

# Propagação de Ondas Sísmicas em Meios Elásticos

Notas de Aula

1º Semestre de 2004

Prof. Jörg Schleicher

**DMA – IMECC – UNICAMP**

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>4</b>
1.1	O que é uma onda? . . . . .	4
1.2	Formas de propagação . . . . .	5
1.3	Equação da onda . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Ondas básicas</b>	<b>7</b>
2.1	Ondas Planas . . . . .	7
2.2	Ondas Esféricas . . . . .	10
2.3	Ondas Cilíndricas . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Equação da onda acústica</b>	<b>12</b>
3.1	Dedução da equação da onda acústica 1D . . . . .	12
3.2	Soluções da equação da onda acústica 1D . . . . .	13
3.2.1	Solução geral . . . . .	13
3.2.2	Resolução para uma corda infinita . . . . .	14
3.2.3	Deslocamento em uma corda finita . . . . .	15
3.3	Resolução usando séries de Fourier . . . . .	16
3.3.1	Séries de Fourier . . . . .	16
3.3.2	Resolução da equação da onda acústica . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Conceitos matemáticos</b>	<b>23</b>
4.1	Transformadas de Fourier . . . . .	23
4.1.1	Motivação . . . . .	23
4.1.2	Definição da Transformada de Fourier . . . . .	23
4.1.3	A transformada de Fourier e sua inversa . . . . .	25
4.1.4	Propriedades da transformada de Fourier . . . . .	26
4.2	A função delta de Dirac . . . . .	28
4.2.1	Definição da função delta . . . . .	29
4.2.2	Propriedades da função delta . . . . .	30
4.2.3	Função delta multidimensional . . . . .	31
4.3	Tensores Cartesianos . . . . .	32
4.3.1	Transformação de Coordenadas . . . . .	33
4.3.2	Definição e Propriedades dos Tensores Cartesianos . . . . .	36

4.3.3	Tensores Isotrópicos (especiais)	38
4.3.4	Propriedade entre o produto do símbolo de Levi-Civita e um tensor simétrico	39
4.3.5	Diagonalização de um tensor simétrico de segunda ordem	39
4.4	Operadores Diferenciais e Teoremas Integrais	41
4.4.1	Coordenadas Cartesianas	41
4.4.2	Coordenadas Ortogonais Curvilíneas	43
4.5	Sinal Analítico	46
<b>5</b>	<b>Equação da onda elástica</b>	<b>50</b>
5.1	Teoria Elastodinâmica	50
5.1.1	Introdução	50
5.1.2	Vetor posição	51
5.1.3	Vetor deslocamento	52
5.1.4	Tensor de deformação	53
5.1.5	Tensor de rotação	55
5.1.6	Interpretação física dos elementos do tensor de deformação	56
5.1.7	Deformações quadráticas	58
5.1.8	Dilatação de volume	58
5.2	Tensor de Tensão	59
5.2.1	Condição de Equilíbrio	60
5.2.2	Equação de Movimento	62
5.2.3	Tensões Quadráticas	63
5.3	Relações Tensão-Deslocamento	63
5.4	Energia de Deformação	64
5.4.1	Trabalho	64
5.4.2	Energia Cinética	65
5.5	Fluxo de Energia	66
5.6	Parâmetros Elásticos	67
5.7	Vários tipos de simetria anisotrópica	68
5.8	Parâmetros Elásticos para Meios Isotrópicos	71
5.8.1	Unidades, Valores Numéricos	72
5.9	Equações Elastodinâmicas	73
5.9.1	Equações Elastodinâmicas para Meios Sólidos	73
5.9.2	Equações de Movimento para Fluidos - Caso Acústico	74
5.10	Meio homogêneo e isotrópico	75
5.10.1	A solução da Equação da Onda Acústica unidimensional	78
<b>6</b>	<b>Ondas Planas</b>	<b>81</b>
6.1	Propriedades das ondas planas	81
6.1.1	Onda planas harmônicas no tempo	81
6.1.2	Onda planas no domínio do tempo (ondas planas transientes)	82
6.2	Ondas planas acústicas transientes	83

6.3	Ondas planas elásticas transientes . . . . .	83
6.3.1	Meio anisotrópico homogêneo . . . . .	83
6.3.2	Meio isotrópico homogêneo . . . . .	85
6.4	Considerações sobre energia . . . . .	88
6.4.1	Meio acústico . . . . .	89
6.4.2	Meio anisotrópico homogêneo . . . . .	91
6.4.3	Meio isotrópico homogêneo . . . . .	93
6.5	Comparação dos meios anisotrópico, isotrópico e acústico . . . . .	94
6.6	Ondas Planas Inomogêneas . . . . .	95
6.7	Condições iniciais e de contorno . . . . .	96
6.7.1	Condições iniciais . . . . .	97
6.7.2	Condições de contorno . . . . .	97
6.8	Reflexão/transmissão de ondas planas . . . . .	99
6.8.1	Meio Acústico . . . . .	99
6.8.2	Meio Isotrópico . . . . .	102
6.9	Coeficientes de reflexão/transmissão . . . . .	107
6.10	Propriedades dos coeficientes de reflexão/transmissão . . . . .	109
6.11	Considerações energéticas . . . . .	111
6.12	Mudanças da forma das ondas geradas . . . . .	112
6.13	Absorção e dispersão . . . . .	112
6.14	Equação Acústica em coordenadas Cartesianas . . . . .	117
6.15	Extrapolação do campo de onda . . . . .	120
6.16	Expansão de uma onda esférica em ondas planas . . . . .	121

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 O que é uma onda?

Uma onda é a perturbação de um estado não perturbado, que pode se deslocar no espaço em função do tempo  $t$ , transportando assim energia e a informação sobre esta perturbação. Falamos de “propagação da onda”. Matematicamente, denotamos uma onda (em uma dimensão espacial  $x$ ) por  $\Phi = \Phi(x, t)$ . Em um instante fixo,  $t_0$ , a onda assume a forma  $\Phi(x, t_0) = f(x)$  no espaço. Se a onda se propagar sem mudar esta forma, podemos descrevê-la por uma translação em função do tempo  $t$ , i.e.,

$$\Phi(x, t) = f(x - ct) . \quad (1.1)$$

Aqui,  $c$  denota a velocidade de propagação, que podemos verificar facilmente. Para a onda descrita pela equação (1.1) se deslocar em uma unidade do tempo  $t_2 - t_1 = 1$  s por uma unidade da distância  $x_2 - x_1 = 1$  m, i.e., para propagar com a velocidade de 1 m/s, precisamos que os seus argumentos em  $(x_1, t_1)$  e  $(x_2, t_2)$  sejam iguais, ou seja,  $y_1 = x_1 - ct_1 = y_2 = x_2 - ct_2$ . Daí, obtemos  $x_2 - x_1 - c(t_2 - t_1) = 0$  que, com os valores acima, fornece  $c = 1$  m/s. Geralmente, denotaremos velocidades escalares por números positivos. Desta forma, para permitirmos que a onda (1.1) se propague também na direção negativa do eixo  $x$ , denotaremos a forma geral de uma onda sem mudança da sua forma (costuma-se usar a palavra inglesa “wavelet” para descrever a forma da onda) como

$$\Phi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) . \quad (1.2)$$

No caso geral, não teremos só um deslocamento da onda com uma velocidade e forma constante. Tanto a velocidade  $c$  quanto a forma da onda podem mudar ao longo da propagação da onda. O fenômeno da mudança da wavelet acontece, por exemplo, quando a onda sob consideração de fato se compõe de ondas parciais que são influenciadas de maneira diferente pelo meio de propagação. Se a influência diferente se deve ao conteúdo de frequência diferente das ondas parciais, este fenômeno recebe o nome de “dispersão”.

## 1.2 Formas de propagação

Ondas se propagam em meios reais ao passar a informação (energia) do deslocamento de uma partícula (molécula, átomo) do meio de propagação para a próxima. Em meios denominados “acústicos” (gases, líquidos), as partículas não possuem ligações químicas. Portanto, o deslocamento de uma partícula só pode ser transferido para outra se esta se encontra no caminho do deslocamento. Desta forma, a propagação da onda só pode acontecer na direção do deslocamento. Ondas para as quais a direção do deslocamento coincide com a direção da propagação são chamadas de “longitudinais”. Concluimos que em meios acústicos, somente se propagam ondas longitudinais.

Já em meios sólidos, as partículas possuem ligações. Assim, o deslocamento de uma delas também afeta outras partículas nas direções perpendiculares ao deslocamento. Desta forma, uma onda pode ser gerada com a direção de deslocamento perpendicular à direção de propagação. Ondas com esta propriedade são chamadas de “transversais”. Concluimos que em meios sólidos, podem se propagar tanto ondas longitudinais como transversais.

A condição necessária para que ondas de fato se propaguem é a existência de forças de mola que façam as partículas deslocadas voltarem aos seus lugares originais quando a força que causou o deslocamento passou. Meios sólidos com esta propriedade são chamados de “elásticos”, em contraste com meios “plásticos” que somente sofrem deformação quando uma partícula é deslocada, sem que ela volte ao seu lugar depois da força passar.

Uma outra denominação para as ondas longitudinais é “ondas compressoriais”, uma vez que elas propagam uma perturbação em forma de uma compressão do meio. Na sismica e sismologia, também se usa o nome “ondas P”, abreviação de “ondas primárias”, pois num registro sísmico em uma estação distante, são elas que dão o primeiro sinal de um terremoto. Correspondentemente, existem os nomes alternativos “ondas cisalhantes” e “ondas S”, abreviação de “ondas secundárias”, para ondas transversais, em função da forma da perturbação propagada (cisalhamento) e da ordem de chegada numa estação sísmica (sismógrafo) após um terremoto.

Deve-se notar que em um meio homogêneo, ondas longitudinais e transversais se propagam de forma desacoplada, i.e., independentemente uma da outra. Esta situação muda em um meio não homogêneo (ou *heterogêneo*), onde a velocidade de propagação depende do lugar. Mesmo em meios heterogêneos, geralmente se propagam estes dois tipos de ondas (P e S), mas elas não são mais ondas compressoriais e cisalhantes puras. Em cada heterogeneidade do meio, estes tipos de ondas são acopladas, i.e., uma onda P propagando cria uma onda S e vice-versa.

## 1.3 Equação da onda

Fenômenos da propagação de onda são descritos por uma equação diferencial, chamada de equação da onda. Existem várias formas da equação da onda, dependendo do grau de complexidade do meio no qual as ondas a serem descritas se propagam. A forma da equação da onda mais simples é a da equação da onda acústica, sem fonte, em um meio

com densidade constante. Em um meio tridimensional, ela tem a forma

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} , \quad (1.3)$$

onde  $\Phi$  é o campo de onda (solução da equação da onda),  $x, y, z$  denotam as coordenadas espaciais,  $t$  denota o tempo e  $c$  é a velocidade da propagação. A velocidade é um parâmetro do material, i.e., depende do meio no qual a onda se propaga.

Em um meio acústico com densidade variável, a equação da onda assume a forma

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\varrho} \nabla \Phi \right) = \frac{1}{k} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} , \quad (1.4)$$

onde  $\varrho$  representa a densidade do meio de propagação e  $k$  é conhecido como módulo bulk ou incompressibilidade. A velocidade de propagação é relacionada a estes dois parâmetros por  $c^2 = k/\varrho$ .

Em um meio elástico, a situação é mais complicada. Como já mencionado acima, existem outros tipos de ondas. Este fato é refletido na equação da onda elástica. Em primeiro lugar, devemos observar que ondas elásticas não podem ser descritas por um escalar  $\Phi$ , mas necessitam de uma descrição vetorial,  $\vec{\Phi}$ . Em um meio homogêneo e isotrópico, i.e., com as mesmas propriedades em todas as direções, a equação da onda elástica é dada por

$$(\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{\Phi}) + \mu (\nabla \cdot \nabla) \vec{\Phi} = \varrho \frac{\partial^2 \vec{\Phi}}{\partial t^2} , \quad (1.5)$$

onde  $\lambda$  e  $\mu$  são os chamados parâmetros de Lamé. O segundo parâmetro de Lamé,  $\mu$ , também é conhecido como módulo de cisalhamento. A combinação  $\lambda + 2\mu/3 = k$  relaciona os parâmetros de Lamé com o módulo bulk. Em um meio acústico, o módulo do cisalhamento é zero. Assim, a equação elástica se reduz à equação acústica, onde a quantidade escalar é a pressão, que se relaciona com o deslocamento da partícula, quantidade vetorial na equação (1.5), por  $\Phi = -\lambda \nabla \cdot \vec{\Phi}$ .

Em um meio elástico, não homogêneo mas ainda isotrópico, acrescentam-se termos das derivadas dos parâmetros de Lamé ao lado direito da equação (1.5), fornecendo

$$(\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{\Phi}) + \mu (\nabla \cdot \nabla) \vec{\Phi} + (\nabla \cdot \vec{\Phi}) \nabla \lambda + \nabla \mu \times (\nabla \times \vec{\Phi}) + 2(\nabla \mu \cdot \nabla) \vec{\Phi} = \varrho \frac{\partial^2 \vec{\Phi}}{\partial t^2} . \quad (1.6)$$

Finalmente, a equação da onda elástica mais geral é aquela para um meio inhomogêneo e anisotrópico. Ela contém, ao invés dos dois parâmetros de Lamé, 21 parâmetros. Estas são representadas como componentes independentes do tensor elástico  $c_{ijkl}$ . Com a ajuda deste tensor, a equação da onda elástica para um meio heterogêneo e anisotrópico pode ser escrita usando componentes como

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_l} \left( c_{ijkl} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_k} \right) = \varrho \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial t^2} , \quad (1.7)$$

onde  $\Phi_i$  e  $\Phi_j$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) são as componentes nas direções de  $x_i$  e  $x_j$  do vetor  $\vec{\Phi}$ .

# Capítulo 2

## Ondas básicas

Existem algumas formas básicas de ondas que ajudam a entender fenômenos de ondas. Estas são as *ondas planas* (que são uma idealização uma vez que não é possível uma onda física se estender até o infinito), ondas esféricas (que são as ondas oriundas de uma fonte pontual em um meio homogêneo) e ondas cilíndricas (que descrevem fenômenos bidimensionais, por exemplo ondas propagando-se em uma superfície). Estudamos estas formas básicas de ondas agora em um pouco mais de detalhe.

### 2.1 Ondas Planas

Uma onda plana é uma função que satisfaz a equação da onda e que em um certo plano assume um valor constante, acontecendo o mesmo para todos os planos paralelos [7]. Assim, para determinarmos uma representação matemática desta onda plana, vamos impor que ela precisa ter um valor constante ao longo de um plano e que ela deve propagar satisfazendo a equação da onda acústica (1.3).

A equação de um plano no espaço de três dimensões é dada por:

$$ax + by + lz = d , \quad (2.1)$$

sendo  $a$ ,  $b$  e  $l$  as componentes do vetor normal unitário  $\vec{n}$  e  $d$  a distância do plano à origem. Reescrevendo a equação (2.1) usando o produto escalar, obtemos

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = d . \quad (2.2)$$

Como a onda plana tem os mesmos valores ao longo de planos, então ela é uma função que depende destes planos, ou seja,

$$\Phi(\vec{x}, t) = f[(\vec{n} \cdot \vec{x} - d)/d_0] , \quad (2.3)$$

onde  $d_0$  é usada apenas para normalizar o argumento da função. Este argumento normalizado é chamado de fase, denotado por  $\varphi$ . Precisamos analisar a dependência temporal da propagação do plano, ou seja,  $d = d(t)$ . Antes disso, vamos interpretar fisicamente a constante  $d_0$ .



Vamos tomar como exemplo, a função  $f$  sendo representada pela função seno. Logo,

$$\Phi(\vec{x}, t) = \text{sen}[(\vec{n} \cdot \vec{x} - d)/d_0] . \quad (2.4)$$

A distância entre dois planos onde  $\Phi$  tem o mesmo valor chama-se de comprimento de onda, denotado por  $\lambda$ . Sendo  $d_1$  e  $d_2$  a distância destes dois planos em relação à origem e usando que a função seno é periódica com período  $2\pi$ , escrevemos,

$$\Phi_1(\vec{x}, t) = \text{sen}[(\vec{n} \cdot \vec{x} - d_1)/d_0] = \text{sen } \varphi_1 , \quad (2.5)$$

$$\Phi_2(\vec{x}, t) = \text{sen}[(\vec{n} \cdot \vec{x} - d_2)/d_0] = \text{sen } (\varphi_1 + 2\pi) . \quad (2.6)$$

Como  $d_1 - d_2 = \lambda$  e pelas equações (2.5) e (2.6) temos  $d_1 - d_2 = 2\pi d_0$ , então encontramos a relação entre  $d_0$  e  $\lambda$ :

$$d_0 = \frac{\lambda}{2\pi} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{d_0} = \frac{2\pi}{\lambda} = k , \quad (2.7)$$

que é a definição do número de onda,  $k$ . O número de onda é igual ao número de onda por comprimento  $2\pi$ . No caso da função seno, cujo comprimento de onda vale  $2\pi$ , o número de onda  $k$  vale 1. Reescrevendo a equação (2.4), temos,

$$\Phi(\vec{x}, t) = \text{sen}[k(\vec{n} \cdot \vec{x} - d)] . \quad (2.8)$$

Esta forma de representação é válida para outras ondas. Assim, a equação (2.3) pode ser escrita como,

$$\Phi(\vec{x}, t) = f[k(\vec{n} \cdot \vec{x} - d)] . \quad (2.9)$$

Expandindo o termo no argumento da última equação e definindo o vetor do número de onda como sendo  $k\vec{n} = \vec{k}$ , a equação (2.9) fica

$$\Phi(\vec{x}, t) = f(\vec{k} \cdot \vec{x} - kd) . \quad (2.10)$$

Para que a onda plana se propague com velocidade constante é necessário que a constante de fase  $kd$  que está no argumento varie proporcionalmente ao tempo, ou seja,  $kd = \omega t$ , onde  $\omega$  é uma constante. Portanto, a equação (2.10) que descreve a onda plana passa a ser escrita como

$$\Phi(\vec{x}, t) = f(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) . \quad (2.11)$$

Observemos que, se tomarmos dois tempos distintos  $t_1$  e  $t_2$  de tal modo que a onda plana tenha a mesma configuração e tenha sofrido uma mudança de fase  $2\pi$ , ou seja, tenha passado um período  $T$  entre eles, podemos escrever (analogamente ao que foi feito nas equações (2.5) e (2.6))

$$\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t_1 = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t_2 + 2\pi , \quad (2.12)$$

de onde obtemos a frequência angular

$$\omega = 2\pi/T . \quad (2.13)$$

Precisamos mostrar que a função da onda plana (2.10) satisfaz a equação da onda acústica (1.3). Vamos denotar o argumento da função  $\Phi$  por  $\eta$ . Logo,

$$\eta = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t , \quad (2.14)$$

onde  $k_x = ka$ ,  $k_y = kb$  e  $k_z = kl$ . Agora, derivando a função  $\Phi$  e aplicando a regra da cadeia obtemos,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \eta} k_x , \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} k_x \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} k_x^2 . \quad (2.16)$$

Analogamente, temos

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} k_y^2 , \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} k_z^2 , \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \omega^2 .$$

Substituindo estas derivadas na equação da onda acústica (1.3) obtemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \omega^2/c^2) = 0 . \quad (2.17)$$

Logo, a função (2.11) satisfaz a equação da onda desde que

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2/c^2 . \quad (2.18)$$

Como o vetor normal  $\vec{n}$  é unitário, temos que  $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 \|\vec{n}\|^2 = k^2$ . Sendo assim, o número de onda e a frequência angular devem satisfazer a relação

$$c = \omega/k . \quad (2.19)$$

Portanto, a função dada em (2.11) se propaga como uma onda plana, já que sua fase é constante ao longo de um plano e ela satisfaz a equação da onda, desde que sua velocidade de propagação seja dada por (2.19). Nós chegamos neste resultado pela construção da solução, mas podemos mostrar agora que a velocidade da fase da onda plana é dada por  $c = \omega/k$ .

Tendo um plano conhecido de fase constante num instante  $t_0$ , sabemos que um plano correspondente e paralelo ao original será localizado num instante  $t_1$ . Então, queremos saber onde se encontra o plano no qual no instante  $t_1$  a fase assume o mesmo valor  $\varphi$ . Ou seja, queremos posições  $\vec{x}_0$  e  $\vec{x}_1$  tal que

$$\vec{k} \cdot \vec{x}_0 - \omega t_0 = \vec{k} \cdot \vec{x}_1 - \omega t_1 = \varphi , \quad (2.20)$$

ou ainda,

$$\vec{k} \cdot \Delta \vec{x} = \omega \Delta t , \quad (2.21)$$

onde  $\Delta \vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_0$  e  $\Delta t = t_1 - t_0$ . Supondo que o vetor  $\Delta \vec{x}$  esteja na mesma direção do vetor  $\vec{k}$ , que é a direção de propagação, podemos escrever  $\vec{k} \cdot \Delta \vec{x} = \|\vec{k}\| \|\Delta \vec{x}\| = k \Delta x$ . Substituindo esta relação na equação (2.21), obtemos

$$c = \Delta x / \Delta t = \omega / k . \quad (2.22)$$

## 2.2 Ondas Esféricas

A onda esférica é a solução da equação da onda acústica (1.3) que apresenta simetria esférica, ou seja, não apresenta variação com o ângulo nos planos horizontal e vertical. Sendo assim, o campo de onda depende somente da distância em relação à origem. Logo, antes de encontrar uma solução, devemos fazer uma mudança de coordenadas de cartesianas para esféricas na equação da onda acústica (1.3).

Mudando as coordenadas  $(x, y, z)$  para  $(r, \theta, \phi)$ , de tal forma que

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi \quad \text{e} \quad z = r \cos \theta,$$

onde  $0 \leq r < \infty$ ,  $-\pi < \phi \leq \pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , podemos obter a equação da onda acústica (1.3) em coordenadas esféricas:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}. \quad (2.23)$$

Como supusemos que  $\Phi$  possui simetria esférica, é função somente da distância  $r$  em relação à fonte e do tempo  $t$ . Portanto, as suas derivadas parciais em relação aos ângulos são nulas. Logo, a equação da onda (2.23) toma a forma

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}. \quad (2.24)$$

Para encontrar uma solução para este problema, primeiramente observemos que

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \left( r \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \Phi \right) = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial^2 (r\Phi)}{\partial r^2} \right), \quad (2.25)$$

de onde podemos escrever que

$$\frac{1}{r} \left( \frac{\partial^2 (r\Phi)}{\partial r^2} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad (2.26)$$

ou ainda,

$$\left( \frac{\partial^2 (r\Phi)}{\partial r^2} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (r\Phi)}{\partial t^2}. \quad (2.27)$$

Então, a função  $r\Phi$  deve satisfazer a equação da onda unidimensional, conforme visto anteriormente. Logo,

$$r\Phi = f(kr - \omega t) \quad \Rightarrow \quad \Phi = \frac{1}{r} f(kr - \omega t). \quad (2.28)$$

Vamos agora justificar o decaimento da amplitude da solução (2.28). Fluxo é a quantidade de energia que passa por uma unidade de área em uma unidade de tempo, e para este fluxo de energia em ondas, o princípio de conservação de energia se aplica. No caso da onda plana o fluxo é constante, já que o fluxo de energia atravessa sempre a mesma área. Já no caso da onda esférica uniforme de raio  $r$ , a energia passa a ser distribuída sobre a superfície da esfera, cuja área aumenta conforme  $4\pi r^2$ . Mas a energia total transportada pela onda esférica deve permanecer constante. Logo, o fluxo de energia num ponto da superfície diminui segundo a razão  $1/r^2$ . Como o fluxo energético é proporcional ao quadrado da amplitude, a amplitude deve então variar  $1/r$ .

## 2.3 Ondas Cilíndricas

A onda cilíndrica é uma função que satisfaz a equação da onda acústica (1.3) e apresenta uma simetria cilíndrica, ou seja, não apresenta variação com o plano horizontal. Analogamente ao caso anterior, antes de encontrar uma solução, devemos fazer uma mudança de coordenadas de cartesianas para cilíndricas na equação da onda acústica (1.3).

Mudando as coordenadas  $(x, y, z)$  para  $(r, \phi, z)$ , de tal forma que

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi \quad \text{e} \quad z = z,$$

onde  $0 \leq r < \infty$ ,  $-\pi < \phi \leq \pi$ , podemos obter a equação da onda acústica em coordenadas cilíndricas:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}. \quad (2.29)$$

Como procuramos soluções que já são cilíndricas, isto é, não dependam do ângulo  $\phi$  e varie conforme aumenta o raio (análogo ao caso esférico), a equação (2.29) toma a forma

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}. \quad (2.30)$$

A solução geral para este problema é aproximadamente

$$\Phi(r, t) = \frac{1}{\sqrt{r}} f(kr - \omega t). \quad (2.31)$$

Dizemos aproximadamente pois, ao calcularmos as derivadas e substituirmos estas na equação (2.30), fica sobrando um fator da ordem de  $r^{-5/2}$ , o qual pode ser desprezado para valores grandes de  $r$ . A solução exata da referida equação é dada por

$$\Phi(r, t) = \frac{H(t - r/c)}{\sqrt{t^2 - (r/c)^2}} * f(t), \quad (2.32)$$

onde  $H$  é a função degrau (ou função Heaviside):

$$H(a) = \begin{cases} 0, & \text{se } a < 0 \\ 1, & \text{se } a \geq 0 \end{cases}. \quad (2.33)$$

Assim como no caso da onda esférica, podemos entender o decaimento da amplitude da onda apenas considerando a conservação de energia. Como a área do cilindro é proporcional a  $r$ , o fluxo de energia decai segundo a razão  $1/r$ . Portanto, a amplitude da onda deve variar  $1/\sqrt{r}$ .

# Capítulo 3

## Equação da onda acústica

Apesar de tratar-se de uma forma bem simples da equação da onda, a equação da onda acústica (1.3) descreve muitos fenômenos de propagação de ondas que ocorrem também em meios elásticos. Neste capítulo, tratamos com um pouco mais de rigor da dedução e solução desta equação.

### 3.1 Dedução da equação da onda acústica 1D

Esta seção trata do movimento de uma corda, que é deixada para vibrar. Para simplificar o problema, admite-se que a corda só vibre no plano vertical e que sua amplitude de vibração seja suficientemente pequena para que cada ponto situado na corda se mova apenas na vertical, e de maneira que a tensão  $\tau$  não varie apreciavelmente durante a vibração. Como veremos, esta é a situação da propagação unidimensional de uma onda transversal ao longo da corda.

Um ponto sobre a corda é identificado por  $x$ , ou seja,  $x$  é a distância na reta horizontal a partir da extremidade à esquerda. A distância que o ponto  $x$  se move na linha vertical designa-se  $u(x)$ .

Para obter a equação do movimento da corda, considera-se um segmento de corda de comprimento  $dx$ , entre  $x$  e  $x + dx$ . Se a corda tiver a seguinte densidade por unidade de comprimento  $\sigma$  (densidade linear), então a massa será  $\sigma dx$ . A velocidade da corda é  $\partial u / \partial t$ , assim como a inclinação da corda no ponto  $x$  é  $\partial u / \partial x$ .

A componente vertical de  $\tau$ , a tração da corda em qualquer ponto é

$$\tau_u = \tau \sin(\theta),$$

sendo  $\theta$  muito pequeno

$$\tau \sin(\theta) \doteq \tau \tan(\theta) = \tau \frac{\partial u}{\partial x},$$

logo,

$$\tau_u = \tau \frac{\partial u}{\partial x}$$

A força resultante,  $dF$ , devido a tensão agindo sobre o segmento  $dx$  da corda é

$$dF = [\tau_u]_{x+dx} - [\tau_u]_x = \frac{[\tau_u]_{x+dx} - [\tau_u]_x}{dx} dx \doteq \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx$$

Seja  $f$  uma força vertical por unidade de comprimento agindo ao longo da corda, a equação do movimento do segmento  $dx$  será

$$\sigma dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx + f dx$$

Para uma corda horizontal, em que as forças horizontais atuam somente em suas extremidades, e para pequenas amplitude de vibra forção, a tração é constante e a equação acima pode ser reescrita como

$$\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$

se tomarmos  $f = 0$  teremos,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (3.1)$$

onde  $c^2 = \tau/\sigma$ . Obtivemos assim a equação da onda acústica unidimensional (compare com a equação (1.3)).

## 3.2 Soluções da equação da onda acústica 1D

### 3.2.1 Solução geral

Antes de resolvermos a equação da onda vejamos alguns conceitos de edp's. A forma mais geral de uma edp linear de segunda ordem é

$$A(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, u \right).$$

Para resolver a edp acima usa-se uma mudança de variável, através de

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-B \pm \sqrt{(B^2 - AC)}}{A},$$

onde as duas funções  $x(t)$  são chamadas de equações características. A seguir veremos como utilizar essas equações para resolvermos a equação da onda acústica unidimensional (3.1).

Gostaríamos de resolver (3.1), para isto consideremos as equações características da mesma. Note que  $A = 1$ ,  $B = 0$  e  $C = -c^2$ , logo

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-B \pm \sqrt{(B^2 - AC)}}{A} = \pm c,$$

cujas soluções são a família de retas  $x = \pm ct + k$ , onde  $k$  é uma constante. A partir disto iremos propor a seguinte mudança de variável,

$$\begin{aligned}\xi &= x + ct, \\ \mu &= x - ct.\end{aligned}$$

Utilizando a regra da cadeia, temos

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \mu},$$

logo,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \mu} + \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \quad (3.2)$$

Agora,

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \mu}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \mu} = c \frac{\partial \xi}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial \mu},$$

logo,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \mu} + \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \quad (3.3)$$

Substituindo (3.2) e (3.3) em (3.1), teremos

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \mu} = 0,$$

tendo como solução

$$v(\xi, \mu) = \phi(\xi) + \psi(\mu) \Rightarrow u(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct).$$

Observamos que a solução geral da equação da onda acústica unidimensional é a forma geral da onda como discutida em (1.2).

### 3.2.2 Resolução para uma corda infinita

Para resolvermos a corda infinita precisamos de algumas condições (condições iniciais), que podem ser dadas da seguinte forma

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

Já sabemos que  $u(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct)$ , impondo as condições iniciais, temos

$$\begin{cases} \phi(x) + \psi(x) = f(x), \\ c\phi'(x) - c\psi'(x) = g(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi'(x) = \frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{2c}g(x), \\ \psi'(x) = \frac{1}{2}f'(x) - \frac{1}{2c}g(x) \end{cases}$$

Integrando,

$$\begin{cases} \phi(x) = \phi(0) - \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s)ds \\ \psi(x) = \psi(0) - \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s)ds \end{cases},$$

e lembrando que  $f(0) = \phi(0) + \psi(0)$

$$u(x, t) = \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds. \quad (3.4)$$

Esta fórmula representa a solução geral do problema proposto, conhecida como fórmula de D'Lambert, e é o deslocamento de uma em uma corda infinita, pois não impusemos nenhuma condição de contorno.

### 3.2.3 Deslocamento em uma corda finita

A solução da equação de onda, para uma corda infinita é dada por (3.4). Nesta momento queremos resolver, ou seja, encontrar a solução da equação de onda para uma corda finita (de comprimento  $l$ ). Para isso devemos resolver

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

com as seguintes condições de contorno e iniciais,

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x), \\ u_t(x, 0) = g(x), \\ u(0, t) = 0, \\ u(l, t) = 0. \end{cases}$$

Tomando a solução de D'Lambert, queremos que a condição  $u(0, t) = 0$  seja satisfeita, mas

$$u(0, t) = \frac{f(ct) + f(-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{ct} g(s)ds.$$

como  $f$  e  $g$  são independentes a única forma para que tenhamos  $u(0, t) = 0$  é que  $f$  seja ímpar no intervalo  $[-l, l]$ , assim como  $g$ , e portanto

$$\begin{cases} f(ct) = -f(-ct), \\ \int_{-ct}^{ct} g(s)ds = 0. \end{cases}$$

Logo a condição  $u(0, t) = 0$  é satisfeita. Observe que com esta hipótese acabamos de encontrar a solução da para uma corda semi-infinita, ou seja, com a condição se apenas uma das extremidades presa.

Agora queremos que a condição  $u(l, t) = 0$  seja satisfeita, como

$$u(l, t) = \frac{f(l + ct) + f(l - ct)}{2} + \frac{V_0(l + ct) - V_0(l - ct)}{2c},$$



onde  $(d/dx)V_0(x) = g(x)$ , lembrando novamente que como  $f$  e  $g$  são independentes a única forma de termos  $u(l, t) = 0$  é impor a condição (simetria) de que  $f(l + ct) = -f(l - ct)$  e impor para  $V_0$  a condição (anti-simetria) de que  $V_0(l + ct) = V_0(l - ct)$ , assim a condição  $u(l, t) = 0$  é satisfeita.

Portanto sob certas condições a solução de D’Lambert satisfaz as condições de contorno. E assim podemos dizer que a solução de D’Lambert também descreve o comportamento de uma onda se propagando em uma corda finita.

Note que como  $f(x) = -f(-x)$  e  $f(l + x) = f(l - x)$ , assim  $f(l + x) = -f(-l - x) = f(x - l)$ , logo se tomarmos  $x' = x - l$ , temos  $f(x') = f(x' + 2l)$ . O mesmo vale para  $g$ , assim a solução para a corda finita tem período  $2l$ .

### 3.3 Resolução usando séries de Fourier

Resolvemos a equação da onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (3.5)$$

aplicando o método de separação de variáveis e em seguida usando desenvolvimento em séries de Fourier.

#### 3.3.1 Séries de Fourier

Seja  $f(x)$  uma função periódica de período  $2\pi$ , integrável e absolutamente integrável. Considere uma expansão de  $f(x)$  como abaixo:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)). \quad (3.6)$$

Suponha que a série convirja uniformemente no intervalo  $-\pi \leq x \leq \pi$ . Multiplicando a equação por  $\cos(mx)$ , com  $m$  inteiro positivo, obtemos:

$$f(x) \cos(mx) = \frac{a_0}{2} \cos(mx) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) \cos(mx) + b_n \sin(nx) \cos(mx)).$$

Como a série continua sendo uniformemente convergente, podemos integrar termo a termo:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos(mx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nx) \cos(mx) dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin(nx) \cos(mx) dx. \end{aligned}$$

Para resolver a equação acima usamos as propriedades de ortogonalidade de senos e cossenos. Observe que as somas na equação acima começam em  $n = 1$ , portanto os valores de  $m = n = 0$  não nos interessam:

$$1. \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx = 0$$

**Demonstração:**

(a)  $m \neq n$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \sin(n+m)x dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \sin(n-m)x dx \\ &= \left[ -\frac{1}{2} \frac{\cos(n+m)x}{n+m} - \frac{1}{2} \frac{\cos(n-m)x}{n-m} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

(b)  $m = n$ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \sin(2n)x dx = \left[ -\frac{1}{2} \frac{\cos(2n)x}{2n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

$$2. \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

**Demonstração:**

(a)  $m \neq n$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \cos(n+m)x dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \cos(n-m)x dx \\ &= \left[ \frac{1}{2} \frac{\sin(n+m)x}{n+m} + \frac{1}{2} \frac{\sin(n-m)x}{n-m} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

(b)  $m = n$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \cos(n+m)x dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \cos(n-m)x dx \\ &= \left[ \frac{1}{2} \frac{\sin(n+m)x}{n+m} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} dx \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 + \pi = \pi. \end{aligned}$$

$$3. \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

**Demonstração:** Análoga à anterior.

Assim todos os termos da soma do lado direito da equação se anulam exceto para o caso  $n = m$ . Então temos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx = a_m \pi,$$

e conseguimos assim determinar os coeficientes  $a_m$ .

Para determinar os  $b_m$  basta multiplicar (2) por  $\text{sen}(mx)$  e repetir os cálculos. Ao final temos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen}(mx) dx = b_m \pi.$$

Para obter  $a_0$  integramos (2):

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} b_n \text{sen}(nx) dx = \left[ \frac{a_0}{2} x \right]_{-\pi}^{\pi} = a_0 \pi.$$

Portanto temos:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen}(nx) dx \\ a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \end{aligned}$$

Mas, se ao invés de representar a função no intervalo  $(-\pi, \pi)$  desejarmos representar uma  $f(x)$  de período  $2l$  no intervalo  $(-l, l)$ , fazemos:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{l} dx, \\ a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx. \end{aligned}$$

No caso especial em que  $f(x)$  é uma função par ou ímpar temos:

1.  $f(x)$  é uma função par:

$$\begin{aligned} b_n &= 0, \\ a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx. \end{aligned}$$

2.  $f(x)$  é uma função ímpar:

$$\begin{aligned} a_n &= 0, \\ b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{l} dx. \end{aligned}$$

### 3.3.2 Resolução da equação da onda acústica

Resolvemos abaixo a equação da onda de uma corda finita (deduzida na Seção 3.1) com condições iniciais e de contorno como segue

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$
$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq l, \quad t \leq 0 \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x) \\ u(0, t) = 0 \\ u(l, t) = 0. \end{cases}$$

Procuramos soluções da forma

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

onde  $X$  é função somente de  $x$  e  $T$  é função somente de  $t$ . Assim  $X$  deve satisfazer:

$$X(0) = 0$$

$$X(l) = 0.$$

Depois tentamos escolher  $T$  de maneira a satisfazer as condições iniciais.

Substituindo  $u(x, t)$  na EDP temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{d^2 T}{dt^2} X(x) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{d^2 X}{dx^2} T(t) \\ \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} &= \frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Para que esta igualdade seja satisfeita para qualquer  $x$  e  $t$ , ambos os lados de (3) devem ser constantes, portanto:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \lambda = \frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2},$$

onde  $\lambda$  é chamada de constante de separação.

Reescrevendo para  $X$  temos:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = \lambda X,$$

que nos fornece uma simples EDO. Esta EDO possui soluções do tipo

$$X(x) = e^{px},$$

onde  $p = \pm\sqrt{\lambda}$ .

Veja que não estamos interessados na solução trivial que é aquela que satisfaz somente o caso  $f(x) = g(x) = 0$ . Analisemos então as seguintes situações:

1.  $\lambda > 0$

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x},$$

aplicando as condições de contorno temos:

$$\begin{aligned} X(0) &= C_1 + C_2 = 0 \\ X(l) &= C_1 e^{\sqrt{\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}l} = 0 \\ \Rightarrow C_1 &= C_2 = 0 \end{aligned}$$

2.  $\lambda = 0$

$$X(x) = C_1 x + C_2,$$

aplicando as condições de contorno temos:

$$\begin{aligned} X(0) &= C_2 = 0 \\ X(l) &= C_1 l + C_2 = 0 \\ \Rightarrow C_1 &= C_2 = 0 \end{aligned}$$

3.  $\lambda < 0$

$$X(x) = C_1 \cos(\sigma x) + C_2 \sin(\sigma x),$$

onde

$$\lambda = -\sigma^2.$$

Aplicando as condições de contorno:

$$\begin{aligned} X(0) &= C_1 = 0 \\ X(l) &= C_1 \cos(\sigma l) + C_2 \sin(\sigma l) = 0 \\ \Rightarrow C_1 &= 0, C_2 \sin(\sigma l) = 0 \end{aligned}$$

como não queremos a solução trivial (que é obtida no caso em que  $C_2 = 0$ ), queremos

$$C_2 \neq 0, \Rightarrow \sin(\sigma l) = 0$$

$$\Rightarrow (\sigma l) = n\pi, n = \pm 1, \pm 2, \dots \Rightarrow \lambda = \frac{-n^2 \pi^2}{l^2}$$

(autovalores)

$$\Rightarrow X_n(x) = C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

(autofunções).

Não é necessário considerar os valores de  $\sigma < 0$  pois estes levam a autofunções com somente o sinal trocado.

Agora precisamos de um  $T_n(t)$  que corresponda a cada  $X_n(x)$  satisfazendo

$$\frac{1}{X_n} \frac{d^2 X_n}{dx^2} = \lambda = \frac{1}{c^2 T_n} \frac{d^2 T_n}{dt^2},$$

portanto,

$$T_n(t) = K_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) + Q_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right).$$

Encontramos então um número infinito de funções candidatas à solução

$$u_n(x, t) = A_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

onde cada uma dessas funções satisfaz as condições de fronteira.

