

Σχολή Κοινωνικών Επιστημών
Πρόγραμμα Σπουδών Διοίκηση Επιχειρήσεων &
Οργανισμών
Θεματική Ενότητα Ποσοτικές Μέθοδοι (ΔΕΟ13)

Πρώτη Γραπτή Εργασία
Επιχειρησιακά Μαθηματικά

Καταληκτική ημερομηνία ανάρτησης της γραπτής εργασίας

Τρίτη 8 Νοεμβρίου 2022

Γενικές οδηγίες

- Οι απαντήσεις στις ερωτήσεις της εργασίας πρέπει να δίνονται σε δύο αρχεία σύμφωνα με τις αναλυτικές οδηγίες που ακολουθούν.
- Τα δύο αρχεία πρέπει να ανέβουν στο <http://study.eap.gr> εντός της καθορισμένης προθεσμίας.
- Εργασίες που υποβάλλονται με καθυστέρηση δεν γίνονται δεκτές.
- Η αντιγραφή μέρους ή ολόκληρης της εργασίας απαγορεύεται αυστηρά. Όλες οι εργασίες ελέγχονται αυτόματα μέσω της υπηρεσίας ελέγχου ομοιότητας κειμένων Turnitin και σε περίπτωση εντοπισμού φαινομένων αντιγραφής, ακολουθούνται οι διαδικασίες που προβλέπονται στον Κανονισμό Σπουδών.

Αναλυτικές οδηγίες

1. Η εργασία περιλαμβάνει **4 υποχρεωτικές ασκήσεις** η λύση των οποίων απαιτεί τη δημιουργία και ανάρτηση στο <http://study.eap.gr> των παρακάτω αρχείων:
 - **Αρχείο Κειμένου** (.docx ή .doc ή .odt) με τις απαντήσεις στις Ασκήσεις 1 έως 4 (όνομα αρχείου: Eponymo.Onoma-GE1.docx ή Eponymo.Onoma-GE1.doc ανάλογα με την έκδοση του MS Office που έχετε ή Eponymo.Onoma-GE1.odt, αν χρησιμοποιείτε λογισμικό τύπου OpenOffice). Στο αρχείο αυτό, θα πρέπει να δίνονται οι αναλυτικές απαντήσεις των ασκήσεων με τη σειρά που δίνονται στην εκφώνηση, αναγράφοντας και τον αριθμό του αντίστοιχου υποερωτήματος.
 - **Αρχείο Excel** (.xlsx ή .xls) με τις απαντήσεις των ασκήσεων στις οποίες ζητείται η χρήση του (Όνομα αρχείου: Eponymo.Onoma-GE1.xls ή Eponymo.Onoma-GE1.xlsx ανάλογα με την έκδοση MS Office που έχετε -σε περίπτωση που χρησιμοποιείτε λογισμικό τύπου OpenOffice, το (.ods) αρχείο πρέπει να σωθεί μέσα από το λογισμικό OpenOffice ως αρχείο Excel και να υποβληθεί το αρχείο Excel. Το αρχείο Excel πρέπει να περιέχει φύλλα εργασίας όσα και τα υποερωτήματα όπου ζητείται η χρήση Excel. Τα φύλλα εργασίας πρέπει να έχουν το όνομα του αντίστοιχου υποερωτήματος, π.χ. «Άσκηση 2Α», κ.λπ.
2. Οι εργασίες πρέπει να είναι **επιμελημένες και ευανάγνωστες**.
3. Στο **αρχείο Excel**, όλοι οι υπολογισμοί πρέπει να γίνονται αποκλειστικά με τη χρήση τύπων και συναρτήσεων του Excel εκτός και αν η αντίστοιχη άσκηση αναφέρει κάτι διαφορετικό.
4. Για τη **δημιουργία των μαθηματικών σχέσεων**, προτείνεται η χρήση των ειδικών σχετικών εφαρμογών του κειμενογράφου που χρησιμοποιείτε (δηλαδή του Word ή του λογισμικού τύπου OpenOffice), όπου αυτό κρίνεται απαραίτητο για την καλύτερη εμφάνιση τύπων και εξισώσεων. Συγκεκριμένα:
 - Για όσους χρησιμοποιούν **Microsoft Word¹**, η εφαρμογή εισαγωγής εξισώσεων εμφανίζεται στο μενού Insert (ή Εισαγωγή, στα Ελληνικά) δεξιά με το σύμβολο του π .
 - Για όσους χρησιμοποιούν **λογισμικό τύπου OpenOffice**, η εφαρμογή εισαγωγής εξισώσεων εμφανίζεται στο μενού Insert (ή Εισαγωγή, στα Ελληνικά), επιλέγοντας Object→ π FormulaObject (ή Αντικείμενο → π Αντικείμενο τύπου, στα Ελληνικά).

