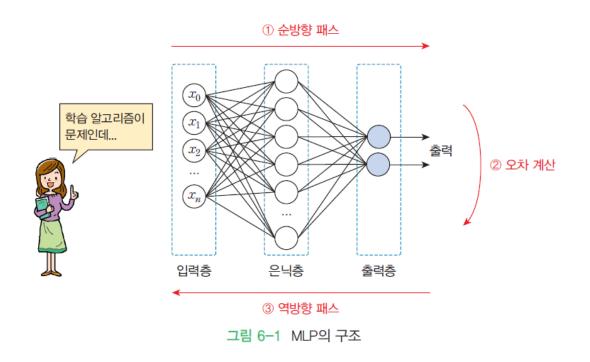
6장 MLP(다층 퍼셉트론)



- 퍼셉트론: 하나의 뉴런만을 사용, 하나의 레이어로만 구성. XOR 처럼 선형분리 불가능한 문제를 해결 못함
 - -> 입력층과 출력층 사이에 은닉층(hidden layer)을 가지는 퍼셉트론으로 해결 : 다층 퍼셉트론(multilayer perceptron: MLP)





- 활성화 함수(activation function): 입력의 총합을 받아서 출력값을 계산하는 함수
 - 퍼셉트론 : 계단함수(step function) 사용
 - MLP: 다양한 활성화 함수(Sigmoid, TanH, ReLU)를 사용

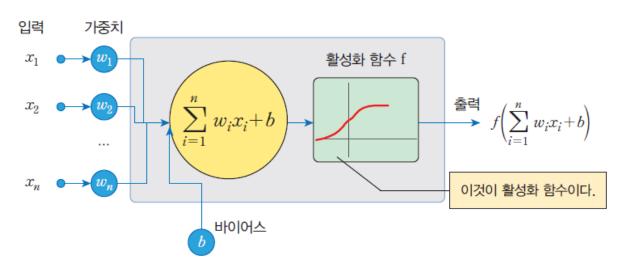


그림 6-2 활성화 함수

많이 사용되는 활성화 함수

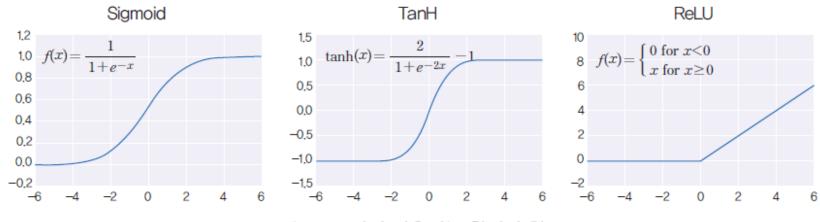


그림 6-3 많이 사용되는 활성화 함수

선형 레이어는 많아도 쓸모가 없다.

- MLP의 활성화 함수는 비선형 함수
- 은닉층을 아무리 많이 두어도 활성화 함수로 선형 함수를 사용하면 성능에 전혀 향상되지 않는다. 여러 개의 선형 함수를 결합해도 결국 은 선형 함수 하나와 같이 때문.

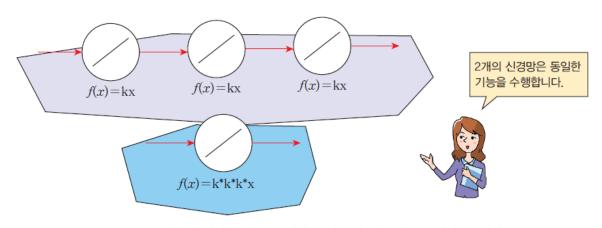
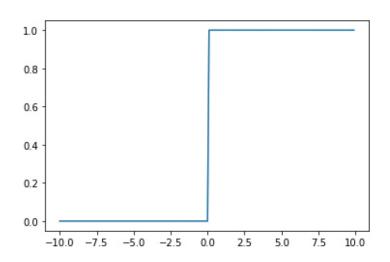


그림 6-4 선형 레이어는 아무리 많아도 하나의 레이어로 대치될 수 있다.

계단 함수(step function)

- 입력 신호의 총합이 0을 넘으면 1을 출력하고, 그렇지 않으면 0을 출력
- x=0에서 급격히 변화.

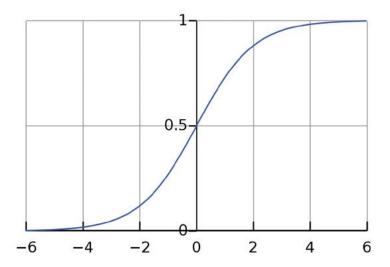
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$



기고모이트 함수(sigmoid function)

- 1980년대부터 사용돼온 전통적인 활성화 함수
- S자 형태. 0.0에서 1.0까지의 연속적인 실수 출력
- 미끄럽게 변화하기 때문에 경사하강법에 필요한 미분이 가능

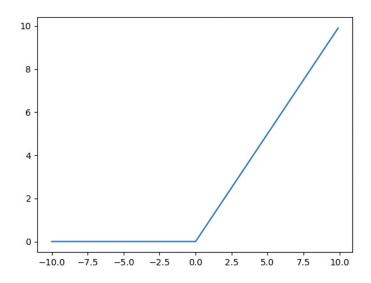
$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$



ReLU *: (Rectified Linear Unit function)

- 최근에 가장 인기 있는 활성화 함수
- 입력이 0을 넘으면 그대로 출력하고, 입력이 0보다 적으면 0을 출력
- 미분도 가능하고 그래디언트 감쇠가 일어나지 않아 많이 사용

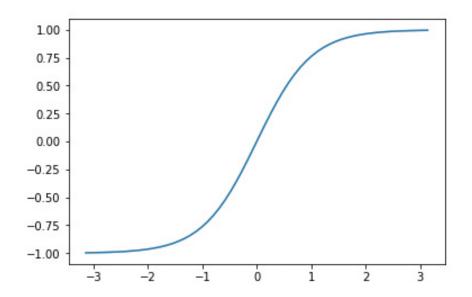
$$f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases} = \text{np.maximum}(x, 0)$$





- 넘파이에서 제공. 순환신경망(RNN)에서 많이 사용
- 시그모이드 함수와 비슷하지만 출력값이 -1에서 1까지.

