$$

Obteniendo los primeros polinomios tenemos
Para $n = 1$

$$
\begin{aligned}
U_2(x) + U_0(x) &= 2xU_1(x)\\
U_2(x) &= 2xU_1(x) - U_0(x)
\end{aligned}
$$

Reemplazando $U_1(x)$ y $U_0(x)$

$$
\begin{aligned}
U_2(x) &= 2x(2x) - 1\\
U_2(x) &= 4x^2 - 1
\end{aligned}
$$

Para $n = 2$

$$
\begin{aligned}
U_3(x) + U_1(x) &= 2xU_2(x)\\
U_3(x) &= 2xU_2(x) - U_1(x)
\end{aligned}
$$

Reemplazando $U_2(x)$ y $U_1(x)$

$$
\begin{aligned}
U_3(x) &= 2x\left(4x^2 - 1\right) - 2x\\
U_3(x) &= 8x^3 - 4x
\end{aligned}
$$

Para $n = 3$

$$
\begin{aligned}
U_4(x) + U_2(x) &= 2xU_3(x)\\
U_4(x) &= 2xU_3(x) - U_2(x)
\end{aligned}
$$

Reemplazando $U_3(x)$ y $U_2(x)$

$$
\begin{aligned}
U_4(x) &= 2x\left(8x^3 - 4x\right) - \left(4x^2 - 1\right)\\
U_4(x) &= 16x^4 - 12x^2 + 1
\end{aligned}
$$

Obtención de los polinomios de Chevishev de tercer tipo a partir de la fórmula generadora

La función generadora más simple se puede derivar tomando la parte imaginaria de la identidad

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n e^{i(n+1)\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(te^{i\theta}\right)^n (e)^{i\theta} = \frac{(e)^{i\theta}}{1-t(e)^{i\theta}}; |t| < 1 \tag{2.122}$$

De donde se tiene que recordar la identidad $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, por cual

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n e^{i(n+1)\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} [t^n \cos(n+1)\theta + it^n \sin(n+1)\theta]$$

y

$$\frac{(e)^{i\theta}}{1-t(e)^{i\theta}} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{1-t[\cos\theta + i\sin\theta]}$$

Esta última expresión la multiplicamos por su conjugado para simplificar:

$$\begin{aligned}
\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{1-t[\cos\theta + i\sin\theta]} &= \left(\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{(1-t\cos\theta) + i(t\sin\theta)}\right)\left(\frac{(1-t\cos\theta) - i(t\sin\theta)}{(1-t\cos\theta) - i(t\sin\theta)}\right) \\
&= \frac{\cos\theta + i\sin\theta + t\cos^2\theta + t\sin^2\theta}{(1-t\cos\theta)^2 - (t\sin\theta)^2} \\
&= \frac{\cos\theta + i\sin\theta + t}{1-2t\cos\theta + t^2\cos^2\theta + t^2 - t^2\cos^2\theta} \\
&= \frac{(\cos\theta + t) + (\sin\theta)i}{1-2t\cos\theta + t^2\cos^2\theta + t^2 - t^2\cos^2\theta}
\end{aligned}$$

Sabiendo que $x = \cos\theta$ entonces,

$$\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{1-t[\cos\theta + i\sin\theta]} = \frac{(x+t) + (\sin\theta)i}{1-2tx+t^2}$$

Igualando las partes imaginarias, se tiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \sin(n+1)\theta = \frac{\sin\theta}{1-2tx+t^2}$$

Como $U_n(x) = U_n(\cos\theta) = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n U_n(\cos\theta) = \frac{1}{1-2tx+t^2} \tag{2.123}$$

En lo adelante, presentamos la obtención de los polinomios por esta vía:

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n U_n(x) = \frac{1}{1-2tx+t^2} = w(x,t)$$

Para este proceso nos vamos a auxiliar de la definición de polinomio de Maclaurin, gracias a la cual podemos plantear lo siguiente:

$$U_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial t^n} w(x,t) \equiv \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(\frac{1}{1-2tx+t^2}\right)_{t=0}$$

Iniciamos a asignar valores a n :

$$n = 0 \to U_0(x) = \frac{1}{0!}\frac{\partial^0}{\partial t^0}\left(\frac{1}{1-2tx+t^2}\right)_{t=0} = \frac{1}{0!}\left[\frac{1}{1-2x(0)+(0)^2}\right] = 1$$

$$n = 1 \to U_1(x) = \frac{1}{1!}\frac{\partial^1}{\partial t^1}\left(\frac{1}{1-2tx+t^2}\right)_{t=0} = \frac{1}{1!}\left[\frac{(-1)(2t-2x)}{\left(1-2x(t)+(t)^2\right)^2}\right]_{t=0} = 2x$$

$$n = 2 \to U_2(x) = \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{1}{1-2tx+t^2}\right)_{t=0} = \frac{1}{2!}\left[\frac{(-2)\left(-3t^2+6tx+1-4x^2\right)}{\left(1-2xt+t^2\right)^2}\right]_{t=0} = 4x^2 - 1$$

$$n = 3 \to U_3(x) = \frac{1}{3!}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\left(\frac{1}{1-2tx+t^2}\right)_{t=0} = \frac{1}{3!}\left[(-24x)\left(1-2x^2\right)\right] = 8x^3 - 4x$$

$$n = 4 \to U_4(x) = \frac{1}{4!}\frac{\partial^4}{\partial t^4}\left(\frac{1}{1-2tx+t^2}\right)_{t=0} = \frac{1}{4!}\left[(-24)\left(-16x^4+12x^2-1\right)\right] = 16x^4 - 12x^2 +$$

$$n = 5 \to U_5(x) = \frac{1}{5!}\frac{\partial^5}{\partial t^5}\left(\frac{1}{1-2tx+t^2}\right)_{t=0} = 32x^5 - 32x^3 + 6x$$

2.5.8. Chevyshev Tercer tipo

Si en la ecuación de Jacobi 2.83 tomamos $\alpha = -\frac{1}{2} \wedge \beta = \frac{1}{2}$ tenemos

$$\left(1-x^2\right)y'' + \left[\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+2\right)x\right]y' + \gamma y = 0$$

$$\left(1-x^2\right)y'' + (1-2x)y' + \gamma y = 0 \tag{2.124}$$

Esta ecuación se conoce como ecuación de Chevyshed de tercer tipo, y a las soluciones de la misma polinomios de Chevyshed de tercer tipo, donde el parámetro gamma es

$$\gamma = n\left(n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1\right); n = 0, 1, 2, 3\ldots$$
$$\gamma = n(n+1); n = 0, 1, 2, 3\ldots$$

Para analizar los puntos ordinarios y singulares, expresamos 2.124 a la forma normal

$$y'' + \frac{1-2x}{1-x^2}y' + \frac{\gamma}{1-x^2}y = 0$$

donde

$$P(x) = \frac{1-2x}{1-x^2} \quad \text{y} \quad Q(x) = \frac{\gamma}{1-x^2}$$

podemos ver que los puntos singulares de $P(x)$ y $Q(x)$ son $x_0 = \pm 1$, de manera que ahora queremos determinar si estos puntos son singulares regulares, aplicando dicha definición para $x_0 = 1$

$$p(x) = (x - x_0)\,P(x)$$
$$p(x) = (x-1)\frac{1-2x}{1-x^2}$$
$$p(x) = (x-1)\frac{1-2x}{-(x-1)(x+1)}$$
$$p(x) = -\frac{1-2x}{1+x}$$

$$q(x) = (x - x_0)^2 \, Q(x)$$
$$q(x) = (x-1)^2 \frac{\gamma}{1-x^2}$$
$$q(x) = (x-1)^2 \frac{\gamma}{-(x-1)(x+1)}$$
$$q(x) = \frac{\gamma(x-1)}{-(x+1)}$$
$$q(x) = \frac{\gamma(1-x)}{x+1}$$

$x_0 = 1$ punto ordinario de $p(x)$ y $q(x)$, entonces es punto singular regular de $P(x)$ y $Q(x)$. De igual manera analizamos $x_0 = -1$

$$p(x) = (x - x_0) \, P(x)$$
$$p(x) = (x+1) \frac{1-2x}{1-x^2}$$
$$p(x) = (x+1) \frac{1-2x}{-(x-1)(x+1)}$$
$$p(x) = -\frac{1-2x}{x-1}$$

$$q(x) = (x - x_0)^2 \, Q(x)$$
$$q(x) = (x+1)^2 \frac{\gamma}{1-x^2}$$
$$q(x) = (x+1)^2 \frac{\gamma}{-(x-1)(x+1)}$$
$$q(x) = \frac{\gamma(x+1)}{1-x}$$

Por lo que también $x_0 = -1$ punto ordinario de $p(x)$ y $q(x)$, entonces es punto singular regular de $P(x)$ y $Q(x)$. Como $x_0 = 1$ y $x_0 = -1$ son puntos singulares, por el teorema de 2.1.2 existe una solución de la forma 2.19.

Tomando la solución de la forma $y = \sum_{v=0}^{\infty} a_v \, (x - x_0)^{v+r}$ con $x_0 = 1$, derivando y reemplazando en 2.124

$$\left(1-x^2\right) \sum_{v=0}^{\infty} a_v (v+r-1)(v+r)(x-1)^{v+r-2} + (1-2x) \sum_{v=0}^{\infty} a_v (v+r)(x-1)^{v+r-1} + \gamma \sum_{v=0}^{\infty} a_v (x-1)^{v+r} = 0$$

$$-(x+1)(x-1) \sum_{v=0}^{\infty} a_v (v+r-1)(v+r)(x-1)^{v+r-2} + [-(2(x-1)+1)] \sum_{v=0}^{\infty} a_v (v+r)(x-1)^{v+r-1} + \gamma \sum_{v=0}^{\infty} a_v (x-1)^{v+r} = 0$$

$$-(x+1) \sum_{v=0}^{\infty} a_v (v+r-1)(v+r)(x-1)^{v+r-1} - 2(x-1) \sum_{v=0}^{\infty} a_v (v+r)(x-1)^{v+r-1} - \sum_{v=0}^{\infty} a_v (v+r)(x-1)^{v+r-1} + \gamma \sum_{v=0}^{\infty} a_v (x-1)^{v+r} = 0$$

$$-(x+1)\sum_{v=0}^{\infty}a_v(v+r-1)(v+r)(x-1)^{v+r-1}+\sum_{v=0}^{\infty}-2a_v(v+r)(x-1)^{v+r}-\sum_{v=0}^{\infty}a_v(v+r)(x-1)^{v+r-1}+$$
$$\sum_{v=0}^{\infty}\gamma a_v(x-1)^{v+r}=0$$

Para simplificar la expresión llamaremos $B=\sum^{\infty}a_v(v+r-1)(v+r)(x-1)^{v+r-1}$
de manera que

$$-ra_0(x-1)^{r-1}-(x+1)B+\sum_{v=0}^{\infty}\left[(\gamma-2(v+r))a_v\right](x-1)^{v+r}-\sum_{v=1}^{\infty}a_v(v+r)(x-1)^{v+r-1}=$$
$$-ra_0(x-1)^{r-1}-(x+1)B+\sum_{v=0}^{\infty}\left[(\gamma-2(v+r))a_v\right](x-1)^{v+r}-\sum_{v=0}^{\infty}a_{v+1}(v+1+r)(x-1)^{v}$$

$$-ra_0(x-1)^{r-1}-(x+1)B+\sum_{v=0}^{\infty}\left[(\gamma-2(v+r))a_v\right](x-1)^{v+r}-\sum_{v=0}^{\infty}a_{v+1}(v+r+1)(x-1)^{v}$$

$$-ra_0(x-1)^{r-1}-(x+1)B+\sum_{v=0}^{\infty}\left[(\gamma-2(v+r))a_v-(v+r+1)a_{v+1}\right](x-1)^{v+r}=0 \tag{2.125}$$

Simplificando la expresión que contiene B

$$\begin{aligned}-(x+1)B&=(-xB+B)-B-B\\&=-(x-1)B-2B\\&=-(x-1)\sum_{v=0}^{\infty}a_v(v+r-1)(v+r)(x-1)^{v+r-1}-2\sum_{v=0}^{\infty}a_v(v+r-1)(v+r)(x-1\\&=-2a_0r(r-1)(x-1)^{r-1}-\sum_{v=0}^{\infty}a_v(v+r-1)(v+r)(x-1)^{v+r}-2\sum_{v=1}^{\infty}a_v(v+r-\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=-2a_0r(r-1)(x-1)^{r-1}-\sum_{v=0}^{\infty}a_v(v+r-1)(v+r)(x-1)^{v+r}\\-2\sum_{v=1-1}^{\infty}a_{v+1}(v+1+r-1)(v+1+r)(x-1)^{v+1+r-1}\end{aligned}$$

$$=-2a_0r(r-1)(x-1)^{r-1}-\sum_{v=0}^{\infty}a_v(v+r-1)(v+r)(x-1)^{v+r}-2\sum_{v=0}^{\infty}a_{v+1}(v+r)$$

$$-(x+1)B=-2a_0r(r-1)(x-1)^{r-1}-\sum_{v=0}^{\infty}\left[(v+r)(v+r-1)a_v+2(v+r)(v+r+1)a_{v+1}\right](x$$

Reemplando esta expresión en 2.125

$$-ra_0(x-1)^{r-1} - 2a_0r(r-1)(x-1)^{r-1} - \sum_{v=0}^{\infty}\left[(v+r)(v+r-1)a_v + 2(v+r)(v+r+1)a_{v+1}\right](x-1)^{v+r}$$
$$+\sum_{v=0}^{\infty}\left[(\gamma-2(v+r))a_v - (v+r+1)a_{v+1}\right](x-1)^{v+r} = 0$$
$$(-1-2(r-1))ra_0(x-1)^{r-1}$$
$$+\sum_{v=0}^{\infty}\left[(\gamma-2(v+r)-(v+r)(v+r-1))a_v + (-(v+r+1)+(-2(v+r)(v+r+1))a_{v+1}\right](x-1)^{v+r} = 0$$
$$(-1-2r+2)ra_0(x-1)^{r-1} + \sum_{v=0}^{\infty}\left[(\gamma-(2+(v+r-1))(v+r))a_v - (1+2(v+r))(v+r+1)a_{v+1}\right](x-1)^{v+r} = 0$$
$$(1-2r)ra_0(x-1)^{r-1} + \sum_{v=0}^{\infty}\left[(\gamma-(v+r+1)(v+r))a_v - 2\left(\frac{1}{2}+v+r\right)(v+r+1)a_{v+1}\right](x-1)^{v+r} = 0$$

Igualando los coeficientes a cero, tenemos la ecuación indicial

$$(1-2r)r = 0 \quad a_0 \neq 0$$
$$r = 0 \wedge 1-2r = 0$$
$$r = 0 \wedge r = \frac{1}{2}$$

y la relación de recurrencia dada por

$$(\gamma-(v+r+1)(v+r))a_v - 2\left(\frac{1}{2}+v+r\right)(v+r+1)a_{v+1}$$
$$(\gamma-(v+r+1)(v+r))a_v = 2\left(\frac{1}{2}+v+r\right)(v+r+1)a_{v+1}$$
$$a_{v+1} = \frac{\gamma-(v+r+1)(v+r)}{2\left(\frac{1}{2}+v+r\right)(v+r+1)}a_v$$

para $r = 0$

$$a_{v+1} = \frac{\gamma-(v+0+1)(v+0)}{2\left(\frac{1}{2}+v+0\right)(v+0+1)a_{v+1}}a_v$$
$$a_{v+1} = \frac{\gamma-v(v+1)}{2\left(\frac{1}{2}+v\right)(v+1)}a_v \quad \forall v \geq 0$$

Denotando

$$\gamma_v = v(v+1) \tag{2.126}$$

la expresión anterior queda como

$$a_{v+1} = \frac{\gamma_n-\gamma_v}{2\left(v+\frac{1}{2}\right)(v+1)}a_v \tag{2.127}$$

Ahora daremos valores a v

$$\begin{aligned}
&\text{si}\, v = 0\\
&a_{0+1} = \frac{\gamma_n - \gamma_0}{2\left(0+\frac{1}{2}\right)(0+1)} a_0\\
&a_1 = \frac{\gamma_n - \gamma_0}{2\left(0+\frac{1}{2}\right)(1)} a_0\\
&\text{ Si } v = 1\\
&a_{1+1} = \frac{\gamma_n - \gamma_1}{2\left(1+\frac{1}{2}\right)(1+1)} a_1\\
&a_2 = \frac{\left(\gamma_n - \gamma_0\right)\left(\gamma_n - \gamma_1\right)}{2(2)\left(1+\frac{1}{2}\right)(2)(1)\left(0+\frac{1}{2}\right)} a_0\\
&a_2 = \frac{\left(\gamma_n - \gamma_0\right)\left(\gamma_n - \gamma_1\right)}{2^2(2)!\left(0+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)} a_0\\
&\text{ Si } v = 2\\
&a_{2+1} = \frac{\gamma_n - \gamma_2}{2\left(2+\frac{1}{2}\right)(2+1)} a_2\\
&a_3 = \frac{\left(\gamma_n - \gamma_0\right)\left(\gamma_n - \gamma_1\right)\left(\gamma_n - \gamma_2\right)}{2^2(2)!2(3)\left(0+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(2+\frac{1}{2}\right)} a_0\\
&a_3 = \frac{\left(\gamma_n - \gamma_0\right)\left(\gamma_n - \gamma_1\right)\left(\gamma_n - \gamma_2\right)}{2^3(3)!\left(0+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(2+\frac{1}{2}\right)} a_0\\
&\vdots\\
&\text{ Si } v = v-1
\end{aligned}$$

$$a_v = \frac{\left(\gamma_n - \gamma_0\right)\left(\gamma_n - \gamma_1\right)\ldots\ldots\left(\gamma_n - \gamma_{v-1}\right)}{2^v(v)!\left(0+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\ldots\ldots\left(v-1+\frac{1}{2}\right)} a_0 \qquad (2.128)$$

Ahora simplificaremos la expresión anterior, para el numerador tenemos

$$\begin{aligned}
\gamma_n - \gamma_{v-1} &= n(n+1) - v(v-1)\\
&= n^2 + n - v^2 + v\\
&= \left(n^2 - v^2\right) + (n+v)\\
&= (n+v)(n-v) + (n+v)
\end{aligned}$$

$$\gamma_n - \gamma_{v-1} \quad = \quad (n-v+1)(n+v) \qquad (2.129)$$

Para el denominador, usamos la propiedad de la función Gamma $\frac{\Gamma(x+v)}{\Gamma(x)} = x(x+1)(x+2)\ldots(x+v-1)$, tomando $x = 1/2$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+v\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}+v-1\right)$$

Sustituyendo en la expresioón de recurrencia 2.128

$$a_v = \frac{(n-v+1)(n+v)}{2^v(v)!\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+v\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}} a_0$$

Simplificando y expresando el numerador en término de productoria

$$a_v = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^v(v)!\Gamma\left(\frac{1}{2}+v\right)} a_0 \prod_{k=1}^{v}(n-k+1)(n+k)$$

Ahora expresando la productoria en término de la función gamma

$$a_v = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^v(v)!\Gamma\left(\frac{1}{2}+v\right)} a_0 \frac{n!}{(n-v)!} \frac{\Gamma(n+1+v)}{\Gamma(n+1)}$$

Por definición de número combinatorio

$$a_v = \begin{pmatrix} n \\ \\ v \end{pmatrix} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1+v)}{2^v\Gamma\left(\frac{1}{2}+v\right)\Gamma(n+1)} a_0$$

Sustituyendo este valor en la suposición de la solución tenemos

$$y(x) = a_0 + \sum_{v=1}^{\infty} a_v(x-1)^v$$

Ahora si definimos

$$V(x) = a_0 y(x) \wedge a_0 = 1$$

$$a_0 y(x) = a_0 + a_0 \sum_{v=1}^{\infty} \begin{pmatrix} n \\ \\ v \end{pmatrix} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1+v)}{2^v\Gamma\left(\frac{1}{2}+v\right)\Gamma(n+1)}(x-1)^v$$

$$a_0 y(x) = a_0 \left[1 + \sum_{v=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ \\ v \end{pmatrix} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1+v)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+v\right)\Gamma(n+1)} \left(\frac{x-1}{2}\right)^v\right]$$

Simplificando

$$a_0 y(x) = \left[1 + \sum_{v=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ \\ v \end{pmatrix} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1+v)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+v\right)\Gamma(n+1)} \left(\frac{x-1}{2}\right)^v\right]$$

$$a_0 y(x) = \sum_{v=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ \\ v \end{pmatrix} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1+v)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+v\right)\Gamma(n+1)} \left(\frac{x-1}{2}\right)^v$$

$$a_0 y(x) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \sum_{v=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ \\ v \end{pmatrix} \frac{\Gamma(n+1+v)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+v\right)\Gamma(n+1)} \left(\frac{x-1}{2}\right)^v$$

$$V_n(x) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \sum_{v=0}^{n} \frac{n!\Gamma(n+1+v)}{v!(n-v)!\Gamma\left(\frac{1}{2}+v\right)\Gamma(n+1)} \left(\frac{x-1}{2}\right)^v$$

Simplificando por la propiedad gamma

$$V_n(x) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \sum_{v=0}^{n} \frac{(n+v)!}{v!(n-v)!\Gamma\left(\frac{1}{2}+v\right)} \left(\frac{x-1}{2}\right)^v$$

Ahora vamos a obtener los primeros polinomios a partir de la expresión anterior.

Si $n = 0$

$$V_{(x)} = \Gamma(\left(\frac{1}{2}\right)) \sum_{v=0}^{0} \frac{(0+v)!}{v!(0-v)!\Gamma\left(\frac{1}{2}+v\right)} \left(\frac{x-1}{2}\right)^{v}$$

$$V_0(x) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = 1$$

si $n = 1$

$$V_1(x) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \sum_{v=0}^{1} \frac{(1+v)!}{v!(1-v)!\Gamma\left(\frac{1}{2}+v\right)} \left(\frac{x-1}{2}\right)^{v}$$

$$= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1!}{0!(1!)\Gamma(\frac{1}{2})}(1) + \frac{2!}{(1!)(0!)\Gamma(\frac{1}{2}+1)}(\frac{x-1}{2})\right]$$

$$= 1 + \frac{2!\Gamma(\frac{1}{2})}{\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\frac{1}{2})}\left(\frac{x-1}{2}\right)$$

$$V_1(x) = 1 + 2(x-1) = 2x - 1$$

Si $n = 2$

$$V_2(x) = \Gamma(\frac{1}{2}) \sum_{v=0}^{2} \frac{(2+v)!}{v!(2-v)!\Gamma(\frac{1}{2}+v)}(\frac{x-1}{2})^{v}$$

$$= \Gamma(\frac{1}{2})\left[\frac{2!}{0!(2!)\Gamma(\frac{1}{2})}(1) + \frac{3!}{1!(1!)\Gamma(\frac{1}{2}+1)}(\frac{x-1}{2}) + \frac{4!}{2!(0!)\Gamma(\frac{1}{2}+2)}(\frac{x-1}{2})^{2}\right]$$

$$= 1 + \frac{3!\Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}(\frac{x-1}{2}) + \frac{4!\Gamma(\frac{1}{2})}{2!(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}(\frac{x-1}{2})^{2}$$

$$= 1 + 6x - 6 + 4x^2 - 8x + 4$$

$$V_2(x) = 4x^2 - 2x - 1$$

Si $n = 3$

$$V_3(x) = \Gamma(\frac{1}{2}) \sum_{v=0}^{3} \frac{(3+v)!}{v!(3-v)!\Gamma(\frac{1}{2}+v)}(\frac{x-1}{2})^{v}$$

$$= \Gamma(\frac{1}{2})\left[\frac{3!}{0!(3!)\Gamma(\frac{1}{2})}(1) + \frac{4!}{1!(2!)\Gamma(\frac{1}{2}+1)}(\frac{x-1}{2}) + \frac{5!}{2!(1!)\Gamma(\frac{1}{2}+2)}(\frac{x-1}{2})^{2} + \frac{6!}{3!(0!)\Gamma(\frac{1}{2}+3)}(\frac{x}{}\right.$$

$$= 1 + \frac{4!\Gamma(\frac{1}{2})}{2!\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}(\frac{x-1}{2}) + \frac{5!\Gamma(\frac{1}{2})}{2!(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}(\frac{x-1}{2})^{2} + \frac{6!\Gamma(\frac{1}{2})}{3!(5/2)(3/2)(1/2)\Gamma(\frac{1}{2})}(\frac{x-1}{2})^{3}$$

$$V_3(x) = 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1$$

Desarrollando ese mismo proceso obtenemos los demás polinomios, acontinuación se presentan algunos más

$V_0(x) = 1$
$V_1(x) = 2x - 1$
$V_2(x) = 4x^2 - 2x - 1$
$V_3(x) = 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1$
$V_4(x) = 16x^4 - 8x^3 - 12x^2 + 4x + 1$
$V_5(x) = 32x^5 - 16x^4 - 32x^3 + 12x^2 + 6x - 1$
$V_6(x) = 64x^6 - 32x^5 - 80x^4 + 32x^3 + 24x^2 - 6x - 1$
$V_7(x) = 128x^7 - 64x^6 - 192x^5 + 80x^4 + 80x^3 - 24x^2 - 8x + 1$
$V_8(x) = 256x^8 - 128x^7 - 448x^6 + 192x^5 + 240x^4 - 80x^3 - 40x^2 + 8x + 1$

Obtención de los polinomios de Chevishev de tercer tipo como proceso de Gramm-Schmidt

Los polinomios de Chebyshev de 3er tipo, se obtienen utilizando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt para polinomios en el dominio $(-1, 1)$ con la función de peso $w(x) = \sqrt{(1 + x)/(1 - x)}$.
Los polinomios obtenidos con este proceso son de la forma $R_0(x) = 1, R_1(x) = x + a_{1,0}, \quad R_2(x) = x^2 + a_{2,1}x + a_{2,0}$, $R_3(x) = x^3 + a_{3,2}x^2 + a_{3,1}x + a_{3,0}$, y continuando de esta manera hasta $R_n(x)$, donde las constantes o coeficientes $a_{n,m}$ son determinadas por la condición de ortogonalidad, de un polinomio dado con los restantes polinomios de grado menor al mismo. A continuación desarrollamos el proceso

- Vamos a obtener a $R_1(x) = x + a_{1,0}$, donde debemos encontrar el valor de la constante $\mathbf{a_{1,0}}$
  Como $R_0(x)$ y $R_1(x)$ son ortogonales

$$\langle R_0(x), R_1(x)\rangle_w = \int_{-1}^{1} w(x)R_0(x)R_1(x)dx = \int_{-1}^{1} w(x)\,(x + a_{1,0})\,dx = \int_{-1}^{1} xw(x)dx + a_{1,0}\int_{-1}^{1} w(x)dx = 0$$

  El valor de las integrales anteriores están dados por

$$\int_{-1}^{1} xw(x)dx = \;=\; \frac{\pi}{2} \tag{2.130}$$

$$\int_{-1}^{1} w(x)dx \;=\; \pi \tag{2.131}$$

  Reemplazando estos valores obtenidos

$$\frac{\pi}{2} + a_{1,0}\pi \;=\; 0$$

  Despejando tenemos

$$a_{1,0} \;=\; -\frac{1}{2}$$

  Por lo que el polinomio es

$$R_1(x) = x - \frac{1}{2}$$

- Ahora tomamos $R_2(x) = x^2 + a_{2,1}x + a_{2,0}$, donde las constantes $a_{2,1}, a_{2,0}$ se obtienen del hecho de que $R_2(x)$ es ortogonal a $R_1(x)$ y $R_0(x)$, es decir

$$\langle R_2(x), R_1(x)\rangle_w = \int_{-1}^{1} w(x)R_2(x)R_1(x)dx = \int_{-1}^{1} w(x)\left(x^2 + a_{2,1}x + a_{2,0}\right)(x - 1/2)d$$

$$\langle R_2(x), R_0(x)\rangle_w = \int_{-1}^{1} w(x)R_2(x)R_0(x)dx = \int_{-1}^{1} w(x)\left(x^2 + a_{2,1}x + a_{2,0}\right)dx = 0 \quad (2.133)$$

Al resolver la primera integral dada en 2.132

$$\begin{aligned}\langle R_2(x), R_1(x)\rangle_w &= \int_{-1}^{1} w(x)\left(x^2 + a_{2,1}x + a_{2,0}\right)(x - 1/2)dx = 0\\ &= \int_{-1}^{1} x^2(x - 1/2)w(x)dx + a_{2,1}\int_{-1}^{1} x(x - 1/2)w(x)dx + a_{2,0}\int_{-1}^{1} (x\end{aligned}$$

Resolviendo cada una de las integrales anteriores

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x^2(x - 1/2)w(x)dx &= \int_{-1}^{1} x^2(x - 1/2)\sqrt{(1 + x)/(1 - x)}dx = \frac{\pi}{8}\\ \int_{-1}^{1} x(x - 1/2)w(x)dx &= \int_{-1}^{1} x(x - 1/2)\sqrt{(1 + x)/(1 - x)}dx = \frac{\pi}{4}\\ \int_{-1}^{1} (x - 1/2)w(x)dx &= \int_{-1}^{1} (x - 1/2)\sqrt{(1 + x)/(1 - x)}dx = 0\end{aligned}$$

Sustituyendo los valores obtenidos

$$\frac{\pi}{8} + a_{2,1}\frac{\pi}{4} = 0$$

Resolviendo la ecuación

$$a_{2,1} = -\frac{1}{2}$$

Ahora vamos a resolver la integral dada en la expresión 2.133, donde usaremos los resultados obtenidos en 2.130 y el valor de la integral

$$\int_{-1}^{1} x^2 w(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2\sqrt{(1 + x)/(1 - x)}dx = \frac{\pi}{2} \quad (2.134)$$

Con estos valores obtenidos tenemos la siguiente ecuación lineal

$$\pi/2 + a_{2,1}\pi/2 + a_{2,0}\pi = 0$$

Reemplazando el valor de $a_{2,1}$, llegamos a

$$a_{2,0} = -\frac{1}{4}$$

Así obteniendo

$$R_2(x) = x^2 - x/2 - 1/4$$

Si continuamos de esta forma, tenemos:

$$R_3(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}$$
$$R_4(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{16}$$
$$R_5(x) = x^5 - \frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{16}x - \frac{1}{32}.$$
$$R_6(x) = x^6 - \frac{1}{2}x^5 - \frac{5}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{32}x - \frac{1}{64}.$$
$$R_7(x) = x^7 - \frac{1}{2}x^6 - \frac{3}{2}x^5 + \frac{5}{8}x^4 + \frac{5}{8}x^3 - \frac{3}{16}x^2 - \frac{1}{16}x + \frac{1}{128}.$$
$$R_8(x) = x^8 - \frac{1}{2}x^7 - \frac{7}{4}x^6 + \frac{3}{4}x^5 + \frac{15}{16}x^4 - \frac{5}{16}x^3 - \frac{5}{32}x^2 + \frac{1}{22}x + \frac{1}{256}.$$

Obtención de los polinomios de Chevishev de tercer tipo a partir de la relación de recurrencia a tres términos

Sabemos que la relación de recurrencia está dada por (relacionarla con la parte de ortogonalidad.citar)

$$V_{n+1}(x) = 2xV_n(x) - V_{n-1}(x) \tag{2.135}$$

para utilizar esta expresión debemos conocer los primeros dos polinomios de Chevishev, y están dado por las expresiones (citar en la parte obtenida de la ecuacion diferencial)
Para $n = 1$

$$V_2(x) = 2xV_1(x) - V_0(x) = 2x(2x-1) - 1 = 4x^2 - 2x - 1$$

Para $n = 2$

$$V_3(x) = 2xV_2(x) - V_1(x) = 2x\left(4x^2 - 2x - 1\right) - 2x + 1 = 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1$$

Para $n = 3$

$$V_4(x) = 2xV_3(x) - V_2(x) = 2x\left(8x^3 - 4x^2 - 4x + 1\right) - 4x^2 + 2x + 1 = 16x^4 - 8x^3 - 12x^2 + 4x + 1$$

Asi continua para los demas polinomios restantes...

Obtención de los polinomios de Chevishev de tercer tipo a partir de la fórmula generadora

Ver aplicacion, video(Carlos felix y milane)

2.5.9. Chevyshev Cuarto tipo

De la ecuación diferencial de Jacobi definida en 2.83, tomando $\alpha = \frac{1}{2} \wedge \beta = -\frac{1}{2}$ se transforma en la ecuación de Chevyshev de cuarto tipo

$$\left(1 - x^2\right) y'' - (1 + 2x)y' + \gamma y = 0 \tag{2.136}$$

con $\gamma = n(n+1); n = 0, 1, 2, 3 \ldots$. $x_0 = \pm 1$ son puntos singulares regulares, el teorema 2.1.2 garantiza una solución de la forma 2.19, dada por

$$y = \sum_{v=0}^{\infty} a_v \left(x - x_0\right)^{v+r} \quad x_0 = 1$$

Derivando y reemplazando en 2.136

$$\left(1-x^2\right)\sum_{v=0}^{\infty} a_v(v+r-1)(v+r)(x-1)^{v+r-2}-(1+2x)\sum_{v=0}^{\infty} a_v(v+r)(x-1)^{v+r-1}+\gamma\sum_{v=0}^{\infty} a_v($$

Podemos escribir $-(1+2x)=-2(x-1)-3$ y $\left(1-x^2\right)=-(x+1)(x-1)$

$$-(x+1)(x-1)\sum_{v=0}^{\infty} a_v(v+r-1)(v+r)(x-1)^{v+r-2}+[-2(x-1)-3]\sum_{v=0}^{\infty} a_v(v+r)(x-1)^{v-}$$

$$-(x+1)\sum_{v=0}^{\infty} a_v(v+r-1)(v+r)(x-1)^{v+r-1}-2(x-1)\sum_{v=0}^{\infty} a_v(v+r)(x-1)^{v+r-1}-3\sum_{v=0}^{\infty} a_v(v+r)(x$$

$$\gamma\sum_{v=0}^{\infty} a_v(x-1)^{v+r}=0$$

$$-(x+1)\sum_{v=0}^{\infty} a_v(v+r-1)(v+r)(x-1)^{v+r-1}+\sum_{v=0}^{\infty} -2a_v(v+r)(x-1)^{v+r}-3\sum_{v=0}^{\infty} a_v(v+r)(x-1)^{v+r-1}$$

$$\sum_{v=0}^{n} \gamma a_v(x-1)^{v+r}=0$$

Ahora sea

$$B=\sum_{v=0}^{\infty} a_v(v+r-1)(v+r)(x-1)^{v+r-1}$$

$$-3ra_0(x-1)^{r-1}-(x+1)B+\sum_{v=0}^{\infty}\left[(\gamma-2(v+r))a_v\right](x-1)^{v+r}-3\sum_{v=1}^{\infty} a_v(v+r)(x-1)^{v+r-1}$$

$$-3ra_0(x-1)^{r-1}-(x+1)B+\sum_{n=0}^{\infty}\left[(\gamma-2(v+r))a_v\right](x-1)^{v+r}-3\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{v+1}(v+1+r)(x-1$$

Agrupando las series semejantes

$$-3ra_0(x-1)^{r-1}-(x+1)B+\sum_{v=0}^{\infty}\left[(\gamma-2(v+r))a_v-3(v+r+1)a_{v+1}\right](x-1)^{v+r}=0$$

Ahora vamos a realizar de manera separada la operación de la serie denotada por B

$$\begin{aligned}-(x+1)B&=(-xB+B)-B-B\\&=-(x-1)B-2B\\&=-(x-1)\sum_{v=0}^{\infty} a_v(v+r-1)(v+r)(x-1)^{v+r-1}-2\sum_{v=0}^{\infty} a_v(v+r-1)(v+r)(x-1\\&=-2a_0r(r-1)(x-1)^{r-1}-\sum_{v=0}^{\infty} a_v(v+r-1)(v+r)(x-1)^{v+r}-2\sum_{v=1}^{\infty} a_v(v+r-\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-(x+1)B=-2a_0r(r-1)(x-1)^{r-1}&-\sum_{v=0}^{\infty} a_v(v+r-1)(v+r)(x-1)^{v+r}\\&-2\sum_{v=1-1}^{\infty} a_{v+1}(v+1+r-1)(v+1+r)(x-1)^{v+1+r-1}\end{aligned}$$

$$-(x+1)B = -2a_0r(r-1)(x-1)^{r-1} - \sum_{v=0}^{\infty} a_v(v+r-1)(v+r)(x-1)^{v+r} - 2\sum_{v=0}^{\infty} a_{v+1}(v+r)(v+r+1)(x-1)^{v+r}$$

$$-(x+1)B = -2a_0r(r-1)(x-1)^{r-1} - \sum_{v=0}^{\infty} \left[(v+r)(v+r-1)a_v + 2(v+r)(v+r+1)a_{v+1}\right](x-1)^{v+r} \tag{2.137}$$

Sustituyendo 2.137

$$-3ra_0(x-1)^{r-1} - 2a_0r(r-1)(x-1)^{r-1} - \sum_{v=0}^{\infty} \left[(v+r)(v+r-1)a_v + 2(v+r)(v+r+1)a_{v+1}\right](x-1)^{v+r}$$
$$+\sum_{v=0}^{\infty} \left[(\gamma - 2(v+r))a_v - 3(v+r+1)a_{v+1}\right](x-1)^{v+r} = 0$$

$$(-3-2(r-1))ra_0(x-1)^{r-1} + \sum_{v=0}^{\infty} [(\gamma - 2(v+r) - (v+r)(v+r-1))a_v +$$
$$(-3(v+r+1) + (-2(v+r)(v+r+1))a_{v+1}](x-1)^{v+r} = 0$$

$$(-3-2r+2)ra_0(x-1)^{r-1} + \sum_{v=0}^{\infty} \left[(\gamma - (2+(v+r-1))(v+r))a_v - (3+2(v+r))(v+r+1)a_{v+1}\right](x-1)^{v+r} = 0$$

$$-(1+2r)ra_0(x-1)^{r-1} + \sum_{v=0}^{\infty} \left[(\gamma - (v+r+1)(v+r))a_v - (3+2(v+r))(v+r+1)a_{v+1}\right](x-1)^{v+r} = 0$$

La ecuación indicial está dada por

$$\begin{aligned} &-(1+2r)r = 0 \quad a_0 \neq 0 \\ &-r = 0 \wedge 1+2r = 0 \\ &r = 0 \quad \wedge r = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

y la relación de recurrencia

$$\begin{aligned} (\gamma - (v+r+1)(v+r))a_v - (3+2(v+r))(v+r+1)a_{v+1} &= 0 \\ (3+2(v+r))(v+r+1)a_{v+1} &= (\gamma - (v+r+1)(v+r))a_v \end{aligned}$$

$$a_{v+1} = \frac{\gamma - (v+r+1)(v+r)}{(3+2(v+r))(v+r+1)}a_v \tag{2.138}$$

para el caso de $r = 0$

$$\begin{aligned} a_{v+1} &= \frac{\gamma - (v+0+1)(v+0)}{(3+2(v+0))(v+0+1)}a_v \\ a_{v+1} &= \frac{\gamma - v(v+1)}{(3+2v)(v+1)}a_v \\ a_{v+1} &= \frac{\gamma - v(v+1)}{2\left(v+\frac{3}{2}\right)(v+1)}a_v; \forall v \geq 0 \end{aligned}$$

Utilizando la expresión 2.126

$$a_{v+1} = \frac{\gamma_n - \gamma_v}{2\left(v+\frac{3}{2}\right)(v+1)}a_v \tag{2.139}$$

Desarrollando los términos de 2.139

$$\begin{aligned}
&\text{Si} v = 0 \\
&a_{0+1} = \frac{\gamma_n - \gamma_0}{2\left(0+\frac{3}{2}\right)(0+1)} a_0 \\
&a_1 = \frac{\gamma_n - \gamma_0}{2\left(0+\frac{3}{2}\right)(1)} a_0 \\
&\text{Si } v = 1 \\
&a_{1+1} = \frac{\gamma_n - \gamma_1}{2\left(1+\frac{3}{2}\right)(1+1)} a_1 \\
&a_2 = \frac{(\gamma_n - \gamma_0)(\gamma_n - \gamma_1)}{2(2)\left(1+\frac{3}{2}\right)(2)(1)\left(0+\frac{3}{2}\right)} a_0 \\
&a_2 = \frac{(\gamma_n - \gamma_0)(\gamma_n - \gamma_1)}{2^2(2)!\left(0+\frac{3}{2}\right)\left(1+\frac{3}{2}\right)} a_0 \\
&\text{Si } v = 2 \\
&a_{2+1} = \frac{\gamma_n - \gamma_2}{2\left(2+\frac{3}{2}\right)(2+1)} a_2 \\
&a_3 = \frac{(\gamma_n - \gamma_0)(\gamma_n - \gamma_1)(\gamma_n - \gamma_2)}{2^2(2)!2(3)\left(0+\dfrac{3}{2}\right)\left(1+\frac{3}{2}\right)\left(2+\frac{3}{2}\right)} a_0 \\
&a_3 = \frac{(\gamma_n - \gamma_0)(\gamma_n - \gamma_1)(\gamma_n - \gamma_2)}{2^3(3)!\left(0+\frac{3}{2}\right)\left(1+\frac{3}{2}\right)\left(2+\frac{3}{2}\right)} a_0 \\
&\vdots \\
&\text{Si} v = v + 1 \\
&a_v = \frac{(\gamma_n - \gamma_0)(\gamma_n - \gamma_1)\ldots\ldots(\gamma_n - \gamma_{v-1})}{2^v(v)!\left(0+\dfrac{3}{2}\right)\left(1+\frac{3}{2}\right)\ldots\ldots\left(v-1+\frac{3}{2}\right)} a_0
\end{aligned}$$