¹Όσοι χρησιμοποιούν έκδοση Word, παλαιότερη του Word 2007, για τη δημιουργία μαθηματικών σχέσεων πρέπει να χρησιμοποιήσουν την εφαρμογή «Επεξεργασία Εξισώσεων» (Equation Editor) του Word (Από τη γραμμή μενού: Insert→Object→ από Object type επιλέξτε Microsoft Equation 3.0 ή στα Ελληνικά: Εισαγωγή → Αντικείμενο → από Τύπος αντικειμένου επιλέξτε Microsoft Equation 3.0). Εάν η εφαρμογή δεν είναι ήδη εγκατεστημένη στον υπολογιστή, τότε δεν εμφανίζεται και θα πρέπει να προηγηθεί εγκατάσταση χρησιμοποιώντας το CD εγκατάστασης του Microsoft Office. Περισσότερες πληροφορίες για την εφαρμογή υπάρχουν στο εγχειρίδιο H/Y (σελ. 68-71), το οποίο είναι διαθέσιμο στην ενότητα Πρόσθετο Υλικό της ιστοσελίδας της ΔΕΟ13 (<https://study.eap.gr/course/view.php?id=154>) ακολουθώντας διαδοχικά τους συνδέσμους Συμπληρωματικό Υλικό, ΒΟΗΘΗΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΤΩΝ, ΒΟΗΘΗΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ στους Υπολογιστές και επιλέγοντας το αρχείο με όνομα Egxeiridio H-Y.pdf.

ΑΣΚΗΣΗ 1 (25 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Ερώτημα Α

Δίνεται η εξίσωση $x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0$ και μια ρίζα της είναι η $x_0 = 1$. Βρείτε τις άλλες ρίζες της. (7 μονάδες)

Ερώτημα Β

Βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες αληθεύει η ανίσωση $(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 1) > 0$. (6 μονάδες)

Ερώτημα Γ

Λύστε το γραμμικό σύστημα εξισώσεων
$$\begin{cases} 3x + 4y = 11 \\ -2x + 3y = 4 \end{cases}$$
. (6 μονάδες)

Ερώτημα Δ

Βρείτε το Πεδίο Ορισμού της πραγματικής συνάρτησης $f(x) = \log(1 - x) + \sqrt{x^2 - 1}$. (6 μονάδες)

ΑΣΚΗΣΗ 2 (25 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Ερώτημα Α

Η εξίσωση μιας ευθείας E_1 δίνεται από τον τύπο $4x + 2y - 8 = 0$.

- Γράψτε την εξίσωση της ευθείας E_1 στη μορφή $y = \beta x + \alpha$, όπου α η σταθερά της εξίσωσης και β η κλίση και βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει τους άξονες x και y . (4 μονάδες)
- Βρείτε την εξίσωση της ευθείας E_2 , που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλη προς την E_1 . (4 μονάδες)
- Σχεδιάστε τις ευθείες E_1 και E_2 στο Excel, για να επιβεβαιώσετε τα αποτελέσματα των προηγούμενων ερωτημάτων. Μεταφέρετε τη γραφική παράσταση, που δημιουργήσατε στο Excel, στο αρχείο των απαντήσεών σας. (4 μονάδες)

Ερώτημα Β

Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $(x_1, y_1) = (-1, 4)$ και έχει κλίση ίση με 6. (4 μονάδες)

Ερώτημα Γ

Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $(x_1, y_1) = (-3, -5)$ και $(x_2, y_2) = (1, 3)$. (4 μονάδες)

Ερώτημα Δ

Η εξίσωση μιας ευθείας δίνεται από τον τύπο $y = 2x + 1$. Ποια από τα σημεία $A(1, 3)$, $B(-1, -1)$ και $\Gamma(0, -1)$ ανήκουν στην ευθεία; (5 μονάδες)

ΑΣΚΗΣΗ 3 (25 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Έστω $y = f(x)$ μια γραμμική συνάρτηση για την οποία γνωρίζουμε πως όταν $x = 50$, $y = 3025$, ενώ όταν $x = 200$, $y = 2125$.

