ΑΣΚΗΣΗ 1 (25 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Ερώτημα A (5 μονάδες)

i. Για να λύσω την εξίσωση $\boldsymbol{f(x) = 0}$, όπου $\boldsymbol{f(x) = 3x^2 - 41x + 26}$, μπορώ να χρησιμοποιήσω τον τύπο της διακριτικής ικανότητας από τον τετραγωνικό τύπο. Ο τετραγωνικός τύπος δηλώνει ότι για μια εξίσωση της μορφής $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, οι λύσεις για την $\boldsymbol{x}$ δίνονται από:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Όπου $\boldsymbol{D}$ είναι η διακριτική ικανότητα, η οποία δίνεται από τη σχέση $\boldsymbol{D = b^2 - 4ac}$.

Σε αυτή την περίπτωση, οι συντελεστές μου είναι $(\boldsymbol{a = 3}), (\boldsymbol{b = -41})\ \boldsymbol{\kappa\alpha\iota}\ (\boldsymbol{c = 26})$. Ας υπολογίσουμε λοιπόν τη διακριτική ικανότητα \(D\):

$$[\boldsymbol{D = (-41)^2 - 4 * 3 * 26}]$$
$$[\boldsymbol{D = 1681 - 312}]$$
$$[\boldsymbol{D = 1369}]$$

Τώρα, μπορώ να χρησιμοποιήσω τον τετραγωνικό τύπο για να βρω τις τιμές του $\boldsymbol{x}$:

$$x_1 = \frac{-(-41) + \sqrt{1369}}{2 * 3}$$
$$x_2 = \frac{-(-41) - \sqrt{1369}}{2 * 3}$$

Απλοποίηση:

$$x_1 = \frac{41 + 37}{6}$$
$$x_2 = \frac{41 - 37}{6}$$

Έτσι, οι λύσεις της εξίσωσης $\boldsymbol{f(x) = 0}$ είναι οι εξής:

$$(x_1 = \frac{78}{6} = 13) \kappa\alpha\iota (x_2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3})$$

ii. Για να γράψω τη συνάρτηση $\boldsymbol{f(x)}$ ως γινόμενο των πρωταρχικών παραγόντων της, πρέπει να παραγοντοποιήσω την τετραγωνική έκφραση $\boldsymbol{3x^2 - 41x + 26}$. Η παραγοντική μορφή θα πρέπει να μοιάζει ως εξής:

$$\boldsymbol{f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)}$$

Όπου $\boldsymbol{a}$ είναι ο πρώτος συντελεστής και $\boldsymbol{r_1}$ και $\boldsymbol{r_2}$ είναι οι ρίζες που βρήκα στο μέρος i.

Σε αυτή την περίπτωση, $a = 3, r_1 = 13, \kappa\alpha\iota (r_2 = \frac{2}{3})$. Έτσι, η παραγοντική μορφή είναι:

$$f(x) = 3(x - 13)\left(x - \frac{2}{3}\right)$$

Ερώτημα Β (15 μονάδες)

i. Λύστε ως προς το x τη λογαριθμική εξίσωση $\boldsymbol{2lnx = ln18 + \ln(x - 4)}$
Για να λύσουμε αυτήν τη λογαριθμική εξίσωση, θα χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες των λογαρίθμων:

$$\boldsymbol{2\ln(x) = \ln(18) + \ln(x - 4)}$$

Αρχικά, μπορούμε να συνδυάσουμε τους δύο λογάριθμους στη δεξιά πλευρά της εξίσωσης χρησιμοποιώντας τον κανόνα γινομένου για τους λογάριθμους:

$$\boldsymbol{\ln(x) + \ln(x - 4) = \ln(18)}$$

Τώρα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες των λογαρίθμων για να απλοποιήσουμε περαιτέρω αυτήν την εξίσωση:

$$\boldsymbol{\ln\left(x(x - 4)\right) = \ln(18)}$$

Δεδομένου ότι ο φυσικός λογάριθμος είναι μια συνάρτηση ένα προς ένα, μπορούμε να ρίξουμε τον φυσικό λογάριθμο και στις δύο πλευρές της εξίσωσης:

$$\boldsymbol{x(x - 4) = 18}$$

Τώρα, ας λύσουμε αυτήν την τετραγωνική εξίσωση για το x:

$$\boldsymbol{x^2 - 4x - 18 = 0}$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τετραγωνικό τύπο για να βρούμε τις λύσεις για το x:

$$\boldsymbol{x = \frac{\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{2a}}$$