Tomando $a = 3/2$ en A.3 y de la expresión 2.129

$$a_v = \frac{(n-v+1)(n+v)}{2^v(v)!\dfrac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+v\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}} a_0$$

Expresando el numerador en productoria

$$a_v = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2^v(v)!\Gamma\left(\frac{3}{2}+v\right)} a_0 \prod_{k=1}^{v} (n-k+1)(n+k)$$

Ahora expresamos la productoria en términos de la función gamma

$$a_v = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2^v(v)!\Gamma\left(\dfrac{3}{2}+v\right)} a_0 \frac{n!}{(n-v)!} \frac{\Gamma(n+1+v)}{\Gamma(n+1)}$$

$$a_v = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2^v\Gamma\left(\dfrac{3}{2}+v\right)} \frac{n!}{(v)!(n-v)!} \frac{\Gamma(n+1+v)}{\Gamma(n+1)} a_0$$

Por número combinatorio tenemos

$$a_v = \begin{pmatrix} n \\ \\ v \end{pmatrix} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(n+1+v)}{2^v\Gamma\left(\frac{3}{2}+v\right)\Gamma(n+1)} a_0$$

Para obtener los polinomios de Chevyshev de cuarto tipo, tomaremos la condición

$$W(x) = a_0 y(x) \text{ y } a_0 = (2n+1) \tag{2.140}$$

$$a_0 y(x) = a_0 + a_0 \sum_{v=1}^{\infty} \begin{pmatrix} n \\ \\ v \end{pmatrix} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(n+1+v)}{2^v\Gamma\left(\frac{3}{2}+v\right)\Gamma(n+1)} (x-1)^v$$

$$a_0 y(x) = a_0 \left[1 + \sum_{v=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ \\ v \end{pmatrix} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(n+1+v)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+v\right)\Gamma(n+1)} \left(\frac{x-1}{2}\right)^v \right]$$

Reemplazando a_0

$$a_0 y(x) = (2n+1) \left[1 + \sum_{v=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ \\ v \end{pmatrix} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(n+1+v)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+v\right)\Gamma(n+1)} \left(\frac{x-1}{2}\right)^v \right]$$

$$a_0 y(x) = (2n+1) \sum_{v=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ \\ v \end{pmatrix} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(n+1+v)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+v\right)\Gamma(n+1)} \left(\frac{x-1}{2}\right)^v$$

Sacando la constante de la sumatoria

$$a_0 y(x) = (2n+1)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \sum_{v=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ \\ v \end{pmatrix} \frac{\Gamma(n+1+v)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+v\right)\Gamma(n+1)} \left(\frac{x-1}{2}\right)^v$$

Por propiedad de la función gamma en término de números combinatorios

$$W_n(x) = (2n+1)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \sum_{v=0}^{n} \frac{n!\Gamma(n+1+v)}{v!(n-v)!\Gamma\left(\frac{3}{2}+v\right)\Gamma(n+1)} \left(\frac{x-1}{2}\right)^v$$

$$W_n(x) = (2n+1)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \sum_{v=0}^{n} \frac{\Gamma(n+1+v)}{v!(n-v)!\Gamma\left(\frac{3}{2}+v\right)} \left(\frac{x-1}{2}\right)^v$$

Esta expresión representa los polinomios de cuarto tipo de Chevyshev.
Ahora utilizaremos la expresión obtenida para calcular los primeros 4 polinomios de Chevyshev de cuarto tipo.
Si $n = 0$

$$W_0(x) \quad = \quad \Gamma(3/2) \sum_{v=0}^{0} \frac{\Gamma(1+v)}{v!(-v)!\Gamma(3/2+v)} (\frac{x-1}{3})^v$$

Desarrollando la sumatoria y simplificando, tenemos que

$$W_0(x) \quad = \quad 1$$

Si $n = 1$

$$W_3(x) \quad = \quad 3\Gamma(3/2)\sum_{v=0}^{1}\frac{\Gamma(2+v)}{v!(1-v)!\Gamma(3/2+v)}(\frac{x-1}{3})^v$$

Desarrollando la sumatoria

$$W_3(x) \quad = \quad 3\Gamma(3/2)\{\frac{\Gamma(2)}{0!1!\Gamma(3/2)} + \frac{\Gamma(3)}{1!0!\Gamma(3/2+1)}(\frac{x-1}{2})\}$$

Simplificando, tenemos que

$$W_3(x) \quad = \quad 3\Gamma(3/2)\{\frac{1}{\Gamma(3/2)} + \frac{2}{3/2\Gamma(3/2)}(\frac{x-1}{2})\}$$

Aplicando distributiva llegamos a

$$W_1(x) \quad = \quad 2x + 1$$

Si $n = 2$

$$W_2(x) \quad = \quad 5\Gamma(3/2)\sum_{v=0}^{2}\frac{\Gamma(3+v)}{v!(2-v)!\Gamma(3/2+v)}(\frac{x-1}{2})^v$$

Desarrollando la sumatoria

$$W_2(x) \quad = \quad 5\Gamma(3/2)\{\frac{\Gamma(3)}{0!2!\Gamma(3/2)} + \frac{\Gamma(4)}{1!1!\Gamma(3/2+1)}(\frac{x-1}{2}) + \frac{\Gamma(5)}{2!0!\Gamma(3/2+2)}(\frac{x-1}{2})^2\}$$

Distribuyendo y simplificando los términos, tenemos

$$W_2(x) \quad = \quad 4x^2 + 2x - 1$$

Si $n = 3$

$$W_3(x) \quad = \quad 7\Gamma(3/2)\sum_{v=0}^{3}\frac{\Gamma(4+v)}{v!(3-v)!\Gamma(3/2+v)}(\frac{x-1}{2})^v$$

Desarrollando la sumatoria

$$W_3x \quad = \quad 7\Gamma(3/2)\{\frac{\Gamma(4)}{3!\Gamma(3/2)} + \frac{\Gamma(5)}{2!\Gamma(3/2+1)}(\frac{x-1}{2}) + \frac{\Gamma(6)}{2!\Gamma(3/2+2)}(\frac{x-1}{2})^2 + \frac{\Gamma(7)}{3!\Gamma(3/2+3)}($$

Simplificando tenemos que

$$W_3(x) \quad = \quad 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$$

Siguiendo ese mismo proceso obtenemos los demás polinomios, a continuación presentamos los primeros 8 polinomios

$W_0(x) = 1$
$W_1(x) = 2x + 1$
$W_2(x) = 4x^2 + 2x - 1.$
$W_3(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1.$
$W_4(x) = 16x^4 + 8x^3 - 12x^2 - 4x + 1.$
$W_5(x) = 32x^5 + 16x^4 - 32x^3 - 12x^2 + 6x + 1.$
$W_6(x) = 64x^6 + 32x^5 - 80x^4 - 32x^3 + 24x^2 + 6x - 1.$
$W_7(x) = 128x^7 + 64x^6 - 192x^5 - 80x^4 + 80x^3 + 24x^2 - 8x - 1.$
$W_8(x) = 256x^8 + 128x^7 - 448x^6 - 192x^5 + 240x^4 + 80x^3 - 40x^2 - 8x + 1.$

Obtención de los polinomios de Chevishev de cuarto tipo como proceso de Gramm-Schmidt

Siendo $w(x) = \sqrt{(1-x)/(1+x)}$, Tomamos $R_0(x) = 1, R_1(x) = x + a_{1,0}, R_2(x) = x^2 + a_{2,1}x + a_{2,0}, R_3(x) = x^3 + a_{3,2}x^2 + a_{3,1}x + a_{3,0}$, y continuando de esta manera hasta $R_n(x)$, donde las constantes o coeficientes $a_{n,m}$ son determinadas por la condición de ortogonalidad, de un polinomio dado con los restantes polinomios de grado menor al mismo, es decir:

$$\langle R_0(x), R_1(x)\rangle_w = \int_{-1}^{1} w(x)R_0(x)R_1(x)dx = \int_{-1}^{1} w(x)\left(x + a_{1,0}\right)dx = \int_{-1}^{1} xw(x)dx + a_{1,0}\int_{-1}^{1} w(x)dx = 0$$

Al resolver estas integrales tenemos que

$$\int_{-1}^{1} xw(x)dx = \int_{-1}^{1} x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \left|-\frac{\operatorname{sen}^{-1}(x) + (2-x)\sqrt{1-x^2}}{2}\right|_{-1}^{1} = -\frac{\pi}{2}$$

$$a_{1,0}\int_{-1}^{1} w(x)dx = a_{1,0}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = a_{1,0}\left(\left|\operatorname{sen}^{-1}(x) + \sqrt{1-x^2}\right|_{-1}^{1} = a_{1,0}\pi\right.$$

Por lo que: $-\pi/2 + a_{1,0}\pi = 0$, de donde tenemos que: $a_{1,0} = (\pi/2)/\pi = 1/2$, por lo que:

$$R_1(x) = x + 1/2$$

Ahora tomamos $R_2(x) = x^2 + a_{2,1}x + a_{2,0}$, donde las constantes $a_{2,1}, a_{2,0}$ se obtienen del hecho de que $R_2(x)$ es ortogonal a $R_1(x)$ y $R_0(x)$, es decir:

$$\langle R_2(x), R_1(x)\rangle_w = \int_{-1}^{1} w(x)R_2(x)R_1(x)dx = \int_{-1}^{1} w(x)\left(x^2 + a_{2,1}x + a_{2,0}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)dx = 0 \tag{2.141}$$

y

$$\langle R_2(x), R_0(x)\rangle_w = \int_{-1}^{1} w(x)R_2(x)R_0(x)dx = \int_{-1}^{1} w(x)\left(x^2 + a_{2,1}x + a_{2,0}\right)dx = 0 \tag{2.142}$$

Al resolver la primera integral, tenemos:

$$\int_{-1}^{1} w(x)\left(x^2 + a_{2,1}x + a_{2,0}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)dx = \int_{-1}^{1} x^2(x+1/2)w(x)dx + a_{2,1}\int_{-1}^{1} x(x+1/2)w(x)dx + a_{2,0}\int_{-1}^{1}\left(x + \frac{1}{2}\right)w(x)dx = 0$$

De donde:

$$\int_{-1}^{1} x^2\left(x+\frac{1}{2}\right)w(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{(1-x)/(1+x)}dx = -\pi/8$$

$$a_{2,1}\int_{-1}^{1} x\left(x+\frac{1}{2}\right)w(x)dx = a_{2,1}\int_{-1}^{1} x\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{(1-x)/(1+x)}dx = a_{2,1}\pi/4$$

$$a_{2,0}\int_{-1}^{1}\left(x+\frac{1}{2}\right)w(x)dx = a_{2,0}\int_{-1}^{1}(x+1/2)\sqrt{(1-x)/(1+x)}dx = a_{2,0}(0) = 0$$

Por lo que, al sumarlas e igualarlas a cero, tenemos la ecuación:

$$-\pi/8 + a_{2,1}\pi/4 = 0$$

Sacando π como factor común y multiplicando por 8 tenemos:

$$2a_{2,1} - 1 = 0; a_{2,1} = 1/2$$

Al resolver la segunda integral, tenemos:

$$\int_{-1}^{1} x^2 w(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2\sqrt{(1-x)/(1+x)}dx = \pi/2$$

$$a_{2,1}\int_{-1}^{1} xw(x)dx = a_{2,1}\int_{-1}^{1} x\sqrt{(1-x)/(1+x)}dx = -a_{2,1}\pi/2$$

$$a_{2,0}\int_{-1}^{1} w(x)dx = a_{2,0}\int_{-1}^{1}\sqrt{(1-x)/(1+x)}dx = a_{2,0}\pi$$

Por lo que, al sumarlas e igualarlas a cero, tenemos la ecuación:

$$\pi/2 - a_{2,1}\pi/2 + a_{2,0}\pi = 0$$

Sacando π como factor común y multiplicando por 2 tenemos:

$$2a_{2,0} - a_{2,1} + 1 = 0$$

Al resolver estas dos integrales tenemos un sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 2a_{2,0} - a_{2,1} + 1 = 0 \\ \\ 2a_{2,1} - 1 = 0 \end{pmatrix}$$

Lo cual implica que: $a_{2,0} = -1/4$ y $a_{2,1} = 1/2$. Por lo que:

$$R_2(x) = x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}.$$

2.6 Ecuación Diferencial de Legendre

Aplicacion al potencial electroestatico.Libro(metodo matematico de Aiken)

$$\left(1-x^2\right)y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \tag{2.143}$$

Solución 2.6.1 *Expresandola en la forma normal*

$$y'' + \frac{-2x}{1-x^2}y' + \frac{\lambda}{1-x^2}y = 0$$

De donde es evidente que $x_0 = 0$ es un punto ordinario. Así la solución en series de potencias está dada por (2.6), derivando la expresión se tiene

$$\left(1-x^2\right)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \lambda\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Distribuyendo

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \lambda\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Realizando un corrimiendo

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \lambda\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

tomando factor común

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n(n-1)+2n-\lambda)a_n\right]x^n = 0$$

Simplificando

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - \left(n^2+n-\lambda\right)a_n\right]x^n = 0$$

Esta expresión es cero si y sólo si

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - \left(n^2+n-\lambda\right)a_n = 0, \forall n \geq 0$$

despejando a_{n+2}, tenemos

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1)-\lambda}{(n+2)(n+1)}a_n, \forall n \geq 0 \tag{2.144}$$

De manera que la solución de (2.143) incluyendo términos pares e impares es

$$y(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n+1)-\lambda}{(n+2)(n+1)}a_n x^n \tag{2.145}$$

Ahora desarrollaremos los términos pares e impares de forma separada, así de la expresión (2.144), tenemos

Si es n es par

$$
\begin{aligned}
&n = 0\\
&a_2 = \frac{(0-\lambda)}{(2)(1)}a_0\\
&n = 2\\
&a_4 = \frac{(6-\lambda)}{(4)(3)}a_2 = \frac{(6-\lambda)(0-\lambda)}{(4)(3)(2)(1)}a_0\\
&n = 4\\
&a_6 = \frac{(20-\lambda)}{(6)(5)}a_4 = \frac{(20-\lambda)(6-\lambda)(0-\lambda)}{(6)(5)(4)(3)(2)(1)}a_0\\
&n = 6\\
&\quad a_8 = \frac{(42-\lambda)}{(8)(7)}a_6 = \frac{(42-\lambda)(20-\lambda)(6-\lambda)(0-\lambda)}{(8)(7)(6)(5)(4)(3)(2)(1)}a_0\\
&\vdots\\
&n = 2k\\
&\quad a_{2k+2} = \frac{(0-\lambda)(6-\lambda)\ldots(2k(2k+1)-\lambda)}{(2k)!}a_0 \quad k \geq 0
\end{aligned}
$$

En término de productoria podemos expresar cómo

$$
a_{2k+2} \quad = \quad \frac{\displaystyle\prod_{i=0}^{k}(2i(2i+1)-\lambda)}{(2k)!}a_0 \quad \forall k \geq 0 \tag{2.146}
$$

De igual manera tenemos, ***Si es n es impar***

$$
\begin{aligned}
&n = 1\\
&a_3 = \frac{(2-\lambda)}{(3)(2)}a_1\\
&n = 3\\
&a_5 = \frac{(12-\lambda)}{(5)(4)}a_3 = \frac{(12-\lambda)(2-\lambda)}{(5)(4)(3)(2)}a_1\\
&n = 5\\
&a_7 = \frac{(30-\lambda)}{(7)(6)}a_5 = \frac{(30-\lambda)(12-\lambda)(2-\lambda)}{(7)(6)(5)(4)(3)(2)}a_1\\
&n = 7\\
&\quad a_9 = \frac{(56-\lambda)}{(9)(8)}a_7 = \frac{(56-\lambda)(30-\lambda)(12-\lambda)(2-\lambda)}{(9)(8)(7)(6)(5)(4)(3)(2)}a_1\\
&\vdots\\
&n = 2k+1\\
&a_{2k+3} = \frac{(2-\lambda)(12-\lambda)\ldots((2k+2)(2k+1)-\lambda)}{(2k+3)!}a_1 \quad \forall k \geq 0
\end{aligned}
$$

En término de productoria

$$a_{2k+3} = \frac{\prod_{i=0}^{k}((2i+2)(2i+1)-\lambda)}{(2k+3)!}a_1 \quad \forall k \geq 0 \tag{2.147}$$

Por lo que la solución general de la ecuación de legendre dada (2.143) es

$$\begin{aligned} y(x) = a_0 &\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(0-\lambda)(6-\lambda)\cdots(2n(2n+1)-\lambda)}{(2n)!}x^{2n}\right] \\ + a_1 &\left[x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-\lambda)(12-\lambda)\cdots((2n+2)(2n+1)-\lambda)}{(2n+3)!}x^{2n+1}\right] \end{aligned} \tag{2.148}$$

Ejemplo 2.6.1. Demuestre que la segunda solución de la ecuación

Demuestre que la segunda solución de la ecuación (2.143) se puede expresar como

$$Q_n(x) = P_n(x)\int^x \frac{dt}{(1-t^2)(P_n(t))^2} \tag{2.149}$$

Solución 2.6.2 *Como la segunda solución se puede expresar como (cilarlibro de regan)*

$$y_2(x) = y_1(x)\int^x \frac{1}{(y_1(t))^2} e^{-\int^t p_1(s)ds} dt$$

con

$$P_1(s) = \frac{-2s}{1-s^2}$$

tenemos que

$$y_2(x) = P_n(x)\int \frac{1}{(P_n(x))^2} e^{-\int \frac{-2s}{1-s^2}ds} dt$$

Integrando

$$y_2(x) = P_n(x)\int^x \frac{1}{(P_n(t)^2} e^{\ln\left|\frac{1}{1-t^2}\right|} dt$$

Por propiedad de la función exponencial

$$y_2(x) = P_n(x)\int^x \frac{1}{(P_n(t))^2}\frac{1}{1-t^2}dt$$
$$y_2(x) = P_n(x)\int^x \frac{dt}{(1-t^2)(P_n(t))^2}$$

Ahora obtendremos los primeros 5 polinomios de Legendre utilizando la expresión (2.149).
Para $n = 0$, tenemos

$$Q_0(x) = P_0(x) \int^x \frac{dt}{(1-t^2)\left(P_0(t)\right)^2}$$

Reemplazando el polinomio P_0 de Legendre

$$Q_0(x) = \int^x \frac{dt}{1-t^2}$$

Ahora Aplicando fracciones parciales

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \int^x \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt$$

Intengrando

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} [\ln(x+1) - \ln(x-x)]$$

Simplificando por propiedad de los logarítmo

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{1-x} \right)$$

Tomando $n = 1$

$$Q_1(x) = P_1(x) \int^x \frac{dt}{(1-t^2)\left(P_1(t)\right)^2}$$

Sustituyendo el polinomio P_1 de Legendre

$$Q_1(x) = x \int \frac{dt}{(1-t^2)\, t^2}$$

Por fracciones parciales, tenemos

$$Q_1(x) = x \int^x \left[t^{-2} + \frac{1}{2(1+t)} + \frac{1}{2(1-t)} \right] dt$$

Integrando

$$Q_1(x) = x \left[-x^{-1} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \right]$$

$$Q_1(x) = \frac{x}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-x} \right) - 1$$

Para $n = 2$

$$Q_2(x) = P_2(x) \int^x \frac{dt}{(1-t^2)\left(P_2(t)\right)^2}$$

Reemplazando en la expresión anterior P_2 de Legendre

$$Q_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right) \int^x \frac{dt}{(1-t^2)\left(\frac{1}{2}\left(3t^2-1\right)\right)^2}$$

$$Q_2(x) = 4\left(3x^2 - 1\right) \int^x \frac{dt}{(1-t^2)\left(3t^2-1\right)^2}$$

Por fracciones parciales tenemos

$$Q_2(x) = 2\left(3x^2-1\right)\int^x \left[\frac{3}{4\left(3t^2-1\right)} + \frac{3}{2\left(3t^2-1\right)^2} + \frac{1}{8(1+t)} + \frac{1}{8(1-t)}\right] dt$$

integrando tenemos

$$Q_2(x) = \frac{1}{4}\left(3x^2-1\right)\left[\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{6x}{1-3x^2}\right]$$

$$Q_2(x) = \frac{1}{4}\left(3x^2-1\right)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{3}{2}x$$

Para $n=3$

$$Q_3(x) = P_3(x)\int^x \frac{dt}{\left(1-t^2\right)\left(P_3(t)\right)^2}$$

Reemplazando el polinomio P_3 de Legendre

$$Q_3(x) = \left(\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right)\right)\int^x \frac{dt}{\left(1-t^2\right)\left[\frac{1}{2}\left(5t^3-3t\right)\right]^2}$$

$$Q_3(x) = 2\left(5x^3-3x\right)\int^x \frac{dt}{\left(1-t^2\right)\left(5t^3-3t\right)^2}$$

Por fracciones parciales tenemos

$$Q_3(x) = 2\left(5x^3-3x\right)\int^x \left[\frac{25}{36\left(5t^2-3\right)} + \frac{1}{9t^2} + \frac{25}{6\left(5t^2-3\right)^2} + \frac{1}{8(1+t)} + \frac{1}{8(1-t)}\right] dt$$

Integrando

$$Q_3(x) = 2\left(5x^3-3x\right)\left[\frac{1}{72}\left(\frac{50x}{3-5x^2} - \frac{8}{x} + 9\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)\right]$$

Simplificando

$$Q_3(x) = \frac{1}{18}\left[8\left(3-5x^2\right) - 50x^2 - 9x\left(3-5x^2\right)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]$$

Para $n=4$, tenemos

$$Q_4(x) = P_4(x)\int^x \frac{dt}{\left(1-t^2\right)\left(P_4(t)\right)^2}$$

Sustituyendo el polinomio P_4 de Legendre

$$Q_4(x) = \frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right)\int^x \frac{dt}{\left(1-t^2\right)\left(\frac{1}{8}\left(35t^4-30t^2+3\right)\right)^2}$$

$$Q_4(x) = 8\left(35x^4-30x^2+3\right)\int^x \frac{dt}{\left(1-t^2\right)\left(35t^4-30t^2+3\right)^2}$$

Aplicando fracciones parciales, tenemos

$$Q_4(x) = 8\left(35x^4-30x^2+3\right)\int^x \left[\frac{5\left(7t^2+1\right)}{64\left(35t^4-30t^2+3\right)} + \frac{5\left(7t^2+1\right)}{8\left(35t^4-30t^2+3\right)^2} + \frac{1}{128(1+t)} + \frac{1}{128(1-t)}\right] dt$$

Integrando

$$Q_4(x) = 8\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right)\left[\frac{1}{384}\left(\frac{110x - 210x^3}{35x^4 - 30x^2 + 3} + 3\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)\right]$$

Simplificando

$$Q_4(x) = \frac{1}{48}\left[110x - 210x^3 + 3\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]$$

$Q_0(x)$	$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$
$Q_1(x)$	$\frac{x}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-x}\right) - 1$
$Q_2(x)$	$\frac{1}{4}\left(3x^2 - 1\right)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{3}{2}x$
$Q_3(x)$	$\frac{1}{18}\left[8\left(3 - 5x^2\right) - 50x^2 - 9x\left(3 - 5x^2\right)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]$
$Q_4(x)$	$\frac{1}{48}\left[110x - 210x^3 + 3\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]$

2.6.1. La fórmula de Rodrigues para los polinomios de Legendre

Los polinomios de Legendre $P_n(x)$ se pueden expresar en diferentes formas. En el siguiente teorema se demuestra la fórmula de Rodrigues.

Teorema 2.6.1: La fórmula de Rodrigues para los polinomios de Legendre

La fórmula de Rodrigues para los polinomios de Legendre $P_n(x)$ es

$$P_n(x) \quad = \quad \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2 - 1\right)^n \tag{2.150}$$

Demostración 2.6.1 *Sea* $v = \left(x^2 - 1\right)^n$*, entonces*

$$\left(x^2 - 1\right)\frac{dv}{dx} = 2nxv \tag{2.151}$$

Derivando la expresión anterior (2.151),$(n+1)$ *veces por la fórmula de Leibniz, tenemos*

$$\left(x^2 - 1\right)\frac{d^{n+2}v}{dx^{n+2}} + 2(n+1)x\frac{d^{n+1}v}{dx^{n+1}} + n(n+1)\frac{d^n v}{dx^n} = 2n\left\{x\frac{d^{n+1}v}{dx^{n+1}} + (n+1)\frac{d^n v}{dx^n}\right\}$$

La cual se puede escribir como

$$\left(1 - x^2\right)\frac{d^{n+2}v}{dx^{n+2}} - 2x\frac{d^{n+1}v}{dx^{n+1}} + n(n+1)\frac{d^n v}{dx^n} \quad = \quad 0$$

Si sustituimos $z = \dfrac{d^n v}{dx^n}$*, entonces la ecuación anterior se tranforma en*

$$\left(1 - x^2\right)\frac{d^2 z}{dx^2} - 2x\frac{dz}{dx} + n(n+1)z = 0$$

Esta ecuación obtenida es la Lengendre dada en (2.6) con $\lambda = n(n+1)$. Por lo que es necesario que

$$z = \frac{d^n v}{dx^n} = cP_n(x)$$

donde c es una constante. Como sabemos que $P_n(1) = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} c = \left(\frac{d^n v}{dx^n}\right)_{x=1} &= \frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n\Big|_{x=1} = \frac{d^n}{dx^n}(x-1)^n(x+1)^n\Big|_{x=1} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ \\ k \end{pmatrix}\frac{n!}{(n-k)!}(x-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}(x+1)^k\Bigg|_{x=1} = 2^n n! \end{aligned}$$

Por lo tanto, se sigue que

$$P_n(x) = \frac{1}{c}\frac{d^n v}{dx^n} = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n$$

Ahora obtendremos los 6 primeros polinomios de Legendre utilizando la fórmula de Rodrigues, demostrada en el teorema anterior

Ejemplo 2.6.2. Utiliza la fórmula de Rodrigues de los polinomios de Legendre

Utiliza la fórmula de Rodrigues de los polinomios de Legendre para calcular los primeros 6 polinomios.

Solución 2.6.3 *Para el caso de $n = 0$*

$$\begin{aligned} P_0(x) &= \frac{1}{2^0 0!}\frac{d^{(0)}}{dx^{(0)}}\left(x^2-1\right)^0 \\ &= 1(1) \\ P_0(x) &= 1 \end{aligned}$$

para el caso de $n = 1$

$$P_1(x) = \frac{1}{2^1 1!}\frac{d}{dx}\left(x^2-1\right)$$

Realizando la derivada

$$P_1(x) = \frac{1}{2}(2x)$$

Simplificando

$$P_1(x) = x$$

para el caso de $n = 2$

$$P_2(x) = \frac{1}{2^2 2!}\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2-1\right)^2$$

Realizando la derivada

$$P_2(x) = \frac{1}{8}\left(4\left(3x^2-1\right)\right)$$

Simplificando

$$P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)$$

Para el caso de $n = 3$

$$P_3(x) = \frac{1}{2^3 3!}\frac{d^3}{dx^3}\left(x^2 - 1\right)^3$$

Derivando

$$P_3(x) = \frac{1}{48}\left(24\left(10x^3 - 3x\right)\right)$$

Simplificando

$$P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)$$

Para el caso de $n = 4$

$$P_4(x) = \frac{1}{2^4 4!}\frac{d^4}{dx^4}\left(x^2 - 1\right)^4$$

Derivando obtenemos

$$P_4(x) = \frac{1}{384}\left(48\left(35x^4 - 30x^3 + 3\right)\right)$$

Simplificando

$$P_4(x) = \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^3 + 3\right)$$

Para el caso de $n = 5$

$$P_5(x) = \frac{1}{2^5 5!}\frac{d^5}{dx^5}\left(x^2 - 1\right)^5$$

Derivando

$$P_5(x) = \frac{480}{3840}\left(63x^5 - 70x^3 + 15x\right)$$

Simplificando

$$P_5(x) = \frac{1}{8}\left(63x^5 - 70x^3 + 15x\right)$$

2.6.2. Función generadora de los polinomios de Legendre

Proposición 2.6.1: La función generadora de los polinomios de Legendre

La función generadora de los polinomios de Legendre está dada por la expresión

$$H(x,r) = \left(1 - 2xr + r^2\right)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) r^n \qquad (2.152)$$

Demostración 2.6.2 *Si* $|x| \leq k$ *donde* k *es arbitrario, y* $|r| < \left(1+k^2\right)^{\frac{1}{2}} - k$, *entonces se tiene por la desigualdad triangular*

$$\left|2xr - r^2\right| \leq 2|x||r| + \left|r^2\right|$$

Por las suposiciones

$$\left|2x \cdot r - r^2\right| < 2k\left[\left(1+k^2\right)^{\frac{1}{2}} - k\right] + \left[\left(1+k^2\right)^{\frac{1}{2}} - k\right]^2$$

Simplificando el lado derecho de la desigualdad

$$\left|2xr - r^2\right| < 2k\left(1+k^2\right)^{\frac{1}{2}} - 2k^2 + \left(1+k^2\right) - 2k\left(1+k^2\right)^{1/2} + k^2$$

Reduciendo términos semejantes

$$\left|2xr - r^2\right| < 1 \quad (r) \tag{2.153}$$

Con el resultado obtenido en (2.153) podemos expresar $\left(1 - 2xr + r^2\right)^{-1/2}$ *en serie de potencias obteniendo*

$$\begin{aligned}[1 - r(2x-r)]^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}r(2x-r) + \frac{1}{2}\frac{3}{4}r^2(2x-r)^2 + \cdots \\ &+ \frac{(1)(3)\cdots(2n-1)}{(2)(4)\cdots(2n)}r^n(2x-r)^n + \cdots\end{aligned}$$

El coeficiente de r^n *en esta expansión es*

$$\begin{aligned}&\frac{(1)(3)\cdots(2n-1)}{(2)(4)\cdots(2n)}(2x)^n - \frac{(1)(3)\cdots(2n-3)(n-1)}{(2)(4)\cdots(2n-2)1!}(2x)^{n-2} \\ &+ \frac{(1)(3)\cdots(2n-5)(n-2)(n-3)}{(2)(4)\cdots(2n-4)2!}(2x)^{n-4}\cdots\cdots\end{aligned}$$

Simplificando se tiene

$$\frac{(1)(3)\cdots(2n-1)}{n!}\left[x^n - \frac{n(n-1)x^{n-2}}{(2n-1)(1)(2)} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}}{(2n-1)(2n-3)(2)(4)} - \cdots\right.$$

Por lo tanto

$$[1 - r(2x-r)]^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) r^n$$

2.6.3. Relación de recurrencia de los polinomios de Legendre

Proposición 2.6.2: Relación de recurrencia de los polinomios de Legendre

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$,

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \tag{2.154}$$

Demostración 2.6.3 *Iniciamos derivando la función generatriz de los polinomios de Legendre dada en (2.152) con respecto a r :*

$$\frac{\partial H(x,r)}{\partial r} = -\frac{1}{2}\left(1-2xr+r^2\right)^{-3/2}(-2x+2r) = \frac{x-r}{(1-2xr+r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Se puede verificar que

$$\left(1-2xr+r^2\right)\frac{\partial H(x,r)}{\partial r} - (x-r)H(x,r) = 0$$

Ahora sustituyendo (2.152) en la ecuación anterior

$$\left(1-2xr+r^2\right)\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)r^{n-1} - (x-r)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)r^n = 0$$

Realizando la multiplicación anterior, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)r^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} 2nxP_n(x)r^n + \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)r^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} xP_n(x)r^n + \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)r^{n+1} = 0$$

Reorganizando las series para tener igual potencia de r en cada suma :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)r^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2nxP_n(x)r^n + \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)P_{n-1}(x)r^n$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty} xP_n(x)r^n + \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}(x)r^n = 0.$$

Escribiendo los primeros dos términos, para que las sumatorias inicien en dos, tenemos lo siguiente

$$P_1(x) + 2P_2(x)r - 2xP_1(x)r - xP_0(x) - xP_1(x)r + P_0(x)r$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+1)P_{n+1}(x) - 2nxP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x) - xP_n(x) + P_{n-1}(x)\right]r^n = 0.$$

Para que la serie de potencia en r sea cero para todo valor de r en algún intervalo alrededor de 0*, los coeficientes de* r^n *deben ser cero para* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *entonces*

$$P_1(x) - xP_0(x) = 0,$$

$$2P_2(x) - 2xP_1(x) - xP_1(x) + P_0(x) = 0$$

y para $n = 2, 3, \ldots,$

$$(n+1)P_{n+1}(x) - 2nxP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x) - xP_n(x) + P_{n-1}(x) = 0$$

Esto es

$$P_1(x) = xP_0(x)$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3xP_1(x) - P_0(x)\right)$$

y, para $n = 2, 3, \ldots,$

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \quad (3)$$

Como esta ecuación también es válida para $n = 1$*, establece la relación recursiva para todo entero positivo.*

2.6.4. Polinomios asociados de Legendre

Definición 2.6.1: La ecuación diferencial de Legendre

La ecuación diferencial de Legendre está dada por la expresión

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y \quad = \quad 0 \qquad (2.155)$$

cuando m y n son enteros no negativos, la solución general es

$$y(x) \quad = \quad AP_n^m(x)+BQ_n^m(x) \qquad (2.156)$$

donde $P_n^m(x)$ y $Q_n^m(x)$ se llaman funciones asociada de Legendre de primer y segundo tipo respectivamente.

A continuación se resolverá la ecuación asociada de Legendre dada en (2.155)

Solución 2.6.4 *tomando la sustitución*

$$y \quad = \quad \left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}u \qquad (2.157)$$

Calculando la primera derivada y simplificando

$$y' \quad = \quad -mx\left(1-x^2\right)^{\frac{m-2}{2}}u+\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}$$

Tomando factor común

$$y' \quad = \quad \left(1-x^2\right)^{\frac{m-2}{2}}\left[\left(1-x^2\right)u'-mxu\right] \qquad (2.158)$$

De igual manera para la segunda derivada

$$y''=-\left[\left(1-x^2\right)^{\frac{m-2}{2}}u+\left(\frac{m-2}{2}\right)\left(-2x^2\right)\left(1-x^2\right)^{\frac{m-4}{2}}u+x\left(1-x^2\right)^{\frac{m-2}{2}}u'\right]$$
$$+u''\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}-2x\left(\frac{m}{2}\right)u'\left(1-x^2\right)^{\frac{m-2}{2}}$$

Simplificando la expresión anterior

$$y'' \quad = \quad \left(1-x^2\right)^{\frac{m-4}{2}}\left[\left(1-x^2\right)^2u''-2mx\left(1-x^2\right)u'+\left(m(m-2)x^2-m\left(1-x^2\right)\right)u\right] \qquad (2.159)$$

Reemplazando (2.157),(2.158),(2.159) en (2.155) y tomando factor común

$$\left(1-x^2\right)^{\frac{m-2}{2}}\left[\left(1-x^2\right)^2u''-2mx(1-x^2)u'+\left(m(m-2)x^2-m(1-x^2)\right)u-2x\left(1-x^2\right)u'\right.$$
$$\left.+2mx^2u-m^2u+n(n+1)(1-x^2)u\right]=0$$

Simplificando nueva vez

$$\left(1-x^2\right)^2 u'' - 2x(m+1)\left(1-x^2\right)u' + (n(n+1)-m(m+1))\left(1-x^2\right)u \quad = \quad 0$$

La expresión anterior es equivalente a

$$\left(1-x^2\right)u'' - 2x(m+1)u' + (n(n+1)-m(m+1))u = 0 \qquad (2.160)$$

Podemos ver que si $m=0$ en la expresion (2.160), obtenemos la ecuación de Legendre. Ahora resolveremos la ecuacion (2.160) por serie entorno al punto $x_0=0$, por lo que la solución es de la forma (2.6). Derivando y reemplazando las derivadas en (2.155), tenemos

$$\left(1-x^2\right)\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k u^{k-2} - 2x(m+1)\sum_{k=0}^{\infty} k a_k u^{k-1}$$
$$+(n(n+1)-m(m+1))\sum_{k=0}^{\infty} a_k u^k = 0$$

Por distributiva

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k u^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k u^k - 2(m+1)\sum_{k=0}^{\infty} k a_k u^k$$
$$+(n(n+1)-m(m+1))\sum_{k=0}^{\infty} a_k u^k = 0$$

Redefiniendo el índice de la primera sumatoria

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}u^k - \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k u^k$$
$$-2(m+1)\sum_{k=0}^{\infty} k a_k u^k + (n(n+1)-m(m+1))\sum_{k=0}^{\infty} a_k u^k = 0$$

Se puede notar que la sumatoria anterior son semejantes, realizando las operaciones indicadas

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)a_{k+2} + (n(n+1)-m(m+1)-2(m+1)k-k(k-1))a_k\right]u^k = 0$$

Igualando a cero los coeficientes.

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} + (n(n+1)-m(m+1)-2(m+1)k-k(k-1))a_k = 0$$

tomando factor común para simplificar

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} + (n(n+1)-m(m+1)-k(2m+k+1))a_k \quad = \quad 0$$

$$a_{k+2} \quad = \quad \frac{k(2m+k+1)+m(m+1)-n(n+1)}{(k+2)(k+1)}a_k \quad \forall k \geq 0 \quad (2.161)$$

Ahora la expresión (2.161) se desarrollará para términos pares e impares. Para el caso de los pares tenemos

$k = 0$

$$a_2 = \frac{m(m+1) - n(n+1)}{(2)(1)} a_0$$

$k = 2$

$$a_4 = \frac{2(2m+3) + m(m+1) - n(n+1)}{(4)(3)} a_2$$

$$a_4 = \frac{(2(2m+3) + m(m+1) - n(n+1))(m(m+1) - n(n+1))}{(4)(3)(2)(1)} a_0$$

$k = 4$

$$a_6 = \frac{4(2m+5) + m(m+1) - n(n+1)}{(6)(5)} a_4$$

$$a_6 = \frac{(4(2m+5) + m(m+1) - n(n+1))(2(2m+3) + m(m+1) - n(n+1))}{(6)(5)(4)(3)(2)(1)} a_0$$

Siguiendo este proceso obtenemos

$$a_{2k} = \frac{(m(m+1) - n(n+1)) \cdots (2(k-1)(2m+2k-1) + m(m+1) - n(n+1))}{(2k)!} a_0$$

Ahora realizaremos el mismo proceso para el caso impar.