Utilizando o princípio da superposição, pela EDP e as condições de contorno serem homogêneas lineares, sabendo que a combinação linear de uma solução  $u_n$  com uma solução  $u_m$  também é solução e que por indução vemos que uma combinação linear de um número finito de soluções também é solução, podemos supor que uma série do tipo

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{n\pi ct}{l} \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( B_n \sin \frac{n\pi ct}{l} \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

também é solução desde que a série convirja.

Agora devemos escolher dentre estas, ajustando corretamente  $A_n$  e  $B_n$ , de maneira que se satisfaça as condições iniciais. Vemos que  $f(x)$  e  $g(x)$  devem ser dos tipos:

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

Vemos que a equação acima satisfaz as condições de contorno e que satisfará à EDP se for 2 vezes diferenciável e se  $A_n$  e  $B_n$  forem ajustados. Note que  $y(x, t)$  é uma série de senos de Fourier em  $x$ . Logo  $f(x)$  e  $g(x)$  agora são funções do tipo:

$$u(x, 0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi c}{l} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Para que  $f(x)$  e  $g(x)$  possam ser desenvolvidas em série de senos de Fourier essas funções devem ser:

1. funções ímpares
2. funções periódicas de período  $2l$
3. funções integráveis e absolutamente integráveis

Então para  $f(x)$  por exemplo, construímos uma  $f'(x)$  tal que

1.  $f'(x) = f(x)$ ,  $0 \leq x \leq l$
2.  $f'(x) = f'(x + 2l)$
3.  $f'(-x) = -f'(x)$

Em seguida expandimos  $f'(x)$  em série de senos de Fourier no intervalo  $0 \leq x \leq l$ . E para  $g(x)$  procedemos de maneira semelhante.

Então se  $f$  e  $g$  puderem ser desenvolvidas em série de senos de Fourier podemos encontrar  $A_n$  e  $B_n$  e então teremos uma expressão para  $y(x, t)$ .

# Capítulo 4

## Conceitos matemáticos

Neste capítulo, abordamos alguns conceitos matemáticos importantes para o desenvolvimento da teoria dos fenômenos da propagação de ondas acústicas e elásticas.

### 4.1 Transformadas de Fourier

#### 4.1.1 Motivação

Um dos principais objetivos da Transformada de Fourier é “transformar” uma equação diferencial em uma equação algébrica. Para isso a transformada atua como uma “caixa” onde do lado esquerdo entra uma função que, após ser “transformada”, sai do lado direito como uma nova função que, na maioria das vezes, é mais fácil de ser resolvida.

Como exemplo de utilização de um tipo de caixa temos a determinação dos coeficientes de uma série de Fourier, onde damos como entrada uma função escrita como série de Fourier.

Queremos então estudar como tal caixa funciona e que tipo de funções podem entrar nesta caixa.

#### 4.1.2 Definição da Transformada de Fourier

Seja  $f(t)$  integrável em  $[-L, L]$  e periódica de período  $2L$ . Então, sabemos que

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t}, \quad -L < t < L \quad (4.1)$$

é uma representação de  $f(t)$  por série de Fourier.

O conjunto dos números  $c_n$  poder ser considerado com uma função da variável  $n$ ,  $c(n)$ , isto é, esta função está definida em um conjunto discreto de valores da variável independente  $n$ , “número de ondas”. Podemos também pensar em  $c_n$  como uma função da “frequência angular”

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.2)$$



Assim, se  $L$  for grande, então as frequências estão muito próximas pois  $\Delta\omega = (\pi/L)\Delta n$ . Isto implica  $\Delta\omega$  pequeno, logo haverá numa mudança na escala. Assim, se torna natural pensar na possibilidade de um conjunto contínuo quando  $L \rightarrow \infty$  e todas as frequências estão presentes.

Da série de Fourier, sabemos que

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{(in\pi t)/L}, \quad -L < t < L, \quad (4.3)$$

onde

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{(-in\pi t)/L} dt. \quad (4.4)$$

Quando fazemos  $L \rightarrow \infty$  não fica tão fácil o cálculo de (4.3) já que  $c_n$  tende para zero em (4.4). Assim usaremos as frequências, isto é,  $\omega = (n\pi)/L$ , ou  $\Delta\omega = (\pi/L)\Delta n$ , que, para  $n \in \mathbb{Z}$ , temos  $\Delta n = 1$  e  $\Delta\omega(L/\pi) = 1$ . Podemos então multiplicar cada termo de (4.3) por  $\Delta\omega(L/\pi)$  obtendo

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{L}{\pi} c_n \right) \Delta\omega e^{(in\pi t)/L}, \quad (4.5)$$

onde

$$\frac{L}{\pi} c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L f(t) e^{(-in\pi t)/L} dt. \quad (4.6)$$

Adotando integralmente a notação com  $\omega$  e escrevendo  $\frac{L}{\pi} c_n = c_L(\omega)$ , obtemos

$$c_L(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L f(t) e^{-i\omega t} dt \quad \text{e} \quad f(t) = \sum_{(L\omega)/\pi=-\infty}^{\infty} c_L(\omega) \Delta\omega e^{i\omega t}. \quad (4.7)$$

Se fizermos, agora,  $L \rightarrow \infty$ , temos

$$c(\omega) = \lim_{L \rightarrow \infty} c_L(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad \text{e} \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (4.8)$$

Assim, adotando agora a notação  $F(\omega) = \sqrt{2\pi} c(-\omega)$ , obtemos

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad \text{e}, \quad (4.9)$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (4.10)$$

onde (4.9) é a chamada transformada de Fourier da função  $f(t)$  e, reciprocamente, (4.10) é a chamada transformada de Fourier inversa de  $f(t)$ . Estas diferem uma da outra apenas pelo sinal da função exponencial.

### 4.1.3 A transformada de Fourier e sua inversa

Na seção anterior, conjecturamos a validade das fórmulas (4.9) e (4.10). Na fórmula (4.9) não há problemas de existência se  $f(t)$  satisfaz determinadas restrições, isto é, se ao escrevermos (4.9) da forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt = \lim_{M, N \rightarrow \infty} \int_{-M}^N f(t)e^{i\omega t} dt, \quad (4.11)$$

esta satisfaz

- (i)  $f$  ser seccionalmente contínua em cada intervalo  $[-M, N]$ , e
- (ii)  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$  (absolutamente integrável).

Já na fórmula (4.10) o problema é saber se a função original  $f(t)$  pode ser recuperada por esta, o que é intuitivo já que esta foi construída satisfazendo as condições de construção da transformada direta.

Vemos então um exemplo da aplicação da transformada de Fourier e sua inversa.

**Exemplo 1:** Considere a função de probabilidade Gaussiana

$$f(t) = Ne^{-\alpha t^2} \quad (N, \alpha \text{ constantes}). \quad (4.12)$$

Sua transformada de Fourier  $F(\omega)$  é obtida fazendo

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt = \frac{N}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} e^{i\omega t} dt. \quad (4.13)$$

Fazendo  $-\alpha t^2 + i\omega t = -(t\sqrt{\alpha} - i\omega/2\sqrt{\alpha})^2 - \omega^2/4\alpha$  e chamando  $u = t\sqrt{\alpha} - i\omega/2\sqrt{\alpha}$ , obtemos

$$F(\omega) = \frac{N}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-\omega^2/4\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = N\sqrt{\frac{1}{2\alpha}} e^{-\omega^2/4\alpha}. \quad (4.14)$$

É interessante observar que  $F(\omega)$  é também uma função de probabilidade Gaussiana com pico na origem, monótona decrescente quando  $\omega \rightarrow \pm\infty$ . Contudo, se  $f(t)$  é muito pontiaguda ( $\alpha$  grande), então  $F(\omega)$  fica achatada e vice-versa. Esta é uma característica geral da transformada de Fourier.

A integral inversa

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{N}{\sqrt{2\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2/4\alpha} e^{-i\omega t} d\omega, \quad (4.15)$$

pode ser calculada da mesma forma fazendo

$$\alpha' = \frac{1}{4\alpha} \quad \text{e} \quad t' = -t, \quad (4.16)$$

então

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-\alpha' \omega^2} e^{it' \omega} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} e^{-t'^2/4\alpha'} = \sqrt{2\alpha'} e^{-\alpha t^2}, \quad (4.17)$$

de maneira que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega = \frac{N}{\sqrt{2\alpha}} \sqrt{2\alpha} e^{-\alpha t^2} = N e^{-\alpha t^2} = f(t), \quad (4.18)$$

que valida (4.10).

Assim, podemos também trabalhar com uma idéia de caixa inversa, ou seja, uma caixa onde a entrada é uma equação algébrica e a saída uma equação diferencial.

#### 4.1.4 Propriedades da transformada de Fourier

Vejamos algumas propriedades das transformadas de Fourier, onde  $F(\omega) = \mathcal{TF}\{f(t)\}$

1. Se  $f(t)$  é real então  $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$  (Conjugação)

**Dem.:**

$$F(-\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i(-\omega)t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \overline{F(\omega)}.$$

2. Se  $f(t)$  é par e real,  $F(\omega)$  é real

**Dem.:**

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt + i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \right],$$

mas sabemos que o produto de uma função par ( $f$ ) e uma função ímpar ( $\sin$ ) é ímpar e a integral de uma função ímpar é zero. Logo o segundo termo da última expressão acima é zero. Portanto,  $F(\omega)$  é real.

3. Se  $f(t)$  é ímpar e real,  $F(\omega)$  é imaginário puro

**Dem.:** Como no caso anterior sabemos que o produto de uma função ímpar ( $f$ ) e uma função par ( $\cos$ ) é ímpar e a integral de uma função ímpar é zero. Logo o primeiro termo da última expressão do item anterior é zero. Portanto,  $F(\omega)$  é imaginário puro.

4.  $\mathcal{TF}\{f(t)e^{at}\} = F(\omega - ai)$  (Amortecimento)

**Dem.:**

$$\begin{aligned} F(\omega - ai) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i(\omega - ai)t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} e^{at} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [f(t) e^{at}] e^{i\omega t} dt = \mathcal{TF}\{f(t) e^{at}\}. \end{aligned}$$

5.  $\mathcal{TF}\{f(t-a)\} = e^{i\omega a}F(\omega)$  (Deslocamento)

**Dem.:**

$$e^{i\omega a}F(\omega) = e^{i\omega a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{i\omega y} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{i\omega(y+a)} dy ,$$

onde, ao fazermos  $t = y + a$ , temos

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)e^{i\omega t} dt = \mathcal{TF}\{f(t-a)\} .$$

6.  $\mathcal{TF}\{f'(t)\} = -i\omega F(\omega)$  (Diferenciação)

**Dem.:**

$$\mathcal{TF}\{f'(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{i\omega t} dt ,$$

onde, integrando por partes, temos

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ (f(t)e^{i\omega t})_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)i\omega e^{i\omega t} dt \right] .$$

Como  $f(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \pm\infty$ , chegamos em

$$= -\frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt = -i\omega F(\omega) .$$

E também,

$$\mathcal{TF}\{f''(t)\} = -\frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{i\omega t} dt = \frac{(-i\omega)^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt = -\omega^2 F(\omega) .$$

7. **Teorema de Parseval:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

**Dem.:** Seja

$$G(-\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t} dt .$$

Então,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G(-\omega)d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t} dt \right] d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega t} d\omega \right] dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt , \end{aligned}$$

que é o segundo Teorema de Parseval. Agora se tomarmos  $g(t) = \overline{f(t)}$  e sabendo que  $G(-\omega) = \overline{F(\omega)}$ , pois

$$G(-\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{i(-\omega)t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} e^{-i\omega t} dt = \overline{F(\omega)} ,$$

temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \overline{F(\omega)} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{f(t)} dt \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt .$$

## 8. Teorema da Convolução:

$$H(\omega) = F(\omega)G(\omega) \iff h(t) = (f * g) = (g * f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) f(t - \xi) d\xi .$$

**Dem.:**

$$\begin{aligned} (\Rightarrow) \quad h(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{i\omega \xi} d\xi \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega(t-\xi)} d\omega \right] d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \left[ \sqrt{2\pi} f(t - \xi) \right] d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) f(t - \xi) d\xi . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Leftarrow) \quad H(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) f(x - \xi) d\xi \right] e^{i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \xi) e^{i\omega x} dx \right] d\xi , \end{aligned}$$

onde, para  $y = t - \xi$  e  $dy = dt$ , temos

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i\omega y} dy \right] e^{i\omega \xi} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) F(\omega) e^{i\omega \xi} d\xi \\ &= F(\omega) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{i\omega \xi} d\xi = F(\omega) G(\omega) . \end{aligned}$$

## 4.2 A função delta de Dirac

Uma função extremamente útil para a descrição de soluções de equações diferenciais é a função delta de Dirac. Ela é definida pelas seguintes propriedades.

$$1. \quad \delta(t) = 0 \quad \forall \quad t \neq 0 ,$$

$$2. \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Obviamente, estas duas propriedades são mutuamente exclusivas para funções comuns, uma vez que o valor da integral sobre uma função não altera se o valor da função é alterada em um único ponto. Portanto, uma função que satisfaz a condição 1. nunca pode satisfazer a condição 2. e vice versa. Por reunir as duas propriedades, a “função delta”, introduzida por Paul Dirac, foi a primeira de uma nova classe de “funções”, mais tarde chamadas de “funções generalizadas” ou “distribuições”. Apesar disso, é de praxe comum na literatura o uso da palavra “função” quando se refere à  $\delta(t)$ . Seguimos aqui este costume.

Para que a função delta possa satisfazer duas propriedades ao mesmo tempo, é necessário que ela esteja infinita na origem. Porém, este “infinito” não é um infinito comum. Observamos que normalmente, esperaríamos que  $2\delta(t)$  seria igual a  $\delta(t)$ , uma vez que duas vezes infinito ainda é infinito. Porém, pela condição 2., vemos que a função delta é normalizada que implica que  $2\delta(t) \neq \delta(t)$ .

### 4.2.1 Definição da função delta

A função delta é utilizada para descrever excitações pontuais no espaço ou no tempo. Para introduzirmos excitações pontuais, consideramos uma função auxiliar,  $d(t)$ , que seja não nula somente em um intervalo pequeno  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ , onde  $\varepsilon > 0$ . Observamos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d(t) dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} d(t) dt \quad (4.19)$$

Para que esta função seja normalizada, queremos que a integral acima forneça o valor um. Uma possibilidade de definir a função  $d(t)$  é

$$d(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & \forall \quad -\varepsilon < t < \varepsilon \\ 0 & \text{senão.} \end{cases} \quad (4.20)$$

Notamos que esta função descreve um pequeno retângulo. Com esta definição, a integral acima é

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d(t) dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} dt = \left. \frac{t}{2\varepsilon} \right|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = 1, \quad (4.21)$$

independentemente do valor de  $\varepsilon$ . Portanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} d(t) dt = 1. \quad (4.22)$$

Por outro lado, para todo  $t \neq 0$ , temos que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d(t) = 0$ . Desta forma, observamos que a função

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d(t) \quad (4.23)$$

satisfaz as duas condições da função delta.

Devemos notar que esta definição da função delta não é única. Todas as possíveis definições da função delta usam um procedimento correspondente ao de cima. O que muda é a função que faz o papel da  $d(t)$ . Outras possibilidades incluem

$$d(t) = \begin{cases} \frac{\varepsilon + t}{\varepsilon^2} & \forall -\varepsilon < t < 0 \\ \frac{\varepsilon - t}{\varepsilon^2} & \forall 0 \leq t < \varepsilon \\ 0 & \text{senão.} \end{cases} \quad (4.24)$$

Esta função representa um pequeno triângulo. Também podem ser utilizadas a função em forma de sino (*bell-shaped function*)

$$d(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + t^2} \quad (4.25)$$

e a Gaussiana

$$d(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-t^2/\varepsilon} . \quad (4.26)$$

Para as duas últimas, o desenvolvimento acima precisa ser modificado ligeiramente, uma vez que estas são diferentes de zero no eixo  $t$  inteiro para todo  $\varepsilon \neq 0$  e só tendem a zero para todo  $t \neq 0$  quando  $\varepsilon$  tende a zero. Mesmo assim, ambas têm área unitária independentemente do valor de  $\varepsilon$  e, portanto, possuem a propriedade (4.22). Desta forma, tendem à função delta quando  $\varepsilon$  tende a zero.

### 4.2.2 Propriedades da função delta

Utilizando a função  $d(t)$  definida na equação (4.20), bem como seu limite quando  $\varepsilon$  tende a zero, podemos discutir as propriedades da função delta. Primeiramente, observamos que a função delta é uma função par, que segue da condição 1., junto com a observação que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(-t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) d\tau . \quad (4.27)$$

Para uma função contínua e limitada  $f(t)$ , estudamos a integral

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau) f(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d(t - \tau) f(t) dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} d(t - \tau) f(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\tau - \varepsilon}^{\tau + \varepsilon} \frac{f(t)}{2\varepsilon} dt. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Pelo teorema do valor médio da integração,

$$\int_a^b f(t) dt = f(\xi)(b - a) \quad (a \leq \xi \leq b) , \quad (4.29)$$

concluimos que

$$\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \frac{f(t)}{2\varepsilon} dt = \frac{f(\xi)}{2\varepsilon} 2\varepsilon = f(\xi) \quad (\tau - \varepsilon \leq \xi \leq \tau + \varepsilon) , \quad (4.30)$$

e, portanto, no limite quando  $\varepsilon$  tende a zero,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau) f(t) dt = f(\tau) . \quad (4.31)$$

Em conseqüência das propriedades (4.27) e (4.31), a função delta é a função unitária da convolução, i.e.,

$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \delta(\tau - t) d\tau = f(t) . \quad (4.32)$$

Outra propriedade da função delta em conseqüência da propriedade (4.31) é o fato da transformada de Fourier dela ser facil de calcular, fornecendo

$$\hat{\delta}(\omega) = \mathcal{TF} \{ \delta(t) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega 0} = 1 . \quad (4.33)$$

Pela transformada de Fourier inversa, podemos escrever

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\delta}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} d\omega . \quad (4.34)$$

Mediante o par de transformadas de Fourier, mostra-se também que

$$\mathcal{TF} \{ \delta(ct) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(ct) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) e^{-i\frac{\omega}{c}\tau} d\tau = \frac{1}{c} = \frac{1}{c} \hat{\delta}(\omega) , \quad (4.35)$$

e, portanto,

$$\delta(ct) = \frac{1}{c} \delta(t) . \quad (4.36)$$

Esta propriedade é fundamental quando queremos analisar a unidade de uma expressão que envolve a função delta. Da equação (4.36) segue, por exemplo, que, quando  $t$  simboliza o tempo em segundos,  $\delta(t)$  tem a unidade de  $\text{Hz} = \text{s}^{-1}$ .

### 4.2.3 Função delta multidimensional

Para descrever ações pontuais em mais do que uma dimensão, pode-se usar uma função delta multidimensional. Por exemplo, se  $\vec{x}$  denota um vetor tridimensional com componentes  $x$ ,  $y$ , e  $z$ , a função delta tridimensional pode ser definida por

$$\delta(\vec{x}) = \delta(x) \delta(y) \delta(z) . \quad (4.37)$$



Uma outra possibilidade é a definição mediante uma função  $d(\vec{x})$ , cujo limite tenda à função delta tridimensional, i.e.,

$$\delta(\vec{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d(\vec{x}) . \quad (4.38)$$

Um exemplo para uma função assim é

$$d(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} & \forall \quad -\varepsilon < r < \varepsilon \\ 0 & \text{senão,} \end{cases} \quad (4.39)$$

onde  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Esta função  $d(\vec{x})$  é diferente de zero em uma pequena esfera em volta da origem. Outras possibilidades correspondentes às diferentes funções  $d(t)$  acima também podem ser utilizados, por exemplo representando pequenos cubos, paralelepípedos, cilindros, Gaussianas ou sinos tridimensionais. Para todas elas, é necessário que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d(\vec{x}) = 0$  para  $r \neq 0$  e que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d(\vec{x}) dx dy dz = 1, \quad (4.40)$$

independentemente do valor de  $\varepsilon$ . Não é difícil enxergar que estas condições são satisfeitas pela função  $d(\vec{x})$  da equação (4.39).

De forma equívale a função delta unidimensional, a função delta multidimensional possui a propriedade

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d(\vec{x} - \vec{x}_0) f(\vec{x}) dx dy dz = f(\vec{x}_0), \quad (4.41)$$

com as correspondentes conseqüências.

## 4.3 Tensores Cartesianos

Quantidades físicas podem ser matematicamente representadas por tensores. As equações que descrevem essas leis físicas são, então, equações tensoriais. Em nosso trabalho vamos nos concentrar em tensores no espaço euclidiano  $3D$ .

Alguns exemplos de tensores:

$$\begin{aligned} & \textit{temperatura, densidade} - \text{escalares} - \text{tensor de ordem zero;} \\ & \textit{velocidade, deslocamento, força} - \text{vetores} - \text{tensor de primeira ordem;} \\ & \textit{tensor de tensão, tensor de deformação} - \text{tensor de segunda ordem;} \\ & \textit{tensor de parâmetros elásticos} - \text{tensor de quarta ordem.} \end{aligned} \quad (4.42)$$

### 4.3.1 Transformação de Coordenadas

Considere dois pontos  $A$  e  $B$  no espaço euclidiano tridimensional, os pontos têm as respectivas coordenadas  $[x_1^A, x_2^A, x_3^A]$ ,  $[x_1^B, x_2^B, x_3^B]$ . Definimos a distância entre estes pontos como,

$$d(A, B) = [(x_i^B - x_i^A)(x_i^B - x_i^A)]^{1/2}. \quad (4.43)$$

Aqui estamos utilizando a convenção de Einstein, que diz, quando um índice se repete duas vezes num produto, têm-se implícito uma soma sobre todos valores deste índice. Note que o mesmo índice pode aparecer no máximo duas vezes na mesma equação, então, coisas do tipo  $u_i v_i w_i$  não são permitidas. Também utilizaremos  $u_i$  para representar uma componente genérica do vetor  $(u_1, u_2, u_3)$ .

Note que a função distância satisfaz:

$$\begin{aligned} d(A, B) &\text{ é real e não-negativa;} \\ d(A, A) &= 0; \\ d(A, B) &= d(B, A); \\ d(A, B) &\leq d(A, C) + d(C, B). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Com essas definições podemos considerar as transformações de coordenadas. Considere-mos dois sistemas de coordenadas  $x_i$  e  $x'_i$ . A relação entre os dois sistemas de coordenadas é

$$x'_i = \alpha_{ij}(x_j - x_{oj}), \quad (4.45)$$

onde  $x_{oj}$  é a coordenada da origem do sistema  $x'_i$  nas coordenadas de  $x_i$  e os  $\alpha_{ij}$  são os elementos da matriz de transformação.

Lembremos da definição do delta de Kronecker,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j, \\ 1, & \text{se } i = j. \end{cases} \quad (4.46)$$

Pela convenção de Einstein temos que  $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$ .

Se fizermos  $\alpha_{ij} = \delta_{ij}$ , a transformação de coordenadas será

$$x'_i = (x_i - x_{oi}). \quad (4.47)$$

Esta transformação descreve uma translação paralela de um sistema de coordenada com respeito ao outro (veja a figura 4.1). Se fizermos  $x_{oj} = 0$ , a relação de transformação será

$$x'_i = \alpha_{ij}x_j, \quad (4.48)$$

que descreve uma rotação em torno da origem do primeiro sistema (veja a Figura 4.2).

Agora iremos investigar o significado dos elementos da matriz de transformação  $\alpha_{ij}$ . Vamos introduzir o vetor raio  $r_i$ , partindo da origem de um sistema de coordenadas até um ponto  $x_i$ , isto é,  $x_i = r_i$ . Sejam  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  e  $\vec{e}_3$  três vetores base do espaço cartesiano orientados



Figura 4.1: Representação de dois sistemas de coordenadas ortogonais distintos  $\vec{e}_j$  e  $\vec{e}'_k$ .

ao longo dos eixos  $x_1, x_2, x_3$ , respectivamente. Assim como  $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$  são vetores unitários no sistema  $x'_i$ . Podemos expressar o vetor  $r_i$  nos dois sistemas de coordenadas

$$\vec{r} = x_j \vec{e}_j = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 = x'_1 \vec{e}'_1 + x'_2 \vec{e}'_2 + x'_3 \vec{e}'_3. \quad (4.49)$$

Se substituimos, no lado direito, a relação de transformação

$$x'_i = \alpha_{ij} x_j, \quad (4.50)$$

teremos

$$\vec{r} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 = \alpha_{1j} x_j \vec{e}'_1 + \alpha_{2j} x_j \vec{e}'_2 + \alpha_{3j} x_j \vec{e}'_3. \quad (4.51)$$

Ao tomarmos o produto escalar entre a equação acima e  $\vec{e}'_k$ , teremos

$$x_j \vec{e}_j \vec{e}'_k = \alpha_{ij} x_j \vec{e}'_i \vec{e}'_k, \quad (4.52)$$

$$x_j \vec{e}_j \vec{e}'_k = \alpha_{ij} x_j \delta_{ik}. \quad (4.53)$$

Note que na equação 4.52,  $\vec{e}'_i$  e  $\vec{e}'_k$  são vetores unitários e ortogonais. Portanto, o produto escalar entre eles é diferente de zero e igual a 1, se e somente se,  $i = k$ . Que é exatamente a definição do delta de Kronecker. Assim, resolvendo o delta de Kronecker e simplificando os termos  $x_j$ . Obtemos uma expressão para os termos de  $\alpha_{kj}$

$$\alpha_{kj} = \vec{e}_j \vec{e}'_k, \quad (4.54)$$

note que cada elemento da matriz  $\alpha_{ij}$  representa um produto escalar entre os vetores da base do sistema de coordenadas  $\vec{e}_j$  e  $\vec{e}'_k$ , por exemplo, se  $j = 1$  e  $k = 2$

$$\alpha_{21} = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}'_2 = |\vec{e}_1| |\vec{e}'_2| \cos \theta. \quad (4.55)$$

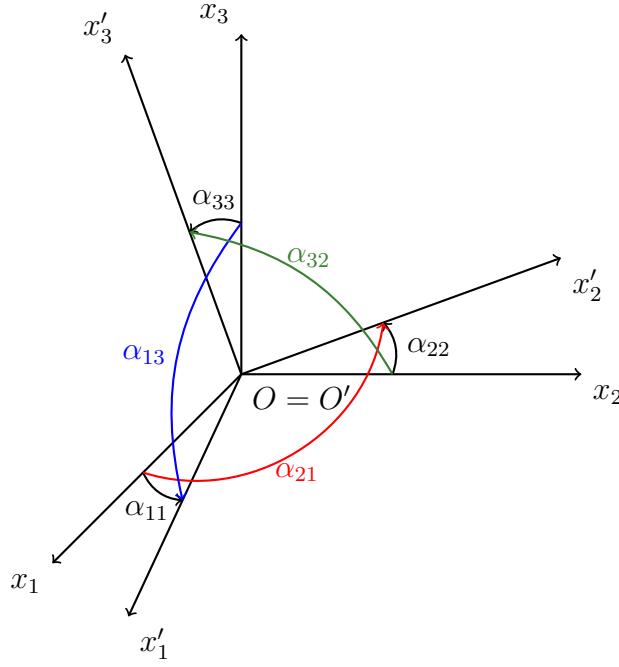


Figura 4.2: Ilustração de uma rotação dos eixos de coordenadas de base  $\vec{e}_j$  em um novo sistema de coordenadas ortogonais  $\vec{e}'_k$ . Note que os cossenos dos ângulos entre os eixos determinam os termos da matriz  $\alpha_{kj}$ .

Note que os elementos de  $\alpha_{ij}$  são cossenos, denominados cossenos direcionais, onde  $\theta$  representa o ângulo entre os vetores  $\vec{e}_j$  e  $\vec{e}'_k$  (veja a Figura 4.2).

Considerando a transformação inversa a

$$x'_i = \alpha_{ij}(x_j - x_{oj}). \quad (4.56)$$

Iremos mostrar que para a matriz  $\alpha_{ij}$ , existe uma inversa,  $(\alpha^{-1})_{ij}$ , tal que

$$\alpha_{ij}(\alpha^{-1})_{jk} = \delta_{ik}, \quad (\alpha^{-1})_{jk}\alpha_{kl} = \delta_{jl}. \quad (4.57)$$

Aqui vale relembrar que o produto entre uma matriz qualquer  $\mathbf{A}$  e sua inversa  $\mathbf{A}^{-1}$  é igual a matriz identidade  $\mathbf{I}$ . E que também podemos definir o delta de Kronecker na forma matricial. Portanto,

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{I}. \quad (4.58)$$

Desta maneira, podemos escrever uma forma de obter a transformação que relaciona  $x_j$  e  $x'_i$ . Multiplicando a equação 4.56 por  $(\alpha^{-1})_{ij}$ , temos

$$x_i = x_{oi} + (\alpha^{-1})_{ij}x'_j. \quad (4.59)$$

Como a distância entre  $A$  e  $B$  deve ser independente do sistema de coordenadas utilizado, temos

$$(x_i^B - x_i^A)(x_i^B - x_i^A) = (x_i'^B - x_i'^A)(x_i'^B - x_i'^A), \quad (4.60)$$

reescrevendo os termos do lado direito com a relação da equação 4.56, temos

$$(x_i^B - x_i^A)(x_i^B - x_i^A) = \alpha_{ij}\alpha_{il}(x_j^B - x_j^A)(x_l^B - x_l^A). \quad (4.61)$$

Veja que, para mantermos a consistência das equações, queremos apenas o resultado de quando  $i = j$  e  $i = l$ . Desta maneira a igualdade é mantida se

$$\alpha_{ij}\alpha_{il} = \delta_{ij}\delta_{il} = \delta_{jl}. \quad (4.62)$$

onde é possível provar que  $\delta_{ij}\delta_{il} = \delta_{jl}$ .

Agora supondo que exista a inversa, podemos relacionar o resultado obtido acima com o resultado da equação 4.57

$$(\alpha^{-1})_{ji}\alpha_{il} = \delta_{jl}, \quad (4.63)$$

e portanto,

$$(\alpha^{-1})_{ji} = \alpha_{ij}, \quad (4.64)$$

trocando a ordem dos índices chegamos a forma final

$$(\alpha^{-1})_{ij} = \alpha_{ji}. \quad (4.65)$$

Isso significa que a matriz inversa de  $\alpha_{ij}$  é obtida transpondo a matriz  $\alpha_{ij}$ , por esta propriedade vemos que a matriz em discussão é ortogonal. Pela ortogonalidade, temos que

$$|\det(\alpha_{ij})| = 1. \quad (4.66)$$

### 4.3.2 Definição e Propriedades dos Tensores Cartesianos

Nesta seção vamos definir um tensor cartesiano e algumas de suas propriedades.

Para cada ponto do espaço, o tensor cartesiano é uma sequência finita de números os quais correspondem, de maneira única, as coordenadas cartesianas do ponto. A sequência representa um tensor se satisfaz as seguintes condições:

1. A sequência contém  $n^k$  números onde  $n$  representa a dimensão do espaço e  $k$  é um inteiro não-negativo chamado ordem:

$$T_{m_1, m_2, \dots, m_k}, \quad m_i = 1, 2, 3, \dots, k. \quad (4.67)$$

A representação matricial do tensor  $T$  se dá na forma de uma matriz  $\mathcal{T}_{n \times n \times \dots \times n}$  de  $k$  dimensões. Por exemplo, um tensor de ordem 2 no espaço tridimensional,  $T_{ij}$  tem a representação matricial:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix}. \quad (4.68)$$

2. Um elemento do tensor no sistema de coordenadas  $x'_i$  é associado ao tensor no sistema de coordenadas  $x_i$  pela relação:

$$T'_{p_1, p_2, \dots, p_k} = \alpha_{p_1 m_1} \alpha_{p_2 m_2} \dots \alpha_{p_k m_k} T_{m_1, m_2, \dots, m_k}. \quad (4.69)$$

Um tensor de ordem zero, i.e  $k = 0$ , é a denominação tensorial de um escalar. Já um tensor de ordem  $k = 1$  é a representação tensorial de um vetor, onde a equação 4.56 permanece válida.

A rotação de um tensor de segunda ordem é dada por

$$T'_{ij} = \alpha_{im} \alpha_{jn} T_{mn}. \quad (4.70)$$

Para tensores de mesma ordem somente, adição e subtração correspondem a

$$A_{ij} \pm B_{ij} = C_{ij}. \quad (4.71)$$

Em contraste com adição e subtração, na multiplicação, não necessitamos que os tensores tenham a mesma ordem. Se todos os índices são distintos a multiplicação soma os índices, como por exemplo,

$$A_{ij} B_{klm} = C_{ijklm}. \quad (4.72)$$

Já a multiplicação de tensores com índices iguais reduz a ordem do tensor resultante por 2, como em

$$A_{ij} B_j = C_i. \quad (4.73)$$

A redução da ordem é dita contração. Um típico exemplo é o produto escalar de dois vetores.

Posteriormente iremos trabalhar com com tensores simétricos e anti-simétricos. Entendemos um tensor simétrico com a seguinte propriedade

$$T_{m_1, m_2, \dots, m_k} = T_{m_2, m_1, \dots, m_k}, \quad (4.74)$$

esse tensor é simétrico nos índices  $m_1$  e  $m_2$ . Entendemos um tensor anti-simétrico com a seguinte propriedade

$$T_{m_1, m_2, \dots, m_k} = -T_{m_k, m_2, \dots, m_1}, \quad (4.75)$$

esse tensor é anti-simétrico nos índices  $m_1$  e  $m_k$ .

Um tensor de ordem 2, pode ser escrito da seguinte forma (soma de um tensor simétrico com um anti-simétrico):

$$B_{ij} = \frac{1}{2}(B_{ij} + B_{ji}) + \frac{1}{2}(B_{ij} - B_{ji}) = S_{ij} + A_{ij}. \quad (4.76)$$

Simetria e anti-simetria são preservadas após uma transformação de coordenadas. Se  $T_{mnl} = T_{nml}$ , temos

$$T'_{ijk} = \alpha_{im} \alpha_{jn} \alpha_{kl} T_{mnl} = \alpha_{im} \alpha_{jn} \alpha_{kl} T_{nml} = \alpha_{jn} \alpha_{im} \alpha_{kl} T_{nml} = T'_{jik}. \quad (4.77)$$

O raciocínio é o mesmo para tensores anti-simétricos.

### 4.3.3 Tensores Isotrópicos (especiais)

Um tensor é dito isotrópico se após uma transformação de coordenadas o tensor se mantém inalterado. Por exemplo o delta de Kronecker é um tensor de ordem 2 isotrópico, pois

$$\delta'_{ij} = \alpha_{im}\alpha_{jn}\delta_{mn} = \alpha_{im}\alpha_{jm} = \delta_{ij}. \quad (4.78)$$

Um outro tensor isotrópico é o símbolo de Levi-Civita,  $\epsilon_{ijk}$ , que é um tensor de ordem 3, definido como:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{se } i, j, k \text{ formam uma permutação par de } 1, 2, 3; \\ -1, & \text{se } i, j, k \text{ formam uma permutação ímpar de } 1, 2, 3; \\ 0, & \text{se dois índices são repetidos.} \end{cases} \quad (4.79)$$

Pode-se provar a seguinte identidade

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}. \quad (4.80)$$

E, portanto,

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \begin{vmatrix} 3 & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{ji} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{ki} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}, \quad (4.81)$$

que é uma identidade importante. Esta identidade, também é chamada de "E $\delta$ ", de fácil memorização. Basta lembrar que em um produto de dois símbolos de Levi-Civita que compartilham um índice e possuem os outros distintos, o resultado desse produto é uma subtração entre dois produtos de duas deltas que tem os índices da forma: "**Primeiro Primeiro** \* **Segundo Segundo** - **Primeiro Segundo** \* **Segundo Primeiro**", i.e:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}. \quad (4.82)$$

A partir da regra de "E $\delta$ ", tomando  $m = j$  e lembrando que  $\delta_{jj} = 3$ , temos que,

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijn} = \delta_{jj}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{kj} \quad (4.83)$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijn} = 3\delta_{kn} - \delta_{kn} = 2\delta_{kn}, \quad (4.84)$$

e de maneira similar, tomando  $n = k$ ,

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6. \quad (4.85)$$

Para uma matriz arbitrária  $a_{ij}$ , usando as identidades para  $\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn}$ , podemos escrever

$$\epsilon_{ijk}a_{1i}a_{2j}a_{3k} = \epsilon_{ijk}\epsilon_{123}a_{1i}a_{2j}a_{3k} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix} a_{1i}a_{2j}a_{3k} = \quad (4.86)$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \det(a_{ij}). \quad (4.87)$$

A relação acima pode ser generalizada

$$\epsilon_{ijk} a_{mi} a_{nj} a_{lk} = \det(a_{pq}) \epsilon_{mnl}. \quad (4.88)$$

Com a relação anterior podemos demonstrar que o símbolo de Levi-Civita é um tensor isotrópico de ordem 3. De fato,

$$\epsilon'_{ijk} = \alpha_{im} \alpha_{jn} \alpha_{kl} \epsilon_{mnl} = \det(\alpha_{pq}) \epsilon_{ijk} = \epsilon_{ijk}. \quad (4.89)$$

E também temos a seguinte relação

$$\det(a_{pq}) = \frac{1}{6} \epsilon_{mnl} \epsilon_{ijk} a_{mi} a_{nj} a_{lk}. \quad (4.90)$$

#### 4.3.4 Propriedade entre o produto do símbolo de Levi-Civita e um tensor simétrico

Seja  $T_{jk}$  um tensor simétrico, i.e.,  $T_{jk} = T_{kj}$ , então

$$\epsilon_{ijk} T_{jk} = \epsilon_{ijk} T_{kj}, \quad (4.91)$$

$$\epsilon_{ijk} T_{jk} = -\epsilon_{ikj} T_{kj}, \quad (4.92)$$

$$\epsilon_{ijk} T_{jk} = -\epsilon_{ijk} T_{jk} \quad \therefore \quad \epsilon_{ijk} T_{jk} = 0, \quad (4.93)$$

observe que no lado direito da equação 4.92 os índices  $kj$  são mudos, portanto podemos trocá-los por  $jk$ . Na equação 4.93 temos uma igualdade do tipo  $A = -A$ , portanto  $A$ , só pode ser igual a zero.

#### 4.3.5 Diagonalização de um tensor simétrico de segunda ordem

Problemas que envolvem tensores de segunda ordem simétricos (e.g. tensor de deformação e tensão), tornam-se mais simples se estudados em um sistema rotacionado onde apenas suas componentes diagonais são diferentes de zero. Tal operação de rotação é denominada diagonalização do tensor, em referência à diagonalização de matrizes.