Σε αυτή την εξίσωση, **a = 1, b = -4** και **c = -18**. Σύνδεση αυτών των τιμών στον τετραγωνικό τύπο:

$$\boldsymbol{x = \frac{\left(4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-18)}\right)}{\left(2(1)\right)}}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{\left(4 \pm \sqrt{16 + 72}\right)}{2}}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{\left(4 \pm \sqrt{88}\right)}{2}}$$

Τώρα, μπορούμε να απλοποιήσουμε την έκφραση:

$$\boldsymbol{x = \frac{\left(4 \pm 2\sqrt{22}\right)}{2}}$$

$$\boldsymbol{x = 2 \pm \sqrt{22}}$$

Άρα, οι λύσεις της εξίσωσης $\boldsymbol{2\ln(x) = \ln(18) + \ln(x - 4)}$ είναι $\boldsymbol{x = 2 + \sqrt{22}}$ και $\boldsymbol{x = 2 - \sqrt{22}}$.

ii. Τα ακαθάριστα έσοδα, y, μιας επιχείρησης το έτος x δίνονται από τη συνάρτηση $\boldsymbol{y = 30e^{0.08x}}$.

Για να βρούμε τα ακαθάριστα έσοδα το έτος 1 και το έτος 2, μπορούμε να συνδέσουμε αυτές τις τιμές του x στη δεδομένη συνάρτηση:

Για x = 1:
$\boldsymbol{y = 30e^{0.08*1} = 30e^{0.08x} \approx 32,50}$ (στρογγυλοποιημένο σε δύο δεκαδικά ψηφία)

Για x = 2:
$\boldsymbol{y = 30e^{0.08*2} = 30e^{0.16} \approx 35,35}$ (στρογγυλοποιημένο σε δύο δεκαδικά ψηφία)

Έτσι, τα ακαθάριστα έσοδα το έτος 1 είναι περίπου **32,50** και τα ακαθάριστα έσοδα το έτος 2 είναι περίπου **35,35**.

iii. Για να βρούμε τις τιμές του x για τις οποίες η εξίσωση $\boldsymbol{x^2 - x - 2 < 0}$, πρέπει να λύσουμε την ανισότητα:

$$\boldsymbol{x^2 - x - 2 < 0}$$

Αρχικά, ας βρούμε τα κρίσιμα σημεία θέτοντας την ανισότητα ίση με μηδέν:

$$\boldsymbol{x^2 - x - 2 = 0}$$

Τώρα, ας συνυπολογίσουμε αυτήν την τετραγωνική εξίσωση:

$$\boldsymbol{(x - 2)(x + 1) = 0}$$

Τα κρίσιμα σημεία είναι $\boldsymbol{x}$ **= 2** και $\boldsymbol{x}$ **= -1**.
Για να προσδιορίσετε τα διαστήματα επίλυσης, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα σημεία δοκιμής. Επιλέξτε ένα σημείο δοκιμής σε καθένα από τα τρία διαστήματα που δημιουργούνται από τα κρίσιμα σημεία $\boldsymbol{(-\infty, -1), (-1, 2)\ \textit{και}\ (2, \infty)}$. Για παράδειγμα, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το x = 0 ως σημείο δοκιμής στο διάστημα $\boldsymbol{(-1, 2)}$.
Για x = 0, η ανισότητα γίνεται:

$$\boldsymbol{0^2 - 0 - 2 < 0}$$

-2 < 0 (το οποίο είναι αλήθεια)
Εφόσον είναι αλήθεια, το διάστημα λύσης (-1, 2) είναι μέρος της λύσης.
Τώρα, δοκιμάστε ένα διάστημα έξω από τα κρίσιμα σημεία, όπως x = -2, στο διάστημα (-∞, -1):

$$\boldsymbol{(-2)^2 - (-2) - 2 < 0}$$
$$\boldsymbol{4 + 2 - 2 < 0}$$

4 < 0 (το οποίο είναι λάθος)
Εφόσον είναι ψευδές, το διάστημα (-∞, -1) δεν είναι μέρος της λύσης.
Τέλος, δοκιμάστε ένα διάστημα έξω από τα κρίσιμα σημεία, όπως x = 3, στο διάστημα (2, ∞):

$$\boldsymbol{3^2 - 3 - 2 < 0}$$

$$\boldsymbol{9 - 3 - 2 < 0}$$

$$\boldsymbol{4 < 0\ (\textit{το οποίο είναι λάθος})}$$

Εφόσον είναι ψευδές, το διάστημα (2, ∞) δεν είναι μέρος της λύσης.

$$\boldsymbol{\textit{Επομένως, η λύση στην ανίσωση}\ x^2 - x - 2 < 0\ \textit{είναι}\ x \in (-1, 2).}$$

Ερώτημα Γ (5 μονάδες)