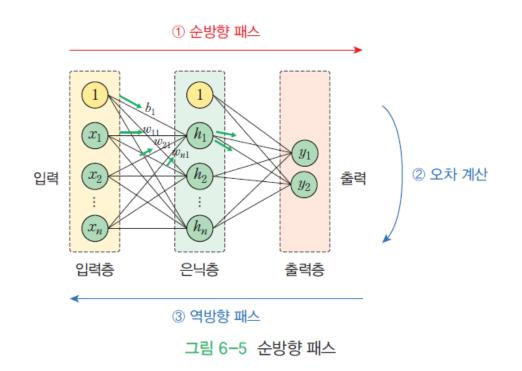
$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{2}{1 + e^{-2x}} - 1$$





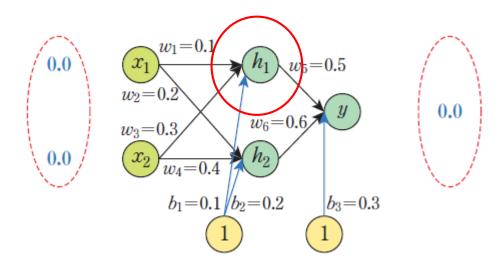
MLP의 순방향 패스

- MLP = 순방향 패스 + 오차 계산 + 역방향 패스
- 순방향 패스 : 입력 신호가 입력층 유닛에 가해지고 이들 입력 신호가 은닉층을 통하여 출력층으로 전파되는 과정





H₁의 출력값 계산

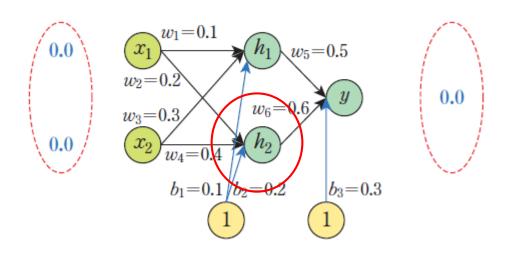


$$z_1 = w_1 * x_1 + w_3 * x_2 + b_1 = 0.1 * 0.0 + 0.3 * 0.0 + 0.1 = 0.1$$

$$a_1 = \frac{1}{1 + e^{-z_1}} = \frac{1}{1 + e^{-0.1}} = 0.524979$$



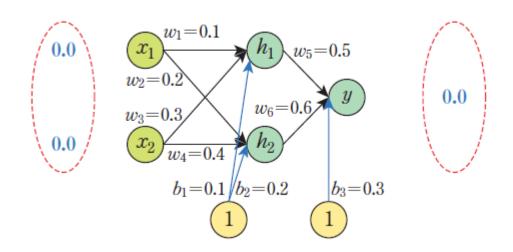
H₂의 출력값 계산



$$a_2 = 0.549834$$

소으로 계산해보자

• y의 출력값 계산

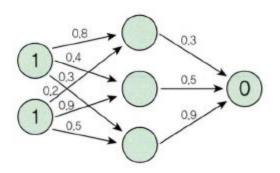


$$\begin{split} z_y &= w_5 * a_1 + w_6 * a_2 + b_3 \\ &= 0.5 * 0.524979 + 0.6 * 0.549834 + 0.3 = 0.892389 \\ a_y &= \frac{1}{1 + e^{-z_y}} = \frac{1}{1 + e^{-0.892389}} = 0.709383 \end{split}$$

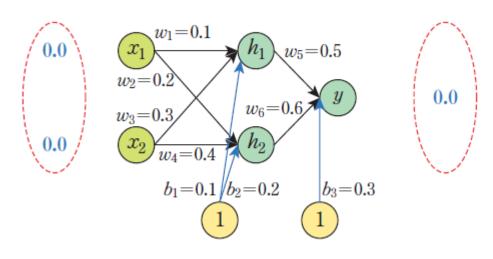
정답은 0이지만 신경망의 출력은 0.71 정도이다. 오차가 상당함을 알 수 있다.

Quiz(p239. 04)

04 어떤 경우에는 구체적으로 계산을 해보는 것이 이해하는 데 도움이 된다. 다음과 같이 2개의 입력과 하나의 출력을 가지는 MLP에서 원하는 출력값이 0이라고 할 때. 각 뉴론의 출력값과 오차를 계산해보자. 활성화 함수는 계산을 간단히 하기 위하여 ReLU 함수라고 가정한다. 순방향 패스와 오차값만을 계산해보자. 해보자.



행렬로 표시해보자



$$z_1 = w_1 * x_1 + w_3 * x_2 + b_1$$

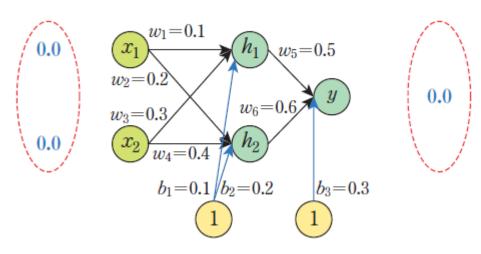
$$z_2 = w_2 * x_1 + w_4 * x_2 + b_2$$



$$Z_1 = XW_1 + B_1$$

행렬로 표시할 수 있다.

행렬로 표시해보자

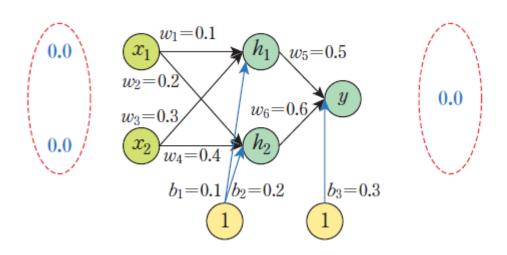


$$\begin{split} X &= [x_1 \quad x_2], \quad B_1 = [b_1 \quad b_2], \quad Z_1 = [z_1 \quad z_2] \\ W_1 &= \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{bmatrix} \end{split}$$



$$Z_1 = [z_1 \ z_2] = XW_1 + B_1 = [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} w_1 \ w_2 \\ w_3 \ w_4 \end{bmatrix} + [b_1 \ b_2]$$

행렬로 표시해보자



$$\begin{aligned} W_2 &= \begin{bmatrix} w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} \\ Z_2 &= A_1 W_2 + B_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_3 \end{bmatrix} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} y \end{bmatrix} = f(Z_2) \end{aligned}$$



수학 복습 행렬의 곱셈

행렬의 곱셈은 다음과 같다. 첫 번째 행렬의 행과 두 번째 행렬의 열이 곱해져서 결과 행렬의 한 요소가 된다. 행과 열은 내적 계산과 동일하게 곱해진다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 \\ \end{bmatrix}$$
2×3
2×2

행렬의 곱셈에서 항상 주의할 점은 첫 번째 행렬의 열의 개수와 두 번째 행렬의 행의 개수가 일치해야 한다는 점이다.

