ΑΣΚΗΣΗ 1 (30 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Ας αναλύσουμε αυτό το πρόβλημα σε επιμέρους ερωτήματα:

α) Να βρεθεί η συνάρτηση P(x) που εκφράζει το μέγεθος κάθε παραγγελίας (αριθμός ενδοσκοπίων) συναρτήσει της συχνότητας παραγγελίας x, έτσι ώστε σε διάστημα 52 εβδομάδων το νοσοκομείο να έχει παραγγείλει συνολικά τα επιθυμητά 1200 ενδοσκόπια.

Για να βρούμε τη συνάρτηση P(x), πρέπει να προσδιορίσουμε το μέγεθος κάθε παραγγελίας (αριθμός ενδοσκοπίων) ως συνάρτηση της συχνότητας παραγγελίας x, θεωρώντας ότι σε μια περίοδο 52 εβδομάδων το νοσοκομείο πρέπει να παραγγείλει συνολικά 1200 ενδοσκόπια.

Μπορούμε να δημιουργήσουμε μια εξίσωση για να αναπαραστήσουμε τη σχέση μεταξύ του αριθμού των παραγγελιών, της συχνότητας παραγγελιών και του μεγέθους κάθε παραγγελίας:

Ας συμβολίσουμε:
- N τον συνολικό αριθμό ενδοσκοπίων που απαιτούνται ετησίως (N = 1200).
- x ως τη συχνότητα των παραγγελιών (ο αριθμός των παραγγελιών ανά έτος).
- P(x) ως το μέγεθος κάθε παραγγελίας.

Ο συνολικός αριθμός των ενδοσκοπίων που παραγγέλλονται ετησίως (N) θα πρέπει να ισούται με το γινόμενο της συχνότητας παραγγελιών (x) και του μεγέθους κάθε παραγγελίας (P(x)):

$$\boldsymbol{N = xP(x)}$$

Γνωρίζουμε ότι το N είναι 1200. Έτσι, η εξίσωση γίνεται:

$$\boldsymbol{1200 = xP(x)}$$

Τώρα, για να ικανοποιήσουμε την απαίτηση ότι πρόκειται για περίοδο 52 εβδομάδων, μπορούμε να τη γράψουμε σε όρους εβδομάδων:

Δεδομένου ότι 1 έτος = 52 εβδομάδες, μπορούμε να εκφράσουμε το x ως παραγγελίες ανά εβδομάδα (x/52 παραγγελίες ανά εβδομάδα). Επομένως, η εξίσωση γίνεται: Η εξίσωση είναι η εξής:

$$\boldsymbol{1200 = \left(\frac{x}{52}\right) P(x)}$$

Για να βρείτε την P(x), μπορείτε να λύσετε την P(x):

$$\mathbf{P(x)} = \frac{\mathbf{(1200\ *\ 52)}}{\boldsymbol{x}}$$

Έτσι, η συνάρτηση P(x) που εκφράζει το μέγεθος κάθε παραγγελίας (αριθμός ενδοσκοπίων) ως συνάρτηση της συχνότητας παραγγελίας x είναι:

$$\mathbf{P(x)} = \frac{\mathbf{62400}}{\boldsymbol{x}}$$

Η συνάρτηση αυτή εξασφαλίζει ότι σε μια περίοδο 52 εβδομάδων, το νοσοκομείο παραγγέλνει συνολικά τα επιθυμητά 1200 ενδοσκόπια.

(β) Για να γράψουμε τη συνάρτηση TC(x) που αντιστοιχεί στο συνολικό ετήσιο κόστος για το νοσοκομείο, πρέπει να λάβουμε υπόψη το κόστος αγοράς για κάθε ενδοσκόπιο, το ετήσιο κόστος διαχείρισης παραγγελιών και το ετήσιο κόστος αποθήκευσης. Η συνάρτηση TC(x) θα αντιπροσωπεύει το συνολικό κόστος ως συνάρτηση της συχνότητας παραγγελίας x.

Ας αναλύσουμε κάθε συνιστώσα του κόστους:

1. **Κόστος αγοράς ανά ενδοσκόπιο (PC)**: 300€ ανά ενδοσκόπιο.

2. **Ετήσιο κόστος διαχείρισης παραγγελιών (OC)**: 400€ για κάθε παραγγελία και ο αριθμός των παραγγελιών ανά έτος είναι x.

3. **Ετήσιο κόστος αποθήκευσης (SC)**: Υπολογίζεται ως S(x) = (10000 / x) σε ετήσια βάση.

Το συνολικό ετήσιο κόστος (TC) είναι το άθροισμα αυτών των τριών συνιστωσών:

$$\mathbf{TC(x) = P\boldsymbol{C} + OC + SC}$$

Τώρα, ας συνδέσουμε τις τιμές:

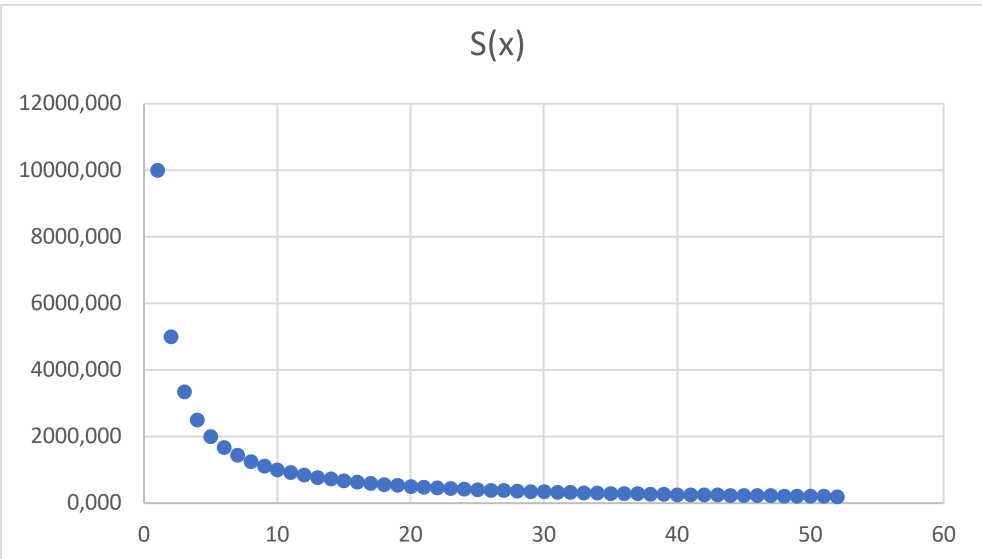
- Κόστος αγοράς ανά ενδοσκόπιο (PC) = 300€.
- Ετήσιο κόστος διαχείρισης παραγγελιών (OC) = 400€ * x
- Ετήσιο κόστος αποθήκευσης (SC) = 10000 / x

Έτσι, η συνάρτηση TC(x) είναι:

$$\mathbf{TC(x) = 300 + 400x + \left(\frac{10000}{\boldsymbol{x}}\right)}$$

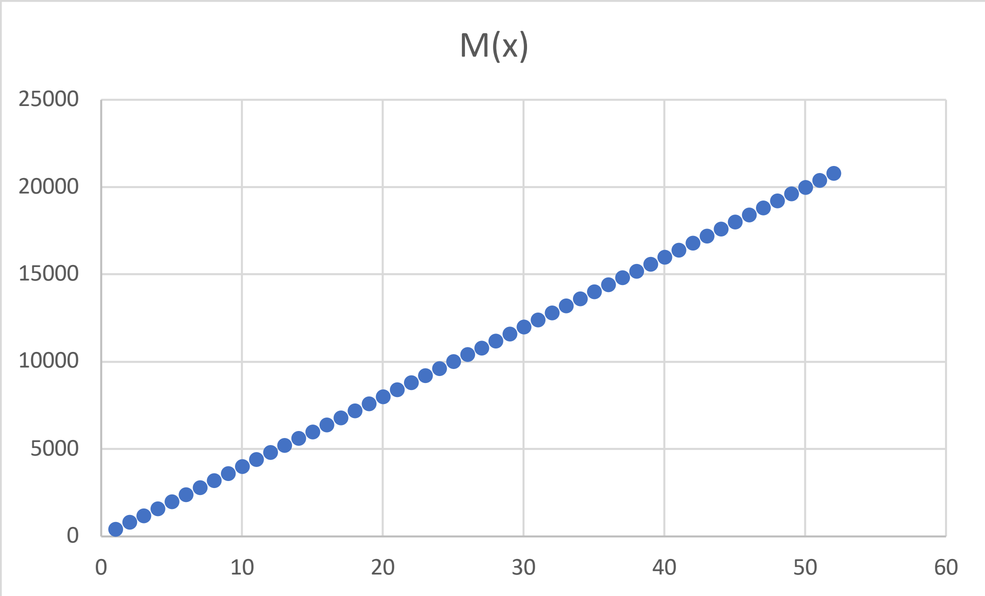
Η συνάρτηση αυτή αντιπροσωπεύει το συνολικό ετήσιο κόστος για το νοσοκομείο ως συνάρτηση της συχνότητας παραγγελίας x.