Portanto, queremos uma transformação de coordenadas de  $T_{ij}$ , tal que

$$T'_{ij} = \begin{cases} T'_{ij} & , \text{ se } i = j \\ 0 & , \text{ se } i \neq j \end{cases}. \quad (4.94)$$

Utilizando a equação de rotação de coordenadas

$$T'_{ij} = a_{ik} a_{jl} T_{kl}. \quad (4.95)$$



Nesta equação, os tensores de rotação  $a_{ik}$ ,  $a_{jl}$  e o tensor  $T'_{ij}$  tem de ser determinados. Para isso, começamos mutiplicando ambos os lados por  $a_{jm}$

$$a_{jm}T'_{ij} = a_{jm}a_{ik}a_{jl}T_{kl} , \quad (4.96)$$

$$a_{jm}T'_{ij} = a_{ik}\delta_{lm}T_{kl} , \quad (4.97)$$

$$a_{jm}T'_{ij} = a_{ik}T_{km} . \quad (4.98)$$

Como fizemos uma escolha particular sobre  $T'_{ij}$  (equação 4.94) a última equação acima se torna

$$a_{1m}T'_{11} = a_{1k}T_{km} , \quad (4.99)$$

$$a_{2m}T'_{22} = a_{2k}T_{km} , \quad (4.100)$$

$$a_{3m}T'_{33} = a_{3k}T_{km} . \quad (4.101)$$

Definindo

$$a_{1m} = u_m; \quad a_{1k} = u_k , \quad (4.102)$$

$$a_{2m} = v_m; \quad a_{2k} = v_k , \quad (4.103)$$

$$a_{3m} = w_m; \quad a_{3k} = w_k . \quad (4.104)$$

Substituindo as novas definições nas equações 4.99 a 4.101, obtemos

$$u_mT'_{11} = u_kT_{km} , \quad (4.105)$$

$$v_mT'_{22} = v_kT_{km} , \quad (4.106)$$

$$w_mT'_{33} = w_kT_{km} . \quad (4.107)$$

Perceba que, as três equações acima possuem a mesma forma, i.e.

$$z_kT_{km} = \lambda z_m; \quad m = 1, 2, 3 , \quad (4.108)$$

onde  $z$  pode ser  $u$ ,  $v$  ou  $w$  e  $\lambda$  pode ser  $T'_{11}$ ,  $T'_{22}$  ou  $T'_{33}$ . Veja que podemos escrever  $z_m = \delta_{km}z_k$ , portanto, passando o lado direito para esquerda e igualando a zero, obtemos,

$$(T_{km} - \lambda\delta_{km})z_k = 0; \quad m = 1, 2, 3 . \quad (4.109)$$

A equação acima representa um sistema linear homogêneo de três equações em três incógnitas ( $z_1, z_2, z_3$ ). Como procuramos uma solução não trivial ( $z_k = 0$ ), temos que o determinante do sistema tem de ser igual a zero:

$$\det(T_{km} - \lambda\delta_{km}) = 0 . \quad (4.110)$$

Escrevendo explicitamente a equação acima, obtemos

$$\det \left( \begin{bmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{bmatrix} \right) = -\lambda^3 + A\lambda^2 - B\lambda + C = 0 , \quad (4.111)$$

onde,

$$A = T_{ii}, \quad C = \det(T_{km}), \quad (4.112)$$

e

$$B = T_{11}T_{22} - T_{12}^2 + T_{22}T_{33} - T_{23}^2 + T_{11}T_{33} - T_{13}^2. \quad (4.113)$$

Observe que temos um polinômio cúbico em  $\lambda$ , e sua solução possui três raízes:  $\lambda^{(1)}$ ,  $\lambda^{(2)}$  e  $\lambda^{(3)}$  que são denominados autovalores. Onde,  $u_k$ ,  $v_k$  e  $w_k$  são seus respectivos autovetores, de acordo com a equação 4.108.

Vale destacar a relação entre os autovetores  $u_k$ ,  $v_k$ ,  $w_k$  e os coeficientes da matriz de rotação  $a_{ij}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}. \quad (4.114)$$

E que podemos obter o tensor  $T'_{ij}$  por meio da operação

$$\lambda z_m = z_k T_{km}, \quad (4.115)$$

$$\lambda z_m z_m^T = z_k T_{km} z_m^T, \quad (4.116)$$

$$\lambda = z_k T_{km} z_m^T, \quad (4.117)$$

aqui usamos que a inversa da matriz de rotação é dada pela sua transposta.

## 4.4 Operadores Diferenciais e Teoremas Integrais

Vamos definir nesta seção os operadores diferenciais: gradiente, divergente, rotacional e Laplace; e os teoremas integrais de Gauss e Stokes utilizando a representação tensorial apresentada nas seções anteriores.

### 4.4.1 Coordenadas Cartesianas

#### 1. Operador Gradiente

O operador gradiente pode ser escrito como

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \Phi_{,i}, \quad (4.118)$$

onde a vírgula e o índice  $i$  denotam a derivada com relação à coordenada espacial  $x_i$ . A notação vetorial deste operador pode ser  $\nabla \Phi$  ou  $\text{grad } \Phi$ .

#### 2. Operador Divergente

Aplicado ao vetor  $\vec{u}$ , o operador divergente pode ser escrito como

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = u_{i,i}, \quad (4.119)$$

e sua notação vetorial é  $\nabla \cdot \vec{u}$  ou  $\text{div } \vec{u}$ .

### 3. Operador Rotacional

Aplicado ao vetor  $u$ , o operador rotacional pode ser escrito como

$$\epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} u_k = \epsilon_{ijk} u_{k,j} , \quad (4.120)$$

e sua notação vetorial é  $\nabla \times \vec{u}$ ,  $\text{rot } \vec{u}$  ou  $\text{curl } \vec{u}$ .

### 4. Operador de Laplace (Laplaciano)

É uma combinação do operador divergente com o gradiente. Pode ser escrito como

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_i} = \Phi_{,ii}, \quad (4.121)$$

também existem outras notações, dadas por  $\Delta \Phi$  ou  $\nabla^2 \Phi$ .

### 5. Div rot e rot grad

Utilizando as representações tensoriais e suas propriedades, podemos simplificar muito operações do tipo  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{u}) = 0$  ou  $\nabla \times (\nabla \Phi) = 0$ , e.g.,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \vec{u}) &= (\epsilon_{ijk} u_{k,j})_{,i} = \epsilon_{ijk} u_{k,ji} \\ &= -\epsilon_{jik} u_{k,ji} = -\epsilon_{jik} u_{k,ij} = -\epsilon_{ijk} u_{k,ji} = 0. \end{aligned} \quad (4.122)$$

A quarta igualdade vem do fato de que a ordem de diferenciação é irrelevante, enquanto que, na quinta igualdade os índices mudos  $i$  e  $j$  são trocados entre si. Note que simplificamos muito a quantidade de operações para chegar ao resultado final.

### 6. Teorema de Gauss

Mostra como transformar uma integral de volume numa integral de superfície e vice versa,

$$\iiint_{V_0} \text{div } \vec{u} \, dV = \iint_{\Sigma} \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS, \quad (4.123)$$

em sua forma tensorial

$$\iiint_{V_0} u_{i,i} \, dV = \iint_{\Sigma} u_i n_i \, dS, \quad (4.124)$$

onde  $V_0$  é um volume envolvido pela superfície fechada  $\Sigma$  e  $\vec{n}$  é um vetor normal externo unitário de  $\Sigma$ .

### 7. Teorema de Stokes

Indica como transformar uma integral de superfície em uma integral de linha e vice versa,

$$\iint_{\Sigma} \vec{n} \cdot \text{rot } \vec{u} \, dS = \int_L \vec{u} \cdot \vec{t} \, dl, \quad (4.125)$$

em sua forma tensorial

$$\iint_{\Sigma} n_i \epsilon_{ijk} u_{k,j} dS = \int_L u_i t_i dl, \quad (4.126)$$

onde  $\Sigma$  é uma superfície envolta por uma linha fechada  $L$  com um vetor tangente unitário  $\vec{t}$ .

#### 4.4.2 Coordenadas Ortogonais Curvilíneas

A localização de um ponto no espaço tridimensional (com respeito a alguma origem) é normalmente especificada pelas suas três coordenadas cartesianas  $(x_1, x_2, x_3)$  ou, equivalentemente, ao especificar o vetor posição do ponto. Porém, existem situações em que é mais conveniente descrever a posição do ponto por outro sistema de coordenadas, mais apropriado para o problema em questão, por exemplo, por coordenadas esféricas ou cilíndricas. Estes exemplos, por sua vez, são casos específicos de sistemas de coordenadas curvilíneas.

A relação de transformação entre coordenadas curvilíneas  $\gamma_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) e coordenadas cartesianas pode ser escrita como

$$x_i = x_i(\gamma_k), \quad (4.127)$$

ou

$$x_i = x_i(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3). \quad (4.128)$$

Um elemento infinitesimal de comprimento ao longo do eixo  $x_i$  é

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial \gamma_k} d\gamma_k. \quad (4.129)$$

O comprimento de arco,  $ds$ , que é, basicamente, a distância entre dois pontos, é

$$(ds)^2 = dx_i dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial \gamma_k} \frac{\partial x_i}{\partial \gamma_l} d\gamma_k d\gamma_l = g_{kl} d\gamma_k d\gamma_l, \quad (4.130)$$

onde

$$g_{kl} = \frac{\partial x_i}{\partial \gamma_k} \frac{\partial x_i}{\partial \gamma_l}. \quad (4.131)$$

Temos coordenadas curvilíneas ortogonais quando  $g_{kl} = 0$  para  $k \neq l$ , ou seja, na situação em que termos mistos não aparecem na expressão do comprimento de arco (4.130). Dizer que  $g_{kl} = 0$  se  $k \neq l$ , significa que o vetor  $\partial x_i / \partial \gamma_k$  que é tangente a  $\gamma_k$ , é ortogonal a  $\partial x_i / \partial \gamma_l$ , tangente à coordenada  $\gamma_l$ . Então  $\gamma_k$  e  $\gamma_l$  são ortogonais em qualquer ponto. Nessa situação temos

$$(ds)^2 = h_1^2 (d\gamma_1)^2 + h_2^2 (d\gamma_2)^2 + h_3^2 (d\gamma_3)^2, \quad (4.132)$$

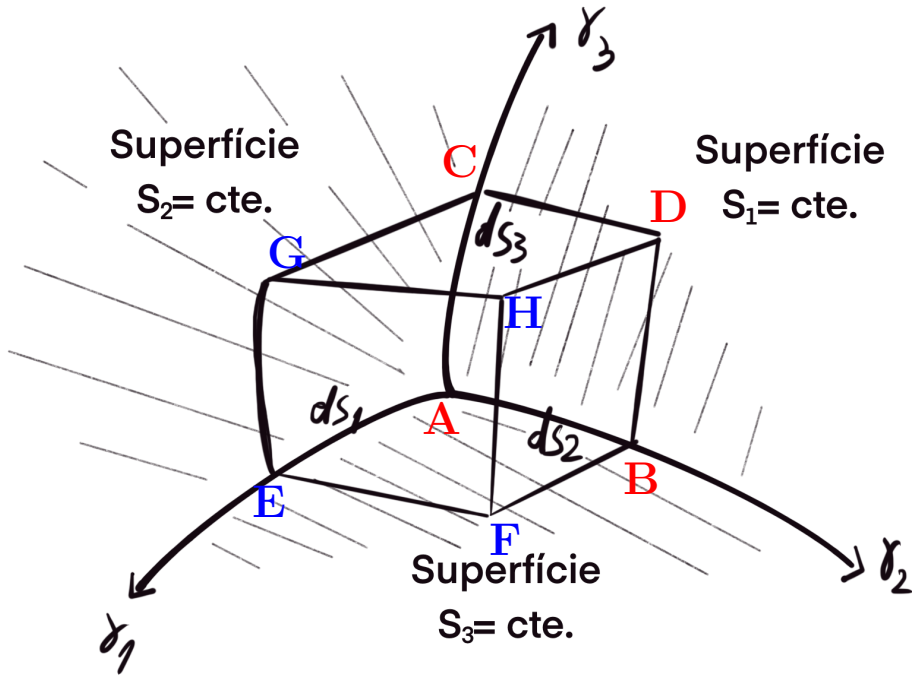


Figura 4.3: Ilustração de um sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais.

onde, por exemplo,

$$h_1^2 = \frac{\partial x_1}{\partial \gamma_1} \frac{\partial x_1}{\partial \gamma_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \gamma_1} \frac{\partial x_2}{\partial \gamma_1} + \frac{\partial x_3}{\partial \gamma_1} \frac{\partial x_3}{\partial \gamma_1}. \quad (4.133)$$

Um elemento de comprimento ao longo de  $\gamma_1$  (ver figura 4.3) é

$$ds_1 = h_1 d\gamma_1, \quad (4.134)$$

e similarmente, para comprimentos de onda ao longo dos outros eixos. Então, podemos escrever

$$\frac{\partial}{\partial s_1} \Leftrightarrow \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \gamma_1}. \quad (4.135)$$

Assim, o operador gradiente fica

$$\nabla = \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \gamma_1}, \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \gamma_2}, \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial \gamma_3} \right). \quad (4.136)$$

Se assumirmos um valor constante para  $\gamma_k$ , temos

$$\gamma_k(x_1, x_2, x_3) = cte., \quad (4.137)$$

que descreve uma superfície no espaço (considerando que as outras coordenadas variam), conhecida por superfície coordenada. A superfície coordenada é nomeada pela coordenada com valor constante (ver figura 4.3).

Para encontrarmos o divergente e o laplaciano usamos o Teorema de Gauss

$$\iiint_V u_{i,i} dV = \iint_S u_i n_i dS, \quad (4.138)$$

onde  $n_i$  é vetor normal externo unitário da superfície  $S$  que envolve o volume  $V$ . Considere um sistema de coordenadas ortogonais curvilíneas  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  e  $\gamma_3$ , e um volume elementar  $dV = ds_1 ds_2 ds_3$  (figura 4.3).

Vamos separar nossa análise em dois tipos de faces, as próximas aos eixos  $\gamma_i$  (e.g., a face **ABCD**) e as outras faces (e.g., a face **EFGH**). Como estamos avaliando uma unidade infinitesimal de área podemos aproximar o valor de  $u_i$  na face ABCD como:

$$u_i n_1 dS = -u_1 ds_2 ds_3, \quad (4.139)$$

onde o sinal é negativo porque a orientação do vetor normal  $n_1$  é contrário ao eixo  $\gamma_1$ . De maneira similar, representamos as outras faces que estão sob os eixos da seguinte forma

$$u_i n_2 dS = -u_2 ds_1 ds_3, \quad (4.140)$$

$$u_i n_3 dS = -u_3 ds_1 ds_2. \quad (4.141)$$

Já nas outras faces, mais distantes dos eixos, representadas pela face EFGH, é preciso levar em conta que a função  $u_i$  é avaliada em  $\gamma_1 + ds_1$  (face EFGH). Assim, usamos uma aproximação de Taylor de primeira ordem, i.e.,

$$u_i(-n_1) dS = \left( u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial s_1} ds_1 \right) \left( h_2 + \frac{\partial h_2}{\partial s_1} ds_1 \right) \left( h_3 + \frac{\partial h_3}{\partial s_1} ds_1 \right) d\gamma_2 d\gamma_3. \quad (4.142)$$

Perceba que  $h_i$  é função de  $x_i(\gamma_k)$  e também que usamos a expansão do tipo ( $f(x + dx)$  em torno de  $x_0 = x$ )

$$f(x + dx) = f(x) + f'(x)dx + \frac{1}{2!} f''(x)dx^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)dx^n. \quad (4.143)$$

Ignorando os termos de segunda ordem temos na equação 4.142

$$u_i(-n_1) dS = \left( u_1 h_2 h_3 + h_2 h_3 \frac{\partial u_1}{\partial s_1} ds_1 + u_1 h_3 \frac{\partial h_2}{\partial s_1} ds_1 + u_1 h_2 \frac{\partial h_3}{\partial s_1} ds_1 \right) d\gamma_2 d\gamma_3, \quad (4.144)$$

$$u_i(-n_1) dS = u_1 ds_2 ds_3 + \frac{\partial}{\partial s_1} (u_1 h_2 h_3) ds_1 d\gamma_2 d\gamma_3, \quad (4.145)$$

$$u_i(-n_1) dS = u_1 ds_2 ds_3 + \frac{\partial}{\partial \gamma_1} (u_1 h_2 h_3) d\gamma_1 d\gamma_2 d\gamma_3. \quad (4.146)$$

Repetindo analogamente para as outras faces,

$$u_i(-n_2)dS = u_2ds_1ds_3 + \frac{\partial}{\partial\gamma_2}(u_2h_1h_3)d\gamma_1d\gamma_2d\gamma_3, \quad (4.147)$$

$$u_i(-n_3)dS = u_3ds_1ds_2 + \frac{\partial}{\partial\gamma_3}(u_3h_1h_2)d\gamma_1d\gamma_2d\gamma_3. \quad (4.148)$$

Somando as contribuições das seis faces e igualando à contribuição da integral de volume no Teorema de Gauss temos,

$$u_{i,i}ds_1ds_2ds_3 = \left[ \frac{\partial}{\partial\gamma_1}(u_1h_2h_3) + \frac{\partial}{\partial\gamma_2}(u_2h_1h_3) + \frac{\partial}{\partial\gamma_3}(u_3h_1h_2) \right] d\gamma_1d\gamma_2d\gamma_3. \quad (4.149)$$

Isolando  $u_{i,i}$ , encontramos a expressão do divergente em coordenadas ortogonais curvilíneas

$$u_{i,i} = \frac{1}{h_1h_2h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial\gamma_1}(u_1h_2h_3) + \frac{\partial}{\partial\gamma_2}(u_2h_1h_3) + \frac{\partial}{\partial\gamma_3}(u_3h_1h_2) \right]. \quad (4.150)$$

Combinando as expressões para o gradiente e para o divergente em coordenadas curvilíneas ortogonais obtemos a expressão para o Laplaciano  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$

$$\Delta = \frac{1}{h_1h_2h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial\gamma_1} \left( \frac{h_2h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial\gamma_1} \right) + \frac{\partial}{\partial\gamma_2} \left( \frac{h_1h_3}{h_2} \frac{\partial}{\partial\gamma_2} \right) + \frac{\partial}{\partial\gamma_3} \left( \frac{h_1h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial\gamma_3} \right) \right]. \quad (4.151)$$

## 4.5 Sinal Analítico

A função sinal analítico  $F(\xi)$  é definida como

$$F(\xi) = g(\xi) + ih(\xi) \quad (4.152)$$

e será usada no estudo de ondas transientes. Aqui  $g(\xi)$  é o sinal transiente real para o qual o sinal analítico é construído e  $h(\xi)$  é a transformada de Hilbert de  $g(\xi)$ ,

$$h(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\sigma)}{\sigma - \xi} d\sigma, \quad (4.153)$$

onde  $g(\xi)$  e  $h(\xi)$  formam um par da transformada de Hilbert. Antes de entrar na discussão do sinal analítico na teoria de propagação de ondas planas transientes, vejamos alguns fatos importantes da análise de Fourier. Considerando o grupo de funções de Fourier do tipo padrão, que são as absolutamente integráveis em  $(-\infty, \infty)$  e satisfazem as condições de Dirichlet num intervalo finito. Uma função é dita absolutamente integrável se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt \leq A, \quad (4.154)$$

onde  $A$  é uma constante real positiva. A condição de Dirichlet requer a continuidade de  $g(\xi)$  em um intervalo finito com a possibilidade de finitas descontinuidades do primeiro tipo (onde existem limites finitos à esquerda e à direita), e número finito de máximos e mínimos. Sob essas condições a transformada de Fourier é definida como

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{i2\pi\omega t} dt, \quad g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega)e^{-i2\pi\omega t} d\omega \quad (4.155)$$

Para explicações futuras, precisaremos saber o teorema da convolução e a inversa da transformada de Fourier da função sinal -  $\text{sgn}(\omega)$ .

A convolução  $c(t)$  de duas funções,  $a(t)$  e  $b(t)$  é dada por

$$c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\tau)b(t - \tau)d\tau, \quad (4.156)$$

simbolicamente escrita como  $c(t) = a(t) * b(t)$ . O teorema da convolução diz que a transformada de Fourier da convolução é igual ao produto das transformadas das funções  $a(t)$  e  $b(t)$ ,

$$c(\omega) = a(\omega)b(\omega). \quad (4.157)$$

A função sinal é definida como

$$\text{sgn}(\omega) = \begin{cases} 1, \omega > 0 \\ 0, \omega = 0 \\ -1, \omega < 0 \end{cases} \quad (4.158)$$

Como esta função não é absolutamente integrável, é preciso achar a inversa da transformada de Fourier como um caso limite de uma função auxiliar que no limite se aproxima da função  $\text{sgn}(\omega)$ . Esta função pode ser

$$\hat{g}_\alpha(\omega) = e^{-\alpha|\omega|}i\text{sgn}(\omega) \quad (4.159)$$

com  $\alpha > 0$ . Esta é uma função integrável e quando  $\alpha \rightarrow 0$  a função se aproxima de  $i\text{sgn}(\omega)$ . Então basta tomar a transformada de Fourier inversa e fazer  $\alpha \rightarrow 0$  para obter a transformada inversa de  $i\text{sgn}(\omega)$ .

$$\begin{aligned} g_\alpha(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\omega|}i\text{sgn}(\omega)e^{-i2\pi\omega t} d\omega \\ &= - \int_{-\infty}^0 e^{\alpha\omega} e^{-i2\pi\omega t} i d\omega + \int_0^{\infty} e^{-\alpha\omega} e^{-i2\pi\omega t} i d\omega \\ &= - \int_0^{\infty} e^{-\alpha\omega'} e^{i2\pi\omega' t} i d\omega' + \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+i2\pi t)\omega} i d\omega \\ &= - \int_0^{\infty} e^{(-\alpha+2i\pi t)\omega} i d\omega + \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+2i\pi t)\omega} i d\omega \\ &= \frac{i}{i2\pi t - \alpha} + \frac{i}{i2\pi t + \alpha}. \end{aligned} \quad (4.160)$$



Para  $\alpha \rightarrow 0$  temos

$$g_\alpha(t) \rightarrow g_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} i \operatorname{sgn}(\omega) e^{-i2\pi\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi t}. \quad (4.161)$$

Temos então um par de Fourier

$$g_0(t) = (\pi t)^{-1}, \quad \hat{g}_0(\omega) = i \operatorname{sgn}(\omega). \quad (4.162)$$

Sabemos que, para uma função real  $g(t)$

$$\hat{g}^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi\omega t} dt = \hat{g}(-\omega). \quad (4.163)$$

Usando esta propriedade e sabendo que, sendo o número complexo  $z = x + yi$  e  $2\operatorname{Re}(z) = z + \bar{z}$ , reescrevemos a expressão para o sinal real da seguinte maneira

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) e^{-i2\pi\omega t} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^0 \hat{g}(\omega) e^{-i2\pi\omega t} d\omega + \int_0^{\infty} \hat{g}(\omega) e^{-i2\pi\omega t} d\omega \\ &= \int_0^{\infty} \hat{g}(-\omega) e^{i2\pi\omega t} d\omega + \int_0^{\infty} \hat{g}(\omega) e^{-i2\pi\omega t} d\omega \\ &= \int_0^{\infty} \hat{g}^*(\omega) e^{i2\pi\omega t} d\omega + \int_0^{\infty} \hat{g}(\omega) e^{-i2\pi\omega t} d\omega \\ &= 2\operatorname{Re}\left\{ \int_0^{\infty} \hat{g}(\omega) e^{-i2\pi\omega t} d\omega \right\}. \end{aligned} \quad (4.164)$$

Então,

$$\begin{aligned} g(t) &= 2\operatorname{Re}\left\{ \int_0^{\infty} \hat{g}(\omega) e^{-i2\pi\omega t} d\omega \right\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{ 2 \int_0^{\infty} \hat{g}(\omega) e^{-i2\pi\omega t} d\omega \right\} \end{aligned} \quad (4.165)$$

Assim, como vemos,  $g(t)$  é a parte real do sinal complexo

$$F(t) = 2 \int_0^{\infty} \hat{g}(\omega) e^{-i2\pi\omega t} d\omega, \quad (4.166)$$

que também pode ser escrito como

$$F(t) = g(t) + ih(t), \quad (4.167)$$

Mas quem é a parte imaginária  $h(t)$  deste sinal complexo? Sabendo que, sendo  $z$  um número complexo,  $\operatorname{Im}(z) = (z - \bar{z})/2i$ , então

$$h(t) = \operatorname{Im}\{F(t)\} = \frac{F(t) - F^*(t)}{2i} \quad (4.168)$$

Encontrando  $h(t)$ :

$$\begin{aligned}
h(t) &= \frac{1}{i} \left[ \int_0^\infty \hat{g}(\omega) e^{-i2\pi\omega t} d\omega - \int_0^\infty \hat{g}(-\omega) e^{i2\pi\omega t} d\omega \right] \\
&= \frac{1}{i} \left[ \int_0^\infty \hat{g}(\omega) e^{-i2\pi\omega t} d\omega - \int_{-\infty}^0 \hat{g}(\omega) e^{-i2\pi\omega t} d\omega \right] \\
&= \int_{-\infty}^\infty \hat{g}(\omega) [-i \operatorname{sgn}(\omega)] e^{-i2\pi\omega t} d\omega \\
&= g(t) * \frac{1}{\pi t} \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{g(\tau)}{t - \tau} d\tau \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{g(\tau)}{t - \tau} d\tau.
\end{aligned} \tag{4.169}$$

Então  $g(t)$  e  $h(t)$  formam um par de Hilbert, isto é,  $h(t)$  é a transformada de Hilbert de  $g(t)$ . O sinal complexo (4.167) é o sinal analítico.

Devemos observar que a Transformada de Hilbert da Transformada de Hilbert de um sinal  $g(t)$  fornece  $-g(t)$ , ou seja,

$$g(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{h(\xi)}{\xi - t} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{h(\xi)}{t - \xi} d\xi. \tag{4.170}$$

Isso pode ser provado usando o sinal analítico  $Y(t) = -iF(t) = -i(g(t) + ih(t)) = h(t) - ig(t)$ . Usando o mesmo raciocínio das equações (4.169), mostra-se que  $-g(t) = \operatorname{Im}\{Y(t)\}$  é a transformada de Hilbert de  $h(t) = \operatorname{Re}\{Y(t)\}$ .

Um importante par de Hilbert e seu correspondente sinal analítico está relacionado ao sinal real na forma da função  $\delta$  de Dirac. Para  $g(t) = \delta(t)$ , a equação para  $h(t)$  fica

$$h(t) = \int_{-\infty}^\infty \frac{\delta(\sigma)}{\sigma - t} d\sigma = -\frac{1}{\pi t}. \tag{4.171}$$

O correspondente sinal analítico tem a forma

$$F(t) = \delta(t) - \frac{i}{\pi t}. \tag{4.172}$$

Uma propriedade importante da transformada de Hilbert é que a transformada de Hilbert da derivada  $dg(t)/dt$  é a derivada  $dh(t)/dt$  da transformada de Hilbert do sinal  $g(t)$ .

$$\frac{dh(t)}{dt} = 2\operatorname{Im} \int_0^\infty g(f) (-i2\pi f) e^{-i2\pi f t} df, \tag{4.173}$$

$$\frac{dg(t)}{dt} = 2\operatorname{Re} \int_0^\infty g(f) (-i2\pi f) e^{-i2\pi f t} df. \tag{4.174}$$

Da primeira equação vemos que a derivada da transformada de Hilbert  $h(t)$  corresponde a um "novo" sinal cuja transformada de Fourier é  $g(f)(-i2\pi f)$ . Da segunda equação vemos que o "novo" sinal é  $dg(t)/dt$ .

# Capítulo 5

## Equação da onda elástica

### 5.1 Teoria Elastodinâmica

#### 5.1.1 Introdução

Sob uma carga externa, um corpo pode ser transladado, rotacionado ou deformado. Na sequência, estudamos o efeito chamado de “deformação”.

A deformação de um material é um processo no qual distâncias entre pontos individuais do material são alteradas. Em um material realístico, a aplicação de uma força em um lugar particular causa deformações, primeiro nas proximidades deste lugar e sucessivamente em partes mais distantes. Este processo é chamado de “propagação de onda”.

A propagação de onda deve superar a resitência do material causada pela consistência e a resistência causada pela inércia. Se a consistência é tal que o material é não deformável (rígido), o efeito da aplicação de forças externas em um ponto do corpo poderia ser sentido imediatamente em cada ponto do material, i.e., o corpo seria movido. Se o material é deformável, então todas as partículas do material seriam excitadas simultaneamente. Nós consideramos aqui um material realístico que é deformável e que, depois de removida a carga, retorna para um estado, que é o mesmo ou similar ao estado antes do carregamento. Neste último caso nós falamos sobre materiais “imperfeitamente elásticos”, e no caso anterior sobre materiais “perfeitamente elásticos”, no qual concentramos nossos estudos.

Uma propagação de onda é conectada por transmissão de energia. A energia é transportada de uma partícula do material para outra, e este transporte não é pelo fluxo das partículas. As partículas do material oscilam ao redor de suas posições médias.

Na mecânica clássica, o movimento de onda é assumido como uma pequena perturbação do estado inicial do material, chamado de “estado natural”. No estado natural não há tensões e deformações, então consideramos o estado natural como sendo o estado de equilíbrio estático em que a deformação não muda com o tempo.

Estudamos aqui como a deformação altera relações entre duas partículas próximas. Esta mudança é descrita pelo “tensor de deformação”. Antes introduzimos o *vetor deslocamento*, descrevendo um deslocamento de uma partícula simples sob uma deformação. Consideramos para ambos o sistema de coordenadas cartesianas  $x_1, x_2, x_3$  com origem no

ponto 0.

### 5.1.2 Vetor posição

Seja  $P = (x_1, x_2, x_3)$  um vetor que indique a posição de uma partícula no corpo sem deformação e  $P' = (x'_1, x'_2, x'_3)$  a posição da partícula no corpo após a deformação, que estava originalmente em  $P$ . Perceba que  $P$  descreve de maneira única a posição das partículas, e o vetor

$$P' = P'(P, t), \quad (5.1)$$

ou

$$P'_i = x'_i(x_k, t) \quad k = 1, 2, 3 \quad (5.2)$$

representa a posição das partículas  $P$  após a deformação. Esta maneira de descrever o movimento é denominada de descrição Lagrangeana ou descrição material do movimento.  $P'$  descreve o movimento da perspectiva da partícula  $P$ , ou em outras palavras, seguimos o movimento da partícula  $P$ . Tomando  $t = 0 \equiv t_0$  como o tempo de referência inicial, de tal forma que

$$P'(P, t_0) \equiv P, \quad (5.3)$$

e  $P'(P, t)$  é a posição atual da partícula que estava em  $P$  no tempo  $t = 0$ .

Podemos, também, descrever  $P$  em função de  $P'$ , como

$$P_i = x_i(x'_k, t) \quad k = 1, 2, 3. \quad (5.4)$$

Essa descrição é denominada descrição Euleriana, ou descrição espacial. Nesta forma, estamos interessados na partícula que ocupa um dado ponto  $x'_i$  no espaço no tempo  $t$ .

### Considerações adicionais

Utilizando a descrição euleriana e seja  $f'(x'_i, t)$ , uma função que descreve o valor de uma propriedade do meio (e.g., pressão, temperatura, velocidade) em um dado ponto  $x'_i$  no tempo  $t$ . Ao variarmos  $t$ , diferentes partículas (identificadas por diferentes valores de  $x_i$ ) ocupam o mesmo ponto espacial  $x'_i$ . Vamos nos concentrar em uma única partícula  $x_i$ . Usando a equação 5.2, temos

$$f(x_i, t) = f'(x'_k(x_i, t), t), \quad (5.5)$$

ou

$$f(P, t) = f'(P'(P, t), t), \quad (5.6)$$

onde  $f$  e  $f'$  não precisam necessariamente ter a mesma forma funcional. Note que mantendo  $x_i$  fixo e variando  $t$ ,  $f'$  é uma função que descreve o valor da propriedade percebida pela partícula que estava inicialmente em  $x_i$  e se movimentou no meio.

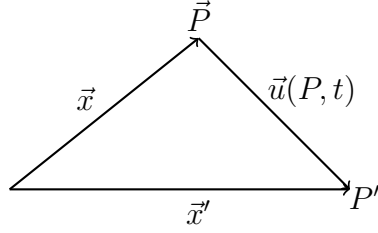


Figura 5.1: Representação do vetor deslocamento  $\vec{u}(P, t)$ .

### 5.1.3 Vetor deslocamento

Utilizamos a descrição Lagrangeana do vetor deslocamento  $u_i(x_k, t)$  e consideramos uma partícula que, no estado inicial, está situada no ponto  $P = (x_1, x_2, x_3)$ . Após a deformação do material, no tempo  $t$ , esta partícula se encontra no ponto  $P' = (x'_1, x'_2, x'_3)$  (ver figura 5.1). A mudança do ponto  $P$  para  $P'$  é especificada pelo “vetor deslocamento”

$$u_i(x_k, t) = x'_i - x_i, \quad (5.7)$$

tal que

$$x'_i = x_i + u_i(x_k, t) = x_i + u_i(P, t). \quad (5.8)$$

Na descrição Lagrangeana, a velocidade de movimento de uma partícula é dada pela derivada material do vetor posição da partícula, ou seja, pela variação temporal do vetor posição da partícula  $(x'_i(x_k, t))$ , i.e.,

$$v_i = \left. \frac{Dx'_i}{Dt} \right|_{Pfixo} = \left. \frac{\partial x'_i}{\partial t} \right|_{Pfixo}. \quad (5.9)$$

Assim, calculando a derivada material de  $x'_i$ , i.e., da equação 5.8 (lembrando, visto que  $P$  independe do tempo, teremos  $\frac{\partial x_i}{\partial t} = 0$ ),

$$\left( \frac{D}{Dt} \right) x'_i = u_i(x_k, t) + x_i, \quad (5.10)$$

$$v_i = \frac{\partial u_i(x_k, t)}{\partial t}, \quad (5.11)$$

$$v_i(x_k, t) = \dot{u}_i(x_k, t) = \frac{\partial u_i(x_k, t)}{\partial t}, \quad (5.12)$$

onde o operador  $\frac{D}{Dt}$  indica a derivada material, ou seja, a variação temporal “percebida” pela partícula.

Similarmente, para a aceleração da partícula chegamos em

$$a_i(x_k, t) = \ddot{u}_i(x_k, t) = \frac{\partial^2 u_i(x_k, t)}{\partial t^2}. \quad (5.13)$$

A quantidade  $v_i(x_k, t)$  é conhecida como “velocidade da partícula” e  $a_i(x_k, t)$  como a “aceleração da partícula”.

Escolhemos a descrição Lagrangeana para simplificar as contas. para descrevermos a velocidade da partícula na perspectiva Euleriana, escrevemos primeiro o vetor deslocamento, como

$$u_i(x_k, t) = u_i(x'_l(x_k, t), t). \quad (5.14)$$

Desenvolvendo de maneira similar, temos

$$x'_i = u_i(x'_l(x_k, t), t) + x_i, \quad (5.15)$$

$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial x'_l} \frac{\partial x'_l}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) u_i. \quad (5.16)$$

### 5.1.4 Tensor de deformação

Em adição ao ponto  $P$ , nós consideramos agora um ponto  $Q = (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$  situado nas proximidades do ponto  $P$ , estando o material ainda não deformado. O ponto  $Q$  será movido durante a deformação para o ponto  $Q' = (x'_1 + dx'_1, x'_2 + dx'_2, x'_3 + dx'_3)$  (ver figura 5.2). O vetor deslocamento do ponto  $Q$  pode ser expresso em termos do vetor deslocamento  $u_i(P)$ . Segue, por aproximação de Taylor de primeira ordem, em torno de  $x_k$  (uma vez que  $dx_i$  é supostamente infinitesimalmente pequeno), que

$$\begin{aligned} u_i(Q) &= u_i(x_k + dx_k) \sim u_i(x_k) + \frac{\partial u_i(x_k)}{\partial x_j} (x_k + dx_j - x_k) \\ &= u_i(x_k) + \frac{\partial u_i(x_k)}{\partial x_j} dx_j = u_i(P) + \frac{\partial u_i(P)}{\partial x_j} dx_j, \end{aligned} \quad (5.17)$$

para todos os pontos  $Q$  na vizinhança de  $P$ .

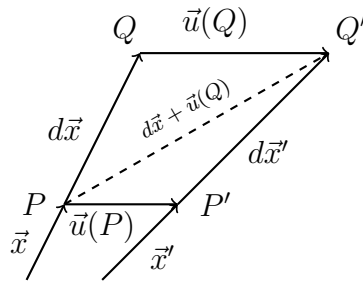


Figura 5.2: Descrição da deformação.

Agora investigamos a mudança da distância entre os pontos  $P$  e  $Q$  devido a deformação. Para isso fazemos a comparação do quadrado das distâncias  $\overline{PQ}$  e  $\overline{P'Q'}$ . Para  $\overline{PQ}^2$ , nós temos

$$\overline{PQ}^2 = dx_i dx_i. \quad (5.18)$$

Para determinarmos  $dx'_i$ , observamos que

$$dx'_i = dx_i + u_i(Q) - u_i(P) \sim dx_i + \frac{\partial u_i(P)}{\partial x_j} dx_j . \quad (5.19)$$

Logo, para  $\overline{P'Q'^2}$ , temos

$$\overline{P'Q'^2} = dx'_i dx'_i \sim \left( dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \right) \left( dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k \right) \quad (5.20)$$

$$= dx_i dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j dx_k \quad (5.21)$$

$$= dx_i dx_i + \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) dx_j dx_k . \quad (5.22)$$

Para  $\overline{P'Q'^2} - \overline{PQ^2}$ , chegamos em

$$\overline{P'Q'^2} - \overline{PQ^2} \sim 2E_{jk} dx_j dx_k , \quad (5.23)$$

onde

$$E_{jk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) . \quad (5.24)$$

A quantidade  $E_{jk}$  é um tensor de segunda ordem. Este é chamado de “tensor de deformação finita”. Desde que todas as derivadas para  $E_{jk}$  sejam tomadas de  $P$ , o tensor (5.24) caracteriza a deformação nas proximidades do ponto  $P$ . O tensor  $E_{jk}$  é simétrico ( $E_{jk} = E_{kj}$ ) e então é especificado por somente 6 componentes independentes. Por causa do terceiro termo em (5.24), o tensor de deformação finita é considerado não linear.

Mas, aqui, consideramos somente processos de ondas em que a deformação seja pequena, isto é,

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \ll 1 . \quad (5.25)$$

Logo, é possível desconsiderar o termo não linear na expressão (5.24) desde que é da segunda ordem com respeito a  $|\partial u_i / \partial x_j|$ . Apesar desta linearização simplificar as operações matemáticas devemos manter a aproximação acima sempre em mente nas aplicações.

Nós denotaremos a linearização do tensor de deformação finita,  $e_{jk}$ , como

$$e_{jk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) , \quad (5.26)$$

que é comumente chamado de “tensor de deformação infinitesimal” ou simplesmente “tensor de deformação”. Este é simétrico e linear. Notamos também que o tensor de deformação infinitesimal  $e_{ik}$  tem a mesma formulação tanto na descrição Lagrangeana como de Euler.

Em decorrência da fórmula (5.26) obtida para o tensor de deformação podemos escrever a expressão (5.17) na forma

$$u_i(Q) = u_i(P) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_j + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_j, \quad (5.27)$$

onde temos que o primeiro termo do lado direito ( $u_i(P)$ ) pode ser identificado como translação, uma vez que é igual para todos os pontos na vizinhança de  $P$ . O segundo termo contém o conhecido tensor de deformação e descreve, portanto a deformação do meio. Mostramos a seguir que o terceiro termo representa uma rotação infinitesimal. Os elementos  $\xi_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  deste termo formam a matriz anti-simétrica  $\Xi$ , conhecida como o tensor de rotação.

### 5.1.5 Tensor de rotação

Vejamos como o termo  $(\Xi d\vec{x})_i = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_j = \xi_{ij} dx_j$  representa uma rotação. Para tal, observamos que o produto

$$\Xi d\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & \xi_{12} & \xi_{13} \\ \xi_{21} & 0 & \xi_{23} \\ \xi_{31} & \xi_{32} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{12}dx_2 + \xi_{13}dx_3 \\ \xi_{21}dx_1 + \xi_{23}dx_3 \\ \xi_{31}dx_1 + \xi_{32}dx_2 \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

pode ser representado como produto vetorial de um vetor  $\vec{a}$  com  $d\vec{x}$ :

$$\vec{a} \times d\vec{x} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2dx_3 - a_3dx_2 \\ -a_1dx_3 + a_3dx_1 \\ a_1dx_2 - a_2dx_1 \end{pmatrix}. \quad (5.29)$$

Basta identificarmos:

$$\begin{cases} a_1 = -\xi_{23} = \xi_{32} \\ a_2 = \xi_{13} = -\xi_{31} \\ a_3 = -\xi_{12} = \xi_{21} \end{cases} \quad (5.30)$$

que reflete corretamente a anti-simetria de  $\Xi$ . Observamos ainda que

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \xi_{32} \\ \xi_{13} \\ \xi_{21} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{u}. \quad (5.31)$$

Portanto,  $\Xi d\vec{x} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{u} \times d\vec{x}$ .