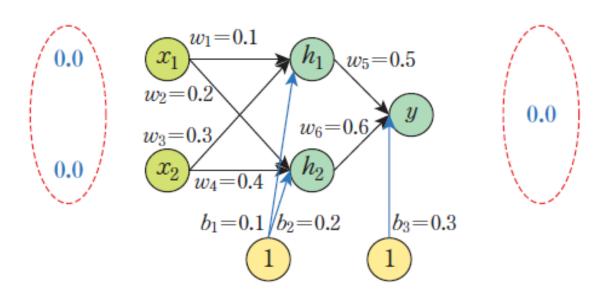
수학 복습 WX+B 또는 XW+B?

입력 행렬과 가중치 행렬을 나타내는 방법은 책마다 조금씩 달라진다. 입력들이 행 벡터 형태로 행렬 X에 쌓여 있다고 생각하면 XW+B와 같은 형태가 된다. 반대로 입력들이 열 벡터 형식으로 행렬 X에 쌓여 있다고 생각하면 WX+B가 된다. 또 W와 X의 형태에 따라서 WX^T 로 표기해야 되는 경우도 있다. 본 책에서는 XW+B의 형태를 사용한다.

$$XW+B = [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} w_1 \ w_2 \\ w_3 \ w_4 \end{bmatrix} + [b_1 \ b_2]$$

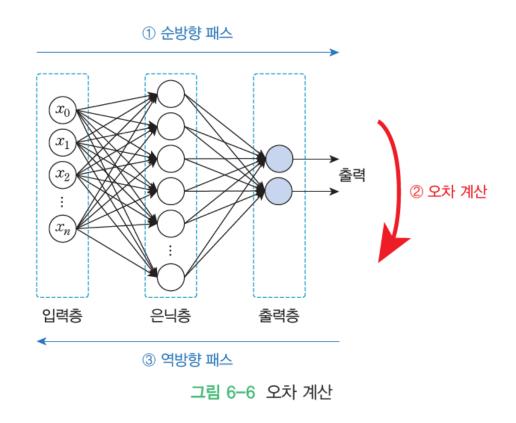
$$WX+B = \begin{bmatrix} w_1 \ w_3 \\ w_2 \ w_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Lab: MLP 255 TIA



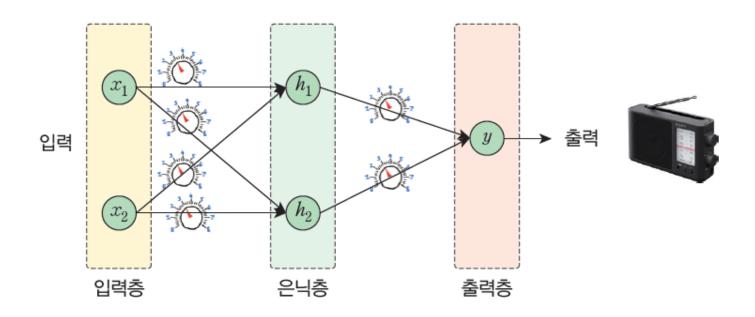
소실 함수 계산

 출력값이 올바르지 않으면 오차를 계산해서 오차를 줄이는 방향으로 가중치를 변경해야 한다.





• 오차를 줄이는 방향으로 가중치를 조절한다.



소일 함수(loss function)

- 신경망 학습의 성과를 나타내는 지표
- 정답과 출력값 사이의 오차
- 평균제곱오차(MSE: Mean Squared Error)가 많이 사용되었지만 최 근에는 교차 엔트로피 함수가 인기가 있다.

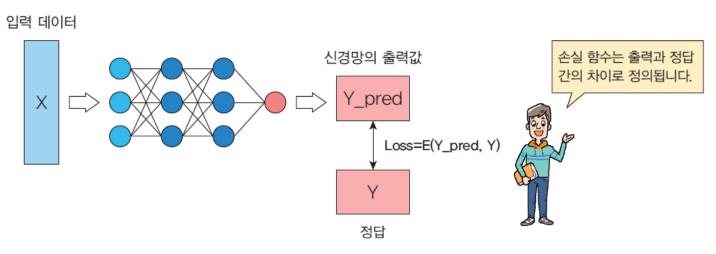


그림 6-7 손실함수의 정의

명균 제곱 ^{오차} (MSE)

예측값(y_i)과 정답(t_i) 간의 평균 제곱 오차

$$E(w) = \frac{1}{2} \sum_{i} (y_i - t_i)^2$$



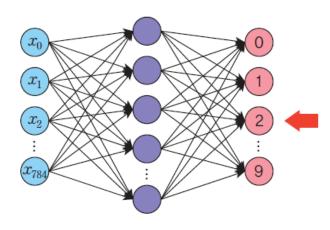


그림 6-8 MNIST 숫자 이미지를 분류하는 신경망

- 제곱하는 이유?
 - ① 오차를 양수화
 - ② 가중치를 조금만 변경하더라도 큰 오차변화를 확인할 수 있어 가 중치의 미세조정에 효과적

```
>>> y = np.array([ 0.0, 0.0, <u>0.8</u>, <u>0.1</u>, 0.0, 0.0, 0.0, <u>0.1</u>, 0.0, 0.0 ])
>>> target = np.array([ 0.0, 0.0, <u>1.0</u>, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0 ])

>>> def MSE(target, y):
    return 0.5 * np.sum((y-target)**2)

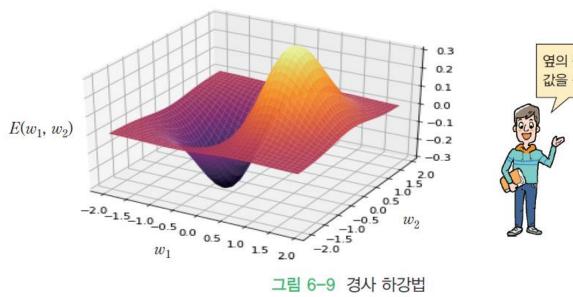
>>> MSE(target, y)

0.03
```



• 학습이란 손실함수를 최소로 만드는 가중치를 찾는 것

$$W' = \underset{W}{\operatorname{argmin}} E(W)$$





경사하 강법의 재소개

- 경사하강법(gradient-descent method): 함수의 1차 미분값(그라디언트)를 사용하는 반복적인 최적화 알고리즘
- 손실함수를 감소시키려면 미분값의 반대방향으로 가면 된다.