Ερώτημα Α

Προσδιορίστε τη συνάρτηση $y = f(x)$ και ερμηνεύστε την κλίση της. (10 μονάδες)

Ερώτημα Β

Ποια είναι η τιμή του y όταν $x = 0$ και ποια η τιμή του x όταν $y = 0$; (10 μονάδες)

Ερώτημα Γ

Αν μια δεύτερη γραμμική συνάρτηση $y = g(x)$ δίνεται από την εξίσωση $y = 6x + 2485$, προσδιορίστε το σημείο τομής των $f(x)$ και $g(x)$. (5 μονάδες)

ΑΣΚΗΣΗ 4 (25 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Σε μια επιχείρηση που παράγει εξαρτήματα για ιατρικά μηχανήματα, οι συναρτήσεις προσφοράς (Q_s) και ζήτησης (Q_d) για κάποιο συγκεκριμένο εξάρτημα δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$Q_s = 0.4P^2 + 8P + 40$$

$$Q_d = -0.6P^2 + 60$$

όπου Q η ποσότητα και P η τιμή του εξαρτήματος.

Ερώτημα Α

Ποια είναι η ποσότητα ζήτησης του εξαρτήματος, όταν αυτό διανέμεται δωρεάν και ποια τιμή πρέπει να του επιβληθεί, για να γίνει η ζήτηση του μηδενική; (9 μονάδες)

Ερώτημα Β

Υπολογίστε την τιμή και την ποσότητα του εξαρτήματος στο σημείο ισορροπίας. (8 μονάδες)

Ερώτημα Γ

Χρησιμοποιώντας το Excel, σχεδιάστε τις συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης στο ίδιο σύστημα αξόνων, με τις τιμές του P , από 0 ως 10 με βήμα 1, στον οριζόντιο άξονα και τις αντίστοιχες ποσότητες Q στον κάθετο άξονα, για να επιβεβαιώσετε τα αποτελέσματα των προηγούμενων ερωτημάτων. Μεταφέρετε τη γραφική παράσταση, που δημιουργήσατε στο Excel, στο αρχείο των απαντήσεών σας. (8 μονάδες)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΛΥΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1 (25 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Ερώτημα Α (7 μονάδες)

Για να βρούμε όλες τις ρίζες της εξίσωσης πρέπει να παραγοντοποιήσουμε το πολυώνυμο $(x^3 - 2x^2 - 11x + 12)$. Για το σκοπό αυτό, αρχικά το διαιρούμε με το $(x - 1)$:

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - 2x^2 - 11x + 12 & x - 1 \\
 \underline{-x^3 + x^2} & x^2 - x - 12 \\
 -x^2 - 11x + 12 & \\
 \underline{x^2 - x} & \\
 -12x + 12 & \\
 \underline{12x - 12} & \\
 0 &
 \end{array}$$

Άρα $x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = (x - 1)(x^2 - x - 12)$.

Το τριώνυμο $(x^2 - x - 12)$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 49 > 0$, άρα έχει δυο πραγματικές ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

Επομένως ισχύει $(x^3 - 2x^2 - 11x + 12) = (x - 1)(x - 4)(x + 3) = 0$ και άρα εκτός του 1, τα 4 και -3 αποτελούν επίσης ρίζες της εξίσωσης.