Για να λύσουμε το σύστημα γραμμικών εξισώσεων:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{x + 2y = 4} \\ \boldsymbol{2x - y = 3} \end{gathered}$$

Θα χρησιμοποιήσω τη μέθοδο της αντικατάστασης. Αρχικά, θα λύσω μία από τις εξισώσεις για μία από τις μεταβλητές. Σε αυτήν την περίπτωση, θα λύσω τη δεύτερη εξίσωση για το y:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{2x - y = 3} \\ \boldsymbol{y = 2x - 3} \end{gathered}$$

Τώρα που έχω την τιμή του y ως προς το x, μπορώ να αντικαταστήσω αυτήν την έκφραση στην πρώτη εξίσωση:

$$\boldsymbol{x + 2(2x - 3) = 4}$$

Τώρα, θα απλοποιήσω αυτήν την εξίσωση:

$$\boldsymbol{x + 4x - 6 = 4}$$

Συνδυάστε παρόμοιους όρους:

$$\boldsymbol{5x - 6 = 4}$$

Προσθέστε 6 και στις δύο πλευρές:

$$\boldsymbol{5x = 10}$$

Τώρα, διαιρέστε με το 5 για να απομονώσετε x:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{x = \frac{10}{5}} \\ \boldsymbol{x = 2} \end{gathered}$$

Τώρα που βρήκα την τιμή του x, μπορώ να το αντικαταστήσω ξανά στην εξίσωση που έλυνα για το y:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{y = 2x - 3} \\ \boldsymbol{y = 2(2) - 3} \\ \boldsymbol{y = 4 - 3} \\ \boldsymbol{y = 1} \end{gathered}$$

Άρα, η λύση στο σύστημα των εξισώσεων είναι $\boldsymbol{x = 2 \; και \; y = 1}$.

ΑΣΚΗΣΗ 2 (25 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Ερώτημα Α (10 μονάδες)

i. Για να βρω την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0})$ $\boldsymbol{και}$ $(\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2}) = (\mathbf{0}, \mathbf{6})$, μπορώ να χρησιμοποιήσω τη μορφή κλίσης σημείου της εξίσωσης μιας ευθείας:

Η μορφή σημείου-κλίσης είναι: $\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$, ό$\boldsymbol{που}$ $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1})$ είναι ένα σημείο στη γραμμή και m είναι η κλίση της γραμμής.

Αρχικά, υπολογίστε την κλίση m χρησιμοποιώντας τα δύο δεδομένα:

$$\boldsymbol{m = (y_2 - y_1)/\ (x_2 - x_1)}$$
$$\boldsymbol{m = (6 - 0)\ /\ (0 - 3)}$$
$$\boldsymbol{m = 6\ /\ (-3)}$$
$$\boldsymbol{m = -2}$$

Τώρα που έχω την κλίση, μπορώ να χρησιμοποιήσω οποιοδήποτε από τα δύο δεδομένα στη μορφή σημείου-κλίσης. Ας χρησιμοποιήσουμε $(x_1, y_1) = (3, 0)$:

$$\boldsymbol{y - 0 = -2\ (x - 3)}$$

Απλοποιήστε την εξίσωση:

$$\boldsymbol{y = -2x + 6}$$

Άρα, η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία (3, 0) και (0, 6) είναι $y = -2x + 6$.

ii. Για να βρω την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(-2, 0)$ και είναι παράλληλη με την ευθεία $y = x$, ξέρω ότι οι παράλληλες ευθείες έχουν την ίδια κλίση. Εφόσον η ευθεία $y = x$ έχει κλίση 1, η παράλληλη ευθεία θα έχει επίσης κλίση 1.

Μπορώ να χρησιμοποιήσω ξανά τη μορφή point-slope, χρησιμοποιώντας το δεδομένο σημείο (−2, 0) και την κλίση $m = 1$:

$$\boldsymbol{y - 0 = 1\ (x - (-2))}$$

Απλοποιήστε την εξίσωση:

$$\boldsymbol{y = x + 2}$$

$\boldsymbol{Ά ρα, η\ εξίσωση\ της\ ευθείας\ που\ διέρχεται\ από\ το\ σημείο\ (-2, 0) και\ είναι\ παράλληλη\ στην\ ευθεία\ y = x\ είναι\ y = x + 2}$.