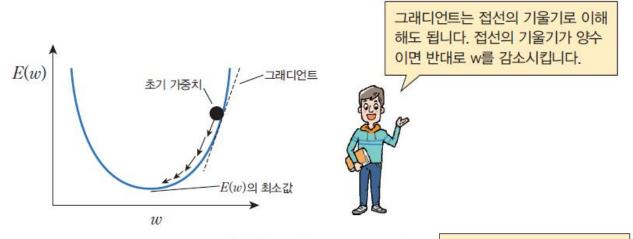


그림 6-11 경사 하강법

손실함수를 가중치로 미분한 값이 양수이면

-

가중치를 감소시킨다.

손실함수를 가중치로 미분한 값이 음수이면



가중치를 증가시킨다.

Lab: 경사하 강법의 실습

- 손실 함수가 $y = (x-3)^2 + 10$ 일 때
- → 그래디언트 y' = 2x-6
- x = x 학습률 * y' : 그라디언트와 반대방향으로 가면서 x를 구하기 위해 음수 곱셈

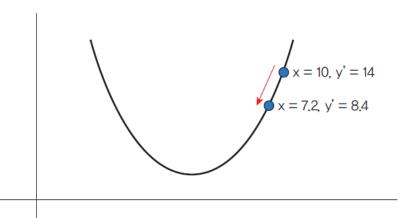
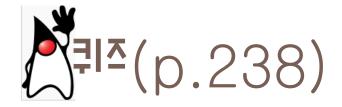
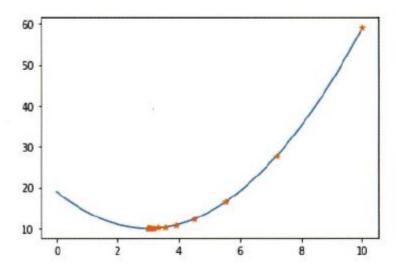


그림 6-12 그래디언트의 계산





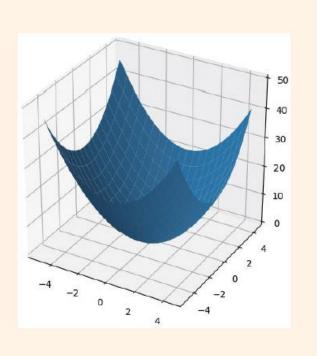
02 본문에서 오차함수가 $y=x^2-6x+4$ 일 때 경사 하강법을 사용하여 오차함수 y의 최저값을 계산하는 절차를 설명한 바 있다. 이것을 다음과 같이 그래프로 그릴 수 있는가? 맵플롯립을 사용해보자. 학습률을 변화시키면서 점을 그려보자. 어떻게 점들이 그려지는가? 학습률을 아주 크거나 작게 설정해서 점들을 그려보자.



Lab: 2차원 그래디언트 시각화

- 손실 함수가 f(x,y) = x2 + y2라고 가정하자. 실제로는 이와 같이 여러 개의 입력(변수)에 의해 구성된다. 비선형 구조이므로 편미분이 필요.
- 그래디언트를 계산하면 = (2x, 2y)

```
from mpl toolkits.mplot3d import axes3d
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
x = np.arange(-5, 5, 0.5)
y = np.arange(-5, 5, 0.5)
X, Y = np.meshgrid(x, y) # 참고 박스
Z = X**2 +Y**2 # 넘파이 연산
fig = plt.figure(figsize=(6,6))
ax = fig.add subplot(111, projection='3d')
# 3차원 그래프를 그린다.
ax.plot surface(X, Y, Z)
plt.show()
```



Lab: 2차원 그래디언트 시각화

```
그래디언트를 계산하면 ..... = (2x, 2y). 편미분 필요
                                                               화살표가 최소값을 가리키
                                                                 고 있음을 알 수 있다.
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
x = np.arange(-5,5,0.5)
y = np.arange(-5,5,0.5)
X, Y = np.meshgrid(x,y)
U = -2*X
V = -2*Y
                그래디언트의 음수
plt.figure()
Q = plt.quiver(X, Y, U, V, units='width')
plt.show()
```

 어떤 위치에서든지 그라디언트의 역방향으로 가면 최저값에 도달할 수 있음을 알 수 있다.

역전파 학습 알고리즘

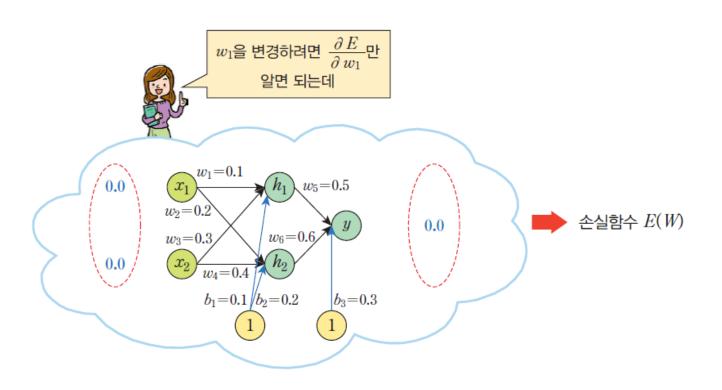
입력이 주어지면 순방향으로 계산하여 출력을 계산한 후에 실제 출력과 우리가 원하는 출력 간의 오차를 계산한다. 이 오차를 역방향으로 전파하면서 오차를 줄이는 방향으로 가중치를 변경한다.

$$w(t+1) = w(t) - \eta \frac{\partial E}{\partial w}$$

- ① 가중치와 바이어스를 0부터 1 사이의 난수로 초기화한다.
- ② 수렴할 때까지 모든 가중치에 대하여 다음을 반복한다.
- ③ 손실함수 E의 그래디언트 $\partial E/\partial w$ 을 계산한다.