Assim, quando não temos nem translação ( $u_i(P) = 0$ ) nem deformação ( $e_{ij} = 0$ ), a equação (5.27) pode ser escrita como

$$u_i(Q) = \xi_{ij} dx_j \implies \vec{u}(Q) = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{u} \times d\vec{x}, \quad (5.32)$$



que é perpendicular a  $d\vec{x}$ . Logo, neste caso a equação (5.19) tem a forma

$$d\vec{x}' = d\vec{x} + \frac{1}{2} \text{rot } \vec{u} \times d\vec{x} . \quad (5.33)$$

No triângulo  $PQQ'$ , observamos, para  $|\partial u_i / \partial x_j| \ll 1$ , que  $\overline{QQ'} = \tan \alpha |d\vec{x}| \approx \alpha |d\vec{x}|$ , onde  $\alpha$  denota o ângulo entre  $PQ$  e  $PQ'$ . Mas, por outro lado,  $\overline{QQ'} = |\vec{u}(Q)| = |\frac{1}{2} \text{rot } \vec{u} \times d\vec{x}| = |\frac{1}{2} \text{rot } \vec{u}| |d\vec{x}| \sin \frac{\pi}{2}$ . Logo,  $\alpha \approx |\frac{1}{2} \text{rot } \vec{u}|$ .

Desta forma, vimos que o ângulo  $\alpha$  que a deslocação de  $Q$  para  $Q'$  cobra depende somente do rotacional do vetor deslocamento. Em particular, não depende da posição original de  $Q$  em relação a  $P$ , descrita por  $dx_i$ . Isso implica que o ângulo  $\alpha$  é o mesmo para todos os pontos  $Q$  na vizinhança de  $P$ . Conseqüentemente, o terceiro termo da equação (5.27) descreve uma rotação de todos os pontos  $Q$  em volta de  $P$  pelo ângulo  $\alpha$ .

### 5.1.6 Interpretação física dos elementos do tensor de deformação

O tensor de deformação descreve deformação pura, este não contém informação sobre deslocamento ou rotação do corpo deformado como um todo. Nós esperamos então que a interpretação física dos elementos que estão na diagonal e daqueles que não estão seja diferente. Vejamos essas diferenças.

- Significado dos elementos  $e_{11}$ ,  $e_{22}$  e  $e_{33}$

Considerando os pontos  $P$  e  $Q$  situados ao longo do eixo  $x_1$ , temos  $dx_i = (dx_1, 0, 0)$  e  $\overline{PQ} = dx_1$ . Da definição de deformação (pequena), chegamos, no nosso caso, em

$$\overline{P'Q'}^2 - \overline{PQ}^2 \sim 2e_{ij}dx_i dx_j = 2e_{11}(dx_1)^2 , \quad (5.34)$$

de onde podemos concluir que

$$\overline{P'Q'} \sim \sqrt{1 + 2e_{11}} dx_1 . \quad (5.35)$$

Se nós definirmos a extensão relativa como  $(\overline{P'Q'} - \overline{PQ})/\overline{PQ}$  e usarmos a aproximação de Taylor de primeira ordem na raiz quadrada, i.e.,  $\sqrt{y} \approx 1 + \frac{1}{2}y$ , temos a aproximação

$$e_r \sim \frac{\sqrt{1 + 2e_{11}} dx_1 - dx_1}{dx_1} = \sqrt{1 + 2e_{11}} - 1 \approx e_{11} . \quad (5.36)$$

Então o elemento  $e_{11}$  do tensor de deformação representa aproximadamente a extensão (contração) relativa do material ao longo do eixo  $x_1$ . As componentes  $e_{22}$  e  $e_{33}$  tem interpretações similares.

- Significado dos elementos  $e_{12}$ ,  $e_{13}$  e  $e_{23}$

Vamos considerar dois pontos  $Q$  e  $R$  nas proximidades do ponto  $P$ . Vamos especificar os pontos  $Q$  e  $R$  no estado inicial da seguinte maneira:

$$dx_i^Q = (dx_1, 0, 0) \quad , \quad dx_i^R = (0, dx_2, 0) . \quad (5.37)$$

Então, os vetores  $dx_i^Q$  e  $dx_i^R$  são perpendiculares. Depois da deformação, os pontos  $Q$  e  $R$  serão movidos para novas posições especificadas pelas aproximações seguintes

$$dx_i'^Q \sim dx_1 \delta_{1i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dx_1 \quad , \quad dx_i'^R \sim dx_2 \delta_{i2} + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} dx_2 . \quad (5.38)$$

Vamos agora investigar como a deformação altera a orientação das linhas  $\overline{PQ}$  e  $\overline{PR}$ , que são originalmente perpendiculares. Para isto propomos, considerar o produto escalar dos vetores  $dx_i'^Q$  e  $dx_i'^R$  dado por

$$dx_i'^Q dx_i'^R \sim \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \frac{\partial u_i}{\partial x_2} dx_1 dx_2 . \quad (5.39)$$

O último termo pode ser desconsiderado desde que consideremos as deformações pequenas e é de uma ordem mais elevada em  $|\partial u_i / \partial x_j|$ .

Do produto interno sabemos que

$$dx_i'^Q dx_i'^R = |dx_i'^Q| |dx_i'^R| \cos(\gamma) \sim 2e_{12} dx_1 dx_2 , \quad (5.40)$$

onde  $\gamma$  é o ângulo entre os vetores  $dx_i'^Q$  e  $dx_i'^R$ . Logo,

$$\cos(\gamma) \sim \frac{2e_{12} dx_1 dx_2}{|dx_i'^Q| |dx_i'^R|} . \quad (5.41)$$

De  $|dx_i'^Q|$  chegamos em

$$|dx_i'^Q| = \sqrt{(dx_1)^2 + 2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} (dx_1)^2 + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 (dx_1)^2} = dx_1 \sqrt{1 + 2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2} ,$$

onde, para  $|\partial u_i / \partial x_j| \ll 1$  e usando Taylor na raiz quadrada, temos

$$|dx_i'^Q| \approx dx_1 \left( 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \text{ e similarmente } |dx_i'^R| \approx dx_2 \left( 1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) . \quad (5.42)$$

Assim, substituindo as expressões de (5.42) em (5.41) obtemos

$$\begin{aligned} \cos(\gamma) \sim \frac{2e_{12} dx_1 dx_2}{|dx_i'^Q| |dx_i'^R|} &\approx \frac{2e_{12} dx_1 dx_2}{\left( 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \left( 1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2} = \frac{2e_{12}}{1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}} \\ &\approx 2e_{12} \left( 1 - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \approx 2e_{12} . \end{aligned} \quad (5.43)$$

Se chamamos  $\alpha_{12} = \frac{\pi}{2} - \gamma$ , temos, equação (5.43),

$$\sin \alpha_{12} \sim \alpha_{12} \approx 2e_{12} \quad \Rightarrow \quad e_{12} \approx \frac{1}{2}\alpha_{12} , \quad (5.44)$$

pois a aproximação  $\sin \alpha_{12} \sim \alpha_{12}$  é possível já que  $\gamma \sim \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha_{12} \ll 1$ .

Então, o elemento  $e_{12}$  do tensor de deformação representa metade da mudança do ângulo correto entre as direções, que eram originalmente perpendiculares. Esta mudança é chamada de “cisalhamento” e o elemento  $e_{12}$  de “deformação de cisalhamento”. Os elementos  $e_{13}$  e  $e_{23}$  tem uma interpretação similar.

### 5.1.7 Deformações quadráticas

A superfície de um tensor de deformação pode ser escrita na forma

$$e_{ij}x_ix_j = \pm 1 , \quad (5.45)$$

onde depois de uma rotação apropriada nas coordenadas, esta pode ser diagonalizada tal que

$$e'_{11}x_1'^2 + e'_{22}x_2'^2 + e'_{33}x_3'^2 = \pm 1 . \quad (5.46)$$

Os eixos desta quadrática são os eixos principais do tensor de deformação, os valores  $e'_{11}, e'_{22}, e'_{33}$  são as *deformações principais*. As deformações de cisalhamento são zero no primeiro sistema de coordenadas.

### 5.1.8 Dilatação de volume

Vamos considerar o sistema de coordenadas Cartesianas  $x_i$  escolhido tal que este eixo coincide com o eixo principal do tensor de deformação e vamos considerar uma mudança de um volume elementar  $dV$  durante a deformação. No estado inicial nós temos

$$dV = dx_1 dx_2 dx_3 , \quad (5.47)$$

que depois da deformação,  $dV$  mudará para  $dV'$

$$dV' = dx'_1 dx'_2 dx'_3 . \quad (5.48)$$

Para  $dx'_i$  nós derivamos sobre

$$dx'_i \sim dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k . \quad (5.49)$$

Em nosso sistema de coordenadas isto dará para  $dx'_i$  (no sistema principal, as deformações de cisalhamento são zero),

$$dx'_1 \sim dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 = dx_1(1 + e_{11}) , \quad (5.50)$$

e similarmente para  $dx'_2$  e  $dx'_3$ . Para  $dV'$  temos

$$dV' \sim (1 + e_{11})(1 + e_{22})(1 + e_{33})dx_1dx_2dx_3 \sim dV + (e_{11} + e_{22} + e_{33})dV , \quad (5.51)$$

onde foi ignorado os termos de maior ordem (como  $e_{11}e_{22}, \dots$ ). Logo,

$$\theta = \text{div } \vec{u} = (e_{11} + e_{22} + e_{33}) \sim \frac{dV' - dV}{dV} . \quad (5.52)$$

A quantidade  $\theta$  é chamada de *dilatação de volume* ou abreviadamente *dilatação*. Ela representa aproximadamente a mudança relativa do volume durante a deformação. Ela não depende das deformações de cisalhamento  $e_{12}$ ,  $e_{13}$  e  $e_{23}$  porque um cisalhamento não altera o volume de um corpo. Como  $\theta$  é o traço do tensor de deformação que é invariante sob transformação de coordenadas, temos que  $\theta$  descreve a dilatação de volume em qualquer sistema de coordenadas cartesianas.

## 5.2 Tensor de Tensão

A resistência que um material tem em sofrer deformações é causada por forças, as quais são chamadas de *tensões internas*. Assim, quando não há deformação, elas são nulas. O raio de ação dessas forças é pequeno. Podemos pensar que essa região de ação gera uma superfície imaginária, dividindo um elemento de volume deformado do corpo do restante deste. Por causa disto, elas também são conhecidas como *forças de superfície*.

O elemento de volume considerado também pode ser afetado por forças de alto raio de ação, como é o caso das forças gravitacional e eletromagnética.

Vamos considerar um elemento de volume  $\Delta V$ , de um material deformado cortado por uma superfície  $\Delta S$  tão pequena, que as forças de superfície agindo sobre  $\Delta S$  podem ser substituídas por uma força equivalente  $\Delta \vec{T}$  agindo sobre  $\Delta S$ . Definimos então,

$$\vec{T} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \Delta \vec{T} / \Delta S , \quad (5.53)$$

onde  $\vec{T}$  é o *vetor de tensão* ou *tração*. Daqui por diante, quando tratarmos sobre tensão, estaremos tratando da densidade destas forças, ou seja, densidade das forças superficiais.

A tração  $\vec{T}$  depende da orientação da superfície  $\Delta S$  num ponto dado. Vamos então denotar a tração que age sobre uma superfície  $\Delta S$  com normal unitária  $\vec{n}$  por  $\vec{T}(\vec{n})$ . Pelo princípio da ação e reação, a tração  $\vec{T}(-\vec{n})$  agindo no outro lado da superfície  $\Delta S$  deve ser da forma

$$\vec{T}(-\vec{n}) = -\vec{T}(\vec{n}) . \quad (5.54)$$

A tração geralmente não coincide com a direção da normal  $\vec{n}$ . A componente de  $\vec{T}(\vec{n})$  na normal  $\vec{n}$  é chamada *tensão*, quando  $\vec{T}(\vec{n})$  tende a separar as duas partes do elemento de volume, ou *pressão* no caso contrário.

Vamos introduzir as componentes de tensão  $\tau_{ij}$  como as componentes da tração agindo sobre um elemento de superfície, cuja normal está ao longo do eixo  $x_i$ , isto é,  $\tau_{ij} = T_j(\vec{n}_i)$ ,

onde  $\vec{n}_i$  é o vetor normal ao plano de coordenadas perpendicular ao eixo  $x_i$ . Vamos tentar determinar a relação entre a tração  $T_i(\vec{n})$  e a componente de tensão  $\tau_{ij}$ . Consideremos nosso elemento de volume  $\Delta V$  como sendo um tetraedro limitado pela superfície  $\Delta S$ , caracterizado pelas normais  $\vec{n}_i$  e respectivas superfícies  $\Delta S_i$ , nos planos perpendiculares aos eixos de coordenadas. Para um tetraedro pequeno o suficiente, as forças no objeto (proporcionais ao tamanho do volume) são desprezíveis comparadas às forças na superfície (proporcionais ao tamanho da superfície). Então, a condição de equilíbrio para o tetraedro pode ser escrita como

$$T_i(\vec{n})\Delta S + T_i(-\vec{n}_1)\Delta S_1 + T_i(-\vec{n}_2)\Delta S_2 + T_i(-\vec{n}_3)\Delta S_3 = 0 . \quad (5.55)$$

Como  $T_i(\vec{n}_j) = T_i(-\vec{n}_j)$  e  $T_i(\vec{n}_j) = \tau_{ji}$ , podemos reescrever a equação como

$$T_i(\vec{n})\Delta S - \tau_{1i}\Delta S_1 - \tau_{2i}\Delta S_2 - \tau_{3i}\Delta S_3 = 0 . \quad (5.56)$$

Usando a seguinte relação entre  $\Delta S$  e  $\Delta S_j$

$$\Delta S_j = \Delta \vec{S} \cdot \vec{n}_j = \Delta S \vec{n} \cdot \vec{n}_j = \Delta S n_j , \quad (5.57)$$

na condição de equilíbrio, obtemos

$$T_i(\vec{n}) = \tau_{ji}n_j \quad (5.58)$$

Esta relação mostra que a tração agindo numa superfície arbitrária, especificada por uma normal unitária  $\vec{n}$  pode ser expressada em termos das 9 componentes de tensão  $\tau_{ji}$ . Considerando agora um eixo cartesiano rotacionado  $x'_i$  e escolhendo um eixo  $x'_k$  ao longo da normal, podemos escrever

$$T'_m(x'_k) = \alpha_{mi}T_i(\vec{n}) = \alpha_{mi}\tau_{ji}n_j = \alpha_{mi}\tau_{ji}\alpha_{lj}n'_l = \alpha_{mi}\alpha_{lj}\tau_{ji}\delta_{lk} = \alpha_{mi}\alpha_{kj}\tau_{ji} . \quad (5.59)$$

Isto quer dizer que  $T'_m(x'_k)$  é a  $m$ -ésima componente da tração agindo sobre o elemento de superfície perpendicular ao eixo  $x'_k$ .  $T'_m(x'_k)$  é então uma componente de tensão  $\tau'_{km}$  e temos

$$\tau'_{km} = \alpha_{kj}\alpha_{mi}\tau_{ji} . \quad (5.60)$$

Mas isto é a equação de transformação de um tensor de grau dois. Logo, as componentes de tensão são elementos de um tensor. Chamamos isto de *tensor de tensão*  $\tau_{ij}$ . Ele descreve o campo de tensão em uma vizinhança do ponto que é especificado.

### 5.2.1 Condição de Equilíbrio

Vamos considerar um pequeno volume  $V$  de um material deformado em equilíbrio estático. O volume  $V$  é limitado por uma superfície  $S$ , caracterizada por uma normal unitária externa  $\vec{n}$ . Como o volume pode ser considerado rígido, as condições de equilíbrio de um corpo rígido podem ser aplicadas a  $V$ . Para isso, é necessário que a soma de todas

as forças agindo sobre  $V$  e de todos seus momentos desapareçam. Denotando a força resultante do volume por  $f_i$ , escrevemos estas condições como

$$\begin{aligned} \iiint_V f_j dV + \iint_S T_j(\vec{n}) dS &= 0 , \\ \iiint_V \varepsilon_{ijk} X_j f_k dV + \iint_S \varepsilon_{ijk} X_j T_k(\vec{n}) dS &= 0 , \end{aligned}$$

onde o símbolo  $X_i$  denota o vetor radial de um ponto deslocado do volume  $V$  nas coordenadas de *Euler*,  $X_i = x_i + u_i$ . Os argumentos das forças  $f_i$  e  $T_i(\vec{n})$  também são consideradas nas coordenadas de Euler.

Usando o resultado (5.58), podemos reescrever a primeira condição na forma

$$\iiint_V f_j dV + \iint_S \tau_{ij} n_i dS = 0 . \quad (5.61)$$

Aplicando agora o Teorema de Gauss na integral de superfície, obtemos

$$\iiint_V (f_j + \partial \tau_{ij} / \partial X_i) dV = 0 . \quad (5.62)$$

Como o integrando em (5.62) é uma função contínua nas variáveis espaciais e o volume pode ser escolhido arbitrariamente, podemos escrever para qualquer ponto do volume deformado

$$f_j + \partial \tau_{ij} / \partial X_i = 0 . \quad (5.63)$$

Assumindo que  $\partial \tau_{ij} / \partial X_k$  são pequenas e que seus produtos com  $\partial u_i / \partial x_j$  são desprezíveis, podemos escrever

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial X_k} \frac{\partial X_k}{\partial x_i} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial X_k} \left( \delta_{ik} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \sim \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial X_i} . \quad (5.64)$$

Substituindo (5.64) em (5.63), obtemos

$$f_j + \tau_{ij,i} = 0 , \quad (5.65)$$

que é a *equação de equilíbrio estático* (na forma diferencial) de um material deformado.

Agora, analogamente ao que foi feito para a condição sobre as forças, façamos para a condição sobre os momentos, isto é, usando o resultado (5.58) escrevemos

$$\iiint_V \varepsilon_{ijk} X_j f_k dV + \iint_S \varepsilon_{ijk} X_j \tau_{lk} n_l dS = 0 . \quad (5.66)$$

Aplicando o Teorema de Gauss na integral de superfície, obtemos

$$\begin{aligned} \iint_S \varepsilon_{ijk} X_j \tau_{lk} n_l dS &= \iiint_V \varepsilon_{ijk} \partial (X_j \tau_{lk}) / \partial X_l dV \\ &\quad - \iiint_V \varepsilon_{ijk} (\delta_{lj} \tau_{lk} + X_j \tau_{lk,l}) dV \\ &\quad - \iiint_V \varepsilon_{ijk} \tau_{jk} dV - \iiint_V \varepsilon_{ijk} X_j f_k dV . \end{aligned} \quad (5.67)$$

Na última passagem, usamos a equação (5.65). Então, a equação (5.66) toma a forma

$$\iiint_V \varepsilon_{ijk} \tau_{jk} dV = 0 . \quad (5.68)$$

Como  $V$  é arbitrário, podemos escrever para qualquer ponto do material em equilíbrio

$$\varepsilon_{ijk} \tau_{jk} = 0 . \quad (5.69)$$

Usando as propriedades do símbolo de *Levi-Civita*, obtemos

$$\tau_{jk} - \tau_{kj} = 0 . \quad (5.70)$$

Portanto, o *tensor de tensão* é simétrico. Logo, ele pode ser especificado apenas por 6 componentes independentes.

### 5.2.2 Equação de Movimento

A equação (5.65) descreve um equilíbrio estático. Para obter as equações de movimento (equação dinâmica), podemos usar o princípio de d'Alembert. Conforme este, equações estáticas tornam-se dinâmicas quando adicionamos forças inerciais às equações estáticas.

A densidade de força inercial pode ser escrita como  $\rho \partial^2 u_i / \partial t^2$ . Assim, a equação dinâmica toma a forma

$$\tilde{f}_j + \tilde{\tau}_{ij,i} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} , \quad (5.71)$$

onde as quantidades com tilda representam as forças e tensões do estado dinâmico. Desde já, podemos observar que somente forças e tensões além das do equilíbrio influenciam a propagação de ondas. Isto se conclui pelo fato de que podemos subtraír a equação (5.65) da equação (5.71), obtendo

$$(\tilde{f}_j - f_j) + (\tilde{\tau}_{ij} - \tau_{ij})_{,i} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} , \quad (5.72)$$

Simplificando a notação, denotamos daqui adiante as diferenças das forças dinâmicas de do equilíbrio por  $f_i$  e  $\tau_{ij}$ , respectivamente, assim podendo escrever equação (5.72) como

$$f_j + \tau_{ij,i} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} , \quad (5.73)$$

Esta é a *equação de movimento*, que é a equação básica para descrever a propagação de ondas. Mas antes de resolvê-la, é necessário especificar a equação em termos do deslocamento  $u_i$ . Para isto, o próximo estudo vai nos levar a uma relação entre tensão e tração.

### 5.2.3 Tensões Quadráticas

Uma superfície de tensão geralmente pode ser escrita na forma

$$\tau_{ij}x_i x_j = \pm 1 . \quad (5.74)$$

Expressões deste tipo podem ser diagonalizado por uma rotação do sistema de coordenadas. Obtém-se

$$\tau'_{11}x_1'^2 + \tau'_{22}x_2'^2 + \tau'_{33}x_3'^2 = \pm 1 . \quad (5.75)$$

Os eixos  $x'_i$  destas quadráticas são chamados de *direções principais da tensão* e os valores  $\tau'_{11}$ ,  $\tau'_{22}$  e  $\tau'_{33}$  são as *tensões principais*. As *tensões cisalhantes*  $\tau'_{12}$ ,  $\tau'_{13}$  e  $\tau'_{23}$  são nulas neste sistema de coordenadas.

## 5.3 Relações Tensão-Deslocamento

Sabemos que a tensão e o deslocamento são mutuamente dependentes. Esta relação depende do tipo de material e é, portanto, uma importante característica do material. De acordo com os tipos de relações, os materiais podem ser chamados de elásticos, viscosos, viscoelásticos e plásticos. O foco dos estudos que seguem está nos materiais elásticos, ou seja, materiais que após terem uma carga removida, voltam ao seu estado original como antes de terem a carga aplicada.

Vamos assumir que em cada ponto do meio, o tensor de tensão é unicamente determinado pelo deslocamento, isto é,

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}(e_{kl}) . \quad (5.76)$$

Assim, cada componente do tensor de tensão depende geralmente de cada componente do tensor de deslocamento, e essa dependência é geralmente não linear.

Porém, até agora supomos que as deformações são pequenas ( $e_{ij} \ll 1$ ) e negligenciamos termos de ordem maior do que um. Assim, para manter a consistência com o desenvolvimento até agora, devemos linearizar a relação acima. Mais ainda, desde que consideramos  $\tau_{ij}$  como uma perturbação do estado inicial, nós podemos colocar  $\tau_{ij}(0) = 0$ . Desde modo, obtemos a chamada *Lei de Hooke generalizada*

$$\tau_{ij}(x_m) = c_{ijkl}(x_m)e_{kl}(x_m) , \quad (5.77)$$

onde  $c_{ijkl}$  são constantes de proporcionalidade, chamadas *parâmetros elásticos* ou *Tensor de Elasticidade*.

Deve se observar que a linearização que deu origem à Lei de Hooke generalizada não se justifica somente pela matemática. Muitos experimentos de elasticidade, como por exemplo o esticamento de um haste, mostram na prática a existência de uma relação linear entre a deformação de um corpo elástico e a tensão necessária para deformá-lo, pelo menos enquanto esta deformação realmente é elástica, i.e., depois da carga de tensão removida, o corpo volta à sua forma original. Esta observação de linearidade é conhecida como *Lei de Hooke* e deu origem ao nome da relação (5.77).



## 5.4 Energia de Deformação

Forças externas atuando sobre um corpo deformam o mesmo. Levando em conta este fenômeno a energia interna e a temperatura do corpo podem mudar. No que se segue consideramos processos adiabáticos, isto é, não há troca de calor com o meio. O fenômeno de onda pode ser considerado como um processo adiabático desde que as oscilações sejam tão rápidas que não há troca de calor. A primeira lei da termodinâmica diz

$$dU + dK = dA.$$

Essa equação no diz que as energias interna  $U$  e cinética  $K$  são balanceadas pelo trabalho  $A$  das forças no volume e na superfície agindo no volume. Pela equação acima deduzimos que a energia interna provém da energia potencial, então introduzimos

$$U = \iiint_V W dV,$$

onde  $W$  é chamada densidade de energia de deformação.

### 5.4.1 Trabalho

Associando as equações já existentes obtemos,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V W dV + \frac{dK}{dt} = \iiint_V \frac{\partial W}{\partial t} dV + \frac{dK}{dt}.$$

Calculemos agora o trabalho feito pelas forças de superfície e volume. O deslocamento de um ponto do volume  $V$  no intervalo de tempo  $(t, t + dt)$  é  $\frac{\partial u_i}{\partial t} dt$ . Portanto o trabalho das forças de volume  $f_i$  em um dado intervalo de tempo e um volume, então  $f_i \frac{\partial u_i}{\partial t} dt$ . Da mesma forma teremos para o trabalho das forças de superfície  $T_i(\vec{n}) \frac{\partial u_i}{\partial t} dt$ . Portanto para  $\frac{dA}{dt}$  teremos,

$$\frac{dA}{dt} = \iiint_V f_i \frac{\partial u_i}{\partial t} dV + \iint_S \tau_{ji} n_j \frac{\partial u_i}{\partial t} dS,$$

onde  $n_j$  é o vetor unitário externo. Aplicando a lei de Gauss, e utilizando a equação do movimento  $f_i + \tau_{ji,i} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$  temos,

$$\begin{aligned} \iint_S \tau_{ji} n_j \frac{\partial u_i}{\partial t} dS &= \iiint_V \left( \tau_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial t} \right)_{,j} dV = \iiint_V \left( \tau_{ji,j} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} \tau_{ji} \right) dV = \\ &= - \iiint_V f_j \frac{\partial u_j}{\partial t} dV + \iiint_V \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \frac{\partial u_j}{\partial t} dV + \iiint_V \tau_{ij} \frac{\partial}{\partial t} e_{ij} dV. \end{aligned}$$

Para encontrarmos o último termo na terceira igualdade utilizamos o fato de que  $\text{rot } \vec{u} = 0$ , ou seja não há rotação.

Logo,

$$\frac{dA}{dt} = \iiint_V \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \frac{\partial u_j}{\partial t} dV + \iiint_V \tau_{ij} \frac{\partial}{\partial t} e_{ij} dV.$$

### 5.4.2 Energia Cinética

A energia cinética do volume é dada por

$$K = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} dV,$$

de onde concluímos que

$$\frac{dK}{dt} = \iiint_V \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \frac{\partial u_i}{\partial t} dV.$$

Agora a primeira lei da termodinâmica pode ser escrita da seguinte forma

$$\iiint_V \frac{\partial W}{\partial t} dV - \iiint_V \tau_{ji} \frac{\partial}{\partial t} e_{ji} dV = 0.$$

Como o volume é arbitrário então para equação acima ter solução, devemos ter

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \tau_{ij} \frac{\partial}{\partial t} e_{ij}.$$

Da equação acima e do fato que  $W$  é uma função de  $e_{ij}$  concluímos que

$$\tau_{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}}.$$

Como  $\tau_{ij}$  é uma função linear de  $e_{kl}$ , teremos que a derivada da enrgia de deformação deve ser linear com  $e_{kl}$ , logo  $W$  é uma função quadrática de  $e_{kl}$ . Definiremos o estado sem deformação, isto é,  $e_{kl} = 0$ , a energia de deformação zero,  $W = 0$ . Então  $W$  é uma função quadrática homogênea de  $e_{kl}$ . De acordo coma teorema de Euler para funções homogêneas

$$\frac{\partial W}{\partial e_{kl}} e_{kl} = 2W.$$

A partir disto temos,

$$W = \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial e_{ij}} e_{ij} = \frac{1}{2} \tau_{ij} e_{ij} = \frac{1}{2} c_{ijkl} e_{kl} e_{ij}.$$

Esta é a equação da densidade de energia de deformação.

## 5.5 Fluxo de Energia

Agora consideramos novamente um volume  $V$  arbitrário. Nesta seção estamos interessados em investigar como é mantido o fluxo de energia em um volume  $V$  deformado. A energia elástica  $\epsilon$  (a soma das energias cinética e de deformação) no volume  $V$ , e sendo  $E = (\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \tau_{ij} e_{ij})$ , é

$$\epsilon = \iiint_V E dV = \frac{1}{2} \iiint_V \left( \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \tau_{ij} e_{ij} \right) dV.$$

A derivada de  $\epsilon$  é

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \iiint_V \frac{\partial E}{\partial t} dV = \iiint_V \left[ \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \tau_{ij} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right] dV.$$

Note o segundo termo sai da definição de  $\tau_{ij}$ , quando aplicamos a regra do produto para derivadas.

A segunda função do integrando da equação acima pode ser reformulada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \iiint_V \tau_{ij} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dV &= \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) dV - \iiint_V \frac{\partial u_i}{\partial t} \tau_{ij,j} dV = \\ &= - \iiint_V \frac{\partial S_j}{\partial x_j} - \iiint_V \frac{\partial u_i}{\partial t} \left( \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - f_i \right) dV, \end{aligned}$$

onde  $S_j = -\tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial t}$  e  $\tau_{ij,j}$  é dada pela equação dinâmica  $\tau_{ij,j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - f_i$ .

Substituindo esta expressão para  $d\epsilon/dt$ , teremos

$$\frac{d\epsilon}{dt} + \iiint_V \text{div} \vec{S} dV = \iiint_V \frac{\partial u_i}{\partial t} f_i dV.$$

Para dar uma interpretação física de  $S_j = -\tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial t}$  tomaremos  $f_i = 0$ . Então a equação acima pode ser reescrita da seguinte forma

$$\frac{d\epsilon}{dt} + \iiint_V \text{div} \vec{S} dV = 0 \Leftrightarrow \frac{d\epsilon}{dt} + \iint_{\Sigma} S_j n_j d\Sigma = 0,$$

onde  $\Sigma$  denota a superfície limitando o volume. As equações acima dizem que a derivada da energia  $\epsilon$  no volume  $V$  é balanceada pelo fluxo do vetor  $\vec{S}$  na superfície  $\Sigma$ . Portanto chamaremos o vetor  $\vec{S}$  de fluxo de energia elástica. A direção do vetor  $\vec{S}$  especifica a direção do fluxo de energia em um dado ponto, e a seu módulo corresponde a quantidade de energia que passa em um intervalo de tempo através da superfície perpendicular a  $\vec{S}$ .

Podemos escrever as equações acima em forma de uma equação de conservação. No caso  $f_i = 0$  temos,

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial S_j}{\partial x_j} = 0,$$

e no caso de  $f_i \neq 0$  temos,

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial S_j}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial t} f_i.$$

## 5.6 Parâmetros Elásticos

Nós observamos que  $c_{ijkl}$  são elementos de um tensor de quarta ordem com 81 elementos. Mostramos aqui que nem todos eles são independentes por causa da simetria da matriz de parâmetros  $c_{ijkl}$  em alguns índices.

Devido a simetria do tensor de tensão e do tensor de deformação, nós chegamos imediatamente da lei de Hooke que

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} . \quad (5.78)$$

Outras condições de simetria seguem da expressão para energia de deformação

$$c_{ijkl} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial e_{kl}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{kl} \partial e_{ij}} = c_{klij} . \quad (5.79)$$

Todas as três condições de simetria reduzem os parâmetros elásticos independentes de 81 para 21.

Por causa da simetria nos índices  $i, j$  e  $k, l$ , existe 6 componentes de  $i, j$  e  $k, l$  (ao invés de 9 no caso não simétrico) especificando parâmetros elásticos independentes. Estas 6 combinações de  $i, j$  e  $k, l$  são algumas vezes substituídas por inteiros de 1 a 6 e o tensor de parâmetros elásticos é então substituído por uma matriz 6 x 6. Denotamos os elementos desta matriz por  $C_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 6$ ; os índices Gregos diferindo assim dos índices em Latim que assumem valores 1,2,3). O índice  $\alpha$  corresponde aos índices  $i, j$  e  $\beta$  aos índices  $k, l$  para o tensor  $c_{ijkl}$ . Os índices são relacionados como segue

$$1 \leftrightarrow 1, 1 \quad 2 \leftrightarrow 2, 2 \quad 3 \leftrightarrow 3, 3 \quad 4 \leftrightarrow 2, 3 \quad 5 \leftrightarrow 3, 1 \quad 6 \leftrightarrow 1, 2 .$$

Devido a simetria  $c_{ijkl} = c_{klij}$  da matriz  $c_{ijkl}$  a matriz  $C_{\alpha\beta}$  é também simétrica  $C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}$  mas não é um tensor. Esta substituição de índices é chamada *notação comprimida*.

Podemos introduzir uma notação comprimida similar para os elementos do tensor de deformação e de tensão,  $e_{kl}$  e  $\tau_{ij}$ . Introduzimos  $e_\beta$  e  $\tau_\alpha$  de tal maneira que a Lei de Hooke generalizada e a expressão para a energia de deformação tem a forma

$$\tau_\alpha = C_{\alpha\beta} e_\beta \quad W = \frac{1}{2} \tau_\alpha e_\alpha . \quad (5.80)$$

Por comparação da expressão para  $W$  na notação padrão e na notação comprimida encontramos que

$$\begin{array}{cccccc} e_{11} \leftrightarrow e_1 & e_{22} \leftrightarrow e_2 & e_{33} \leftrightarrow e_3 & 2e_{23} \leftrightarrow e_4 & 2e_{13} \leftrightarrow e_5 & 2e_{12} \leftrightarrow e_6 \\ \tau_{11} \leftrightarrow \tau_1 & \tau_{22} \leftrightarrow \tau_2 & \tau_{33} \leftrightarrow \tau_3 & \tau_{23} \leftrightarrow \tau_4 & \tau_{13} \leftrightarrow \tau_5 & \tau_{12} \leftrightarrow \tau_6 . \end{array}$$

A energia de deformação é mínima se não existe deformação. Para este caso definimos  $W = 0$ . Isto significa que para alguma deformação a energia de deformação deve ser positiva,  $W > 0$ . Esta desigualdade implica definições positivas de forma quadrática

$$W = \frac{1}{2} C_{\alpha\beta} e_{\alpha} e_{\beta} > 0 . \quad (5.81)$$

Como consequência disto, todo menor principal da matriz  $C_{\alpha\beta}$  são positivos (menor principal de uma matriz é a matriz que permanece depois da eliminação das  $n$  últimas linhas e colunas). Isto significa que todos os elementos da diagonal da matriz  $C_{\alpha\beta}$  devem ser positivos. Outra consequência da definição positiva da expressão para a energia de deformação é

$$|C_{\alpha\beta}| = \det(C_{\alpha\beta}) > 0 , \quad (5.82)$$

que nos indica que a matriz inversa de  $C_{\alpha\beta}$  existe tal que  $C_{\alpha\beta} S_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma}$ . A matriz  $6 \times 6$   $S_{\beta\gamma}$  tem sua equivalência no tensor  $s_{ijkl}$  de quarta ordem que tem as mesmas propriedades de simetria que o tensor  $c_{ijkl}$ . Com esta matriz a Lei de Hooke generalizada pode ser escrita como

$$e_{ij} = s_{ijkl} \tau_{ij} . \quad (5.83)$$

Vamos notar que  $s_{ijkl}$  é conhecido como *tensor compliance* (força de resistência de um material contra a deformação).

## 5.7 Vários tipos de simetria anisotrópica

Um material anisotrópico pode ser de diferentes graus de simetria. Com o crescimento do grau de simetria, o número de parâmetros elásticos independentes decresce. Sobre simetria de um material nós entendemos que depois de uma transformação de um sistema de coordenada em que o tensor  $c_{ijkl}$  é especificado, suas propriedades permanecem as mesmas. Nós podemos tratar da simetria reflexiva ou simetria com respeito a uma rotação em torno de um eixo.

Há um sistema inteiro de materiais anisotrópicos com graus diferentes de simetria. O material mais geral que é especificado por 21 parâmetros elásticos independentes é chamado *triclinic*. O material que é especificado por 13 parâmetros independentes é chamado *monoclinic*. Os sistemas não são considerados em aplicações sísmicas.

A mais complexa anisotropia considerada algumas vezes em sismologia é a simetria *orthorhombic* com 9 parâmetros elásticos independentes. Esta é caracterizada por três

eixos de simetria mutuamente perpendiculares. Uma rotação de  $180^\circ$  em torno de algum eixo não altera o tensor  $c_{ijkl}$ . Esta condição leva a matriz  $C_{\alpha\beta}$  em

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix}. \quad (5.84)$$

A matriz acima é completamente especificada quando o sistema de coordenadas em que esta é indicada é também dado. No caso acima, o sistema de coordenada foi escolhido tal que os eixos de coordenada coincide com os eixos de simetria. Em um sistema de coordenadas diferente haveria elementos menores que zero mas o número de parâmetros independentes permaneceria 9.

A simetria anisotrópica freqüentemente usada é a *simetria hexagonal*. Este sistema tem uma simetria mais elevada que um ortorhombic. Este sistema tem um eixo de simetria tal que a rotação por um ângulo arbitrário ao redor deste eixo não altera o tensor  $c_{ijkl}$ . Isto significa que, em um plano perpendicular a este eixo, o tensor comporta-se isotropicamente. Por causa disto, a simetria é também algumas vezes chamada de *isotropia transversal*, especialmente em casos em que o eixo de simetria rotacional coincide com o eixo  $x_3$  do sistema de coordenadas. A matriz  $C_{\alpha\beta}$  de um material simétrico hexagonalmente, com o eixo vertical de simetria, tem a forma

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{44} & 0 \\ & & & & & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{pmatrix}. \quad (5.85)$$

A simetria hexagonal é descrita por 5 parâmetros elásticos independentes. Novamente o sistema de coordenadas em que a matriz  $C_{\alpha\beta}$  é definida deve ser especificado. No caso acima, o eixo  $x_3$  coincide com o eixo de simetria rotacional, os eixos  $x_1$  e  $x_2$  estão situados no plano de isometria.

Algumas vezes, a então chamada notação de Love para cinco parâmetros elásticos independentes de um meio isotrópico transversal é usada. Nele

$$A = C_{11}, \quad C = C_{33} \quad L = C_{44} \quad N = C_{66}, \quad F = C_{13}. \quad (5.86)$$

O meio isotrópico possui a mais elevada simetria entre os materiais anisotrópicos. Material isotrópico é invariante para alguma rotação. Este é descrito por dois parâmetros

elásticos independentes. A matriz  $C_{\alpha\beta}$  para um material isotrópico tem a forma

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{11} - 2C_{44} & C_{11} - 2C_{44} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{11} - 2C_{44} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{44} & 0 \\ & & & & & C_{44} \end{pmatrix}. \quad (5.87)$$

Em vez de  $C_{11}$  e de  $C_{44}$ , os então chamados parâmetros de Lamé  $\lambda$  e  $\mu$  são usados. A matriz  $C_{\alpha\beta}$  tem então a forma

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{pmatrix}. \quad (5.88)$$

A lei de Hooke pode agora ser reescrita como segue

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= \tau_1 = \lambda(e_1 + e_2 + e_3) + 2\mu e_1 = \lambda\theta + 2\mu e_{11}, \\ \tau_{22} &= \tau_2 = \lambda(e_1 + e_2 + e_3) + 2\mu e_2 = \lambda\theta + 2\mu e_{22}, \\ \tau_{33} &= \tau_3 = \lambda(e_1 + e_2 + e_3) + 2\mu e_3 = \lambda\theta + 2\mu e_{33}, \\ \tau_{23} &= \tau_4 = \mu e_4 = 2\mu e_{23}, \\ \tau_{13} &= \tau_5 = \mu e_5 = 2\mu e_{13}, \\ \tau_{12} &= \tau_6 = \mu e_6 = 2\mu e_{12}, \end{aligned}$$

ou para uma equação

$$\tau_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad (5.89)$$

onde usamos  $\theta = e_{ii}$ .