Ερώτημα Β (15 μονάδες)

i. Για να βρω την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $\boldsymbol{A(-1,2)}$ και το σημείο τομής της ευθείας $\boldsymbol{y = \frac{1}{4}x - 2}$ με τον άξονα x, πρέπει πρώτα να βρω το x -συντεταγμένη του σημείου τομής με τον άξονα x. Αυτό συμβαίνει όταν y = 0 στην εξίσωση $\boldsymbol{y = \frac{1}{4}x - 2}$:

$$\boldsymbol{0 = \frac{1}{4}x - 2}$$

Τώρα, θα λύσω για x:

$$\boldsymbol{\frac{1}{4}x = 2}$$

Για να απομονώσω το x, θα πολλαπλασιάσω και τις δύο πλευρές επί 4:

$$\boldsymbol{x = 2 * 4}$$
$$\boldsymbol{x = 8}$$

Άρα, το σημείο τομής με τον **άξονα x είναι (8, 0)**.

Τώρα που έχω δύο σημεία στην ευθεία, $\boldsymbol{A(-1,2)}$ **και το σημείο τομής (8, 0)**, μπορώ να χρησιμοποιήσω τη μορφή κλίσης σημείου της εξίσωσης μιας ευθείας:

$$\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1), \text{όπου } m \text{ είναι η κλίση}}$$

Ας υπολογίσουμε την κλίση m χρησιμοποιώντας τα δύο σημεία:

$$\boldsymbol{m = \frac{(0 - 2)}{(8 - (-1))}}$$
$$\boldsymbol{m = \frac{(-2)}{(8 + 1)}}$$
$$\boldsymbol{m = \frac{(-2)}{9}}$$

Τώρα, μπορώ να χρησιμοποιήσω ένα από τα σημεία (ας χρησιμοποιήσουμε το A) για να γράψω την εξίσωση της γραμμής:

$$\boldsymbol{y - 2 = \left(-\frac{2}{9}\right)(x - (-1))}$$

Απλοποιήστε την εξίσωση:

$$\boldsymbol{y - 2 = \left(-\frac{2}{9}\right)(x + 1)}$$

Τώρα, θα διανείμω το (-2/9) και στους δύο όρους μέσα στις παρενθέσεις:

$$\boldsymbol{y - 2 = \left(-\frac{2}{9}\right)x - \frac{2}{9}}$$

Προσθέστε 2 και στις δύο πλευρές:

$$y = \left(-\frac{2}{9}\right)x - \frac{2}{9} + 2$$

Συνδυάστε σταθερές:

$$y = \left(-\frac{2}{9}\right)x + \left(\frac{20}{9}\right)$$

Άρα, η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$ και το σημείο τομής της ευθείας $\boldsymbol{y} = \left(\frac{1}{4}\right)\boldsymbol{x} - \mathbf{2}$ με τον άξονα x είναι $\boldsymbol{y} = \left(-\frac{2}{9}\right)\boldsymbol{x} + \left(\frac{20}{9}\right)$.

ii. Για να υπολογίσουμε το λ έτσι ώστε το σημείο $\boldsymbol{\Gamma(\lambda - 3, -6)}$ να ανήκει στην ευθεία από το μέρος i, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση που βρήκαμε στο μέρος i:

$$y = \left(-\frac{2}{9}\right)x + \left(\frac{20}{9}\right)$$

Τώρα, **συνδέστε τις συντεταγμένες του $\boldsymbol{\Gamma}$, οι οποίες είναι (λ – 3, –6)**:

$$-6 = \left(-\frac{2}{9}\right)(\lambda - 3) + \left(\frac{20}{9}\right)$$

Τώρα, ας λύσουμε για το λ:

Αρχικά, πολλαπλασιάστε και τις δύο πλευρές της εξίσωσης με το 9 για να απαλλαγείτε από τα κλάσματα:

$$-54 = -2(\lambda - 3) + 20$$

Τώρα, κατανείμετε -2 στη δεξιά πλευρά:

$$-54 = -2\lambda + 6 + 20$$

Συνδυάστε σταθερές στη δεξιά πλευρά:

$$-54 = -2\lambda + 26$$

Αφαιρέστε το 26 και από τις δύο πλευρές για να απομονώσετε το -2λ:

$$-54 - 26 = -2\lambda$$

$$-80 = -2\lambda$$

Τώρα, διαιρέστε και τις δύο πλευρές με -2 για να βρείτε την τιμή του λ:

$$\lambda = \frac{-80}{-2}$$

$$\lambda = 40$$

Άρα, η τιμή του λ που κάνει το σημείο $\boldsymbol{\Gamma(\lambda - 3, -6)}$ ***να ανήκει στην ευθεία από το μέρος i είναι λ =*** $\mathbf{40}$.

ΑΣΚΗΣΗ 3 (25 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Ερώτημα Α (7 μονάδες)

i. Για να βρω τις τιμές του $\boldsymbol{x}$ που ικανοποιούν τη σχέση $\boldsymbol{f(x)}$ **= 0** στο διάστημα $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{x} \leq \mathbf{10}$, πρέπει να λύσω την εξίσωση $\boldsymbol{f(x)}$ **= 0**. Η συνάρτηση $\boldsymbol{f(x)}$ δίνεται ως $\boldsymbol{x^4 - 25x}$.