(γ) Γράφημα 1: Γράφημα του S(x) - Κόστος αποθήκευσης σε σχέση με τη συχνότητα παραγγελιών



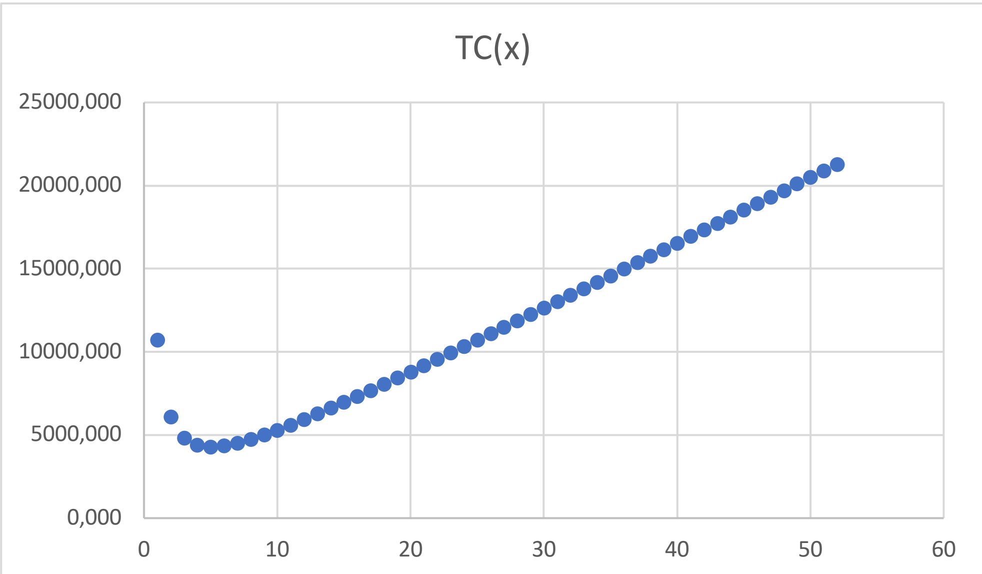
Το πρώτο γράφημα απεικονίζει τη σχέση μεταξύ της συχνότητας παραγγελιών (x) και του ετήσιου κόστους αποθήκευσης (S(x)) για τα ενδοσκόπια μίας χρήσης ενός νοσοκομείου. Ο άξονας x παριστάνει τη συχνότητα παραγγελιών, που κυμαίνεται από 1 έως 52, ενώ ο άξονας y παριστάνει το ετήσιο κόστος αποθήκευσης σε ευρώ. Καθώς αυξάνεται η συχνότητα παραγγελιών, το γράφημα δείχνει ότι το ετήσιο κόστος αποθήκευσης μειώνεται. Αυτό υποδηλώνει μια αντίστροφη σχέση μεταξύ της συχνότητας παραγγελιών και του κόστους αποθήκευσης, καθώς οι υψηλότερες συχνότητες παραγγελιών οδηγούν σε πιο συχνές, αλλά μικρότερες δαπάνες αποθήκευσης.

Γράφημα 2: Γράφημα του M(x) - Ετήσιο διοικητικό κόστος σε σχέση με τη συχνότητα παραγγελιών



Το δεύτερο γράφημα απεικονίζει το ετήσιο διοικητικό κόστος (M(x)) που επιβαρύνει το νοσοκομείο για διαφορετικές συχνότητες παραγγελιών (x). Ο άξονας x εμφανίζει τιμές συχνότητας παραγγελιών που κυμαίνονται από 1 έως 52, ενώ ο άξονας y αντιπροσωπεύει το ετήσιο διοικητικό κόστος σε ευρώ. Καθώς αυξάνεται η συχνότητα παραγγελιών, το γράφημα δείχνει γραμμική αύξηση του ετήσιου διοικητικού κόστους. Αυτό καταδεικνύει μια άμεση αναλογικότητα μεταξύ της συχνότητας παραγγελιών και του διοικητικού κόστους, όπου οι υψηλότερες συχνότητες παραγγελιών οδηγούν σε υψηλότερα ετήσια διοικητικά έξοδα.

Γράφημα 3: Γράφημα TC(x) - Συνολικό ετήσιο κόστος σε σχέση με τη συχνότητα παραγγελιών



Το τρίτο γράφημα απεικονίζει το συνολικό ετήσιο κόστος (TC(x)) που επιβαρύνει το νοσοκομείο, το οποίο περιλαμβάνει το κόστος αγοράς, το ετήσιο διοικητικό κόστος και το κόστος αποθήκευσης, για διάφορες συχνότητες παραγγελιών (x). Ο άξονας x εμφανίζει τιμές της συχνότητας παραγγελιών που κυμαίνονται από 1 έως 52 και ο άξονας y αντιπροσωπεύει το συνολικό ετήσιο κόστος σε ευρώ. Καθώς αυξάνεται η συχνότητα παραγγελιών, το γράφημα καταδεικνύει μια μη γραμμική σχέση με ένα συγκεκριμένο σημείο στο οποίο ελαχιστοποιείται το συνολικό ετήσιο κόστος. Πέραν αυτού του σημείου, το συνολικό ετήσιο κόστος αυξάνεται. Αυτό το γράφημα παρέχει πληροφορίες για τη βελτιστοποίηση της συχνότητας παραγγελιών ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος του νοσοκομείου.

(δ) Για να υπολογίσετε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο του TC(x), που αντιπροσωπεύουν το ρυθμό μεταβολής του συνολικού ετήσιου κόστους σε σχέση με τη συχνότητα παραγγελίας x, μπορείτε να ακολουθήσετε τα εξής βήματα. Δίνεται ο τύπος για το TC(x):

$$\boldsymbol{TC(x) = 300 + (x400) + \left(\frac{10000}{x}\right)}$$

1. **Πρώτη παράγωγος (TC'(x)):**
   Για να βρείτε την πρώτη παράγωγο TC'(x), θα πρέπει να διαφοροποιήσετε το TC(x) ως προς x.

$$TC(x) = 300 + 400x + \frac{10000}{x}$$

$$TC'(x) = \frac{d}{dx}[300] + \frac{d}{dx}[400x] + \frac{d}{dx}\left[\frac{10000}{x}\right]$$

   Οι παράγωγοι των επιμέρους όρων είναι:

$$\frac{d}{dx}[300] = 0(\text{καθώςπρόκειταιγιασταθερΦ})$$

$$\frac{d}{dx}[400x] = 400$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{10000}{x}\right] = -\frac{10000}{x^2}$$

   Έτσι, $TC'(x) = 0 + 400 - \frac{10000}{x^2}$

$$TC'(x) = 400 - \frac{10000}{x^2}$$

2. **Δεύτερη παράγωγος (TC''(x)):**
   Για να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο TC''(x), διαφοροποιήστε την TC'(x) ως προς x.