$k = 1$

$$a_3 = \frac{(1)(2m+2) + m(m+1) - n(n+1)}{(3)(2)} a_1$$

$k = 3$

$$a_5 = \frac{3(2m+4) + m(m+1) - n(n+1)}{(5)(4)} a_3$$

$$a_5 = \frac{((2m+2) + m(m+1) - n(n+1))(3(2m+4) + m(m+1) - n(n+1))}{(5)(4)(3)(2)} a_1$$

$k = 5$

$$a_7 = \frac{5(2m+6) + m(m+1) - n(n+1)}{(7)(6)} a_5$$

$$a_7 = \frac{((2m+2) + m(m+1) - n(n+1))(3(2m+4) + m(m+1) - n(n+1))5(2m+6) + m(m+1) - n(n+1)}{(7)(6)(5)(4)(3)(2)} a_1$$

De manera general tenemos para los coeficientes impares

$$a_{2k+1} = \frac{((2m+2) + m(m+1) - n(n+1)) \cdots ((2k-1)(2m+2k) + m(m+1) - n(n+1)}{(2k+1)!} a_1$$

Ejemplos de polinomios asociados de Legendre
citar sabemos que los polinomios de Legendre y Legendre asociados están relacionados mediante la fórmula

$$P_n^m(t) = \left(1 - t^2\right)^{\frac{m}{2}} D^m P_n(t)$$

Así, los primeros polinomios asociados de legendre, con $t = \cos\theta$, son:

$P_n^0(t) = \left(1-t^2\right)^{\frac{0}{2}} D^0 P_n(t) = P_n(t).$

$P_0^0(t) = P_1(t) = 1.$

$P_1^0(t) = P_1(t) = t = \cos\theta.$

$P_1^1(t) = \left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}} \dfrac{d}{dx} P_1(t) = \left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}} \dfrac{d}{dt} t = \left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}} = \operatorname{sen}\theta.$

$P_2^0(t) = P_2(t) = \dfrac{1}{2}\left(3t^2-1\right) = \dfrac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right).$

$P_2^1(t) = \left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}} \dfrac{d}{dx} P_2(t) = \left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}\left(3t^2-1\right)\right) = 3t\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}} = 3\cos\theta\operatorname{sen}\theta.$

$P_2^2(t) = \left(1-t^2\right)^{\frac{2}{2}} \dfrac{d^2}{dx^2} P_2(t) = \left(1-t^2\right) \dfrac{d^2}{dt^2}\left(\dfrac{1}{2}\left(3t^2-1\right)\right) = 3\left(1-t^2\right) = 3\operatorname{sen}^2\theta.$

$P_3^0(t) = P_3(t) = \dfrac{1}{2}\left(5t^3-3t\right) = \dfrac{1}{2}\left(5\cos^3\theta - 3\cos\theta\right)$

$P_3^1(t) = \left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}} \dfrac{d}{dx} P_3(t) = \left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}} \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{2}\left(5t^3-3t\right)\right) = \dfrac{3}{2}\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(5t^2-1\right)$

$= \dfrac{3}{2}\operatorname{sen}\theta\left(5\cos^2\theta - 1\right).$

$P_3^2(t) = \left(1-t^2\right)^{\frac{2}{2}} \dfrac{d^2}{dx^2} P_3(t) = \left(1-t^2\right) \dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{1}{2}\left(5t^3-3t\right)\right) = 15t\left(1-t^2\right) = 15\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta.$

$P_3^3(t) = \left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}} \dfrac{d^3}{dx^3} P_3(t) = \left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}} \dfrac{d^3}{dx^3}\left(\dfrac{1}{2}\left(5t^3-3t\right)\right) = 15\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}} = 15\operatorname{sen}^3\theta.$

2.6.5. Propiedades de los polinomios de Legendre

Proposición 2.6.3: Sin nombre

$$\left(1-x^2\right)P_n'(x) = (n+1)xP_n(x) - (n+1)P_{n+1}(x)$$

Demostración 2.6.4 *We can also obtain a recurrence formula involving P_n' by differentiating $H(x,r)$ with respect to x. This gives*

$$\frac{\partial H(x,r)}{\partial x} = \frac{r}{\left(1-2xr+r^2\right)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x) r^n,$$

By explicit differentiation of $H(x,r)$ it is seen that $\left(1-2xr+r^2\right)\frac{\partial H}{\partial x} = rH(x,r)$, or

$$\left(1-2xr+r^2\right)\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)r^n - r\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)r^n = 0.$$

As before, the coefficient of each power of r is set to zero and we obtain

$$P_{n+1}'(x) + P_{n-1}'(x) = 2xP_n'(x) + P_n(x), \quad n = 1, 2, 3\ldots \quad (4).$$

Differentiating Eq. (3), we get:

$$(n+1)P_{n+1}'(x) - (2n+1)P_n(x) - (2n+1)xP_n'(x) + nP_{n-1}'(x) = 0 \quad (5).$$

Proposición 2.6.4: From the Rodrigues formula for the Legendre polynomials

From the Rodrigues formula for the Legendre polynomials, obtain the expression for them in summation form

Demostración 2.6.5 *To remember an expression for the Legendre polynomials is Rodrigues' form:*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]^{(n)}$$

To see why this equals the form you give, see the derivation below.

$$\begin{aligned}
P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]^{(n)} &= \frac{1}{2^n n!}\left[\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\left(x^2\right)^{n-k}\cdot(-1)^k\right]^{(n)} \\
&= \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}\left[x^{2n-2k}\right]^{(n)} \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!(n-k)!}\cdot(2n-2k)(2n-2k-1)\ldots(n-2k+1)x^{n-2k} \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!}x^{n-2k} \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}
\end{aligned}$$

Using Rodrigues' from, we can further derive that

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!}\left[(x+1)^n\cdot(x-1)^n\right]^{(n)} \\
&= \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\left[(x+1)^n\right]^{(k)}\cdot\left[(x-1)^n\right]^{(n-k)} \\
&= \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\frac{n!}{(n-k)!}(x+1)^{n-k}\cdot\frac{n!}{k!}(x-1)^k \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}^2(x+1)^{n-k}(x-1)^k
\end{aligned}$$

so

$$P_{2n}(0) = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2n}\begin{pmatrix} 2n \\ k \end{pmatrix}^2(-1)^k = \frac{1}{2^{2n}}\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}(-1)^n = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}n!^2}$$

2.6.6. Funciones de Legendre de segundo tipo

2.7 Ecuación de Gegenbauer. Polinomios de Gegenbauer.

Ecuación de Gegenbauer:

$$(1-t^2)\,y''(t)-(2\lambda+1)t\,y'(t)+n(n+2\lambda)\,y(t)=0. \tag{2.162}$$

Solución:
Expresando la ecuación de Gegenbauer en la forma estandar tenemos:

$$y''(t)+\frac{-(2\lambda+1)t}{1-t^2}y'(t)+\frac{n(n+2\lambda)}{1-t^2}y(t)=0,$$

de donde $P(t)=\dfrac{-(2\lambda+1)t}{1-t^2}$ y $Q(t)=\dfrac{n(n+2\lambda)}{1-t^2}$. Nótese que las funciones P(t) y Q(t) son analíticas en el punto $t_0=0,$ por tanto el punto $t_0=0,$ es un punto ordinario de la ecuación diferencial (2.162). Esto implica, por el teorema (2.1.1) que (2.162) admite una solución de la forma $y(t)=\sum_{m=0}^{\infty}c_m(t-t_0)^m$. Ahora, sea

$$y(t)=\sum_{m=0}^{\infty}c_mt^m,\ \text{con}\, c_0\neq 0\,\text{solución de}\,(2.162). \tag{2.163}$$

Entonces, derivando (2.163) se obtiene:

$$y'(t)=\sum_{m=1}^{\infty}mc_mt^{m-1}\ (*)\ \text{y}\ y''(t)=\sum_{m=2}^{\infty}m(m-1)c_mt^{m-2}\ (**).$$

Luego, sustituyendo(2.163), $(*)$ y$(**)$ en (2.162) se obtiene:

$$(1-t^2)\left(\sum_{m=2}^{\infty}m(m-1)c_mt^{m-2}\right)-(2\lambda+1)t\left(\sum_{m=1}^{\infty}mc_mt^{m-1}\right)+n(n+2\lambda)\left(\sum_{m=0}^{\infty}c_mt^m\right)=0$$

$$\Rightarrow \sum_{m=2}^{\infty}m(m-1)c_mt^{m-2}-\sum_{m=2}^{\infty}m(m-1)c_mt^m-(2\lambda+1)\left(\sum_{m=1}^{\infty}mc_mt^m\right)+$$
$$n(n+2\lambda)\left(\sum_{m=0}^{\infty}c_mt^m\right)=0$$

Ahora, con $m\to m+2$ y $m\to m+1$ respectivamente obtenemos:

$$\Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)c_{m+2}t^m-\sum_{m=2}^{\infty}m(m-1)c_mt^m-(2\lambda+1)\left(\sum_{m=1}^{\infty}mc_mt^m\right)+$$
$$n(n+2\lambda)\left(\sum_{m=0}^{\infty}c_mt^m\right)=0$$

Luego, tomando $m=0$ y $m=1$ se tiene:

$$\Rightarrow 2c_2+6c_3t+\sum_{m=2}^{\infty}(m+2)(m+1)c_{m+2}t^m-\sum_{m=2}^{\infty}m(m-1)c_mt^m-(2\lambda+1)c_1t$$

$$-(2\lambda+1)\left(\sum_{m=2}^{\infty} mc_m t^m\right) + n(n+2\lambda)c_0 + n(n+2\lambda)c_1 t + n(n+2\lambda)\left(\sum_{m=2}^{\infty} c_m t^m\right) = 0$$

Simplificando:

$$\Rightarrow (2c_2 + n(n+2\lambda)c_0) + (6c_3 - (2\lambda+1)c_1 + n(n+2\lambda)c_1)\, t$$
$$+ \left[\sum_{m=2}^{\infty}(m+2)(m+1)c_{m+2} - (m(m-1) - (2\lambda+1)m - n(n+2\lambda))\, c_m\right] t^m = 0.$$

$$\Rightarrow (2c_2 + n(n+2\lambda)c_0) + (6c_3 + (n-1)(n+2\lambda+1)c_1)\, t$$
$$+ \left[\sum_{m=2}^{\infty}(m+2)(m+1)c_{m+2} + ((n-m)(n+m+2\lambda))\, c_m\right] t^m = 0.$$

Luego, como $t^m \neq 0$, $\forall m$, se tiene:

$$\Rightarrow \begin{cases} 2c_2 + n(n+2\lambda)c_0 = 0 \\ 6c_3 + (n-1)(n+2\lambda+1)c_1 = 0 \\ (m+2)(m+1)c_{m+2} - ((n-m)(n+m+2\lambda))\, c_m = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_2 = -\frac{n(n+2\lambda)c_0}{2} \\ c_3 = -\frac{(n-1)(n+2\lambda+1)c_1}{6} \\ c_{m+2} = -\frac{((n-m)(n+m+2\lambda))c_m}{(m+2)(m+1)} \qquad \forall m \in N/m \geq 0 \end{cases}$$

Así la relación de recurencia está dada por la expresión:

$$c_{m+2} = -\frac{(n-m)(n+m+2\lambda)c_m}{(m+2)(m+1)},\ \forall m \in N/m \geq 0 \tag{2.164}$$

Ahora dándole valores pares a m, de (2.164) se obtiene:

$$Si\, m = 0 \Rightarrow c_2 = -\frac{n(n+2\lambda)c_0}{2}.$$
$$Si\, m = 2 \Rightarrow c_4 = -\frac{(n+2+2\lambda))(n-2)}{4\cdot(3)}c_2 = \frac{(n+2\lambda+2)(n+2\lambda)n(n-2)}{4\cdot 3\cdot 2}c_0.$$
$$Si\, m = 4 \Rightarrow c_6 = -\frac{(n+4+2\lambda)(n-4)}{6\cdot 5}c_4$$
$$c_6 = -\frac{(n+2\lambda+4)(n+2\lambda+2)(n+2\lambda)n(n-2)(n-4)}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}c_0.$$
$$\vdots$$

$$\Rightarrow c_{2m} = (-1)^m \frac{(n+2\lambda+2m)(n+2\lambda+2m-2)\cdots(n+2\lambda)n(n-2)\cdots(n-2m+2)}{(2m)!}c_0.$$

Luego, $(n+2\lambda+2m)\cdots(n+2\lambda+4)(n+2\lambda+2)(n+2\lambda) = \prod_{k=0}^{m}(n+2k+2\lambda) = 2^m \prod_{k=0}^{m}(\frac{n}{2}+k+\lambda)$.

$\Rightarrow$ Luego, $(n+2\lambda+2m)\cdots(n+2\lambda+4)(n+2\lambda+2)(n+2\lambda) = 2^m \dfrac{\Gamma(\frac{n}{2}+m+\lambda)}{\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{1}{2})}$,

$$y\,n(n-2)(n-4)\cdots(n-2m+2) = \prod_{k=0}^{m}(n-2k+2) = 2^m \prod_{k=0}^{m}(\frac{n}{2}-k+1) = 2^m \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(\frac{n}{2}-m+1)}.$$

$$\text{As'i, } c_{2m} = \frac{(-1)^m}{(2m)!} 2^m \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+m+\lambda)}{\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{1}{2})} 2^m \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(\frac{n}{2}-m+1)} c_0.$$

$$\Rightarrow c_{2m} = (-1)^m \frac{2^{2m}\Gamma(\frac{n}{2}+1)\Gamma(\frac{n}{2}+m+\lambda)}{(2m)!\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2}-m+1)} c_0. \tag{2.165}$$

Ahora dándole valores impares a m, de (2.164) se obtiene:

$$Si\, m = 1 \Rightarrow c_3 = -\frac{(n+2\lambda+1)(n-1)}{3\cdot 2} c_1.$$

$$Si\, m = 3 \Rightarrow c_5 = -\frac{(n+2\lambda+3)(n-3)}{5\cdot(4)} c_3 = \frac{(n+2\lambda+3)(n+2\lambda+1)(n-1)(n-3)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} c_1.$$

$$Si\, m = 5 \Rightarrow c_7 = -\frac{(n+2\lambda+5)(n-5)}{7\cdot 6} c_5.$$

$$c_7 = -\frac{(n+2\lambda+5)(n+2\lambda+3)(n+2\lambda+1)(n-1)(n-3)(n-5)}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} c_1.$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow c_{2m+1} = (-1)^m \frac{(n+2\lambda+2m+1)\cdots(n+2\lambda+1)(n-1)(n-3)\cdots(n-2m+1)}{(2m+1)!} c_1.$$

$$Luego,\ (n+2\lambda+2m+1)(n+2\lambda+2m-1)\cdots(n+2\lambda+1) = \prod_{k=0}^{m}(n+2\lambda+2k+1)$$

$$= 2^m \prod_{k=0}^{m}(\frac{n}{2}+\lambda+k+\frac{1}{2}) = 2^m \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+\lambda+m+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+\lambda+\frac{1}{2})},$$

$$\text{y } (n-1)(n-3)\cdots(n-2m+1) = \prod_{k=0}^{m}(n-2k+1) = 2^m \prod_{k=0}^{m}(\frac{n}{2}-k+\frac{1}{2}) = 2^m \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}-m+\frac{1}{2})}.$$

Así,

$$c_{2m+1} = \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} 2^m \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+\lambda+m+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+\lambda+\frac{1}{2})} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}-m+\frac{1}{2})} c_1.$$

$$\Rightarrow c_{2m+1} = (-1)^m \frac{2^{2m+1}\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2}+\lambda+m+\frac{1}{2})}{2\cdot(2m+1)!\Gamma(\frac{n}{2}+\lambda+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2}-m+\frac{1}{2})} c_1. \tag{2.166}$$

Así, con las sustituciones de (2.165) y (2.166) en la expresi'on $y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$, *con* $c_0 \neq 0$, obtenemos la *soluci'on general* de (2.162):

$$y(x) = c_0 x^0 \left(1 - \frac{n(n+2\lambda)}{2!}x^2 + \frac{(n+2\lambda+2)(n+2\lambda)n(n-2)}{4!}x^4 - \cdots\right)$$
$$+ c_1 \left(x - \frac{(n+2\lambda+1)(n-1)}{3!}x^3 + \frac{(n+2\lambda+3)(n+2\lambda+1)(n-1)(n-3)}{5!}x^5 - \cdots\right)$$

$$\Rightarrow y(x) = c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x) = c_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{2^{2m}\Gamma(\frac{n}{2}+1)\Gamma(\frac{n}{2}+m+\lambda)}{(2m)!\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2}-m+1)} x^{2m} +$$

$$c_1 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{2^{2m+1}\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2}+\lambda+m+\frac{1}{2})}{2\cdot(2m+1)!\Gamma(\frac{n}{2}+\lambda+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2}-m+\frac{1}{2})} x^{2m+1}. \tag{2.167}$$

Finalmente, para obtener los polinomios de Gegenbauer, tomamos la constante de normalización

$$c_n = \frac{(2\lambda + 2n - 1)!(\lambda - \frac{1}{2})!}{2^n(n!)(2\lambda - 1)!(\lambda + n - \frac{1}{2})!},$$

e iniciamos un proceso regresivo a partir de la fórmula de recurrencia (2.164)

$$c_{m+2} = -\frac{(n-m)(n+m+2\lambda)c_m}{(m+2)(m+1)}, \forall m \in N/m \geq 0$$

Ahora, despejando a c_m de (2.164) se obtiene:

$$c_m = -\frac{(m+2)(m+1)}{(n-m)(n+m+2\lambda)}c_{m+2}, \forall m \in N/m \leq n+2. \tag{2.168}$$

Luego, con $m \to n-2$ en (2.168) y sustituyendo la constante de normalización se obtiene:

$$c_{n-2} = -\frac{n(m-1)}{2(2n+2\lambda-2)}c_n = -\frac{n(m-1)}{2(2n+2\lambda-2)}\frac{(2\lambda+2n-1)!(\lambda-\frac{1}{2})!}{2^n(n!)(2\lambda-1)!(\lambda+n-\frac{1}{2})!}.$$

Simplificando:

$$c_{n-2} = -\frac{(2n+2\lambda-3)!}{2^n(n-2)!(\lambda+n-\frac{3}{2})!}\frac{(\lambda-\frac{1}{2})!}{(2\lambda-1)!}. \tag{2.169}$$

De igual forma, tomando $m \to n-4$ en (2.168) y sustituyendo (2.169) respectivamente, se obtiene:

$$c_{n-4} = -\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n+2\lambda-4)}c_{n-2} = -\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n+2\lambda-4)}\left(-\frac{(2n+2\lambda-3)!}{2^n(n-2)!(\lambda+n-\frac{3}{2})!}\frac{(\lambda-\frac{1}{2})!}{(2\lambda-1)!}\right).$$

Reduciendo:

$$c_{n-4} = \frac{(2n+2\lambda-5)!}{2\cdot 2^n(n-4)!(\lambda+n-\frac{5}{2})!}\frac{(\lambda-\frac{1}{2})!}{(2\lambda-1)!}. \tag{2.170}$$

Siguiendo este proceso de manera iterativa llegamos a la expresión:

$$c_{n-2m} = (-1)^m\frac{(2n+2\lambda-2m-1)!}{m!\cdot 2^n(n-2m)!(\lambda+n-m-\frac{1}{2})!}\frac{(\lambda-\frac{1}{2})!}{(2\lambda-1)!.} \tag{2.171}$$

Coeficientes de los polinomios de Gegenbauer.
Luego, aplicando la fórmula de duplicación de Legendre *(ver ap'endice A, propiedad (6))*, se tienen las siguientes equivalencias que sustituieremos en la expresión anterior para reescribir los coeficientes de los polinomios de Gengenbauer:

$$(2n+2\lambda-2m-1)! = \Gamma(2\cdot(n+\lambda-m)) = \frac{2^{2(n+\lambda-m)-1}\Gamma(n+\lambda-m)\cdot\Gamma(n+\lambda-m+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})},$$

$$\text{y } (2\lambda-1)! = \Gamma(2\cdot(\lambda)) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2^{2(\lambda)-1}\Gamma(\lambda)\cdot\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}.$$

$$\Rightarrow c_{n-2m} = \frac{(-1)^m\Gamma(n+\lambda-m)\cdot 2^{n-2m}}{\Gamma(\lambda)m!\cdot(n-2m)!}. \tag{2.172}$$

Finalmente, sustituyendo (2.172) en (2.163) $y(t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m t^m$ se concluye:

$$y(t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m t^m = \sum_{m=0}^{M} c_{n-2m} t^{n-2m} = \sum_{m=0}^{M} \frac{(-1)^m \Gamma(n+\lambda-m)}{\Gamma(\lambda) m! \cdot (n-2m)!} (2t)^{n-2m};$$

donde $M = \frac{n}{2}$ si n es par y $M = \frac{n-1}{2}$ si n es impar $\Rightarrow M = [\frac{n}{2}]$ (Función mayor entero de $\frac{n}{2}$).

$$\Rightarrow C_n^{(\lambda)}(t) = \sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^m \Gamma(n+\lambda-m)}{\Gamma(\lambda) m! \cdot (n-2m)!} (2t)^{n-2m}. \textbf{ Polinomios de Gegenbauer.} \tag{2.173}$$

2.8 Relación de los polinomios ortogonales clásicos

2.8.1. Relación de los polinomios de Hermite con los de Laguerre

$$H_{2m}(x) = (-1)^m 2^{2m} m! L_m^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\left(x^2\right), \quad H_{2m+1}(x) = (-1)^m 2^{2m+1} m! x L_m^{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(x^2\right) \tag{2.174}$$

2.9 Ecuación diferencial de Bessel

Resorte envejecido y otras aplicaciones La ecuación diferencial de Bessel se define por

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - a^2\right) y = 0 \tag{2.175}$$

Expresando 2.175 a su forma normal, tenemos

$$y'' + \frac{x}{x^2} y' + \frac{x^2 - a^2}{x^2} y = 0$$
$$p_1(x) = \frac{1}{x} \quad p_2(x) = \frac{x^2 - a^2}{x^2}$$
$$p(x) = x p_1(x) = 1 \quad \text{y} \quad x^2 p_2(x) = x^2 - a^2 = q(x)$$

de donde $x_0 = 0$ es un punto singular regular, por lo tanto existe una solución dada 2.19.
De 2.23 tenemos

$$r(r-1) + r + \left(-a^2\right) = 0$$
$$r^2 - r + r - a^2 = 0$$
$$r^2 - a^2 = 0$$
$$(r-a)(r+a) = 0$$
$$r = a \quad r_a = -a$$

Calculando las derivadas

$$y(x) = x^a \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m, C_0 \neq 0$$
$$y'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (a+m) C_m x^{m+a-1}$$
$$y''(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+a)(m+a-1) C_m x^{m+a-2}$$

Reemplazando las derivadas

$$x^2 y'' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+a)(m+a-1) c_m x^{m+a}$$
$$+$$
$$xy' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+a) c_m x^{m+a}$$
$$x^2 y'' + xy' = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (m+a)^2 x^{m+a}$$

Desarrollando 2.175

$$\begin{aligned} x^2 y'' + xy' + x^2 y - a^2 y &= 0 \\ \sum_{m=0}^{\infty} c_m (m+a)^2 x^{m+a} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+a+2} - \sum_{m=0}^{\infty} a^2 c_m x^{m+a} &= 0 \end{aligned}$$

Sumando las series semejantes

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m \left[(m+a)^2 - a^2\right] x^{m+a} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+a+2} = 0$$

Tomando los dos primeros términos de la primera serie y haciendo un corrimiento a la segunda

$$\begin{aligned} c_0 \left[(a)^2 - a^2\right] x^a + c_1 \left[(1+a)^2 - a^2\right] x^{1+a} + \sum_{m=2}^{\infty} c_m \left[(m+a)^2 - a^2\right] x^{m+a} + \sum_{m=2}^{\infty} c_{m-2} x^{m+a} &= 0 \\ c_1 \left[(1+a)^2 - a^2\right] x^{1+a} + \sum_{m=2}^{\infty} c_m \left[(m+a)^2 - a^2 + c_{m-2}\right] x^{m+a} &= 0 \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes a cero

$$\begin{aligned} c_1 \left[(1+a)^2 - a^2\right] &= 0 \\ c_1 \left[(1+a-a)(1+a+a)\right] &= 0 \\ c_1 \left[(1)(1+2a)\right] &= 0 \\ \text{si } r_1 - r_2 = 2a \in \mathbb{Z} & \\ c_1 &= 0 \end{aligned}$$

De igual manera para serie

$$\begin{aligned} c_m &= -\frac{c_{m-2}}{(m+a)^2-a^2} \quad \forall m \geq 2 \\ c_m &= -\frac{c_{m-2}}{(m+a-a)(m+a+a)} \quad \forall m \geq 2 \\ c_m &= -\frac{c_{m-2}}{m(m+2a)} \quad \forall m \geq 2 \end{aligned}$$

Obteniendo los coeficientes pares

$$\begin{aligned} \text{Si m=2} \rightarrow c_2 &= -\frac{c_0}{2(2+2a)} = -\frac{c_0}{2^2(1+a)} \\ \text{si m=4} \rightarrow c_4 &= -\frac{c_2}{2^2(4+2a)} \\ c_4 &= \frac{c_0}{2^4 2!(1+a)(2+a)} \\ \text{Si m=6} \rightarrow c_6 &= -\frac{c_4}{6(6+2a)} \\ c_6 &= -\frac{1}{2\cdot 6(3+a)}\frac{c_0}{2^4 2!(1+a)(2+a)} = \frac{-c_0}{2^6 3!(1+a)(2+a)(3+a)} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$c_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m} m! \prod_{i=1}^{m}(i+a)} c_0 \tag{2.176}$$

Ahora los coeficientes impares

$$\begin{aligned} \text{Si m=3} \rightarrow c_3 &= -\frac{c_1}{3(3+2a)} \\ c_3 &= 0 \\ \text{si m=5} \rightarrow c_3 &= -\frac{c_3}{5(5+2a)} \\ c_5 &= 0 \\ &\vdots \\ c_{2m+1} &= 0 \quad \forall m \geq 1 \end{aligned}$$

de manera que la solución es de la forma

$$y_1(x) = C_0 x^a \left[1 - \frac{1}{2^2 1!(1+a)} x^2 + \frac{1}{2^4 2!(1+a)(2+a)} x^4 - \frac{1}{2^6 3!(1+a)(2+a)(3+a)} x^6 + \cdots \right]$$

Tomando la constante $c_0 = \dfrac{1}{2^a \Gamma(1+a)}$ así de 2.176

$$c_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m} m! \prod_{i=1}^{m}(i+a)} \frac{1}{2^a \Gamma(1+a)}$$

Simplificando el denominador y de A.2 se tiene

$$c_{2m} \quad = \quad \frac{(-1)^m}{2^{2m+a} m!\Gamma(m+1+a)}$$

La solución toma la forma

$$y_1(x) \quad = \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+1+a)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+a} \tag{2.177}$$

Si tomamos $a = 0$ llegamos a

$$y_1(x) \quad = \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+1+a)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \tag{2.178}$$

Para el caso $r = -a$

$$\begin{aligned}
& m(m-2a)c_m = -c_{m-2}, \quad m = 2, 3, \cdots \\
& c_m = -\frac{c_{m-2}}{m(m-2a)} \\
& m = 2 \longrightarrow c_2 = -\frac{c_0}{2(2-2a)} = -\frac{c_0}{2^2(1-a)} \\
& m = 4 \to c_4 = -\frac{c_2}{4(4-2a)} = \frac{c_0}{2^4 2!(1-a)(2-a)} \\
& m = 6 \to c_6 = -\frac{c_4}{6(6-2a)} = -\frac{c_0}{2^6 3!(1-a)(2-a)(3-a)} \\
& \vdots
\end{aligned}$$

$$c_{2m} \quad = \quad \frac{(-1)^m}{2^{2m} m! \prod_{i=1}^{m} (i-a)} c_0$$

Tomando la constante $c_0 = \dfrac{1}{2^{-a}\Gamma(1-a)}$ tenemos

$$c_{2m} \quad = \quad \frac{(-1)^m}{2^{2m} m! \prod_{i=1}^{m} (i-a)} \frac{1}{2^{-a}\Gamma(1-a)}$$

de A.2 se tiene

$$c_{2m} \quad = \quad \frac{(-1)^m}{2^{2m-a} m!\Gamma(m+1-a)}$$

La segunda solución es

$$y_2(x) \quad = \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+1-a)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-a} \tag{2.179}$$

Las soluciones de la ecuación de Bessel dada por 2.175 están dada por

$$J_a(x) \quad = \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+1+a)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+a} \tag{2.180}$$

$$J_{-a}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+1-a)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-a} \tag{2.181}$$

Nota Las funciones de Bessel J_n y J_{-n} son linealmente independiente, si y solo si, n no es un entero.
Si $n = v \in \mathbb{N}_0$, then

$$J_{-v}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-v} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m-v+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}.$$

ya que $1/\Gamma(m-v+1) = 0$ for all $m-v+1 \leq 0$, los términos para $m = 0, 1, \ldots, n-1$ son cero

$$\begin{aligned}
J_{-v}(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^{-v} \sum_{m=v}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m-v+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^{-v} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+v}}{(m+v)!\Gamma(m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+2v} \\
&= (-1)^v \left(\frac{x}{2}\right)^{v} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+v+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \\
&= (-1)^v J_v(x).
\end{aligned}$$

hacer grafica polinomios de bessel

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= 1, \\
y_1(x) &= 1 + x, \\
y_2(x) &= 1 + 3x + 3x^2 \\
y_3(x) &= 1 + 6x + 15x^2 + 15x^3, \\
y_4(x) &= 1 + 10x + 45x^2 + 105x^3 + 105x^4, \\
y_6(x) &= 1 + 15x + 105x^2 + 420x^8 + 945x^4 + 945x^5.
\end{aligned}$$

Propiedad 2.9.1: Propiedad

$$I_p(x) = i^{-p} J_p(ix)$$

Demostración 2.9.1 *Sabemos que*

$$J_p(ix) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1+n+p)} (\frac{ix}{2})^{2n+p}$$

$$J_p(ix) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+p}(-1)^n}{n!\Gamma(1+n+p)} (\frac{x}{2})^{2n+p}$$

Desarrollando la potencia de i

$$J_p(ix) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^p(-1)^n(-1)^n}{n!\Gamma(1+n+p)} (\frac{x}{2})^{2n+p}$$

Simplificando y tomando factor común

$$J_p(ix) = i^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\Gamma(1+n+p)} (\frac{x}{2})^{2n+p} = i^p I_p(x)$$

$$I_p(x) = i^{-p} J_p(ix)$$

2.9.1. Función Generadora de la función de Bessel

Teorema 2.9.1: Función Generadora de la función de Bessel

La función generadora de la función de Bessel está dada por la expresión

$$e^{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{t}{t}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(x)\, t^n \tag{2.182}$$

Demostración 2.9.2 *Para demostrar este teorema desarrollaremos el lado izquierdo de la expresion (2.182) en potencia de t y mostraremos que el coeficiente de t^n es $J_n(x)$.*

$$e^{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)} = e^{\frac{1}{2}xt}e^{-\frac{x}{2t}}$$

Por la serie de Maclaurin de la función exponencial

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)} &= \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(xt)^s}{2^s s!}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-x)^r}{2^r t^r r!} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\left(\frac{x}{2}\right)^{s+r}\frac{t^{s-r}}{s!r!} \end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variable en la sumatoria tenemos

$$\sum_{m=-r}^{\infty}\left[\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+m}}{r!(m+r)!}\right]t^m$$

Donde el coeficiente de t^m en la expresión anterior es la función de Bessel.

2.9.2. Relación de recurrencia de la función Bessel

Ahora demostraremos algunas importantes relaciones de la función Bessel, incluyendo la relación de recurrencia.

Teorema 2.9.2: Bessel

$$xJ_a'(x) = aJ_a(x) - xJ_{a+1}(x) \tag{2.183}$$

Demostración 2.9.3 *Derivando la expresión (2.180) obtenemos*

$$J_a'(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m+a)}{m!(m+a)!}\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+a-1}$$

Así el lado de la izquierda de la expresión (2.183) se puede escribir

$$\begin{aligned} xJ'_a(x) =& a\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(m+a)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+a} \\ &+ x\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m-1)!(m+a)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+a-1} \\ =& aJ_a(x) + x\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m!(m+a+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+a+1} \\ =& aJ_a(x) - xJ_{a+1}(x) \end{aligned}$$

2.9.3. Forma integral de la función de Bessel

Proposición 2.9.1: Forma integral de la función de Bessel

Sea n un entero no negativo, tenemos

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\theta - x\sin\theta)d\theta \tag{2.184}$$

Esta fórmula se conoce como forma integral de Bessel para J_n

Realizando el cambio de variable $t = e^{i\theta}$ en la expresión in (**??**), y usando la identidad $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ tenemos

$$e^{(x/2)[t-(1/t)]} \quad = \quad e^{ix\sin\theta} = \cos(x\sin\theta) + i\sin(x\sin\theta)$$

De la expresión (**??**) tenemos que

$$\cos(x\sin\theta) + i\sin(x\sin\theta) \quad = \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)[\cos n\theta + i\sin n\theta]$$

Ahora igualando las partes reales e imaginarias y por la identidad (**??**) llegamos a

$$\cos(x\sin\theta) = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n}(x)\cos 2n\theta, \quad \sin(x\sin\theta) = 2\sum_{n=0}^{\infty}J_{2n+1}(x)\sin(2n+1)\theta.^1 \tag{2.185}$$

Continuing, we now multiply the first of these formulas by $\cos 2k\theta$, the second by $\sin 2k\theta$, and integrate the resulting expressions term-by-term over the interval $0 \leq \theta \leq \pi$ (an operation which is legitimate here) to obtain

$$J_{2k}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta)\cos 2k\theta d\theta, \quad 0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x\sin\theta)\sin 2k\theta d\theta \tag{2.186}$$

In exactly the same way we find that

$$0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta)\cos(2k+1)\theta d\theta, \quad J_{2k+1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x\sin\theta)\sin(2k+1)\theta d\theta. \tag{2.187}$$

Finally, by adding these results and using the identity

$$\cos(n\theta - x\sin\theta) = \cos n\theta\cos(x\sin\theta) + \sin n\theta\sin(x\sin\theta)$$

we deduce If n is a non-negative integer

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - x\sin\theta)d\theta.$$

2.9.4. Funciones de Bessel de segundo tipo

2. Caso 2. $a = 0$.

Tomando $a = 0$ la ecuación de Bessel dada por 2.175 se transforma en

$$xy'' + y' + xy = 0 \tag{2.188}$$

De la expresión de la ecuación indicial 2.23 tenemos

$$F(r) = r(r-1) + r + r^2 = 0$$

Cuyas soluciones son reales repetidas $r_1 = r_2 = 0$. De 2.26 la segunda solución linealmente independiente es de la forma

$$K_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k + J_0(x)\ln x \tag{2.189}$$

Con $J_0 = y_1(x)$ dada en la expresión 2.177. Nuestro objetivo ahora es determinar el valor de b_k. Como 4.58 satisface 2.175 tenemos que:

$$xK_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^{k+1} + xJ_0(x)\ln x$$

Acomodando la sumatoria

$$xK_0(x) = \sum_{k=3}^{\infty} b_{k-2} x^{k-1} + xJ_0(x)\ln x$$

Derivando 4.58

$$K_0'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kb_k x^{k-1} + J_0'(x)\ln x + \frac{J_0(x)}{x}$$

Derivando nueva vez expresión anterior y luego multiplicando por x

$$xK_0''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)b_k x^{k-1} + xJ_0''(x)\ln x + 2J_0'(x) - \frac{J_0(x)}{x}$$

Reemplazando las expresiones anteriores en (4.57) obtenemos la expresión

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)b_k x^{k-1} + xJ_0''(x)\ln x + 2J_0'(x) - \frac{J_0(x)}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} kb_k x^{k-1} + J_0'(x)\ln x + \frac{J_0(x)}{x} + \sum_{k=3}^{\infty} b_{k-2}x^{k-1} + xJ_0(x)\ln x$$

Desarrollando los dos primeros términos de las dos primeras sumatorias tenemos

$$2b_2x\sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)b_k x^{k-1} + xJ_0''(x)\ln x + 2J_0'(x) - \frac{J_0(x)}{x} + b_1 + 2b_2x\sum_{k=3}^{\infty} kb_k x^{k-1} + J_0'(x)\ln x + \frac{J_0(x)}{x} + \sum_{k=3}^{\infty} b_{k-2}x^{k-1} + xJ_0(x)\ln x$$

Sumando los términos semejantes

$$b_1 + 4b_2 x + \sum_{k=3}^{\infty} \left[k^2 b_k + b_{k-2}\right] x^{k-1} \\ + \left[x J_0''(x) + J_0'(x) + x J_0(x)\right] \ln x + 2J_0'(x) \equiv 0$$

Como J_0 es solución de 2.103 se concluye que $xJ_0''(x) + J_0'(x) + xJ_0(x) \equiv 0$, y así tenemos que

$$b_1 + 4b_2 x + \sum_{k=3}^{\infty} \left[k^2 b_k + b_{k-2}\right] x^{k-1} \equiv -2J_0'(x).$$

Finally, by (4.54),

$$J_0'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k-1},$$

whence

$$b_1 + 4b_2 x + \sum_{k=3}^{\infty} \left[k^2 b_k + b_{k-2}\right] x^{k-1} \equiv \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{4k}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k-1}.$$

To facilitate the evaluation of the b_k we now multiply this expression by x and split the series on the left into its even and odd parts to obtain

$$b_1 x + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(2k+1)^2 b_{2k+1} + b_{2k-1}\right] x^{2k+1} + 4b_2 x^2 \\ + \sum_{k=2}^{\infty} \left[(2k)^2 b_{2k} + b_{2k-2}\right] x^{2k} \equiv x^2 + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{4k}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k}.$$

Thus $b_1 = b_3 = b_5 = \cdots = 0$, while

$$4b_2 = 1, \text{ and } (2k)^2 b_{2k} + b_{2k-2} = (-1)^{k+1} \frac{4k}{2^{2k}(k!)^2}, k > 1.$$

Hence

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{1}{2^2} \\ b_4 &= -\frac{1}{2^2 \cdot 4^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2^4 (2!)^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) \\ &\vdots \\ b_{2k} &= (-1)^{k+1} \frac{1}{2^{2k}(k!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}\right) \end{aligned} \tag{2.190}$$

and it follows that

$$K_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}\right) \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} + J_0(x) \ln x.$$

In theoretical work with Bessel functions it is common practice to replace K_0 by a certain linear combination of J_0 and K_0. The resulting function is known as the Bessel function of order zero of **the second kind,** and is defined by the formula

$$Y_0(x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}+\frac{2}{\pi}J_0(x)\left[\ln\frac{x}{2}+\gamma\right] \tag{2.191}$$

where $\gamma = 0.57721566\ldots$, and is known as Euler's constant. The constant γ is defined to be the sum of the series

$$1+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\ln\frac{n-1}{n}\right)$$

The graph of Y_0 is shown in Fig.