Η εξίσωση με την οποία δουλεύω είναι:

$$\boldsymbol{x^4 - 25x = 0}$$

Θα λύσω αυτήν την εξίσωση για το x με παραγοντοποίηση:

$$\boldsymbol{x(x^3 - 25) = 0}$$

Τώρα, έχω δύο παράγοντες, x και ($\boldsymbol{x^3 - 25}$). Θα ορίσω κάθε παράγοντα ίσο με 0 και θα λύσω για x:

1. $\boldsymbol{x}$ **= 0**

2. **(**$\boldsymbol{x^3}$ **- 25) = 0**

Για τη δεύτερη εξίσωση, μπορώ να την ξαναγράψω ως εξής:

$\boldsymbol{x^3}$ **= 25**

Για να βρω τις πραγματικές λύσεις, θα πάρω την κυβική ρίζα και των δύο πλευρών:

$$\boldsymbol{x = \sqrt[3]{25}}$$

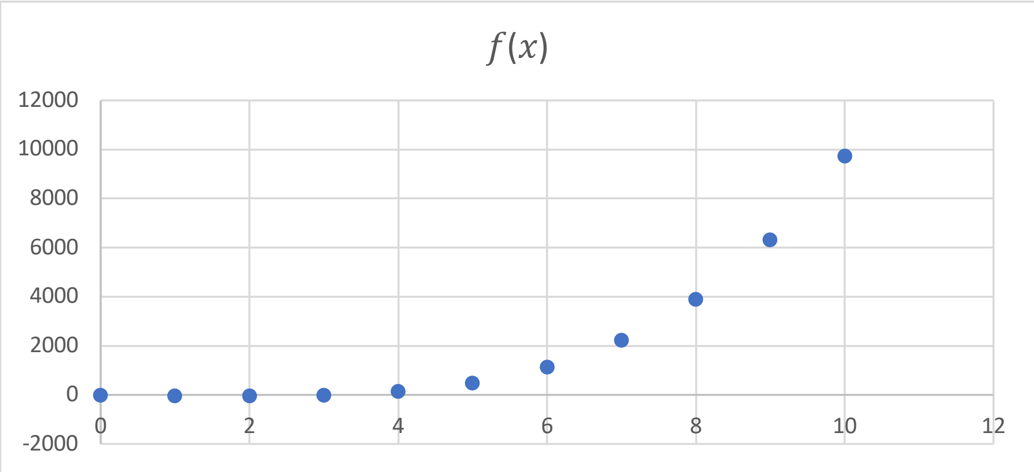
Τώρα, θα υπολογίσω την κυβική ρίζα του 25:

$\boldsymbol{x}$ **≈ 2.924**

Άρα, υπάρχουν δύο τιμές του x που ικανοποιούν την εξίσωση $f(x)$ = 0 στο διάστημα 0 ≤ x ≤ 10: x = 0 και x ≈ 2,924.

Αυτές οι τιμές κάνουν $f(x)$ ίσο με 0 εντός του καθορισμένου εύρους.

ii. Χρησιμοποίησα το Microsoft Excel για να αναπαραστήσω γραφικά τη συνάρτηση $f(x)$ στο διάστημα $0 \leq x \leq 10$. Ξεκίνησα συμπληρώνοντας τη στήλη A με ένα εύρος τιμών x από 0 έως 10, αυξάνοντας κατά 1. Στη συνέχεια, στη στήλη B, I υπολόγισε τις αντίστοιχες τιμές του $f(x)$ για κάθε x χρησιμοποιώντας τον τύπο x^4 - $25x$. Έχοντας προετοιμάσει το σύνολο δεδομένων, επέλεξα και τις δύο στήλες και δημιούργησα ένα γραμμικό γράφημα στο Excel για να οπτικοποιήσω τα σημεία δεδομένων. Το γράφημα επέτρεψε μια σαφή αναπαράσταση του τρόπου συμπεριφοράς της συνάρτησης στο καθορισμένο διάστημα. Μετά την προσαρμογή του γραφήματος με ετικέτες, τίτλους και αισθητικές προσαρμογές, έσωσα το αρχείο Excel. Για να παρουσιάσω τα αποτελέσματα σε ένα έγγραφο του Word, αντέγραψα τον πίνακα τιμών και το γράφημα από το Excel και τα επικόλλησα στο αρχείο Word, επιτρέποντάς μου να αναλύσω οπτικά τη συμπεριφορά της συνάρτησης και να επικυρώσω τα αποτελέσματα που προέκυψαν στο Μέρος I, όπου βρήκα τις τιμές του x που ικανοποιήθηκε $f(x) = 0$ εντός του δεδομένου διαστήματος. Αυτή η προσέγγιση διευκόλυνε την πλήρη κατανόηση των χαρακτηριστικών της λειτουργίας.