$$TC'(x) = 400 - \frac{10000}{x^2}$$

$$TC''(x) = \frac{d}{dx}[400] - \frac{d}{dx}\left[\frac{10000}{x^2}\right]$$

   Οι παράγωγοι των επιμέρους όρων είναι:

$$\frac{d}{dx}[400] = 0(\text{καθώςεΩναισταθερΦ})$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{10000}{x^2}\right] = \frac{20000}{x^3}$$

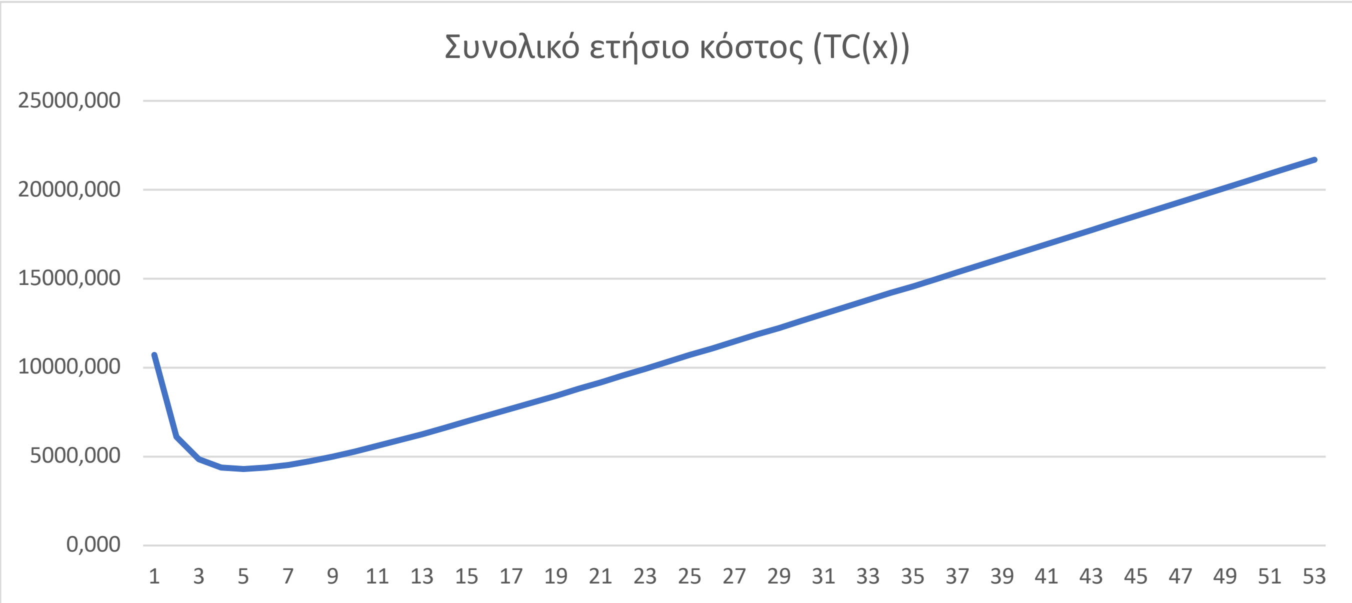
   Έτσι, $TC''(x) = 0 - \frac{20000}{x^3}$

$$TC''(x) = -\frac{20000}{x^3}$$

Αυτές είναι η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος TC'(x) και TC''(x) της συνάρτησης συνολικού ετήσιου κόστους TC(x) ως προς τη συχνότητα τάξης x.

(ε) Η συνάρτηση TC(x) έχει ένα σημείο καμπής. Το σημείο καμπής είναι ένα σημείο σε μια γραφική παράσταση όπου η κατεύθυνση της καμπύλης αλλάζει, πηγαίνοντας από αύξουσα σε φθίνουσα ή αντίστροφα. Στην περίπτωση αυτή, το σημείο καμπής εμφανίζεται επειδή η πρώτη παράγωγος TC'(x) αλλάζει από αρνητική σε μηδενική και στη συνέχεια σε θετική.

Αρχικά, καθώς η συχνότητα παραγγελίας (x) αυξάνεται από χαμηλές τιμές (x = 1, 2, 3, ...), το συνολικό ετήσιο κόστος (TC(x)) μειώνεται. Αυτό είναι εμφανές από τις αρνητικές τιμές του TC'(x), που υποδηλώνουν φθίνοντα ρυθμό κόστους.
Ωστόσο, σε ένα ορισμένο σημείο (γύρω στο x = 5), το TC'(x) μηδενίζεται. Αυτό σημαίνει ότι ο ρυθμός μεταβολής του κόστους εξισώνεται και το συνολικό ετήσιο κόστος σταματά να μειώνεται σημαντικά. Σε αυτό το σημείο, η συνάρτηση έχει σημείο καμπής.
Πέρα από αυτό το σημείο καμπής (x > 5), το TC'(x) γίνεται θετικό, που σημαίνει ότι ο ρυθμός μεταβολής του κόστους γίνεται θετικός. Από πρακτική άποψη, το κόστος αρχίζει να αυξάνεται με περαιτέρω αύξηση της συχνότητας των παραγγελιών. Αυτό το σημείο καμπής είναι το σημείο όπου η συνάρτηση TC(x) αλλάζει από φθίνουσα σε αυξανόμενη.
Συνοπτικά, η συνάρτηση TC(x) έχει σημείο καμπής επειδή μεταβαίνει από φθίνον κόστος σε αυξανόμενο κόστος καθώς αυξάνεται η συχνότητα παραγγελίας (x), και η μετάβαση αυτή αντικατοπτρίζεται στην αλλαγή του προσήμου στην TC'(x).



(στ) Για να βρείτε τη συχνότητα παραγγελίας (x) που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος TC για το νοσοκομείο, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον λογισμό για να προσδιορίσετε το ελάχιστο σημείο. Δείτε πώς θα το κάνετε:

Στο Excel, ασχολήθηκα με το πρόβλημα της εύρεσης της βέλτιστης συχνότητας παραγγελίας (x) για την ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους (TC) για ένα νοσοκομείο. Για την επίλυση του προβλήματος αυτού, δημιούργησα αρχικά ένα φύλλο Excel, όπου υπολόγιζα το TC για διαφορετικές τιμές του x με βάση τον παρεχόμενο τύπο TC(x). Στη συνέχεια, εγκατέστησα το Solver Add-In, το οποίο είναι ένα ισχυρό εργαλείο για προβλήματα βελτιστοποίησης. Στο παράθυρο διαλόγου Solver Parameters, όρισα ως στόχο την ελαχιστοποίηση του TC(B2) και επέλεξα ως στόχο το "Min". Όρισα το μεταβλητό κελί ως A2 (Συχνότητα παραγγελίας), το οποίο το Solver θα ρυθμίζει για να βρει το ελάχιστο TC. Για να διασφαλίσω ότι η λύση ήταν εντός ενός ρεαλιστικού εύρους, πρόσθεσα περιορισμούς καθορίζοντας ότι το x έπρεπε να είναι μεγαλύτερο ή ίσο με 1 και μικρότερο ή ίσο με 52. Τέλος, έκανα κλικ στο κουμπί "Solve" (Επίλυση), επιτρέποντας στο Solver να προσαρμόσει την τιμή στο κελί A2 μέχρι να βρει τη βέλτιστη συχνότητα παραγγελίας που ελαχιστοποιούσε το TC. Το Solver κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η βέλτιστη τιμή για το x ήταν περίπου 5, την οποία στρογγυλοποίησα στον πλησιέστερο ακέραιο. Αυτή η προσέγγιση μου επέτρεψε να βρω αποτελεσματικά την πιο αποδοτική συχνότητα παραγγελίας για το νοσοκομείο, τηρώντας παράλληλα τους πρακτικούς περιορισμούς.