Σχόλια/Παρατηρήσεις

Η παραγοντοποίηση του πολυωνύμου $(x^3 - 2x^2 - 11x + 12)$, σε καταρχάς δυο όρους, μπορεί επίσης να γίνει με χρήση του σχήματος Horner ή με κατάλληλη διάσπαση και εν συνεχεία ομαδοποίηση των όρων του:

$$\begin{aligned}
 x^3 - 2x^2 - 11x + 12 &= x^3 - x^2 - x^2 + x - 12x + 12 \\
 &= x^2(x - 1) - x(x - 1) - 12(x - 1) = (x - 1)(x^2 - x - 12)
 \end{aligned}$$

Ερώτημα Β (6 μονάδες)

Το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 > 0$, άρα οι ρίζες του είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Επομένως, έχουμε $x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$ και η ανίσωση γίνεται:

$$(x - 2)(x - 1)(x^2 + 1) > 0$$

Σχηματίζουμε τον πίνακα πρόσημων:

	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x - 2$	—		○	+
$x - 1$	—	○	+	+
$x^2 + 1$	+		+	+
$(x^2 - 3x + 2) \cdot (x^2 + 1)$	+	○	—	+

Από τον πίνακα προσήμων διαπιστώνουμε ότι η ανίσωση αληθεύει στο διάστημα $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

Ερώτημα Γ (6 μονάδες)

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της αντικατάστασης. Έτσι αρχικά επιλύουμε την πρώτη εξίσωση ως προς y και λαμβάνουμε:

$$3x + 4y = 11 \quad \text{ή} \quad y = \frac{11}{4} - \frac{3}{4}x$$

Αντικαθιστούμε στη δεύτερη εξίσωση και έχουμε:

$$(-2)x + 3\left(\frac{11}{4} - \frac{3}{4}x\right) = 4 \Rightarrow -2x + \frac{33}{4} - \frac{9}{4}x = 4 \Rightarrow -\frac{17}{4}x = \frac{16}{4} - \frac{33}{4} \Rightarrow -\frac{17}{4}x = -\frac{17}{4}$$

Άρα $x = 1$, οπότε επιστρέφοντας στην πρώτη εξίσωση έχουμε:

$$y = \frac{11}{4} - \frac{3}{4}x = \frac{11}{4} - \frac{3}{4} \cdot 1 = 2$$

Ερώτημα Δ (6 μονάδες)

Θα πρέπει αρχικά να εξασφαλίσουμε ότι η υπόρριξη ποσότητα είναι μη αρνητική, πρέπει δηλαδή:

$$x^2 - 1 \geq 0 \quad \text{ή} \quad (x + 1)(x - 1) \geq 0 \quad \text{οπότε:}$$

$$x \leq -1 \quad \text{ή} \quad x \geq 1 \quad (\alpha)$$

αφού ένα τριώνυμο (με διακρίνουσα θετική και άρα δύο πραγματικές ρίζες, όπως εδώ), είναι ομόσημο του συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου του (εδώ 1), εκτός του διαστήματος που ορίζεται από τις ρίζες του (εδώ -1 και 1).

Στη συνέχεια θα πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι η ποσότητα εντός του λογαρίθμου είναι θετική, θα πρέπει δηλαδή επίσης:

$$1 - x > 0, \quad \text{δηλαδή}$$

$$x < 1 \quad (\beta)$$

Από (α) και (β) συμπεραίνουμε ότι Πεδίο Ορισμού της $f(x)$ είναι το διάστημα $(-\infty, -1]$.

ΑΣΚΗΣΗ 2 (25 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Ερώτημα Α (12 μονάδες)

Αi (4 μονάδες)

Για να φέρουμε την εξίσωση στη μορφή $y = \beta x + \alpha$, λύνουμε ως προς y και έχουμε:

$$4x + 2y - 8 = 0 \Rightarrow 2y = -4x + 8 \Rightarrow y = -2x + 4$$

Για να βρούμε τα σημεία όπου η εξίσωση τέμνει τους άξονες x και y θέτουμε στην εξίσωση της ευθείας όπου $x = 0$ και λαμβάνουμε $y = 4$, κατά συνέπεια η ευθεία τέμνει τον άξονα y στο σημείο $(0, 4)$.

Στη συνέχεια θέτουμε $y = 0$ και λαμβάνουμε $0 = -2x + 4 \Rightarrow x = 2$. Άρα, η ευθεία τέμνει τον άξονα x στο σημείο $(2, 0)$.