Ερώτημα Β (10 μονάδες)

i. Για να βρω το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\boldsymbol{y = f(x) = \sqrt{25 - x^2}}$, πρέπει να προσδιορίσω τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η συνάρτηση. Η τετραγωνική ρίζα ενός αρνητικού αριθμού είναι απροσδιόριστη στο σύστημα πραγματικών αριθμών, οπότε πρέπει να βρω πότε η έκφραση μέσα στην τετραγωνική ρίζα είναι μη αρνητική.

$$\boldsymbol{25 - x^2 \geq 0}$$

Τώρα, θα λύσω το πρόβλημα για το x:

$$\boldsymbol{x^2 \leq 25}$$

Παίρνοντας την τετραγωνική ρίζα και των δύο πλευρών, έχω:

$$\boldsymbol{|x| \leq 5}$$

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση ορίζεται για τιμές x εντός του εύρους $\boldsymbol{-5 \leq x \leq 5}$. Επομένως, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $\boldsymbol{-5 \leq x \leq 5}$.

ii. Για να βρω την τιμή του y όταν $x = 0$, θα αντικαταστήσω απλά το $x = 0$ στη συνάρτηση:

$$\boldsymbol{y = \sqrt{25 - 0^2} = \sqrt{25} = 5}$$

Έτσι, όταν $\boldsymbol{x}$ = 0, $\boldsymbol{y}$ = 5.

Στη συνέχεια, για να βρω την τιμή του x όταν y = 0, θα θέσω τη συνάρτηση ίση με 0 και θα λύσω το x:

$$\mathbf{0 \;=\; \sqrt{25 \;-\; x^2}}$$

Για να απαλλαγώ από την τετραγωνική ρίζα, θα τετραγωνίσω και τις δύο πλευρές:

$$\mathbf{0 \;=\; 25 \;-\; x^2}$$

Τώρα, θα λύσω το πρόβλημα για το x:

$$\mathbf{x^2 \;=\; 25}$$

Παίρνοντας την τετραγωνική ρίζα και των δύο πλευρών, παίρνω δύο λύσεις:

$$\mathbf{x \;=\; \pm 5}$$

Έτσι, όταν y = 0, το x μπορεί να είναι είτε -5 είτε 5.

Τέλος, για να βρω την τιμή του y όταν x = ±5, μπορώ να χρησιμοποιήσω την αρχική συνάρτηση:

Για x = 5:

$$\mathbf{y \;=\; \sqrt{25 \;-\; 5^2} = \sqrt{25 \;-\; 25} = \sqrt{0} = \; 0}$$

Για x = -5:

$$\mathbf{y \;=\; \sqrt{25 \;-\; (-5)^2} = \sqrt{25 \;-\; 25} = \sqrt{0} = \; 0}$$

Επομένως, **όταν x = ±5, y = 0**.

Ερώτημα Γ (8 μονάδες)

Για να βρω το κοινό πεδίο ορισμού για τις συναρτήσεις $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{x}^2)-\mathbf{16}}$ και $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \sqrt{\boldsymbol{x} - \mathbf{4}}$, πρέπει να εξετάσω τους περιορισμούς που επιβάλλουν και οι δύο συναρτήσεις.

Για την πρώτη συνάρτηση, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, ο παρονομαστής δεν πρέπει να ισούται με μηδέν. Επομένως, θα ορίσω τον παρονομαστή $\mathbf{x^2 - 16 \;\neq\; 0}$ και θα λύσω για το x:

$$\mathbf{x^2 \;-\; 16 \;\neq\; 0}$$

Τώρα, θα λύσω αυτή την εξίσωση:

$$\mathbf{x^2 \;\neq\; 16}$$

Παίρνοντας την τετραγωνική ρίζα και των δύο πλευρών, παίρνω:

$$\mathbf{|x| \;\neq\; 4}$$

Αυτό σημαίνει ότι το x δεν μπορεί να είναι ίσο με 4 ή -4.

Τώρα, για τη δεύτερη συνάρτηση $g(x)$, το όρισμα μέσα στην τετραγωνική ρίζα δεν πρέπει να είναι αρνητικό. Έτσι, θα ορίσω x - 4 ≥ 0 και θα λύσω το x:

$$\boldsymbol{x - 4 \geq 0}$$

Τώρα, θα λύσω αυτή την ανισότητα:

$$\boldsymbol{x \geq 4}$$

Αυτό σημαίνει ότι το x πρέπει να είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 4.