Έχουμε ήδη τη συνάρτηση για το συνολικό κόστος TC(x):

$$\boldsymbol{TC(x) = 300 + (x400) + \left(\frac{10000}{x}\right)}$$

Για να βρούμε το ελάχιστο σημείο, πρέπει να βρούμε πού η πρώτη παράγωγος TC'(x) ισούται με μηδέν. Αυτό συμβαίνει επειδή το ελάχιστο ή το μέγιστο μιας συνάρτησης εμφανίζεται εκεί όπου η παράγωγος της είναι μηδέν ή απροσδιόριστη.

Υπολογίσαμε την TC'(x) νωρίτερα:

$$\boldsymbol{TC'(x) = 400 - \frac{10000}{x^2}}$$

Τώρα, θέστε το TC'(x) ίσο με το μηδέν και λύστε για το x:

$$\boldsymbol{400 - \left(\frac{10000}{x^2}\right) = 0}$$

$$\boldsymbol{400 = \frac{10000}{x^2}}$$

$$\boldsymbol{x^2 = \frac{10000}{400}}$$

$$\boldsymbol{x^2 = 25}$$

$$\boldsymbol{x = \sqrt{25}}$$

$$\boldsymbol{x = 5}$$

Έτσι, η συχνότητα παραγγελίας (x) που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος TC για το νοσοκομείο είναι 5. Τώρα, στρογγυλοποιήστε αυτό το αποτέλεσμα στον πλησιέστερο ακέραιο, όπως ζητείται:

Στρογγυλοποιώντας το 5 στον πλησιέστερο ακέραιο αριθμό προκύπτει **x = 5**.

Επομένως, **η βέλτιστη συχνότητα παραγγελιών για το νοσοκομείο που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος είναι 5 παραγγελίες ανά έτος**.

ΑΣΚΗΣΗ 2 (20 ΜΟΝΑΔΕΣ)

(α) Για να βρω την εξίσωση της συνάρτησης ζήτησης Qd(p) υποθέτοντας ότι είναι γραμμική, θα χρησιμοποιήσω τα δύο σημεία δεδομένων που παρέχονται: (p=10, q=100) και (p=25, q=80).

Πρώτον, ας προσδιορίσουμε την κλίση (m) της γραμμικής συνάρτησης ζήτησης. Η κλίση μιας γραμμικής συνάρτησης δίνεται από:

$$\boldsymbol{m = \frac{\text{Μεταβολή στο } q}{\text{Μεταβολή στο } p}}$$

Χρησιμοποιώντας τα δύο σημεία δεδομένων, μπορούμε να υπολογίσουμε τη μεταβολή στο q και τη μεταβολή στο p:

$$\boldsymbol{M\varepsilon\tau\alpha\beta o\lambda\Psi\ \sigma\tau o\ q\ =\ 80\ -\ 100\ =\ -20}$$
$$\boldsymbol{M\varepsilon\tau\alpha\beta o\lambda\Psi\ \sigma\tau o\ p\ =\ 25\ -\ 10\ =\ 15}$$

Τώρα, μπορούμε να υπολογίσουμε την κλίση:

$$\boldsymbol{M\ =\ -\frac{20}{15} =\ -\frac{4}{3}}$$

Έτσι, η κλίση της συνάρτησης ζήτησης είναι $-\frac{4}{3}$.

Τώρα, πρέπει να βρούμε την y-κορυφή (b) της γραμμικής συνάρτησης ζήτησης. Η y-κορυφή είναι η τιμή του q όταν το p είναι 0. Για να την βρούμε, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα από τα σημεία δεδομένων. Ας χρησιμοποιήσουμε το (p=10, q=100):

Έχουμε:

$$\boldsymbol{q\ =\ mp + b}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές που γνωρίζουμε:

$$\boldsymbol{100\ =\ -\frac{4}{3}10 + b}$$

Τώρα, μπορούμε να λύσουμε για το b:

$$\boldsymbol{100\ =\ -\frac{40}{3} + b}$$

Για να απομονώσουμε το b, προσθέτουμε $\frac{40}{3}$ και στις δύο πλευρές:

$$\boldsymbol{b = 100 + \frac{40}{3}}$$

Για να προσθέσουμε αυτά τα κλάσματα, χρειαζόμαστε έναν κοινό παρονομαστή, ο οποίος είναι το 3:

$$\boldsymbol{b = \frac{300}{3} + \frac{40}{3} = \frac{340}{3}}$$

Έτσι, η τετμημένη y (b) είναι $\frac{340}{3}$

Τώρα, έχουμε τόσο την κλίση (m) όσο και την y-κορυφή (b) της γραμμικής συνάρτησης ζήτησης:

$$\boldsymbol{m =\ -\frac{4}{3}}$$

$$\boldsymbol{b = \frac{340}{3}}$$

Επομένως, η εξίσωση της συνάρτησης ζήτησης Qd(p) είναι:

$$Qd(p) = -\frac{4}{3}p + \frac{340}{3}$$

Αυτή είναι η γραμμική συνάρτηση ζήτησης για τα συγκεκριμένα δεδομένα.

(β) Για να γράψουμε την εξίσωση της συνάρτησης προσφοράς Qs(p) δεδομένου ότι είναι γραμμική και έχει κλίση α=4, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μορφή σημείου-κλίσης μιας γραμμικής εξίσωσης:

$$Qs(p) = m(p - p_0) + Q_0$$

Σε αυτή την εξίσωση:
- $Qs(p)$ είναι η συνάρτηση προσφοράς που προσπαθούμε να βρούμε.
- (m) είναι η κλίση της συνάρτησης προσφοράς, η οποία δίνεται ως α=4.
- (p_0) είναι ένα γνωστό σημείο τιμής στο οποίο η προσφορά είναι δεδομένη.
- (Q_0) είναι η προσφερόμενη ποσότητα στην τιμή \(p_0\).

Με βάση τις παρεχόμενες πληροφορίες, έχουμε:

$$(p_0 = 10\ \mu o\nu \Phi \delta \varepsilon \varsigma)$$

$$(Q_0 = 50\ \mu o\nu \Phi \delta \varepsilon \varsigma)$$

$$\alpha(\kappa\lambda ί\sigma\eta) = 4$$

Τώρα, μπορούμε να εισάγουμε αυτές τις τιμές στην εξίσωση:

$$[Qs(p) = 4(p - 10) + 50]$$

Απλοποιήστε αυτή την εξίσωση:

$$[Qs(p) = 4p - 40 + 50]$$

$$[Qs(p) = 4p + 10]$$

Έτσι, η εξίσωση της συνάρτησης προσφοράς **Qs(p)** είναι:

$$[Qs(p) = 4p + 10]$$

(γ) Για να βρούμε το σημείο ισορροπίας της αγοράς, πρέπει να προσδιορίσουμε την τιμή (p) και την ποσότητα (q) στις οποίες τέμνονται οι συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς. Η ισορροπία επέρχεται όταν η ζητούμενη ποσότητα (Qd) ισούται με την προσφερόμενη ποσότητα (Qs).

Από τις προηγούμενες απαντήσεις, έχουμε τις ακόλουθες εξισώσεις για τις συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς:

Συνάρτηση ζήτησης: $(Qd(p) = -\frac{4}{3}p + \frac{340}{3})$
Συνάρτηση προσφοράς: $(Qs(p) = 4p + 10)$

Για να βρούμε την ισορροπία, πρέπει να θέσουμε $(Qd(p) = Qs(p))$:

$$(-\frac{4}{3}p + \frac{340}{3} = 4p + 10)$$

Τώρα, μπορούμε να λύσουμε την τιμή ισορροπίας (p):

$$(-\frac{4}{3}p+\frac{340}{3}=4p+10)$$

Προσθέστε $(\frac{4}{3}p)$ και στις δύο πλευρές για να απομονώσετε τους όρους με p:

$$(\frac{340}{3}=\frac{4}{3}p+4p+10)$$

Συνδυάστε τους όμοιους όρους:

$$(\frac{340}{3}=\frac{16}{3}p+10)$$

Αφαιρέστε 10 και από τις δύο πλευρές:

$$(\frac{340}{3}-10=\frac{16}{3}p)$$

Τώρα, διαιρέστε με το $(\frac{16}{3})$ για να λύσετε το p:

$$p\ =\frac{\frac{340}{3}-10}{\frac{16}{3}}$$

Απλοποιήστε:

$$p\ =\frac{\frac{340}{3}-\frac{30}{3}}{\frac{16}{3}}$$

$$p\ =\frac{\frac{310}{3}}{\frac{16}{3}}$$

Τώρα, διαιρέστε τους αριθμητές με τους παρονομαστές:

$$p=\frac{310}{16}$$

Απλοποιήστε το κλάσμα:

$$p\ =\ 19.375$$

Έτσι, η τιμή ισορροπίας (p) είναι περίπου 19,375 μονάδες.