Aii (4 μονάδες)

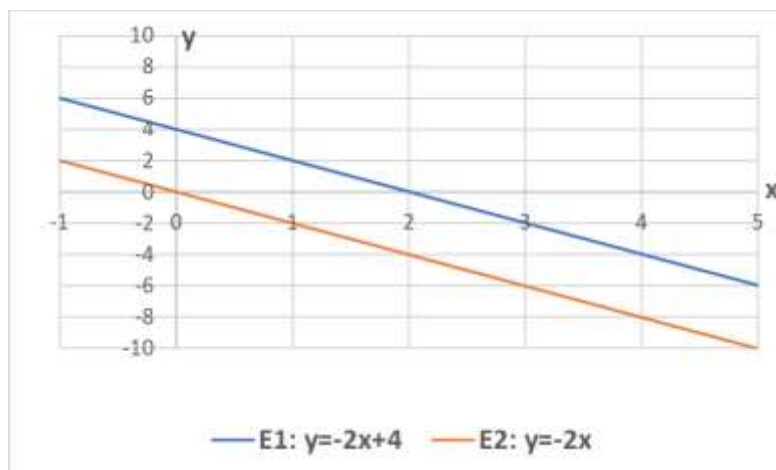
Για να είναι η ευθεία E_2 παράλληλη στην E_1 , θα πρέπει να έχουν την ίδια κλίση. Στο προηγούμενο ερώτημα βρήκαμε ότι η E_1 έχει κλίση $\alpha = -2$. Επιπλέον το σημείο $(0, 0)$ ανήκει στην ευθεία, αφού γνωρίζουμε ότι η E_2 διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Αφού επομένως η ζητούμενη ευθεία έχει κλίση $\alpha = -2$ και διέρχεται από το σημείο $(0, 0)$, θα έχει την ακόλουθη εξίσωση:

$$y = y_1 + \alpha(x - x_1) \Rightarrow y = 0 + (-2)(x - 0) \Rightarrow y = -2x$$

Aiii (4 μονάδες)

Το ακόλουθο διάγραμμα εμφανίζει τις γραφικές παραστάσεις των δύο ευθειών. Από το διάγραμμα διαπιστώνουμε πως οι δύο ευθείες είναι παράλληλες, η E_1 τέμνει τους άξονες x και y στα σημεία $(2, 0)$ και $(0, 4)$, αντίστοιχα και η E_2 διέρχεται από την αρχή των αξόνων.



Ερώτημα Β (4 μονάδες)

Χρησιμοποιώντας τον γενικό τύπο εξίσωσης ευθείας με γνωστή κλίση, που διέρχεται από ένα σημείο (x_1, y_1) , έχουμε:

$$y = y_1 + \alpha(x - x_1) \Rightarrow y = 4 + 6(x - (-1)) \Rightarrow y = 4 + 6(x + 1) \Rightarrow y = 6x + 10$$

Ερώτημα Γ (4 μονάδες)

Χρησιμοποιώντας τον γενικό τύπο εξίσωσης ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) έχουμε:

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Rightarrow y = -5 + \frac{3 - (-5)}{1 - (-3)} \cdot (x - (-3)) \Rightarrow y = -5 + 2(x + 3) \\ \Rightarrow y = 2x + 1$$

Ερώτημα Δ (5 μονάδες)

Για να διαπιστώσουμε αν τα δοθέντα σημεία ανήκουν στην εξίσωση της ευθείας αντικαθιστούμε την τιμή του x στην εξίσωση για να δούμε αν θα πάρουμε την τιμή του y .

Για παράδειγμα, το σημείο A έχει $x = 1$. Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στην εξίσωση λαμβάνουμε $y = 3$. Άρα το σημείο $A (1, 3)$ ανήκει στην ευθεία. Αντιστοίχως, το σημείο $B (-1, -1)$ ανήκει και αυτό στην ευθεία αφού αντικαθιστώντας $x = -1$ λαμβάνουμε $y = -1$. Τέλος, το σημείο $\Gamma (0, -1)$ δεν ανήκει στην ευθεία αφού για $x = 0$ το y λαμβάνει τιμή 1 και όχι -1 .

ΑΣΚΗΣΗ 3 (25 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Ερώτημα Α (10 μονάδες)

Μας δόθηκε ότι η γραμμική συνάρτηση $y = f(x)$ περνά από τα σημεία:

$$(x_1, y_1) = (50, 3025) \text{ και } (x_2, y_2) = (200, 2125)$$

Άρα ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2125 - 3025}{200 - 50} = \frac{-900}{150} = -6$$

και η εξίσωσή της είναι:

$$y = y_1 + a(x - x_1) \Rightarrow y = 3025 + (-6)(x - 50) \Rightarrow y = -6x + 3325$$

Η κλίση μιας εξίσωσης ευθείας εκφράζει τον αριθμό των μονάδων κατά τις οποίες μεταβάλλεται το y , όταν αυξάνεται το x κατά μια (1) μονάδα. Συνεπώς, στην παραπάνω εξίσωση αν αυξηθεί η μεταβλητή x κατά 1 μονάδα, η μεταβλητή y θα μειωθεί κατά 6 μονάδες.