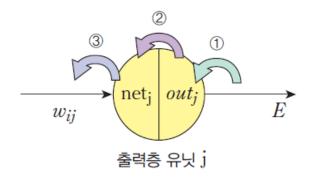


• 체인물을 이용하여 유도가 가능하다.





$$\frac{\partial E}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial E}{\partial out_j} \frac{\partial out_j}{\partial net_j} \frac{\partial net_j}{\partial w_{ij}}$$
① ② ③



$$\frac{\partial out_j}{\partial \text{net}_j} = \frac{\partial f(\text{net}_j)}{\partial \text{net}_j} = f'(\text{net}_j)$$

③
$$\frac{\partial \operatorname{net}_{j}}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial}{\partial w_{ij}} \left(\sum_{k=0}^{n} w_{kj} out_{k} \right) = \frac{\partial}{\partial w_{ij}} w_{ij} out_{i} = out_{i}$$
 할수있다.

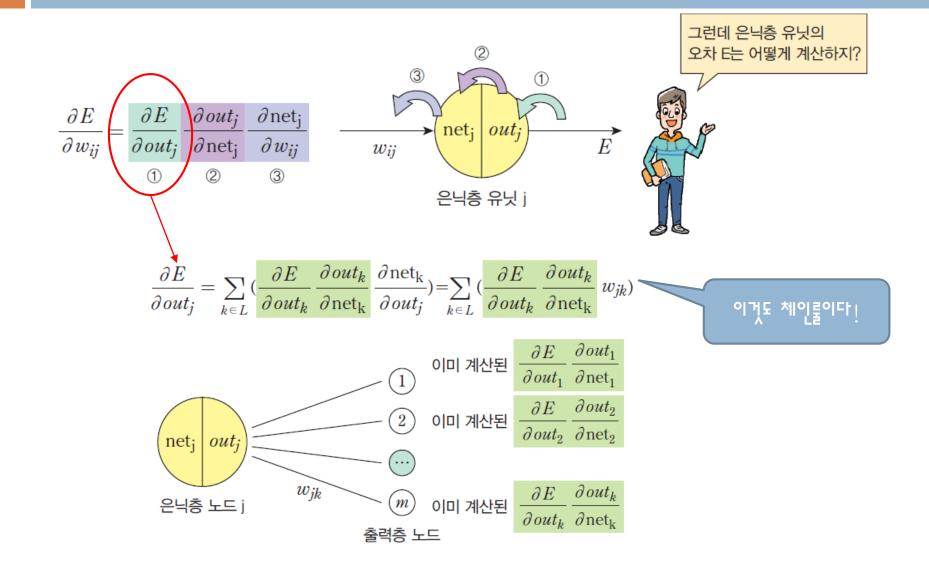
유닛의 출력값 변환에 따른 오차의 변화율이다.

입력합의 변화에 따른 유닛 j의 출력 변화율이다. 활성화 함수의 미분값이다.

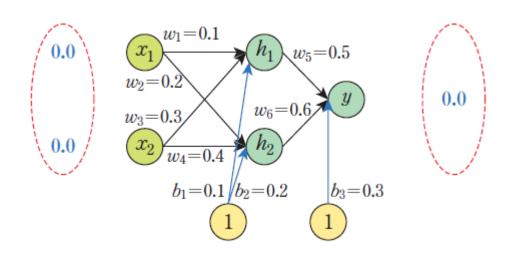
가중치의 변화에 따른 net;의 변화율이라고 할 수 있다.

$$\therefore \frac{\partial E}{\partial w_{ij}} = 0 \times 2 \times 3 = (out_j - target_j) \times f'(\text{net}_j) \times \text{out}_i$$

역전파 알고리즘



역전파 알고리즘을 손으로 계산해보자



• 순방향 패스

역전파 알고리즘을 손으로 계산해보자

• 총오차 계산

$$E = \frac{1}{2}(t \, arg \, et_y - out_y)^2 = \frac{1}{2}(0.00 - 0.709383)^2 = 0.251612$$

• $\frac{\partial E}{\partial w_5}$ 만 계산해보자.

$$\frac{\partial \operatorname{net_y}}{\partial w_5} * \frac{\partial \operatorname{out_y}}{\partial \operatorname{net_y}} * \frac{\partial E}{\partial \operatorname{out_y}} = \frac{\partial E}{\partial w_5}$$

$$h_1 노드의 출력 \qquad w_5 \qquad \qquad E = \frac{1}{2} (\operatorname{target_y-out_y})^2$$

$$h_2 노드의 출력 \qquad b_3 \qquad \qquad \operatorname{net_y} \qquad \operatorname{out_y} \qquad \qquad \operatorname{net_y} \qquad \operatorname{out_y}$$

경사하 강법 적용

• 1
$$\frac{\partial E}{\partial out_y} = 2 * \frac{1}{2} (target_y - out_y)^{2-1} * (-1) = (out_y - target_y)$$

= $(0.709383 - 0.00) = 0.709383$

• ②
$$\frac{\partial out_y}{\partial \text{net}_y} = f'(out_y) = out_y * (1 - out_y) = 0.709383 * (1 - 0.709383) = 0.206158$$

• 3
$$net_y = w_5 * out_{h1} + w_6 * out_{h2} + b_3 * 1$$

 $\frac{\partial net_y}{\partial w_5} = 1 * out_{h1} + 0 + 0 = 0.524979$



$$\frac{\partial E}{\partial w_5} = \frac{\partial E}{\partial out_y} \frac{\partial out_y}{\partial net_y} \frac{\partial net_y}{\partial w_5}$$
$$= 0.709383^*0.206158^*0.524979 = 0.076775$$

$$w_5(t+1) = w_5(t) + \eta * \frac{\partial E}{\partial w_5} = 0.5 - 0.2*0.076775 = 0.484645$$

은니층—>출력층의 가중치와 바이어스

$$w_{\scriptscriptstyle 5}(t+1) = w_{\scriptscriptstyle 5}(t) + \eta * \frac{\partial E}{\partial w_{\scriptscriptstyle 5}} = 0.5 - 0.2^*0.076775 = 0.484645$$

$$w_6(t+1) = 0.583918$$

$$b_3(t+1) = 0.270750$$

가중치도 낮아지게 된다. . 현재 우리가 원하는 출력값은 ○ 의기 때문이다_.

바이어스는 기존 값 보다 낮아지게 된다. 따라서 다음 번에 는 유닛의 출력을 더 낮게 만들 것이다. 현재 우리가 원하는 출력값은 ○이기 때문이다.