Para o tensor de parâmetros elásticos  $c_{ijkl}$  chegamos (usando  $2e_{ij} = e_{ij} + e_{ji}$ )

$$\begin{aligned} c_{ijkl} &= \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial e_{kl}} = \lambda \frac{\partial e_{mm}}{\partial e_{kl}} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial e_{ij}}{\partial e_{kl}} + \frac{\partial e_{ji}}{\partial e_{kl}} \right) \\ &= \lambda \delta_{kl} \delta_{ij} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}). \end{aligned} \quad (5.90)$$

Vamos notar que a lei de Hooke para meio anisotrópico e isotrópico pode também ser reescrita em termos de vetor de deslocamento. Temos então

$$\text{anisotrópico:} \quad \tau_{ij} = \frac{1}{2} c_{ijkl} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) = c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}, \quad (5.91)$$

$$\text{isotrópico:} \quad \tau_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (5.92)$$

onde  $\theta = \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$ .

Com as relações (5.90) e (5.92), podemos especificar a forma inversa da lei de Hooke para o caso isotrópico,

$$e_{ij} = s_{ijkl}\tau_{kl} , \quad (5.93)$$

isto é, determinar a forma isotrópica do tensor  $s_{ijkl}$ . Vamos primeiro determinar  $\tau_{ii}$ ,

$$\tau_{ii} = (3\lambda + 2\mu)\theta . \quad (5.94)$$

Assumindo que  $3\lambda + 2\mu \neq 0$ , podemos escrever

$$\theta = \frac{\tau_{ii}}{3\lambda + 2\mu} . \quad (5.95)$$

Se substituirmos na lei de Hooke, achamos para  $e_{ij}$

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu}\tau_{ij} - \lambda\delta_{ij}\frac{\tau_{kk}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} . \quad (5.96)$$

Usando as identidades  $\tau_{ij} = \delta_{ik}\delta_{jl}\tau_{kl}$  e  $\tau_{kk} = \delta_{kl}\tau_{kl}$ , temos similarmente

$$e_{ij} = \left( \frac{\delta_{ik}\delta_{jl}}{2\mu} - \frac{\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \right) \tau_{kl} . \quad (5.97)$$

Logo podemos escrever o tensor  $s_{ijkl}$  em um meio isotrópico como

$$s_{ijkl} = \frac{\delta_{ik}\delta_{jl}}{2\mu} - \frac{\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} . \quad (5.98)$$

Vamos agora escolher um sistema de coordenadas tal que este coincide com o eixo principal do tensor de deformação. Então temos que  $e_{12} = e_{13} = e_{23} = 0$ . Da lei de Hooke para meio isotrópico chegamos imediatamente que  $\tau_{12} = \tau_{13} = \tau_{23} = 0$ . Isto significa que nosso sistema de coordenadas também coincide com o eixo principal do tensor de deformação. Em um meio isotrópico, o eixo principal de um tensor de deformação coincide com o eixo principal do tensor de tensão.

## 5.8 Parâmetros Elásticos para Meios Isotrópicos

Como foi visto anteriormente, o meio isotropico pode ser descrito por dois parâmetros,  $\mu$  e  $\lambda$ . Pode-se introduzir outros parâmetros além destes, mas começemos estudando a rigidez  $\mu$ . Pela lei de Hooke

$$\tau_{ij} = c_{ijkl}e_{kl}, \text{ onde } c_{ijkl} = \lambda\delta_{kl}\delta_{ij} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il}) \quad (5.99)$$

para  $i \neq j$  temos

$$\tau_{ij} = 2\mu e_{ij}. \quad (5.100)$$



Vemos que a rigidez  $\mu$  relaciona a tensão de cisalhamento com a deformação de cisalhamento, e às vezes  $\mu$  é chamado de módulo de cisalhamento. Juntamente com o fato da energia de deformação  $W$  ser definida positiva, a rigidez de um sólido isotrópico é sempre positiva,  $\mu > 0$ . Agora, vejamos o módulo bulk  $k$  e a compressibilidade  $\kappa$ . Considere uma deformação esfericamente simétrica, onde  $e_{11} = e_{22} = e_{33} \neq 0$  e  $e_{12} = e_{13} = e_{23} = 0$ , que significa que o material foi estirado igualmente em todas as direções. Neste caso, a tensão correspondente é chamada hidrostática. Pela lei de Hooke para meios isotrópicos temos, como visto anteriormente

$$\tau_{ii} = (3\lambda + 2\mu)\theta = 3k\theta, \quad k = \lambda + 2/3\mu. \quad (5.101)$$

O módulo bulk  $k$  também é conhecido por incompressibilidade e é sempre positivo, então uma tensão positiva  $\tau_{ii} > 0$  causa uma dilatação positiva  $\theta > 0$ .

A compressibilidade  $\kappa$  é definida como

$$\kappa = \frac{1}{k}. \quad (5.102)$$

Considere agora uma haste orientada ao longo do eixo  $x_1$  e puxada nesta direção, provocando uma tensão ao longo de  $x_1$  e portanto  $\tau_{11} \neq 0$ , e considere também que todos os outros componentes do tensor de tensão são nulos. Já vimos da lei de Hooke que

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \frac{1}{2\mu}\tau_{ij} - \lambda\delta_{ij}\frac{\tau_{kk}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \implies \\ e_{11} &= \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}\tau_{11}, \quad e_{22} = e_{33} = -\frac{\lambda\tau_{11}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad e_{12} = e_{13} = e_{23} = 0. \end{aligned} \quad (5.103)$$

Introduzimos agora os parâmetros  $E$  e  $\sigma$  da seguinte forma,

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= Ee_{11}, \quad \sigma = -\frac{e_{22}}{e_{11}} = -\frac{e_{33}}{e_{11}} \implies \\ E &= \mu\frac{(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \sigma = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \end{aligned} \quad (5.104)$$

onde  $E$  é chamado de módulo de Young e representa a razão entre a tensão e a extensão relativa causada pela tensão e  $\sigma$  é o raio de Poisson que representa a razão entre o raio da contração relativa da espessura da haste e a sua extensão relativa, respectivamente. Por definição são ambos positivos. Para  $\lambda$  grande e/ou  $\mu$  pequeno temos  $0 < \sigma < 1/2$ , e portanto,  $\lambda > 0$ .

### 5.8.1 Unidades, Valores Numéricos

Da lei de Hooke vemos que os parâmetros  $c_{ijkl}$ ,  $\mu$  e  $\lambda$  possuem as mesmas unidades da tensão, ou seja, são medidos em Pascal ( $1Pa = Kgm^{-1}s^{-2}$ ). Por suas definições  $k$  e  $E$  também o são. O raio de Poisson e  $\sigma$  são adimensionais e  $\kappa$  é medido em  $(Pa)^{-1}$ .

## 5.9 Equações Elastodinâmicas

A teoria estudada até agora envolve propagação de ondas em sólidos elásticos. No entanto, às vezes precisamos considerar propagação de ondas através de fluidos elásticos, como por exemplo os oceanos e o núcleo externo da Terra. Às vezes a propagação em materiais sólidos é também considerada como propagação em fluidos (o então chamado caso acústico em sismologia de reflexão). Podemos derivar as equações de movimento para fluidos de equações hidromecânicas. Outra maneira é fazer  $\mu \rightarrow 0$  nas equações obtidas anteriormente.

### 5.9.1 Equações Elastodinâmicas para Meios Sólidos

Introduzimos a forma geral da lei de Hooke generalizada

$$\tau_{ij} = c_{ijkl}e_{kl} = c_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l},$$

na equação do movimento

$$\tau_{ji,j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

e obtemos a forma mais geral da equação elastodinâmica ou equação da onda elástica

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (5.105)$$

Como  $c_{ijkl} = c_{ijkl}(x_m)$  e  $\rho = \rho(x_m)$  esta equação descreve um meio anisotrópico não-homogêneo geral. Esta é uma equação diferencial parcial vetorial linear de segunda ordem com coeficientes variáveis, e não possui uma solução de forma fechada. Pode-se usar métodos numéricos como FD (Diferenças Finitas) e FE (Elementos Finitos) para obter soluções numéricas. Outra maneira é aplicar métodos assintóticos de alta frequências como método de raios.

Para um meio anisotrópico homogêneo onde os parâmetros elásticos e a densidade são constantes, a equação acima fica

$$c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (5.106)$$

e agora os coeficientes são constantes. Para esta equação podemos encontrar uma solução na forma de ondas planas. A equação elastodinâmica para um meio isotrópico não homogêneo pode ser obtido inserindo

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{kl} \delta_{ij} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}) \quad (5.107)$$

onde  $c_{ijkl} = c_{ijkl}(x_m)$ ,  $\lambda = \lambda(x_m)$ ,  $\mu = \mu(x_m)$  na equação do movimento. Reescrevemos a equação do movimento da seguinte maneira

$$(c_{ijkl} u_{k,l})_{,j} + f_i = \rho u_{i,tt} \quad (5.108)$$

e obtemos

$$\lambda_{,i}u_{k,k} + \mu_{,l}u_{i,l} + \mu_{,k}u_{k,i} + \lambda u_{l,li} + \mu u_{i,li} + \mu u_{j,ij} + f_i = \rho u_{i,tt}. \quad (5.109)$$

Isto pode ser reescrito em notação vetorial se observarmos que

$$(\nabla\mu \times \text{rot}\vec{u})_i = \mu_{,k}u_{k,i} - \mu_{,i}u_{k,k}. \quad (5.110)$$

Temos então

$$(\lambda + \mu)\nabla(\text{div}\vec{u}) + \mu\Delta\vec{u} + \nabla\lambda\text{div}\vec{u} + \nabla\mu \times \text{rot}\vec{u} + 2(\nabla\mu \cdot \nabla)\vec{u} + \vec{f} = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (5.111)$$

Fazendo  $\lambda$ ,  $\mu$  e  $\rho$  constantes, isto é,  $\lambda_{,i} = \mu_{,i} = \rho_{,i} = 0$ , obtemos a equação de movimento para meios isotrópicos homogêneos,

$$(\lambda + \mu)u_{k,ki} + \mu u_{i,kk} + f_i = \rho u_{i,tt} \quad (5.112)$$

ou em notação vetorial

$$(\lambda + \mu)\nabla(\text{div}\vec{u}) + \mu\Delta\vec{u} + \vec{f} = \rho\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (5.113)$$

Ainda podemos usar a identidade

$$\Delta\vec{u} = \nabla(\text{div}\vec{u}) - \text{rot}(\text{rot}\vec{u}) \quad (5.114)$$

para reescrever como abaixo

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\text{div}\vec{u}) - \mu\text{rot}(\text{rot}\vec{u}) + \vec{f} = \rho\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (5.115)$$

### 5.9.2 Equações de Movimento para Fluidos - Caso Acústico

Como foi dito, podemos obter a equação de movimento de sólidos elásticos para fluidos fazendo  $\mu \rightarrow 0$ . Isto nos fornece  $E = 0$ ,  $\sigma = 1/2$  e  $k = \lambda$ . Nos fluidos, a tensão hidrostática e a tensão média  $\tau_{ii}/3$  normalmente são negativos, e esta última é denotada por  $-p$ , onde  $p$  é chamado de pressão. A lei de Hooke

$$\tau_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} = k\theta\delta_{ij} (\mu = 0, \lambda = k) \quad (5.116)$$

pode então ser escrita como

$$p = -k\theta \text{ ou } \theta = -\kappa p \quad (5.117)$$

Em acústica é comum trabalhar com pressão  $p$  e velocidade de partícula  $v_i = \partial u_i / \partial t$  no lugar do deslocamento  $u_i$  da partícula. Reescrevemos então a equação elastodinâmica como

$$-p_{,i} + f_i = \rho\frac{\partial v_i}{\partial t} \quad (5.118)$$

Temos então 3 componentes desconhecidas de  $v_i$  e  $p$  é a quarta quantidade desconhecida. Precisamos então de mais uma equação que é obtida derivando a lei de Hooke  $\theta = -\kappa p$  com relação ao tempo. O sistema completo com 4 equações é então

$$p_{,i} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = f_i, \quad (5.119)$$

$$v_{k,k} + \kappa \frac{\partial p}{\partial t} = 0. \quad (5.120)$$

Derivando as equações acima para  $x_i$  e  $t$  respectivamente obtemos:

$$(p_{,i} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = f_i)_{,i} \Rightarrow (p_{,i}/\rho)_{,i} + \frac{\partial v_{i,i}}{\partial t} = (f_i/\rho)_{,i}, \quad (5.121)$$

$$(v_{k,k} + \kappa \frac{\partial p}{\partial t} = 0)_{,t} \Rightarrow \frac{\partial v_{k,k}}{\partial t} + \kappa \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (5.122)$$

Então temos

$$\frac{\partial v_{k,k}}{\partial t} = -\kappa \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad (5.123)$$

portanto

$$(p_{,i}/\rho)_{,i} - \kappa \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = (f_i/\rho)_{,i}, \quad (5.124)$$

ou na forma vetorial

$$\nabla(\nabla p/\rho) - \kappa \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \nabla(\vec{f}/\rho), \quad (5.125)$$

que é a equação da onda acústica.

Caso a densidade for constante, podemos multiplicar a equação por  $\rho$  e simplificar esta expressão, obtendo

$$\nabla(\nabla p) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \nabla(\vec{f}), \quad (5.126)$$

onde introduzimos a velocidade de propagação  $c = 1/\sqrt{\kappa\rho} = \sqrt{k/\rho}$ . Equação (5.126) é a equação da onda acústica com densidade constante, muitas as vezes simplesmente denominada equação da onda.

## 5.10 Separação da equação elastodinâmica para um meio homogêneo e isotrópico

Consideramos a equação elastodinâmica para meios homogêneos e isotrópicos na notação de componentes. Em tal meio, as derivadas de  $\lambda$  e  $\mu$  são zero, fornecendo a partir da equação (5.109)

$$(\lambda + \mu)u_{k,ki} + \mu u_{i,kk} + f_i = \rho u_{i,tt}. \quad (5.127)$$

Agora, aplicamos a operação de divergência na equação acima, nos retornando

$$(\lambda + \mu)u_{k,kii} + \mu u_{i,kki} + f_{i,i} = \rho u_{i,itt}, \quad (5.128)$$

Usando a notação  $\theta = u_{k,k}$ , a equação (5.128) pode ser reescrita como

$$(\lambda + \mu)\theta_{,ii} + \mu\theta_{,kk} + f_{i,i} = \rho\theta_{,tt} \Rightarrow \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\theta_{,ii} + \rho^{-1}f_{i,i} = \theta_{,tt}.$$

Correspondentemente, aplicamos a operação de rotacional na equação (5.127), nos retornando

$$(\lambda + \mu)\epsilon_{jli}u_{k,kil} + \epsilon_{jli}\mu u_{i,kkl} + \epsilon_{jli}f_{i,l} = \rho\epsilon_{jli}u_{i,ltt}. \quad (5.129)$$

Usando a notação  $\Omega_j = \epsilon_{jli}u_{i,l}$  e notando que  $\epsilon_{jli}u_{k,kil} = 0$ , a equação (5.129) pode ser escrita como

$$\frac{\mu}{\rho}\Omega_{,kk} + \rho^{-1}\epsilon_{jli}f_{i,l} = \Omega_{j,tt}.$$

Essas equações podem se escritas na forma vetorial, obtendo

$$\alpha^2\Delta\theta + \rho^{-1}\text{div}\vec{f} = \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2},$$

onde  $\alpha^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}$ , e

$$\beta^2\Delta\vec{\Omega} + \rho^{-1}\text{rot}\vec{f} = \frac{\partial^2\vec{\Omega}}{\partial t^2},$$

onde  $\beta^2 = \frac{\mu}{\rho}$ .

As equações acima são a equação escalar da onda para  $\theta$  e a equação vetorial da onda para  $\vec{\Omega}$ .

Consideramos o caso unidimensional no qual todas as quantidades dependem somente da coordenada espacial  $x$ . Omitindo o efeito das forças sobre o corpo, isto é,  $f_i = 0$ . Então as equações acima se reduzem a forma

$$\alpha^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = 0,$$

onde  $\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x}$ , e

$$\beta^2\frac{\partial^2\vec{\Omega}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\vec{\Omega}}{\partial t^2} = 0,$$

onde  $\vec{\Omega} = (0, \frac{\partial u_3}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial x})$ .

A solução para a equação escalar tem a seguinte forma (solução de D'Alambert),

$$\theta = \theta(at + bx),$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes a serem determinadas. Inserimos a solução acima na equação escalar reduzida da onda. Temos

$$\alpha^2\theta''b^2 - a^2\theta'' = 0,$$

de onde  $b^2 = a^2/\alpha^2$ . Sem perda de generalidade podemos colocar  $a = 1$ , obtendo assim a solução mais geral para a equação da onda

$$\theta = \theta(t \pm \frac{x}{\alpha}).$$

Analogamente, para a equação vetorial da onda temos,

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}(t \pm \frac{x}{\beta}).$$

Cada uma dessas soluções descrevem duas ondas se propagando em direções opostas ao longo do eixo  $x$  com velocidades  $\alpha$  e  $\beta$ .

Deste modo, as equações descrevem ondas caracterizadas por suas velocidades  $\alpha$  e  $\beta$ . Essas velocidades são chamadas velocidades de propagação. Em um meio homogêneo e isotrópico, nós temos duas ondas independentes. Como  $\lambda$  e  $\mu$  são parâmetros elásticos positivos, é fácil reconhecer que  $\alpha > \beta$ . Porém, as ondas não só diferem por suas velocidades, mas também por suas propriedades. A onda mais rápida, que se propaga com velocidade  $\alpha$ , é uma onda longitudinal, i.e., a sua polarização é na direção de propagação. Ela é descrita pela dilatação  $\theta$ , a qual caracteriza mudanças de volume. Por essa característica, também pode ser chamada de onda compressional. Com frequência, ela é chamada na sismica de onda P, onde P vem de primária. A onda mais lenta, que se propaga com velocidade  $\beta$ , é uma onda transversal, i.e., a sua polarização é perpendicular à direção de propagação. Como ela não gera variações no volume, também pode ser chamada de onda cisalhante. Com frequência, ela é chamada na sismica de onda S, onde S vem de secundária, pois chegam depois a onda P.

Aplicando as operações de div e rot na equação elastodinâmica para um sólido homogêneo e isotrópico, nós encontramos que a equação elastodinâmica descreve duas ondas separadas. Se aplicarmos os mesmos operadores para a equação elastodinâmica para meios não-homogêneos e isotrópicos, nós não temos sucesso na separação em duas ondas. Em meios não-homogêneos, ambas ondas são acopladas. Isto significa que as ondas em meios não-homogêneos e isotrópicos não são puramente longitudinais, nem puramente transversais. Por causa disso em meios não-homogêneos e ondas P e ondas S são acopladas.

De nossa definição forma de fluido como um meio onde  $\mu = 0$  segue imediatamente que em fluidos só uma onda pode se propagar, a onda P. A velocidade da onda S em fluidos  $\beta = 0$ .

As equações da onda que nós encontramos não é a solução final para nosso problema. Nós devemos resolver então para  $\theta$  e  $\vec{\Omega}$  e então determinar o vetor de deslocamento  $\vec{u}$  de

$$\theta = \text{div} \vec{u}, \quad \vec{\Omega} = \text{rot} \vec{u}.$$

Esse procedimento complicado pode ser evitado pelo uso do teorema de Lamé. A principal idéia é expressar o vetor deslocamento satisfazendo a equação elastodinâmica como dois termos separados correspondendo as ondas P e S. De acordo com o teorema, o vetor deslocamento pode ser expresso em termos dos potenciais de Helmholtz  $\varphi$  e  $\vec{\psi}$ ,

$$\vec{u} = \text{grad} \varphi + \text{rot} \vec{\psi}, \quad \text{div} \vec{\psi} = 0,$$

com  $\varphi$  e  $\vec{\psi}$  satisfazendo a equação escalar e vetorial da onda. Isso vale se as forças sobre o corpo  $\vec{f}$  também podem ser expressas em termos de potenciais de Helmholtz

$$\vec{f} = \text{grad}\Phi + \text{rot}\vec{\Psi}, \quad \text{div}\vec{\Psi} = 0,$$

e se certas condições são satisfeitas.

Abaixo, mostramos que a condição suficiente para a equação elastodinâmica valer é que  $\varphi$  e  $\vec{\psi}$  satisfaçam as correspondentes equações da onda. Para tal, inserimos  $\vec{u}$  expressado em termos dos potenciais de Helmholtz na equação elastodinâmica

$$(\lambda + \mu)u_{k,ki} + \mu u_{i,kk} + f_i = \rho u_{i,tt}.$$

Nós temos

$$(\lambda + \mu)(\varphi_{,kki} + \epsilon_{klm}\psi_{m,lki}) + \mu(\varphi_{,ikk} + \epsilon_{ilm}\psi_{m,lkk}) + (\Phi_{,i} + \epsilon_{ilm}\Psi_{m,l}) = \rho(\varphi_{,itt} + \epsilon_{ilm}\psi_{m,ltt}),$$

que pode ser reescrita como

$$[(\lambda + 2\mu)\varphi_{,kk} + \Phi - \rho\varphi_{,tt}]_{,i} + \epsilon_{ilm}[\mu\psi_{m,kk} + \Psi_m - \rho\psi_{m,tt}]_{,l} = 0.$$

É suficiente, mas não necessário que

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)\varphi_{,kk} + \Phi - \rho\varphi_{,tt} &= 0, \\ \mu\psi_{m,kk} + \Psi_m - \rho\psi_{m,tt} &= 0, \end{aligned}$$

que na forma vetorial nos dá

$$\begin{aligned} \alpha^2 \Delta \varphi + \rho^{-1} \Phi &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \\ \beta^2 \Delta \vec{\psi} + \rho^{-1} \vec{\Psi} &= \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Essas são as equações para os potenciais de Helmholtz  $\varphi$  (ondas P) e  $\vec{\psi}$  (ondas S). Logo, o vetor deslocamento pode simplesmente ser determinado pela equação

$$\vec{u} = \text{grad}\varphi + \text{rot}\vec{\psi}.$$

### 5.10.1 A solução da Equação da Onda Acústica unidimensional

Nesta seção, resolvemos a equação da onda acústica em 1D sem fontes para um meio homogêneo, i.e., com densidade e velocidade constantes, a saber

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (5.130)$$

Para poder resolver uma equação diferencial parcial de segunda ordem, necessitamos de condições iniciais. Devemos considerar, inicialmente, as condições em  $t = 0$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x). \quad (5.131)$$

Agora, resolvemos a EDP pelo método de mudanças de variáveis, isto é, definiremos variáveis independentes entre si, como funções de  $x$  e  $t$

$$\xi = \xi(x, t) \quad \text{e} \quad \mu = \mu(x, t). \quad (5.132)$$

Particularmente,

$$\xi(x, t) = x - ct \quad \text{e} \quad \mu(x, t) = x + ct, \quad (5.133)$$

com seus respectivos operadores diferenciais

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \mu} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \mu}, \quad (5.134)$$

pois  $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial x} = 1$ .

Derivando esta relação novamente com respeito a  $x$ , obtemos para a segunda derivada

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \mu} + \frac{\partial^2}{\partial \mu^2}. \quad (5.135)$$

Analogamente em relação a  $t$

$$\frac{\partial}{\partial t} = -c \frac{\partial}{\partial \xi} + c \frac{\partial}{\partial \mu}, \quad (5.136)$$

e, derivando novamente,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \mu} + \frac{\partial^2}{\partial \mu^2}. \quad (5.137)$$

Substituindo (5.135) e (5.137) na EDP da onda (5.130), temos,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \mu} = 0. \quad (5.138)$$

Logo,  $\frac{\partial u}{\partial \mu}$  deve ser independente de  $\xi$ . Então podemos definir

$$\frac{\partial u}{\partial \mu} = \Phi(\mu), \quad (5.139)$$

onde  $\Phi(\mu)$  é uma função arbitrária de  $\mu$ . Integrando com respeito a  $\mu$

$$u(\xi, \mu) = \left( \int^\mu \Phi(\mu') d\mu' \right) + f(\xi), \quad (5.140)$$

onde  $f(\xi)$  é uma função arbitrária de  $\xi$ . Denominando a integral indefinida em (5.140) como  $g(\mu)$  temos

$$u(\xi, \mu) = f(\xi) + g(\mu), \quad (5.141)$$

em termos dessas variáveis já definidas

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct), \quad (5.142)$$



obtivemos a solução geral da equação (5.130). Esta forma revela a natureza física das soluções. Aqui, o termo  $f(x - ct)$  representa o deslocamento na direção de  $x$  positivo, com velocidade  $c$ . E similarmente, o termo  $g(x + ct)$  representa o deslocamento na direção oposta, com a mesma velocidade  $c$ . Ou seja, a solução da equação da onda com velocidade e densidade constantes é uma superposição de uma onda com qualquer formato propagando para a direita com uma outra onda de qualquer formato, possivelmente diferente, propagando para a esquerda.

A questão é determinar as funções  $f$  e  $g$  para satisfazerem as condições iniciais. Em  $t = 0$ , temos

$$u_0(x) = f(x) + g(x) \quad v_0(x) = c \left[ \frac{dg}{dx} - \frac{df}{dx} \right]. \quad (5.143)$$

Podemos, agora, integrar  $v_0(x)$ . O limite inferior dessa integração é uma constante  $a$  indeterminada, que poder ser adicionada à  $f$  e subtraída da  $g$  sem afetar a solução. Assim, as funções  $f$  e  $g$  não são únicas. Ao integrar a direita das equações (5.143), obtemos

$$c[g(x) - f(x)] = \int_a^x v_0(x') dx'. \quad (5.144)$$

Resolvendo o conjunto dessa equação com a da esquerda de (5.143) para  $f(x)$  e  $g(x)$ , encontramos

$$f(x) = \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2c} \int_a^x v_0(x') dx' \quad (5.145)$$

$$g(x) = \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2c} \int_a^x v_0(x') dx'. \quad (5.146)$$

Substituindo  $f(x)$  por  $f(x - ct)$  e  $g(x)$  por  $g(x + ct)$  e combinando de acordo com (5.142), temos

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[u_0(x - ct) + u_0(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(x') dx'. \quad (5.147)$$

Esta fórmula, que representa a solução geral do problema, é conhecida como a *Fórmula de D'Alembert*. Ela mostra que dadas condições iniciais, a solução deve ter a forma  $f(x - ct) + g(x + ct)$ . Podemos dizer, então que o comportamento físico do deslocamento da onda, já descrito, é aplicado a esta equação obtida.

# Capítulo 6

## Ondas Planas

Vamos estudar, em mais detalhes do que na seção 2.1, as propriedades da propagação de ondas planas em meios acústico homogêneo ou perfeitamente elástico, anisotrópico ou isotrópico. Ondas planas representam uma das possíveis soluções das equações da onda e elastodinâmica para meio homogêneo. Essas ondas não existem em meios reais, mas elas são boas aproximações de ondas para fontes distantes. Uma das vantagens de trabalhar com ondas planas é que podemos estudá-las sem considerar sua fonte.

### 6.1 Propriedades das ondas planas

#### 6.1.1 Onda planas harmônicas no tempo

Queremos encontrar soluções das equações elastodinâmica e acústica homogênea na seguinte forma,

$$w(x_m, t) = W \exp[-i\omega(t - T(x_m))] , \quad (6.1)$$

onde  $w$  pode ser também um escalar (no caso em que este representa pressão) ou uma componente de um vetor (no caso em que este representa a componente de velocidade de uma partícula ou vetor de deslocamento).

O símbolo  $W$  é uma constante, que pode ser complexa, chamada de *escalar* ou *amplitude vetorial* dependendo do significado de  $w$ . O símbolo  $\omega$  denota a *freqüência angular*,  $\omega = 2\pi f$ . Aqui,  $f$  é a *freqüência*, isto é, o número de oscilações da onda por segundo. A freqüência  $f$  está relacionada com o *período*  $T$ , isto é, o tempo de uma oscilação, pela relação  $f = 1/T$ . O período  $T$  é medido em segundos ( $s$ ),  $f$  em Hertz ( $\text{Hz} = s^{-1}$ ). O símbolo  $t$  denota tempo e  $T(x_m)$  é uma função real linear homogênea de  $x_i$ , ou seja,

$$T(x_m) = p_i x_i , \quad (6.2)$$

onde  $p_i$  são coeficientes reais constantes. Comparando este resultado com o argumento da equação (6.1), observamos que  $\vec{p} = \vec{k}/\omega = \vec{N}/c$ , onde o vetor  $\vec{N}$  é o vetor unitário na direção da propagação (perpendicular ao plano de fase constante).

### 6.1.2 Onda planas no domínio do tempo (ondas planas transientes)

Podemos obter soluções para ondas planas no domínio do tempo aplicando a transformação de Fourier nas soluções obtidas no domínio da frequência. Mas aqui, vamos obter soluções usando diretamente os sinais transientes na solução experimental da equação elastodinâmica.

Esta aproximação está conectada com o termo *signal analítico*. Vamos procurar soluções na forma

$$w(x_m, t) = WF(t - T(x_m)) . \quad (6.3)$$

A função  $F(\xi)$  representa o sinal analítico, e ela está definida como

$$F(\xi) = g(\xi) + ih(\xi) , \quad (6.4)$$

onde  $g(\xi)$  é sinal transiente para o qual o sinal analítico está construído, e  $h(\xi)$  é a transformada de Hilbert de  $g(\xi)$ .

No caso do sinal transiente, é mais conveniente trabalhar com o sinal analítico

$$F(t) = 2 \int_0^\infty g(f) e^{-i2\pi ft} df , \quad (6.5)$$

que trabalhar com o sinal real  $g(t)$ . Usando o sinal analítico  $F(t)$ , é possível construir um envelope do sinal real  $g(t)$ . O envelope é dado como

$$|F(t)| = \sqrt{g^2(t) + h^2(t)} . \quad (6.6)$$

O envelope da onda plana transiente  $w = WF$ , pode então ser escrita como

$$|w(t)| = |W| \sqrt{g^2(t) + h^2(t)} . \quad (6.7)$$

Podemos ver que a forma do envelope é a mesma em qualquer lugar, não importando se  $W$  assume valor constante complexo ou real. A forma da onda plana transiente  $w(t)$ , porém, pode mudar se  $W$  assumir valor complexo, ou seja,

$$Re(w(t)) = Re(WF(t)) = Re(W)g(t) - Im(W)h(t) . \quad (6.8)$$

No caso em que  $W$  assume valor real, temos

$$Re(w(t)) = Wg(t) , \quad (6.9)$$

o que nos mostra que neste caso, a forma da onda plana transiente  $w(t)$  é preservada.

## 6.2 Ondas planas acústicas transientes

Vamos inserir a tentativa de solução

$$p(x_m, t) = PF(t - T(x_m)) , \quad (6.10)$$

$$v_i(x_m, t) = V_i F(t - T(x_m)) , \quad (6.11)$$

nas equações acústicas especificadas para  $f_i = 0$ ,

$$p_{,i} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = 0 \quad , \quad v_{k,k} + \kappa \frac{\partial p}{\partial t} = 0 . \quad (6.12)$$

Fazendo isto, obtemos dois resultados importantes

$$c = (\rho\kappa)^{-1/2} \quad , \quad V_i = \frac{P}{\rho c} N_i . \quad (6.13)$$

A primeira equação expressa velocidade da fase em termos dos parâmetros que descrevem o meio acústico. A segunda equação especifica a direção e magnitude da quantidade vetorial  $V_i$ .

A solução da onda plana para o caso acústico tem então a forma

$$p(x_m, t) = PF(t - T(x_m)) \quad , \quad v_i(x_m, t) = \frac{P}{\rho c} N_i F(t - T(x_m)) , \quad (6.14)$$

onde

$$T(x_m) = \frac{x_i N_i}{c} \quad , \quad c = (\rho\kappa)^{-1/2} . \quad (6.15)$$

## 6.3 Ondas planas elásticas transientes

### 6.3.1 Meio anisotrópico homogêneo

Vamos inserir a tentativa de solução

$$u_i(x_m, t) = U_i F(t - T(x_m)) \quad , \quad T(x_m) = \frac{x_i N_i}{c} , \quad (6.16)$$

na equação elastodinâmica para um meio anisotrópico homogêneo com  $f_i = 0$ ,

$$a_{ijkl} u_{k,lj} = u_{i,tt} , \quad (6.17)$$

onde  $a_{ijkl} = c_{ijkl}/\rho$  (os parâmetros  $a_{ijkl}$  são chamados de *parâmetros elásticos de densidade normalizada*, e a dimensão deles é  $(m/s)^2$ ). Logo, obtemos

$$a_{ijkl} U_k p_l p_j - U_i = 0 . \quad (6.18)$$

Usando que  $p_i = N_i/c$ , podemos reescrever esta equação como a chamada *equação de Christoffel*:

$$(\Gamma_{ik} - c^2 \delta_{ik})U_k = 0 , \quad (6.19)$$

onde  $\Gamma_{ik} = a_{ijkl}N_lN_j$  é a *matriz de Christoffel*. Podemos ver que a equação de Christoffel tem a forma da equação que resolve o problema de autovalores para a matriz  $\Gamma_{ik}$ , ou seja, encontrar os autovalores de  $\Gamma_{ik}$  que são iguais a  $c^2$  e autovetores  $g_j$  ( $g_jg_j = 1$ ) proporcionais ao vetor constante  $U_j$  ( $U_j = Ag_j$ ).

Veamos algumas propriedades importantes da matriz de Christoffel  $\Gamma_{ik}$ . De sua definição, temos que ela é simétrica. Esta matriz também é definida positiva. Para provar isto, temos que mostrar que para qualquer vetor  $d_i$ , vale  $\Gamma_{ik}d_id_k > 0$ . Observemos que

$$\Gamma_{ik}d_id_k = a_{ijkl}N_jN_ld_id_k = a_{ijkl}b_{ij}b_{kl} , \quad (6.20)$$

onde  $b_{ij} = d_iN_j$ . Mostramos anteriormente, que a energia de deslocamento  $W$  é sempre positiva,

$$\frac{1}{2}c_{ijkl}e_{ij}e_{kl} > 0 , \quad (6.21)$$

o que implica automaticamente que

$$\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl} > 0 . \quad (6.22)$$

Esta relação é satisfeita para um tensor simétrico arbitrário de deslocamento pequeno. Portanto, escrevemos

$$b_{ij} = \frac{1}{2}(b_{ij} + b_{ji}) + \frac{1}{2}(b_{ij} - b_{ji}) = b_{ij}^S + b_{ij}^A . \quad (6.23)$$

Assim, a expressão (6.20) pode ser reescrita como

$$a_{ijkl}(b_{ij}^S + b_{ij}^A)(b_{kl}^S + b_{kl}^A) = a_{ijkl}b_{ij}^Sb_{kl}^S . \quad (6.24)$$

Todos os termos contendo  $b_{ij}^A$  são nulos devido à sua anti-simetria e à simetria de  $a_{ijkl}$ . A matriz de Christoffel é portanto definida positiva.

Das propriedades citadas, essa matriz tem três autovalores positivos e reais. Desde que os autovalores  $c^2$  são positivos, temos três pares de valores reais  $\pm c$ , os quais correspondem a três pares de ondas propagando num meio anisotrópico. Cada par consiste em duas ondas propagando com a mesma velocidade de fase  $c$ , porém em sentidos opostos. Por enquanto, vamos considerar apenas o caso  $c$  positivo. Portanto, num meio homogêneo anisotrópico, na direção especificada pela normal de fase  $N_i$ , três ondas geralmente independentes podem propagar. Suas velocidades de fase podem ser encontradas resolvendo

$$\det(\Gamma_{ik} - c^2 \delta_{ik}) = 0 . \quad (6.25)$$

Como vimos anteriormente, se todos os três autovalores são diferentes, os autovetores correspondentes podem ser determinados de maneira única. Outro resultado obtido, foi

que eles são mutuamente perpendiculares se a matriz correspondente for real e simétrica. Isto quer dizer que as três diferentes ondas propagando no meio anisotrópico diferem não apenas na velocidade de fase, mas também em suas *polarizações* (orientação dos autovetores), que especificam as direções do vetor de movimento da partícula  $u_i$ . Partículas se movem ao longo de linhas especificadas pelos autovetores. Este tipo de polarização é chamado portanto de *polarização linear*. Se todas as três ondas propagam na mesma direção (suas frentes de fase são paralelas), então os vetores de movimento da partícula correspondendo a estas três ondas, são mutuamente perpendiculares.

A situação é diferente quando dois dos autovalores da matriz  $\Gamma_{ik}$  coincidem (caso degenerado). Então os autovetores correspondentes aos autovalores coincidentes não podem ser determinados de maneira única. Eles estão situados no plano perpendicular ao terceiro autovetor. Quaisquer dois vetores mutuamente perpendiculares neste plano podem ser escolhidos como autovetores. As direções  $N_i$ , para a qual dois autovalores de  $\Gamma_{ik}$  coincidem são chamadas *singulares*. No meio isotrópico, isto ocorre para qualquer direção.

A solução da onda plana da equação elastodinâmica para o meio anisotrópico homogêneo tem a forma

$$u_i^{(l)}(x_m, t) = A^{(l)} G_i^{(l)} F(t - T^{(l)}(x_m)) \quad , \quad T^{(l)} = \frac{x_i N_i}{c^{(l)}} \quad , \quad (6.26)$$

onde  $l = 1, 2, 3$ ,  $A^{(l)}$  é uma constante arbitrária,  $c^{(l)}$  é a velocidade de fase e  $G_i^{(l)}$  é o vetor de movimento da partícula normalizado correspondente a uma das três ondas que propagam no meio anisotrópico homogêneo.

### 6.3.2 Meio isotrópico homogêneo

Podemos procurar os coeficientes da tentativa de solução da onda plana inserindo estes na equação elastodinâmica para o meio isotrópico homogêneo. Assim, vamos inserir a tentativa de solução

$$u_i(x_m, t) = U_i F(t - T(x_m)) \quad , \quad T(x_m) = \frac{x_i N_i}{c} \quad , \quad (6.27)$$

na equação elastodinâmica para o meio isotrópico homogêneo com  $f_i = 0$ :

$$(\lambda + \mu)u_{k,ki} + \mu u_{i,kk} = \rho u_{i,tt} \quad , \quad (6.28)$$

de onde obtemos

$$(\lambda + \mu)U_k p_k p_i + \mu U_i p_k p_k - \rho U_i = 0 \quad . \quad (6.29)$$

Inserindo  $p_i = N_i/c$  nesta equação, podemos escrever

$$\left[ \frac{\lambda + \mu}{\rho} N_k N_i + \left( \frac{\mu}{\rho} - c^2 \right) \delta_{ik} \right] U_k = 0 \quad . \quad (6.30)$$

Esta é a equação de Christoffel para o meio isotrópico homogêneo. Análogamente ao caso anterior, temos que resolver o determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\lambda+\mu}{\rho}N_1^2 + \left(\frac{\mu}{\rho} - c^2\right) & \frac{\lambda+\mu}{\rho}N_1N_2 & \frac{\lambda+\mu}{\rho}N_1N_3 \\ \frac{\lambda+\mu}{\rho}N_1N_2 & \frac{\lambda+\mu}{\rho}N_2^2 + \left(\frac{\mu}{\rho} - c^2\right) & \frac{\lambda+\mu}{\rho}N_2N_3 \\ \frac{\lambda+\mu}{\rho}N_1N_3 & \frac{\lambda+\mu}{\rho}N_2N_3 & \frac{\lambda+\mu}{\rho}N_3^2 + \left(\frac{\mu}{\rho} - c^2\right) \end{vmatrix} = 0, \quad (6.31)$$

que é uma equação cúbica em  $c^2$ . Para determinar as três raízes, podemos desenvolver o determinante para  $N_i$  escolhido arbitrariamente. Como o meio investigado é isotrópico, a solução obtida para um  $N_i$  escolhido vale para qualquer outro  $N_i$  especificado. Vamos escolher a normal de fase como  $\vec{N} = (1, 0, 0)$ . O determinante então se reduz a

$$\left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} - c^2\right) \left(\frac{\mu}{\rho} - c^2\right)^2 = 0. \quad (6.32)$$

Desta equação, obtemos que dois dos três autovalores  $c^2$  são iguais. Escolhendo as direções positivas novamente, temos

$$c^{(1)} = c^{(2)} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad c^{(3)} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}. \quad (6.33)$$

Então, no meio isotrópico, apenas duas ondas diferentes podem propagar: a mais rápida com velocidade de fase  $\alpha = c^{(3)}$ , e a outra com velocidade de fase  $\beta = c^{(1)}$ . Como visto anteriormente, elas são chamadas de onda P e onda S, respectivamente.