3. Case 3. $\nu = n$, an integer.

This time the roots of (**??**) differ by $2n > 0$, the second solution of Bessel's equation is of the form

$$K_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+n} + cJ_n(x)\ln x,$$

where c is a constant. Here too the b_k and c can be evaluated by the method of undetermined coefficients, but the argument is now exceptionally long and involved. so

$$\begin{aligned} K_n(x) = &-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}-\frac{H_n}{2n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n \\ &-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\left[H_k+H_{n+k}\right]}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}+J_n(x)\ln x, \end{aligned}$$

where $H_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+1/n$. It is customary to replace K_n by a linear combination of J_n and K_n, denoted Y_n, and called the **Bessel function of order n of the second kind.**

$$\begin{aligned} Y_n(x) = &-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}-\frac{H_n}{\pi(n!)}\left(\frac{x}{2}\right)^n \\ &-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\left[H_k+H_{k+n}\right]}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}+\frac{2}{\pi}J_n(x)\left[\ln\frac{x}{2}+\gamma\right]. \end{aligned}$$

2.9.5. Funciones de Bessel de tercer tipo

trabajar esta parte

Proposición 2.9.2: Bessel

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-a}J_a(x)\right) = -x^{-a}J_{a+1}(x) \tag{2.192}$$

Demostración 2.9.4 *Aplicando la derivada de un producto en el lado izquierdo de la expresion (2.192)*

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-a}J_a(x)\right) = x^{-a}J_a'(x) - ax^{-a-1}J_a(x)$$

Tomando factor común en el lado derecho

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-a}J_a(x)\right) = x^{-a-1}\left[xJ_a'(x) - aJ_a(x)\right]$$

Utilizando la expresión (2.183), lo anterior podemos expresarlo como

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-a}J_a(x)\right) = x^{-a-1}\left(-xJ_{a+1}(x)\right)$$

Simplificando se llega al resutado esperado

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-a}J_a(x)\right) = -x^{-a}J_{a+1}(x)$$

Proposición 2.9.3: Bessel

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(x) \tag{2.193}$$

Demostración 2.9.5 *Tomando $a = \frac{1}{2}$ en la expresión (2.180), tenemos*

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma\left(m+1+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\frac{1}{2}}$$

Simplificando la potencia " x "

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)}\frac{x^{2m+1}}{2^{2m+1}}\sqrt{\frac{2}{x}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{x}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{m!2^{2m+1}\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)} \end{aligned}$$

Utilizando que $m!2^{2m+1}\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right) = (2m+1)!\sqrt{\pi}$(demostrar como ejercicio basico)

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(x)$$

2.10 Ecuación de Airy

$$y'' - xy = 0 \tag{2.194}$$

De 2.194 $p(x) = 0$ y $q(x) = -x$ son funciones analiticas en $x_0 = 0$,por lo tanto tiene una solución en serie de potencia entorno de dicho punto.
Suponiendo la solución en series de potencias y calculando respectivamente las derivadas

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} \\ y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} \end{aligned}$$

Sustituyendo dichas expresiones en 2.194 tenemos la expresión

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

lo cual es equivalente a

$$\begin{aligned} \sum_{n=-1}^{\infty} (n+3)(n+2) a_{n+3} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} &= 0 \\ (2)(1)a_2 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2) a_{n+3} x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} -a_n x^{n+1} &= 0 \\ (2)(1)a_2 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+3)(n+2) a_{n+3} - a_n\right] x^{n+1} &= 0 \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes a cero, tenemos

$$\begin{cases} 2(1)a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0 \\ (n+3)(n+2) a_{n+3} - a_n = 0 \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$$

Despejando a_{n+3} de la expresión anterior y realizando un cambio de subindice tenemos

$$a_n = \frac{1}{n(n-1)} a_{n-3} \quad n \geq 3$$

Tomando $n = 2k + 2$

$$c_{3k+2} = \frac{1}{(3k+2)(3k+1)} c_{3k-1} \quad k = 1, 2, 3, \cdots$$

Desarrollando los términos

$$\begin{aligned} \text{Si } k = 1 \rightarrow c_5 &= \frac{1}{(5)(4)} c_2 \\ c_5 &= \frac{(2)(3)}{(5)(4)(3)(2)} c_2 \\ \text{si } k = 2 \rightarrow c_8 &= \frac{1}{(8)(7)} c_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_8 &= \frac{(2)(3)(6)}{(8)(7)(6)(5)(4)(3)(2)}c_2\\
\text{Si } k=3 \to c_{11} &= \frac{1}{(11)(10)}c_8\\
c_{11} &= \frac{(2)(3)(6)(9)}{(11)(10)(9)(8)(7)(6)(5)(4)(2)}c_2\\
&\vdots\\
c_{3k+2} &= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 6\cdot 9\cdot \ldots (3k)}{(3k+2)!}c_2 = 0
\end{aligned}$$

Ahora si $n = 3k+1$

$$c_{3k+1} = \frac{1}{(3k+1)(3k)}c_{3k-2}$$

Desarrollando..

$$\begin{aligned}
\text{Si } k=1 \to c_4 &= \frac{1}{(4)(3)}c_1\\
c_4 &= \frac{(2)}{(4)(3)(2)}c_1\\
\text{si } k=2 \to c_7 &= \frac{1}{(7)(6)}c_4\\
c_7 &= \frac{(2)(5)}{(7)(6)(5)(4)(3)(2)}c_1\\
\text{si } k=3 \to c_{10} &= \frac{1}{(10)(9)}c_7\\
c_{10} &= \frac{(2)(5)(8)}{(10)(9)(8)(7)(6)(5)(4)(3)(2)}c_1\\
&\vdots\\
c_{3k+1} &= \frac{(2)(5)(8)\cdots(3k-1)}{(3k+1)!}c_1 \quad k=1,2,3\cdots
\end{aligned}$$

Escogiendo ahora $n = 3k$

$$c_{3k} = \frac{1}{(3k)(3k-1)}c_{3k-3}$$

Desarrollando..

$$\begin{aligned}
\text{Si } k=1 \to c_3 &= \frac{1}{(3)(2)}c_0\\
\text{si } k=2 \to c_6 &= \frac{1}{(6)(5)}c_3\\
c_6 &= \frac{(4)}{(6)(5)(4)(3)(2)}c_0\\
\text{si } k=3 \to c_9 &= \frac{1}{(9)(8)}c_6\\
c_9 &= \frac{(4)(7)}{(9)(8)(7)(6)(5)(4)(3)(2)}c_0\\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$c_{3k} = \frac{(4)(7)(10)\cdots(3k-2)}{(3k)!}c_0 \quad k = 1,2,3\cdots$$

Por lo tanto

$$y(x) = c_0 + c_1 x + \sum_{n=1}^{\infty} c_{3n}x^{3n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{3n+1}x^{3n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{3n+2}x^{3n+2}$$

Y las funciones de Airy están dada por

$$y(x) = c_0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdots(3n-2)}{(3n)!}x^{3n}\right] + c_1\left[x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdots(3n-1)}{(3n+1)!}x^{3n+1}\right]$$

2.11 Ecuación Hipergeométrica

Aplicacion del pendulo

$$x(1-x)y'' + [c-(a+b+1)x]y' - aby = 0 \tag{2.195}$$

Los puntos singulares de 2.195 son $\{0,1\}$, Fijémonos en la forma normal:

$$y'' + \frac{[c-(a+b+1)x]}{x(1-x)}y' - \frac{ab}{x(1-x)}y = 0$$

Ahora partiendo de

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

$$P(x) = \frac{[c-(a+b+1)x]}{x(1-x)} \quad \text{y} \quad Q(x) = \frac{ab}{x(1-x)} \tag{2.196}$$

$$P(x) = \frac{\frac{[c-(a+b+1)x]}{(1-x)}}{x} \quad \text{y} \quad Q(x) = \frac{\frac{abx}{(1-x)}}{x^2}$$

De donde

$$P_0(x) = \frac{[c-(a+b+1)x]}{(1-x)} \quad y \quad Q_0(x) = \frac{abx}{(1-x)}$$

$P_0(x)$ y $Q_0(x)$ son analiticas en $x_0 = 0$, entonces $x_0 = 0$ es un punto singular regular de 2.195 y admite una solución de la forma dada en 2.19. Derivando

$$y' = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(m+r)x^{m+r-1}$$
$$y'' = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(m+r)(m+r-1)x^{m+r-2}$$

Reescribiendo la ecuación hipergeométrica

$$xy'' - x^2y'' + cy' - (a+b+1)xy' - aby = 0 \tag{2.197}$$

Así

$$
\begin{aligned}
xy'' &= x\sum_{m=0}^{\infty} c_m(m+r)(m+r-1)x^{m+r-2} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(m+r)(m+r-1)x^{m+r-1} \\
x^2y'' &= x^2\sum_{m=0}^{\infty} c_m(m+r)(m+r-1)x^{m+r-2} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(m+r)(m+r-1)x^{m+r} \\
cy' &= c\sum_{m=0}^{\infty} c_m(m+r)x^{m+r-1} = \sum_{m=0}^{\infty} c(m+r)c_m x^{m+r-1} \\
(a+b+1)xy' &= (a+b+1)x\sum_{m=0}^{\infty} c_m(m+r)x^{m+r-1} = \sum_{m=0}^{\infty}(a+b+1)(m+r)c_m x^{m+r} \\
aby &= ab\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = \sum_{m=0}^{\infty} abc_m x^{m+r}
\end{aligned}
$$

Reemplazando las expresiones anteriores en 2.197, tenemos

$$
\sum_{m=0}^{\infty} c_m(m+r)(m+r-1)x^{m+r-1} - \sum_{m=0}^{\infty} c_m(m+r)(m+r-1)x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} c(m+r)c_m x^{m+r-}
$$

$$
-\sum_{m=0}^{\infty} c(m+r)c_m x^{m+r-1} - \sum_{m=0}^{\infty} abc_m x^{m+}
$$

Agrupando

$$
\sum_{m=0}^{\infty}[(m+r)(m+r-1)+(m+r)c]c_m x^{m+r-1} - \sum_{m=0}^{\infty} c_m[(m+r)(m+r-1)+(a+b+1)(m
$$

Factorizando:

$$
\begin{aligned}
&(m+r)(m+r-1)+(m+r)c = (m+r)(m+r-1+c) \\
&(m+r)(m+r-1)+(a+b+1)(m+r)+ab = (m+r)(m+r+a+b)+ab \\
&\qquad = (m+r)^2 + a(m+r) + b(m+r) + ab = (m+r)(m+r+a) + b(m+r+a) \\
&\qquad = (m+r+a)(m+r+b)
\end{aligned}
$$

Así la ecuación toma la forma

$$
\sum_{m=0}^{\infty} c_m(m+r)(m+r-1+c)x^{m+r-1} - \sum_{m=0}^{\infty} c_m(m+r+a)(m+r+b)x^{m+r} = 0
$$

$$
x^{r-1}\left[\sum_{m=0}^{\infty} c_m(m+r)(m+r-1+c)x^{m} - \sum_{m=0}^{\infty} c_m(m+r+a)(m+r+b)x^{m+1}\right] = 0
$$

$$
\sum_{m=0}^{\infty} c_m(m+r)(m+r-1+c)x^{m} - \sum_{m=0}^{\infty} c_{m-1}(m+r+a)(m+r+b)x^{m+1} = 0
$$

Sea $m+1=k, m=k-1$, cuando $m=0$ entonces $k=1$. Sutituyendo en la serie y cambiando k por m :

$$
\sum_{m=0}^{\infty} c_m(m+r)(m+r-1+c)x^{m} - \sum_{m=1}^{\infty} c_{m-1}(m-1+r+a)(m-1+r+b)x^{m} = 0
$$

$$
r(r-1+c)c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m(m+r)(m+r-1+c)x^{m} - \sum_{m=1}^{\infty} c_{m-1}(m-1+r+a)(m-1+r+b)
$$

De donde

$$\begin{aligned} r(r-1+c)c_0 = 0 \quad c_0 \neq 0 \\ r(r-1+c) = 0 \\ r = 0 \quad \text{y} \quad (r-1+c) = 0 \\ r = 0 \quad \text{y} \quad r = 1-c \end{aligned}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[c_m(m+r)(m+r-1+c) - c_{m-1}(m-1+r+a)(m-1+r+b)\right] x^m \quad = \quad 0$$

Lo que implica que

$$\begin{aligned} c_m(m+r)(m+r-1+c) - c_{m-1}(m-1+r+a)(m-1+r+b) = 0 \\ c_m(m+r)(m+r-1+c) = c_{m-1}(m-1+r+a)(m-1+r+b) \end{aligned}$$

De la expresión anterior se obtiene la relación de recurrencia

$$c_m = \frac{(m-1+r+a)(m-1+r+b)}{(m+r)(m+r-1+c)} c_{m-1} \quad \forall m \in N/m \geq 1$$

Tomando $m \to m+1$ se tiene que

$$c_{m+1} \quad = \quad \frac{(m+r+a)(m+r+b)}{(m+1+r)(m+r+c)} c_m \quad \forall m \in N/m \geq 0 \qquad (2.198)$$

De 2.198 escogiendo $r = 0$ obtenemos la relación

$$c_{m+1} \quad = \quad \frac{(m+a)(m+b)}{(m+1)(m+c)} c_m \quad \forall m \in N/m \geq 0 \qquad (2.199)$$

Desarrollando los primeros términos de 2.199

$$\begin{aligned} \text{Si} \quad m = 0 \quad &\to c_1 &=& \frac{(a)(b)}{(1)(c)} c_0 \\ \text{Si} \quad m = 1 \quad &\to c_2 &=& \frac{(1+a)(1+b)}{(2)(1+c)} c_1 = \frac{a(1+a)b(1+b)}{(1)(2)c(1+c)} c_0 \\ \text{Si} \quad m = 2 \quad &\to c_3 &=& \frac{(2+a)(2+b)}{(3)(2+c)} c_2 = \frac{a(1+a)(2+a)b(1+b)(2+b)}{(1)(2)(3)c(1+c)(2+c)} c_0 \\ \text{Si} \quad m = 3 \quad &\to c_4 &=& \frac{(3+a)(3+b)}{(4)(3+c)} c_2 = \frac{a(1+a)(2+a)(3+a)b(1+b)(2+b)(3+b)}{(1)(2)(3)(4)c(1+c)(2+c)(3+c)} c_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

De manera que para $\quad m = n \quad \to c_{n+1} \quad = \quad \dfrac{a(1+a)(2+a)(3+a)\ldots(n+a)b(1+b)(2+b)(3+b)\ldots(n+b)}{(n+1)!c(1+c)(2+c)(3+c)\ldots(n+c)} c_0$

Reemplazando los términos obtenidos en 2.19 llegamos a

$$y \quad = \quad c_0 x^0 \left(1 + \frac{(a)(b)}{(1)(c)} x + \frac{a(1+a)b(1+b)}{(1)(2)c(1+c)} x^2 + \frac{a(1+a)(2+a)b(1+b)(2+b)}{(1)(2)(3)c(1+c)(2+c)} x^3 + \cdots\right)$$

Tomando $c_0 = 1$ se obtiene una solución de 2.195

$$y \quad = \quad 1 + \frac{(a)(b)}{(1)(c)} x + \frac{a(1+a)b(1+b)}{(1)(2)c(1+c)} x^2 + \frac{a(1+a)(2+a)b(1+b)(2+b)}{(1)(2)(3)c(1+c)(2+c)} x^3 + \cdots$$

Por A.7 la expresión anterior se convierte en la función hipergeométrica definida en **??**

$$y = F(a,b,c,x) \quad = \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m b_m}{m! c_m} x^m \tag{2.200}$$

Utilizando A.3 obtenemos la solución en términos de la función Gamma

$$y = F(a,b,c,x) \quad = \quad \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+a)\Gamma(m+b)}{(m)!\Gamma(m+c)} x^m$$

Para $r = 1-$ c la relacion de recurrencia es la siguiente

$$\begin{aligned} c_{m+1} &= \frac{(m+r+a)(m+r+b)}{(m+1+r)(m+r+c)} c_m \quad \forall m \in N/m \geq 0 \\ c_{m+1} &= \frac{(m+1-c+a)(m+1-c+b)}{(m+1)(m+2-c)} c_m \quad \forall m \in N/m \geq 0 \end{aligned}$$

Escogiendo los siguientes parḿetros

$$a' = 1-c+a, b' = 1-c+b, c' = 2-c$$

$$c_{m+1} \quad = \quad \frac{(m+a')\,(m+b')}{(m)\,(m+c')} c_m \quad \forall m \in N/m \geq 0$$

Obteniendo el desarrollo de los coeficientes

Obtenemos la segunda solución linealmente independiente

$$\begin{aligned} y &= x^{1-c} F\left(a', b', c', x\right) \\ y &= x^{1-c} F(1-c+a, 1-c+b, 2-c, x) \end{aligned} \tag{2.201}$$

De manera que la solución general es la combinación lineal de las dos soluciones independientes.

$$y(x) = A_0\ F(a,b,c,x) + B_0\ x^{1-c} F(1-c+a, 1-c+b, 2-c, x) \quad |x| \leq 1 \tag{2.202}$$

Ahora obtendremos la solución de 2.195 entorno al punto singular regular $x_0 = 1$. De 2.196 obtenemos

$$P(x) = \frac{\frac{[c-(a+b+1)x]}{x}}{(1-x)} \quad y \quad Q(x) = \frac{\frac{ab(1-x)}{x}}{(1-x)^2}$$

De donde

$$P_\circ(x) = \frac{[c-(a+b+1)x]}{x} \quad y \quad Q_\circ(x) = \frac{ab(1-x)}{x}$$

$P_\circ(x)$ y $Q_\circ(x)$ son analiticas en $x_0 = 1$, entonces $x_0 = 1$ es un punto singular regular de 2.195 y admite una solución de la forma dada 2.19.
La solución la podemos obtener directamente deduciendo desde las soluciones anteriores por el cambio de variables $t = 1-x$. Entonces con esta sustitución la ecuación dada 2.195 se reduce a:

$$\text{como}\, y(x) = x(t) \wedge x = 1-t, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = (-1)\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Sustituyendo en 2.195

$$\begin{aligned}(1-t)(1-(1-t))y'' + [c-(a+b+1)(1-t)](-1)y' - aby = 0\\ t(1-t)y'' + [c-a-b-1+(a+b+1)t](-1)y' - aby = 0\\ t(1-t)y'' + [(-c+a+b+1)-(a+b+1)t]y' - aby = 0\end{aligned}$$

Si $c_1 = a+b-c+1$ obtenemos $t(1-t)y'' + [c_1 - (a+b+1)t]\, y' - aby = 0$
Entonces la solución general es

$$y(x) = A_0F(a,b,a+b-c+1,1-x) + A_1x^{c-a-b}F(c-b,c-a,c-a-b+1,1-x) \tag{2.203}$$

2.12 Funciones Elípticas. SEzgo

2.13 Polinomios de Euler

2.14 Polinomios de Bernoulli

2.14.1 Ejercicio

Eight systems of differential equations and five direction fields are given below. Determine the system that corresponds to each direction field and sketch the solution curves that correspond to the initial conditions $(x_0, y_0) = (0,1)$ and $(x_0, y_0) = (1,-1)$.

1. $\dfrac{dx}{dt} = -x$, $\dfrac{dy}{dt} = y - 1$

2. $\dfrac{dx}{dt} = x^2 - 1$, $\dfrac{dy}{dt} = y$

3. $\dfrac{dx}{dt} = x + 2y$, $\dfrac{dy}{dt} = -y$

4. $\dfrac{dx}{dt} = 2x$, $\dfrac{dy}{dt} = y$

5. $\dfrac{dx}{dt} = x$, $\dfrac{dy}{dt} = 2y$

6. $\dfrac{dx}{dt} = x - 1$, $\dfrac{dy}{dt} = -y$

7. $\dfrac{dx}{dt} = x^2 - 1$, $\dfrac{dy}{dt} = -y$

8. $\dfrac{dx}{dt} = x - 2y$, $\dfrac{dy}{dt} = -y$

2.14.2 Ejercicio

Eight systems of differential equations and five direction fields are given below. Determine the system that corresponds to each direction field and sketch the solution curves that correspond to the initial conditions $(x_0, y_0) = (0,1)$ and $(x_0, y_0) = (1,-1)$.

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 - 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = y \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -y \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x \\ \dfrac{dy}{dt} = y \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y \end{cases}$

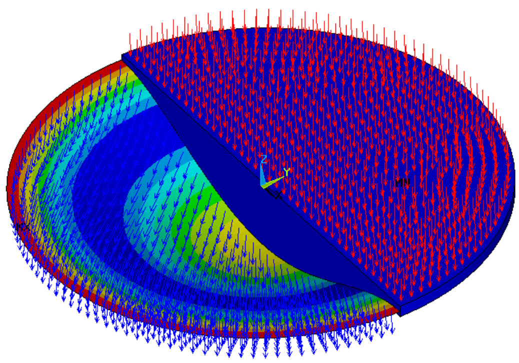
6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = -y \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 - 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = -y \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -y \end{cases}$

CAPÍTULO 3

Funciones especiales a partir de la Función Hipergeométrica



Las funciones especiales constituyen un pilar fundamental en el estudio de las matemáticas aplicadas y la física matemática. Aunque su denominación pueda sugerir un carácter excepcional, en realidad se trata de funciones que aparecen de manera recurrente al resolver ecuaciones diferenciales de gran relevancia en la ciencia y la ingeniería.

En este capítulo abordaremos funciones como la hipergeométrica, la confluente, las funciones de Laguerre y las funciones de Hermite. Todas ellas surgen de problemas concretos: desde la descripción de sistemas cuánticos y modelos de osciladores, hasta la propagación de ondas y fenómenos de difusión.

El estudio de estas funciones no solo amplía el repertorio de herramientas analíticas disponibles, sino que también abre la puerta a una comprensión más profunda de los modelos que gobiernan la naturaleza. Cada subsección desarrollará tanto la teoría matemática como las aplicaciones más relevantes, complementadas con representaciones gráficas que ilustran su comportamiento y propiedades.

En este capítulo se introducen las funciones hipergeométricas generales ${}_rF_s$, junto con el estudio de sus propiedades fundamentales, tales como la ecuación diferencial que satisfacen, sus relaciones de recurrencia, representaciones integrales, fórmulas de suma, entre otras. Asimismo, se presentan diversos casos particulares, los cuales abarcan la mayoría de las funciones elementales clásicas, así como nuevas funciones de interés, cuya exploración detallada se desarrollará en los capítulos posteriores.

Además, se mostrará cómo algunas funciones especiales, tales como los polinomios de Legendre, Chebyshev y otras familias ortogonales, pueden obtenerse como casos particulares de la ecuación hipergeométrica, lo que permite un tratamiento unificado y sistemático de dichas funciones dentro del marco general de la teoría hipergeométrica.

3.1 Función Hipergeométrica

Definición 3.1.1: Serie Hipergeométrica

Sean p y q dos enteros positivos, y sean $a_1, a_2, \ldots, a_p, c_1, c_2, \ldots, c_q$ números reales tales que $c_j \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ para todo $j = 1, 2, \ldots, q$. La serie hipergeométrica con parámetros $a_1, \ldots, a_p, c_1, \ldots, c_q$ se define para todo $x \in \mathbb{R}$ mediante

$$ {}_pF_q\left(\begin{array}{c|c} a_1, \ldots, a_p & \\ & x \\ c_1, \ldots, c_q & \end{array}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_p)_k}{(c_1)_k \cdots (c_q)_k \, k!} \, x^k, \tag{3.1} $$

donde $(a)_n$ denota el símbolo de Pochhammer, definido en (A.7).

En esta definición general, se debe suponer que $c_j \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ para todo $j = 1, 2, \ldots, q$. En efecto, si $c_j \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$, entonces para $n \geq -c_j + 1$ se tiene

$$ (c_j)_n = c_j(c_j + 1) \cdots (c_j + (-c_j + 1) - 1) \cdots (c_j + n - 1) = 0 $$

lo que hace que el denominador de los términos de la serie se anule a partir de cierto orden, provocando una indeterminación. Sin embargo, un caso especial importante es el de los polinomios hipergeométricos: la serie hipergeométrica se convierte en en un polinomio si alguno de los parámetros a_i es un entero negativo o cero. En efecto, si $a_i \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$, entonces la expresión (3.1) se reduce a

$$ {}_pF_q\left(\begin{array}{c|c} a_1, \ldots, a_p & \\ & x \\ c_1, \ldots, c_q & \end{array}\right) = \sum_{k=0}^{-a_i} \frac{(a_1)_k \cdots (a_p)_k}{(c_1)_k \cdots (c_q)_k \, k!} \, x^k \tag{3.2} $$

ya que $(a_i)_n = 0$ para $n \geq -a_i + 1$. En este caso, los parámetros c_j pueden ser enteros negativos o cero, siempre que se cumpla $c_j \leq a_i$.

Ahora vamos analizar algunos casos particulares permiten extender la definición general de la serie hipergeométrica (3.1) a situaciones en las que el número de parámetros en el numerador (p) o en el denominador (q) es cero. Cuando $p = 0$, la serie hipergeométrica no contiene factores del tipo $(a_i)_k$ en el numerador, y se reduce a una serie de potencias con coeficientes dependientes únicamente de los parámetros del denominador. Por otro lado, cuando $q = 0$, no hay restricciones en el denominador, y la serie se convierte en una serie generalizada de tipo binomial, cuya convergencia depende del valor de x.

$$ {}_0F_q\left(\begin{array}{c|c} \cdot & x \\ & \\ c_1,\ldots,c_q & \end{array}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(c_1)_k\cdots(c_q)_k\,k!} \tag{3.3} $$

$$ {}_pF_0\left(\begin{array}{c|c} a_1,\ldots,a_p & \\ & x \\ \cdot & \end{array}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a_1)_k\cdots(a_p)_k}{k!}\,x^k \tag{3.4} $$

$$ {}_0F_0(\cdot \mid x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \tag{3.5} $$

Antes de continuar con el desarrollo formal y el estudio detallado de la serie hipergeométrica general ${}_pF_q$, resulta esencial determinar el intervalo de convergencia de dicha serie, ya que este delimita el dominio sobre el cual las expresiones obtenidas representan funciones bien definidas. El análisis de la convergencia no solo establece la validez de la representación en serie de potencias, sino que también permite comprender las propiedades analíticas de las funciones hipergeométricas, tales como su carácter de funciones enteras, multivaluadas o con singularidades aisladas.

1. Si $p > q + 1$

$$ {}_pF_q\left(\begin{array}{c|c} a_1,\ldots,a_q,a_{q+1},\ldots,a_{q+i} & \\ & x \\ c_1,\ldots,c_q & \end{array}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k\cdots(a_q)_k(a_{q+1})_k\cdots(a_{q+i})_k}{(c_1)_k\cdots(c_q)_k\,k!}\,x^k $$

Sean

$$ \begin{aligned} B_k &= \frac{(a_1)_k\cdots(a_q)_k(a_{q+1})_k\cdots(a_{q+i})_k}{(c_1)_k\cdots(c_q)_k}\,x^k \\ B_{k+1} &= \frac{(a_1)_{k+1}\cdots(a_q)_{k+1}(a_{q+1})_{k+1}\cdots(a_{q+i})_{k+1}}{(c_1)_{k+1}\cdots(c_q)_{k+1}\,(k+1)!}\,x^{k+1} \end{aligned} $$

Por el criterio de la razón y propiedades de Pochhammer

$$ \begin{aligned} \lim_{k\to\infty}\left|\frac{B_{k+1}}{B_k}\right| &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(a_1+k)\cdots(a_q+k)(a_{q+1}+k)\cdots(a_{q+i}+k)}{(k+1)(c_1+k)\cdots(c_q+k)}\right| \\ &= \infty \end{aligned} $$

El límite anterior no existe $\forall x \neq 0$.

2. Para el caso de $p = q + 1$, tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\left|\frac{B_{k+1}}{B_k}\right| &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(a_1+k)\cdots(a_q+k)(a_{q+1}+k)}{(k+1)(c_1+k)\cdots(c_q+k)}\right| \\ &= |x|\end{aligned}$$

   El límite anterior converge si $|x| < 1$.

3. Si $p \leq q$

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\left|\frac{B_{k+1}}{B_k}\right| &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(a_1+k)(a_2+k)\cdots(a_{q-i}+k)}{(k+1)(c_1+k)\cdots(c_q+k)}\,x\right| \\ &= 0\cdot|x|\end{aligned}$$

   El límite anterior converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ya establecidos los intervalos en los que la función hipergeométrica converge, procederemos ahora a definir la función hipergeométrica como un caso particular de la definición (3.1.1), lo cual nos permitirá situarla dentro de un marco teórico más amplio y comprender mejor sus propiedades y aplicaciones. como caso particular de la función Hipergeométrica.

Definición 3.1.2: Función Hipergeométrica

La **función hipergeométrica generalizada** se denota por ${}_pF_q$ y se define como la serie de potencias

$$ {}_pF_q\left(\begin{array}{c|c} a_1,\ldots,a_p & \\ & x \\ c_1,\ldots,c_q & \end{array}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(a_1)_k\cdots(a_p)_k}{(c_1)_k\cdots(c_q)_k\,k!}\,x^k \qquad (3.6)$$

La función hipergeométrica generalizada posee una notable riqueza estructural que permite representar, de manera unificada, una amplia variedad de funciones conocidas. A través de los siguientes ejemplos, se pondrá de manifiesto cómo diversas expresiones funcionales pueden reescribirse en términos de esta función, revelando así conexiones formales que articulan muchas construcciones del análisis clásico.

Ejemplo 3.1.1. Serie Geométrica

Expresa la serie geométrica

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad |x| < 1 \qquad (3.7)$$

como un caso de la serie hipergeométrica.

Solución 3.1.1 *Es claro que si en la expresión (3.1) tomamos* $p = 1$ *y* $q = 0$

obtenemos

$$
\begin{aligned}
{}_1F_0\left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ & x \\ \cdot & \end{array}\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1)_k}{k!} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \\
&= \frac{1}{1-x}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3.1.2. Serie de $\dfrac{\ln(1-x)}{x}$

Expresa la función

$$f(x) = \frac{\ln(1-x)}{x}$$

como una serie hipergeométrica en el intervalo $(-1,0) \cup (0,1)$.

Solución 3.1.2 *Integrando la serie geométrica tenemos*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-x)$$

$$
\begin{aligned}
-\ln(1-x) &= x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k+1} = x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k!}{(k+1)!} x^k \\
&= x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k! \cdot k!}{(k+1)! \cdot k!} x^k \\
&= x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1)_k \cdot (1)_k}{(2)_k \cdot k!} x^k \qquad \text{para todo } x \in (-1,1)
\end{aligned}
$$

$$ {}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} 1,\ 1 & \\ & x \\ 2 & \end{array}\right) = -\frac{\ln(1-x)}{x} \qquad \text{para todo } x \in (-1,0) \cup (0,1)$$

Presentamos ahora un criterio sencillo que permite determinar si una serie de potencias dada puede expresarse como una serie hipergeométrica.

Teorema 3.1.1: Caracterización Hipergeométrica de Series de Potencias

Sea $y = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k x^k$ una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$. Supongamos que existen números reales $a_1, a_2, \ldots, a_r$, $c_1, c_2, \ldots, c_s$, y un número real no nulo A tales que, para todo entero $k \geq 0$, se cumple:

$$\lambda_{k+1} = A \cdot \frac{(k+a_1)(k+a_2)\cdots(k+a_r)}{(k+1)(k+c_1)(k+c_2)\cdots(k+c_s)} \cdot \lambda_k. \qquad (3.8)$$

Entonces,

$$y = \lambda_0 \cdot {}_rF_s \left(\begin{array}{c|c} a_1,\ldots,a_r & \\ & Ax \\ c_1,\ldots,c_s & \end{array} \right), \quad \left(|x| < \frac{R}{|A|} \right). \qquad (3.9)$$

Demostración 3.1.1 *dsd*

Ejemplo 3.1.3. Serie hipergeométrica de $\sin(x), \cos(x)$

Obtenga la representacion en la serie hipergeométrica de las funciones trigonométricas seno y coseno

Solución 3.1.3 1. ***Seno***

Sabemos que

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \left(x^2\right)^k}{(2k+1)!}$$

Por la expresión (3.8) del teorema (3.1.1) tenemos $\forall k \geq 1$

$$\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} = -\frac{(2k+1)!}{(2k+3)!} = -\frac{1}{2(k+1)(2k+3)} = -\frac{1}{4} \frac{1}{(k+1)\left(k+\frac{3}{2}\right)}$$

con

$$r = 0, s = 1, c_1 = \frac{3}{2}, \lambda_0 = 1, \ y \ A = -\frac{1}{4}$$

Por lo tanto

$$\sin(x) = x \cdot {}_0F_1 \left(\begin{array}{c|c} \cdot & \\ & -\frac{x^2}{4} \\ \frac{3}{2} & \end{array} \right) \quad (x \in \mathbb{R}). \qquad (3.10)$$

2. ***Coseno***

Sabemos que

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

Por la expresión (3.8) del teorema (3.1.1) tenemos $\forall k \geq 1$

$$\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} = -\frac{(2k)!}{(2k+2)!} = -\frac{1}{4(k+1)(k+1/2)} = -\frac{1}{4} \frac{1}{(k+1)\left(k+\frac{1}{2}\right)}$$

con

$$r = 0, s = 1, c_1 = \frac{1}{2}, \lambda_0 = 1, \ y \ A = -\frac{1}{4}$$

Por lo tanto

$$\cos x = {}_0F_1\left(\begin{array}{c|c} \cdot & \\ & -\dfrac{x^2}{4} \\ \dfrac{1}{2} & \end{array}\right) \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{3.11}$$

3.1.1. Funciones hipergeométricas clásicas

Primer caso: $s = 0$

- Si $r = 0$ se obteniene la función exponencial (3.5).
- Cuando $r = 1$, la función hipergeométrica ${}_1F_0$ se reduce a la función binomial. Es decir, $\forall x \in (-1, 1)$

$${}_1F_0\left(\begin{array}{c|c} a & x \\ & \\ \cdot & x \end{array}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a)_k}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{-a}{k} (-x)^k = (1-x)^{-a} \tag{3.12}$$

Segundo caso: $s = 1$

Consideramos tres casos. Corresponden a nuevas funciones de gran importancia.

- Para $r = 0$, la función hipergeométrica ${}_0F_1$ está relacionada con las funciones de Bessel.

$${}_0F_1(\cdot \mid x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(c)_k\, k!} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}. \tag{3.13}$$

- Para $r = 1$, se obtiene la función hipergeométrica de Kummer ${}_1F_1$, también conocida como función hipergeométrica confluente.

$${}_1F_1\left(\begin{array}{c|c} a & \\ & x \\ c & \end{array}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k\, k!}\, x^k \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}. \tag{3.14}$$

- Para $r = 2$, se obtiene la función hipergeométrica de Gauss ${}_2F_1$.

$${}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} a,\, b & \\ & x \\ c & \end{array}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k\, k!}\, x^k \quad \text{para todo } x \in (-1, 1). \tag{3.15}$$

Función hipergeométrica modificada

Hemos visto al comienzo de este capítulo que es necesario, en la definición (3.6) de las funciones hipergeométricas, suponer que los parámetros c_j no son enteros negativos ni cero (excepto posiblemente en el caso de los polinomios hipergeométricos). Esta restricción es a veces problemática. Puede evitarse definiendo las funciones hipergeométricas modificadas ${}_p\mathcal{F}_q$ mediante

$$
{}_p\mathcal{F}_q\left(\begin{array}{c|c} a_1,\ldots,a_p & \\ & x \\ c_1,\ldots,c_q & \end{array}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a_1)_k\cdots(a_p)_k}{\Gamma(c_1+k)\cdots\Gamma(c_q+k)\,k!}\,x^k \tag{3.16}
$$

Como la función $\dfrac{1}{\Gamma}$ está definida en $\mathbb{R}$ (ver A), el término general de la serie (3.16) está siempre definido, incluso si alguno de los c_j es un entero negativo o cero. Además, cuando ninguno de los c_j es un entero negativo ni cero, tenemos por (**??**)

$$
{}_p\mathcal{F}_q\left(\begin{array}{c|c} a_1,\ldots,a_p & \\ & x \\ c_1,\ldots,c_q & \end{array}\right) = \frac{1}{\Gamma(c_1)\cdots\Gamma(c_q)}\,{}_pF_q\left(\begin{array}{c|c} a_1,\cdots,a_p & \\ & x \\ c_1,\cdots,c_q & \end{array}\right) \tag{3.17}
$$

Por lo tanto, utilizaremos ${}_p\mathcal{F}_q$ en lugar de ${}_pF_q$ cada vez que ello simplifique las cosas, y luego usaremos (3.17) para pasar de una función a la otra.
Denotemos $\mathcal{D}_0=\mathbb{R}$ cuando $p\le q$ o cuando ${}_pF_q$ y ${}_p\mathcal{F}_q$ son polinomios hipergeométricos, y $\mathcal{D}_0=]-1,1[$ cuando $p=q+1$ y ${}_pF_q$, ${}_p\mathcal{F}_q$ no son polinomios hipergeométricos.

Ecuaciones Diferenciales

Mostraremos en esta sección que las función hipergeométrica ${}_pF_q$, definida en (3.6) , satisface una ecuación diferencial lineal. Para este propósito, introducimos el operador de Euler

$$
D = x\frac{d}{dx} \tag{3.18}
$$

Teorema 3.1.2: ED de las funciones hipergeométricas

Las funciones ${}_pF_q$ y ${}_p\mathcal{F}_q$ satisfacen en $\mathcal{D}_0$ la ecuación diferencial lineal de orden $(q+1)$

$$
(D+c_1-1)\cdots(D+c_q-1)\,Dy = x\,(D+a_1)\cdots(D+a_p)\,y \tag{3.19}
$$

Demostración 3.1.2 *hsd*

Ejemplo 3.1.4. ED de la función hipergeométrica de Gauss

La función hipergeométrica de Gauss ${}_2F_1$, definida por (3.15) satisface en $\mathcal{D}_0$ la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$
(D+c-1)\,Dy = x\,(D+a)(D+b)\,y \tag{3.20}
$$

Solución 3.1.4 *La ED (3.20) es equivalente a la ecuación*

$(1-x)\,D^2y+(c-1-(a+b)x)\,Dy-abx\,y=0$ *Aplicando el operador de Euler (3.18)*

$$
(1-x)x\left(\frac{dy}{dx}+x\,\frac{d^2y}{dx^2}\right)+x\,(c-1-(a+b)x)\,\frac{dy}{dx}-abx\,y=0
$$

$$
x(1-x)\,\frac{d^2y}{dx^2}+(c-(a+b+1)x)\,\frac{dy}{dx}-ab\,y=0
$$

Las ecuaciones diferenciales que satisfacen las funciones hipergeométricas ${}_1F_1$ y ${}_0F_1$ pueden obtenerse mediante el mismo método (indicar que se pondran como ejercicios).

3.1.2. Función hipergeométrica de Gauss

La función hipergeométrica de Gauss ${}_2F_1$ es la más importante dentro de las funciones hipergeométricas, ya que muchas funciones especiales clásicas pueden expresarse como casos particulares de ella. Además, ${}_2F_1$ resuelve una ecuación diferencial de segundo orden con tres puntos singulares regulares, lo que la convierte en una herramienta central en el estudio de funciones especiales y ecuaciones diferenciales. Su estructura rica y sus múltiples aplicaciones en física, geometría y análisis la hacen esencial en el desarrollo del análisis matemático. Ahora discutiremos algunos importantes casos de la serie hipergeométrica definida en (3.15)

Caso 1

a o b es un número entero negativo o cero, por ejemplo, $a = -n$, donde $n \geq 0$ es un número entero. En este caso, la serie (3.15) se reduce a un polinomio hipergeométrico

$$ {}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} -n,\, b & \\ & x \\ c & \end{array}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k (b)_k}{(c)_k\, k!}\, x^k \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{3.21} $$

Aquí, c puede ser un número entero negativo o cero, siempre que se cumpla $c \leq -n$.

Caso 2

Ni a ni b son enteros negativos o cero. En este caso, debemos suponer que $c \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$, de modo que $(c)_n$ nunca se anule. Bajo esta condición, la serie (3.15) converge para $|x| < 1$, y se define la función hipergeométrica de Gauss ${}_2F_1$ mediante

$$ {}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} a,\, b & \\ & x \\ c & \end{array}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k\, k!}\, x^k \quad (x \in (-1, 1). \tag{3.22} $$

Al igual que en el caso general (Subsección (3.1.1)), podemos simplificar las expresiones introduciendo la función hipergeométrica modificada ${}_2\mathcal{F}_1$, definida por

$$ {}_2\mathcal{F}_1\left(\begin{array}{c|c} a,\, b & \\ & x \\ c & \end{array}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{\Gamma(c+k)\, k!}\, x^k = \frac{1}{\Gamma(c)}\, {}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} a, b & x \\ & \\ c & x \end{array}\right) \tag{3.23} $$

A continuación se analizarán algunas funciones que pueden expresarse como un caso particular de la función hipergeométrica de Gauss.

Ejemplo 3.1.5. Representación hipergeométrica del arcoseno

Exprese la función

$$f(x) = \arcsin(x), \quad \forall x \in (-1,1),$$

en términos de la función hipergeométrica de Gauss ${}_2F_1$.

Solución 3.1.5 *Para todo* $x \in (-1,1)$,

$$\arcsin x = \int_0^x \left(1-t^2\right)^{-\frac{1}{2}} dt \qquad \textit{usando (3.12)}$$

$$= \int_0^x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k}{k!} t^{2k}\, dt$$

$$= x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k}{k!(2k+1)} x^{2k}$$

Aplicamos el teorema (3.1.1), con

$$\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} = \frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}{(k+1)\left(k+\frac{3}{2}\right)}$$

$$\arcsin x = x.{}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} & \\ & x^2 \\ \frac{3}{2} & \end{array}\right)$$

Ejemplo 3.1.6. Representación hipergeométrica de la tangente inversa

Exprese la función

$$f(x) = \arctan(x), \quad \forall x \in (-1,1),$$

en términos de la función hipergeométrica de Gauss ${}_2F_1$.

Solución 3.1.6 *Sabemos que, para todo* $x \in (-1,1)$

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$= x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \left(-x^2\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k \left(-x^2\right)^k$$

Aquí, se tiene que $\lambda_0 = 1$ y

$$\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} = \frac{2k+1}{2k+3} = \frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)(k+1)}{\left(k+\frac{3}{2}\right)(k+1)}$$

Por lo tanto, el teorema (3.1.1) proporciona

$$\arctan x = x \,.\, {}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} 1, \frac{1}{2} & \\ \frac{3}{2} & -x^2 \end{array}\right)$$

3.1.3. Propiedades de la función hipergeométrica

Antes de continuar con aplicaciones específicas, es importante establecer algunas identidades fundamentales que satisfacen las funciones hipergeométricas de Gauss. Estas propiedades, derivadas de la estructura de la serie hipergeométrica definida en (3.1) y de su ecuación diferencial asociada (ver Sección 3.1.1), permiten transformar y relacionar funciones con distintos parámetros, simplificando así el análisis de soluciones en contextos teóricos y aplicados.
Las propiedades que se presentan a continuación constituyen herramientas clave en el tratamiento analítico de expresiones hipergeométricas y serán de gran utilidad más adelante, especialmente al establecer relaciones entre las soluciones de ecuaciones diferenciales asociadas a funciones especiales, expresadas en términos de la función hipergeométrica de Gauss.

Propiedad 3.1.1: Propiedades funcionales de la función hipergeométrica

Las funciones hipergeométricas de Gauss satisfacen las siguientes propiedades

$$ {}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} a+1,\ b & \\ c & x \end{array}\right) - {}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} a,\ b & \\ c & x \end{array}\right) = \frac{bx}{c}\, {}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} a+1,\ b+1 & \\ c+1 & x \end{array}\right) \tag{3.24}$$

$$ {}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} a,\ b & \\ c & x \end{array}\right) - {}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} a,\ b & \\ c-1 & x \end{array}\right) = -\frac{abx}{c(c-1)}\, {}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} a+1,\ b+1 & \\ c+1 & x \end{array}\right) \tag{3.25}$$

$$ {}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} a,\ b+1 & \\ c+1 & x \end{array}\right) - {}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} a,\ b & \\ c & x \end{array}\right) = \frac{a(c-b)x}{c(c+1)}\, {}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} a+1,\ b+1 & \\ c+2 & x \end{array}\right) \tag{3.26}$$

$$ {}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} a-1,\ b+1 & \\ c & x \end{array}\right) - {}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} a,\ b & \\ c & x \end{array}\right) = \frac{(a-b-1)x}{c}\,{}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} a,\ b+1 & \\ c+1 & x \end{array}\right) \tag{3.27} $$

Demostración 3.1.3 *Para demostrar la propiedad (3.24) tenemos de la expresión (3.15)*

$$ {}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} a+1,\ b & \\ c & x \end{array}\right) - {}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} a,\ b & \\ c & x \end{array}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(a+1)_k-(a)_k}{(c)_k\,k!}(b)_k\right]x^k $$

$$ = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k\,(k-1)!}\cdot\frac{x^k}{ak} \qquad \textit{(usando la identidad de Pochhammer)} $$

$$ = x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a+1)_k(b+1)_k}{(c+1)_k\,k!}x^k \qquad \textit{(haciendo el cambio } k=m+1\textit{)} $$

$$ = \frac{bx}{c}\cdot{}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} a+1,\ b+1 & \\ c+1 & x \end{array}\right) $$

Las demás propiedades se omiten por brevedad y se dejan al lector como ejercicio (ver sección 3.3), ya que su demostración puede llevarse a cabo siguiendo razonamientos análogos a los expuestos anteriormente.

Uno de los ejemplos más importantes de funciones especiales que se expresan en términos de la función hipergeométrica de Gauss lo constituyen los polinomios de Jacobi. Estos polinomios surgen de manera natural al considerar parámetros específicos en la función ${}_2F_1$ y juegan un papel central en diversos contextos del análisis, como la teoría de ortogonalidad, soluciones de ecuaciones diferenciales y aplicaciones físicas. A continuación, se presenta su definición a partir de la función hipergeométrica.

Definición 3.1.3: Polinomios de Jacobi

Los polinomios de jacobi de grado n se define por

$$ P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\,{}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} -n,\ n+\alpha+\beta+1 & \\ \alpha+1 & \frac{1-x}{2} \end{array}\right) \tag{3.28} $$

donde ${}_2F_1$ es la función hipergeométrica de Gauss.

A partir de la Definición 3.1.3, se pueden derivar expresiones explícitas para los polinomios de Jacobi. A continuación, se presentan algunos ejemplos que ilustran cómo estos polinomios pueden obtenerse utilizando la función hipergeométrica de Gauss ${}_2F_1$. Esto permite no solo calcular los polinomios $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ de manera concreta, sino también apreciar su conexión estructural con las funciones hipergeométricas.