Τώρα, για να βρω το κοινό πεδίο ορισμού και για τις δύο συναρτήσεις, πρέπει να εξετάσω τους περιορισμούς και από τις δύο συναρτήσεις. Το κοινό πεδίο ορισμού είναι το σύνολο των τιμών που ικανοποιούν και τις δύο συνθήκες:

$$\boldsymbol{-4 < x < 4 \left(για\ να\ ικανοποιείται\ η\ f(x)\right)}$$
$$\boldsymbol{x \geq 4 \left(για\ να\ ικανοποιείται\ το\ g(x)\right)}$$

Το κοινό πεδίο ορισμού είναι η τομή αυτών των δύο συνόλων, που σημαίνει ότι είναι η περιοχή όπου ορίζονται και οι δύο συναρτήσεις. Σε αυτή την περίπτωση, το κοινό πεδίο ορισμού είναι x τέτοιο ώστε 4 ≤ x < 4, το οποίο είναι κενό σύνολο, υποδεικνύοντας ότι **δεν υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες να ορίζονται ταυτόχρονα και οι δύο συναρτήσεις**.

ΑΣΚΗΣΗ 4 (25 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Ερώτημα Α (16 μονάδες)

i. Για να βρούμε το σημείο ισορροπίας, πρέπει να θέσουμε τη συνάρτηση προσφοράς (Qs) ίση με τη συνάρτηση ζήτησης (Qd) και να λύσουμε το P:

$$\boldsymbol{Qs = Qd}$$

$$\boldsymbol{3P + 8 = -2P + 42}$$

Τώρα, ας λύσουμε για το P:

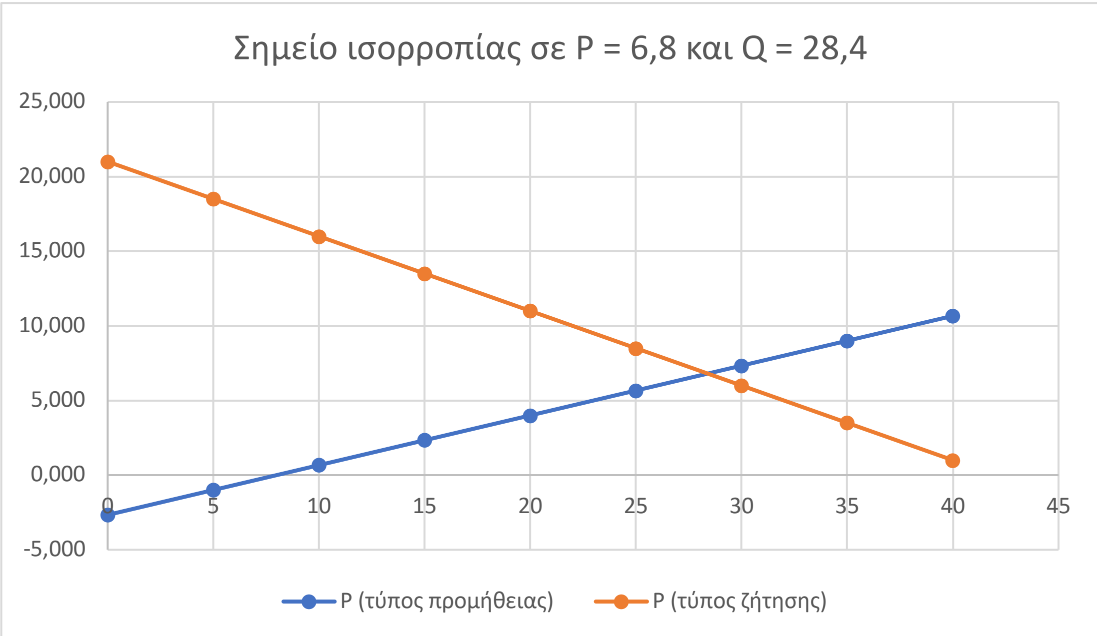
$$\boldsymbol{3P + 2P = 42 - 8}$$
$$\boldsymbol{5P = 34}$$
$$\boldsymbol{P = \frac{34}{5}}$$
$$\boldsymbol{P = 6.8}$$

Τώρα που έχουμε την τιμή ισορροπίας (P), μπορούμε να βρούμε την ποσότητα ηλεκτρικής ενέργειας (Q) εισάγοντας την τιμή αυτή είτε στη συνάρτηση προσφοράς είτε στη συνάρτηση ζήτησης. Ας χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση προσφοράς:

$$\boldsymbol{Qs = 3P + 8}$$
$$\boldsymbol{Qs = 3(6,8) + 8}$$
$$\boldsymbol{Qs = 20,4 + 8}$$
$$\boldsymbol{Qs = 28,4}$$