Vamos agora determinar a polarização de ambas as ondas, isto é, vamos achar os autovetores correspondentes aos autovalores  $\alpha^2$  e  $\beta^2$ . Para isso, vamos multiplicar a equação de Christoffel pelo vetor  $U_i$ . Logo,

$$\frac{\lambda + \mu}{\rho}(N_k U_k)(N_i U_i) + \left(\frac{\mu}{\rho} - c^2\right)(U_i U_i) = 0. \quad (6.34)$$

Vamos investigar primeiramente a onda S. Neste caso os autovalores são coincidentes e assim, os autovetores não são determinados de maneira única. Para  $c^2 = \beta^2$ , obtemos

$$\frac{\lambda + \mu}{\rho}(N_k U_k)^2 = 0. \quad (6.35)$$

Como  $(\lambda + \mu)/\rho > 0$ , então  $N_k U_k = 0$ , o que nos diz que a polarização da onda S é perpendicular à direção de propagação especificada pela normal de fase  $N_i$ . Assim, o vetor  $U_k$  está situado no plano da frente de fase. Quaisquer dois vetores unitários mutuamente perpendiculares que estejam neste plano, podem ser escolhidos como autovetores  $g_i^{(1)}$  e  $g_i^{(2)}$ .

Desta observação, podemos concluir que o autovetor  $g_i^{(3)}$  corresponde à propagação da onda P na direção  $N_i$ , e sendo assim ele é paralelo a  $N_i$ . Para confirmarmos isto, podemos inserir  $c^2 = \alpha^2$  na equação de Christoffel multiplicada por  $U_i$ . Logo,

$$\frac{\lambda + \mu}{\rho} [(N_k U_k)^2 - (U_k U_k)] = 0 . \quad (6.36)$$

Como  $(\lambda + \mu)/\rho > 0$ , então  $(N_k U_k)^2 = U_k U_k$ , o que é verdade apenas para  $U_k$  paralelo a  $N_k$ .

A solução da onda plana P para a equação elastodinâmica para o meio isotrópico homogêneo pode ser escrita como

$$u_i(x_m, t) = A N_i F \left( t - \frac{N_i x_i}{\alpha} \right) , \quad (6.37)$$

onde  $A$  é uma constante arbitrária,  $N_i$  é a normal de fase e  $\alpha$  é a velocidade de fase da onda P. A solução da onda plana S tem a forma

$$u_i(x_m, t) = (B g_i^{(1)} + C g_i^{(2)}) F \left( t - \frac{N_i x_i}{\beta} \right) , \quad (6.38)$$

onde  $B$  e  $C$  são constantes arbitrárias e  $\beta$  é a velocidade de fase da onda S.

Destas duas soluções, podemos ver que partículas da onda P sempre se movem ao longo de uma linha paralela a  $N_i$ , isto é, ao longo de uma linha perpendicular à frente de fase. A polarização da onda P é então linear. Já as partículas da onda S, sempre se movem num plano perpendicular a  $N_i$ . Vamos considerar o sinal analítico  $F(\xi)$  como sendo  $\exp(-i\omega\xi)$ . Então podemos reescrever a solução da onda plana S como

$$u_i(x_m, t) = (B g_i^{(1)} + C g_i^{(2)}) \exp \left[ -i\omega \left( t - \frac{N_i x_i}{\beta} \right) \right] . \quad (6.39)$$

Vamos olhar o caminho da partícula especificado pelo vetor  $Re(u_i)$ . Denotando as partes reais das componentes do vetor  $u_i$  por  $u_1$  e  $u_2$  (correspondentes aos vetores  $g_i^{(1)}$  e  $g_i^{(2)}$ ), obtemos

$$u_1(x_m, t) = |B| \cos[\omega(t - T) - \varphi_B] , \quad (6.40)$$

$$u_2(x_m, t) = |C| \cos[\omega(t - T) - \varphi_C] , \quad (6.41)$$

onde  $T = (N_i x_i)/\beta$  e usamos que  $B = |B| \exp(i\varphi_B)$   $C = |C| \exp(i\varphi_C)$ . Para simplificar, vamos escrever  $\varphi = \omega(t - T)$  e  $\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_C$ . Logo,

$$u_1 = |B| \cos(\varphi - \varphi_B) \quad , \quad u_2 = |C| \cos(\varphi - \varphi_B + \Delta\varphi) . \quad (6.42)$$

Podemos escrever que

$$\frac{u_2}{|C|} = \cos(\varphi - \varphi_B) \cos \Delta\varphi - \sin(\varphi - \varphi_B) \sin \Delta\varphi . \quad (6.43)$$



Multiplicando  $u_1/|B|$  por  $\cos \Delta\varphi$  e subtraindo este da última equação, obtemos

$$\frac{u_2}{|C|} - \frac{u_1}{|B|} \cos \Delta\varphi = -\sin(\varphi - \varphi_B) \sin \Delta\varphi . \quad (6.44)$$

Agora, da equação para  $u_1$  obtemos

$$\sin^2(\varphi - \varphi_B) = 1 - \frac{u_1^2}{|B|^2} . \quad (6.45)$$

Substituindo este resultado no quadrado da equação anterior, escrevemos

$$\left( \frac{u_2}{|C|} - \frac{u_1}{|B|} \cos \Delta\varphi \right)^2 = \left[ 1 - \frac{u_1^2}{|B|^2} \right] \sin^2 \Delta\varphi . \quad (6.46)$$

Após arranjar os termos, podemos escrever

$$\left( \frac{u_2}{|C|} \right)^2 + \left( \frac{u_1}{|B|} \right)^2 - 2 \frac{u_1 u_2}{|B||C|} \cos \Delta\varphi = \sin^2 \Delta\varphi . \quad (6.47)$$

Esta é a equação de uma elipse. Isto quer dizer que o vetor de deslocamento para  $\Delta\varphi \neq k\pi$ , traça uma elipse no plano da frente de fase. Por isso, este tipo de polarização da onda S é chamada *polarização elíptica*. Para  $\Delta\varphi = \pm k\pi$  ( $k$  inteiro), esta equação se reduz a

$$u_2 = \pm \frac{|C|}{|B|} u_1 , \quad (6.48)$$

que é a equação de uma reta. Assim, em situações especiais, como quando B e C são reais ( $\varphi_B = \varphi_C = 0$ ), a onda S pode ser *polarizada linearmente* no plano da frente de fase. Para o caso em que  $|B| = |C|$  com  $\Delta\varphi \neq \pm k\pi$ , temos uma *polarização circular*.

## 6.4 Considerações sobre energia

Em seções anteriores foram introduzidas algumas densidades de energia como energia de deformação  $W$ , energia cinética  $K$ , energia elástica  $E = W + K$  e vetor de fluxo de energia  $S_i$ . Nesta seção estudamos tais densidades de energia para propagações de ondas planas em meios acústico homogêneo, anisotrópico e isotrópico. As quantidades acima são definidas como quantidades instantâneas, isto é, em função do tempo, apesar de, na prática trabalharmos com estas independente do tempo. Conseguimos esta independência no tempo pela aproximação da *média temporal* que é conveniente para aplicações em ondas harmônicas no tempo ou pela aproximação da *integração no tempo* para ondas transientes, ou seja, sinais sísmicos.

A média temporal para ondas harmônicas é feita sobre um período. As quantidades de média temporal  $\bar{W}$ ,  $\bar{K}$ ,  $\bar{E}$  e  $\bar{S}_i$  são determinadas pelos seus equivalentes instantâneos  $W$ ,

$K$ ,  $E$  e  $S_i$  pela seguinte regra aplicada aqui, por exemplo, para a energia de deformação  $W$

$$\overline{W}(x_m) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} W(x_m, t) dt , \quad (6.49)$$

e as quantidades integradas  $\hat{W}$ ,  $\hat{K}$ ,  $\hat{E}$  e  $\hat{S}_i$  pela regra

$$\hat{W}(x_m) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x_m, t) dt . \quad (6.50)$$

Desde que um sinal sísmico dure somente dentro de um intervalo de tempo limitado, somente este intervalo contribui para a integral, fora deste intervalo a contribuição da integral é zero.

Desde que as quantidades de energia são não-lineares na pressão, velocidade da partícula ou deslocamento, devemos trabalhar com partes fisicamente significativas da solução complexa da equação do movimento. Na sequência, consideramos, então, somente a parte real da solução complexa

$$w(x_m, t) = W_0 F(t - T(x_m)) .$$

Por simplicidade, denotamos a parte real por  $w(x_m, t)$ , definindo

$$w(x_m, t) = \frac{1}{2}(W_0 F + W_0^* F^*) ,$$

onde o símbolo  $*$  denota o conjugado complexo.

### 6.4.1 Meio acústico

Partes reais de soluções complexas para pressão e velocidade da partícula podem ser escritas, quando consideramos  $p_i$  real, como

$$p = \frac{1}{2}(PF + P^* F^*) , \quad v_i = \frac{1}{2} \frac{p_i}{\rho} (PF + P^* F^*) , \quad (6.51)$$

onde omitimos o argumento do sinal analítico  $F(t - (N_i x_i)/c)$ . Vamos expressar  $W$ ,  $K$ ,  $E$  e  $S_i$  em termos da pressão e da velocidade da partícula dadas acima. Tendo em mente que no caso acústico

$$p = -k\theta, \quad \tau_{ij} = -p\delta_{ij} , \quad (6.52)$$

podemos escrever

$$W = \frac{1}{2} \tau_{ij} u_{i,j} = -\frac{1}{2} p u_{i,i} = \frac{1}{2k} p^2 = \frac{1}{2} \kappa p^2 = \frac{1}{8} \kappa (PF + P^* F^*)^2 , \quad (6.53)$$

$$K = \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i = \frac{1}{2} \rho v_i v_i = \frac{1}{8} (\rho c^2)^{-1} (PF + P^* F^*)^2 , \quad (6.54)$$

$$S_i = -\tau_{ij} \dot{u}_j = p \delta_{ij} v_j = p v_i = \frac{1}{4} p_i \rho^{-1} (PF + P^* F^*)^2 , \quad (6.55)$$

onde usamos  $v_i = \dot{u}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}$ . Desde que  $c^2 = (\kappa\rho)^{-1}$ , as equações acima levam a um importante resultado,  $W = K$ . Então, a energia de deformação de uma onda acústica plana é igual para qualquer tempo a sua energia cinética. Logo, para a energia elástica temos

$$E = \frac{1}{4}\kappa(PF + P^*F^*)^2. \quad (6.56)$$

Podemos também chegar na expressão para a velocidade do fluxo de energia, conhecida também como *velocidade de grupo*  $v_i^{(g)}$ ,

$$v_i^{(g)} = S_i/E = c^2 p_i = c N_i = c_i. \quad (6.57)$$

Portanto, em um meio acústico homogêneo, a velocidade do fluxo de energia tem a mesma direção e magnitude que a velocidade de fase.

Agora vamos estudar as quantidades integradas no tempo trabalhando com as seguintes integrais

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F^2(t)dt, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (F^*(t))^2dt, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)F^*(t)dt. \quad (6.58)$$

As integrais de (6.58) podem ser simplesmente avaliadas se levarmos em conta as seguintes propriedades de uma função quadraticamente integrável  $g(t)$ ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(t)dt, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)h(t)dt = 0, \quad (6.59)$$

onde  $h(t)$  denota a transformada de Hilbert de  $g(t)$ . As igualdades acima são obtidas, utilizando a equação (4.170), da seguinte forma

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(t)dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\xi)}{(\xi - t)} d\xi \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(t)}{(\xi - t)} dt \right] d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) \left[ -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(t)}{(t - \xi)} dt \right] d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)g(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)dt, \end{aligned} \quad (6.60)$$

e

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)h(t)dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\xi)}{t - \xi} d\xi \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) \left[ -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(t)}{\xi - t} dt \right] d\xi \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)h(\xi)d\xi = - \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)h(t)dt. \end{aligned} \quad (6.61)$$

Assim, para as integrais em (6.58), concluimos que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} F^2(t)dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} [g(t) + ih(t)]^2 dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} [g^2(t) - h^2(t)]dt + 2i \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)h(t)dt \\
&= 0 .
\end{aligned} \tag{6.62}$$

Similarmente, pode ser mostrado que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (F^*(t))^2 dt = 0 , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)F^*(t)dt = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)dt . \tag{6.63}$$

Então, usando os resultados acima e as expressões de (6.53) até (6.55) podemos achar as quantidades integradas no tempo  $\hat{W}$ ,  $\hat{K}$ ,  $\hat{E}$  e  $\hat{S}_i$  como segue

$$\hat{W} = \int_{-\infty}^{+\infty} W dt = \frac{\kappa}{8} \int_{-\infty}^{+\infty} (PF + P^*F^*)^2 dt = \frac{\kappa}{2} PP^* f_a , \tag{6.64}$$

onde  $f_a = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)dt$ . Correspondentemente, chegamos que

$$\hat{K} = \frac{\kappa}{2} PP^* f_a \quad \text{e} \quad \hat{S}_i = \frac{p_i}{\rho} PP^* f_a . \tag{6.65}$$

Vemos que, como esperado, a energia de deformação e a energia cinética integradas no tempo são iguais, logo temos

$$\hat{E} = \kappa PP^* f_a . \tag{6.66}$$

Temos também que a velocidade de grupo  $v_i^{(g)}$ , definida aqui como a velocidade do fluxo de energia integrado no tempo, é dada por

$$v_i^{(g)} = \frac{\hat{S}_i}{\hat{E}} = c^2 p_i = c N_i . \tag{6.67}$$

De forma similar, podemos obter as quantidades médias temporais  $\overline{W}$ ,  $\overline{K}$ ,  $\overline{E}$  e  $\overline{S}_i$  só que agora com a integral  $f_a$  definida por

$$f_A = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} g^2(t)dt . \tag{6.68}$$

### 6.4.2 Meio anisotrópico homogêneo

Nesta seção trabalhamos com a parte real do vetor deslocamento escrito na forma

$$u_i = \frac{1}{2}(U_i F + U_i^* F^*) = \frac{1}{2}(A F + A^* F^*) g_i , \tag{6.69}$$

onde  $A$  é um escalar possivelmente complexo e  $g_i$  é um vetor unitário especificando a polarização da onda considerada. Note também que aqui estamos o mesmo símbolo  $u_i$  para denotar a parte real do vetor deslocamento  $u_i$ .

As quantidades  $W$ ,  $K$ ,  $E$  e  $S_i$  podem ser escritas em termos de  $A$ ,  $F$ ,  $F'$  (onde  $F'(\xi) = dF/d\xi$  é também um sinal analítico) e  $g_i$  como segue

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\rho a_{ijkl}u_{i,j}u_{k,l} = \frac{1}{8}\rho a_{ijkl}c^{-2}(U_i N_j F' + U_i^* N_j F'^*)(U_k N_l F' + U_k^* N_l F'^*) \\ &= \frac{1}{8}\rho c^{-2}\Gamma_{ik}(AF' + A^*F'^*)^2 g_i g_k, \end{aligned} \quad (6.70)$$

$$K = \frac{1}{2}\rho \dot{u}_i \dot{u}_i = \frac{1}{8}\rho (AF' + A^*F'^*)^2 \quad (6.71)$$

$$S_i = -\rho a_{ijkl}u_{k,l}\dot{u}_j = \frac{1}{4}\rho a_{ijkl}c^{-1}N_l(AF' + A^*F'^*)^2 g_j g_k. \quad (6.72)$$

Se considerarmos a equação de Christoffel,  $(\Gamma_{ik} - c^2\delta_{ik})g_k = 0$ , multiplicada pelo vetor  $g_i$ , chegamos a

$$\Gamma_{ik}g_i g_k - c^2 = 0, \quad (6.73)$$

de onde podemos concluir que  $c^{-2}\Gamma_{ik}g_i g_k = 1$ . Logo, ao substituirmos esta identidade na expressão para  $W$ , vemos que, como no caso do meio acústico,  $W = K$ , isto é, que para ondas planas propagando em meios anisotrópicos homogêneos a energia de deformação  $W$  é igual a energia cinética  $K$  para qualquer tempo. Assim, para a energia elástica  $E$  temos

$$E = \frac{1}{4}\rho (AF' + A^*F'^*)^2. \quad (6.74)$$

Para a expressão da velocidade de grupo  $v_i^{(g)}$  temos

$$v_i^{(g)} = S_i/E = a_{ijkl}N_l c^{-1}g_j g_k = a_{ijkl}p_l g_j g_k. \quad (6.75)$$

Note que, em contraste com o meio acústico, a equação (6.75) não coincide com a velocidade de fase. Além disso, devido a dependência em  $N_i$ , podemos esperar que o valor e a direção da velocidade de grupo varie com a variação da direção de  $N_i$ . Podemos concluir também que a energia de uma onda plana propagando em um meio anisotrópico homogêneo propaga geralmente em uma direção diferente da direção da propagação da frente de fase e a velocidade da propagação de energia é diferente da velocidade de fase. Para esclarecer esta relação entre velocidade de grupo e de fase, vamos multiplicar (6.75) por  $p_i = N_i/c$ , logo

$$v_i^{(g)}p_i = a_{ijkl}p_l p_i g_j g_k = c^{-2}\Gamma_{jk}g_j g_k. \quad (6.76)$$

Da equação de Christoffel  $(\Gamma_{jk} - c^2\delta_{jk})g_k = 0$  multiplicada por  $g_j$  chegamos que

$$\Gamma_{jk}g_j g_k = c^2. \quad (6.77)$$

Agora, ao usarmos esta identidade na expressão para  $v_i^{(g)} p_i$ , temos

$$v_i^{(g)} p_i = 1 \quad \Leftrightarrow \quad v_i^{(g)} N_i = c . \quad (6.78)$$

Desta equação, vemos que a velocidade de grupo é igual a velocidade de fase somente se  $v^{(g)} \parallel \vec{N}$ . Outra consequência do resultado acima é que a velocidade de grupo é sempre maior ou igual a velocidade de fase, isto é, durante um intervalo de tempo unitário a frente de fase muda da posição  $t$  para a posição  $t + 1$  e o vetor  $\vec{c}$  que corresponde a velocidade de fase é perpendicular a frente de fase e é igual a distância entre duas frentes de onda, já o vetor da velocidade de grupo geralmente não é perpendicular a frente de fase e portanto deve ser maior que a velocidade de fase.

Vejamos então as quantidades integradas no tempo  $\hat{W}$ ,  $\hat{K}$ ,  $\hat{E}$  e  $\hat{S}_i$  levando em conta que  $F'$  e  $F^{*'}$  tem as mesmas propriedades que  $F$  e  $F^*$ . Para energia de deformação  $\hat{W}$ , temos

$$\hat{W} = \int_{-\infty}^{+\infty} W dt = \frac{1}{8} \rho c^{-2} \Gamma_{ik} g_i g_k \int_{-\infty}^{+\infty} (AF' + A^* F^{*'})^2 dt = \frac{1}{2} \rho c^{-2} \Gamma_{ik} g_i g_k A A^* f_e , \quad (6.79)$$

onde  $f_e = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{g}^2(t) dt$ . E, correspondentemente,

$$\hat{K} = \frac{1}{2} \rho A A^* f_e \quad \text{e} \quad \hat{S}_i = c^{-1} \rho a_{ijkl} N_l g_j g_k A A^* f_e . \quad (6.80)$$

Novamente, vemos que as quantidades integradas no tempo satisfazem  $\hat{W} = \hat{K}$ , logo

$$\hat{E} = \rho A A^* f_e , \quad (6.81)$$

e  $v_i^{(g)} = \hat{S}_i / \hat{E} = c^{-1} a_{ijkl} N_l g_j g_k$ .

As expressões para as quantidades médias temporais  $\overline{W}$ ,  $\overline{K}$ ,  $\overline{E}$  e  $\overline{S}_i$  são novamente as mesmas que as obtidas para as integradas no tempo, mudando apenas a integral  $f_e$  por  $f_E$  definida por

$$f_E = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \dot{g}^2(t) dt . \quad (6.82)$$

### 6.4.3 Meio isotrópico homogêneo

As expressões para os valores instantâneos de  $W$ ,  $K$ ,  $E$  e  $S_i$  e seus valores para tempo integrado e média temporal podem ser obtidos da mesma maneira que nas seções anteriores. Em específico na última seção, podemos trabalhar para o caso isotrópico tomando

$$a_{ijkl} = (\alpha^2 - 2\beta^2) \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta^2 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) . \quad (6.83)$$

Aqui, consideramos o vetor deslocamento separadamente para a onda  $P$

$$u_i = \frac{1}{2} (AF + A^* F^*) N_i \quad (6.84)$$

e para onda  $S$

$$u_i = \frac{1}{2}[(BF + B^*F^*)g_i^{(1)} + (CF + C^*F^*)g_i^{(2)}] . \quad (6.85)$$

Logo, para cada um dos casos acima obtemos

$$W_P = \frac{1}{8}\rho(AF' + A^*F'^*)^2 , \quad W_S = \frac{1}{8}\rho[(BF' + B^*F'^*)^2 + (CF' + C^*F'^*)^2] , \quad (6.86)$$

$$K_P = \frac{1}{8}\rho(AF' + A^*F'^*)^2 , \quad K_S = \frac{1}{8}\rho[(BF' + B^*F'^*)^2 + (CF' + C^*F'^*)^2] , \quad (6.87)$$

$$S_{Pi} = \frac{1}{4}\rho\alpha N_i(AF' + A^*F'^*)^2 , \quad S_{Si} = \frac{1}{4}\rho\beta N_i[(BF' + B^*F'^*)^2 + (CF' + C^*F'^*)^2] , \quad (6.88)$$

$$E_P = \frac{1}{4}\rho(AF' + A^*F'^*)^2 , \quad E_S = \frac{1}{4}\rho[(BF' + B^*F'^*)^2 + (CF' + C^*F'^*)^2] , \quad (6.89)$$

onde o índice  $P$  denota que a correspondente quantidade está relacionada com a ondas  $P$  e o índice  $S$  relacionada com a onda  $S$ .

Assim, as quantidades integradas no tempo são agora

$$\hat{W}_P = \hat{K}_P = \frac{1}{2}\rho AA^* f_e , \quad \hat{W}_S = \hat{K}_S = \frac{1}{2}\rho(BB^* + CC^*) f_e , \quad (6.90)$$

$$\hat{E}_P = \rho AA^* f_e , \quad \hat{E}_S = \rho(BB^* + CC^*) f_e , \quad (6.91)$$

$$\hat{S}_{Pi} = \rho\alpha N_i AA^* f_e , \quad \hat{S}_{Si} = \rho\beta N_i(BB^* + CC^*) f_e . \quad (6.92)$$

Como consequência das expressões acima para quantidades instantâneas e integradas no tempo, chegamos para velocidade de grupo das ondas  $P$  e  $S$

$$v_{Pi}^{(g)} = S_{Pi}/E_P = \hat{S}_{Pi}/\hat{E}_P = \alpha N_i , \quad v_{Si}^{(g)} = S_{Si}/E_S = \hat{S}_{Si}/\hat{E}_S = \beta N_i . \quad (6.93)$$

Então em um meio isotrópico homogêneo, similarmente para o caso acústico, a velocidade de grupo é igual a velocidade de fase, ambas com mesmo tamanho e direção. Finalmente, vamos acrescentar que as fórmulas para as quantidades médias temporais  $\overline{W}$ ,  $\overline{K}$ ,  $\overline{E}$  e  $\overline{S}_i$  podem ser obtidas das fórmulas acima, para quantidades integradas no tempo, pela substituição da integral  $f_e$  por  $f_E$ .

## 6.5 Comparação da propagação de ondas nos meios anisotrópico, isotrópico e acústico

A propagação de onda em meios anisotrópicos e isotrópico homogêneos diferem nas seguintes características:

1. Para uma direção especificada da fase normal existe geralmente três ondas planas independentes com diferentes velocidades de fase em um meio anisotrópico, duas ondas planas independentes em um meio isotrópico e uma onda plana em um meio acústico.

2. Vetores de velocidade de fase e de grupo são geralmente diferentes em um meio anisotrópico, onde a velocidade de grupo é maior que a velocidade de fase. A velocidade de grupo e a velocidade de fase têm o mesmo tamanho e direção em meio isotrópico e acústico.
3. Vetores de velocidade de fase e de grupo são geralmente angularmente dependentes em meio anisotrópico. Especificamente, ambos dependem da normal  $N_i$  da frente de fase. A velocidade de fase (e também a velocidade de grupo) é a mesma em todas as direções em meio isotrópico e acústico.
4. A polarização da onda em meio anisotrópico é geralmente linear com a direção de polarização geralmente diferente da direção da fase normal, da tangente da frente de onda ou do vetor de velocidade de grupo. Em meio isotrópico, a direção de polarização é paralela a fase normal (ondas  $P$ ) ou no plano da frente de fase (ondas  $S$ ). A polarização das ondas  $P$  é linear, das ondas  $S$  é geralmente elíptica ou quase-elíptica. A polarização da onda no caso acústico é a mesma que para onda  $P$  no caso isotrópico.
5. Singularidades da onda cisalhante ocorrem em certas direções em meio anisotrópico. Nestas direções, ondas  $qS_1$  e  $qS_2$  propagam com mesma velocidade de fase e têm comportamento complicado. Estas singularidades usualmente não existem para ondas  $P$  em meio anisotrópico bem como para todo tipo de onda em meio isotrópico e meio acústico.

## 6.6 Ondas Planas Inomogêneas

Até este momento assumimos que o vetor de vagarosidade  $p_i$  possuía valores reais. Mas as equações de movimento podem ser satisfeitas também para ondas planas com valores complexos no vetor  $p_i$ . Para tais vetores podemos escrever

$$p_l = p_l^R + ip_l^I. \quad (6.94)$$

Consideremos uma onda plana acústica harmônica no tempo com vetor de vagarosidade como acima, então temos

$$p(x_m, t) = P \exp(-\omega p_m^I x_m) \exp[-i\omega(t - p_m^R x_m)], \quad (6.95)$$

$$v_i(x_m, t) = \rho^{-1} P p_i \exp(-\omega p_m^I x_m) \exp[-i\omega(t - p_m^R x_m)]. \quad (6.96)$$

A amplitude da onda acústica com vetor de vagarosidade de valores complexos não é constante e decai exponencialmente na direção de  $p_m^I$ . A velocidade de decaimento depende do tamanho de  $p_m^I$  e da frequência circular  $\omega$ . Então juntamente com o plano de fase constante  $p_m^R x_m = \text{const}$ , definimos o plano de amplitudes constantes  $p_m^I x_m = \text{const}$ , ao longo do qual as amplitudes não variam. Já mostramos que o vetor de vagarosidade da onda acústica satisfaz

$$p_i p_i = c^{-2}, \quad c = (\rho \kappa)^{-1/2}. \quad (6.97)$$



Para  $p_i$  complexo temos

$$p_i^R p_i^R - p_i^I p_i^I = \text{Re}(c^{-2}), \quad 2p_i^R p_i^I = \text{Im}(c^{-2}) \quad (6.98)$$

Agora excluimos o caso em que  $\text{Im}(c^{-2}) \neq 0$  que corresponde a meio com absorção. Então temos  $\text{Im}(c^{-2}) = 0$ , o que implica

$$p_i^R p_i^I = 0, \quad (6.99)$$

isto é, as partes reais e imaginárias do vetor de vagarosidade são mutuamente perpendiculares. Isto significa que o plano de fase constante e o plano de amplitude constante são perpendiculares. Tal onda é chamada de onda inomogênea em contraste com a onda homogênea cujos planos de fase constante e amplitude constante coincidem. As ondas planas consideradas até agora são homogêneas. Considerando que há absorção, que o vetor de vagarosidade possui valores complexos junto com velocidade de fase complexa, podemos obter um vetor de vagarosidade com  $p_i^R$  e  $p_i^I$  paralelos.

Ondas planas inomogêneas não podem existir em meios não limitados sem fontes. Elas podem vir durante o processo de reflexão/transmissão de uma onda plana num plano de interface, e possuem papel importante na expansão de ondas esféricas em ondas planas.

Vimos que a amplitude da onda plana inomogênea harmônica no tempo varia ao longo da frente de fase. A frente de fase  $p_m^R x_m = \text{const}$  se move com a velocidade de fase  $c_R$  que, de acordo com as equações acima, satisfaz

$$\frac{1}{c_R^2} = p_i^R p_i^R = \frac{1}{c^2} + p_i^I p_i^I > \frac{1}{c^2} \quad (6.100)$$

Isto significa que a velocidade de fase de uma onda plana inomogênea é menor que a velocidade de fase de uma onda homogênea.

## 6.7 Condições iniciais e de contorno

Nosso objetivo agora é resolver as equações de movimento para encontrar o vetor de distribuição de deslocamento temporal e espacial (no caso elastodinâmico) vetor de velocidade de partícula e pressão (no caso acústico) em uma dada região. Para este propósito, ainda precisamos saber os valores do vetor de deslocamento  $u_i(x_j, t)$  e sua derivada  $\dot{u}_i(x_j, t)$  para o tempo  $t_0$  em qualquer ponto de uma dada região. Essa informação representa as condições iniciais. Precisamos também saber os valores do vetor de deslocamento e/ou tração na fronteira que cerca a região investigada para um tempo  $t$  qualquer maior que  $t_0$ . Essa informação representa as condições de contorno. A informação final que precisamos é a distribuição espacial das forças no corpo na região investigada para  $t \leq t_0$ . O efeito das forças gravitacionais na propagação de onda é omitida em comparação com o efeito das forças na superfície. Portanto consideramos a contribuição das forças externas no volume como sendo zero.

### 6.7.1 Condições iniciais

Normalmente em sismologia condições iniciais são tais que  $u_i(x_j, t)$  e  $\dot{u}_i(x_j, t)$  são zero em  $t = t_0$ . Nesse momento, isto é,  $t = t_0$ , ou depois, forças concentradas em um ponto começam a agir. Para descrever essa situação usamos duas abordagens.

Na primeira especificamos as forças de volume  $f_i$  na equação de movimento de tal maneira que elas representem fontes sísmicas. Nessa abordagem é, por exemplo, usada quando as equações elastodinâmicas são resolvidas pelos métodos de diferenças finitas ou elementos finitos. Usamos essa aproximação quando olharmos para as soluções das equações elastodinâmicas usando transformadas integrais ou o método de Fourier de separação de variáveis.

Na segunda abordagem consideramos a equação elastodinâmica somente fora da região da fonte. Então o termo  $f_i$  representando as forças no volumes da equação elastodinâmica é zero e a equação se torna homogênea. O efeito de uma fonte é especificado pelas condições de contorno, que são dadas pela superfície cercando a fonte. Tal especificação é conhecida como radiação padrão da fonte. Essa aproximação é típica para a teoria dos raios.

### 6.7.2 Condições de contorno

As várias formas das equações de movimento derivadas podem ser aplicadas para meios no qual os parâmetros elásticos ou compressibilidade e densidade juntas com suas derivadas variam continuamente então os coeficientes da equação de movimento estão definidos. Existem, entretanto, superfícies no meio, onde a continuidade acima é violada (superfícies da Terra, descontinuidade Moho, etc.). Tais superfícies são chamadas fronteiras ou interfaces.

O vetor de deslocamento e a tração devem satisfazer nas fronteiras e interfaces certas condições, chamadas condições de contorno. Às vezes, condições de contorno imposta sobre o vetor deslocamento são chamadas cinemáticas, e as condições impostas sobre a tração são chamadas dinâmicas.

No que se segue consideramos que os dois materiais dos dois lados da interface se encontram em *welded contact*, que traduz literalmente para “contato soldado”, ou mais livremente para “contato colado” ou “grudado”. O significado é que os dois materiais são inseparáveis um do outro. Desta forma *welded contacts* previnem a criação de cavidades nas interfaces ou difusão do material de uma lado da interface para o outro lado. Isso também previne deslizamento dos dois materiais ao longo da interface que separa.

A seguir discutimos as condições sobre o deslocamento e tração resultantes de *welded contacts* de ambas as partes no meio separada pela interface. Consideramos duas situações diferentes.

1. *Interface entre dois meios*

Nesta situação, temos que distinguir três casos.

- (a) *Interface entre dois sólidos*

Para que dois sólidos estejam em *welded contact*, é necessário a continuidade do vetor de deslocamento e da tração através da interface.

(b) *Interface entre fluido e sólido*

Uma vez que as partículas do fluido podem deslizar arbitrariamente ao longo da interface, não podemos impor qualquer condição sobre as componentes tangenciais do vetor deslocamento. Componentes normais do vetor deslocamento, entretanto, devem mudar continuamente na interface para evitar a formação de cavidades ou difusão do fluido no sólido. Observamos ainda que uma tensão tangencial no fluido causaria uma translação, já que nada impede o deslizamento do fluido. Para evitar isso, precisamos exigir que os componentes tangenciais da tração sejam zero e as componentes normais contínuas sobre a interface.

(c) *Interface entre dois fluidos*

Esta é uma situação puramente acústica. Para descrever a propagação de ondas em meios acústicos, usamos o vetor de velocidade da partícula e a pressão ao invés do vetor deslocamento e tração (veja as equações (5.119) e (5.120)). Pelas mesmas razões apresentadas acima, somente as componentes normais do vetor deslocamento e da tração devem mudar continuamente sobre a interface. Essas condições resultam na continuidade da pressão sobre a interface e da componente normal da velocidade da partícula.

2. *Superfície livre*

Por superfície livre, nós entendemos a fronteira entre o sólido ou fluido de um lado e vácuo do outro. Isso aproxima a superfície de continentes da Terra ou do oceano.

(a) *Superfície livre de sólido*

Não podemos impor qualquer condição no vetor deslocamento, mas impomos que a tração seja zero na fronteira.

(b) *Superfície livre de fluido*

Não podemos impor qualquer condição sobre o vetor deslocamento e a componente tangencial da tração. A componente normal da tração, entretanto, deve ser zero. Para os parâmetros do caso acústico, isto resulta na imposição de pressão zero na superfície livre.

Finalmente, notemos que para todos casos especiais de interfaces, condições de contorno podem também ser obtidas de uma maneira formal a partir das condições de contorno para a interface separando meios sólidos. Nessa maneira formal, um fluido é especificado colocando  $\mu = 0$  nas expressões para um sólido isotrópico. O vácuo é especificado colocando-se  $c_{ijkl} = 0$  ou  $\lambda = \mu = 0$  e  $\rho = 0$  na superfície livre.

## 6.8 Reflexão/transmissão de ondas planas

Consideremos uma interface plana  $\Sigma$  com a origem de um eixo de coordenadas cartesianas em um ponto arbitrário de  $\Sigma$ . A escolha dos eixos pode ser também arbitrária. Se  $n_i$  for o vetor normal a  $\Sigma$ , a equação da interface pode ser escrita como  $n_i x_i = 0$ . A interface divide o espaço em dois semi-espacos 1 e 2 que assumimos serem de welded contact. No semi-espaco 1 consideramos uma onda plana propagando em direção a interface que chamamos de onda incidente. A orientação do vetor normal é tal que aponta para o semi-espaco onde a onda incidente se propaga. A fim de satisfazer as condições de contorno vistas anteriormente para  $\Sigma$  introduzimos dois tipos de onda: a onda refletida que se propaga no semi-espaco 1 e a onda transmitida que se propaga no semi-espaco 2.

### 6.8.1 Meio Acústico

Consideremos dois semi-espacos de fluidos separados por uma interface plana  $\Sigma$ . Denotamos a velocidade de fase e a densidade no semi-espaco 1 por  $c_1$  e  $\rho_1$  e no semi-espaco 2 por  $c_2$  e  $\rho_2$ . Usamos o índice  $r$  nos parâmetros que correspondem à onda refletida e o índice  $t$  nos que correspondem à onda transmitida. Então temos

$$p(x_m, t) = PF(t - p_k x_k), \quad (6.101)$$

$$p^r(x_m, t) = P^r F^r(t - p_k^r x_k - \varphi^r), \quad (6.102)$$

$$p^t(x_m, t) = P^t F^t(t - p_k^t x_k - \varphi^t), \quad (6.103)$$

$$v_i(x_m, t) = \rho_1^{-1} P p_i F(t - p_k x_k), \quad (6.104)$$

$$v_i^r(x_m, t) = \rho_1^{-1} P^r p_i^r F^r(t - p_k^r x_k - \varphi^r), \quad (6.105)$$

$$v_i^t(x_m, t) = \rho_2^{-1} P^t p_i^t F^t(t - p_k^t x_k - \varphi^t), \quad (6.106)$$

Aqui  $\varphi^r$  e  $\varphi^t$  representam os possíveis atrasos no tempo da onda refletida e transmitida com relação à onda incidente. As duas condições de contorno podem ser escritas como

$$PF(t - p_k x_k) + P^r F^r(t - p_k^r x_k - \varphi^r) = P^t F^t(t - p_k^t x_k - \varphi^t), \quad (6.107)$$

$$\rho_1^{-1} P p_i F(t - p_k x_k) + \rho_1^{-1} P^r p_i^r F^r(t - p_k^r x_k - \varphi^r) = \rho_2^{-1} P^t p_i^t F^t(t - p_k^t x_k - \varphi^t). \quad (6.108)$$

### Transformação do vetor de vagarosidade através da interface

Pelo fato do nosso modelo ser invariante com respeito à translação paralela da interface  $\Sigma$ , as condições acima precisam ser as mesmas em qualquer ponto de  $\Sigma$  em qualquer momento, ou seja, não podem depender de  $x_k$  e  $t$ . Então em qualquer ponto de  $\Sigma$  e qualquer  $t$  temos

$$F(t - p_k x_k) = F^r(t - p_k^r x_k - \varphi^r) = F^t(t - p_k^t x_k - \varphi^t), \quad (6.109)$$

$$p_k x_k = p_k^r x_k + \varphi^r = p_k^t x_k + \varphi^t. \quad (6.110)$$

Se considerarmos dois pontos  $x_{1i}$  e  $x_{2i}$  de  $\Sigma$  obtemos das relações acima

$$p_k(x_{1k} - x_{2k}) = p_k^r(x_{1k} - x_{2k}) = p_k^t(x_{1k} - x_{2k}) \quad (6.111)$$

Concluimos então que as componentes tangenciais do vetor de vagarosidade das ondas incidente, refletida e transmitida são iguais. Então

$$p_k x_k = p_k^r x_k = p_k^t x_k \Rightarrow \varphi^r = \varphi^t = 0. \quad (6.112)$$

Usamos agora esta relação para escrever  $p_k^r$  e  $p_k^t$  em função de  $p_k$ . Para tal, observamos que o vetor de vagarosidade pode então ser escrito como

$$p_k = a_k + (p_m n_m) n_k, \quad p_k^r = a_k^r + (p_m^r n_m) n_k, \quad p_k^t = a_k^t + (p_m^t n_m) n_k, \quad (6.113)$$

$$(6.114)$$

onde

$$a_k = a_k^r = a_k^t, \quad (6.115)$$

e  $a_k, a_k^r, a_k^t$  são componentes tangenciais vetoriais dos vetores de vagarosidade  $p_k, p_k^r, p_k^t$ . Podemos ainda reescrever a expressão acima como

$$p_k - (p_m n_m) n_k = p_k^r - (p_m^r n_m) n_k = p_k^t - (p_m^t n_m) n_k. \quad (6.116)$$

Para determinar  $p_k^r$  e  $p_k^t$  usamos a equação eikonal

$$p_i p_i = c^{-2}, \quad (6.117)$$

que precisa ser satisfeita para ambos os lados da interface para as 3 ondas. Temos então

$$p_i p_i = a_i a_i + (p_m n_m)^2 = c_1^{-2}, \quad (6.118)$$

$$p_i^r p_i^r = a_i a_i + (p_m^r n_m)^2 = c_1^{-2}, \quad (6.119)$$

$$p_i^t p_i^t = a_i a_i + (p_m^t n_m)^2 = c_2^{-2}. \quad (6.120)$$

Da última equação obtemos

$$p_m^t n_m = -(c_2^{-2} - a_i a_i)^{1/2} = -[c_2^{-2} - c_1^{-2} + (p_m n_m)^2]^{1/2}. \quad (6.121)$$

Observemos que o sinal negativo se deve ao fato de que  $n_i$  aponta contra  $p_i$  e  $p_i^t$ . Usamos agora a igualdade dos componentes tangenciais do vetor de vagarosidade juntamente com a equação acima e obtemos

$$p_k^t = p_k - (p_m n_m) n_k + [c_2^{-2} - c_1^{-2} + (p_m n_m)^2]^{1/2} n_k, \quad (6.122)$$

$$p_m^r n_m = +(c_1^{-2} - a_i a_i)^{1/2} = [(p_m n_m)^2]^{1/2} = -p_m n_m, \quad (6.123)$$

$$p_k^r = p_k - 2(p_m n_m) n_k. \quad (6.124)$$

Podemos notar que a onda transmitida possui vetor de vagarosidade com valores reais somente se

$$c_2^{-2} - c_1^{-2} + (p_m n_m)^2 \geq 0. \quad (6.125)$$

Usamos agora o índice  $g$  para os parâmetros das ondas geradas (refletida ou transmitida). Chamamos  $\theta$  (ângulo de incidência) o ângulo agudo entre a normal  $n_i$  e o vetor de vagarosidade  $p_i$  da onda incidente, e  $\theta_g$  (ângulo de reflexão/transmissão) o ângulo agudo entre  $n_i$  e  $p_i^g$  das ondas geradas. Note que  $\theta_r = \theta$ . Temos então

$$c_1^{-2}(1 - \cos^2 i) = c_g^{-2}(1 - \cos^2 \theta_g), \quad (6.126)$$

e como  $\theta$  e  $\theta_g$  são ângulos agudos temos

$$\frac{\sin \theta}{c_1} = \frac{\sin \theta_g}{c_g}. \quad (6.127)$$

Esta igualdade é conhecida como Lei de Snell.