입력층—>은닉층의 가중치와 바이어스

$$w_1(t+1) = w_1(t) + \eta * \frac{\partial E}{\partial w_1} = 0.10 - 0.2 * 0.0 = 0.10$$

$$w_2(t+1)=0.2$$
, $w_3(t+1)=0.3$, $w_4(t+1)=0.4$

입력값이 ○이어서 가중치는 변경되지 않았다(이점은 퍼셉트 론과 유사하다. 입력이 ○이면 가중 치를 아무리 바꿔도 무슨 소용인가?).

$$b_1(t+1) = 0.096352, b_2(t+1) = 0.195656$$

이런 경우에는 바이어스가 큰 역할을 한다(이래서 바이어스는 이러 있어야 한다) **바이어스는 기존 값 보다 낮아지게 된다.** 따라서 다음 번에는 유닛의 출력을 더 낮게 만들 것이다. 현재 우리가 원하는 출력값은 ○이기 때문이다.



$$E = \frac{1}{2}(t \operatorname{arget} - \operatorname{out}_y)^2 = \frac{1}{2}(0.00 - 0.709383)^2 = 0.251612$$



$$E = \frac{1}{2}(target - out_y)^2 = \frac{1}{2}(0.00 - 0.699553)^2 = 0.244687$$



$$E = \frac{1}{2}(target - out_y)^2 = \frac{1}{2}(0.00 - 0.005770)^2 = 0.000016$$

오차가 크게 줄었다.



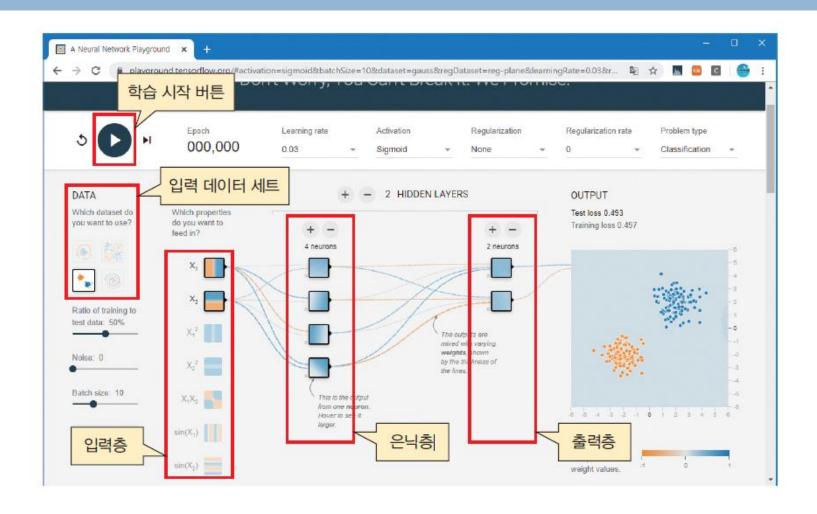


• 이런 복잡한 코딩을 해결하기 위해 TF, Keras가 등장(p.258)

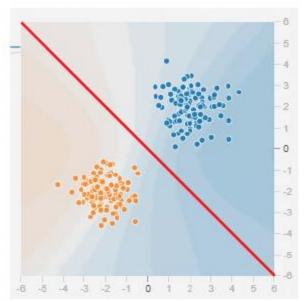
구글의 플레이그라운드를 이용한 실습

- 어려운 수학없이 신경망의 아이디어를 파악하는데 도움이 되는 도구
- 자바 스크립트로 작성된 웹 애플리케이션으로 웹 브라우저에서 실행
- 사용자가 딥러닝 모델을 구성하고 여러 가지 매개 변수를 조정하면 서 실험할 수 있는 기능을 제공