Ερώτημα Β (10 μονάδες)

Για $x = 0$ θα έχουμε:

$$y = -6x + 3325 = -6 \cdot 0 + 3325 = 3325$$

Για $y = 0$ θα έχουμε:

$$y = -6x + 3325 \Rightarrow 0 = -6x + 3325 \Rightarrow 6x = 3325 \Rightarrow x = 554.17$$

Ερώτημα Γ (5 μονάδες)

Για να προσδιορίσουμε το σημείο τομής θα εξισώσουμε τις δύο συναρτήσεις, οπότε θα έχουμε:

$$-6x + 3325 = 6x + 2485 \Rightarrow 12x = 840 \Rightarrow x = 70$$

Άρα το κοινό σημείο x των συναρτήσεων είναι το 70 και η τιμή του σημείου y θα προκύψει αν αντικαταστήσουμε αυτή την τιμή του x σε μια από τις δύο συναρτήσεις. Συνεπώς:

$$y = -6x + 3325 = -6 \cdot 70 + 3325 = 2905$$

Άρα, το σημείο τομής είναι το $(70, 2905)$.

ΑΣΚΗΣΗ 4 (25 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Ερώτημα Α (9 μονάδες)

Η ζήτηση του εξαρτήματος όταν διανέμεται δωρεάν, δηλαδή όταν $P = 0$, είναι:

$$Q_d = -0.6P^2 + 60 = -0.6 \cdot (0)^2 + 60 = 60$$

Για να βρούμε την τιμή που πρέπει να επιβληθεί ώστε η ζήτηση να είναι μηδενική, δηλαδή για να είναι $Q_d = 0$, πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $0 = -0.6P^2 + 60$:

$$-0.6P^2 + 60 = 0 \Rightarrow P^2 - 100 = 0 \Rightarrow (P + 10)(P - 10) = 0$$

οπότε $P = -10$ ή $P = 10$. Η λύση $P = -10$ απορρίπτεται, αφού η τιμή δεν μπορεί να είναι αρνητική, άρα η τιμή που πρέπει να επιβληθεί είναι $P = 10$.

Ερώτημα Β (8 μονάδες)

Για να υπάρχει ισορροπία θα πρέπει:

$$Q_d = Q_s \Rightarrow -0.6P^2 + 60 = 0.4P^2 + 8P + 40 \Rightarrow P^2 + 8P - 20 = 0$$

οπότε έχουμε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20) = 64 + 80 = 144 > 0$, άρα η εξίσωση έχει δυο άνισες πραγματικές ρίζες τις ακόλουθες:

$$P_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-8 \pm \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = \frac{-8 \pm 12}{2} \Rightarrow \begin{cases} P_1 = 2 \\ P_2 = -10 \end{cases}$$

Η ρίζα $P = -10$ απορρίπτεται, αφού η τιμή δεν μπορεί να είναι αρνητική, άρα η τιμή στο σημείο ισορροπίας είναι $P = 2$. Θέτοντας αυτή την τιμή στη συνάρτηση προσφοράς ή στη συνάρτηση ζήτησης έχουμε την ποσότητα ισορροπίας:

$$Q = -0.6P^2 + 60 = -0.6 \cdot 2^2 + 60 = 57.6$$

Ερώτημα Γ (8 μονάδες)

Το ακόλουθο διάγραμμα εμφανίζει τις γραφικές παραστάσεις των καμπυλών προσφοράς (Q_s) και ζήτησης (Q_d). Από το διάγραμμα διαπιστώνουμε πως όταν $P = 0$, $Q_d = 60$, όταν $Q_d = 0$, $P = 10$, ενώ το σημείο (2, 57.6), αποτελεί σημείο ισορροπίας των δεδομένων συναρτήσεων προσφοράς και ζήτησης.