Usamos esses ângulos para reescrever a condição para que  $p_k^t$  possua valores reais,

$$c_2^{-2} - c_1^{-2} + c_1^{-2} \cos^2 \theta = c_2^{-2} \cos^2 \theta_t \geq 0 \quad (6.128)$$

$$(6.129)$$

ou

$$\frac{c_2}{c_1} \sin \theta = \sin \theta_t \leq 1. \quad (\text{Lei de Snell}) \quad (6.130)$$

Esta desigualdade garante a existência de valores reais de  $p_k^t$  e do ângulo real de transmissão  $\theta_t$ . Para  $\sin \theta_t = 1$ , que pode ser verdadeira somente se  $c_1 \leq c_2$ , temos

$$\sin \theta^* = \frac{c_1}{c_2}, \quad (6.131)$$

onde o ângulo de incidência  $\theta^*$  é chamado de ângulo crítico. Os ângulos de transmissão correspondentes são  $\theta_t = 1/2\pi$ , isto é, as ondas transmitidas se propagam paralelamente à  $\Sigma$ . Se  $\theta < \theta^*$  temos o que chamamos de incidência subcrítica e se  $\theta > \theta^*$  temos incidência supercrítica. Para

$$c_2^{-2} - c_1^{-2} + c_1^{-2} \cos^2 \theta = c_2^{-2} \cos^2 \theta_t < 0, \quad (6.132)$$

$$\sin \theta > \frac{c_1}{c_2}, \quad (6.133)$$

$p_k^t$  e  $\theta_t$  assumem valores complexos, que ocorre no caso de incidência sobre-crítica.

Podemos então escrever  $p_k^t$  como

$$p_k^t = p_k^{tR} + ip_k^{tI}, \quad (6.134)$$

onde

$$p_k^{tR} = p_k - (p_m n_m) n_k, \quad (6.135)$$

$$p_k^{tI} = \pm - [c_1^{-2} - c_2^{-2} - (p_m n_m)^2]^{1/2} n_k. \quad (6.136)$$

Já vimos que este vetor pertence a uma onda inomogênea. O sinal na frente da raiz quadrada precisa ser escolhido de forma que a amplitude da onda plana inomogênea transmitida decresça com o aumento da distância à interface. Por simplicidade escolhemos o sinal da onda plana acústica inomogênea harmônica no tempo de pressão. A onda plana acústica inomogênea transmitida de pressão tem a forma

$$p^t(x_m, t) = P^t \exp(-wp_m^{tI} x_m) \exp[-iw(t - p_m^{tR} x_m)]. \quad (6.137)$$

Esta expressão descreve uma onda inomogênea aceitável fisicamente se

$$p_m^{tI} x_m > 0 \quad (6.138)$$

no semiespaço 2, isto é, se

$$\pm[c_1^{-2} - c_2^{-2} - (p_m n_m)^2]^{1/2} n_k x_k > 0. \quad (6.139)$$

Como no semiespaço 2,

$$n_k x_k < 0, \quad (6.140)$$

$p_m^{tI} x_m$  é positivo se escolhemos o sinal negativo na frente da raiz quadrada. Das expressões para  $p_m^{tR}$  vemos que o vetor  $p_m^{tR}$  é paralelo a  $\Sigma$ . Para a velocidade de fase desta onda temos

$$c_R^{-2} = p_i^{tR} p_i^{tR} = c_2^{-2} + p_i^{tI} p_i^{tI} = c_2^{-2} + c_1^{-2} - c_2^{-2} - c_1^{-2} \cos^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{c_1^2}. \quad (6.141)$$

Portanto

$$c_R = \frac{c_1}{\sin \theta}. \quad (6.142)$$

A velocidade de fase  $c_R$  de uma onda inomogênea transmitida corresponde à aparente velocidade da frente de fase da onda incidente que se move ao longo de  $\Sigma$ . Esta velocidade diminui com o crescimento de  $\theta$ , se  $\theta = \theta^*$ ,  $c_R = c_2$  e se  $\theta = 1/2\pi$  então  $c_R = c_1$ .

O vetor  $p_i^{tI}$  é perpendicular à  $\Sigma$ , ou seja, a direção de maior decrescimento da amplitude é na direção oposta a  $n_i$ . Para onda incidentes sobre-críticas, o decaimento aumenta com o crescimento do ângulo de incidência. Para  $i = i_*$ ,  $p_i^{tI} = 0$ , isto é, não há decaimento e estamos trabalhando com ondas transmitidas homogêneas propagando ao longo de  $\Sigma$  com velocidade de fase  $c_R = c_2$ . Para  $i = 1/2\pi$ ,  $p_i^{tI} = -(c_1^{-2} - c_2^{-2})^{1/2} n_k$ .

## 6.8.2 Meio Isotrópico

Consideremos dois semi-espacos isotrópicos homogêneos de um espaço separados por uma interface plana  $\Sigma$ . Consideremos um sistema de coordenadas arbitrário, cuja origem está contida no plano  $\Sigma$ . A densidade e as velocidades das ondas  $P$  e  $S$  são denotadas por  $\rho_1$ ,  $\alpha_1$  e  $\beta_1$  no semi-espaco 1 e por  $\rho_2$ ,  $\alpha_2$  e  $\beta_2$  no semi-espaco 2. Duas condições de contorno vetoriais (seis escalares) são necessárias: continuidade do vetor de deslocamento

e continuidade da tração (vetor de tensão) através da interface  $\Sigma$ . Para satisfazer estas condições, consideramos duas ondas refletidas ( $P$  e  $S$ ) e duas ondas transmitidas ( $P$  e  $S$ ) geradas pela incidência da onda plana  $P$  ou  $S$  em  $\Sigma$ . Chamamos as ondas geradas, que são do mesmo tipo que a onda incidente, de *ondas não-convertidas*, e as outras ondas de *ondas convertidas* ou *ondas monotípicas*. O deslocamento da onda incidente  $P$  é

$$u_i(x_m, t) = AN_i F(t - p_k x_k) , \quad (6.143)$$

e o deslocamento da onda incidente  $S$  é

$$u_i(x_m, t) = (Bg_i^{(1)} + Cg_i^{(2)})F(t - p_k x_k) . \quad (6.144)$$

Os vetores  $g_i^{(1)}$ ,  $g_i^{(2)}$  e  $N_i$  são três vetores unitários mutuamente perpendiculares,  $N_i$  é perpendicular a frente de fase,  $g_i^{(1)}$  e  $g_i^{(2)}$  estão no plano da frente de fase.  $A$  caracteriza o tamanho do vetor deslocamento da onda incidente  $P$ .  $B$  e  $C$  caracterizam os tamanhos das projeções do vetor deslocamento da onda incidente  $S$  nos vetores  $g_i^{(1)}$  e  $g_i^{(2)}$ . Parâmetros relacionados com a onda refletida estão denotados pelo índice superior  $r$ , já os relacionados com a onda transmitida estão denotados pelo índice superior  $t$ . Portanto, as quantidades  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $F$  e  $p_k$  são supostamente conhecidas, e as quantidades  $A^r$ ,  $B^r$ ,  $C^r$ ,  $A^t$ ,  $B^t$ ,  $C^t$ ,  $F^r$ ,  $F^t$ ,  $p_k^r$  e  $p_k^t$  devem ser determinadas.

A expressão para a tração pode ser escrita como

$$T_i = \tau_{ij} n_j = \lambda n_i u_{k,k} + \mu n_j (u_{i,j} + u_{j,i}) . \quad (6.145)$$

Para o caso da onda incidente  $P$  obtemos

$$T_i = -A(\lambda_1 n_i N_k p_k + 2\mu_1 n_j p_j N_i) \dot{F}(t - p_k x_k) , \quad (6.146)$$

e para o caso da onda incidente  $S$  obtemos

$$T_i = -[B(g_i^{(1)} p_j + g_j^{(1)} p_i) + C(g_i^{(2)} p_j + g_j^{(2)} p_i)] \mu_1 n_j \dot{F}(t - p_k x_k) . \quad (6.147)$$

Podemos agora escrever as seis condições de contorno como

$$A^t N_i^t F_p^t + B^t g_i^{(1)t} F_s^t + C^t g_i^{(2)t} F_s^t - A^r N_i^r F_p^r - B^r g_i^{(1)r} F_s^r - C^r g_i^{(2)r} F_s^r = D_i , \quad (6.148)$$

$$A^t X_i^t \dot{F}_p^t + B^t Y_i^t \dot{F}_s^t + C^t Z_i^t \dot{F}_s^t - A^r X_i^r \dot{F}_p^r - B^r Y_i^r \dot{F}_s^r - C^r Z_i^r \dot{F}_s^r = E_i . \quad (6.149)$$

A equação (6.148) resulta da continuidade do deslocamento e equação (6.149) da continuidade da tração. A seguinte notação foi usada

$$\begin{aligned} X_i &= \lambda n_i N_k p_k + 2\mu n_j p_j N_i , \\ Y_i &= \mu n_j (g_i^{(1)} p_j + g_j^{(1)} p_i) , \\ Z_i &= \mu n_j (g_i^{(2)} p_j + g_j^{(2)} p_i) . \end{aligned} \quad (6.150)$$

Os termos  $D_i$  e  $E_i$  são dados por

$$D_i = AN_i F_p , \quad E_i = AX_i \dot{F}_p , \quad (6.151)$$

no caso da onda incidente  $P$  e por

$$D_i = BF_s g_i^{(1)} + CF_s g_i^{(2)} , \quad E_i = BY_i \dot{F}_s + CZ_i \dot{F}_s , \quad (6.152)$$

no caso da onda incidente  $S$ .



## Transformação do vetor vagarosidade através da interface

Pelo mesmo argumento que o usado no caso acústico, podemos encontrar que os sinais analíticos e suas derivadas correspondendo a ondas geradas são os mesmos que os sinais analíticos e suas derivadas correspondendo a onda incidente em qualquer ponto da interface  $\Sigma$ . Como no caso acústico, podemos encontrar a equação para determinar o vetor vagarosidade  $\tilde{p}_i$  para qualquer onda gerada

$$\tilde{p}_i = p_i - \{(p_m n_m) \pm [\tilde{V}^{-2} - V^{-2} + (p_m n_m)^2]^{1/2}\} n_i , \quad (6.153)$$

onde " + " corresponde à onda transmitida e " - " à onda refletida. Os símbolos  $V$  e  $\tilde{V}$  denotam a velocidade  $\alpha$  ou  $\beta$  da onda incidente e da onda gerada, respectivamente. A equação (6.153) vale para qualquer onda refletida ou transmitida. No caso da reflexão de uma onda não-convertida, quando  $\tilde{V} = V$ , obtemos

$$\tilde{p}_k = p_k - 2(p_m n_m) n_k . \quad (6.154)$$

A única condição que deve ser satisfeita pelos vetores  $g_i^{(1)r}$  e  $g_i^{(2)r}$  na onda  $S$  refletida e  $g_i^{(1)t}$  e  $g_i^{(2)t}$  na onda  $S$  transmitida, é a condição de eles serem mutuamente perpendiculares em suas respectivas ondas, assim como os vetores  $g_i^{(1)}$ ,  $g_i^{(2)}$  e  $p_i$  são mutuamente perpendiculares na onda incidente  $S$ . Podemos introduzir os ângulos de incidência, transmissão e reflexão para derivar a lei de Snell para o caso do meio isotrópico. A fórmula (6.154) nos fornece que

$$\frac{\sin i_p^r}{\alpha_1} = \frac{\sin i_s^r}{\beta_1} = \frac{\sin i_p^t}{\alpha_2} = \frac{\sin i_s^t}{\beta_2} = \frac{\sin i}{V} . \quad (6.155)$$

Se  $\alpha_1 < \beta_2$  e  $\alpha_1 < \alpha_2$ , para uma onda incidente  $P$ , dois ângulos críticos existem,

$$\sin i_1^* = \alpha_1 / \alpha_2 , \quad \sin i_2^* = \alpha_1 / \beta_2 . \quad (6.156)$$

Para uma onda incidente  $S$  sempre podem existir três ângulos críticos se  $\beta_1 < \alpha_1$ ,  $\beta_1 < \beta_2$ ,  $\beta_1 < \alpha_2$ . Incidência super-crítica está conectada com a geração de não-homogeneidade transmitida e também com ondas refletidas. Seu comportamento é similar ao comportamento das ondas acústicas não-homogêneas.

## Coefficientes de reflexão e transmissão

Devido a igualdade do sinal analítico das ondas incidente e gerada ao longo de  $\Sigma$ , as condições de contorno se reduzem ao seguinte sistema de seis equações lineares não-homogêneas pelas seis variáveis,  $A^r$ ,  $B^r$ ,  $C^r$ ,  $A^t$ ,  $B^t$ , e  $C^t$ ,

$$A^t N_i^t + B^t g_i^{(1)t} + C^t g_i^{(2)t} - A^r N_i^r - B^r g_i^{(1)r} - C^r g_i^{(2)r} = \tilde{D}_i , \quad (6.157)$$

$$A^t X_i^t + B^t Y_i^t + C^t Z_i^t - A^r X_i^r - B^r Y_i^r - C^r Z_i^r = \tilde{E}_i , \quad (6.158)$$

onde

$$\tilde{D}_i = A N_i , \quad \tilde{E}_i = A X_i , \quad (6.159)$$

no caso da onda incidente  $P$  em  $\Sigma$ , e por

$$\tilde{D}_i = Bg_i^{(1)} + Cg_i^{(2)} , \quad \tilde{E}_i = BY_i + CZ_i , \quad (6.160)$$

no caso da onda incidente  $S$  em  $\Sigma$ .

Podemos introduzir os *coeficientes de deslocamento de reflexão/transmissão*  $R_{mn}^r$ ,  $R_{mn}^t$  ( $m, n = 1, 2, 3$ ), onde o índice  $m$  especifica o tipo de onda incidente e o índice  $n$  o tipo de onda gerada da seguinte maneira:

- $m, n = 1$ : componente  $S1$  da onda  $S$ ;
- $m, n = 2$ : componente  $S2$  da onda  $S$ ;
- $m, n = 3$ : onda  $P$ .

Por componentes  $S1$  e  $S2$  da onda  $S$  entendemos componentes da onda  $S$  nos vetores  $g_i^{(1)}$  e  $g_i^{(2)}$ , respectivamente. Usando esta notação, o coeficiente de reflexão  $R_{31}^r = B^r/A$  corresponde a onda incidente  $P$  e componente  $S1$  da onda  $S$ . Ao todo, nós temos 9 coeficientes de reflexão e outros 9 de transmissão. Antes de olharmos para a expressão analítica dos coeficientes, é razoável resolver o sistema de 6 equações em (6.157) e (6.158) para os coeficientes de reflexão e transmissão numericamente.

No entanto, este sistema pode ser simplificado se escolhermos o sistema de coordenadas de um modo especial, assim como a orientação dos vetores  $g_i^{(1)}$  e  $g_i^{(2)}$ . Vamos escolher os eixos coordenados  $x_1$  e  $x_2$  no plano  $\Sigma$ ,  $x_1$  no plano de incidência e o vetor  $g_i^{(2)}$  perpendicular ao plano de incidência para todas ondas incidentes e geradas. Então, temos o vetor deslocamento da onda  $P$  e a componente  $S1$  da onda  $S$  situados no plano de incidência, isto é, no plano  $(x_1, x_3)$ . A componente  $S2$  da onda  $S$  é perpendicular ao plano de incidência, ou seja, está dentro da interface  $\Sigma$  e é paralela ao eixo  $x_2$ . Na literatura, as componentes  $S1$  e  $S2$  da onda  $S$  também são chamadas de  $SV$  e  $SH$ , respectivamente. Com isto, temos

$$\vec{N} \equiv (N_1, 0, N_3) , \quad \vec{n} \equiv (0, 0, 1) , \quad \vec{g}^{(1)} \equiv (g_1^{(1)}, 0, g_3^{(1)}) , \quad \vec{g}^{(2)} \equiv (0, 1, 0) . \quad (6.161)$$

Se inserirmos estas especificações nas equações de continuidade, estas por sua vez dividem-se em dois sistemas. O primeiro contém as ondas geradas  $P$  e  $S$  com componente  $S1$ , dado por

$$\begin{aligned} A^t N_1^t + B^t g_1^{(1)t} - A^r N_1^r - B^r g_1^{(1)r} &= \tilde{D}_1 , \\ A^t N_3^t + B^t g_3^{(1)t} - A^r N_3^r - B^r g_3^{(1)r} &= \tilde{D}_3 , \\ A^t X_1^t + B^t Y_1^t - A^r X_1^r - B^r Y_1^r &= \tilde{E}_1 , \\ A^t X_3^t + B^t Y_3^t - A^r X_3^r - B^r Y_3^r &= \tilde{E}_3 . \end{aligned} \quad (6.162)$$

O segundo sistema contém as ondas geradas  $S$  com componente  $S2$ :

$$\begin{aligned} C^t - C^r &= \tilde{D}_2 , \\ C^t Z_2^t - C^r Z_2^r &= \tilde{E}_2 . \end{aligned} \quad (6.163)$$

Substituindo as equações (6.161) nas expressões em (6.150), passamos a ter os vetores  $X_i$ ,  $Y_i$  e  $Z_i$  dados da seguinte forma

$$\begin{aligned} X_1 &= 2\mu p_3 N_1 , & X_2 &= 0 , & X_3 &= \lambda(p_1 N_1 + p_3 N_3) + 2\mu p_3 N_3 , \\ Y_1 &= \mu(g_1^{(1)} p_3 + g_3^{(1)} p_1) , & Y_2 &= 0 , & Y_3 &= 2\mu g_3^{(1)} p_3 , \\ Z_1 &= 0 , & Z_2 &= \mu p_3 , & Z_3 &= 0 . \end{aligned} \quad (6.164)$$

Para uma onda incidente  $P$ , temos a partir das equações em (6.159),

$$\tilde{D}_2 = \tilde{E}_2 = 0 . \quad (6.165)$$

Resultado similar pode ser obtido para uma onda incidente  $S$  com componente  $S1$ . Neste caso, o lado direito do sistema de equações (6.163) é zero e sua solução também é zero. Isto quer dizer que as ondas incidentes  $P$  ou  $S$  com componente  $S1$  não geram uma onda  $S$  com componente  $S2$ . Em outras palavras, uma onda com polarização no plano de incidência não gera ondas polarizadas perpendicularmente ao plano de incidência.

No caso de incidência de uma onda  $S$  com componente  $S2$ , temos a partir das equações em (6.160),

$$\tilde{D}_1 = \tilde{D}_3 = \tilde{E}_1 = \tilde{E}_3 = 0 . \quad (6.166)$$

Neste caso, o primeiro sistema de equações tem solução nula, o que quer dizer que a onda polarizada perpendicularmente ao plano de incidência gera apenas onda cisalhante polarizada no mesmo sentido. Podemos então investigar independentemente os processos reflexão/transmissão de ondas polarizadas no plano de incidência ( $P, S1$ ) e ondas polarizadas perpendicularmente ao plano de incidência ( $S2$ ).

Pela introdução anterior do sistema especial de coordenadas e pelo escolha especial dos vetores de polarização correspondendo a ondas incidentes e geradas, reduzimos o número de coeficientes de reflexão e transmissão, cada um de 9 para 5 ( $R_{33}, R_{31}, R_{13}, R_{11}$  e  $R_{22}$ ). Estes coeficientes podem ser simplesmente obtidos na forma analítica resolvendo o sistema de equações separados.

### Coeficientes de reflexão de superfície livre

Para a onda incidente  $S$  com componente  $S2$ , o coeficiente de reflexão é igual a 1 desde que toda a energia incidente é transferida em apenas uma onda refletida com a mesma polarização que a onda incidente. Não há *incidência crítica* neste caso.

A onda  $P$  incidente em uma superfície livre também não tem incidência crítica desde que a velocidade da onda incidente é maior ou igual que qualquer velocidade das ondas geradas. *Incidência crítica* pode ocorrer no caso da incidência de uma onda  $S$  com componente  $S1$ .

A condição para o ângulo crítico  $\theta^*$  é

$$\text{sen } \theta^* = \beta_1 / \alpha_1 . \quad (6.167)$$

Para um sólido de Poisson, ( $\alpha_1 / \beta_1 = \sqrt{3}$ ), a fórmula acima fornece  $\theta^* \sim 35^\circ$ . Como o material da Terra perto da superfície da Terra normalmente não desvia-se muito de um sólido de Poisson,  $\theta^* \sim 35^\circ$  pode ser tomado como o ângulo crítico da onda  $S$  polarizada no plano de incidência e incidente na superfície da Terra.

Quando as medidas são realizadas na superfície da Terra, nós não registramos apenas uma onda incidente, mas também as ondas geradas por sua incidência. Notemos que o mesmo fenômeno pode ser observado em interfaces inseridas num meio. No caso da incidência de uma onda  $S$  com componente  $S2$ , nós registramos duas ondas de mesma

amplitude, incidência e reflexão (coeficiente de reflexão é igual a 1), ambos polarizados no mesmo sentido. O efeito da superfície livre é então que observamos amplitudes duplicadas da onda incidente  $S$  com componente  $S2$ . No caso da incidência da onda  $P$  ou  $S$  com componente  $S1$ , registramos onda incidente e ondas refletidas convertidas e não-convertidas

Para obter o deslocamento total registrado na superfície da Terra, a amplitude e o vetor deslocamento da onda incidente devem ser multiplicados pelos chamados *coeficientes de conversão*, os quais incorporam os efeitos das ondas geradas e fornecem componente precisa do vetor deslocamento. Para uma onda  $S$  com componente  $S2$ , existe apenas um coeficiente de conversão e seu valor é 2. Para uma onda  $P$  incidente com componente  $S1$ , existem coeficientes para as componentes horizontal e vertical. Para  $\theta < \theta^*$ , os coeficientes de conversão assumem valores reais e a forma da onda registrada é a mesma forma da onda incidente. Para  $\theta > \theta^*$ , porém, os coeficientes tornam-se complexos e a forma da onda registrada muda. Assim, neste caso é difícil reconstruir a forma da onda incidente das observações. Por esta razão, os estudos locais da onda de cisalhamento são normalmente limitados numa região chamada *janela da onda de cisalhamento*, ou seja, a região especificada por ângulos de incidência  $\theta < \theta^*$ , no caso de sólidos de Poisson para ângulos  $i < 35^\circ$ .

## 6.9 Coeficientes de reflexão/transmissão

Já sabemos que  $F(\xi) = F^r(\xi) = F^t(\xi)$  ao longo da interface  $\Sigma$ . Pelas condições de contorno, temos

$$P + P^r = P^t, \quad \rho_1^{-1} P p_l n_l + \rho_1^{-1} P^r p_l^r n_l = \rho_2^{-1} P^t p_l^t n_l. \quad (6.168)$$

Acima temos dois sistema não-homogêneos nas variáveis  $P^r$  e  $P^t$ . Mas

$$p_k^r = p_k - 2(p_m n_m) n_k \quad \Rightarrow \quad p_k^r n_k = p_k n_k - 2(p_m n_m) n_k n_k \quad \Rightarrow \quad p_k^r n_k = p_k n_k,$$

que pode ser introduzida na segunda equação da equação (6.168). Vamos introduzir as seguintes quantidades

$$R_P^r = \frac{P^r}{P}, \quad R_P^t = \frac{P^t}{P}$$

que são chamados os coeficientes de reflexão/transmissão, respectivamente. Introduzindo esta definição na equação(6.168), temos

$$R_P^r - R_P^t = -1, \quad \rho_1^{-1} p_l n_l R_P^r + \rho_2^{-1} p_l^t n_l R_P^t = \rho_1^{-1} p_l n_l,$$

cuja solução é

$$R_P^r = \frac{\rho_2 p_l n_l - \rho_1 p_l^t n_l}{\rho_2 p_l n_l + \rho_1 p_l^t n_l}, \quad R_P^t = \frac{2\rho_2 p_l n_l}{\rho_2 p_l n_l + \rho_1 p_l^t n_l},$$

a partir da equações acima vemos que contra a nossa intuição  $R_P^r + R_P^t \neq 1$ .

Usando os ângulos de incidência e reflexão/transmissão, obtemos

$$R_P^r = \frac{\rho_2 c_2 \cos(\theta) - \rho_1 c_l \cos(\theta_t)}{\rho_2 c_2 \cos(\theta) + \rho_1 c_l \cos(\theta_t)}, \quad R_P^t = \frac{2\rho_2 c_2 \cos(\theta)}{\rho_2 c_2 \cos(\theta) + \rho_1 c_l \cos(\theta_t)},$$

pois  $p_l n_l = |\vec{p}| \cos(\theta) = c_1^{-1} \cos(\theta)$  e analogamente  $p_l^t n_l = c_2^{-1} \cos(\theta_t)$ .

Gostaríamos de introduzir algumas notações úteis que aparecem com certa frequência na literatura. O vetor vagarosidade pode ser escrito da seguinte forma

$$\vec{p} = (p, 0, P_{(p)}),$$

onde  $p$  é a chamada vagarosidade horizontal. Podemos escrever os coeficientes de reflexão/transmissão como

$$R_P^r = \frac{\rho_2 P_{1(p)} - \rho_1 P_{2(p)}}{\rho_2 P_{1(p)} + \rho_1 P_{2(p)}}, \quad R_P^t = \frac{2\rho_2 P_{1(p)}}{\rho_2 P_{1(p)} + \rho_1 P_{2(p)}},$$

pois  $p_l n_l = P_{1(p)} = \cos(\theta)/c_1$ ,  $p_l^t n_l = P_{2(p)} = \cos(\theta_t)/c_2$  e  $p = \sin(\theta)/c$ . Outra notação é utilizando a impedância  $I = \rho c \sec(\theta)$ , e assim os coeficiente de reflexão/transmissão podem ser reescritos como

$$R_P^r = \frac{I_2 - I_1}{I_2 + I_1}, \quad R_P^t = \frac{2I_2}{I_2 + I_1},$$

quando  $\theta = \theta_t = 0$ , incidência vertical, chamamos  $I = \rho c$  de impedância novamente, e neste caso também

$$R_P^r = \frac{I_2 - I_1}{I_2 + I_1}, \quad R_P^t = \frac{2I_2}{I_2 + I_1}.$$

Note que os coeficientes de reflexão/transmissão introduzidos acima relacionam a pressão da onda refletida/transmitida com a pressão da onda incidente

$$p_r = R_P^r p, \quad p_t = R_P^t p,$$

e são, portanto, chamados coeficientes de reflexão/transmissão de pressão. De maneira análoga podemos introduzir os coeficientes de velocidade de partícula  $R^r$ ,  $R^t$  por

$$A^r = R^r A, \quad A^t = R^t A,$$

onde  $A$ ,  $A^r$  e  $A^t$  são definidos como se segue

$$\begin{aligned} v_i &= A N_i F(t - p_k x_k), & A &= \rho_1^{-1} P c_1^{-1}, \\ v_i^r &= A^r N_i^r F(t - p_k^r x_k), & A^r &= \rho_1^{-1} R_P^r P c_1^{-1}, \\ v_i^t &= A^t N_i^t F(t - p_k^t x_k), & A^t &= \rho_2^{-1} R_P^t P c_2^{-1}. \end{aligned}$$

Simplificando, temos

$$R^r = \frac{A^r}{A} = \frac{\rho_1^{-1} R_P^r P c_1^{-1}}{\rho_1^{-1} P c_1^{-1}} = R_P^r,$$

$$R^t = \frac{A_t}{A} = \frac{\rho_2^{-1} R_P^t P c_2^{-1}}{\rho_1^{-1} P c_1^{-1}} = \rho_2^{-1} c_2^{-1} \rho_1 c_1 R_P^t.$$

Logo o coeficiente de reflexão de velocidade de partículas  $R_r$  é igual ao de pressão  $R_P^r$ . Mas, o coeficiente de transmissão de velocidade de partículas é:

$$R^t = \frac{2\rho_1 c_1 \cos(\theta)}{\rho_2 c_2 \cos(\theta) + \rho_1 c_1 \cos(\theta_t)}$$

Considere

$$n = \frac{c_1}{c_2}, \quad m = \frac{\rho_2}{\rho_1},$$

onde,  $n$  é o índice de refração. É útil expressar  $R^r$  e  $R^t$  somente em termos do ângulo de incidência  $\theta$ . Então

$$R^r = \frac{m \cos(\theta) - (n^2 - \sin^2(\theta))^{1/2}}{m \cos(\theta) + (n^2 - \sin^2(\theta))^{1/2}} \quad R^t = \frac{2n \cos(\theta)}{m \cos(\theta) - (n^2 + \sin^2(\theta))^{1/2}},$$

pois,

$$\frac{c_2^2}{c_1^2} \sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta_t) \Rightarrow \cos^2(\theta_t) = 1 - \frac{1}{n^2} \sin^2(\theta) \Rightarrow m \cos(\theta_t) = (n^2 - \sin^2(\theta))^{1/2}.$$

## 6.10 Propriedades dos coeficientes de reflexão/transmissão

No caso do ângulo de incidência ser zero, i.e.,  $\theta = 0$ , temos uma incidência normal. A lei de Snell produz  $\theta_t = \theta_r = 0$  e as leis de reflexão/transmissão dos vetores vazarosidade geram

$$p_k^r = -p_k, \quad p_k^t = \frac{-n_k}{c_2}.$$

Os coeficientes  $R^r$  e  $R^t$ , tem a forma

$$R^r = \frac{m - n}{m + n} = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1}, \quad R^t = \frac{2n}{m + n} = \frac{2\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1}.$$

Os coeficientes de pendem dos produtos de  $\rho$  e  $c$  somente, os quais são chamados impedâncias características.

No caso que  $c_1 = c_2$  (pela lei de Snell  $\theta = \theta_t$ ), mas  $\rho_1 \neq \rho_2$ , os coeficiente de reflexão/transmissão de a forma

$$R^r = \frac{m - 1}{m + 1}, \quad R^t = \frac{2}{m + 1}.$$

Vemos que os coeficiente não dependem do ângulo de incidência.

No caso em que

$$m \cos(\theta) - n \cos(\theta_t) = m \cos(\theta) - (n^2 - \sin^2(\theta))^{1/2} = 0,$$

o coeficiente  $R^r$  se torna zero. Este fenômeno é chamado de transparência total da interface. Da equação acima podemos encontrar o ângulo de transparência total. Elevando ao quadrado a equação acima, temos

$$m^2 \cos^2(\bar{\theta}) = n^2 - \sin^2(\bar{\theta}),$$

obtendo

$$(m^2 - n^2) \cos^2(\bar{\theta}) = n^2 - \sin^2(\bar{\theta}) - n^2 \cos^2(\bar{\theta}) = n^2(1 - \cos^2(\bar{\theta})) - \sin^2(\bar{\theta}),$$

e, portanto

$$\tan^2(\bar{\theta}) = \frac{m^2 - n^2}{n^2 - 1}.$$

Note que o ângulo de transparência total é real quando temos simultaneamente  $m > n > 1$  ou  $m < n < 1$ .

Derivando as expressões para os coeficiente de reflexão/transmissão em relação ao ângulo de incidência podemos concluir que:

a-) para  $n > 1$  ( $c_1 > c_2$ ): os coeficiente  $R^r$  e  $R^t$  são funções monotonicamente decrescentes do ângulo de incidência.

b-) para  $n < 1$  ( $c_1 < c_2$ ): os coeficiente  $R^r$  e  $R^t$  são funções monotonicamente crescentes do ângulo de incidência, mas somente no intervalo  $0 \leq \theta \leq \theta^*$ . Para  $\theta > \theta^*$ , os coeficientes de reflexão/transmissão se tornam complexos, pois  $\theta_t$  se torna complexo. O coeficiente  $R^r$  para  $\theta > \theta^*$  tem a forma

$$R^r = \frac{m \cos(\theta) - i(\sin^2(\theta) - n^2)^{1/2}}{m \cos(\theta) + i(\sin^2(\theta) - n^2)^{1/2}}.$$

Botamos o sinal em frente da raiz quadrada de acordo com a escolha prévia quando determinamos o vetor vagarosidade da onda inhomogênea transmitida. Para  $\theta > \theta^*$ , i.e., quando  $\theta_t$  se torna complexo, temos

$$\begin{aligned} \cos(\theta_t) &= -c_2(p_k^t n_k) = -ic_2(p_k^t n_k) = ic_2(c_1^{-2} - c_2^{-2} - c_1^{-2} \cos^2(\theta))^{1/2} \\ &= \frac{i}{n}(\sin^2(\theta) - n^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

O coeficiente de reflexão pode também ser reescrito como:

$$R^r = |R^r| e^{i\varphi_r},$$

onde

$$|R^r| = 1, \quad \varphi_r = -2 \tan^{-1} \left[ \frac{(\sin^2(\theta) - n^2)^{1/2}}{m \cos(\theta)} \right].$$

Podemos ver que a reflexão supercrítica é total, pois o módulo do coeficiente de reflexão é igual a 1.

O coeficiente de transmissão é também complexo. Seu módulo varia de  $2n/m$  de  $\theta = \theta^*$  a zero para  $\theta \rightarrow \pi/2$ . A mudança de fase  $\varphi_t$  representa a metade da mudança da fase do coeficiente de reflexão, i.e.,  $\varphi_t = \frac{1}{2}\varphi_r$ .

---

<sup>1</sup>neste caso temos reflexão total, e como  $\theta_t = \pi/2$ , concluímos que  $R_p^r = 1$ .

## 6.11 Considerações energéticas

Como já mostrado na seção 6.4.1, o fluxo de energia integrada no tempo de uma onda acústica plana

$$\hat{S}_i = \rho^{-1} p_i P P^* f_a, \quad (6.169)$$

onde  $f_a = \int_{-\infty}^{\infty} g^2 dt$ . Também consideremos as situações, na quais  $p_i$  se torna complexo (incidência supercrítica). Então a equação (6.169) deve ser lida como,

$$\hat{S}_i = \rho^{-1} p_i^R P P^* f_a,$$

onde  $p^R$  é a parte real do vetor vaguesidade,  $p_i = p_i^R + i p_i^I$ . O fluxo de energia através de um elemento da interface  $\Sigma$  com vetor unitário  $n_i$  é

$$\begin{aligned} |\hat{S}_i n_i| &= \rho^{-1} |p_i n_i| P P^* f_a = \rho^{-1} c^{-1} \cos(\theta) P P^* f_a & \text{se } p_i^I = 0, \\ |\hat{S}_i n_i| &= \rho^{-1} |p_i^R n_i| P P^* f_a = 0 & \text{se } p_i^I \neq 0, \end{aligned}$$

pois já demonstramos que  $p_i^R$  e  $n_i$  são ortogonais.

Podemos introduzir os coeficientes de energia de reflexão/transmissão  $R_E$  por

$$R_E^r R_E^{r*} = \frac{|\hat{S}_i^r n_i|}{|\hat{S}_i n_i|}, \quad T = R_E^t R_E^{t*} = \frac{|\hat{S}_i^t n_i|}{|\hat{S}_i n_i|},$$

onde  $R, T$  são os coeficientes de energia, e  $R_E^{r,t}$  são os coeficientes normalizados na energia.

E imediatamente, a partir da definição acima, vemos que

$$\begin{aligned} R_E^r R_E^{r*} &= \frac{\rho_1^{-1} c_1^{-1} \cos(\theta) P^r P^{r*} f_a}{\rho_1^{-1} c_1^{-1} \cos(\theta) P P^* f_a} = R_P^r R_P^{r*} \\ R_E^t R_E^{t*} &= \frac{\rho_2^{-1} c_2^{-1} \cos(\theta_t) P^t P^{t*} f_a}{\rho_1^{-1} c_1^{-1} \cos(\theta) P P^* f_a} = R_P^t R_P^{t*} \frac{\rho_1 c_1 \cos(\theta_t)}{\rho_2 c_2 \cos(\theta)} & \text{se } \text{Im } \theta_t = 0, \\ R_E^t R_E^{t*} &= 0 & \text{se } \text{Im } \theta_t \neq 0. \end{aligned}$$

Que resulta em,

$$\begin{aligned} R_E^r &= R_P^r = R^r = \frac{\rho_2 c_2 \cos(\theta) - \rho_1 c_1 \cos(\theta_t)}{\rho_2 c_2 \cos(\theta) + \rho_1 c_1 \cos(\theta_t)} \\ R_E^t &= R_P^t \left( \frac{\rho_1 c_1 \cos(\theta_t)}{\rho_2 c_2 \cos(\theta)} \right)^{1/2} = \frac{2(\rho_1 c_1 \rho_2 c_2 \cos(\theta) \cos(\theta_t))^{1/2}}{\rho_2 c_2 \cos(\theta) + \rho_1 c_1 \cos(\theta_t)} & \text{se } \text{Im } \theta_t = 0, \\ R_E^t R_E^{t*} &= 0 & \text{se } \text{Im } \theta_t \neq 0. \end{aligned}$$

Agora vamos determinar o fluxo de energia através de um elemento da interface  $\Sigma$  das ondas refletida e transmitida. Assim,

$$\begin{aligned} |\hat{S}_i^r n_i| + |\hat{S}_i^t n_i| &= (R_E^r R_E^{r*} + R_E^t R_E^{t*}) |\hat{S}_i n_i| = |\hat{S}_i n_i| \frac{(\rho_2 c_2 \cos(\theta) + \rho_1 c_1 \cos(\theta_t))^2}{(\rho_2 c_2 \cos(\theta) + \rho_1 c_1 \cos(\theta_t))^2} \\ &= |\hat{S}_i n_i| & \text{se } \text{Im } \theta_t = 0, \\ |\hat{S}_i^r n_i| + |\hat{S}_i^t n_i| &= (R_E^r R_E^{r*}) |\hat{S}_i n_i| & \text{se } \text{Im } \theta_t \neq 0. \end{aligned}$$



O resultado acima segue da observação de que  $|R_E^r| = 1$ . Das equações acima podemos concluir que

$$|\hat{S}_i^r n_i| + |\hat{S}_i^t n_i| = |\hat{S}_i n_i|, \quad (R_E^r R_E^{r*} + R_E^t R_E^{t*}) = 1.$$

Acabamos de provar a conservação de energia para o processo de reflexão/transmissão. A primeira equação acima nos diz que o fluxo total de energia é distribuído entre a onda refletida e transmitida.