Για να βρούμε την ποσότητα ισορροπίας (q), μπορούμε να βάλουμε αυτή την τιμή ισορροπίας είτε στη συνάρτηση ζήτησης είτε στη συνάρτηση προσφοράς. Ας χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση ζήτησης:

$$Qd(19.375) = -\frac{4}{3}(19.375) + \frac{340}{3}$$

Τώρα, υπολογίστε το για να βρείτε την ποσότητα ισορροπίας (q):

$$Qd(19.375) \approx 85$$

Επομένως, η ποσότητα ισορροπίας (q) είναι περίπου 85 μονάδες.

Επομένως, το σημείο ισορροπίας στην αγορά είναι μια τιμή 19,375 μονάδων και μια ποσότητα 85 μονάδων.

(δ) Για τον υπολογισμό του νέου σημείου ισορροπίας της αγοράς με την ενημερωμένη συνάρτηση προσφοράς ($Qs(p) = \frac{p^2}{25} + 2p + 20$) και τη συνάρτηση ζήτησης \(Qd(p) = -\frac{4}{3}p + \frac{340}{3}\), πρέπει να βρούμε την τιμή (p) και την ποσότητα (q) στην οποία η ζητούμενη ποσότητα ισούται με την προσφερόμενη ποσότητα.

Έτσι, πρέπει να θέσουμε ($Qd(p) = Qs(p)$):

$$(-\frac{4}{3}p + \frac{340}{3} = \frac{p^2}{25} + 2p + 20)$$

Τώρα, μπορούμε να λύσουμε την τιμή ισορροπίας (p):

$$(-\frac{4}{3}p + \frac{340}{3} = \frac{p^2}{25} + 2p + 20)$$

Για να κάνουμε την εξίσωση πιο εύχρηστη, μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε και τις δύο πλευρές επί 75 για να καθαρίσουμε τα κλάσματα:

$$(-100p + 3400 = 3p^2 + 50p + 1500)$$

Αναδιατάξτε την εξίσωση και θέστε την ίση με το μηδέν:

$$[3p^2 + 50p + 1500 + 100p - 3400 = 0]$$

Συνδυάστε όμοιους όρους:

$$[3p^2 + 150p - 1900 = 0]$$

Τώρα, μπορούμε να λύσουμε το p χρησιμοποιώντας τον τετραγωνικό τύπο:

$$[p = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}]$$

Σε αυτή την περίπτωση, a = 3, b = 150 και c = -1900. Εισάγετε αυτές τις τιμές στον τετραγωνικό τύπο:

$$[p = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}]$$

Τώρα, υπολογίστε τις τιμές του p:

$$[p_1 \approx 16.58]$$

$$[p_2 \approx -38.25]$$

Δεδομένου ότι οι τιμές δεν μπορούν να είναι αρνητικές σε αυτό το πλαίσιο, θεωρούμε τη θετική τιμή ($p_1 \approx 16.58$) ως την τιμή ισορροπίας.

Τώρα, μπορούμε να βρούμε την αντίστοιχη ποσότητα ισορροπίας (q) χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση ζήτησης ($Qd(p) = -\frac{4}{3}p + \frac{340}{3}$) με αυτή την τιμή ισορροπίας:

$$[q = -\frac{4}{3}(16.58) + \frac{340}{3}]$$

Υπολογίστε το q:

$$[q \approx 85.78]$$

Έτσι, το νέο σημείο ισορροπίας στην αγορά, με την ενημερωμένη συνάρτηση προσφοράς, είναι περίπου μια τιμή 16,58 μονάδων και μια ποσότητα 85,78 μονάδων. Δεδομένου ότι η ποσότητα πρέπει να είναι σε ακέραιες μονάδες, μπορούμε να στρογγυλοποιήσουμε την ποσότητα στην πλησιέστερη ακέραια μονάδα. Επομένως, το νέο σημείο ισορροπίας είναι μια τιμή περίπου 16,58 μονάδων και μια ποσότητα 86 μονάδων.

ΑΣΚΗΣΗ 3 (25 ΜΟΝΑΔΕΣ)

(α) Για να βρούμε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων και να υπολογίσουμε τις πρώτες παραγώγους τους, θα εξετάσουμε κάθε συνάρτηση μία προς μία:

1. $f_1(x) = \frac{(2x+1)^2}{(3x-2)^3}$

Για να βρούμε το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης, πρέπει να εξετάσουμε τις τιμές του x για τις οποίες ο παρονομαστής δεν είναι ίσος με το μηδέν. Ο παρονομαστής, (3x-2)^3, δεν πρέπει να είναι μηδέν, οπότε έχουμε:

$$3x - 2 \neq 0$$

Λύνοντας για το x:

$$3x \neq 2$$

$$x \neq 2/3$$

Έτσι, η συνάρτηση ορίζεται για όλους τους πραγματικούς αριθμούς εκτός από $x = \frac{2}{3}$

Τώρα, ας βρούμε την πρώτη παράγωγο της $f_1(x)$ χρησιμοποιώντας τον κανόνα του πηλίκου:

$$f_1'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{(2x+1)^2}{(3x-2)^3}\right)$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του πηλίκου, η παράγωγος είναι:

$$f_1'(x) = \frac{(3x-2)^3 \cdot 2(2x+1)^2 - (2x+1)^2 \cdot 3(3x-2)^2}{(3x-2)^6}$$

Απλοποίηση:

$$f_1'(x) = \frac{2(2x+1)^2 - 3(3x-2)^2}{(3x-2)^3}$$

2. $\boldsymbol{f_2(x) = e^{x^2+3x+1}}$

Αυτή η εκθετική συνάρτηση ορίζεται για όλους τους πραγματικούς αριθμούς, οπότε το πεδίο ορισμού της είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί.

Για να βρούμε την πρώτη παράγωγο της $f_2(x)$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα της αλυσίδας:

$$f_2'(x) = \frac{d}{dx} e^{x^2+3x+1} = e^{x^2+3x+1} \cdot \frac{d}{dx}(x^2+3x+1)$$

Τώρα, υπολογίστε την παράγωγο του $\boldsymbol{x^2+3x+1}$ ως προς x:

$$\frac{d}{dx}(x^2+3x+1) = 2x+3$$

Έτσι, η πρώτη παράγωγος του $\boldsymbol{f_2(x)}$ είναι:

$$\boldsymbol{f_2'(x) = e^{x^2+3x+1} \cdot (2x+3)}$$

3. $f_3(x) = \dfrac{\ln(3x-4)}{\sqrt{x}}$

Για να βρούμε το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης, πρέπει να εξετάσουμε δύο συνθήκες:

1. Το όρισμα του φυσικού λογαρίθμου, **(3x-4)**, πρέπει να είναι μεγαλύτερο από το μηδέν.
2. Ο παρονομαστής, √x, δεν πρέπει να είναι μηδέν.

Προϋπόθεση 1:

$$\boldsymbol{3x - 4 > 0}$$

Λύνοντας για το x:

$$\boldsymbol{3x > 4}$$

$$x > 4/3$$

Συνθήκη 2:

$$\sqrt{x} \neq 0$$

Αυτό σημαίνει ότι το x πρέπει να είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 0.

Έτσι, το πεδίο ορισμού για το $f_3(x)$ είναι **x ≥ 0** και $x > \frac{4}{3}$.