구글의 플레이그라운드

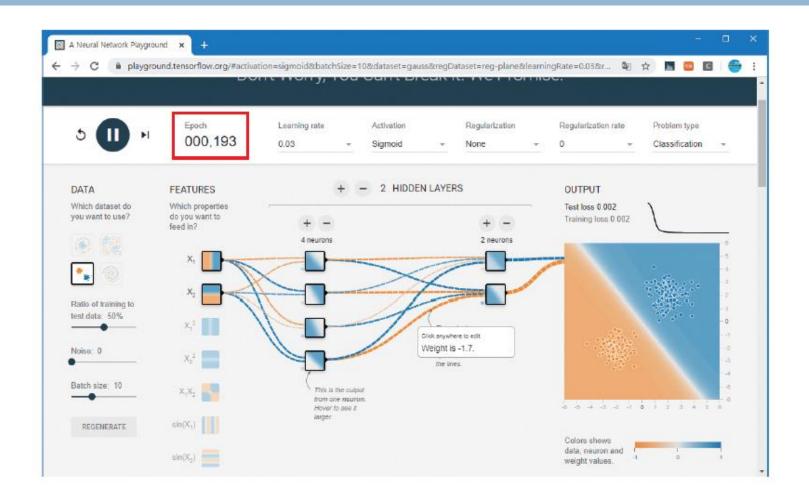


선형 분리 가능한 입력 데이터

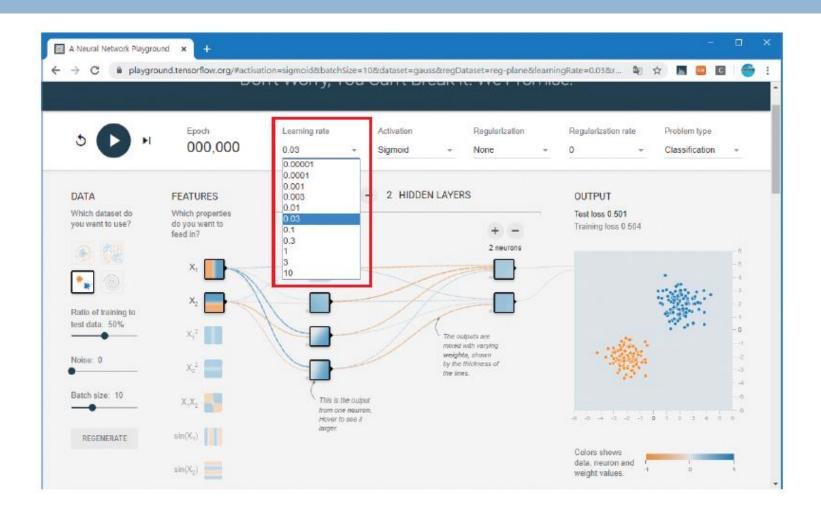


$$w_1x_1 + w_2x_2 + b = 0$$

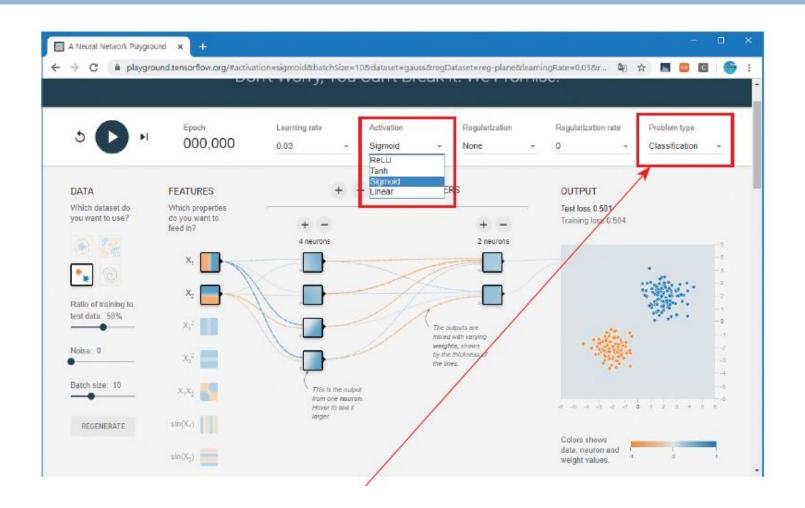






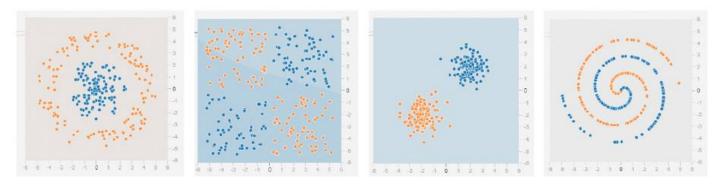


할성화 함수 선택

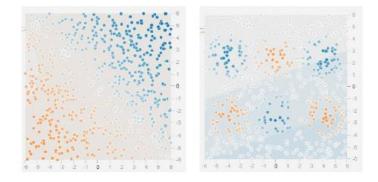




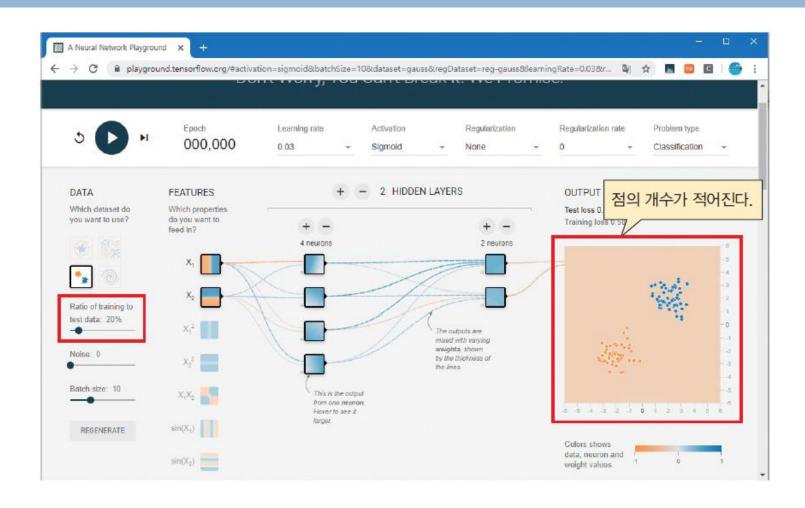
• 분류 문제



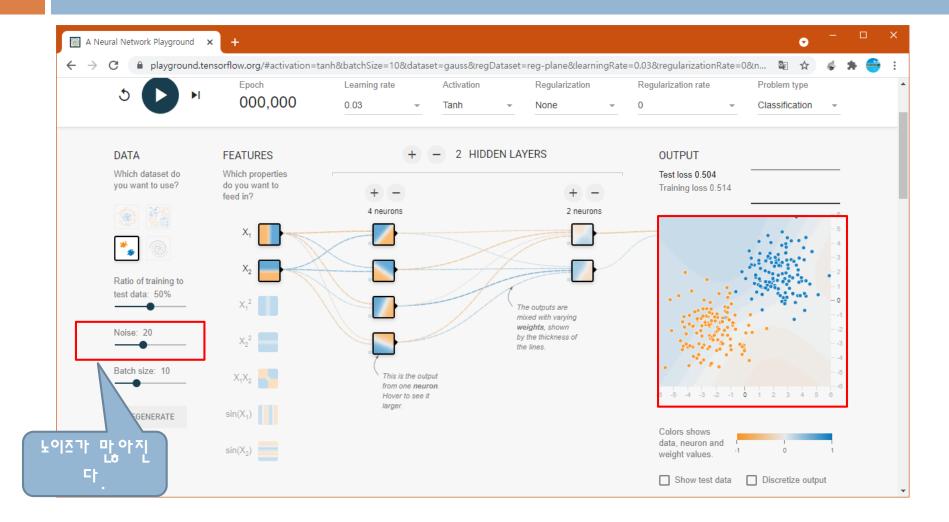
• 회귀 문제



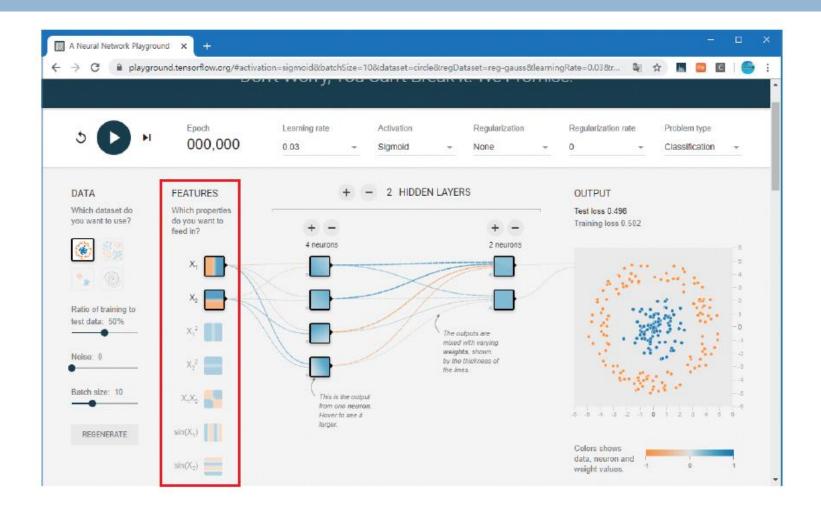