Ejemplo 3.1.7. Ejemplo

Utiliza la definición (3.1.3) para calcular los primeros 3 polinomios de Jacobi de orden (α, β)

Solución 3.1.7 *Si* $n = 0$

$$\begin{aligned} P_0^{(x,\beta)}(x) &= \frac{(\alpha+1)_0}{0!}\, {}_2F_1\left(0, \alpha+\beta+1, \alpha+1; \frac{1-x}{2}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{0} \frac{(0)_k(\alpha+\beta+1)_k}{k!(\alpha+1)_k} \left(\frac{1-x}{2}\right)^k \end{aligned}$$

$$P_0^{(\alpha,\beta)}(x) \quad = \quad 1 \tag{3.29}$$

si $n = 1$

$$\begin{aligned} P_1^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{(\alpha+1)!}{1!}\, {}_2F_1\left(-1, \alpha+\beta+2, \alpha+1; \frac{1-x}{2}\right) \\ &= (\alpha+1) \sum_{k=0}^{1} \frac{(-1)_k(\alpha+\beta+2)_k}{k!(\alpha+1)k} \left(\frac{1-x}{2}\right)^k \\ &= (\alpha+1) \left[\frac{(-1)_0(\alpha+\beta+2)_0}{0!(\alpha+1)_0} \left(\frac{1-x}{2}\right)^0 + \frac{(-1)_1(\alpha+\beta+2)_1}{1!(\alpha+1)_1} \frac{1-x}{2}\right] \end{aligned}$$

Simplificando

$$\begin{aligned} &= (\alpha+1) \left[1 - \frac{(\alpha+\beta+2)}{(\alpha+1)} \left(\frac{1-x}{2}\right)\right] \\ &= (\alpha+1) - (\alpha+\beta+2) \left(\frac{1-x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}[2\alpha+2-\alpha-\beta-2+(\alpha+\beta+2)x] \end{aligned}$$

$$P_1^{(\alpha_1\beta)}(x) \quad = \quad \frac{1}{2}[\alpha-\beta+(\alpha+\beta+2)x] \tag{3.30}$$

Si $n = 2$

$$\begin{aligned} P_2^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{(\alpha+1)_2}{2!}\, {}_2F_1\left(-2, \alpha+\beta+3, \alpha+1, \frac{1-x}{2}\right) \\ &= \frac{(\alpha+1)_2}{2!} \sum_{k=0}^{2} \frac{(-2)k(\alpha+\beta+3)k}{(\alpha+1)_k k!} \left(\frac{1-x}{2}\right)^k \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(-2)_1(\alpha+\beta+3)_1}{(\alpha+1)_1 1!}\left(\frac{1-x}{2}\right)^1 + \frac{(-2)_2(\alpha+\beta+3)_2}{(\alpha+1)_2 2!}\left(\frac{1-x}{2}^2\right) \\
&= \frac{(\alpha+1)2}{2!}\left[1-\frac{2(\alpha+\beta+3)}{\alpha+1}\left(\frac{1-x}{2}\right)+\frac{(-2)_2(\alpha+\beta+3)_2}{4(\alpha+1)_2 2!}\left(1-2x+x^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{2!}\left[(\alpha+1)_2-\frac{2(\alpha+2)(\alpha+\beta+3)}{2}(1-x)+\frac{(-2)_2(\alpha+\beta+3)_2}{4\times 2!}\left(1-2x+x^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{2!}\left[(\alpha+1)_2-(\alpha+2)(\alpha+\beta+3)+(\alpha+2)(\alpha+\beta+3)x+\frac{(\alpha+\beta+3)2}{4}\left(1-2x\right.\right.
\end{aligned}
$$

$$
P_2^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2!}\left[(\alpha+1)_2-(\alpha+2)(\alpha+\beta+3)+(\alpha+2)(\alpha+\beta+3)x+\frac{(\alpha+\beta+3)_2}{4}-\frac{(\alpha+\beta}{2}\right.
$$

$$
..+\frac{1}{2!}\frac{(\alpha+}{}
$$

Simplificando se obtiene que

$$
P_2^{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{2!}\left[-4-(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)^2+\frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+3)}{2}x+\frac{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+4)}{4}x^2\right]
$$

$$
P_2^{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{8}\left\{-4-(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)^2+2(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+3)x+(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+4)x^2\right\} \tag{3.31}
$$

3.1.4. Ecuación hipergeométrica confluente

Tomando la sustitución $x = \frac{t}{b}$ en 2.195 obtendremos la ecuación hipergeométrica confluente. Calculando las derivadas tenemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= b\frac{dy}{dt} \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= b^2\frac{d^2y}{dt^2}
\end{aligned}
$$

Reemplazando las derivadas en 2.195

$$
\left(\frac{t}{b}\right)\left(1-\left(\frac{t}{b}\right)\right)b^2\frac{d^2y}{dt^2}+\left[c-(a+b+1)\left(\frac{t}{b}\right)\right]b\frac{dy}{dt}-aby(t)=0
$$

$$
\left(\frac{t}{b}-\frac{t^2}{b^2}\right)b^2\frac{d^2y}{dt^2}+[cb-(a+b+1)t]\frac{dy}{dt}-aby=0
$$

$$
\left(bt-t^2\right)\frac{d^2y}{dt^2}+[cb-(a+b+1)t]\frac{dy}{dt}-aby=0
$$

$$
\left(t-\frac{t^2}{b}\right)\frac{d^2y}{dt^2}+\left[c-\left(1+\frac{a+1}{b}\right)t\right]\frac{dy}{dt}-ay=0
$$

Si hacemos que $b \to \infty$, obtenemos la ecuación hipergeométrica confluente

$$
t\frac{d^2y}{dt^2}+(c-t)\frac{dy}{dt}-ay = 0 \tag{3.32}
$$

Sabemos que la solución es de la siguiente forma

$$F\left(a,b,c,\frac{t}{b}\right)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(c+m)m!}\left\{\frac{\Gamma(b+m)}{b^m\Gamma(b)}\right\}t^m\right)$$

$$\lim_{b\to\infty}F\left(a,b,c,\frac{t}{b}\right)=?$$

$$\lim_{b\to\infty}F\left(a,b,c,\frac{t}{b}\right)=\lim_{b\to\infty}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(c+m)m!}\left\{\frac{\Gamma(b+m)}{b^m\Gamma(b)}\right\}t^m\right)$$

Tomamos el $\lim_{b\to\infty}\frac{\Gamma(b+m)}{b^m\Gamma(b)}$ y resolvamos ese limite ... Por la propiedades de la función gamma

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(b+m)}{\Gamma(b)} &= \prod_{i=0}^{m-1}(b+i)=b(b+1)\dots(b+m-1)\\ \frac{\Gamma(b+m)}{\Gamma(b)} &= b^m+\cdots\\ \text{Entonces}&\\ \lim_{b\to\infty}\frac{b^m+\cdots}{b^m} &= 1\end{aligned}$$

esto sigue que

$$\lim_{b\to\infty}F\left(a,b,c,\frac{t}{b}\right)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(c+m)m!}t^m\right)$$

Por lo que

$$\lim_{b\to\infty}F\left(a,b,c,\frac{t}{b}\right)=F(a,c,t)\qquad(3.33)$$

La expresión anterior se llama **serie Hipergeométrica Confluente de Gauss**.

3.2 Ecuaciones diferenciales como caso particular de función Hipergeométrica

La función hipergeométrica ${}_2F_1(a,b;c;x)$ ocupa un lugar destacado en el estudio de ecuaciones diferenciales. Muchas ecuaciones clásicas, como las de Legendre, Chebyshev, Hermite o Bessel, pueden verse como casos particulares de la ecuación hipergeométrica. Esto nos permite expresar sus soluciones en términos de una misma función, lo que unifica su análisis y nos brinda una herramienta poderosa para abordar diversos problemas con un enfoque común. Antes de tratar las ecuaciones clásicas analizamos una ecuación cuya forma general se plantea como ejercicio al lector.

Ejemplo 3.2.1. Una EDO reducida a la Ecuación Hipergeométrica

Expresa la ecuación diferencial

$$\left(x^2+4x+3\right)\frac{d^2y}{dx^2}+(2x+1)\frac{dy}{dx}+5y=0$$

en término de la ecuación Hipergeométrica.

Solución 3.2.1

$$(x+3)(x+1)\frac{dy}{dx}+(2x+1)\frac{dy}{dx}+5y=0$$

$$z=\frac{x+1}{-2} \qquad \textit{(Cambio de variable)}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}\frac{dy}{dz}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{4}\frac{d^2y}{dz^2}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial, obtenemos

$$z(1-z)\,y''-\left(\frac{1}{2}+2z\right)y'-5y=0$$

De la expresión (2.202) tenemos que la solución es

$$\begin{aligned} y(x)=c_0\,F&\left(\frac{1+\sqrt{19}i}{2},\frac{1-\sqrt{19}i}{2},-\frac{1}{2},x\right)\\ &+c_1\,x^{\frac{3}{2}}F\left(\frac{4+\sqrt{19}i}{2},\frac{4-\sqrt{19}i}{2},\frac{5}{2},x\right)\end{aligned}$$

3.2.1. Ecuación de Laguerre como caso particular de la Ecuación Hipergeométrica Confluente de Gauss

En 3.32 tomando la sustitución $c=\alpha+1$ y $a=-n$

$$t\frac{d^2y}{dt^2}+(\alpha+1-t)\frac{dy}{dt}+ny = 0$$

Por lo tanto la solución está dada por

$$F(-n,\alpha+1,t) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(-n)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(m-n)}{\Gamma(\alpha+1+m)m!}t^m$$

En el caso de que $\alpha=0$, obtenemos los polinomios de Laguerre de orden cero.

$$\begin{aligned} F(-n,+1,t) &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(-n)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(m-n)}{\Gamma(m+1)m!}t^m\\ &= \Gamma(1+n)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(n-m)!m!\Gamma(m+1)}t^m\end{aligned}$$

Partiendo de

$$
\begin{aligned}
\frac{\Gamma(1+n)}{(n-m)!m!\Gamma(m+1)} &= \frac{n!}{m!(n-m)!m!} \\
&= \frac{1}{m!}\left(\frac{n!}{m!(n-m)!}\right) \\
&= \frac{1}{m!}\begin{pmatrix} n \\ \\ m \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Entonces nos queda

$$
L_n^0(t) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!}\begin{pmatrix} n \\ \\ m \end{pmatrix}(-t)^m
$$

revisar la parte siguiente con la anterior A partir de la serie hipergeométrica confluente se obtienen los polinomios de Laguerre lo que motiva a presentar la definición siguiente

Definición 3.2.1: Serie hipergeométrica

Sea ${}_1F_1$ la serie hipergeométrica confluente de Gauss, los polinonios de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$ se obtienen a partir de

$$
L_n^{(\alpha)}(x) = \begin{pmatrix} n+\alpha \\ \\ n \end{pmatrix} {}_1F_1(-n, \alpha+1; x) \tag{3.34}
$$

Ahora a modo de ilustración obtenemos los polinomios de Laguerre.

Ejemplo 3.2.2. Polinomios de Laguerre

Obtenga los primeros cuatro polinomios de Laguerre $L_n(x)$ utilizando la expresión (3.34).

Solución 3.2.2

Para $n = 0$

$$L_0^{(0)}(x) = \binom{0}{0} \cdot {}_1F_1(0,1;x) = \binom{0}{0} \cdot 1 = 1$$

Para $n = 1$

$$L_1^{(0)}(x) = \binom{1}{1} \cdot {}_1F_1(-1,1;x) = \binom{1}{1} \left[1 + \frac{-1}{1}x\right] = 1 - x$$

Para $n = 2$

$$L_2^{(0)}(x) = \binom{2}{2} \cdot {}_1F_1(-2,1;x) = 1 + \frac{-2}{1}x + \frac{(-2)(-1)}{1\cdot 2\cdot 2}x^2 = 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2$$

Para $n = 3$

$$\begin{aligned} L_3^{(0)}(x) = \binom{3}{3} \cdot {}_1F_1(-3,1;x) &= 1 + \frac{-3}{1}x + \frac{(-3)(-2)}{1\cdot 2\cdot 2}x^2 + \frac{(-3)(-2)(-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 6}x^3 \\ &= 1 - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \end{aligned}$$

3.2.2. Ecuación de Hermite como caso particular de la ecuación Hipergeométrica confluente

En la ecuación definida en 2.38 se toma la sustitución $z = x^2$. Obteniendo las derivadas

$$dz = 2x\,dx$$

$$\frac{d}{dz}(\,) = \frac{1}{2x}\frac{d}{dx}(\,)$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{d}{dz}(\,)\right) = \frac{1}{2x}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2x}\frac{d}{dx}(\,)\right)$$

$$\frac{d^2}{dz^2}(\,) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x^{-1}\frac{d}{dx}(\,)\right)$$

$$= \frac{1}{4x}\left[x^{-1}\frac{d^2}{dx^2}(\,) - x^{-2}\frac{d}{dx}(\,)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2}(\,) - \frac{1}{4x^3}\frac{d}{dx}(\,) - \frac{1}{2x^2}\cdot\frac{1}{2x}\frac{d}{dx}(\,)$$

$$= \frac{d^2}{dz^2}(\,) = \frac{1}{4z}\frac{d^2}{dx^2}(\,) - \frac{1}{2z}\frac{d}{dz}(\,)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(\,) = 4z\frac{d^2}{dz^2}(\,) + 2\frac{d}{dz}(\,)$$

$$4z\frac{d}{dz}(\,) = 2x\frac{d}{dx}(\,)$$

Sustituyendo las derivadas en 2.38, tenemos

$$\begin{aligned} 4zy''(z) + 2y'(z) - 4zy'(z) + 2ny(z) &= 0 \\ 4zy'' + 2[1-2z]y' + 2ny(z) &= 0 \\ zy'' + \left[\frac{1}{2} - z\right] y' + \frac{n}{2} z &= 0 \end{aligned}$$

La ecuación obtenida es un caso de 3.32 con $c = \frac{1}{2}$ y $a = -\frac{n}{2}$. Así las soluciones están dada por

$$\begin{aligned} y_0(x) &=_1 F_1 \left(-\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right) \\ y_1(x) &= x_1 F_1 \left(-\frac{n+1}{2} + 1, \frac{3}{2}, x^2\right) \end{aligned}$$

Ejemplo 3.2.3. Representación integral de la función Hipergeometrica

Agregar Agregar mas ejemplos y expresar las funciones en el capitulo en termino de la hipergeometrica

3.2.3. Ecuación de Jacoby como caso particular de la ecuación Hipergeométrica

3.2.4. Ecuación de Chevyshev como caso particular de la ecuación Hipergeométrica

Tomando el cambio de variable $t = \dfrac{1-x}{2}$ en la ecuación (2.95) obtenemos la ecuación hipergeométrica

$$t(1-t)y'' + \left(\frac{1}{2} - t\right) y' + a^2 y = 0 \tag{3.35}$$

Cuya solución entorno a los puntos $x_0 = 0$ y $x_0 = 1$ se presenta a continuación.

- Como $x_0 = 0$ es un punto ordinario de (3.35) su solución se obtiene de la expresión (2.202)

$$y(x) = c_0\, F\left(a, -a, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right) + c_1 \left(\frac{1-x}{2}\right)^{1/2} F\left(\frac{1}{2} + a, \frac{1}{2} - a, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right) \tag{3.36}$$

- De la expresión (2.203) obtenemos la solución alrededor de $x_0 = 1$

$$y(x) = c_0 F\left(a, -a, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right) + c_1 \left(\frac{1-x}{2}\right)^{1/2} F\left(a + \frac{1}{2}, -a + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1-x}{2}\right) \tag{3.37}$$

3.2.5. Ecuación de Legendre como caso particular de la ecuación Hipergeométrica

Sean $\lambda = n(n+1)$ y $x = 1 - 2t$ en la ecuación (2.143), realizando el cambio de variable llegamos a la ecuación

$$t(1-t)y'' + (1-2t)y' + n(n+1)y = 0 \tag{3.38}$$

Como la solución de (2.143) son los polinomios de Legendre, la solucíon de (3.38) podemos expresarla como

$$P_n(x) = F(-n, n+1, 1, (1-x)/2) \tag{3.39}$$

En el siguiente ejemplo se ilustrará cómo se pueden obtener los primeros tres polinomios de Legendre a partir de la función hipergeométrica de Gauss. Esta estrategia permite evidenciar la relación que existe entre dichos polinomios clásicos y las soluciones particulares de la ecuación hipergeométrica, reforzando así su importancia dentro del estudio de funciones especiales.

Ejemplo 3.2.4. Polinomios de Legendre a partir de la función Hipergeométrica

Obtenga los polinomios $P_0(x), P_1(x), P_2(x)$ de Legendre utilizando la función Hipergeométrica

Solución 3.2.3

$$n = 0$$

$$P_0(x) = \sum_{m=0}^{0} \frac{(-0)_m(1)_m}{m!(1)_m}\left(\frac{1-x}{2}\right)^m$$

$$P_0(x) = 1$$

$$n = 1$$

$$P_1(x) = \sum_{m=0}^{1} \frac{(-1)_m(2)_m}{m!(1)_m}\left(\frac{1-x}{2}\right)^m$$

$$P_1(x) = 1 - 2\left(\frac{1-x}{2}\right)$$

$$P_1(x) = x$$

$$n = 2$$

$$P_2(x) = \sum_{m=0}^{2} \frac{(-2)_m(3)_m}{m!(1)_m}\left(\frac{1-x}{2}\right)^m$$

$$P_2(x) = 1 - 3(1-x) + \frac{3}{2}(1-x)^2$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

En el siguiente ejemplo, obtendremos las soluciones de la ecuación de Airy (2.194), la cual fue analizada previamente en la Sección **??**, expresándolas en términos de la función hipergeométrica.

Ejemplo 3.2.5. ED Airy

Obtenga las soluciones de la ED (2.194) en términos de la función hipergeométrica

Solución 3.2.4 *Tomando $n = k+3$ en la expresión de recurrencia (??)*

$$a_{k+3} = \frac{a_k}{(k+2)(k+3)} \quad \forall k \geq 0 \tag{3.40}$$

Ahora reemplazando k sucesivamente por $3k, 3k+1, 3k+2$

- $$a_{3k+3} = \frac{a_{3k}}{3(3k+2)(k+1)}$$

  $$k=0; \quad a_3 = \frac{a_0}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

  $$k=1; \quad a_6 = \frac{a_3}{3 \cdot 5 \cdot 2} = \frac{a_0}{3^2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 2}$$

  $$k=2; \quad a_9 = \frac{a_6}{3 \cdot 8 \cdot 3} = \frac{a_0}{3^3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 2}$$

  $$k=3; \quad a_{12} = \frac{a_9}{3 \cdot 11 \cdot 4} = \frac{a_0}{3^4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 2}$$

  $$\vdots$$

  $$\begin{aligned} a_{3k} &= \frac{a_0}{3^k \cdot k! \cdot (3k-1)(3k-4) \cdots 5 \cdot 2} \qquad \forall k \geq 1 \\ &= \frac{a_0}{3^{2k} \cdot k! \cdot \left(-\frac{1}{3}+k\right)\left(-\frac{1}{3}+k-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{3}+2\right)\left(-\frac{1}{3}+1\right)} \\ &= \frac{a_0}{3^{2k} \cdot k! \cdot \left[\left(-\frac{1}{3}+1\right)+(k-1)\right]\left[\left(-\frac{1}{3}+1\right)+(k-2)\right]\cdots\left[\left(-\frac{1}{3}+1\right)+1\right]\left(-\frac{1}{3}+1\right)} \\ a_{3k} &= \frac{a_0}{3^{2k} \cdot k! \cdot \left(\frac{2}{3}\right)_k} \end{aligned}$$

- $$a_{3k+4} = \frac{a_{3k+1}}{3(k+1)(3k+4)}$$

  $$k=0; \quad a_4 = \frac{a_1}{3 \cdot 1 \cdot 4}$$

  $$k=1; \quad a_7 = \frac{a_4}{3 \cdot 2 \cdot 7} = \frac{a_1}{3^2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{a_1}{3^3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 4}$$

  $$\vdots$$

  $$\begin{aligned} a_{3k+1} &= \frac{a_1}{3^k \cdot k! \cdot (3k+1)(3k-2)\cdots 7 \cdot 4} \qquad \forall k \geq 1 \\ &= \frac{a_1}{3^{2k} \cdot k! \cdot \left(\frac{4}{3}\right)_k} \end{aligned}$$

- $$a_{3k+5} = \frac{a_{3k+2}}{(3k+4)(3k+5)}$$

*Como en la expresión (**??**) se obtuvo que $a_2 = 0$, entonces $a_{3k+5} = 0$*

Por tanto, una expresión de la solución general de la ecuación de Airy es

$$y = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{3k} x^{3k} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{3k+1} x^{3k+1}$$

Por la expresión (3.9) dada en el teorema (3.1.1)

$$a_0 \, {}_0F_1 \left(\left. \begin{matrix} c \\ \frac{2}{3} \end{matrix} \right| \frac{x^3}{9} \right) + a_1 x \, {}_0F_1 \left(\left. \begin{matrix} c \\ \frac{4}{3} \end{matrix} \right| \frac{x^3}{9} \right) \tag{3.41}$$

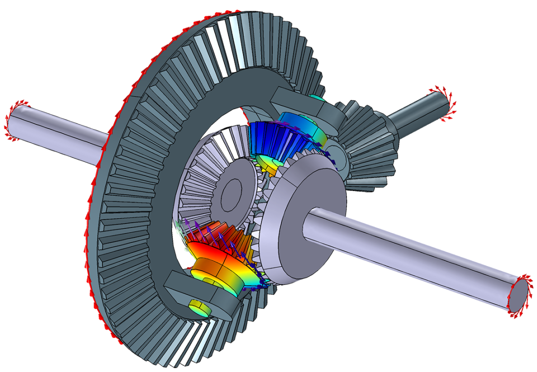
3.3 Ejercicios

Propiedades de la función hipergeométrica

1. Demostrar la propiedad (3.25) de la función hipergeométrica.
2. Demostrar la propiedad (3.26) de la función hipergeométrica.
3. Demostrar la propiedad (3.27) de la función hipergeométrica.

4 CAPÍTULO

Funciones especiales como solución de un problema de Sturm-Louville



El estudio de las ecuaciones de SturmLiouville constituye un puente fundamental entre la teoría de ecuaciones diferenciales y la aparición de funciones especiales en contextos físicos y matemáticos. Estos problemas, caracterizados por operadores diferenciales autoadjuntos y condiciones de frontera, permiten la construcción de sistemas de funciones ortogonales que forman la base para el análisis de soluciones de gran diversidad de fenómenos.

En este capítulo se mostrará cómo diversos conjuntos de funciones especiales clásicas como los polinomios de Legendre, Hermite, Laguerre, Chebyshev, así como las funciones de Bessel emergen de manera natural como soluciones de problemas de SturmLiouville. Cada una de estas funciones se obtiene al imponer condiciones específicas que reflejan la naturaleza del sistema modelado, desde vibraciones de membranas y ondas esféricas, hasta la descripción cuántica de osciladores armónicos y potenciales centrales.

Asimismo, se introducirá el concepto de función de Green como autofunción asociada a un operador de SturmLiouville, junto con la importancia de los problemas con valores en la frontera. De esta manera, el lector comprenderá que las funciones especiales no son entidades aisladas, sino parte de una teoría unificada que surge del análisis de operadores diferenciales y de las condiciones físicas impuestas en los sistemas.

Teoria de sturm-liouville,definir que es el espacio L^2, un espacio de hilbert y pre-hilbert, ejemplos, definir el operador, el operador adjunto, propiedades, ejemplos, problemas de sturm liouville y clasificaciones(dirichlet,newman,cauchy) clasificacion de los problemas de sturm-liouville de acuerdo a las condiciones, propiedades de los problemas de sturm-liouville(las funciones propias de un problema de sturm-liouville forman un sistema ortogonal) calcular las normas de los polinomios especiales

4.1 Función de Green como autofunciones

We continue to consider the operator

$$L[y(x)] = [p(x)y'(x)]' + q(x)y(x)$$

We want to solve

$$L[y(x)] = -f(x)$$
$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

Suppose that $\{\phi_n\}$ is a complete orthonormal basis for the vector space consisting of eigenvectors of L that satisfy the boundary conditions, and that λ_n is the eigenvalue of ϕ_n. We assume the inner product

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Then we have

$$f(x) = \sum f_n\phi_n(x), \quad y(x) = \sum y_n\phi_n(x),$$

where

$$f_n = \langle f(x), \phi_n(x)\rangle = \int_0^1 f(x)\phi_n(x)dx.$$

We must find the y_n s. Since L is a linear operator and $\phi_n(x)$ is an eigenvector of L with eigenvalue λ_n for each n, we have

$$L[y(x)] = L\left(\sum y_n\phi_n(x)\right) = \sum y_n\lambda_n\phi_n(x).$$

So, from $L[y(x)] = -f(x)$, we get

$$\sum y_n\lambda_n\phi_n(x) = -\sum f_n\phi_n(x),$$

and, since $\{\phi_n(x)\}$ is a basis,

$$y_n\lambda_n = -f_n.$$

Now, 0 is not an eigenvalue, so $y_n = -\frac{f_n}{\lambda_n}$, and thus

$$y(x) = \sum y_n\phi_n(x) = -\sum \frac{f_n}{\lambda_n}\phi_n(x).$$

We now want to find $G(x,t)$ so that

$$y(x) = \int_0^1 G(x,t)f(t)dt;$$

that is, we want to find the Green's function. Recall

$$f_n = \int_0^1 f(t)\phi_n(t)dt$$

so

$$\begin{aligned} y(x) &= -\sum \frac{\phi_n(x)}{\lambda_n} f_n = -\sum \frac{\phi_n(x)}{\lambda_n} \int_0^1 f(t)\phi_n(t)dt = -\sum \int_0^1 \frac{\phi_n(x)\phi_n(t)}{\lambda_n} f(t)dt \\ &= -\int_0^1 \left(\sum \frac{\phi_n(x)\phi_n(t)}{\lambda_n} \right) f(t)dt \end{aligned}$$

where we have assumed moving the summation inside the integral is legitimate. Thus,

$$G(x,t) = -\sum \frac{\phi_n(x)\phi_n(t)}{\lambda_n}. \tag{4.1}$$

Clearly, to find the Green's function using this method, the crucial step is to find the eigenvalues and eigenfunctions for L that satisfy the initial conditions. We note that some authors consider the problem

$$\bar{L}[y(x)] + \mu y(x) = [p(x)y'(x)]' + \bar{q}(x)y(x) + \mu y(x) = -f(x),$$

where μ is not an eigenvalue of $\bar{L}$ (but now 0 may be an eigenvalue of $\bar{L}$) and obtain the Green's function

$$\bar{G}(x,t) = -\sum \frac{\phi_n(x)\phi_n(t)}{\lambda_n - \mu}. \tag{4.2}$$

By adjusting either $q(x)$ or $\bar{q}(x)$ either problem can be changed into the other. The preference would be for the version for which the eigenvalues/ eigenvectors are easier to find.

Ejemplo 4.1.1. Use the eigenfunction expansion to find the Green's

Use the eigenfunction expansion to find the Green's function for

$$y''(x) + y(x) = -f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

Demostración 4.1.1 *We consider the second form of the problem with $L[y(x)] = y''(x)$ and $\mu = 1$. The eigenvalues and eigenfunctions for are*

$$\begin{gathered} L[y(x)] = y''(\text{x}) \\ y(x) = \sin(ax), \quad y(x) = \cos(ax), \end{gathered}$$

each with eigenvalue $-a^2$. We now find the eigenvalues for which the eigenfunctions satisfy the initial conditions. Suppose

$$y(x) = A\sin(ax) + B\cos(ax)$$

and $y(0) = 0$. Then $B = 0$. If $y(1) = 0$, then

$$y(1) = 0 = A\sin\alpha$$

so $\alpha = n\pi$ where n is an integer. (Otherwise, we have only the trivial solution.) The eigenvalue of L for the eigenfunction $\psi_n(x) = \sin(n\pi x)$ is $-(n\pi)^2$. Since

$$\int_0^1 \sin^2(n\pi x)dx = \frac{1}{2}, \quad \textit{then } \|\psi_n(x)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Thus, $\{\sqrt{2}\sin(n\pi x)\} = \{\phi_n(x)\}$ is an orthonormal set of eigenfunctions for L that satisfy the initial conditions. So, according to equation (4.2), the Green's function for this example is

$$G(x,t) = -\sum \frac{\phi_n(x)\phi_n(t)}{\lambda_n - \mu} = -\sum \frac{[\sqrt{2}\sin(n\pi x)][\sqrt{2}\sin(n\pi t)]}{-(n\pi)^2 - 1}.$$

4.2 Problemas con valores en la frontera

Hasta ahora, nos hemos concentrado sólo en problemas de valor inicial, en los que para una ED dada las condiciones suplementarias sobre la función desconocida y sus derivadas se prescriben en un valor fijo x_0 de la variable independiente x. Sin embargo, hay una variedad de otras condiciones posibles que son importantes en las aplicaciones. En muchos problemas prácticos, los requisitos adicionales se dan en forma de condiciones de contorno: la función desconocida y algunas de sus derivadas se fijan en más de un valor de la variable independiente x. La ED junto con las condiciones de contorno se conoce como un problema de valor de contorno. En esta sección proporcionaremos una condición necesaria y suficiente para que un problema de valor de contorno dado tenga una solución única. Antes de tratar la condición de suficiencia y necesidad vamos a tratar la definición de un problema de valor de contorno.

Definición 4.2.1: Problema con valores en la frontera

Si en la ecuación diferencial 1.77 consideramos el caso de la ecuación lineal de segundo orden

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x) \tag{4.3}$$

donde las funciones $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$ y $g(x)$ son continuas en un intervalo $I = [\alpha, \beta]$. La ED (4.5) conjuntamente con las condiciones de frontera de la forma

$$\begin{aligned} \ell_1[y] &= a_0y(\alpha) + a_1y'(\alpha) + b_0y(\beta) + b_1y'(\beta) = A \\ \ell_2[y] &= c_0y(\alpha) + c_1y'(\alpha) + d_0y(\beta) + d_1y'(\beta) = B \end{aligned} \tag{4.4}$$

con a_i, b_i, c_i, d_i, $i = 0, 1$ y A, B son constantes conocidas se denomina **problema de valor límite lineal de dos puntos no homogéneo.**

Para el caso de que $g(x) = 0$ y $A = B = 0$ tenemos la expresión

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0 \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} \ell_1[y] &= 0 \\ \ell_2[y] &= 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

que se llama **problema de valor límite lineal de dos puntos homogéneo**. Las condiciones de frontera (4.4) son bastante generales y en particular incluyen los casos

- Si en (4.4) tenemos que $a_0 = d_0 = 1,\ a_1 = b_0 = b_1 = c_0 = c_1 = d_1$ tenemos la condición de frontera que se llama **condición de Dirichlet**

$$y(\alpha) = A, \quad y(\beta) = B \tag{4.7}$$

- Si en (4.4) tenemos que $a_1 = d_0 = 1,\ a_0 = b_0 = b_1 = c_0 = c_1 = d_1$ tenemos la condición de frontera que se llama **condición de Neumann**

$$y'(\alpha) = A, \quad y'(\beta) = B \tag{4.8}$$

- Si en (4.4) tenemos que $a_0 = b_1 = c_1 = d_1 = 1$ con $a_1 = b_0 = c_0 = d_0 = 0$ tenemos la condición de frontera que se llama **condición de Cauchy**

$$\begin{aligned} y(\alpha) = A, \quad y'(\beta) = B \\ y'(\alpha) = A, \quad y(\beta) = B \end{aligned} \tag{4.9}$$

- Si en (4.4) tenemos que $b_0 = b_1 = c_0 = c_1 = 0$ tenemos la condición de frontera que se llama **condición de Sturm-Liouville**

$$\begin{aligned} a_0 y(\alpha) + a_1 y'(\alpha) = A \\ d_0 y(\beta) + d_1 y'(\beta) = B \end{aligned} \tag{4.10}$$

  con $a_0^2 + a_1^2 \neq 0$ y $d_0^2 + d_1^2 \neq 0$.

- Si en (4.4) tenemos que $a_0 = c_1 = 1$, $b_0 = d_1 = -1$, con $a_1 = b_1 = c_0 = c_1 = 0$ y $A = B = 0$ tenemos la condición de frontera que se llama **condición de frontera periódica**

$$y(\alpha) = y(\beta), \quad y'(\alpha) = y'(\beta) \tag{4.11}$$

El problema de valores en la frontera (4.5) , (4.4) se llama **regular** si α como β son valores finito, y la función $a_2(x) \neq 0$ para toda $x \in I$. Si $\alpha = -\infty$ y/o $\beta = \infty$ y/o $a_2(x) = 0$ para al menos un valor de $x \in I$, entonces el problema (4.5) , (4.4) se llama **singular**.
Una solución del problema de valores en la frontera (4.5) , (4.4), es una solución de ED (4.5) que satisface las condiciones de fronteras dada en (4.4).
La teoria de la existencia y unicidad de los problemas de valores en la frontera es más exigente que la teoría de los problemas de valores iniciales, en los siguientes ejemplos analizamos la existencia y unicidad de una solución de cierto problemas de valores iniciales y como cambia el comportamiento de la solución al resolver la misma ED con condiciones de frontera y viceversa.

Ejemplo 4.2.1. Problema de valores iniciales vs problema de valores en la frontera

Analiza la solución de la ED dada por

$$y'' + y = 0 \tag{4.12}$$

sujeta a las condiciones

1. $$y(0) = w_1 \qquad y'(0) = w_2 \qquad w_1, w_2 \in \mathrm{R} \tag{4.13}$$

2. $$y(0) = 0 \qquad y(\pi) = B, \quad B \neq 0 \tag{4.14}$$

Solución 4.2.1 *La ecuación diferencial (4.12) es un caso particular de la ecuación diferencial (**??**) y cuya solución general está dada por (**??**), de manera que la solución de la ecuación (4.12) se obtiene de (**??**) para $k = 1$, así*

$$y = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) \tag{4.15}$$

Es la solución de (4.12).

1. *Ahora aplicando las condiciones iniciales tenemos*

   $$y(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = w_1$$

   lo que implica que $c_1 = w_1$, de manera que

   $$y = w_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$$

   Para aplicar la segunda condición derivamos la expresión anterior

   $$y = -w_1 \sin(x) + c_2 \cos(x)$$

   Evaluando la segunda condición

   $$y'(0) = -w_1 \sin(0)\, c_2 \cos(0) = w_2$$

   De donde $c_2 = w_2$, por lo tanto la solución al problema esta dado por

   $$y = w_1 \cos(x) + w_2 \sin(x)$$

2. *Evaluamos las condiciones de frontera en la solución de (4.12), teniendo*

   $$y(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = 0$$

   Implicando que $c_1 = 0$ quedandonos asi la solución de la forma

   $$y = c_2 \sin(x)$$

   Ahora aplicamos la segunda condición, evaluando tenemos

   $$y(0) = c_2 \sin(0) = B$$

   Lo cual nos llega a una contradicción ya que $B \neq 0$, por lo que no existe una solución para el problema (4.12),(4.14).

En el ejercicio anterior hemos visto que las condiciones iniciales y/o de frontera juegan un papel fundamental para la existencia de una solución de un problema de valores iniciales o de frontera. A continuación vamos analizar otro ejercicio con igual naturaleza.

Ejemplo 4.2.2. Solución única vs Infinitas soluciones

Analiza la solución de la ED dada por

$$y'' + y = 0$$

sujeta a las condiciones

1. $y(0) = 0 \qquad y(\beta) = B \quad 0 < \beta < \pi$
2. $y(0) = 0 \qquad y(\pi) = 0$

Solución 4.2.2 *Sabemos que la solución de la ED está dada por la expresión (4.15)*

Aplicando las condiciones tenemos

$$y\left(0\right)=c_1\cos\left(0\right)+c_2\sin\left(0\right)=0$$

Lo que implica que $c_1=0$, quedándonos así la solución de la forma

$$y=c_2\sin\left(x\right)$$

Por la segunda condición tenemos

$$y\left(\beta\right)=c_2\sin\left(\beta\right)=B \tag{4.16}$$

Despejando a c_2

$$c_2=\frac{B}{\sin\left(\beta\right)}$$

De manera que reemplazando este valor en (4.16) obtenemos la solución única para este problema.

$$y=\frac{B}{\sin\left(\beta\right)}\sin\left(x\right)$$

2. *De la primera condición tenemos*

$$y=c_2\sin\left(x\right)$$

Aplicando la segunda condición

$$y\left(\pi\right)=c_2\sin\left(\pi\right)=0$$

Implica que c_2 puede ser cualquier número real, obteniendo así infinitas soluciones de la forma

$$y=c_2\sin\left(x\right)\qquad c_2\in\mathcal{R}$$

Es claro que para el problema (4.5), (4.6) la función constante $y=0$ (solución trivial) es siempre una solución. Sin embargo, con los ejemplos anteriores hemos visto que además de la solución trivial el problema con valores en la frontera puede tener soluciones no triviales. Esto nos lleva a cuestionarnos bajo qué condiciones un problema con valores en la frontera tiene solución única. El siguiente teorema muestra las condiciones suficientes y necesarias para que el problema (4.5), (4.6) tenga únicamente la solución trivial.

Teorema 4.2.1:

Sean $y_1(x)$ y $y_2(x)$ dos soluciones linealmente independientes de la ED homogénea (4.5). Entonces el problema con valores en la frontera (4.5), (4.6) tiene la solución trivial si y solo si

$$\Delta=\begin{vmatrix}\ell_1\left[y_1\right] & \ell_1\left[y_2\right]\\ \ell_2\left[y_1\right] & \ell_2\left[y_2\right]\end{vmatrix}\neq 0 \tag{4.17}$$

Demostración 4.2.1 *Por hipótesis $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son soluciones linealmente independiente de (4.5), entonces la solución general está dada por*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

Esta función es solución del problema (4.5), (4.6) si y solo si satisface las condiciones de fronteras, es decir,

$$\begin{aligned}\ell_1 [c_1 y_1 + c_2 y_2] = c_1 \ell_1 [y_1] + c_2 \ell_1 [y_2] = 0\\ \ell_2 [c_1 y_1 + c_2 y_2] = c_1 \ell_2 [y_1] + c_2 \ell_2 [y_2] = 0\end{aligned}$$

Este es un sistema de dos ecuaciones con dos variables y de algebra lineal sabemos que tiene solución única si $\Delta \neq 0$.

Como consecuencia inmediata del teorema (**??**) se presenta el siguiente corolario.

Corolario 4.2.1: Colorario

El problema de valores en la frontera (4.5), (4.6) tienes un número infinito de soluciones no triviales si y solo si $\Delta = 0$

Definición 4.2.2: Problema de Sturm-Liouville

Un problema con valores en la frontera que consiste de una ecuación diferencial

$$(p(x)y')' + q(x)y + \lambda r(x)y = p(y) + \lambda r(x)y \quad = \quad 0 \tag{4.18}$$

tal que $x \in J = [a, b]$ con las condiciones de frontera

$$a_0 y(a) + a_1 y'(a) \quad = \quad 0 \qquad a_0^2 + a_1^2 > 0 \tag{4.19}$$

$$d_0 y(b) + d_1 y'(b) \quad = \quad 0 \quad d_0^2 + d_1^2 > 0 \tag{4.20}$$

Se llama problema de **Sturm-Liouville**

En la ED 4.18, λ es un parámetro, y las funciones $q, r \in C(J), p \in C'(J)$ y $p(x) > 0, r(x) > 0 \quad$ en J.
El Problema 4.18 conjunto a las condiciones 4.19 satisfaciendo las condiciones especificadas anteriormente se dice que es un problema **Regular de Sturm-Liouville**.
Claramente, si tomamos $y(x) \equiv 0$ siempre cumplirá el problema dado 4.18 conjuntamente con las condiciones 4.19. Resolver un problema como el dado en 4.18 consiste en encontrar el valor de λ llamado **valor propio** y la solución correspondiente $\phi_\lambda(x)$ denominada **función propia**.

El conjunto de todo los valores propios de un Problema regular se llama espectro.

Ejemplo 4.2.3. Determina los valores y vectores propios

Determina los valores y vectores propios del problema con valores en la frontera

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0 \tag{4.21}$$

sujeto a las condiciones

$$y(0) = y(\pi) = 0 \tag{4.22}$$

Solución 4.2.3 *Para resolver este ejercicio vamos a suponer dos casos:*

1. $\lambda = 0$
   Si $\lambda = 0$, la ecuación se reduce a $y''(x) = 0$ y la solución general es

   $$y(x) = c_1 + c_2 x \tag{4.23}$$

   Ahora aplicando las condiciones

   $$y(0) = c_1 = 0$$

   y

   $$y(\pi) = \pi c_2 = 0$$

   lo que implica que $c_2 = 0$.
   Lo que podemos notar que obtenemos la funcion $y(x) \equiv 0$ es la solucion trivial y $\lambda = 0$ no es un valor propio del problema 4.21 y 4.22.