Τώρα, ας βρούμε την πρώτη παράγωγο της $f_3(x)$**.** Για να το κάνουμε αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του πηλίκου:

$$f_3'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(3x-4)}{\sqrt{x}}\right)$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του πηλίκου, η παράγωγος είναι:

$$f_3'(x) = \frac{\sqrt{x} \cdot \frac{d}{dx}(\ln(3x-4)) - \ln(3x-4) \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt{x})}{x}$$

Τώρα, υπολογίστε τις παραγώγους:

1. $\frac{d}{dx}(\ln(3x-4)) = \frac{1}{3x-4} \cdot 3$
2. $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Αντικαταστήστε αυτά στον κανόνα του πηλίκου:

$$f_3'(x) = \frac{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{3x-4} \cdot 3 - \ln(3x-4) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

Απλοποιήστε την έκφραση:

$$f_3'(x) = \frac{3\sqrt{x} - \ln(3x-4)}{2x\sqrt{x}(3x-4)}$$

Έτσι, η πρώτη παράγωγος της $f_3(x)$ είναι:

$$f_3'(x) = \frac{3\sqrt{x} - \ln(3x-4)}{2x\sqrt{x}(3x-4)}$$

Αυτά είναι τα πεδία ορισμού και οι πρώτες παράγωγοι για τις δεδομένες συναρτήσεις.

(β) Για να βρούμε το όριο της συνάρτησης $f_{1(x)}$ καθώς το x πλησιάζει το $\frac{2}{3}$, μπορούμε να αντικαταστήσουμε άμεσα το $x = \frac{2}{3}$ στη συνάρτηση, καθώς η συνάρτηση ορίζεται για όλους τους πραγματικούς αριθμούς εκτός από το $x = \frac{2}{3}$.

Υπενθυμίζουμε ότι $f_1(x) = \frac{(2x+1)^2}{(3x-2)^3}$. Τώρα, αντικαταστήστε το $\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$:

$$f_1\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\left(2\left(\frac{2}{3}\right)+1\right)^2}{\left(3\left(\frac{2}{3}\right)-2\right)^3}$$

Τώρα, υπολογίστε:

$$f_1\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\left(\frac{4}{3}+1\right)^2}{(2-2)^3}$$

Απλοποιήστε:

$$f_1\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\left(\frac{7}{3}\right)^2}{0^3}$$

Ο παρονομαστής είναι $\mathbf{0^3}$, ο οποίος είναι απροσδιόριστος. Αυτό δείχνει ότι το όριο της συνάρτησης $\boldsymbol{f_{1(x)}}$ καθώς το $\boldsymbol{x}$ πλησιάζει το $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$ δεν υπάρχει, καθώς η συνάρτηση πλησιάζει στο άπειρο ή στο αρνητικό άπειρο καθώς το $\boldsymbol{x}$ πλησιάζει στο $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$, αλλά δεν είναι καλά ορισμένο στο $\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$.

(γ) Ας υπολογίσουμε το όριο της συνάρτησης $\mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{7}\boldsymbol{x} + \mathbf{6}$ καθώς η $\boldsymbol{x}$ πλησιάζει την $-\frac{3}{2}$

$$\lim_{x\to-\frac{3}{2}}(2x^2+7x+6)$$

Αντικαταστήστε $x = -\frac{3}{2}$:

$$\mathbf{2}\left(-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}} + \mathbf{7}\left(-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right) + \mathbf{6}$$

Απλοποιήστε την έκφραση:

$$\mathbf{2}\left(\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}}\right) - \left(\frac{\mathbf{21}}{\mathbf{2}}\right) + \mathbf{6}$$

Τώρα, υπολογίστε τις τιμές:

$$\frac{\mathbf{18}}{\mathbf{4}} - \frac{\mathbf{21}}{\mathbf{2}} + \mathbf{6}$$

Συνδυάστε τα κλάσματα:

$$\frac{\mathbf{18}}{\mathbf{4}} - \frac{\mathbf{42}}{\mathbf{4}} + \frac{\mathbf{24}}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{4}}$$

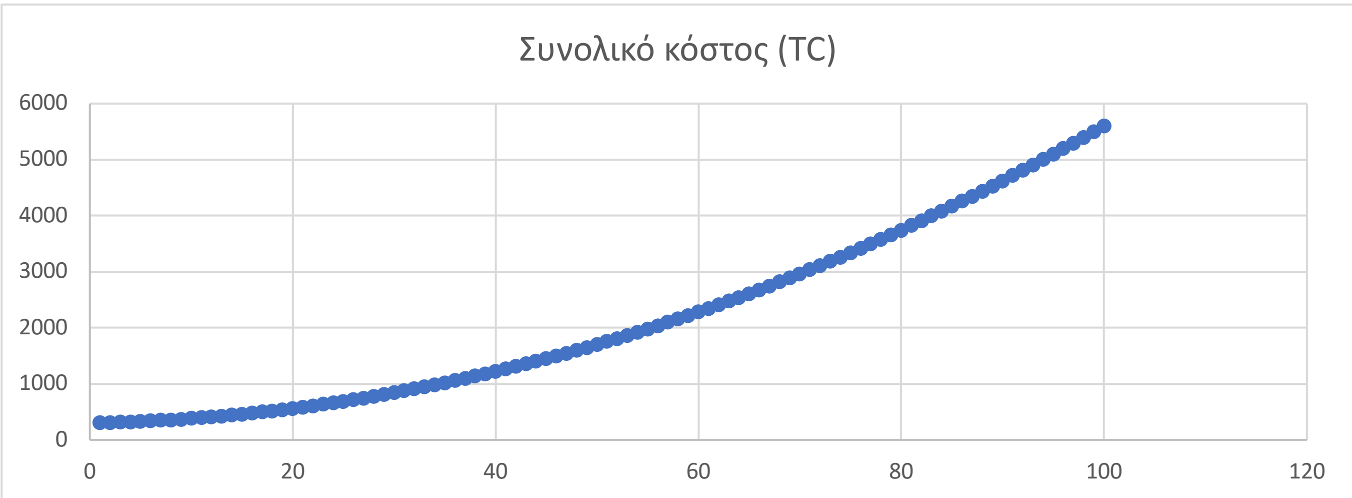
Εφόσον ο αριθμητής είναι 0, το όριο είναι 0:

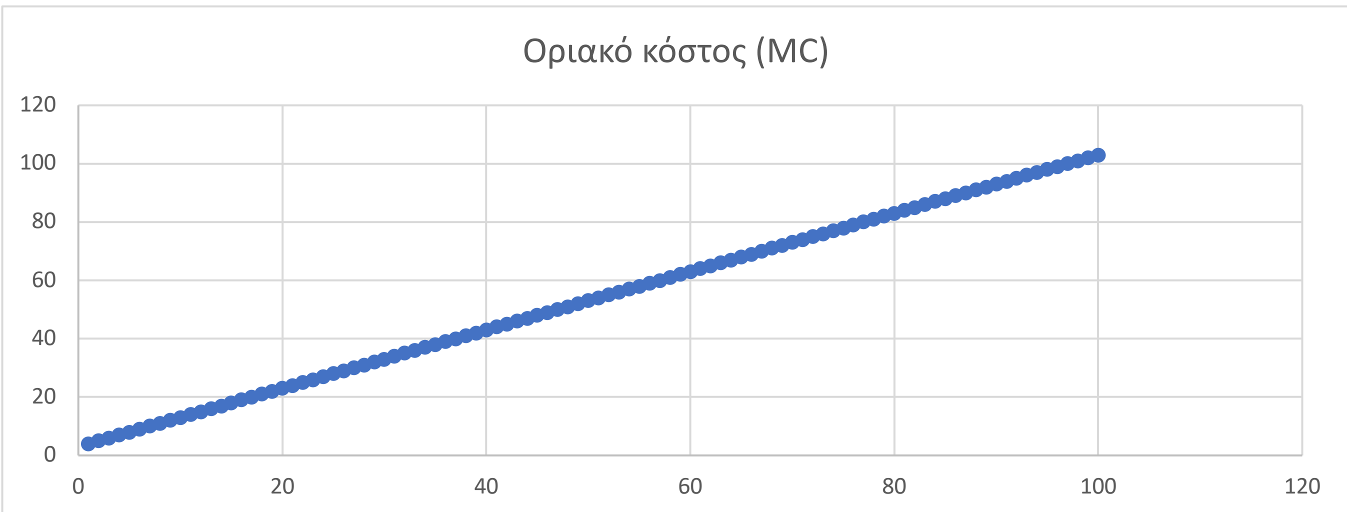
$$\lim_{x\to -\frac{3}{2}} (2x^2 + 7x + 6) = 0$$