Έτσι, $\boldsymbol{στο\ σημείο\ ισορροπίας, η\ τιμή\ (P) είναι\ 6,8\ και\ η\ ποσότητα\ ηλεκτρικής\ ενέργειας\ (Q)}$ $\boldsymbol{είναι\ 28,4\ kWh}$.

ii. Κατά τη διαδικασία προσδιορισμού του σημείου ισορροπίας σε αυτό το σενάριο, έθεσα πρώτα τη συνάρτηση προσφοράς (Qs) ίση με τη συνάρτηση ζήτησης (Qd) και έλυσα την τιμή ισορροπίας (P). Οι υπολογισμοί οδήγησαν σε μια τιμή ισορροπίας P = 6,8. Με γνωστή την τιμή ισορροπίας, χρησιμοποίησα στη συνέχεια μία από τις συναρτήσεις, στην προκειμένη περίπτωση τη συνάρτηση προσφοράς, για να βρω την ποσότητα ηλεκτρικής ενέργειας σε αυτό το σημείο ισορροπίας, η οποία προέκυψε Q = 28,4 kWh. Για να επιβεβαιώσω αυτά τα ευρήματα και να αναπαραστήσω οπτικά τη σχέση μεταξύ προσφοράς και ζήτησης, χρησιμοποίησα το Microsoft Excel για να δημιουργήσω ένα γράφημα με την ποσότητα (Q) στον οριζόντιο άξονα και την τιμή (P) στον κάθετο άξονα. Αυτή η γραφική αναπαράσταση επικύρωσε πράγματι το **σημείο ισορροπίας σε P = 6,8 και Q = 28,4**, ευθυγραμμιζόμενο με τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τους υπολογισμούς. Το γράφημα χρησιμεύει ως οπτική επιβεβαίωση της ισορροπίας στην προσφορά και τη ζήτηση ηλεκτρικής ενέργειας σε αυτό το σενάριο.



Ερώτημα Β (9 μονάδες)

Για να βρούμε την τιμή του Q όταν το MC (Οριακό κόστος) είναι ίσο με το MR (Οριακό έσοδο), μπορούμε να θέσουμε τις δύο συναρτήσεις ίσες μεταξύ τους και να λύσουμε το Q:

$$\boldsymbol{MC = MR}$$

$$\boldsymbol{3Q^2 - 32Q + 96 = 236 - 16Q}$$

Τώρα, ας απλοποιήσουμε την εξίσωση:

$$\boldsymbol{3Q^2 - 32Q + 96 - 236 + 16Q = 0}$$

Συνδυάστε τους όμοιους όρους:

$$\boldsymbol{3Q^2 - 16Q - 140 = 0}$$

Τώρα, έχουμε μια τετραγωνική εξίσωση με τη μορφή:

$$\boldsymbol{aQ^2 + bQ + c = 0}$$

Σε αυτή την περίπτωση, **a = 3, b = -16 και c = -140**.

Μπορούμε να λύσουμε αυτή την τετραγωνική εξίσωση χρησιμοποιώντας τον τετραγωνικό τύπο:

$$\boldsymbol{Q} = \frac{\left(-\boldsymbol{b} \pm \sqrt{\boldsymbol{b}^2 - 4\boldsymbol{ac}}\right)}{2\boldsymbol{a}}$$

Συνδέοντας τις τιμές:

$$\boldsymbol{Q} = \frac{\left(16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 * 3 * (-140)}\right)}{(2 * 3)}$$

Τώρα, ας υπολογίσουμε τις τιμές του Q:

$$\boldsymbol{Q} = \frac{\left(16 \pm \sqrt{256 + 1680}\right)}{6}$$

$$\boldsymbol{Q} = \frac{\left(16 \pm \sqrt{1936}\right)}{6}$$

$$\boldsymbol{Q} = \frac{(16 \pm 44)}{6}$$

Τώρα, έχουμε δύο πιθανές λύσεις:

$$1.\boldsymbol{Q} = \frac{(16 + 44)}{6} = \frac{60}{6} = 10$$

$$2.\boldsymbol{Q} = \frac{(16 - 44)}{6} = \frac{-28}{6} = -4,67 \; (\boldsymbol{περίπου})$$

Έτσι, υπάρχουν δύο πιθανές τιμές του Q όταν το MC ισούται με το MR: Q = 10 και Q ≈ -4,67. Η βέλτιστη ποσότητα παραγωγής της επιχείρησης είναι Q = 10, ενώ η άλλη τιμή δεν είναι πρακτική στο συγκεκριμένο πλαίσιο.