Οικονομικά Δικτύων

Επιπλέον διαφάνειες για Lagrange multipliers

Χειμερινό Εξάμηνο 2020-21

Γεώργιος Δ. Σταμούλης

Παράδειγμα βελτιστοποίησης με περιορισμό ισότητας (Άμεσος τρόπος)

- Πρόβλημα: max{x1*x2} such that x1+x2=1

- Επιλύουμε τον περιορισμό ως προς x2 → x2=1-x1
- Μετατρέπουμε το πρόβλημα σε βελτιστοποίηση ως προς μια μεταβλητή:

  max f(x1) όπου f(x1) = x1*(1-x1)

- df(x1)/dx1=0 → 1-2*x1=0, x1=1/2 και x2=1-x1=1/2

Το ίδιο παράδειγμα με χρήση Lagrange multipliers (I)

- Πρόβλημα: max{x1*x2} such that x1+x2=1
- Μετατρέπουμε σε πρόβλημα βελτιστοποίησης χωρίς περιορισμό:
  $L(x1,x2,\lambda)=x1*x2+\lambda*(1-x1-x2)$
- Λαμβάνουμε παραγώγους ως προς x1,x2,λ:
  $dL(x1,x2,\lambda)/dx1=0 \rightarrow x2-\lambda=0$
  $dL(x1,x2,\lambda)/dx2=0 \rightarrow x1-\lambda=0$
  $dL(x1,x2,\lambda)/d\lambda=0 \rightarrow 1-x1-x2=0$
- Επιλύοντας το σύστημα εξισώσεων: $x1=x2=1/2=\lambda$

Το ίδιο παράδειγμα με χρήση Lagrange multipliers (II)

- Ερμηνεία του πολλαπλασιαστή Lagrange: εάν ο περιορισμός $x1+x2=1$ μετατραπεί σε $x1+x2=1+ε$ (όπου $ε>0$ αλλά μικρό), τότε η μέγιστη τιμή του $x1*x2$ θα αυξηθεί περίπου κατά $λ*ε=ε/2$.

Επαλήθευση:

- Για $x1+x2=1$ → $\max\{x1*x2\}=1/2*1/2=1/4$
- Για $x1+x2=1+ε$, το βέλτιστο επιτυγχάνεται για $x1=x2=1/2(1+ε)$ → $\max\{x1*x2\}=(1/2)*(1+ε)*(1/2)*(1+ε) =1/4+ε/2+ε^2/4$, οπότε η μεταβολή είναι όντως $ε/2$ αν αγνοήσουμε τον αμελητέο όρο $ε^2/4$

Παράδειγμα βελτιστοποίησης με περιορισμό ανισό-ισότητας

- Πρόβλημα: $g(x)=x \rightarrow \max\{g(x)\}$ such that $x \geq 0$ και $x \leq 1$
- Γράφουμε τον 2ο ως $1-x \geq 0$
- Μετατρέπουμε το πρόβλημα σε βελτιστοποίηση χωρίς περιορισμούς με 2 πολλαπλασιαστές Lagrange

  $L(x,\lambda 1,\lambda 2)=x + \lambda 1 * x + \lambda 2 * (1-x)$ όπου $\lambda 1=0$ αν $x>0$ και $\lambda 2=0$ αν $1-x>0$
- Λαμβάνουμε παραγώγους ως προς $x,\lambda 1,\lambda 2$:

  $dL(x,\lambda 1,\lambda 2)/dx = 0 \rightarrow 1+ \lambda 1-\lambda 2=0$

  $dL(x,\lambda 1,\lambda 2)/d\lambda 1=0 \rightarrow x=0$

  $dL(x,\lambda 1,\lambda 2)/d\lambda 2 = 0 \rightarrow 1-x=0$
- Οι λύσεις είναι: α) $x=0$ και $\lambda 2=0$, β) $x=1$ και $\lambda 1=0$, ενώ απορρίπτονται οι λύσεις γ) $x=0$ και $x=1$ και δ) $\lambda 1=\lambda 2=0$
- Άρα τα ακρότατα της συνάρτησης $g(x)$ είναι στα σημεία $x=1$ (μέγιστο) και $x=0$ (ελάχιστο) και όχι σε κάποιο εσωτερικό σημείο του διαστήματος $[0,1]$ καθώς δεν μπορεί να ισχύει $dg(x)/dx = 0$.