2. $\lambda \neq 0$
   Ahora supondremos $\lambda \neq 0$, y por conveniencia tomaremos $\lambda = n^2$, donde n puede no ser un numero real. Asi, la ecuación 4.21 se transforma en

   $$y''(x) + n^2 y(x) = 0$$

   cuya solución general es

   $$y(x) = c_1 e^{inx} + c_2 e^{-inx} \tag{4.24}$$

   y en término de seno y coseno es

   $$y(x) = (c_1 + c_2)\cos(nx) + (c_1 - c_2)\, i \sin(nx) \tag{4.25}$$

   Sustituyendo las condiciones de frontera obtenemos el sistema de ecuación

   $$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{in\pi} + c_2 e^{-in\pi} = 0 \end{cases} \tag{4.26}$$

El sistema anterior tiene solución no trivial, si y solo si, el determinante del sistema es diferente de cero, es decir,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{in\pi} & e^{-in\pi} \end{vmatrix} = e^{-in\pi} - e^{in\pi} = 0$$

Ahora sea $n = k + it$, *donde* $k, t \in \mathbb{R}$

$$e^{-i\pi(k+it)} - e^{i\pi(k+it)} = 0$$
$$e^{(t\pi - k\pi i)} - e^{(-t\pi + k\pi i)} = 0$$

Por la identidad de Euler

$$e^{t\pi}[\cos(k\pi) - i\,\text{sen}(k\pi)] - e^{-t\pi}[\cos(k\pi) + i\,\text{sen}(k\pi)] \quad = \quad 0$$

Simplificando

$$\left(e^{t\pi} - e^{-t\pi}\right)\cos(k\pi) - i\left(e^{t\pi} - e^{-t\pi}\right)\text{sen}(k\pi)$$

utilizando las identidades del seno y coseno hiperbólico tenemos

$$2\sinh(t\pi)\cos(k\pi) - 2i\cosh(t\pi)\,\text{sen}(k\pi) = 0$$

lo que implica que

$$\sinh(t\pi)\cos(k\pi) = 0 \tag{4.27}$$

y

$$\cosh(t\pi)\,\text{sen}(k\pi) = 0 \tag{4.28}$$

Como $\cosh(t\pi) > 0\ \forall t$, *la ecuación 4.28 requiere que*

$$\text{sen}(k\pi) = 0$$

lo que implica que $k = m \in Z$. *Para esta elección de* k, *la ecuación 4.27 se reduce a*

$$\sinh(t\pi) = 0$$

por lo que $t = 0$.
Con este valor para t, k *debe ser distinto de cero, ya que queremos la solución no trivial,por lo tanto,* $n = k$. *De manera que el valor propio es*

$$\lambda_k \quad = \quad n^2 = k^2 \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Las funciones propias correspondiente a λ_k *son*

$$\phi_k(x) \quad = \quad c_1 e^{ikx} - c_1 e^{-ikx}$$
$$\phi_k(x) \quad = \quad c_1\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right)$$
$$\phi_k(x) \quad = \quad 2ic_1\,\text{sen}(kx)$$

o simplemente

$$\phi_k(x) \quad = \quad \text{sen}(kx)$$

Ejemplo 4.2.4. Determina los valores y vectores propios del problema 4.21 con las condiciones

Determina los valores y vectores propios del problema 4.21 con las condiciones

$$y(0) + y'(0) = 0, \quad y(1) = 0 \tag{4.29}$$

Solución 4.2.4 *1. Si* $\lambda = 0$

Para $\lambda = 0$*, la solución general está dada por*

$$y(x) = c_1 + c_2 x$$

Las condiciones de frontera implican

$$c_1 + c_2 = 0$$

es decir $c_1 = -c_2$*.*
Por lo tanto $\lambda = 0$ *es un valor propio y la correspondiente función propia es*

$$\phi_0(x) = 1 - x$$

2. Si $\lambda \neq 0$
si $x \neq 0$*, y reemplazamos de nuevo* $\lambda = n^2$*, tenemos que*

$$y(x) = c_1 e^{inx} + c_2 e^{-inx}$$

por las condiciones de frontera tenemos

$$\begin{cases} (c_1 + c_2) + in\,(c_1 - c_2) = 0 \\ c_1 e^{in} + c_2 e^{-in} = 0 \end{cases}$$

El sistema anterior tiene solución no trivial, si y solo si,

$$\begin{vmatrix} 1 + in & 1 - in \\ e^{in} & e^{-in} \end{vmatrix} = (1 + in)e^{-in} - (1 - in)e^{in} = 0$$

Desarrollando tenemos

$$e^{-in} + ine^{-in} - e^{in} + ine^{in} = 0$$

Por factor común

$$-\left(e^{in} - e^{-in}\right) + ni\left(e^{in} + e^{-in}\right) = 0$$

por la identidad de seno y coseno hiperbólico

$$-i\,\mathrm{sen}(n) + i\cos(n) = 0$$

lo que es equivalente a

$$\tan(n) = n \tag{4.30}$$

para encontrar las soluciones de la ecuación anterior, graficaremos ambas funciones de manera separada, es decir, $y = n$ *y* $y = \tan(n)$*.*
graficar
A partir de la gráfica, es claro que la ecuación 4.30 tiene un infinito números de raíces positiva de la forma

$$n_k \simeq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$$

como en la ecuación 4.30 podemos reemplazar n por $-n$, tenemos que

$$n_k \simeq \pm(2k+1)\frac{\pi}{2}$$

por lo tanto, el problema tiene infinitos valores propios, $\lambda_0 = 0, \lambda_k = (2k+1)^2\frac{\pi^2}{4}, k = 1, 2, \ldots$ *y sus funciones propias son*

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= 1 - x \\ \phi_k(x) &= \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_k}(1-x)\right), k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Teorema 4.2.2: Los valores propios del problema de Sturm-Liouville

Los valores propios del problema de Sturm-Liouville dado en (4.18) , (4.19) son simples, es decir, si λ es un valor propio de (4.18),(4.19) y $\phi_1(x)$,$\phi_2(x)$ son las correspondientes funciones propias, entonces $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$ son linealmente independientes.

Demostración 4.2.2 *Como $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$ son soluciones de (4.18), tenemos*

$$(p(x)\phi_1')' + q(x)\phi_1 + \lambda r(x)\phi_1 = 0 \tag{4.31}$$

y

$$(p(x)\phi_2')' + q(x)\phi_2 + \lambda r(x)\phi_2 = 0. \tag{4.32}$$

Multiplicando (4.31) por $\phi_2(x)$, y (4.32) por $\phi_1(x)$ y restando, tenemos

$$\phi_2\left(p(x)\phi_1'\right)' - \left(p(x)\phi_2'\right)'\phi_1 = 0 \tag{4.33}$$

Sin embargo, desde

$$\begin{aligned} \left[\phi_2\left(p(x)\phi_1'\right) - \left(p(x)\phi_2'\right)\phi_1\right]' &= \phi_2\left(p(x)\phi_1'\right)' + \phi_2'\left(p(x)\phi_1'\right) - \left(p(x)\phi_2'\right)'\phi_1 - \left(p(x)\phi_2'\right)\phi_1' \\ &= \phi_2\left(p(x)\phi_1'\right)' - \left(p(x)\phi_2'\right)'\phi_1 \end{aligned}$$

de la expresión (4.33) se sigue que

$$\left[\phi_2\left(p(x)\phi_1'\right) - \left(p(x)\phi_2'\right)\phi_1\right]' = 0$$

y por lo tanto

$$p(x)\left[\phi_2\phi_1' - \phi_2'\phi_1\right] = \text{constant} = C \tag{4.34}$$

para encontrar el valor de C, notemos que ϕ_1 y ϕ_2 satisfacen las condiciones de frontera, y por lo tanto

$$\begin{aligned} a_0\phi_1(\alpha) + a_1\phi_1'(\alpha) = 0 \\ a_0\phi_2(\alpha) + a_1\phi_2'(\alpha) = 0 \end{aligned}$$

lo cual implica que $\phi_1(\alpha)\phi_2'(\alpha) - \phi_2(\alpha)\phi_1'(\alpha) = 0$. Por lo tanto, de la expresión (4.34) se sigue que

$$p(x)\left[\phi_2\phi_1' - \phi_2'\phi_1\right] = 0 \quad \textit{for all} \quad x \in [a, b]$$

Como $p(x) > 0$, tenemos $\phi_2\phi_1' - \phi_2'\phi_1 = 0$ para todo $x \in [a, b]$. Pero, esto significa que ϕ_1 and ϕ_2 son linealmente dependientes. □

Teorema 4.2.3: Sturm-Liouville

Let $\lambda_n, n = 1, 2, \cdots$ be the eigenvalues of the regular Sturm-Liouville problem (**??**), (**??**) and $\phi_n(x), n = 1, 2, \cdots$ be the corresponding eigenfunctions. Then, the set $\{\phi_n(x) : n = 1, 2, \cdots\}$ is orthogonal in $[\alpha, \beta]$ with respect to the weight function $r(x)$.

Demostración 4.2.3 *Let λ_k and $\lambda_\ell, (k \neq \ell)$ be eigenvalues, and $\phi_k(x)$ and $\phi_\ell(x)$ be the corresponding eigenfunctions of (**??**), (**??**). Since $\phi_k(x)$ and $\phi_\ell(x)$ are solutions of (**??**), we have*

$$(p(x)\phi_k')' + q(x)\phi_k + \lambda_k r(x)\phi_k = 0 \tag{4.35}$$

and

$$(p(x)\phi_\ell')' + q(x)\phi_\ell + \lambda_\ell r(x)\phi_\ell = 0. \tag{4.36}$$

Now following the argument in Theorem-1, we get

$$[\phi_\ell (p(x)\phi_k') - (p(x)\phi_\ell')\phi_k]' + (\lambda_k - \lambda_\ell) r(x)\phi_k\phi_\ell = 0,$$

which on integration gives

$$(\lambda_\ell - \lambda_k) \int_\alpha^\beta r(x)\phi_k(x)\phi_\ell(x)dx = p(x)\left[\phi_\ell(x)\phi_k'(x) - \phi_\ell'(x)\phi_k(x)\right]\Big|_\alpha^\beta . \tag{4.37}$$

*Next since $\phi_k(x)$ and $\phi_\ell(x)$ satisfy the boundary conditions (**??**), i.e.,*

$$a_0\phi_k(\alpha) + a_1\phi_k'(\alpha) = 0, \quad d_0\phi_k(\beta) + d_1\phi_k'(\beta) = 0$$

$$a_0\phi_\ell(\alpha) + a_1\phi_\ell'(\alpha) = 0, \quad d_0\phi_\ell(\beta) + d_1\phi_\ell'(\beta) = 0$$

it is necessary that

$$\phi_k(\alpha)\phi_\ell'(\alpha) - \phi_k'(\alpha)\phi_\ell(\alpha) = \phi_k(\beta)\phi_\ell'(\beta) - \phi_k'(\beta)\phi_\ell(\beta) = 0.$$

Hence, the identity (4.37) reduces to

$$(\lambda_\ell - \lambda_k) \int_\alpha^\beta r(x)\phi_k(x)\phi_\ell(x)dx = 0. \tag{4.38}$$

However, since $\lambda_\ell \neq \lambda_k$, it follows that $\int_\alpha^\beta r(x)\phi_k(x)\phi_\ell(x)dx = 0.$ □

Corolario 4.2.2: Colorario

Let λ_1 and λ_2 be two eigenvalues of the regular Sturm-Liouville problem (**??**), (**??**) and $\phi_1(x)$ and $\phi_2(x)$ be the corresponding eigenfunctions. Then, $\phi_1(x)$ and $\phi_2(x)$ are linearly dependent if and only if $\lambda_1 = \lambda_2$.

Demostración 4.2.4 *The proof is a direct consequence of equality (4.38).*

Teorema 4.2.4: For the regular Sturm-Liouville

For the regular Sturm-Liouville problem (**??**), (**??**) the eigenvalues are real.

Demostración 4.2.5 *Let $\lambda = a + ib$ be a complex eigenvalue and $\phi(x) = \mu(x) + i\nu(x)$ be the corresponding eigenfunction. Then, we have*

$$(p(x)(\mu + i\nu)')' + q(x)(\mu + i\nu) + (a + ib)r(x)(\mu + i\nu) = 0$$

and hence

$$(p(x)\mu')' + q(x)\mu + (a\mu - b\nu)r(x) = 0$$

and

$$(p(x)\nu')' + q(x)\nu + (b\mu + a\nu)r(x) = 0.$$

Now following exactly the same argument as in Theorem-1, we get

$$\begin{aligned} 0 = p(x)\left(\nu\mu' - \nu'\mu\right)\Big|_\alpha^\beta &= \int_\alpha^\beta [-(a\mu - b\nu)\nu r(x) + (b\mu + a\nu)\mu r(x)]dx \\ &= b\int_\alpha^\beta r(x)\left(\nu^2(x) + \mu^2(x)\right)dx. \end{aligned}$$

Hence, it is necessary that $b = 0$, i.e., λ is real. $\square$

Since (**??**), is a regular Sturm-Liouville problem.

In the above results we have established several properties of the eigenvalues and eigenfunctions of the regular Sturm-Liouville problem (**??**), (**??**). In all these results the existence of eigenvalues is tacitly assumed. We now state the following very important result whose proof involves some advanced arguments.

Teorema 4.2.5: For the regular Sturm-Liouville

For the regular Sturm-Liouville problem (**??**), (**??**) there exists an infinite number of eigenvalues $\lambda_n, n = 1, 2, \cdots$. These eigenvalues can be arranged as a monotonically increasing sequence $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ such that $\lambda_n \to \infty$ as $n \to \infty$. Further, eigenfunction $\phi_n(x)$ corresponding to the eigenvalue λ_n has exactly $(n-1)$ zeros in the open interval (α, β).

Demostración 4.2.6 *Hacer*

The following examples show that the above properties for singular Sturm-Liouville problems do not always hold.

Ejemplo 4.2.5. Sturm-Liouville

Considere el problema singular de Sturm-Liouville dado (4.21), con las condiciones

$$y(0) = 0, \quad |y(x)| \leq M < \infty \quad \text{for all } x \in (0, \infty) \qquad (4.39)$$

Solución 4.2.5 1. $\lambda = 0$

de la expresión (4.23) tenemos que la solución es

$$y(x) = c_1 + c_2(x)$$

aplicando la condición

$$y(0) = c_1 + c_2(0) \Rightarrow c_1 = 0$$

por lo tanto

$$y(x) = c_2 x$$

Por la segunda condición

$$\begin{aligned} |y(x)| &= |c_2 x| < M \\ &= |c_2|\,|x| < M \end{aligned}$$

como $y = x$ no es acotada en $x \in (0, \infty)$, tenemos $c_2 = 0$.
De manera $\lambda = 0$ no es un valor propio

2. $\lambda \neq 0$
Para el caso de $\lambda \neq 0$ lo analizaremos para el caso positivo y negativo.

- $\lambda > 0$
  La solución está dada en la expresión (4.25) que es

  $$y(x) = (c_1 + c_2)\cos(nx) + (c_1 - c_2)\, i \sin(nx)$$

  Evaluando la primera condición, tenemos

  $$y(0) = c_1 + c_2 = 0$$

  por la segunda condición

  $$\begin{aligned} |y(x)| &= |(c_1 - c_2)\, i \sin(nx)| \leqslant M \\ &= |c_1 - c_2|\,|\sin(nx)| \leqslant M \\ &= c_1 - c_2 \leqslant M \end{aligned}$$

  Por lo tanto $\lambda_n \in (0, \infty)$ son los valores propios y las funciones propias son $\phi_n(x) = \sin\left(\sqrt{\lambda_n} x\right)$.

- $\lambda < 0$
  Si $\lambda < 0$, la solución es

  $$y(x) = c_1 e^{nx} + c_2 e^{-nx}$$

  Aplicando las condiciones

  $$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = 0 \\ |y(x)| &= \left|c_1 e^{nx} + c_2 e^{-nx}\right| \leqslant M \end{aligned}$$

  utilizando la primera ecuación, tenemos

  $$|y(x)| = \left|c_1 e^{nx} - c_1 e^{-nx}\right| \leq M$$

  por factor común

  $$|y(x)| = \left|c_1 \left(e^{nx} - e^{-nx}\right)\right| \leq M$$

tomando $c_1 = \dfrac{k}{2}$ *e utilizando la definición del seno hiperbólico, llegamos a*

$$|y(x)| \quad = \quad k\sinh(nx) \leq M$$

Como $\sinh(x)$ *es una función no acotada en* $x \in (0, \infty)$*, entonces* $\lambda < 0$ *no es un valor propio.*

Ejemplo 4.2.6. Sturm-Liouville

Considere el problema singular de Sturm-Liouville dado (4.21),

$$y(-\pi) = y(\pi), \quad y'(-\pi) = y'(\pi) \tag{4.40}$$

Solución 4.2.6 *1.* $\lambda = 0$
Para $\lambda = 0$*, tenemos*

$$y(x) = c_1 + c_2 x$$

por la primera condición

$$y(-\pi) = c_1 - \pi c_2 \ y \ y(\pi) = c_1 + \pi c_2$$

Asi

$$c_1 - \pi c_2 = c_1 + \pi c_2$$

por 10 tanto $c_2 = 0$ *de tal forma que la solución toma la siguiente forma*

$$y(x) = c_1$$

La segunda condicion implica que

$$0 = 0$$

lo que significa c_1 *es una constante libre. Por lo tanto* $\lambda_0 = 0$ *es un valor propio y* $\phi_0(x) = 1$ *es la función propia.*

2. $\lambda \neq 0$

- $\lambda < 0$
Para este caso, la solución es

$$y(x) = c_1 e^{nx} + c_2 e^{-nx}$$

Aplicando la primera condición t

$$y(\pi) = c_1 e^{n\pi} + c_2 e^{-n\pi}$$
$$y(-\pi) = c_1 e^{-m\pi} + c_2 e^{n\pi}$$

Igualando las expresiones

$$c_1 e^{n\pi} + c_2 e^{-n\pi} = c_1 e^{-n\pi} + c_2 e^{n\pi}$$

Tomando factor común y aplicando la definición del seno hiperbólico

$$2\sinh(n\pi)c_1 - 2\sinh(n\pi)c_2 = 0$$

Simplificando

$$c_1 - c_2 = 0$$

Por la segunda condición

$$y'(\pi) = nc_1 e^{n\pi} - nc_2 e^{-n\pi}$$
$$y'(-\pi) = nc_1 e^{-n\pi} - nc_2 e^{n\pi}$$

Igualando

$$nc_1 e^{n\pi} - nc_2 e^{-n\pi} = nc_1 e^{-n\pi} - nc_2 e^{n\pi}$$

Por factor común

$$nc_1 \left(e^{n\pi} - e^{-n\pi}\right) + nc_2 \left(e^{n\pi} - e^{-n\pi}\right) = 0$$

lo que implica que

$$c_1 + c_2 = 0$$

Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} c_1 - c_2 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$$

tenemos que $c_1 = c_2 = 0$. *Por lo tanto* $\lambda > 0$ *no es un valor propio.*

- $\lambda > 0$
  Evaluando las condiciones en la expresión (4.25), tenemos

$$y(-\pi) = (c_1 + c_2)\cos(n\pi) - (c_1 - c_2)\, i \sin(n\pi)$$
$$y(-\pi) = (-1)^n (c_1 + c_2)$$
$$y(\pi) = (c_1 + c_2)\cos(n\pi) + (c_1 - c_2)\, i \sin(n\pi)$$
$$y(\pi) = (-1)^n (c_1 + c_2)$$

Igualando

$$(-1)^n (c_1 + c_2) = (-1)^n (c_1 + c_2)$$

lo que significa $y(-\pi) = y(\pi)$ *para todo valor de* x.
Por la segunda condición

$$y'(\pi) = -n(c_1 + c_2)\sin(n\pi) + n(c_1 - c_2)\, i \cos(n\pi)$$
$$y'(\pi) = n(c_1 - c_2)\, i(-1)^n$$
$$y'(-\pi) = n(c_1 + c_2)\sin(n\pi) + n(c_1 - c_2)\, i \cos(n\pi)$$
$$y'(-\pi) = n(c_1 - c_2)\, i(-1)^n$$

por lo que $y'(\pi) = y'(-\pi)$ *para todo valor de* x.
Así $\lambda_n = n^2$ *son valores propios y las funciones propias son* $\phi_n(x) = \cos(nx) + \sin(nx)$.

4.3 Obtención de los polinomios de Legendre como solución a S-L

Ejemplo 4.3.1. Considere el problema de Sturm-Liouville

Considere el problema de Sturm-Liouville

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+\lambda y=\left(\left(1-x^2\right)y'\right)'+\lambda y \quad = \quad 0 \tag{4.41}$$

sujeto a las condiciones

$$\lim_{x\to -1} y(x)<\infty, \quad \lim_{x\to 1} y(x)<\infty. \tag{4.42}$$

Demuestre que los valores propios de este problema son $\lambda_n = n(n+1), n=0,1,2,\cdots$ y las correspondientes funciones propias son los polinomios de Legendre $P_n(x)$.

Solución 4.3.1 *Utilizando la expresión obtenida en (2.145) dada por*

$$y(x) \quad = \quad a_0+a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n+1)-\lambda}{(n+2)(n+1)}a_nx^n$$

aplicando las condiciones

$$\lim_{x\to -1} y(x) \quad = \quad \lim_{x\to -1}\left\{a_0+a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n+1)-\lambda}{(n+2)(n+1)}a_nx^n\right\}<\infty$$

Por propiedad de los límites

$$\lim_{x\to -1} y(x) \quad = \quad a_0-a_1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n+1)-\lambda}{(n+2)(n+1)}(-1)^na_n<\infty$$

La expresión anterior es una serie infinita de términos constantes, de la forma que puede ser acotada es que los términos de la serie se anulen a partir de cierto término, esto es que $\lambda = n(n+1)$.
Lo que significa que los valores propios del problema (4.41) son $\lambda_n = n(n+1)$ y las correspondientes funciones propias son los poliniomios de legendre $P_n(x)$.

Ejemplo 4.3.2. Considere el problema de Sturm-Liouville

Considere el problema de Sturm-Liouville dado en la expresión 4.41 sujeto a las condiciones

$$y'(0) \quad = \quad 0, \quad \lim_{x\to 1} y(x)<\infty \tag{4.43}$$

Demuestre que los valores propios de este problema son $\lambda_n = 2n(2n+1), n=0,1,2,\cdots$ y las correspondientes funciones propias son los polinomios pares de Legendre $P_{2n}(x)$

Solución 4.3.2 *De la expresión (2.148) y la primera condición tenemos*

$$y(x) \quad = \quad a_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(0-\lambda)(6-\lambda)\cdots(2n(2n+1)-\lambda)}{(2n)!}x^{2n}\right.$$

Por la segunda condición se tiene que

$$\lim_{x\to 1} y(x) = a_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(0-\lambda)(6-\lambda)\cdots(2n(2n+1)-\lambda)}{(2n)!}\right] < \infty$$

Para que la serie sea acotada, se debe cumplir que $\lambda_n = 2n(2n+1)$, de manera que son los valores propios del problema (4.41)con las condiciones (4.43) y las funciones propias correspondientes son polinomios pares de Legendre $P_{2n}(x)$.

Ejemplo 4.3.3. Considere el problema de Sturm-Liouville

Considere el problema de Sturm-Liouville dado en la expresión 4.41 sujeto a las condiciones

$$y(0) = 0, \quad \lim_{x\to 1} y(x) < \infty \tag{4.44}$$

Demuestre que los valores propios de este problema son $\lambda_n = \lambda_n = (2n+1)(2n+2), n = 0, 1, 2, \cdots$ y las correspondientes funciones propias son los polinomios impares de Legendre $P_{2n+1}(x)$

Solución 4.3.3 *Tomando la expresión obtenida en (2.148) dada por*

$$\begin{aligned} y(x) =& a_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(0-\lambda)(6-\lambda)\ldots(2n(2n+1)-\lambda)}{(2n)!}x^{2n}\right] \\ &+ a_1\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-\lambda)(12-\lambda)\ldots((2n+2)(2n+1)-\lambda)}{(2n+3)!}x^{2n+1}\right] \end{aligned}$$

Por las condiciones del problema (4.44), tenemos

$$\begin{aligned} y(0) = a_0&\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(0-\lambda)(6-\lambda)\cdots(2n(2n+1)-\lambda)}{(2n+1)!}(0)^{2n}\right] \\ &+ a_1\left[0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-\lambda)(12-\lambda)\cdots((2n+2)(2n+1)-\lambda)}{(2n+3)!}(0)^{2n+1}\right] \end{aligned}$$

$$y(0) = a_0$$

Por lo tanto $a_0 = 0$. De manera que

$$y(x) = a_1\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-\lambda)(12-\lambda)\ldots((2n+2)(2n+1)-\lambda)}{(2n+3)!}x^{2n+1}\right]$$

Ahora queremos que

$$\lim_{x\to 1} y(x) < \infty$$

$$\lim_{x\to 1} y(x) = \lim_{x\to 1}\left\{a_1\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-\lambda)(12-\lambda)\cdots((2n+2)(2n+1)-\lambda)}{(2n+3)!}x^{2n+1}\right]\right\} < \infty$$

Por propiedad de los límites

$$\lim_{x\to 1} y(x) = a_1 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-\lambda)(12-\lambda)\cdots((2n+2)(2n+1)-\lambda)}{(2n+3)!}(1)\right] < \infty$$

$$\lim_{x\to 1} y(x) = a_1 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-\lambda)(12-\lambda)\cdots((2n+2)(2n+1)-\lambda)}{(2n+3)!}\right] < \infty$$

La serie anterior es finita si los términos de anulan para eso

$$(2n+2)(2n+1) - \lambda = 0$$

lo que implica que $\lambda = (2n+2)(2n+1)$. *De tal manera gue los valores propios son* $\lambda_n = (2n+2)(2n+1)$ *y las funciones propias son los polinomios* $P_{2n+1}(x)$ *de Legendre.*

4.4 Obtención de los polinomios de Hermite como solución a S-L

Ejemplo 4.4.1. Considere el problema de Sturm-Liouville

Considere el problema de Sturm-Liouville

$$y'' - 2xy' + \lambda y \quad = 0 = \quad \left(e^{-x^2} y'\right)' + \lambda e^{-x^2} y \tag{4.45}$$

sujeto a las condiciones

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{y(x)}{|x|^k} < \infty, \quad \lim_{x\to \infty} \frac{y(x)}{x^k} < \infty \tag{4.46}$$

para algún entero positivo k. Demuestre que los valores propios de este problema son $\lambda_n = 2n, n = 0, 1, 2, \cdots$ y las correspondientes funciones propias son los polinomios de Hermite $H_n(x)$.

Solución 4.4.1 *kl*

4.5 Obtención de los polinomios de Laguerre como solución a S-L

Ejemplo 4.5.1. Ejemplo

Considere el problema de Sturm-Liouville

$$xy'' + (1-x)y' + \lambda y \quad = 0 = \quad \left(xe^{-x}y'\right)' + \lambda e^{-x} y \tag{4.47}$$

sujeto a las condiciones

$$\lim_{x\to 0} |y(x)| < \infty, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x^k} < \infty \tag{4.48}$$

Para algún entero positivo k. Demuestre que los valores propios de este problema son $\lambda_n = n, n = 0, 1, 2, \cdots$ y las correspondientes funciones propias son los polinomios de Laguerre $L_n(x)$.

Solución 4.5.1 *kl*

4.6 Obtención de la función de Bessel como solución a S-L

Ejemplo 4.6.1. Ejemplo

Sea $a \geq 0$ un número fijo, y $b_n, n = 0, 1, 2, \cdots$ los ceros de la función de Bessel $J_a(x)$. Considere el problema de Sturm-Liouville

$$x^2y'' + xy' + \left(\lambda x^2 - a^2\right) y \quad = 0 = \quad (xy')' + \left(\lambda x - \frac{a^2}{x}\right) y \tag{4.49}$$

sujeto a las condiciones

$$\lim_{x\to 0} y(x) < \infty, \quad y(1) = 0 \tag{4.50}$$

Demuestre que los valores propios de este problema son $\lambda_n = b_n^2, n = 0, 1, 2, \cdots$ y las correspondientes funciones propias son las funciones de Bessel $J_a\left(b_n x\right)$.

Solución 4.6.1 *kl*

4.7 Obtención de los polinomios de Chebyshev de 3er y 4to tipo como solución a S-L

4.7.1. Obtención de los polinomios de Chebyshev de 3er tipo como solución a un S-L

La ecuación diferencial que define los polinomios de Chebyshev de 3er tipo, como vimos en el capítulo anterior es:

$$\left(1-x^2\right) y'' + (1-2x)y' + \lambda y = 0;$$

consideremos las condicciones que vimos para un problema de S-L singular, para este caso:

$$p(1) = 0$$
$$p(-1) = 0$$
$$y(x) \quad \text{regular en } x = 1, x = -1$$

Como vimos en (3.1.3.1) esta ecuación se puede expres ar en forma de una ecuación de S-L : Con $\lambda = m(m+1)$ Tenemos:

$$\frac{d}{dx}\left[(1+x)^{3/2}(1-x)^{1/2}\frac{dy_m(x)}{dx}\right] + m(m+1)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}y_m(x) = 0$$

donde $p(x) = (1+x)^{3/2}(1-x)^{1/2}, q(x) = 0$ y $w(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. Es evidente devido a las condiciones que nuestro problemas es singular, de hecho $w(x)$ no es continua en uno de los extremos. Y se verifica que $p(-1) = p(1) = 0$
Sabemos que la ecuación (4.4.1), al resolverla por medio de la sustitución trigonométrica que hicimos en el capítulo anterior, tiene dos soluciones:

$$y_1(x) = \frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right]}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}; \quad y_2(x) = \frac{\operatorname{sen}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right]}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Como $x = \cos(\theta)$, tenemos que $x = -1 \Rightarrow \theta = \pi$ y $x = 1 \Rightarrow \theta = 0$. Vemos que la singularidad esta en $\theta = \pi$, puesto que $\cos(\pi/2) = 0$.

$$y_2(\pi) = \frac{\operatorname{sen}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{(-1)^n}{0} = \infty,$$

por otro lado

$$y_1(\pi) = \frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{0}{0},$$

aplicando L'Hopital, tenemos

$$\lim_{\theta\to\pi} y_1(\cos\theta) = \frac{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]\operatorname{sen}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]}{1/2\operatorname{sen}(\pi/2)} = \frac{(2n+1)(-1)^n}{1} = (2n+1)(-1)^n,$$

lo cual es un valor finito para n finito, asi se concluye que los polinomios de Chebyshev de 3er tipo son solución de la ecuación de S-L vista, es decir, $\lambda = m(m+1)$ son los autovalores al problema singular de S-L y $V_m(x)$ sus correspondiente autofunciones. La constante albitraria se toma de modo que el coeficiente principal sea 2^n.

4.7.2. Obtención de los polinomios de Chebyshev de 4to tipo como solución a un S-L

La ecuación diferencial que define los polinomios de Chebyshev de 4to tipo, como vimos en el capitulo anterior es:

$$\left(1-x^2\right)y'' - (1+2x)y' + \lambda y = 0$$

consideremos las condicciones que vimos para un problema de S-L singular, para este caso:

$$p(1) = 0$$
$$p(-1) = 0$$
$$y(x) \quad \text{regular en } x = 1, x = -1$$

Como vimos en (3.2.3.1) esta ecuación se puede expresar en forma de una ecuación de S-L : Con $\lambda = m(m+1)$ Tenemos:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x)^{3/2}(1+x)^{1/2}\frac{dy_m(x)}{dx}\right] + m(m+1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}y_m(x) = 0$$

$$\text{donde } p(x) = (1-x)^{3/2}(1+x)^{1/2}, q(x) = 0 \text{y} w(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Es evidente devido a las condiciones que nuestro problemas es singular.
Como vimos en el capítulo anterior al resolver esta EDO por medio de una sustitución trigonométrica, tenemos dos soluciones. Puesto que es evidente que $p(-1) = p(1) = 0$, veremos que una de las dos soluciones obtenidas verifica la condicción restante.

$$y_1(x) = \frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right]}{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}; \quad y_2(x) = \frac{\operatorname{sen}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right]}{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Como $x = \cos(\theta)$, tenemos que $x = -1 \Rightarrow \theta = \pi \text{y} x = 1 \Rightarrow \theta = 0$. Vemos que la singularidad esta en $\theta = 0$, puesto que $\operatorname{sen}(\pi/2) = 0$.

$$y_1(0) = \frac{\cos(0)}{\operatorname{sen}(0)} = \frac{1}{0} = \infty,$$

por otro lado

$$y_2(0) = \frac{\operatorname{sen}(0)}{\operatorname{sen}(0)} = \frac{0}{0},$$

aplicando L'Hopital, tenemos

$$\lim_{\theta\to 0} y_2(\cos 0) = 2\frac{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]\cos(0)}{\cos(0)} = 2n+1,$$

lo cual es un valor finito para n finito, asi se concluye que los polinomios de Chebyshev de 4to tipo son solución de la ecuación de S-L vista, es decir, $\lambda = m(m+1)$ son los autovalores al problema irregular de S-L y $W_m(x)$ sus correspondiente autofunciones. La constante albitraria se tomo de modo que el coeficiente principal sea 2^n. anterior de tesis de pablo

Ejemplo 4.7.1. Ejemplo

Considere el problema de Sturm-Liouville

$$\left(1-x^2\right)y'' - 2xy' + \lambda y = \left(\left(1-x^2\right)y'\right)' + \lambda y = 0 \tag{4.51}$$

con las condiciones

$$y'(0) = 0, \quad \lim_{x\to 1} y(x) < \infty \tag{4.52}$$

Demuestre que los valores propios del problema son $\lambda_n = 2n(2n+1), n = 0, 1, 2, \cdots$ y las correspondientes funciones propias son los polinomios pares de Legendre $P_{2n}(x)$.

Solución 4.7.1 *Para resolver este problema de Sturm-Liouville necesitamos conocer las soluciones de la ecuación de Legendre, la cual se analizó en la sección 2.6, donde la solución general dada en 2.148 es*

$$y(x) = a_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(0-\lambda)(6-\lambda)\cdots(2n(2n+1)-\lambda)}{(2n)!}\right]x^{2n}\right]$$
$$+\, a_1\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2-\lambda)(12-\lambda)\cdots((2n+1)(2n+2)-\lambda)}{(2n+3)!}\right]x^{2n+1}\right]$$

Aplicando las condiciones, tenemos

$$y'(x) = a_0\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(0-1)(6-\lambda)\ldots(2n(2n+1)-\lambda)}{(2n)!}\right](2n)x^{2n-1}$$
$$+\, a_1\sum_{\pi=1}^{\infty}\left[\frac{(2-\lambda)(12-\lambda)\cdots((2n+1)(2n+2)-\lambda)}{(2n+3)!}\right](2n+1)x^{2n}$$

Así

$$y'(0) = a_1 = 0$$

De manera que la solución es

$$y(x) = a_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(0-x)(6-x)\cdots(2n(2n+1)-x)}{(2n)!}\right]x^{2n}\right. \tag{4.53}$$

Por la segunda condición

$$\lim_{x\to 1} a_0\left[1+\sum_{n=1}\left[\frac{(2-\lambda)(6-\lambda)\cdots(2n(2n+1)-\lambda)}{(2n)!}\right]x^{2n} < \infty\right.$$

como los coeficientes están dado en término de productoria, de manera que algunos de ellos es cero si $\exists n \geq 1$ *tal que* $\lambda = 2n(2n-1)$. *Por lo tanto la expresión 4.53 representa los polinomios pares de Legendre*

$$P_{2n}(x) \quad = \quad a_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(0-x)(6-x)\cdots(2n(2n+1)-x)}{(2n)!}\right]x^{2n}\right.$$

Ejemplo 4.7.2. Ejemplo

Considere la ED 4.51 con las condiciones

$$y(0) = 0, \quad \lim_{x\to 1} y(x) < \infty \tag{4.54}$$

Demuestre que los valores propios son $\lambda_n = (2n+1)(2n+2), n = 0, 1, 2, \cdots$ y las correspondientes funciones propias son los polinomios impares de de Legendre $P_{2n+1}(x)$.

Solución 4.7.2 *Sabemos que la solución general de ED de Legendre es*

$$y(x) = a_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(0-\lambda)(6-\lambda)\cdots(2n(2n+1)-\lambda)}{(2n)!}\right]x^{2n}\right]$$
$$+\, a_1\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2-\lambda)(12-\lambda)\cdots((2n+1)(2n+2)-\lambda)}{(2n+3)!}\right]x^{2n+1}\right]$$

Ahora aplicaremos las condiciones indicadas en la expresión 4.54. Evaluando la solución en $x = 0$

$$y(0) = a_0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(0-\lambda)(6-\lambda)\cdots(2n(2n+1)-\lambda)}{(2n)!}\right](0)^{2n}\right]$$
$$+ a_1\left[0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2-\lambda)(12-\lambda)\cdots((2n+1)(2n+2)-\lambda)}{(2n+3)!}\right](0)^{2n+1}\right] = 0$$

La expresión anterior implica que $a_1 = 0$. *Así*

$$y(x) \quad = \quad a_1\left[0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2-\lambda)(12-\lambda)\cdots((2n+1)(2n+2)-\lambda)}{(2n+3)!}\right](0)^{2n+1}\right]$$

La expresión anterior debe ser finita por la segunda condición, así

$$\lim_{x\to 1} a_1\left[x + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2-\lambda)(12-\lambda)\cdots((2n+1)(2n+2)-\lambda)}{(2n+3)!}\right]x^{2n+1}\right] < \infty$$

podemos notar que la función es finita si algunos de sus coeficientes para algún valor λ, *por lo tanto esto ocurre si* $\lambda = (2n+1)(2n+2)$, *así obteniendo los polinomios impares de Legendre*

$$P_{2n+1}(x) \quad = \quad a_1\left[x + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2-\lambda)(12-\lambda)\cdots((2n+1)(2n+2)-\lambda)}{(2n+3)!}\right]x^{2n+1}\right]$$

Ejemplo 4.7.3. Sturm-Liouville

Considere el problema singular de Sturm-Liouville

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0 = \left(e^{-x^2}y'\right)' + \lambda e^{-x^2}y \qquad (4.55)$$

Sujeto a las condiciones

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y(x)}{|x|^k} < \infty, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x^k} < \infty \qquad (4.56)$$

para algín entero positvo k. Demuestre que los valores propios son $\lambda_n = 2n, n = 0, 1, 2, \cdots$ y las correspondientes funciones propias son los polinomios de Hermite $H_n(x)$.

Solución 4.7.3 *De la sección 2.2 Sabemos que la solución de la ED de Hermite está dada por la expresión*

$$y(x) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

donde c_n *está dada por la expresión 2.42, de manera que la expresión anterior es*

$$y(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\lambda - 2n)c_n}{(n+2)(n+1)}x^n$$

Aplicando las candiciones tenemos

$$\lim_{x \to \infty} [a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\lambda - 2n)c_n}{(n+2)(n-1))} \frac{x^n}{x^k}] < \infty$$

La expresión anterior es finta, si existe un $n \in Z^+$ *tal que* $\lambda - 2n = 0$ *lo que implica que* $\lambda = 2n$.
Por la otra condición

$$\lim_{x \to -\infty} [a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\lambda - 2n)c_n}{(n+2)(n+1)} \frac{x^n}{|x|^k}] < \infty$$

de iqual manera, para que la expresión anterior sea finita, se debe cumplir que $\lambda - 2n = 0$ *para angún* $n \in z^+$, *lo que implica que* $\lambda = 2n$.
Por lo tanto los valores propios son $\lambda n = 2n$ *y las correspondientes fanciones propias son los polinomios de Hermite* $H_n(x)$.

Ejemplo 4.7.4. Considere el problema regular de Sturm-Liouville

Considere el problema regular de Sturm-Liouville

$$xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0 = \left(xe^{-x}y'\right)' + \lambda e^{-x} y \tag{4.57}$$

con

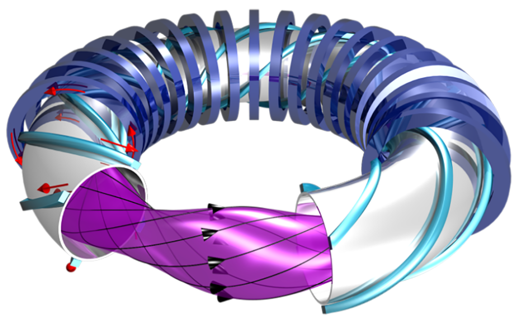
$$\lim_{x \to 0} |y(x)| < \infty, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{y(x)}{x^k} < \infty \text{ para algún entero positivo } k. \tag{4.58}$$

Demuestre que los valores propios del problema son $\lambda_n = n, n = 0, 1, 2, \cdots$ y las correspondientes funciones propias están dadas por los polinomios de Laguerre $L_n(x)$.

Solución 4.7.4 *khkhkf*

Capítulo 5

Series de Fourier en bases a funciones especiales



En el estudio del análisis matemático y sus aplicaciones, las series especiales constituyen una herramienta fundamental para la representación y aproximación de funciones. Entre estas destacan, por un lado, las series de Fourier-Bessel, que surgen de la resolución de problemas con condiciones de frontera en coordenadas cilíndricas, y que tienen una importancia crucial en la física matemática, especialmente en fenómenos de propagación de ondas y conducción de calor. Por otro lado, los polinomios de Chebyshev representan una de las familias de polinomios ortogonales más relevantes en la aproximación de funciones, ya que permiten minimizar el error de interpolación y facilitan la construcción de expansiones eficientes.

En este capítulo se abordarán, en primer lugar, las series de Fourier-Bessel, enfatizando sus propiedades, condiciones de ortogonalidad y aplicaciones típicas en problemas con simetría radial. Posteriormente, se presentará la aproximación de funciones mediante los polinomios de Chebyshev de tercera y cuarta especie, resaltando su papel en el desarrollo de series de Fourier generalizadas. La combinación de estas herramientas ofrece un marco poderoso no solo para la teoría matemática, sino también para la resolución práctica de ecuaciones diferenciales y problemas aplicados en ingeniería, física y computación científica.