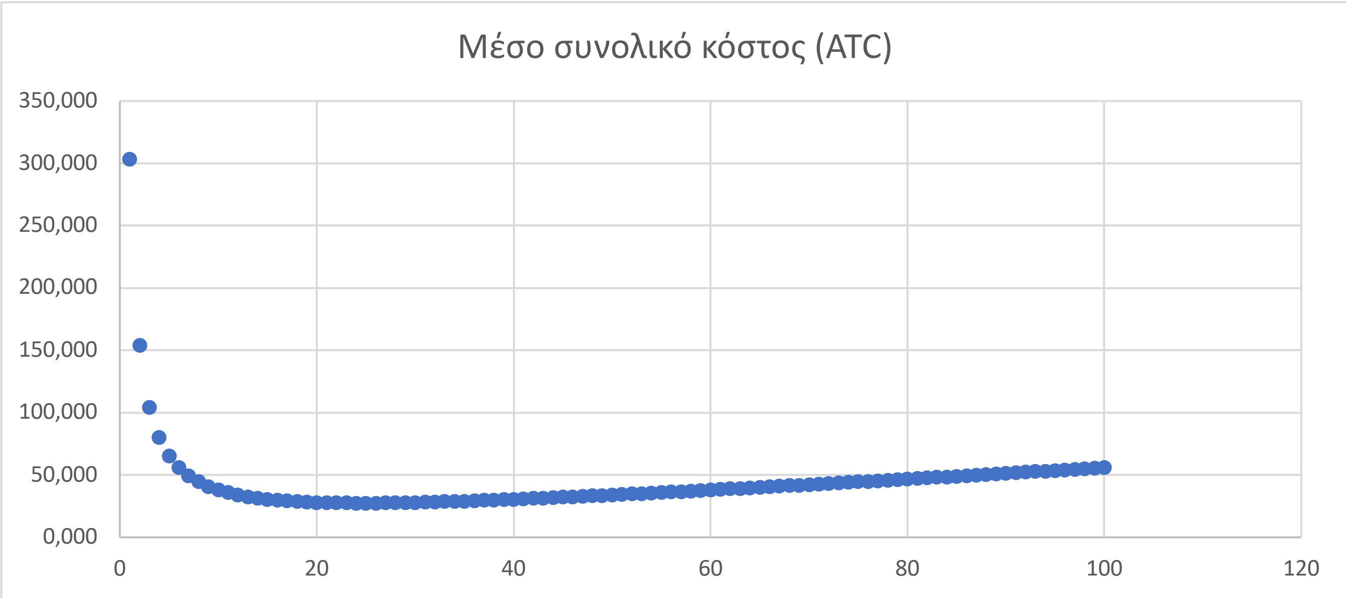
Έτσι, το όριο της συνάρτησης $2x^2 + 7x + 6$ καθώς η x πλησιάζει την $-\frac{3}{2}$ είναι 0.

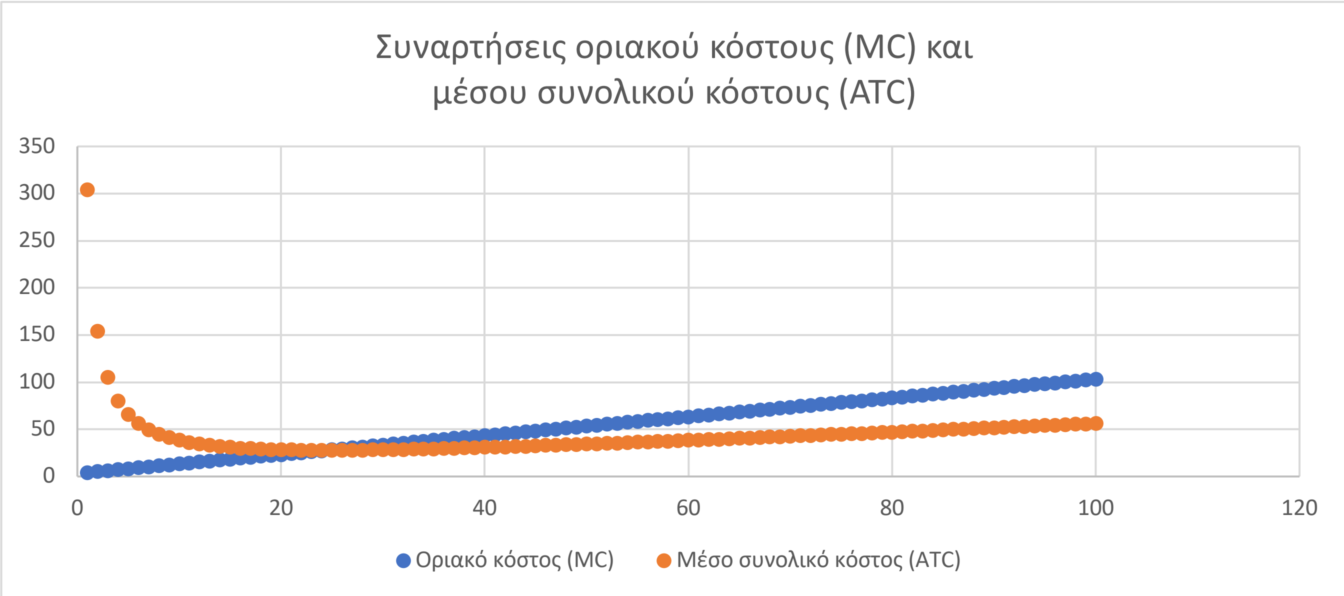
ΑΣΚΗΣΗ 4 (25 ΜΟΝΑΔΕΣ)

(α) Σε αυτή την ανάλυση, υπολογίσαμε και παρουσιάσαμε γραφικά τις συναρτήσεις κόστους για μια εταιρεία που παράγει και πωλεί ένα μόνο προϊόν. Η συνάρτηση μεταβλητού κόστους (VC) δίνεται από τη σχέση $\boldsymbol{VC(x) = 0{,}5x^2 + 3x}$, όπου x αντιπροσωπεύει την ποσότητα του παραγόμενου προϊόντος. Επιπλέον, το σταθερό κόστος (FC) είναι σταθερό στα 300 δολάρια. Αθροίζοντας το μεταβλητό και το σταθερό κόστος, προκύπτει η συνάρτηση συνολικού κόστους (TC), η οποία είναι $\boldsymbol{TC(x) = 0{,}5x^2 + 3x + 300}$. Η συνάρτηση οριακού κόστους (MC) είναι η παράγωγος του TC ως προς x και ισούται με **MC(x) = x + 3**. Η συνάρτηση μέσου συνολικού κόστους (ATC) είναι η TC(x) διαιρεμένη με το x, ή $\boldsymbol{ATC(x) = \frac{0{,}5x^2 + 3x + 300}{x}}$. Χρησιμοποιήσαμε το Excel για να υπολογίσουμε και να σχεδιάσουμε αυτές τις συναρτήσεις για τιμές του x που κυμαίνονται από 0 έως 100. Δημιουργήθηκαν δύο γραφήματα: το πρώτο που εμφανίζει το TC και το MC και το δεύτερο που εμφανίζει το TC και το ATC. Αυτά τα γραφήματα παρέχουν πολύτιμες πληροφορίες για τη δομή του κόστους της επιχείρησης και τη συμπεριφορά του κόστους της καθώς τα επίπεδα παραγωγής μεταβάλλονται.