학습 데이터와 테스트 데이터의 비율



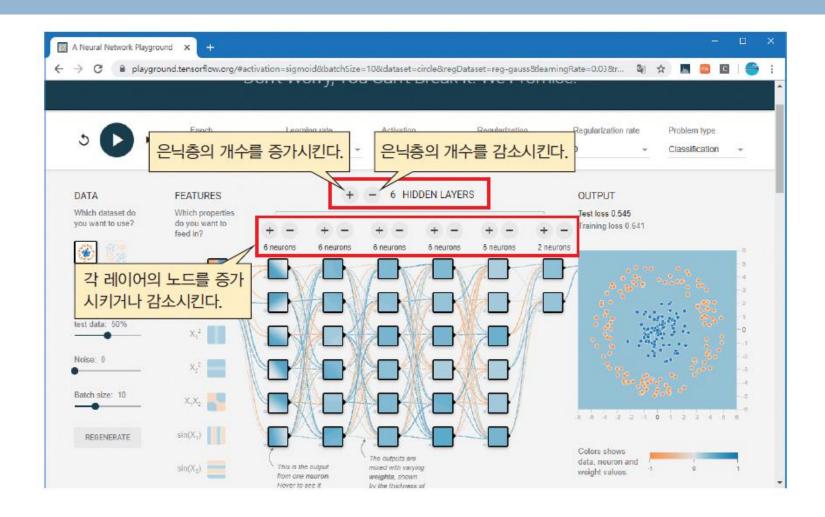




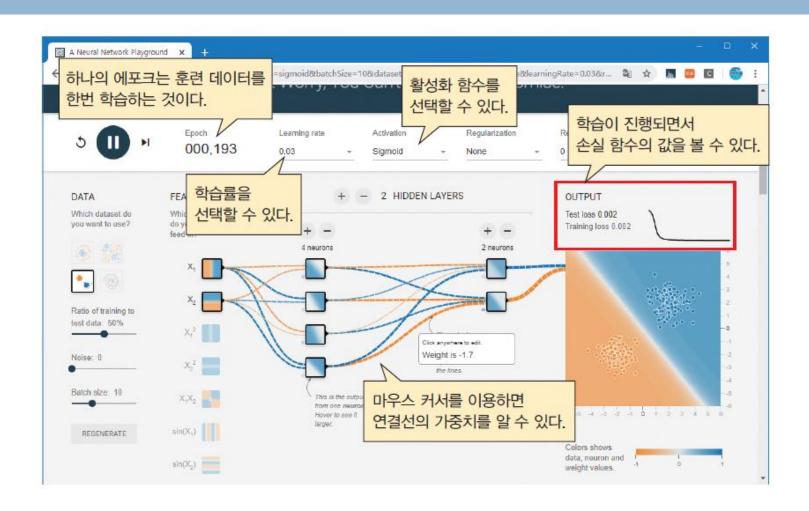
입력 특징 선택



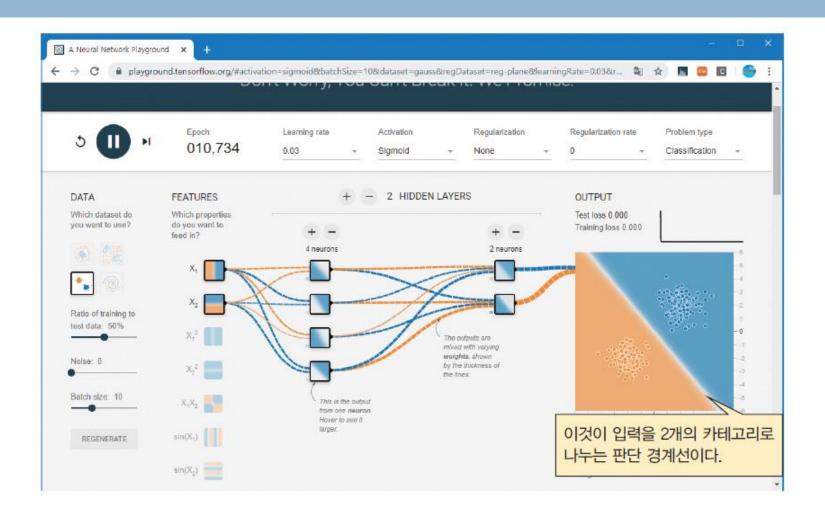


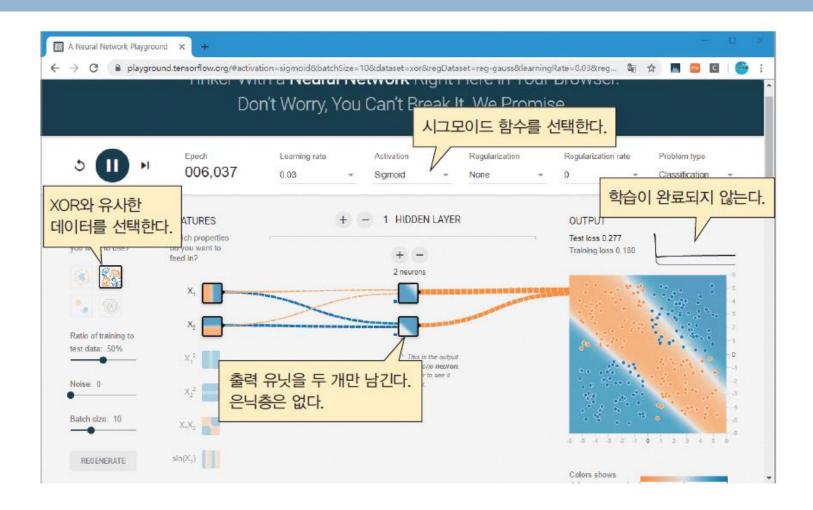






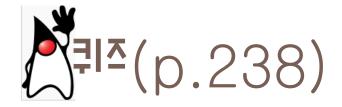






은니층을 추가한 실습





03 구글의 플레이그라운드를 사용하여 다음과 같은 MLP를 생성한다. 활성화 함수를 "linear"로 설정하였을 때, 입력을 올바르게 분류하는가? 활성화 함수를 "ReLU"로 변경하면 어떻게 되는가? 활성화 함수가 "Sigmoid"와 "ReLU"일 때도 성능을 비교해보자.