Ejemplo 5.0.1. Find the Fourier series

$$|\sin x| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2nx}, \qquad \text{for } x \in [-\pi, \pi].$$

Demostración 5.0.1 *The coefficients* $\{c_n\}$ *are given by*

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |\sin x| e^{-i2nx} dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x e^{-i2nx} dx.$$

We can expand $\sin x$ *into exponentials to obtain*

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\pi} \left(e^{ix} - e^{-ix}\right) e^{-i2nx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left[\int_0^{\pi} e^{-i(2n-1)x} dx - \int_0^{\pi} e^{-i(2n+1)x} dx\right] \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{i}{2n-1}\left(e^{-i(2n-1)\pi} - 1\right) - \frac{i}{2n+1}\left(e^{-i(2n+1)\pi} - 1\right)\right] \\ &= \frac{1}{2\pi i}(-2i)\left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right] \\ &= -\frac{2}{\pi}\frac{1}{4n^2-1} \end{aligned}$$

Therefore,

$$|\sin x| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -\frac{2}{\pi}\frac{1}{4n^2-1} e^{i2nx} = \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx.$$

Notice that this can be used in order to compute infinite sums. Evaluating this at $x = 0$*, we have that*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2},$$

whereas evaluating this at $x = \pi/2$*, we have that*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{2-\pi}{4}$$

5.1 Series Fourier-Bessel

sistemas ortogonales milane

Ejemplo 5.1.1. Find the Bessel series expansion

Find the Bessel series expansion with respect to $J_\nu(\lambda_k x)$ for the function $x^\nu, \nu \geq 0$

Demostración 5.1.1 *In this case the coefficients in the series are given by the formula*

$$c_k = \frac{2}{\left[J_{\nu+1}(\lambda_k)\right]^2} \int_0^1 x^{\nu+1} J_\nu(\lambda_k x)\, dx$$

and can be evaluated by setting $t = \lambda_k x$ and using Formula (??), as follows:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{\nu+1} J_\nu(\lambda_k x)\, dx = \frac{1}{\lambda_k^{\nu+2}} \int_0^{\lambda_k} t^{\nu+1} J_\nu(t) dt = \frac{1}{\lambda_k^{\nu+2}} \int_0^{\lambda_k} \frac{d}{dt}\left[t^{\nu+1} J_{\nu+1}(t)\right] dt &= \frac{1}{\lambda_k^{\nu+2}} \left[t^{\nu+1} J_{\nu+1}(t)\right]_0^{\lambda_k} \\ &= \frac{1}{\lambda_k} J_{\nu+1}(\lambda_k)\end{aligned}$$

Thus

$$c_k = \frac{2}{\lambda_k J_{\nu+1}(\lambda_k)}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$x^\nu = 2\left[\frac{J_\nu(\lambda_1 x)}{\lambda_1 J_{\nu+1}(\lambda_1)} + \frac{J_\nu(\lambda_2 x)}{\lambda_2 J_{\nu+1}(\lambda_2)} + \frac{J_\nu(\lambda_3 x)}{\lambda_3 J_{\nu+1}(\lambda_3)} + \cdots\right], \tag{5.1}$$

where the series converges in the mean in $\mathcal{PC}[0,1]$, pointwise in $(0,1)$, and uniformly on any closed subinterval of $(0,1)$. In particular, when $\nu = 0$, (5.1) yields the formula

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_k x)}{\lambda_k J_1(\lambda_k)} = \frac{1}{2}, \quad 0 < x < 1. \tag{5.2}$$

Ejemplo 5.1.2. Ejemplo

Expand $x^2, 0 < x < 1$, as a series in $J_0(\lambda_k x)$

Demostración 5.1.2 *Here*

$$c_k = \frac{2}{\left[J_1(\lambda_k)\right]^2} \int_0^1 x^3 J_0(\lambda_k x)\, dx$$

and, reasoning as in the preceding example, we find that

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^3 J_0(\lambda_k x)\, dx &= \frac{1}{\lambda_k^4} \int_0^{\lambda_k} t^3 J_0(t) dt \\ &= \frac{1}{\lambda_k^4} \int_0^{\lambda_k} t^2 \frac{d}{dt}\left[t J_1(t)\right] dt \\ &= \frac{1}{\lambda_k^4}\left[t^3 J_1(t)\Big|_0^{\lambda_k} - 2\int_0^{\lambda_k} t^2 J_1(t) dt\right] \\ &= \frac{J_1(\lambda_k)}{\lambda_k} - \frac{2}{\lambda_k^4} \int_0^{\lambda_k} t^2 J_1(t) dt.\end{aligned}$$

But

$$\begin{aligned}\int_0^{\lambda_k} t^2 J_1(t) dt &= -\int_0^{\lambda_k} t^2 \frac{d}{dt} J_0(t) dt \\ &= -t^2 J_0(t)\Big|_0^{\lambda_k} + 2\int_0^{\lambda_k} t J_0(t) dt \\ &= 2\int_0^{\lambda_k} \frac{d}{dt}\left[t J_1(t)\right] dt \\ &= 2\lambda_k J_1(\lambda_k)\end{aligned}$$

and it follows that

$$\int_0^1 x^3 J_0(\lambda_k x)\,dx = \frac{J_1(\lambda_k)}{\lambda_k} - \frac{4J_1(\lambda_k)}{\lambda_k^3}$$

Thus

$$c_k = \frac{2}{J_1(\lambda_k)}\left[\frac{1}{\lambda_k} - \frac{4}{\lambda_k^3}\right],$$

and

$$x^2 = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{J_1(\lambda_k)}\left(\frac{1}{\lambda_k} - \frac{4}{\lambda_k^3}\right)J_0(\lambda_k x), \quad 0 < x < 1$$

$$x^2 = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{J_1(j_{0,k})}\left(\frac{1}{j_{0,k}} - \frac{4}{j_{0,k}^3}\right)J_0(j_{0,k} x), \quad 0 < x < 1$$

$$x^2 \approx \sum_{k=1}^{1}\frac{2\left(\frac{1}{j_{0,k}} - \frac{4}{(j_{0,k})^3}\right)J_0(xj_{0,k})}{J_1(j_{0,k})} = \frac{2\left((j_{0,1})^2 - 4\right)J_0(xj_{0,1})}{(j_{0,1})^3 J_1(j_{0,1})}$$

agregar grafica

Ejemplo 5.1.3. Ejemplo

Prove that

$$1 - x^2 = 8\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0(\lambda_k x)}{\lambda_k^3 J_1(\lambda_k)}, \quad \text{for } 0 < x < 1.$$

Demostración 5.1.3

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_\nu(\lambda_k x), \qquad c_k = \frac{2}{[J_{\nu+1}(\lambda_k)]^2}\int_0^1 f(x)J_\nu(\lambda_k x)\,xdx.$$

$$C_k = \frac{2}{[J_1(\lambda_k)]^2}\int_0^1 (1-x^2)xJ_0(\lambda_k x)\,dx$$

$$C_k = \frac{2}{[J_1(\lambda_k)]^2}\left[\int_0^1 xJ_0(\lambda_k x)\,dx - \int_0^1 x^3 J_0(\lambda_k x)\,dx\right]$$

$t = \lambda_k x \quad 0 < t < \lambda_k$

$$C_k = \frac{2}{[J_1(\lambda_k)]^2}\left[\int_0^{\lambda_k}\frac{t}{\lambda_k}J_0(t)\frac{dt}{\lambda_k} - \int_0^{\lambda} x^3 J_0(\lambda_k x)\,dx\right]$$

$$C_k = \frac{2}{[J_1(\lambda_k)]^2}\left[\frac{1}{\lambda_k^2}\int_0^{\lambda_k} tJ_0(t)dt - \left(\frac{J_1(\lambda_k)}{\lambda_k} - \frac{4J_1(\lambda_k)}{\lambda^3}\right)\right]$$

$$C_k = \frac{2}{[J_1(\lambda_k)]^2}\left[\frac{1}{\lambda_k^2}\int_0^{\lambda_k}\frac{d}{dt}[tJ_1(t)]\,dt - J_1(\lambda_k)\left(\frac{1}{\lambda_k} - \frac{4}{\lambda_k^3}\right)\right]$$

$$C_k = \frac{2}{[J_1(\lambda_k)]^2}\left[\frac{1}{\lambda_k^2}[tJ_1(t)]_0^{\lambda_k} - J_1(\lambda_k)\left(\frac{1}{\lambda_k} - \frac{4}{\lambda_k^3}\right)\right]$$

$$C_k = \frac{2}{J_1(\lambda_k)}\left[\frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\lambda_k} + \frac{4}{\lambda_k^3}\right]$$

$$C_k = \frac{8}{\lambda_k^3 J_1(\lambda_k)}$$

$$1-x^2 = 8\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\lambda_k x\right)}{\lambda_k^3 J_1\left(\lambda_k\right)}; \quad 0<x<1$$

5.2 Aproximación de funciones utilizando los polinomios de Chebyshev III, IV

Como hemos estado viendo los polinomios de chebyshev de 3er y 4to tipo forman un sistema ortogonal cada uno, uno de los resultados importante de la teoría de Sturm-Liouville es que las autofunciones de los problemas de autovalores de S-L son importantes para aproximar funciones continuas o suaves a trozo. A continuación veremos como usar los polinomios que est amos tratando para tales fines.

5.2.1. Series de Fourier Chebyshev III

Sea f una función continua en $(-1,1)$, supongamos que esta tiene un desarrollo convergente en series de Fourier de la siguiente forma:

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} c_n V_n(x),$$

Donde $V_n(x)$ son los polinomios de Chebyshev de 3er tipo. "Nuestro problema seria encontrar los c_n", con

$$w(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$

Si multiplicamos esta expresión en ambos lados por $w(x)V_m(x)$), (con $m<n$ fijo) e integrando entre -1 y 1 , (suponiendo que la integración de la serie es término a término), tenemos que:

$$\int_{-1}^{1} w(x)V_m(x)f(x)dx = \int_{-1}^{1}\sum_{n=0}^{\infty} c_n w(x)V_m(x)V_n(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{-1}^{1} w(x)V_m(x)V_n(x)dx$$

$$= c_0\int_{-1}^{1} w(x)V_m(x)V_0(x)dx + c_1\int_{-1}^{1} w(x)V_m(x)V_1(x)dx + \ldots +$$

$$c_m\int_{-1}^{1} w(x)V_m(x)V_m(x)dx + \ldots + c_n\int_{-1}^{1} w(x)V_m(x)V_n(x)dx$$

Por ortogonalidad,

$$\int_{-1}^{1} w(x)V_m(x)f(x)dx = c_m\int_{-1}^{1} w(x)V_m^2(x)dx$$

Haciendo un cambio $x=\cos\theta \Rightarrow dx = -\operatorname{sen}\theta d\theta$ se tiene

$$\int_{-1}^{1} w(x)V_m^2(x)dx = -\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{\cos^2\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right]}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}(-\operatorname{sen}\theta d\theta) = 2\int_0^{\pi}\cos^2\left[n+\frac{1}{2}\right]\theta d\theta = \pi$$

por lo que

$$\int_{-1}^{1} w(x)V_m(x)f(x)dx = c_m\int_{-1}^{1} w(x)V_m^2(x)dx = c_m\pi,$$

$$c_m = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} w(x)V_m(x)f(x)dx$$

y de esta forma obtenemos los coeficientes.

Ejemplo 5.2.1. Ejemplo

Obtenga los primeros 5 términos del desarrollo en series de Fourier-Chebyshev III de la función $f(x) = x$.

Demostración 5.2.1 *Tenemos*

$$f(x) = x \approx \sum_{n=0}^{4} c_n V_n(x)$$

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} xw(x)V_n(x)$$

$$x \approx \sum_{n=0}^{4} c_n V_n(x) = c_0V_0(x) + c_1V_1(x) + c_2V_2(x) + c_3V_3(x) + c_4V_4(x)$$

donde Sabemos que:
$V_0(x) = 1, V_1(x) = 2x - 1, V_2(x) = 4x^2 - 2x - 1V_3(x) = 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1, V_4(x) = 16x^4 - 8x^3 - 12x^2 + 4x + 1$
$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}V_0(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2} = \pi$
$c_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}(2x-1)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(2x^2 - x\right)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}$
$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$
$c_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} x\left(4x^2 - 2x - 1\right)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = \frac{1}{\pi}\left(4\int_{-1}^{1} x^3\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx - 2\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx - \int_{-1}^{1}\right.$
$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{3\pi}{2} - \pi - \frac{\pi}{2}\right] = 0$

$$
\begin{aligned}
c_3 &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} x\left(8x^3-4x^2-4x+1\right)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(8x^4-4x^3-4x^2+x\right)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[8\int_{-1}^{1} x^4\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx - 4\int_{-1}^{1} x^3\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx - 4\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx + \int_{-1}^{1} x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[3\pi - \frac{3\pi}{2} - 2\pi + \frac{\pi}{2}\right] = 0 \\
c_4 &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} x\left(16x^4-8x^3-12x^2+4x+1\right)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[16\int_{-1}^{1} x^5\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx - 8\int_{-1}^{1} x^4\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx - 12\int_{-1}^{1} x^3\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx\right] \\
&+ \frac{1}{\pi}\left[4\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx + \int_{-1}^{1} x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[5\pi - 3\pi - \frac{9\pi}{2} + 2\pi + \frac{\pi}{2}\right] = 0
\end{aligned}
$$

Por lo que tenemos que:

$$
\begin{aligned}
c_0 = \frac{1}{2}, c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = c_3 = c_4 \\
f(x) = x \approx \frac{1}{2}(1 + 2x - 1) = x
\end{aligned}
$$

Por lo que la función aproximada es igual a la función original. hacer grafica

Ejemplo 5.2.2. Ejemplo

Obtenga los primeros 5 términos del desarrollo en serie Fourier-Chebyshev III de la función $f(x) = (1-x)^{1/2}(1+x)^{-1/2}$ en $(-1, 1)$.

Demostración 5.2.2 *Tenemos*

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{4} c_n V_n(x),$$

donde

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}V_n(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} V_n(x)dx \\
f(x) &\approx \sum_{n=0}^{4} c_n V_n(x) = c_0V_0(x) + c_1V_1(x) + c_2V_2(x) + c_3V_3(x) + c_4V_4(x) \\
c_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} V_0(x)dx = \frac{1}{\pi}(1+1) = \frac{2}{\pi}
\end{aligned}
$$

$$c_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} V_1(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(2x-1)dx = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} xdx - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} dx = -\frac{2}{\pi}$$
$$c_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} V_2(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(4x^2-2x-1\right)dx = \frac{2}{3\pi}$$
$$c_3 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} V_3(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(8x^3-4x^2-4x+1\right)dx = -\frac{2}{3\pi}$$
$$c_4 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} V_4(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(16x^4-8x^3-12x^2+4x+1\right)dx = \frac{2}{5\pi},$$

por lo que,

$$c_0 = \frac{2}{\pi}, c_1 = -\frac{2}{\pi}, c_2 = \frac{2}{3\pi}, c_3 = -\frac{2}{3\pi}, c_4 = \frac{2}{5\pi}$$

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \approx \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}(2x-1) + \frac{2}{3\pi}\left(4x^2-2x-1\right) - \frac{2}{3\pi}\left(8x^3-4x^2-4x+1\right) + \frac{2}{5\pi}\left(16x^4-8x^3-12x\right.$$

hacer la grafica

Ejemplo 5.2.3. Ejemplo

Obtenga los primeros 5 términos del desarrollo en serie Fourier-Chebyshev III de la función $f(x) = e^x$ en $(-1, 1)$.

Demostración 5.2.3

$$e^x \approx \sum_{n=0}^{4} c_n V_n(x)$$
$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} e^x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = \frac{5.75}{\pi}$$
$$c_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} e^x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}(2x-1)dx = \frac{0.20}{\pi}$$
$$c_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} e^x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(4x^2-2x-1\right)dx = \frac{0.496}{\pi}$$
$$c_3 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} e^x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(8x^3-4x^2-4x+1\right)dx = \frac{0.08}{\pi}$$
$$c_4 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} e^x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(16x^4-8x^3-12x^2+4x+1\right)dx = \frac{0.009}{\pi}$$

Por lo que

$$e^x \approx \frac{5.75}{\pi} + \frac{0.20}{\pi}(2x-1) + \frac{0.496}{\pi}\left(4x^2-2x-1\right) + \frac{0.08}{\pi}\left(8x^3-4x^2-4x+1\right) + \frac{0.009}{\pi}\left(16x^4-8x^3\right.$$

hacer la grafica

Ejemplo 5.2.4. Ejemplo

Obtenga los primeros 5 términos del desarrollo en serie Fourier-Chebyshev III de la función $f(x) = \text{sen}(x)$ en $(-1, 1)$.

Demostración 5.2.4

$$\operatorname{sen}(x) \approx \sum_{n=0}^{4} c_n V_n(x)$$
$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \operatorname{sen}(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = \frac{1.38}{\pi}$$
$$c_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \operatorname{sen}(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}(2x-1)dx = \frac{1.38}{\pi}$$
$$c_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \operatorname{sen}(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(4x^2-2x-1\right)dx = -\frac{0.06}{\pi}$$
$$c_3 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \operatorname{sen}(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(8x^3-4x^2-4x+1\right)dx = -\frac{0.06}{\pi}$$
$$c_4 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \operatorname{sen}(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(16x^4-8x^3-12x^2+4x+1\right)dx = \frac{0.0008}{\pi}$$

Por lo que

$$\operatorname{sen}(x) \approx \frac{1.38}{\pi}+\frac{1.38}{\pi}(2x-1)-\frac{0.06}{\pi}\left(4x^2-2x-1\right)-\frac{0.06}{\pi}\left(8x^3-4x^2-4x+1\right)+\frac{0.0008}{\pi}\left(16x^4-8x^3-12x^2+4x+1\right)$$

hacer la grafica

Ejemplo 5.2.5. Ejemplo

Obtenga los primeros 5 términos del desarrollo en serie Fourier-Chebyshev III de la función $f(x) = \cos(x)$ en $(-1, 1)$.

Demostración 5.2.5

$$\cos(x) \approx \sum_{n=0}^{4} c_n V_n(x)$$
$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \cos(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = \frac{2.40}{\pi}$$
$$c_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \cos(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}(2x-1)dx = -\frac{0.36}{\pi}$$
$$c_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \cos(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(4x^2-2x-1\right)dx = -\frac{0.36}{\pi}$$
$$c_3 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \cos(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(8x^3-4x^2-4x+1\right)dx = \frac{0.008}{\pi}$$
$$c_4 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \cos(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(16x^4-8x^3-12x^2+4x+1\right)dx = \frac{0.008}{\pi}$$

Por lo que

$$\cos(x) \approx \frac{2.40}{\pi}-\frac{0.36}{\pi}(2x-1)-\frac{0.36}{\pi}\left(4x^2-2x-1\right)+\frac{0.008}{\pi}\left(8x^3-4x^2-4x+1\right)+\frac{0.008}{\pi}\left(16x^4-8x^3-12x^2+4x+1\right)$$

5.2.2. Series de Fourier Chebyshev IV

En el caso de los polinomios de Chebyshev IV podemos aproximar funciones al igual que como lo hicimos para los de 3er tipo. Si $f(x)$ es una función continua o suave a trozos podemos aproximarla de la siguiente manera:

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} c_n W_n(x),$$

Donde $W_n(x)$ son los polinomios de Chebyshev de 4to tipo y

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} w(x) W_n(x) f(x) dx$$
$$w(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

Veamos algunos ejemplos de funciones polinomiales, ya que cuando la función f es polinomial la aproximación es muy buena.

Ejemplo 5.2.6. Ejemplo

Sea $f(x) = x^2$, encuentre la aproximación Fourier-Chebyshev IV con 5 términos en $(-1, 1)$

Demostración 5.2.6

$$x^2 \approx \sum_{n=0}^{4} c_n W_n(x) = c_0 W_0(x) + c_1 W_1(x) + c_2 W_2(x) + c_3 W_3(x) + c_4 W_4(x)$$

donde

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} W_0(x) x^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} x^2 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$c_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} W_1(x) x^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} x^2 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} (2x+1) dx = \frac{1}{\pi} \left(2 \int_{-1}^{1} x^3 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx + \int_{-1}^{1} \right.$$
$$= \frac{1}{\pi} \left(-2 \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$c_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} W_2(x) x^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} x^2 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \left(4x^2 + 2x - 1 \right) dx$$
$$= \frac{1}{\pi} \left(4 \int_{-1}^{1} x^4 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx + 2 \int_{-1}^{1} x^3 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx - \int_{-1}^{1} x^2 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx \right)$$
$$= \frac{1}{\pi} \left(4 \left(\frac{3\pi}{8} \right) + 2 \left(-\frac{3\pi}{8} \right) - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{4}$$

$$c_3 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} W_3(x) x^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} x^2 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \left(8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 \right) dx$$

$$c_3 = \frac{1}{\pi} \left(8 \int_{-1}^{1} x^5 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx + 4 \int_{-1}^{1} x^4 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx - 4 \int_{-1}^{1} x^3 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx - \int_{-1}^{1} x^2 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx \right)$$
$$= \frac{1}{\pi} \left(8 \left(-\frac{5\pi}{16} \right) + 4 \left(\frac{3\pi}{8} \right) - 4 \left(-\frac{3\pi}{8} \right) - \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

$$c_4 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}W_4(x)x^2dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(16x^4+8x^3-12x^2-4x+1\right)x^2dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(16\int_{-1}^{1}x^6\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx + 8\int_{-1}^{1}x^5\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx - 12\int_{-1}^{1}x^4\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx - 4\int_{-1}^{1}x^3\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx\right)$$
$$+\frac{1}{\pi}\left(\int_{-1}^{1}x^2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx\right)$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(16\left(\frac{5\pi}{16}\right)+8\left(-\frac{5\pi}{16}\right)-12\left(\frac{3\pi}{8}\right)+4\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=0$$

Por lo que

$$c_0 = \frac{1}{2}, \quad c_1 = -\frac{1}{4}, \quad c_2 = \frac{1}{4}, c_3 = c_4 = 0$$

Así tenemos:

$$x^2 \approx c_0W_0(x) + c_1W_1(x) + c_2W_2(x) + c_3W_3(x) + c_4W_4(x)$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(2x+1) + \frac{1}{4}\left(4x^2+2x-1\right) = x^2$$

hacer la grafica

Por lo que se tiene que la aproximación es exacta. A demas se puede observar que las constantes c_n se hacen cero cuando $n+1$ es mayor que el grado del polinomio que se esta aproximando.

Ejemplo 5.2.7. Ejemplo

Sea $f(x) = 5x^3 - 3x + 8$, encuentre la aproximación Fourier-Chebyshev IV con 4 términos en $(-1, 1)$

Demostración 5.2.7

$$5x^3 - 3x + 8 \approx \sum_{n=0}^{3} c_nW_n(x) = c_0W_0(x) + c_1W_1(x) + c_2W_2(x) + c_3W_3(x),$$

donde

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}W_0(x)\left(5x^3-3x+8\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(5x^3-3x+8\right)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(5\int_{-1}^{1}x^3\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx - 3\int_{-1}^{1}x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx + 8\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx\right)$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(-5\left(\frac{3\pi}{8}\right)+3\left(\frac{\pi}{2}\right)+8(\pi)\right) = \frac{37}{8}$$

$$c_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}W_1(x)\left(5x^3-3x+8\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(5x^3-3x+8\right)(2x+1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-1}^{1}\left(10x^4+5x^3-6x^2+13x+8\right)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(10\int_{-1}^{1}x^4\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx + 5\int_{-1}^{1}x^3\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx - 6\int_{-1}^{1}x^2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx\right)$$

$$+\left(13\int_{-1}^{1}x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx + 8\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(10\left(\frac{3\pi}{8}\right)+5\left(-\frac{3\pi}{8}\right)-6\left(\frac{\pi}{2}\right)+13\left(-\frac{\pi}{2}\right)+8\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -\frac{93}{8}$$

$$c_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(4x^2+2x-1\right)\left(5x^3-3x+8\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(20x^5+10x^4-17x^3+26x^2+\right.$$

$$= \frac{20}{\pi}\int_{-1}^{1}x^5\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx+\frac{10}{\pi}\int_{-1}^{1}x^4\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx - \frac{17}{\pi}\int_{-1}^{1}x^3\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$+\frac{19}{\pi}\int_{-1}^{1}x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx + \frac{8}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}d$$

$$= -\frac{100}{16}+\frac{30}{8}+\frac{51}{8}+\frac{26}{2}-\frac{19}{2}-8 = -$$

$$c_3 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(8x^3+4x^2-2x-1\right)\left(5x^3-3x+8\right)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(40x^6+20x^5-34x^4+47x^3+38x^2-13x-8\right)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$$

$$= \frac{40}{\pi}\int_{-1}^{1}x^6\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx + \frac{20}{\pi}\int_{-1}^{1}x^5\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx - \frac{34}{\pi}\int_{-1}^{1}x^4\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$$

$$+\frac{47}{\pi}\int_{-1}^{1}x^3\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx + \frac{38}{\pi}\int_{-1}^{1}x^2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx - \frac{13}{\pi}\int_{-1}^{1}x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx - \frac{8}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$$

$$= 40\left(\frac{5}{16}\right) - \frac{100}{16} - \frac{51}{4} - 47\left(\frac{3}{8}\right) + 19 + \frac{13}{2} - 8 = \frac{47}{8}$$

$$c_4 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(16x^4+8x^3-12x^2-4x+1\right)\left(5x^3-3x+8\right)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(80x^7+40x^6-108x^5+84x^4+105x^3-84x^2-35x+8\right)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$$

$$= \frac{80}{\pi}\int_{-1}^{1}x^7\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx + \frac{40}{\pi}\int_{-1}^{1}x^6\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx - \frac{108}{\pi}\int_{-1}^{1}x^5\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$$

$$+\frac{84}{\pi}\int_{-1}^{1}x^4\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx + \frac{105}{\pi}\int_{-1}^{1}x^3\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx - \frac{84}{\pi}\int_{-1}^{1}x^2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$$

$$-\frac{35}{\pi}\int_{-1}^{1}x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx + \frac{8}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = 0$$

Por lo que

$$c_0 = \frac{37}{8}, \quad c_1 = -\frac{93}{8}, \quad c_2 = -\frac{57}{8}, c_3 = \frac{47}{8}, c_4 = 0$$

Así tenemos:

$$5x^3 - 3x + 8 \approx c_0W_0(x) + c_1W_1(x) + c_2W_2(x) + c_3W_3(x) + c_4W_4(x)$$
$$= \frac{37}{8} - \frac{93}{8}(2x+1) - \frac{57}{8}\left(4x^2 + 2x - 1\right) + \frac{47}{8}\left(8x^3 + 4x^2 - 4x - 1\right) = 5x^3 - 3x + 8$$

Por lo que se tiene que la aproximación es exacta.

Ejemplo 5.2.8. Ejemplo

Sea $f(x) = \tan(x)$, encuentre la aproximación Fourier-Chebyshev IV con 5 términos en $(-1, 1)$

Demostración 5.2.8

$$\tan(x) \approx \sum_{n=0}^{4} c_nW_n(x) = c_0W_0(x) + c_1W_1(x) + c_2W_2(x) + c_3W_3(x) + c_4W_4(x)$$

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \tan(x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = -\frac{2.17}{\pi}$$

donde

$$c_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \tan(x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}(2x+1)dx = \frac{2.17}{\pi}$$
$$c_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \tan(x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(4x^2 + 2x - 1\right)dx = -\frac{0.243}{\pi}$$
$$c_3 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \tan(x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(8x^3 + 4x^2 - 4x - 1\right)dx = \frac{0.243}{\pi}$$
$$c_4 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \tan(x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(16x^4 + 8x^3 - 12x^2 - 4x + 1\right)dx = -\frac{0.03}{\pi}$$

Así tenemos: $\tan(x) \approx c_0W_0(x) + c_1W_1(x) + c_2W_2(x) + c_3W_3(x) + c_4W_4(x)$

$$= -\frac{2.17}{\pi} + \frac{2.17}{\pi}(2x+1) - \frac{0.243}{\pi}\left(4x^2 + 2x - 1\right) + \frac{0.243}{\pi}\left(8x^3 + 4x^2 - 4x - 1\right) - \frac{0.03}{\pi}\left(16x^4 + 8x^3 - 12x^2 - 4x + 1\right)$$

Ejemplo 5.2.9. Ejemplo

Sea $f(x) = 5^x - 4\cos(x)$, encuentre la aproximación Fourier-Chebyshev IV con 5 términos en $(-1, 1)$

Demostración 5.2.9

$$5^x - 4\cos(x) \approx \sum_{n=0}^{4} c_nW_n(x) = c_0W_0(x) + c_1W_1(x) + c_2W_2(x) + c_3W_3(x) + c_4W_4(x),$$

donde

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(5^x - 4\cos(x))\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = -\frac{7.53}{\pi}$$

$$c_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(5^x - 4\cos(x))\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}(2x+1)dx = \frac{0.74}{\pi}$$

$$c_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(5^x - 4\cos(x))\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(4x^2+2x-1\right)dx = \frac{2.379}{\pi}$$

$$c_3 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(5^x - 4\cos(x))\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(8x^3+4x^2-4x-1\right)dx = \frac{0.289}{\pi}$$

$$c_4 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(5^x - 4\cos(x))\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(16x^4+8x^3-12x^2-4x+1\right)dx = \frac{0.02}{\pi}$$

Así tenemos:

$$5^x - 4\cos(x) \approx c_0W_0(x) + c_1W_1(x) + c_2W_2(x) + c_3W_3(x) + c_4W_4(x)$$

$$= -\frac{7.53}{\pi} + \frac{0.74}{\pi}(2x+1) + \frac{2.379}{\pi}\left(4x^2+2x-1\right) + \frac{0.289}{\pi}\left(8x^3+4x^2-4x-1\right) + \frac{0.02}{\pi}\left(16x^4 +\right.$$

hacer grafica

Ejemplo 5.2.10. Ejemplo

Sea $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, encuentre la aproximación Fourier-Chebyshev IV con 5 términos en $(-1, 1)$

Demostración 5.2.10

$$\sqrt{1-x^2} \approx \sum_{n=0}^{4} c_nW_n(x) = c_0W_0(x) + c_1W_1(x) + c_2W_2(x) + c_3W_3(x) + c_4W_4(x),$$

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left.\sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \frac{2}{\pi}$$

donde

$$c_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}(2x+1)dx = \frac{0.67}{\pi}$$

$$c_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(4x^2+2x-1\right)dx = -\frac{0.67}{\pi}$$

$$c_3 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(8x^3+4x^2-4x-1\right)dx = \frac{0.13}{\pi}$$

$$c_4 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(16x^4+8x^3-12x^2-4x+1\right)dx = -\frac{0.13}{\pi}$$

Así tenemos:

$$\sqrt{1-x^2} \approx c_0W_0(x) + c_1W_1(x) + c_2W_2(x) + c_3W_3(x) + c_4W_4(x)$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{0.67}{\pi}(2x+1) - \frac{0.67}{\pi}\left(4x^2+2x-1\right) + \frac{0.13}{\pi}\left(8x^3+4x^2-4x-1\right) - \frac{0.13}{\pi}\left(16x^4+8x^3 -\right.$$

Ejemplo 5.2.11. Ejemplo

Existe una función, denominada la función del amor, puest o que al graficarla, la gráfica toma la forma de un corazón. Sea $f_1(x) = \left(x^2\right)^{1/3} + \sqrt{1-x^2}$ y $f_2(x) = \left(x^2\right)^{1/3} - \sqrt{1-x^2}$, si graficamos estas dos funciones en el mismo plano, tenemos:
hacer la grafica
encuentre la aproximación Fourier-Chebyshev IV con 5 términos en $(-1,1)$ de ambas funciones y su gráfica en el mismo plano.

Demostración 5.2.11 *Para* $f_1(x)$

$$\left(x^2\right)^{1/3}+\sqrt{1-x^2} \approx \sum_{n=0}^{4} c_n W_n(x) = c_0W_0(x)+c_1W_1(x)+c_2W_2(x)+c_3W_3(x)+c_4W_4(x),$$

donde

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\left(x^2\right)^{1/3}+\sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \frac{4.24}{\pi}$$
$$c_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\left(x^2\right)^{1/3}+\sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}(2x+1)dx = \frac{0.107}{\pi}$$
$$c_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\left(x^2\right)^{1/3}+\sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(4x^2+2x-1\right)dx = -\frac{0.107}{\pi}$$
$$c_3 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\left(x^2\right)^{1/3}+\sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(8x^3+4x^2-4x-1\right)dx = \frac{0.29}{\pi}$$
$$c_4 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\left(x^2\right)^{1/3}+\sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(16x^4+8x^3-12x^2-4x+1\right)dx = -\frac{0.29}{\pi}$$

Así tenemos:

$$\left(x^2\right)^{1/3}+\sqrt{1-x^2} \approx c_0W_0(x)+c_1W_1(x)+c_2W_2(x)+c_3W_3(x)+c_4W_4(x)$$
$$= \frac{4.24}{\pi}+\frac{0.107}{\pi}(2x+1)-\frac{0.107}{\pi}\left(4x^2+2x-1\right)+\frac{0.29}{\pi}\left(8x^3+4x^2-4x-1\right)-\frac{0.29}{\pi}\left(16x^4+8x^3-12x^2-4x+1\right)$$

Para $f_2(x)$

$$\left(x^2\right)^{1/3}-\sqrt{1-x^2} \approx \sum_{n=0}^{4} c_n W_n(x) = c_0W_0(x)+c_1W_1(x)+c_2W_2(x)+c_3W_3(x)+c_4W_4(x),$$

donde

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\left(x^2\right)^{1/3}-\sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \frac{0.24}{\pi}$$
$$c_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\left(x^2\right)^{1/3}-\sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}(2x+1)dx = -\frac{1.27}{\pi}$$
$$c_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\left(x^2\right)^{1/3}-\sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(4x^2+2x-1\right)dx = \frac{1.27}{\pi}$$
$$c_3 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\left(x^2\right)^{1/3}-\sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(8x^3+4x^2-4x-1\right)dx = \frac{0.027}{\pi}$$
$$c_4 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\left(x^2\right)^{1/3}-\sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(16x^4+8x^3-12x^2-4x+1\right)dx = -\frac{0.027}{\pi}$$

Así tenemos:

$$\left(x^2\right)^{1/3} - \sqrt{1-x^2} \approx c_0W_0(x) + c_1W_1(x) + c_2W_2(x) + c_3W_3(x) + c_4W_4(x)$$

$$= \frac{0.24}{\pi} - \frac{1.27}{\pi}(2x+1) + \frac{1.27}{\pi}\left(4x^2+2x-1\right) + \frac{0.027}{\pi}\left(8x^3+4x^2-4x-1\right) - \frac{0.027}{\pi}\left(16x^4+8\right.$$

Si graficamos estas dos expresiones en el mismo plano mostrado anteriormente tenemos hacer grafica con la aproximacion

Ejemplo 5.2.12. Ejemplo

Sea $f(x) = |x|$, encuentre la aproximación Fourier-Chebyshev IV con 5 términos en $(-1, 1)$

Demostración 5.2.12

$$|x| \approx \sum_{n=0}^{4} c_nW_n(x) = c_0W_0(x) + c_1W_1(x) + c_2W_2(x) + c_3W_3(x) + c_4W_4(x),$$

donde

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} |x|\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \frac{2}{\pi}$$

$$c_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} |x|\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}(2x+1)dx = -\frac{0.07}{\pi}$$

$$c_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} |x|\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(4x^2+2x-1\right)dx = \frac{0.07}{\pi}$$

$$c_3 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} |x|\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(8x^3+4x^2-4x-1\right)dx = \frac{0.13}{\pi}$$

$$c_4 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} |x|\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(16x^4+8x^3-12x^2-4x+1\right)dx = -\frac{0.13}{\pi}$$

Así tenemos:

$$|x| \approx c_0W_0(x) + c_1W_1(x) + c_2W_2(x) + c_3W_3(x) + c_4W_4(x)$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{0.07}{\pi}(2x+1) + \frac{0.07}{\pi}\left(4x^2+2x-1\right) + \frac{0.13}{\pi}\left(8x^3+4x^2-4x-1\right) - \frac{0.13}{\pi}\left(16x^4+8x^3-\right.$$

hacer grafica

Ejemplo 5.2.13. Ejemplo

Sea $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + 3^x$, encuentre la aproximación Fourier-Chebyshev IV con 5 términos en $(-1, 1)$

Demostración 5.2.13

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + 3^x \approx \sum_{n=0}^{4} c_nW_n(x) = c_0W_0(x) + c_1W_1(x) + c_2W_2(x) + c_3W_3(x) + c_4W_4(x),$$

donde

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)+3^x\right)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \frac{1.4}{\pi}$$

$$c_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)+3^x\right)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}(2x+1)dx = \frac{2.24}{\pi}$$

$$c_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)+3^x\right)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(4x^2+2x-1\right)dx = \frac{0.44}{\pi}$$

$$c_3 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)+3^x\right)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(8x^3+4x^2-4x-1\right)dx = \frac{0.07}{\pi}$$

$$c_4 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)+3^x\right)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(16x^4+8x^3-12x^2-4x+1\right)dx = \frac{0.01}{\pi}$$

Así tenemos:

$$\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)+3^x \approx c_0W_0(x)+c_1W_1(x)+c_2W_2(x)+c_3W_3(x)+c_4W_4(x)$$

$$= \frac{1.4}{\pi}+\frac{2.24}{\pi}(2x+1)+\frac{0.44}{\pi}\left(4x^2+2x-1\right)+\frac{0.07}{\pi}\left(8x^3+4x^2-4x-1\right)+\frac{0.01}{\pi}\left(16x^4+8x^3-12x^2-4x+1\right)$$

hacer grafica

Ejemplo 5.2.14. Ejemplo

Sea $f(x)=\cosh(x)$, encuentre la aproximación Fourier-Chebyshev IV con 5 términos en $(-1,1)$

Demostración 5.2.14

$$\cosh(x) \approx \sum_{n=0}^{4} c_nW_n(x) = c_0W_0(x)+c_1W_1(x)+c_2W_2(x)+c_3W_3(x)+c_4W_4(x)$$

donde

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cosh(x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \frac{3.98}{\pi}$$

$$c_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cosh(x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}(2x+1)dx = -\frac{0.426}{\pi}$$

$$c_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cosh(x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(4x^2+2x-1\right)dx = \frac{0.426}{\pi}$$

$$c_3 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cosh(x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(8x^3+4x^2-4x-1\right)dx = -\frac{0.009}{\pi}$$

$$c_4 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cosh(x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(16x^4+8x^3-12x^2-4x+1\right)dx = \frac{0.009}{\pi}$$

$\cosh(x) \approx c_0W_0(x)+c_1W_1(x)+c_2W_2(x)+c_3W_3(x)+c_4W_4(x)$

Así tenemos:

$$= \frac{3.98}{\pi}-\frac{0.426}{\pi}(2x+1)+\frac{0.426}{\pi}\left(4x^2+2x-1\right)-\frac{0.009}{\pi}\left(8x^3+4x^2-4x-1\right)+\frac{0.009}{\pi}\left(16x^4+8x^3-12x^2-4x+1\right)$$

Ejemplo 5.2.15. Ejemplo

Sea $f(x) = \operatorname{senh}(x)$, encuentre la aproximación Fourier-Chebyshev IV con 5 términos en $(-1, 1)$

Demostración 5.2.15

$$\operatorname{senh}(x) \approx \sum_{n=0}^{4} c_n W_n(x) = c_0 W_0(x) + c_1 W_1(x) + c_2 W_2(x) + c_3 W_3(x) + c_4 W_4(x)$$

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \operatorname{senh}(x) \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = -\frac{1.78}{\pi}$$

donde

$$c_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \operatorname{senh}(x) \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} (2x+1) dx = \frac{1.78}{\pi}$$

$$c_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \operatorname{senh}(x) \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \left(4x^2 + 2x - 1\right) dx = -\frac{0.07}{\pi}$$

$$c_3 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \operatorname{senh}(x) \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \left(8x^3 + 4x^2 - 4x - 1\right) dx = \frac{0.07}{\pi}$$

$$c_4 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \operatorname{senh}(x) \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \left(16x^4 + 8x^3 - 12x^2 - 4x + 1\right) dx = -\frac{8.5(10)^{-4}}{\pi}$$

$$\operatorname{senh}(x) \approx c_0 W_0(x) + c_1 W_1(x) + c_2 W_2(x) + c_3 W_3(x) + c_4 W_4(x)$$

Así tenemos:

$$= -\frac{1.78}{\pi} + \frac{1.78}{\pi}(2x+1) - \frac{0.07}{\pi}\left(4x^2 + 2x - 1\right) + \frac{0.07}{\pi}\left(8x^3 + 4x^2 - 4x - 1\right) - \frac{8.5(10)^{-4}}{\pi}\left(16x\right.$$

Ejemplo 5.2.16. Ejemplo

Sea $f(x) = |x|$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x) \qquad -1 < x < 1$$

Demostración 5.2.16 *Para obtener la representación haremos uso de (Demostrar la identidad)*

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots \quad (6)$$

$$f(x) = |x| \text{ es una función par}$$

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \quad -1 < x < 1$$

$$a_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Se puede ver que si n es un n es un número par, entonces los polinomios de Legendre seran pares ya que el producto de funciones pares es par, los

coeficientes se cancelaran para el caso que sea par, por esta razón tendremos los coeficientes para el caso impar.
we can see that if n is an odd number, then the Legendre polynomials will be odd and since the product of an even function by an odd function is odd, the coefficients will cancel for the odd case, for this reason, we will only have coefficients left for the even case .