No caso da incidência supercrítica, o fluxo de energia associado a uma onda transmitida inhomogênea é zero, pois o vetor  $S_i$  é paralelo a interface  $\Sigma$ . Ou seja, toda a energia da onda incidente é totalmente refletida.

## 6.12 Mudanças da forma das ondas geradas

O fato de considerarmos os coeficientes de reflexão/transmissão complexos causam mudanças na forma das ondas estudadas. Como explicado anteriormente, somente a parte real dos coeficientes de pressão e de velocidade de partículas tem significado físico. Para a velocidade de partícula da onda refletida, temos

$$v_i^r(x_m, t) = \rho_1^{-1} R^r P p_i^r F(t - p_k^r x_k).$$

Sua parte real é dada por

$$\text{Re}[v_i^r(x_m, t)] = \rho_1^{-1} P p_i^r [\text{Re}(R^r) g(t - p_k^r x_k) - \text{Im}(R^r) h(t - p_k^r x_k)].$$

No caso de reflexão subcrítica, quando  $R^r$  é real, a fórmula acima produz

$$\text{Re}[v_i^r(x_m, t)] = \rho_1^{-1} P p_i^r R^r g(t - p_k^r x_k),$$

e podemos ver que o movimento da onda refletida subcriticamente tem a mesma forma do movimento de partícula da onda incidente.

No caso da reflexão supercrítica, quando  $R^r$  é complexo, a forma da onda refletida difere da forma onda incidente. Na verdade, a forma é dada por uma combinação linear da onda incidente e de sua transformada de Hilbert.

## 6.13 Absorção e dispersão

A propagação de uma onda poderia continuar para sempre se não houvesse perda de energia elástica. Na realidade a energia elástica se transforma em outros tipos de energia e a amplitude das ondas que se propagam em meios reais decresce. Aqui explicamos a perda de energia em termos de fricção interna. Usamos o fator de qualidade  $Q$  para descrever a fricção interna. Para tensões que variam harmonicamente e são aplicadas num volume de um meio, definimos  $Q$  como

$$\frac{1}{Q(\omega)} = Q^{-1}(\omega) = -\Delta E / 2\pi \bar{E} \quad (6.170)$$

onde  $\overline{E}$  é a quantidade de energia elástica média no tempo de um volume de um meio,  $\Delta E$  é a perda de energia num volume durante um ciclo e  $\omega$  é a frequência circular. Em um meio perfeitamente elástico não há perda de energia e  $\Delta E = 0$  e  $Q(\omega) \rightarrow \infty$ . Observamos também que  $Q(\omega)$  decresce com o aumento de  $\Delta E$ .

Como já foi visto, a energia elástica é proporcional ao quadrado da amplitude de uma onda plana harmônica. Consideremos uma onda plana acústica propagando com velocidade  $c$  na direção  $N_i$

$$p(x_m, t) = P \exp \left[ -i\omega \left( t - \frac{N_m x_m}{c} \right) \right], \quad (6.171)$$

entrando na região de um meio acústico com absorção. Reescrevemos a equação para  $Q^{-1}(\omega)$  em termos da amplitude  $P$ ,

$$Q^{-1}(\omega) = -\Delta P / \pi P. \quad (6.172)$$

Consideramos que a atenuação e a mudança de amplitude são isotrópicos. Então podemos escrever

$$\Delta P = \frac{dP}{ds} \lambda = (2\pi c / \omega) \frac{dP}{ds}, \quad (6.173)$$

onde  $ds$  é o elemento diferencial na direção  $N_i$ . Inserindo  $\Delta P$  na equação para  $Q^{-1}(\omega)$  temos

$$P^{-1} \frac{dP}{ds} = -\frac{\omega}{2cQ(\omega)} \Rightarrow P = P_0 \exp \left[ -\frac{\omega s}{2cQ(\omega)} \right] = P_0 \exp \left[ -\frac{\omega N_i x_i}{2cQ(\omega)} \right], \quad (6.174)$$

onde  $s$  é a distância até a origem e  $P_0$  é a amplitude da onda na origem. Inserindo a expressão para  $P$  na equação da onda plana acústica temos

$$p(x_m, t) = P_0 \exp \left[ -i\omega \left( t - \frac{N_m x_m}{c_a} \right) \right], \quad (6.175)$$

onde

$$\frac{1}{c_a} = \frac{1}{c} + \frac{i}{2cQ(\omega)}, \quad (6.176)$$

ou ainda, podemos reescrever a equação acima na forma

$$p(x_m, t) = P_0 \exp[-i\omega(t - p_m^{(a)} x_m)] = P_0 \exp(-\omega p_m^I x_m) \exp[-i\omega(t - p_m^R x_m)], \quad (6.177)$$

onde

$$p_i^{(a)} = \frac{N_i}{c_a} = p_i^R + i p_i^I. \quad (6.178)$$

A expressão acima é semelhante à expressão da onda plana inhomogênea em um meio perfeitamente elástico. A diferença é que aqui os vetores  $p_i^R$  e  $p_i^I$  são paralelos, onde

$p_i^R = N_i/c$ ,  $p_i^I = N_i/2cQ$ . Vimos até agora a fórmula que descreve a propagação de uma onda plana homogênea em um meio com absorção na direção  $N_i$  e com velocidade de fase  $c$ . A amplitude desta onda decresce na mesma direção, i.e., os planos de fase constante e amplitude constante são paralelos. Os efeitos de atenuação podem ser descritos através de outra quantidade chamada coeficiente de absorção  $\alpha_{ABS}$  definido como

$$\alpha_{ABS}(\omega) = \omega/2cQ(\omega). \quad (6.179)$$

Para  $Q \rightarrow \infty$  (meio perfeitamente elástico),  $\alpha_{ABS} \rightarrow 0$ . Usando  $\alpha_{ABS}$  podemos reescrever  $p(x_m, t)$  como

$$p(x_m, t) = P_0 \exp(-\alpha_{ABS}(\omega)N_mx_m) \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{N_mx_m}{c}\right)\right]. \quad (6.180)$$

Consideremos agora os efeitos de atenuação numa onda impulso cuja forma de onda é a  $\delta$ -função,

$$p(x_m, t) = P\delta(t - p_mx_m). \quad (6.181)$$

O espectro da função  $\delta(t - p_mx_m)$  é

$$\delta(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - p_mx_m) e^{i\omega t} dt = e^{i\omega p_mx_m} \quad (6.182)$$

então o onda plana impulso pode ser expressa por

$$p(x_m, t) = (2\pi)^{-1} P \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega(t - p_mx_m)} d\omega. \quad (6.183)$$

Vemos que a onda  $\delta$ -impulso pode ser obtida pela síntese de ondas harmônicas de amplitudes iguais. Estendamos esta síntese para meios não elásticos, para a qual achamos que a onda plana harmônica com frequência  $\omega = 2\pi f$  tem a forma

$$p(x_m, t) = P_0 \exp\left[-\frac{1}{2Q(\omega)}|\omega p_mx_m|\right] \exp[-i\omega(t - p_mx_m)] \quad (6.184)$$

e vejamos como a relação das amplitudes é afetada pela atenuação. Por simplicidade consideremos  $Q$  independente da frequência. Então, temos

$$p(x_m, t) = \frac{P_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega(t - p_mx_m)} e^{-\frac{|\omega p_mx_m|}{2Q}} d\omega. \quad (6.185)$$

Consideremos  $|\omega p_mx_m|$  para evitar crescimento infinito das amplitudes em termos que possuem frequência negativa e  $p_mx_m > 0$  (ou  $\omega > 0$  e  $p_mx_m < 0$ ). Assim, ficamos com

$$p(x_m, t) = \frac{P_0}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-i\omega(t - p_mx_m)} e^{-\frac{|\omega|}{2Q}|p_mx_m|} d\omega + \frac{P_0}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-i\omega(t - p_mx_m)} e^{-\frac{\omega}{2Q}|p_mx_m|} d\omega, \quad (6.186)$$

que leva à

$$\begin{aligned}
p(x_m, t) &= \frac{P_0}{2\pi} \int_0^\infty e^{i\omega(t-p_mx_m)} e^{\frac{-\omega}{2Q}|p_mx_m|} d\omega + \frac{P_0}{2\pi} \int_0^\infty e^{-i\omega(t-p_mx_m)} e^{\frac{-\omega}{2Q}|p_mx_m|} d\omega \\
&= -\frac{P_0}{i2\pi(t-p_mx_m) - \pi|p_mx_m|Q^{-1}} + \frac{P_0}{i2\pi(t-p_mx_m) + \pi|p_mx_m|Q^{-1}} \\
&= \frac{2Q|p_mx_m|P_0}{4\pi(t-p_mx_m)^2Q^2 + \pi(p_mx_m)^2}.
\end{aligned} \tag{6.187}$$

O resultado que obtivemos viola observações em vários aspectos. A violação mais grave é a que viola o princípio da causalidade. O sinal é não nulo inclusive para  $t < 0$ . Nosso sinal é simétrico enquanto as observações indicam curto tempo de ascensão do sinal seguido por um vagaroso decaimento. Existem muitas explicações possíveis para o desajuste de nossa teoria simplificada e observações. O motivo básico do nosso problema é a negligência da dispersão de ondas, i.e., a velocidade  $c$  precisa ser considerada como função da frequência,  $c = c(\omega)$ . Desta maneira removemos a simetria do sinal. Para garantir causalidade do sinal, i.e.,  $p(x_m, t) = 0$  para  $t < 0$ , a velocidade  $c(\omega)$  e  $Q(\omega)$  não podem ser independentes, e são conectados pelas então chamadas relações de Kramers-Kronig. Estas relações são consequência do fato que as partes real e imaginária do espectro de uma função causal formam um par de Hilbert.

Um modelo well-fitting de absorção nos dá a seguinte relação entre as velocidades de fase e duas frequências diferentes

$$\frac{c(\omega_1)}{c(\omega_2)} = 1 + \frac{1}{\pi Q} \ln \left( \frac{\omega_1}{\omega_2} \right). \tag{6.188}$$

Aqui  $Q$  depende de  $\omega$  muito fracamente, então é praticamente constante.

A lei de Hooke para um sólido anelástico anisotrópico pode ser escrita como

$$\tau_{ij} = a_{ijkl}^{(a)} e_{kl} \tag{6.189}$$

onde

$$a_{ijkl}^{(a)} = a_{ijkl} + ia_{ijkl}^I \tag{6.190}$$

Aqui  $a_{ijkl}^I$  controla o efeito de absorção que neste caso é dependente da direção. Ambas componentes de  $a_{ijkl}^{(a)}$  (real e imaginária) são dependentes da frequência.

Como os parâmetros elásticos dependem da frequência, a velocidade de fase também depende da frequência e temos novamente ondas dispersivas.

Analogamente ao modo com que a anelasticidade afeta a propagação da onda num meio ilimitado, também afeta a reflexão e a transmissão na interface separando meios anelásticos. Vejamos agora os efeitos de dispersão. Consideremos uma onda plana acústica

$$p(x_m, t) = PF \left( t - \frac{N_mx_m}{c} \right) \tag{6.191}$$

propagando num meio acústico sem absorção. Agora, consideremos a velocidade de fase dependendo da frequência  $c = c(\omega)$ . O sinal analítico tem então a forma

$$F\left(t - \frac{N_m x_m}{c}\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty g(\omega) e^{-i\omega\left(t - \frac{N_m x_m}{c(\omega)}\right)} d\omega, \quad (6.192)$$

onde  $g(\omega)$  é o espectro do sinal real considerado. Então, a expressão da onda plana acústica fica

$$p(x_m, t) = \frac{P}{\pi} \int_0^\infty g(\omega) e^{-i\omega\left(t - \frac{N_m x_m}{c(\omega)}\right)} d\omega. \quad (6.193)$$

Se  $c$  for independente da frequência, a fórmula acima se reduz à fórmula da onda plana transiente harmônica

$$p(x_m, t) = PF\left(t - \frac{N_m x_m}{c}\right). \quad (6.194)$$

Considerando  $c = c(\omega)$ , assumindo que  $g(\omega)$  é efetivamente não nulo somente para uma faixa de frequências  $\omega_0 - \Delta\omega < \omega < \omega_0 + \Delta\omega$ , podemos escrever

$$p(x_m, t) = \frac{P}{\pi} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} g(\omega) e^{-i(\omega t - k(\omega) N_m x_m)} d\omega, \quad (6.195)$$

onde  $k(\omega) = \omega/c(\omega)$  é o número de onda. Na vizinhança de  $\omega_0$  podemos expandir o número de onda como

$$k(\omega) = k(\omega_0) + \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \dots \quad (6.196)$$

Definindo  $U = \frac{d\omega}{dk}$  e usando  $\omega = kc(k)$  temos

$$U(k) = c(k) + k \frac{dc(k)}{dk}. \quad (6.197)$$

Vemos que a quantidade  $U$  tem a mesma dimensão da velocidade  $c$ . Mostramos a seguir que  $U$  é a velocidade de grupo, i.e., a velocidade com que a energia elástica se propaga. Usamos  $U$  da seguinte forma

$$U(\omega) = \frac{c(\omega)}{1 - \frac{\omega}{c(\omega)} \frac{dc(\omega)}{d\omega}}. \quad (6.198)$$

Se  $c$  não depende da frequência  $\omega$ , então  $U = c$ . Em meios acústicos, a velocidade de grupo  $U$  e a velocidade de fase  $c$  diferem somente se ambos dependem da frequência. Se assumirmos que o espectro não varia muito no intervalo  $(\omega_0 - \Delta\omega, \omega_0 + \Delta\omega)$ , podemos aproximar  $g(\omega)$  como  $g(\omega) \sim g(\omega_0)$  e a expressão para  $p(x_m, t)$  fica

$$p(x_m, t) \approx \frac{P}{\pi} e^{-i(\omega_0 t - k(\omega_0) N_m x_m)} g(\omega_0) \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} e^{-i(\omega - \omega_0)\left(t - \frac{N_m x_m}{U(\omega_0)}\right)} d\omega. \quad (6.199)$$

Calculamos agora a integral

$$\begin{aligned}
\int_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} e^{-i(\omega-\omega_0)(t-\frac{N_m x_m}{U(\omega_0)})} d\omega &= \left[ \frac{e^{-i(\omega-\omega_0)(t-\frac{N_m x_m}{U(\omega_0)})}}{i(t-\frac{N_m x_m}{U(\omega_0)})} \right]_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} \\
&= \frac{e^{-i\Delta\omega(t-\frac{N_m x_m}{U(\omega_0)})} + e^{i\Delta\omega(t-\frac{N_m x_m}{U(\omega_0)})}}{i(t-\frac{N_m x_m}{U(\omega_0)})} \\
&= 2\Delta\omega \operatorname{sinc} \left[ \Delta\omega \left( t - \frac{N_m x_m}{U(\omega_0)} \right) \right], \quad (6.200)
\end{aligned}$$

onde a função  $\operatorname{sinc}(t)$  é definida como

$$\operatorname{sinc}(t) = \frac{\sin t}{t}. \quad (6.201)$$

Esta função possui um máximo igual a 1 em  $t = 0$  e se aproxima de zero quando  $t \rightarrow \pm\infty$ .

Escrevemos então a expressão final para  $p(x_m, t)$

$$p(x_m, t) \approx C \operatorname{sinc} \left[ \Delta\omega \left( t - \frac{N_k x_k}{U(\omega_0)} \right) \right] e^{-i\omega_0(t-\frac{N_m x_m}{c(\omega_0)})+i\varphi_0}, \quad (6.202)$$

onde

$$C = \frac{2}{\pi} P |g(\omega_0)| \Delta\omega, \quad g(\omega_0) = |g(\omega_0)| e^{i\varphi_0}, \quad k(\omega_0) = \frac{\omega_0}{c(\omega_0)}, \quad (6.203)$$

$$U(\omega_0) = \frac{c(\omega_0)}{1 - \frac{\omega_0}{c(\omega_0)} \frac{dc(\omega_0)}{d\omega_0}}. \quad (6.204)$$

A fórmula acima descreve uma onda plana harmônica propagando na direção de  $N_i$  com velocidade de fase  $c(\omega_0) = \omega_0/k_0$  e frequência  $\omega_0$ . A amplitude da onda plana é modulada pela função  $\operatorname{sinc}$ . A função forma um envelope da onda plana e este envelope também se propaga na direção  $N_i$  mas com velocidade  $U(\omega_0)$ . Como a energia elástica é proporcional ao quadrado da amplitude da onda plana, em nosso caso da função  $\operatorname{sinc}$ , significa que a energia se move com velocidade  $U$  e então  $U$  é a velocidade de grupo. Poderíamos chegar ao mesmo resultado mesmo sem fazer simplificações, mas seria mais complicado. Dispersão não está relacionada apenas com meios anelásticos, mas também com várias ondas de interferência como, por exemplo, ondas de superfície. Neste caso falamos de dispersão geométrica. No caso de dispersão devido a comportamento anelástico do meio, falamos de dispersão do material. Se  $U \leq c$  temos dispersão normal. Se  $U \geq c$  temos dispersão de anomalia.

## 6.14 Solução da Equação Acústica em coordenadas Cartesianas

Consideramos a equação de Helmholtz

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} + k^2 P = 0, \quad (6.205)$$

na qual assumimos que o número de ondas  $k$  é uma função de somente uma coordenada espacial  $z$ , isto é,  $k = k(z) = \omega/c(z)$ . Agora aplicamos o método de Fourier de separação de variáveis para variáveis espaciais e assumimos que

$$P(x_i, \omega) = X(x, \omega)Y(y, \omega)Z(z, \omega) , \quad (6.206)$$

onde assumimos que  $x = x_1$ ,  $y = x_2$  e  $z = x_3$ . Agora substituindo a candidata (6.206) na equação de Helmholtz temos

$$\frac{\partial X}{\partial x}YZ + \frac{\partial Y}{\partial y}XZ + \frac{\partial Z}{\partial z}XY + k^2(z)XYZ = 0 , \quad (6.207)$$

ou, similarmente,

$$\frac{1}{X} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{1}{Y} \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial z} + k^2(z) = 0 . \quad (6.208)$$

Nesta equação observamos que, o primeiro termo do lado esquerdo depende somente de  $x$ , o segundo somente de  $y$  e o terceiro e o quarto somente de  $z$ . Assim, introduzimos constantes de separação  $-k_x$  e  $-k_y$  tal que

$$\frac{\partial X}{\partial x} + k_x^2 X = 0 , \quad \frac{\partial Y}{\partial y} + k_y^2 Y = 0 , \quad \frac{\partial Z}{\partial z} + [k^2(z) - k_x^2 - k_y^2]Z = 0 , \quad (6.209)$$

onde adotamos a seguinte notação

$$k_z^2(z) = k^2(z) - k_x^2 - k_y^2 = \frac{\omega^2}{c^2(z)} - k_x^2 - k_y^2 \implies k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 . \quad (6.210)$$

Para esta, vemos que  $k_x$ ,  $k_y$  e  $k_z$  são componentes do vetor onda  $k_i = \omega p_i$ , onde  $p_i$  é o vetor de vagarosidade, vistos anteriormente.

Portanto, podemos reescrever a última equação de (6.209) de forma similar as outras, ou seja,

$$\frac{\partial Z}{\partial z} + k_z^2(z)Z = 0 . \quad (6.211)$$

As equações para  $X$  e  $Y$  em (6.209) são equações para um oscilador harmônico, que possui as soluções

$$X(x, k_x, \omega) = X_1 e^{ik_x x} + X_2 e^{-ik_x x} , \quad Y(y, k_y, \omega) = Y_1 e^{ik_y y} + Y_2 e^{-ik_y y} , \quad (6.212)$$

onde  $X_j = X_j(k_x, \omega)$  e  $Y_j = Y_j(k_y, \omega)$  para  $j = 1, 2$ .

A equação diferencial linear ordinária de segunda ordem para  $Z$  tem duas soluções linearmente independentes

$$Z_1 = Z_1(z, k_x, k_y, \omega) , \quad Z_2 = Z_2(z, k_x, k_y, \omega) . \quad (6.213)$$

Para alguma função simples na velocidade de profundidade  $c = c(z)$ , as soluções  $Z_1$  e  $Z_2$  podem ser encontradas na forma analítica. Para outras funções mais complicadas, um procedimento numérico deve ser usado.

Se levarmos em conta que  $k_x$  e  $k_y$  podem ser algum número real no intervalo  $(-\infty, \infty)$ , podemos escrever uma solução particular da equação de Helmholtz na forma

$$P(x_i, \omega) = W_1(k_x, k_y, \omega) e^{ik_x x + ik_y y} Z_1(z, k_x, k_y, \omega) + W_2(k_x, k_y, \omega) e^{ik_x x + ik_y y} Z_2(z, k_x, k_y, \omega). \quad (6.214)$$

Quando levarmos em conta que  $\omega$  pode alcançar algum valor real no intervalo  $(-\infty, \infty)$ , a solução particular da equação acústica para pressão  $p(x_m, t)$  pode ser escrita como

$$p(x_m, t) = W_1(k_x, k_y, \omega) e^{-i\omega t + ik_x x + ik_y y} Z_1(z, k_x, k_y, \omega) + W_2(k_x, k_y, \omega) e^{-i\omega t + ik_x x + ik_y y} Z_2(z, k_x, k_y, \omega). \quad (6.215)$$

A escolha do expoente  $(-i\omega t)$  nesta forma será entendida posteriormente.

Podemos agora escrever a solução geral da equação acústica homogênea com densidade constante como segue

$$p(x_m, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y W_1 Z_1 e^{-i\omega t + ik_x x + ik_y y} + \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y W_2 Z_2 e^{-i\omega t + ik_x x + ik_y y}. \quad (6.216)$$

Esta é a solução geral para o caso de uma distribuição arbitrária da velocidade de profundidade da velocidade  $c = c(z)$ . Podemos ver que a solução da equação acústica foi reduzida para a solução de uma equação diferencial linear ordinária de segunda ordem para  $z$  e para uma subsequente integração 3D.

No caso da velocidade  $c$  constante, a equação diferencial ordinária para  $z$  reduz para a equação do oscilador harmônico, onde as duas soluções linearmente independentes são

$$Z_1 = e^{ik_z z}, \quad Z_2 = e^{-ik_z z}, \quad (6.217)$$

onde  $k_z$  é dado por  $k_z = (\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2)^{\frac{1}{2}}$ .

A solução geral para este caso é

$$p(x_m, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y W_1(k_x, k_y, \omega) e^{-i\omega t + ik_x x + ik_y y + ik_z z} + \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y W_2(k_x, k_y, \omega) e^{-i\omega t + ik_x x + ik_y y - ik_z z} \quad (6.218)$$

Se reescrevermos os termos exponenciais acima como

$$e^{-i2\pi f(t - p_x x - p_y y - p_z z)} \quad e^{-i2\pi f(t - p_x x - p_y y + p_z z)}, \quad (6.219)$$



podemos ver que a fórmula (6.218) representa uma expansão da solução da equação acústica em ondas planas. O primeiro termo contém ondas planas propagando na direção positiva do eixo  $z$  e o segundo termo ondas planas propagando na direção negativa do eixo  $z$ . Na sequência, consideramos que a orientação positiva do eixo  $z$  é para baixo, isto é, o eixo  $z$  positivo representa o eixo profundidade. Então o primeiro termo descreve ondas descendo e o segundo ondas subindo. Do ponto de vista matemático, a equação (6.218) tem a forma da transformada de Fourier 3D inversa (faltando somente alguns fatores escalares na frente das integrais), que transforma as variáveis  $\omega$ ,  $k_x$  e  $k_y$  nas variáveis  $t$ ,  $x$  e  $y$ , respectivamente. A quantidade  $k_z$  não é variável de transformação. Não há integração sobre  $k_z$  e, de fato,  $k_z$  não é uma variável independente, esta está em função de  $k_x$  e  $k_y$ . Agora fica claro porque escolhemos o expoente  $(-i\omega t)$  na função exponencial na solução geral. Esta corresponde a transformada de Fourier inversa introduzida anteriormente.

As ondas planas na expansão (6.218) são ondas homogêneas quando

$$k_x^2 + k_y^2 \leq k^2 \quad \Longleftrightarrow \quad p_x^2 + p_y^2 \leq c^{-2} \quad (6.220)$$

e ondas inhomogêneas quando

$$k_x^2 + k_y^2 > k^2 \quad \Longleftrightarrow \quad p_x^2 + p_y^2 > c^{-2} . \quad (6.221)$$

No último caso,  $k_z$  deve ser considerado na forma  $k_z = \pm i|k_x^2 + k_y^2 - k^2|^{\frac{1}{2}}$

A escolha do sinal deve ser feita tal que a amplitude das ondas inhomogêneas decaem com o acréscimo da distância da fonte. Isto é satisfeito quando o sinal positivo é selecionado para ondas descendo e o sinal negativo para ondas subindo.

A fórmula expandida (6.218) tem várias aplicações importantes. Nós consideraremos duas delas.

## 6.15 Extrapolação do campo de onda

Vamos assumir que conhecemos o campo de onda para alguma profundidade  $z = z_0$ , i.e., que nós conhecemos  $p(x, y, z_0, t)$  e vamos extrapolar o campo de onda da profundidade  $z_0$  para a profundidade  $z_1$ , onde  $z_1 > z_0$ . Se usarmos ondas descendo, estamos falando de *extrapolação “forward”* (para frente). Se usarmos ondas subindo, estamos falando de *extrapolação “backward”* (para trás). Ambos os conceitos são muito importantes na então chamada migração  $(\omega - k)$ .

Vamos considerar a extrapolação avançada, i.e., vamos considerar somente ondas descendo na expansão da fórmula. A expansão da fórmula fornece para  $z = z_0$

$$p(x, y, z_0, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y W_1(k_x, k_y, \omega) e^{-i\omega t + ik_x x + ik_y y + ik_z z_0} . \quad (6.222)$$

Nós podemos também expressar o campo de onda para  $z = z_0$  na forma da transformada de Fourier 3D inversa

$$p(x, y, z_0, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y S(k_x, k_y, \omega, z_0) e^{-i\omega t + ik_x x + ik_y y} , \quad (6.223)$$

onde o fator  $(2\pi)^3$  é uma consequência do uso da transformada de Fourier com a variável  $\omega$  ao invés de  $f$ . Por comparação das expressões para  $p(x, y, z_0, t)$ , chegamos

$$S(k_x, k_y, \omega, z_0) = (2\pi)^3 W_1(k_x, k_y, \omega) e^{ik_z z_0} , \quad (6.224)$$

e, portanto,

$$W_1(k_x, k_y, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} S(k_x, k_y, \omega, z_0) e^{-ik_z z_0} . \quad (6.225)$$

Desta maneira, podemos determinar  $W_1(k_x, k_y, \omega)$  desde que  $S(k_x, k_y, \omega, z_0)$  é a transformada de Fourier do conhecido campo de onda para  $z = z_0$ ,

$$S(k_x, k_y, \omega, z_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy p(x, y, z_0, t) e^{i\omega t - ik_x x - ik_y y} . \quad (6.226)$$

O campo de onda para alguma profundidade  $z_1$  pode ser determinado da expansão da fórmula (introduzindo a expressão acima para  $W_1$ )

$$p(x, y, z_1, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y S(k_x, k_y, \omega, z_0) e^{-i\omega t + ik_x x + ik_y y + ik_z(z_1 - z_0)} . \quad (6.227)$$

Então, a fórmula acima representa a extrapolação da fórmula para o campo de onda da profundidade  $z = z_0$  para a profundidade  $z = z_1$ . A extrapolação no domínio  $(\omega - k)$  é muito simples. Se o espectro do campo de onda é conhecido na profundidade  $z = z_0$  então o espectro  $S(k_x, k_y, \omega, z_1)$  para a profundidade  $z = z_1$  é obtido pela mudança de fase  $k_z(z_1 - z_0)$ ,

$$S(k_x, k_y, \omega, z_1) = S(k_x, k_y, \omega, z_0) e^{ik_z(z_1 - z_0)} . \quad (6.228)$$

Exatamente da mesma maneira, nós podemos fazer para o caso da extrapolação atrasada de uma onda subindo. O fator multiplicativo então seria  $e^{-ik_z(z_1 - z_0)}$  para  $z_1 > z_0$ .

## 6.16 Expansão de uma onda esférica em ondas planas

De uma maneira similar a seção anterior, determinamos o coeficiente  $W_1(k_x, k_y, \omega)$  no caso de uma onda esférica descendo. Na Seção 2.2 achamos que a onda esférica expansiva pode ser expressa como

$$p(x_m, t) = \frac{P_1}{r} F\left(t - \frac{r}{c}\right) . \quad (6.229)$$

Consideremos agora uma onda harmônica com amplitude unitária  $P_1 = 1$ . Então, podemos escrever

$$p(x_m, \omega, t) = \frac{e^{-i\omega(t - r/c)}}{r} . \quad (6.230)$$

A expansão da fórmula para uma onda harmônica descendo leva

$$p(x_m, \omega, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y W_1(k_x, k_y, \omega) e^{-i\omega t + ik_x x + ik_y y + ik_z z}, \quad (6.231)$$

onde  $k_z = (\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2)^{\frac{1}{2}}$ . Desde que  $\omega$  não é uma variável de integração, podemos reescrever a expansão da fórmula para uma onda harmônica descendo como

$$p(x_m, \omega, t) = e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y W_1(k_x, k_y, \omega) e^{ik_x x + ik_y y + ik_z z}. \quad (6.232)$$

Podemos avaliar  $W_1(k_x, k_y, \omega)$  em uma profundidade arbitrária  $z$ . A maneira mais simples é fazer  $z = 0$ . Lá a onda esférica tem a forma

$$p(x, y, 0, \omega, t) = \frac{e^{-i\omega(t - \sqrt{x^2 + y^2}/c)}}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (6.233)$$

A expansão da fórmula tem, para  $z = 0$ , a forma

$$p(x, y, 0, \omega, t) = e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y W_1(k_x, k_y, \omega) e^{ik_x x + ik_y y}. \quad (6.234)$$

Como na Seção 6.15, nós achamos  $W_1$  de sua relação ao espectro da onda esférica. A onda esférica para  $z = 0$  pode ser escrita como

$$\begin{aligned} p(x, y, 0, \omega, t) &= \frac{e^{-i\omega(t - \sqrt{x^2 + y^2}/c)}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{e^{-i\omega t}}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y S(k_x, k_y, \omega, z=0) e^{ik_x x + ik_y y}. \end{aligned} \quad (6.235)$$

Aqui  $S(k_x, k_y, \omega, 0)$  é a transformada de Fourier 2D da expressão para onda esférica harmônica

$$S(k_x, k_y, \omega, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{e^{i\omega \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{c}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} e^{-ik_x x - ik_y y}. \quad (6.236)$$

Por comparação da expansão da fórmula com a expressão da transformada de Fourier inversa acima, achamos que

$$W_1(k_x, k_y, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} S(k_x, k_y, \omega, 0). \quad (6.237)$$

Então, para determinar  $W_1$ , precisamos avaliar a expressão para  $S(k_x, k_y, \omega, 0)$ . Introduzimos coordenadas polares no plano  $(x, y)$  tal que

$$k_x = q \cos \psi, \quad k_y = q \sin \psi, \quad q^2 = k_x^2 + k_y^2, \quad (6.238)$$

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad dx dy = \rho d\rho d\varphi. \quad (6.239)$$

A expressão para  $S(k_x, k_y, \omega, 0)$  agora leva

$$S(k_x, k_y, \omega, 0) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty d\rho e^{i\rho[\frac{\omega}{c} - q \cos(\psi - \varphi)]} . \quad (6.240)$$

Podemos simplesmente avaliar a integral com respeito a  $\rho$ . Isto fornece

$$S(k_x, k_y, \omega, 0) = \int_0^{2\pi} d\varphi \left[ \frac{e^{i\rho[k - q \cos(\psi - \varphi)]}}{i[k - q \cos(\psi - \varphi)]} \right]_0^\infty . \quad (6.241)$$

Supondo que o meio é muito ligeiramente absorvente, isto é, a velocidade  $c$  é complexa e  $c^{-1}$  tem a parte imaginária pequena. Então o limite  $\rho \rightarrow \infty$  fornece zero e temos

$$S(k_x, k_y, \omega, 0) = \int_0^{2\pi} \frac{i}{[k - q \cos(\psi - \varphi)]} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{i}{k - q \cos \delta} d\delta . \quad (6.242)$$

Para a integral acima, temos

$$\int_0^{2\pi} \frac{i}{k - q \cos \delta} d\delta = \frac{2\pi i}{\sqrt{k^2 - q^2}} \quad \text{para } q^2 < k^2 \quad (6.243)$$

e

$$\int_0^{2\pi} \frac{i}{k - q \cos \delta} d\delta = \frac{i(-2\pi i)}{\sqrt{q^2 - k^2}} \quad \text{para } q^2 > k^2 . \quad (6.244)$$

Então, para  $S(k_x, k_y, \omega, 0)$ , escrevemos

$$S(k_x, k_y, \omega, 0) = \int_0^{2\pi} \frac{i}{k - q \cos \delta} d\delta = \frac{2\pi i}{k_z} , \quad (6.245)$$

onde

$$k_z = \begin{cases} \sqrt{k^2 - q^2} & \text{para } q^2 < k^2 , \\ i\sqrt{k^2 - q^2} & \text{para } q^2 > k^2 . \end{cases} \quad (6.246)$$

Para  $W_1(k_x, k_y, \omega)$  esta fornece

$$W_1(k_x, k_y, \omega) = \frac{i}{2\pi k_z} . \quad (6.247)$$

Se substituirmos esta na expansão da fórmula geral para onda descendo, chegamos

$$r^{-1} e^{-i\omega(t-r/c)} = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y k_z^{-1} e^{-i\omega t + ik_x x + ik_y y + ik_z z} . \quad (6.248)$$

Esta é a *integral de Weyl* que oferece uma expansão de uma onda esférica em ondas planas. A integral de Weyl é conhecida de várias formas diferentes. Vamos apresentar algumas

delas. Se usarmos a relação entre o vetor onda e o vetor vagarosidade que tem sido usado anteriormente neste capítulo,

$$\vec{k} = \omega \vec{p} \implies (k_x, k_y, k_z) = \omega(p_x, p_y, p_z) , \quad (6.249)$$

então

$$r^{-1} e^{-i\omega(t-r/c)} = \frac{i\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_x \int_{-\infty}^{+\infty} dp_y p_z^{-1} e^{-i\omega(t+ip_x x + ip_y y + ip_z z)} . \quad (6.250)$$

ou, com  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ ,

$$r^{-1} e^{-i2\pi f(t-r/c)} = if \int_{-\infty}^{+\infty} dp_x \int_{-\infty}^{+\infty} dp_y p_z^{-1} e^{-i2\pi f(t-p_x x - p_y y - p_z z)} . \quad (6.251)$$

Aqui

$$p_z = (c^{-2} - p_x^2 - p_y^2)^{\frac{1}{2}} . \quad (6.252)$$

Ao invés de  $p_x$  e  $p_y$ , podemos introduzir coordenadas polares  $p$  e  $\phi$  ( $p \geq 0, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ ),

$$p_x = p \cos \phi , \quad p_y = p \sin \phi . \quad (6.253)$$

Para esta especificação, temos

$$dp_x dp_y = p dp d\phi , \quad p_z = \sqrt{c^{-2} - p^2} . \quad (6.254)$$

Então a integral de Weyl fornece a forma

$$r^{-1} e^{-i\omega(t-r/c)} = \frac{i\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int_0^\infty \left[ \frac{p e^{i\omega z \sqrt{c^{-2} - p^2}}}{\sqrt{c^{-2} - p^2}} \int_0^{2\pi} e^{i\omega p(x \cos \phi + y \sin \phi)} d\phi \right] dp . \quad (6.255)$$

Se nós expressarmos também  $x$  e  $y$  em coordenadas polares  $x = \rho \cos \varphi$  e  $y = \rho \sin \varphi$  a integrais com  $\phi$  pode ser reescrita com segue

$$\int_0^{2\pi} e^{i\omega p \rho \cos(\phi - \varphi)} d\phi = 2\pi \mathcal{J}_0(\omega p \rho) , \quad (6.256)$$

onde

$$\mathcal{J}_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iz \cos t} dt \quad (6.257)$$

é a função de Bessel de ordem zero e do primeiro tipo. A integral de Weyl 2D então se reduz a simples integral sobre  $p$ ,

$$r^{-1} e^{-i\omega(t-r/c)} = i\omega e^{-i\omega t} \int_0^\infty \frac{p e^{i\omega z \sqrt{c^{-2} - p^2}}}{\sqrt{c^{-2} - p^2}} \mathcal{J}_0(\omega p \rho) dp . \quad (6.258)$$

Esta é a *integral de Sommerfeld*. Esta representa a expansão da onda esférica em ondas cilíndricas.

Vamos retornar a última forma da integral de Weyl. Como notamos antes, a expansão integral contém ondas homogêneas e inhomogêneas. A onda abaixo da integral é homogênea quando

$$p_x^2 + p_y^2 < c^{-2} \quad \Longleftrightarrow \quad p < c^{-1} , \quad (6.259)$$

e inhomogênea quando

$$p_x^2 + p_y^2 > c^{-2} \quad \Longleftrightarrow \quad p > c^{-1} , \quad (6.260)$$

No caso anterior  $p_z = \sqrt{c^{-2} - p^2}$  enquanto no caso de uma onda inhomogênea  $p_z = i\sqrt{c^{-2} - p^2}$ . A escolha do sinal positivo na frente do  $i$  garante o decaimento da amplitude com o acréscimo da profundidade, isto é, com acréscimo da distância da fonte. A integral de Weyl pode ser então expressa como uma soma de duas integrais sobrepostas, a primeira sendo a sobreposição de ondas homogêneas e a segunda a sobreposição de ondas inhomogêneas

$$r^{-1} e^{-i\omega(t-r/c)} = \frac{i\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int_0^{c^{-1}} \left[ \frac{p e^{i\omega z \sqrt{c^{-2} - p^2}}}{\sqrt{c^{-2} - p^2}} \int_0^{2\pi} e^{i\omega p(x \cos \phi + y \sin \phi)} d\phi \right] dp \quad (6.261)$$

$$+ \frac{\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int_{c^{-1}}^{\infty} \left[ \frac{p e^{-\omega z \sqrt{p^2 - c^{-2}}}}{\sqrt{p^2 - c^{-2}}} \int_0^{2\pi} e^{i\omega p(x \cos \phi + y \sin \phi)} d\phi \right] dp \quad (6.262)$$

A superposição de somente ondas homogêneas deveria somente dar valores finitos do campo de onda da fonte. A existência de ondas planas inhomogêneas causa singularidades necessárias na fonte.

Note que a expansões das fórmulas são frequentemente usadas para investigação de um importante problema de incidência da onda esférica numa interface plana. A onda esférica incidente na interface é expandida em ondas planas homogêneas e inhomogêneas. Estas ondas planas individuais interagem com a interface e gera ondas, que são novamente sobrepostas usando a expansão da fórmula acima. Este problema é conhecido na literatura como *problema de Lamb*.

# Referências Bibliográficas

- [1] Aki and Richards - *Quantitative Seismology*, second edition, University Science Books, 2002.
- [2] Butkov, E., 1988, *Física Matemática*, Guanabara Koogan, Rio de Janeiro, RJ.
- [3] Capelas de Oliveira, E., Tygel, M., 2001, *Métodos de matemática aplicada para a engenharia*, SBMAC, São Carlos, SP.
- [4] Figueiredo, D. G., 1977, *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*, Projeto Euclides - IMPA, RJ.
- [5] Iório, V. M. - *EDP - Um Curso de Graduação*, Editora do IMPA, Rio de Janeiro, 2001.
- [6] Marina Hirota Magalhães. - *Estudo de ondas planas em meios acústicos*, Relatório FAPESP de iniciação científica, 2000.
- [7] Rafael Moura. - *Estudo de ondas planas, cilíndricas e esféricas em meios acústicos*, Relatório FAPESP de iniciação científica, 2002.
- [8] I. Pšenčík - *Introduction to seismic methods*, Lecture Notes, PPPG/UFBa, 1994.
- [9] Symon, K. R. - *Mecânica*, Editora Campus, Rio de Janeiro, 1982. Guanabara Koogan, Rio de Janeiro, RJ.