(β) Για να γράψουμε τη συνάρτηση συνολικών εσόδων και τη συνάρτηση καθαρού κέρδους της επιχείρησης, θα χρησιμοποιήσουμε τη δεδομένη συνάρτηση ζήτησης και τις συναρτήσεις κόστους που έχουμε προσδιορίσει προηγουμένως. Η συνάρτηση ζήτησης για το προϊόν είναι:

$$\boldsymbol{P(x) = -x + 150}$$

όπου P(x) είναι η τιμή στην οποία πωλείται το προϊόν όταν η παραγόμενη ποσότητα είναι x.

Η συνάρτηση των συνολικών εσόδων (TR) είναι το γινόμενο της πωλούμενης ποσότητας (x) και της τιμής (P):

$$\boldsymbol{TR(x) = x * P(x)}$$

Αντικαθιστώντας τη δεδομένη συνάρτηση ζήτησης στη συνάρτηση συνολικών εσόδων:

$$\boldsymbol{TR(x) = x * (-x + 150)}$$

$$\boldsymbol{TR(x) = -x^2 + 150x}$$

Η συνάρτηση καθαρού κέρδους (NP) είναι η διαφορά μεταξύ των συνολικών εσόδων και του συνολικού κόστους:

$$NP(x) = TR(x) - TC(x)$$

Προηγουμένως υπολογίσαμε τη συνάρτηση συνολικού κόστους ως εξής:

$$TC(x) = 0,5x^2 + 3x + 300$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις για TR(x) και TC(x) στη συνάρτηση καθαρού κέρδους:

$$NP(x) = (-x^2 + 150x) - (0,5x^2 + 3x + 300)$$

Τώρα, απλοποιήστε την εξίσωση:

$$NP(x) = -x^2 + 150x - 0,5x^2 - 3x - 300$$

$$NP(x) = -1.5x^2 + 147x - 300$$

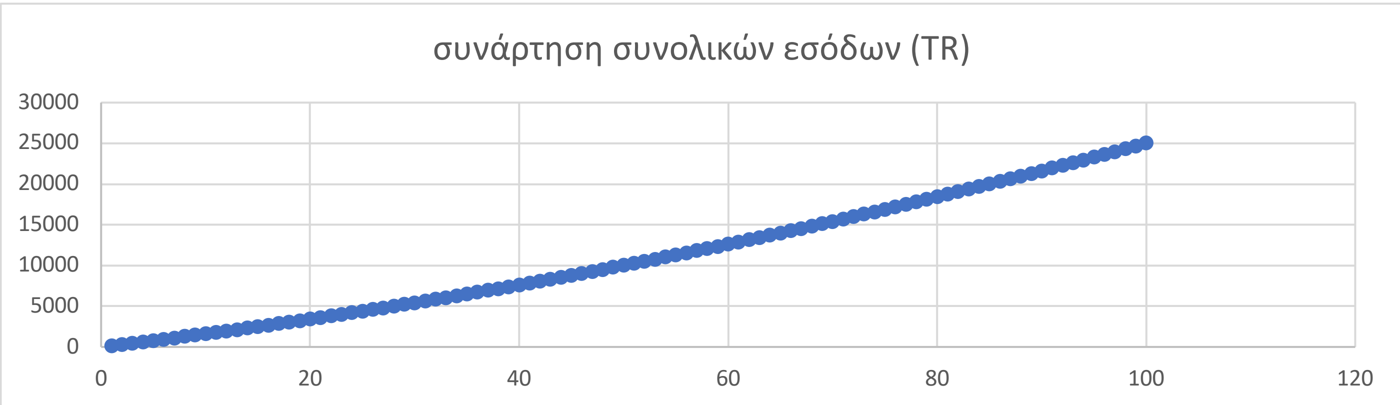
Έτσι, η συνάρτηση των συνολικών εσόδων είναι:

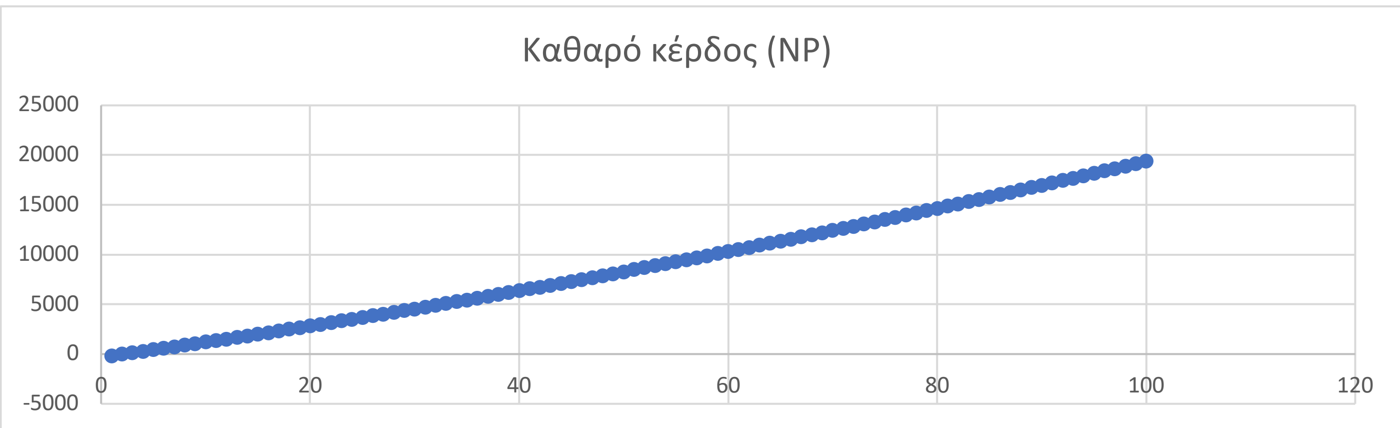
$$TR(x) = -x^2 + 150x$$

Και η συνάρτηση του καθαρού κέρδους είναι:

$$NP(x) = -1,5x^2 + 147x - 300$$

Οι συναρτήσεις αυτές περιγράφουν τα συνολικά έσοδα και το καθαρό κέρδος της επιχείρησης ως συνάρτηση της παραγόμενης ποσότητας (x).





(γ) Για να βρούμε την ποσότητα παραγωγής που μεγιστοποιεί το καθαρό κέρδος της επιχείρησης, πρέπει να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης καθαρού κέρδους (NP(x)) ως προς την παραγόμενη ποσότητα (x) και στη συνέχεια να τη θέσουμε ίση με μηδέν για να βρούμε τα κρίσιμα σημεία. Η ποσότητα στην οποία μεγιστοποιείται το καθαρό κέρδος αντιστοιχεί σε ένα από αυτά τα κρίσιμα σημεία. Ακολουθεί η διαδικασία βήμα προς βήμα:

1. Η συνάρτηση καθαρού κέρδους δίνεται ως εξής:

$$\boldsymbol{NP(x) = -1,5x^2 + 147x - 300}$$

2. Υπολογίζουμε την παράγωγο της NP(x) ως προς x (NP'(x)):

$$\boldsymbol{NP'(x) = -3x + 147}$$

3. Θέτουμε την NP'(x) ίση με το μηδέν και λύνουμε ως προς x για να βρούμε το κρίσιμο σημείο:

$$\boldsymbol{-3x + 147 = 0}$$

$$\boldsymbol{-3x = -147}$$

$$\boldsymbol{x = 49}$$

4. Το κρίσιμο σημείο είναι x = 49. Για να προσδιορίσουμε αν είναι μέγιστο ή ελάχιστο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη δοκιμή της δεύτερης παραγώγου. Υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο της NP(x) (NP''(x)):

$$\boldsymbol{NP''(x) = -3}$$

5. Εφόσον η NP''(x) είναι αρνητική για όλα τα x, αυτό σημαίνει ότι το x = 49 είναι μέγιστο σημείο.

Έτσι, η ποσότητα παραγωγής που μεγιστοποιεί το καθαρό κέρδος της επιχείρησης είναι **49 μονάδες**.