$$\text{That is,} \quad -P_{2n+1}(x) = P_{2n+1}(-x) \quad \text{are odd functions}$$
$$f(-x) = f(x) \quad \text{is an even function}$$
$$\Rightarrow \quad f(-x)P_{2n+1}(-x) = -f(x)P_{2n+1}(x) \quad \text{are odd functions}$$

therefore

$$c_{2n+1} = 0 \quad \forall n \geq 0$$

Thus,

$$c_{2n} = \left(2n + \frac{1}{2}\right) \int_1^1 |x| P_{2n}(x)dx; \quad P_{2n}(-x) = P_{2n}(x)$$
$$c_{2n} = 2\left(2n + \frac{1}{2}\right) \int_0^1 x P_{2n}(x)dx$$

$$c_{2n} = (4n+1) \int_0^1 x P_{2n}(x)dx$$
$$\frac{c_{2n}}{(4n+1)} = \int_0^1 x P_{2n}(x)dx$$

$$c_0 = \int_0^1 x P_0(x)dx = \frac{1}{2}, \qquad c_2 = 5 \int_0^1 \frac{1}{2} x\left(-1 + 3x^2\right)dx = \frac{5}{8}$$

integrating by parts

$$u = x \quad dv = P_{2n}(x)dx$$
$$du = dx \quad \int dv = \int P_{2n}(x)dx, \quad v = \int P_{2n}(x)dx$$

we know that:

$$P_n(x) = \frac{1}{2n+1}\left[P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)\right]; n = 1, 2, 3, \ldots$$

so,

$$P_{2n}(x) = \frac{1}{4n+1}\left[P'_{2n+1}(x) - P'_{2n-1}(x)\right]; n = 2, 3, \ldots$$

then,

$$v = \int P_{2n}(x)dx$$
$$v = \frac{1}{(4n+1)} \int \left[P'_{2n+1}(x) - P'_{2n-1}(x)\right] dx$$
$$v = \frac{1}{(4n+1)} \left[P_{2n+1}(x) - P_{2n-1}(x)\right]$$

$$\frac{c_{2n}}{(4n+1)} = \frac{x}{(4n+1)}\left[P_{2n+1}(x) - P_{2n-1}(x)\right]\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{(4n+1)}\left[P_{2n+1}(x) - P_{2n-1}(x)\right] dx$$

we know that: $P_n(1) = 1 \quad \forall n \in N$ *so,*

$$\frac{c_{2n}}{(4n+1)} = \frac{1}{(4n+1)} \int_0^1 \left[P_{2n-1}(x) - P_{2n+1}(x)\right] dx$$

$$c_{2n} = \int_0^1 P_{2n-1}(x)dx - \int_0^1 P_{2n+1}(x)dx$$

Following the same process as before, we get

$$I_1 = \int_0^1 P_{2n-1}(x)dx$$

$$I_1 = \frac{2(2n-1)+1}{2(2n-1)+1} \int_0^1 P_{2n-1}(x)dx$$

$$I_1 = \frac{1}{(4n-1)} \int_0^1 (4n-1)P_{2n-1}(x)dx = \frac{1}{(4n-1)} \int_0^1 \left[P'_{2n-1+1}(x) - P'_{2n-1-1}(x)\right] dx$$

$$I_1 = \frac{1}{(4n-1)} \left[P_{2n}(x) - P_{2n-2}(x)\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{(4n-1)} \left[P_{2n-2}(0) - P_{2n}(0)\right]$$

We can use the Generator function to get

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

$$H\left(x, r\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xr + r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) r^n \quad (1).$$

$$H(0, r) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0) r^n = P_0(0) + P_1(0)t + P_2(0)r^2 + P_3(0)r^3 + \ldots$$

Remembering: $(1-u)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} u^k = 1 - \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} u^2 - \cdots$

$$H\left(0, r\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + r^2}} = 1 - \frac{1}{2}r^2 + \frac{3}{8}r^4 + \ldots$$

Comparing these expansions, we have the $P_n(0) = 0$ *for* n *odd and for even integers one can show, that*

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

where $n!!$ *is the double factorial,*

$$n!! = \begin{cases} n(n-2)\ldots(3)1, & n > 0, \ \text{odd} \\ n(n-2)\ldots(4)2, & n > 0, \ \text{even} \\ 1, & n = 0, -1 \end{cases}, \quad (2n)!! = 2^n n!, \quad (2n-1)!! = \frac{(2n)!}{(2n)!!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{(4n-1)}\left[P_{2n-2}(0) - P_{2n}(0)\right] \\
&= \frac{1}{(4n-1)}\left[(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} - (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!}\right] \\
&= \frac{-1}{(4n-1)}(-1)^n\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\left[1+\frac{2n-1}{2n}\right] \\
&= \frac{-1}{(4n-1)}(-1)^n\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\left[\frac{4n-1}{2n}\right] \\
&= -\frac{1}{2n}(-1)^n\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \\
&= -(-1)^n\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \\
&= (-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{2^n n!((n-1)} \div 2^n n! \\
&= (-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{\left[2^n n!\right]^2(2n-1)}
\end{aligned}$$

$(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)!! \Rightarrow (2n-3)!! = \frac{(2n-1)!!}{(2n-1)} = \frac{(2n)!}{2^n n!(2n-1)}$ *Let take*

$$I_1 = B_n$$

Then

$$B_n = \frac{1}{(4n-1)}\left[P_{2n-2}(0) - P_{2n}(0)\right] = (-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{\left[2^n n!\right]^2(2n-1)}$$

Then, we have:

$$I_2 = B_{n+1} = \frac{1}{[4(n+1)-1]}\left[P_{2(n+1)-2}(0) - P_{2(n+1)}(0)\right] = (-1)^{n+2}\frac{[2n+2]!}{\left[2^{n+1}(n+1)!\right]^2(2n+1)}$$

$$-I_2 = -B_{n+1} = (-1)^{n+1}\frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{\left[2*2^n(n+1)(n)!\right]^2(2n+1)}$$

$$\begin{aligned}
c_{2n} &= I_1 - I_2 \\
&= (-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{\left[2^n n!\right]^2(2n-1)} + \frac{(-1)^{n+1}(2n)!2(n+1)(2n+1)}{\left[2^n n!\right]^2 2^2(n+1)^2(2n+1)} \\
&= (-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{[2n!]^n}\left[\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+2}\right] \\
c_{2n} &= (-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{2(2n-1)(n+1)\left[2^n n!\right]^2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow |x| = \frac{1}{2}P_0(x) + \frac{5}{8}P_2(x) + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n \quad P_{2n}(x)}{(1-2n)(n+1)\left[2^n n!\right]^2}; \qquad -1 < x < 1.$$

Ejemplo 5.2.17. Ejemplo

Prove the following.
i) If f is periodic and equal to $\operatorname{sign} x$ in $(-\pi, \pi)$, then

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi}\left\{\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots\right\}$$

ii) Let $0<h<\frac{1}{2}\pi$, and let f be the "triangular" function defined as follows: f is periodic, even, continuous, $f(0)=1, f(x)=0$ for $2h \leq x \leq \pi, f$ is linear in $(0,2h)$. Then

$$f \sim \frac{2h}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^{2} \cos kx\right]=\frac{h}{\pi}\left[1+\sum_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^{2} e^{ikx}\right]$$

iii) Let g be periodic and equal to $\frac{1}{2} \log \left[1/\left|2 \sin \frac{1}{2} x\right|\right]$ in $(-\pi, \pi)$. Then $g \sim \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}$

[HINT: For iii), one may either integrate by parts in the formula for the cosine coefficients of g, or consider the real part of the series integrate by parts in the formula for the cosine coefficients of g, or consider the real part of the series

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k}}{k}=\log \frac{1}{1-z}, \quad z=re^{ix}$$

for $r<1$, and then let $r \rightarrow 1$.]

Demostración 5.2.17 *i) We know that the Fourier series of a function $f(t)$ over $[-\pi, \pi]$, is given by*

$$f(t)=\frac{1}{2} a_{0}+\sum_{n=1}^{\infty} a_{n} \cos (nt)+\sum_{n=1}^{\infty} b_{n} \sin (nt)$$

where

$$\begin{aligned} a_{0} &=\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \\ a_{n} &=\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos (nt) dt \\ b_{n} &=\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin (nt) dt \end{aligned}$$

$\operatorname{sign}(t)=\begin{cases} 1 & if\ t>0 \\ 0 & if\ t=0 \\ -1 & if\ t<0 \end{cases}$ *The function $f(t)$ is odd, therefore;*

$$\begin{aligned} a_{0} &=\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} sign(t) dt=0 \\ a_{n} &=\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} sign(t) \cos (nt) dt=0 \end{aligned}$$

And,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} sign(t)\sin(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nt)dt = \frac{2(1-\cos(\pi n))}{\pi n} = \frac{4}{\pi(2n-1)}$$

Then,

$$\text{sign}(t) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)t}{(2n-1)}$$

ii) Let $0 < h < \frac{1}{2}\pi$, and let f be the "triangular" function defined as follows: f is periodic, even, continuous, $f(0) = 1, f(x) = 0$ for $2h \leq x \leq \pi, f$ is linear in $(0, 2h)$. Then

$$f \sim \frac{2h}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^2\cos kx\right] = \frac{h}{\pi}\left[1 + \sum_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^2 e^{ikx}\right]$$

Solución

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{\pi n x}{p}}$$

$$C_n = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)e^{\frac{-in\pi x}{p}}dx$$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$C_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx$$

$$C_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} -\frac{1}{2h}(x-2h)dx$$

$$C_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2h} -\frac{1}{2h}(x-2h)dx$$

$$C_0 = \frac{h}{\pi}$$

$C_0 = \frac{h}{\pi}$ $C_n = \frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx,$ $\quad C_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)[\cos(nx) - i\sin(nx)]dx$

because $f(-x) = f(x)$ is even, then

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = 0$$

$$C_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx; \quad n \geq 1$$

$$C_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} -\frac{1}{2h}(x-2h)\cos(nx)dx$$

$$C_n = \frac{-1}{2\pi h}\int_0^{2h}(x-2h)\cos(nx)dx$$

Integrating by parts we obtain

$$C_n = \frac{\text{san}^2(hn)}{\pi h n^2}; n \geq 1$$

$$f(x) = C_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$$

$$f(x) = \frac{h}{\pi} + \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(hn)}{\pi h n^2} e^{inx}$$

$$f(x) = \frac{h}{\pi}\left[1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(hn)}{hn}\right)^2 e^{inx}\right]$$

Now I am going to demonstrate the equivalence of the representation of the Fourier series, and I will do it by converting the left side of the equality to the right side.

$$f \sim \frac{h}{\pi}\left[1 + \sum_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^2 e^{ikx}\right] = \frac{2h}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^2 \cos kx\right]$$

$f(x) = \frac{h}{\pi}\left[1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(hn)}{hn}\right)^2 e^{inx}\right]$, *Let* $\left(\frac{\sin(hn)}{hn}\right)^2 = B_n \Rightarrow B_n = B_{-n}$, $f(x) = \frac{h}{\pi}\left[1 + \sum_{-\infty}^{\infty} B_n e^{inx}\right]$

$$f(x) = \frac{2h}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} B_n e^{inx}\right] = \frac{2h}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{inx} + \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{-1} B_n e^{inx}\right].$$

$$f(x) = \frac{2h}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{inx} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} B_{-n} e^{-inx}\right]$$

$$f(x) = \frac{2h}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}\right)\right]$$

$$f(x) = \frac{2h}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(nx)\right], \quad \cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2h}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(hn)}{nh}\right)^2 \cos(nx)\right]$$

iii) Let g *be periodic and equal to* $\frac{1}{2}\log\left[1/\left|2\sin\frac{1}{2}x\right|\right]$ *in* $(-\pi, \pi)$*. Then*

$$g \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}$$

[HINT: For iii), one may either integrate by parts in the formula for the cosine coefficients of g*, or consider the real part of the series integrate by parts in the formula for the cosine coefficients of* g*, or consider the real part of the series*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} = \log\frac{1}{1-z}, \quad z = re^{ix}$$

for $r < 1$, and then let $r \to 1$.]

Solución

The goal is to compute the Fourier series of $g(x) = -\frac{1}{2}\log|2\sin(x/2)|$ over $[-\pi,\pi]$, or the Fourier series of $g(x) = -\frac{1}{2}\log|2\sin(x)|$ over $[-2\pi,2\pi]$. I'll do this, getting the fourier series of $f(x) = \log\cos\frac{x}{2}$ over $[-\pi,\pi]$, and then I will arrive at the desired result, making a translation of the series of $f(x)$.
Since $f(x)$ is an even function, we have to compute:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(kx)\log\cos\frac{x}{2}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(kx)\log\cos\frac{x}{2}dx$$

for any $k \geq 1$ to be able to state:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \sum_{k\geq 1} a_k\cos(kx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k\geq 1} a_k\cos(kx)$$

for any $x \in (-\pi,\pi)$. Integration by parts gives:

$$a_k = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{k}\sin(nx)\log\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2k}\int_0^{\pi}\sin(kx)\tan\frac{x}{2}dx\right)$$

or just:

$$a_k = \frac{1}{\pi k}\int_0^{\pi}\frac{\sin(kx)\sin(x/2)}{\cos(x/2)}dx = \frac{2}{\pi k}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2kx)\sin x}{\cos x}dx$$

Since $\cos((2k+1)x) = 2\cos x\cos(2kx) - \cos((2k-1)x)$, we have:

$$a_k = \frac{1}{\pi k}\int_0^{\pi/2}\sum_{n=1}^{k}\cos((2n-1)x)dx = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

$$\textit{This gives:}\quad \log\cos\frac{x}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\cos(kx)$$

for any $x \in (-\pi,\pi)$. In order to find a_0, we can simply match $f(0) = 0$ with the series on the right hand side. Since:

$$\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = \int_0^1\frac{dx}{1+x} = \log 2$$

we have:

$$\log\cos\frac{x}{2} = -\log 2 + \sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\cos(kx) \quad \forall x \in (-\pi,\pi)$$

and by translating the variable:

$$\log\cos\left(\frac{x-\pi}{2}\right) = -\log 2 + \sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\cos(k(x-\pi)) \quad \forall x \in (-2\pi,2\pi)$$

then

$$\log\sin\tfrac{x}{2} = -\log 2 - \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\cos(kx) \quad \forall x \in (0,2\pi), \quad \heartsuit$$

or

$$\log \sin x = -\log 2 - \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}\cos(2kx) \quad \forall x \in (0,\pi)$$

now we are ready to write the series of g (x).

$g(x) = -\frac{1}{2}\log(2) - \frac{1}{2}\log\sin(x/2)$.

Then from $\heartsuit$, *we have,*

$$-\tfrac{1}{2}\log\sin\tfrac{x}{2} = \tfrac{1}{2}\log 2 + \tfrac{1}{2}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\cos(kx) \quad \forall x \in (0,2\pi), \quad \heartsuit$$

$$g(x) = -\tfrac{1}{2}\log 2 - \tfrac{1}{2}\log\sin\tfrac{x}{2} = \tfrac{1}{2}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\cos(kx) \quad \forall x \in (0,2\pi), \quad \heartsuit$$

as wanted.

A

APÉNDICE

Funciones gamma, beta y símbolo de Pochhammer.

Las funciones gamma y beta son de las funciones más importantes en matemática, más allá de las funciones exponenciales y logarítmicas.
La función gamma se denota por $\Gamma(a)$, (gamma de a) y tiene su representación integral:

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt \quad Re\, a > 0 \tag{A.1}$$

A partir de dicha representación integral, vamos a deducir ciertas propiedades o relaciones de la función gamma, que utilizaremos frecuentemente en el desarrollo de este trabajo.

A.1 Propiedades de la función Gamma

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a) \tag{A.2}$$

Demostración A.1.1 *De A.1*

$$\Gamma(a+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{a} dt$$

integrando por partes $u = t^a \Rightarrow du = at^{a-1}dt \quad y \quad dv = e^{-t} \Rightarrow v = -e^{-t}$

$$\Gamma(a+1) = -t^a e^{-t}\Big|_0^{\infty} + a\int_0^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt = a\Gamma(a) \quad Re\, a > 0$$

$$\Gamma(a+n) = (a+n-1)(a+n-2)\cdots(a+2)(a+1)a\Gamma(a) \,:\, n = 1,2,3,\ldots \tag{A.3}$$

Demostración A.1.2

$$\begin{aligned}
\Gamma(a+n) &= (a+n-1)\Gamma(a+n-1)\\
&= (a+n-1)(a+n-2)\Gamma(a+n-2)\\
&= (a+n-1)(a+n-2)(a+n-3)\Gamma(a+n-3)\\
&\vdots\\
\Gamma(a+n) &= (a+n-1)(a+n-2)\cdots(a+2)(a+1)a\,\Gamma(a) \,:\, n = 1,2,3,\ldots
\end{aligned}$$

$$\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = \prod_{k=0}^{n-1}(a+k) \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{A.4}$$

Demostración A.1.3

$$\begin{aligned}
\Gamma(a+n) &= (a+n-1)(a+n-2)\cdots(a+2)(a+1)a\,\Gamma(a) \\
\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} &= (a+n-1)(a+n-2)\cdots(a+2)(a+1)a \\
\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} &= \prod_{k=0}^{n-1}(a+k) = a(a+1)(a+2)(a+3)\cdots(a+n-1) \quad n = 1, 2, 3, ...
\end{aligned}$$

En la siguiente propiedade demostraremos la relación entre la función gamma y el símbolo de Pochhammer

$$\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = (a)_n \tag{A.5}$$

$(a)_n$ representa el *shifted factorial o símbolo de Pochhammer* definido por:

$$(a)_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1) & \text{si } n = 1,\ 2,\ 3,\ ... \end{cases} \tag{A.6}$$

Demostración A.1.4 *Esta prueba es inmediata, pues por definición:*

$$(a)_n = \begin{cases} 1 & si\ n = 0 \\ a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1) = \prod_{k=0}^{n-1}(a+k) = \dfrac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(n)} & si\ n = 1,\ 2,\ 3,\ ... \end{cases} \tag{A.7}$$

Lo que se concluye

$$\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(n)} = (a)_n\ :\ n = 1, 2, 3, ...$$

Ahora obtendremos la relación entre la función gamma y la función beta

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = B(a, b) \tag{A.8}$$

$B(a, b)$ denota la función beta y tiene su representación integral:

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt \quad Re\, a > 0,\ Re\, b > 0 \tag{A.9}$$

Demostración A.1.5 *Sea* $x = rcos^2\theta$, $y = rsin^2(\theta)$, $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. *Entonces el Jacobiano es* $2rcos(\theta)sin(\theta)$. *Así:*

$$\begin{aligned}
\Gamma(a)\Gamma(b) &= \int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx \int_0^\infty e^{-y}y^{b-1}dy = \int_0^\infty \int_0^\infty x^{a-1}y^{b-1}e^{-x}e^{-y}dxdy \\
\Gamma(a)\Gamma(b) &= \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} (rcos^2(\theta))^{a-1}(rsin^2(\theta))^{b-1}e^{-rcos^2(\theta)}e^{-rsin^2(\theta)}(2rcos(\theta)sin(\theta)drd\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma(a)\Gamma(b) &= \int_0^\infty r^{a-1}r^{b-1}e^{-r}rdr \cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos^2(\theta))^{a-1}(sin^2(\theta))^{b-1}(cos(\theta)sin(\theta)d\theta) \\
\Gamma(a)\Gamma(b) &= \int_0^\infty r^{a+b-1}e^{-r}dr \cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos^2(\theta))^{a-1}(1-cos^2(\theta))^{b-1}(cos(\theta)sin(\theta)d\theta) \\
\Gamma(a)\Gamma(b) &= \Gamma(a+b)\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos^2(\theta))^{a-1}(1-cos^2(\theta))^{b-1}(cos(\theta)sin(\theta)d\theta)
\end{aligned}$$

Sea

$$t = cos^2(\theta) \Rightarrow dt = -2cos(\theta)sin(\theta)d\theta$$

$$\begin{cases} si \quad \theta \to 0 \quad t \to 1 \\ si \quad \theta \to \frac{\pi}{2} \quad t \to 0 \end{cases} \tag{A.10}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma(a)\Gamma(b) &= \Gamma(a+b)\left(-\int_1^0 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt\right) = \Gamma(a+b)\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt \\
\Gamma(a)\Gamma(b) &= \Gamma(a+b)B(a,b) \Rightarrow \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = B(a,b)
\end{aligned}$$

Acontinuación analizaremos la Fórmula de duplicación de Legendre

$$\Gamma(2a) = \frac{2^{2a-1}}{\Gamma(\frac{1}{2})}\Gamma(a)\Gamma(a+\frac{1}{2}) \tag{A.11}$$

Demostración A.1.6 *Como*

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = B(a,b) \Rightarrow \frac{\Gamma(a)\Gamma(a)}{\Gamma(2a)} = B(a,a) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{a-1}dt = \int_0^1 [t(1-t)]^a\frac{dt}{t(1-t)}.$$

Tomando la sustitución $u = 4t(1-t)$, *en el intervalo* $0 \leq t \leq \frac{1}{2} \Rightarrow du = 4(1-2t)dt$
$\Rightarrow du = 4\sqrt{1-u}dt \Rightarrow dt = \frac{du}{4\sqrt{1-u}}$, *y reemplazádola en la expresión anterior tenemos:*

$$\Rightarrow \frac{\Gamma(a)\Gamma(a)}{\Gamma(2a)} = 2\int_0^{\frac{1}{2}}[t(1-t)]^a\frac{dt}{t(1-t)} = 2\int_0^1\left(\frac{u}{4}\right)^a\frac{1}{t(1-t)}\frac{du}{4\sqrt{1-u}}.$$

$$\Rightarrow \frac{\Gamma(a)\Gamma(a)}{\Gamma(2a)} = 2\int_0^1\left(\frac{u}{4}\right)^a\frac{du}{u\sqrt{1-u}}$$

$$\Rightarrow \frac{\Gamma(a)\Gamma(a)}{\Gamma(2a)} = \frac{2}{4^a}\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du = 2^{1-2a}B(a,\frac{1}{2}) = 2^{1-2a}\frac{\Gamma(a)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(a+\frac{1}{2})}.$$

Finalmente, al despejar se obtiene:

$$\Gamma(2a) = \frac{2^{2a-1}}{\Gamma(\frac{1}{2})}\Gamma(a)\Gamma(a+\frac{1}{2}).$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \tag{A.12}$$

Demostración A.1.7

$$\begin{aligned}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \int_0^{\infty} e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}dx\int_0^{\infty} e^{-y}y^{-\frac{1}{2}}dy\end{aligned}$$

Tomando el siguiente cambio de variable

$$\begin{cases} sea \quad x = rcos^2(\theta) & y = rsin^2(\theta)\\ 0 \leq r < \infty & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\end{cases} \tag{A.13}$$

Entonces el Jacobiano es $2rcos(\theta)sin(\theta)$*. Así:*

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \int_0^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r(sin^2\theta+cos^2\theta)}(rcos^2\theta)^{-\frac{1}{2}}(rsin^2(\theta))^{-\frac{1}{2}}(2rcos(\theta)sin(\theta)dr\cdot d\theta).$$

$$\Rightarrow \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \left(2\int_0^{\infty} e^{-r}dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\right) = 2(-e^{-r}|_0^{\infty})(\theta|_0^{\frac{\pi}{2}}) = 2(1)(\frac{\pi}{2}) = \pi \Rightarrow \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

A.2 Variable Compleja

Demostración A.2.1 *Puesto que* f *tiene un polo simple en* $z = z_0$*, su desarrollo de Laurent convergente en un disco perforado* $0 < |z - z_0| < R$ *tiene la forma*

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0) + \cdots,$$

donde $a_{-1} \neq 0$*. Al multiplicar ambos lados de esta serie por* $z - z_0$ *y luego tomando el límite cuando* $z \to z_0$ *obtenemos*

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) &= \lim_{z\to z_0}\left[a_{-1} + a_0(z-z_0) + a_1(z-z_0)^2 + \cdots\right]\\ &= a_{-1} = \operatorname{Res}(f(z), z_0)\end{aligned}$$

Demostración A.2.2 *Debido a que se supone que* f *tiene polo de orden* n *en* $z = z_0$*, su desarrollo de Laurent convergente en un disco perforado* $0 < |z - z_0| < R$ *debe tener la forma*

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots,$$

donde $a_{-n} \neq 0$*. Multiplicamos la última expresión por* $(z - z_0)^n$*,*

$$(z-z_0)^n f(z) = a_{-n} + \cdots + a_{-2}(z-z_0)^{n-2} + a_{-1}(z-z_0)^{n-1} + a_0(z-z_0)^n + a_1(z-z_0$$

y después derivando $n-1$ *veces ambos lados de la igualdad:*

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-z_0)^n f(z)\right] = (n-1)!a_{-1} + n!a_0(z-z_0) + \cdots \tag{A.14}$$

Ya que todos los términos del lado derecho después del primero involucran potencias enteras positivas de $z - z_0$*, el límite de (A.14), cuando* $z \to z_0$ *es*

$$\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-z_0)^n f(z)\right] = (n-1)!a_{-1}$$

Resolviendo la última ecuación para a_{-1} *se obtiene (**??**).*

Demostración A.2.3 *Supongamos que* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *son circunferencias con centro en* $z_1, z_2, \ldots, z_n$*, respectivamente. Además que cada circunferencia* C_k *tiene un radio* r_k *suficientemente pequeño tal que* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *son mutuamente disjuntas y están en el interior de la curva cerrada simple* C*. Vea la figura 6.5.1. Ahora en (20) de la sección 6.3 vimos que* $\oint_{C_k} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_k)$*, y así por el teorema 5.3.2 tenemos*

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f(z), z_k)$$

B

APÉNDICE

Referencias

B.1 Reglas de la Derivación

Fórmulas generales

1. $\dfrac{d}{dx}(c) = 0$
2. $\dfrac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$
3. $\dfrac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$
4. $\dfrac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)$
5. $\dfrac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$
6. $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$
7. $\dfrac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$
8. $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

Funciones exponenciales y logarítmicas

9. $\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$
10. $\dfrac{d}{dx}(b^x) = b^x \ln b$
11. $\dfrac{d}{dx}\ln|x| = \dfrac{1}{x}$
12. $\dfrac{d}{dx}(\log_b x) = \dfrac{1}{x \ln b}$

Funciones trigonométricas

13. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$
14. $\dfrac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$
15. $\dfrac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
16. $\dfrac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$
17. $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$
18. $\dfrac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

Funciones trigonométricas inversas

19. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

20. $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

21. $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$

22. $\frac{d}{dx}(\csc^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

23. $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

24. $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1+x^2}$

Funciones hiperbólicas

25. $\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cos h^2 x$

26. $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{sen} h^2 x$

27. $\frac{d}{dx}(\tanh x) = \sec h^2 x$

28. $\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$

29. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$

30. $\frac{d}{dx}(\coth x) = -csch^2 x$

Funciones hiperbólicas inversas

31. $\frac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

32. $\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

33. $\frac{d}{dx}(\tanh^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2}$

34. $\frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2+1}}$

35. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

36. $\frac{d}{dx}(\coth^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2}$

B.2 Tabla de Integrales

Formas básicas

1. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$
2. $\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$
4. $\int e^u\,du = e^u + C$
5. $\int b^u\,du = \frac{b^u}{\ln b} + C$
6. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$
7. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$
8. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$
8. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$
9. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$
10. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$
11. $\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + C$
12. $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$
13. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$
15. $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$
16. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C, \quad a > 0$
17. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$
18. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a} + C$
19. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$
20. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

Formas que involucran $\sqrt{a^2+u^2}$, $\quad a>0$

21. $\displaystyle\int \sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} + \frac{a^2}{2}\ln(u+\sqrt{a^2+u^2}) + C$

22. $\displaystyle\int u^2\sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{u}{8}(a^2+2u^2)\sqrt{a^2+u^2} - \frac{a^4}{8}\ln(u+\sqrt{a^2+u^2}) + C$

23. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2+u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+u^2}}{u}\right| + C$

24. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u} + \ln(u+\sqrt{a^2+u^2}) + C$

25. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \ln(u+\sqrt{a^2+u^2}) + C$

26. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} - \frac{a^2}{2}\ln(u+\sqrt{a^2+u^2}) + C$

27. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+u^2}+a}{u}\right| + C$

28. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{a^2u} + C$

29. $\displaystyle\int \frac{du}{(a^2+u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2+u^2}} + C$

Formas que involucran $\sqrt{a^2-u^2}$, $a>0$

30. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{u}{a} + C$

31. $\displaystyle\int u^2\sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2-a^2)\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^4}{8}\sin^{-1}\frac{u}{a} + C$

32. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2-u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C$

33. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^2}\,du = -\frac{1}{u}\sqrt{a^2-u^2} - \sin^{-1}\frac{u}{a} + C$

34. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} - \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{u}{a} + C$

35. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C$

36. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a^2u} + C$

37. $\displaystyle\int \frac{(a^2-u^2)^{3/2}\,du}{u} = \frac{u}{8}(2u^2-5a^2)\sqrt{a^2-u^2} + \frac{3a^4}{8}\sin^{-1}\frac{u}{a} + C$

38. $\displaystyle\int \frac{du}{(a^2-u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2-u^2}} + C$

Formas que involucran $\sqrt{u^2 - a^2}$, $\quad a > 0$

39. $\displaystyle\int \sqrt{u^2 - a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$

40. $\displaystyle\int u^2\sqrt{u^2 - a^2}\, du = \frac{u}{8}(2u^2 - a^2)\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^4}{8} \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$

41. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u}\, du = \sqrt{u^2 - a^2} - a\cosh^{-1}\frac{u}{a} + C$

42. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u^2}\, du = -\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} + \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$

43. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$

44. $\displaystyle\int \frac{u^2\, du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$

45. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{\sqrt{u^2 - a^2} + a}{u} \right| + C$

46. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2 - a^2}} = -\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a^2 u} + C$

47. $\displaystyle\int \frac{du}{(u^2 - a^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{u^2 - a^2}} + C$

Formas que involucran $a + bu$

47. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{a+bu} = \frac{1}{b^2}(a + bu - a\ln|a+bu|) + C$

48. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{a+bu} = \frac{1}{2b^3}\left[(a+bu)^2 - 4a(a+bu) + 2a^2\ln|a+bu|\right] + C$

49. $\displaystyle\int \frac{du}{a+bu} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + C$

50. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2(a+bu)} = \frac{1}{a} + \frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C$

51. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^2(a+bu)} + \frac{1}{b^2}\ln|a+bu| + C$

52. $\displaystyle\int \frac{du}{u(a+bu)^2} = \frac{1}{a(a+bu)} - \frac{a}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C$

53. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^3}\left(a + bu - \frac{a^2}{a+bu} - 2a\ln|a+bu|\right) + C$

54. $\displaystyle\int \sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{15b^2}(3bu-2a)(a+bu)^{3/2} + C$

55. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{3b^2}(bu-2a)\sqrt{a+bu} + C$

56. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{15b^3}(8a^2 + 3b^2u^2 - 4abu)\sqrt{a+bu} + C$

57. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{1}{\sqrt{a+bu}} - \frac{\sqrt{a+bu}}{\sqrt{a}} + C, \quad \text{si } a > 0$

58. $\displaystyle\qquad = \tfrac{2}{\sqrt{-a}}\tan^{-1}\sqrt{\tfrac{a+bu}{-a}} + C, \quad \text{si } a < 0$

59. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = 2\sqrt{a+bu} + a\int \frac{du}{\sqrt{a+bu}}$

60. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{u} + \frac{b}{2}\int \frac{du}{\sqrt{a+bu}}$

61. $\displaystyle\int u^n\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{b(2n+3)}u^n(a+bu)^{3/2} - \frac{n}{b(2n+1)}\int u^{n-1}\sqrt{a+bu}\,du$

62. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a+bu}} = \ln|\sqrt{a+bu} + a| + C$

63. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2u^2+a}{b(2n+1)} - \frac{2na}{b(2n+1)}\int \frac{du}{\sqrt{a+bu}}$

64. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{b(2n-3)}{2a(2n-1)}\int \frac{du}{\sqrt{a+bu}}$

B.2 Formas trigonométricas

63. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 u\,du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

64. $\displaystyle\int \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

65. $\displaystyle\int \tan^2 u\,du = \tan u - u + C$

66. $\displaystyle\int \cot^2 u\,du = -\cot u - u + C$

67. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 u\,du = -\frac{1}{3}(2 + \operatorname{sen}^2 u)\cos u + C$

68. $\displaystyle\int \cos^3 u\,du = \frac{1}{3}(2 + \cos^2 u)\operatorname{sen} u + C$

69. $\displaystyle\int \tan^3 u\,du = \frac{1}{2}\tan^2 u + \ln|\cos u| + C$

70. $\displaystyle\int \cot^3 u\,du = -\frac{1}{2}\cot^2 u - \ln|\operatorname{sen} u| + C$

79. $\displaystyle\int \operatorname{sen} au \operatorname{sen} bu\,du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

80. $\displaystyle\int \cos au \cos bu\,du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

81. $\displaystyle\int \operatorname{sen} au \cos bu\,du = -\frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} + C$

82. $\displaystyle\int u \operatorname{sen} u\,du = \operatorname{sen} u - u\cos u + C$

83. $\displaystyle\int u \cos u\,du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C$

84. $\displaystyle\int u^n \operatorname{sen} u\,du = -u^n \cos u + n\int u^{n-1}\cos u\,du$

85. $\displaystyle\int u^n \cos u\,du = u^n \operatorname{sen} u - n\int u^{n-1}\operatorname{sen} u\,du$

86. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n u \cos^m u\,du = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u \cos^{m+1} u}{n+m} + \frac{n-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\cos^m u\,du$

$$= \frac{\operatorname{sen}^{n+1} u \cos^{m-1} u}{n+m} + \frac{m-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^{n-2} u \cos^{m-2} u\,du$$

71. $\displaystyle\int \sec^3 u\,du = \frac{1}{2}\sec u\tan u + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + C$

72. $\displaystyle\int \csc^3 u\,du = -\frac{1}{2}\csc u\cot u + \frac{1}{2}\ln|\csc u - \cot u| + C$

73. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n u\,du = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} u\cos u + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\,du$

74. $\displaystyle\int \cos^n u\,du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u\operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\,du$

75. $\displaystyle\int \tan^n u\,du = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u\,du$

76. $\displaystyle\int \cot^n u\,du = \frac{-1}{n-1}\cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u\,du$

77. $\displaystyle\int \sec^n u\,du = \frac{1}{n-1}\tan u\sec^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\,du$

78. $\displaystyle\int \csc^n u\,du = \frac{-1}{n-1}u\csc^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} u\,du$

B.2 Formas trigonométricas inversas

87. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^{-1} u\,du = u\operatorname{sen}^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$

88. $\displaystyle\int \cos^{-1} u\,du = u\cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C$

89. $\displaystyle\int \tan^{-1} u\,du = u\tan^{-1} u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + C$

90. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^{-1} u\,du = \frac{2u^2-1}{4}\operatorname{sen}^{-1} u + \frac{\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

91. $\displaystyle\int \cos^{-1} u\,du = \frac{2u^2-1}{4}\cos^{-1} u - \frac{\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

92. $\displaystyle\int u\tan^{-1} u\,du = \frac{u^2+1}{2}\tan^{-1} u - \frac{u}{2} + C$

93. $\displaystyle\int u^n\operatorname{sen}^{-1} u\,du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\operatorname{sen}^{-1} u - \int \frac{u^{n+1}du}{\sqrt{1-u^2}}\right], \quad n \neq -1$

94. $\displaystyle\int u^n\cos^{-1} u\,du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\cos^{-1} u - \int \frac{u^{n+1}du}{\sqrt{1-u^2}}\right], \quad n \neq -1$

95. $\displaystyle\int u^n\tan^{-1} u\,du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\tan^{-1} u - \int \frac{u^{n+1}du}{1+u^2}\right], \quad n \neq -1$

B.2 Formas exponenciales y logarítmicas

96. $\displaystyle\int ue^u\, du = \frac{1}{a^2}(au-1)e^u + C$

97. $\displaystyle\int u^n e^{au}\, du = \frac{1}{a}\left[u^n e^{au} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}\, du\right]$

98. $\displaystyle\int e^{au}\operatorname{sen} bu\, du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\operatorname{sen} bu - b\cos bu) + C$

99. $\displaystyle\int e^{au}\cos bu\, du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\cos bu + b\sin bu) + C$

100. $\displaystyle\int \ln u\, du = u\ln u - u + C$

101. $\displaystyle\int u^n \ln u\, du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2}\left[(n+1)\ln u - 1\right] + C$

102. $\displaystyle\int \frac{1}{u}\ln u\, du = \ln|\ln u| + C$

B.2 Formas hiperbólicas

103. $\displaystyle\int \operatorname{senh} u\, du = \cosh u + C$

104. $\displaystyle\int \cosh u\, du = \operatorname{senh} u + C$

105. $\displaystyle\int \tanh u\, du = \ln|\cosh u| + C$

106. $\displaystyle\int \coth u\, du = \ln|\operatorname{senh} u| + C$

107. $\displaystyle\int \operatorname{sech} u\, du = \tan^{-1}|\operatorname{senh} u| + C$

108. $\displaystyle\int \operatorname{csch} u\, du = \ln|\tanh\frac{u}{2}| + C$

109. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2 u\, du = \tanh u + C$

110. $\displaystyle\int \operatorname{csch}^2 u\, du = -\coth u + C$

111. $\displaystyle\int \operatorname{sech} u \tanh u\, du = -\operatorname{sech} u + C$

112. $\displaystyle\int \operatorname{csch} u \coth u\, du = -\operatorname{csch} u + C$

B.2 Transformadas de Laplace

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
1. 1	$\frac{1}{s}$
2. t	$\frac{1}{s^2}$
3. t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, $\quad n$ entero positivo
4. $t^{-1/2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
5. $t^{1/2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$
6. t^α	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$, $\quad \alpha > -1$
7. $\operatorname{sen} kt$	$\frac{k}{s^2+k^2}$
8. $\cos kt$	$\frac{s}{s^2+k^2}$
9. $\operatorname{sen}^2 kt$	$\frac{2k^2}{s(s^2+4k^2)}$
10. $\cos^2 kt$	$\frac{s^2+2k^2}{s(s^2+4k^2)}$
11. e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
12. $\operatorname{senh} kt$	$\frac{k}{s^2-k^2}$
13. $\cosh kt$	$\frac{s}{s^2-k^2}$
14. $\operatorname{senh}^2 kt$	$\frac{2k^2}{s(s^2-4k^2)}$
15. $\cosh^2 kt$	$\frac{s^2-2k^2}{s(s^2-4k^2)}$
16. te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$
17. $t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $\quad n$ entero positivo
18. $e^{at} \operatorname{sen} kt$	$\frac{k}{(s-a)^2+k^2}$

Respuesta a todos los problemas

Capitulo 1

Solución del ejercicio 1.5.1, pagina 150

1. This is a solution of Ex 1

2. This is a solution of Ex 2

3. This is a solution of Ex 3

4. This is a solution of Ex 4

5. This is a solution of Ex 5

6. This is a solution of Ex 6

7. This is a solution of Ex 7

Solución del ejercicio 1.5.2, pagina 150

This is a solution of Ex 1

Capitulo 2

Solución del ejercicio 2.14.1, pagina 285

1. This is a solution of Ex 1

2. This is a solution of Ex 2

3. This is a solution of Ex 3

4. This is a solution of Ex 4

5. This is a solution of Ex 5

6. This is a solution of Ex 6

7. This is a solution of Ex 7

8. This is a solution of Ex 8

Solución del ejercicio 2.14.2, pagina 285

1. This is a solution of Ex 1

2. This is a solution of Ex 2

3. This is a solution of Ex 3

4. This is a solution of Ex 4

5. This is a solution of Ex 5

6. This is a solution of Ex 6

7. This is a solution of Ex 7

8. This is a solution of Ex 8

Capitulo 4

Solución del ejercicio ??, pagina ??

1. This is a solution of Ex 1

2. This is a solution of Ex 2

3. This is a solution of Ex 3

4. This is a solution of Ex 4

5. This is a solution of Ex 5

6. This is a solution of Ex 6

7. This is a solution of Ex 7

8. This is a solution of Ex 8

9 This is a solution of Ex 9

10 This is a solution of Ex 10

11 This is a solution of Ex 11

12 This is a solution of Ex 12

13 This is a solution of Ex 13

14 This is a solution of Ex 14

15 This is a solution of Ex 15

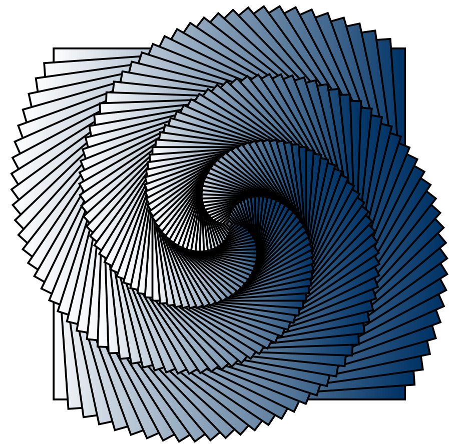
16 This is a solution of Ex 16

Bibliografía

[1] A Díaz; H Pijeira ; J Quintero. *Electrostatic models for zeros of Laguerre-Sobolev polynomials.* Agosto 2023

[2] G Szego. *ORTHOGONAL POLYNOMIALS* . American Mathematical Society Providence, Rhode Island 1939

ECUACIONES DIFERENCIALES



Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetuer.

UASD
Universidad Autónoma de Santo Domingo
PRIMADA DE AMÉRICA |
Fundada el 28 de octubre de 1538