

Actividad 2

Integrantes

- Pedro Luis González Roa A01651517
- Marcela Arcos Caballero A01703191
- Lisieux Serrano A01207648

Ejercicio 1

Resprese la ecuación vectorial dada en forma de un SEL y en forma matricial. Obtenga la forma *rref* de la matriz aumentada y concluya sobre la(s) solución(ones) del SEL.

$$x_1 \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 7 \\ -8 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Respuesta:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & 7 & 6 \\ -1 & 3 & -8 & -8 \\ 7 & 5 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 2 & 7 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & -\frac{25}{4} & -\frac{26}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{142}{129} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1295}{129} \end{array} \right]$$

Conclusión: Es un sistema inconsistente porque hay un pivote en la última columna de la matriz aumentada.

Ejercicio 2

Dados $u = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$, calcule, si es posible, las siguientes expresiones:

1. $\|u * w\|$

$$u * w = (3 * 7) + 4 = 25$$

$$\|u * w\| = \sqrt{25^2} = 25$$

2. $u * w + v$

No se pudo realizar la operación ya que no es posible sumar un escalar con un vector

3. $u * (7v + w)$

$$7v + w = \begin{bmatrix} 35 \\ -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$u * (7v + w) = \begin{bmatrix} 42 \\ -6 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = (42 * 3) + (-6 * 4) = 102$$

4. $\|(u * v)w\|$

$$u * v = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = 11$$

$$(u * v)w = 11 \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$\left\| \begin{bmatrix} 77 \\ 11 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{(77^2) + (11^2)} = 77.817$$

5. c_1 y c_2 tal que $c_1 u + c_2 v = w$

$$c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 7 \\ 4 & -1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{12}{23} \\ 0 & 1 & \frac{25}{23} \end{array} \right]$$

$$c_1 = \frac{12}{23}, c_2 = \frac{25}{23}$$

Ejercicio 3

1. Si P es invertible y $A = PXP^{-1}$

$$PXP^{-1} = A$$

$$XP^{-1} = P^{-1}A$$

$$X = P^{-1}AP$$

2. Si A, B y C son matrices reales invertibles de $n \times n$ y $C^{-1}(A + X)B^{-1} = I$

$$(A + X)B^{-1} = CI$$

$$(A + X) = CIB$$

$$X = CIB - A$$

Ejercicio 4

Efectué el producto matricial indicado, si es que existe:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

1. $A^t A$

$$[1, 1] = 1(1) + 0(0) = 1$$

$$[4, 4] = 1(1) + 3(3) = 10$$

$$A^t A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

$$2. AA^t$$

$$\begin{aligned} [1, 1] &= 1(1) - 1(1) + 1(1) - 1(1) = 1 \\ [2, 2] &= 0(0) + 1(1) + 2(2) + 3(3) = 14 \\ AA^t &= \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio 5

¿Qué restricciones debe imponer a x y y para que la matriz $A = \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}$ sea invertible?

$$\begin{aligned} (x * x) - (y * y) &= x^2 - y^2 \\ A^{-1} &= \frac{1}{x^2 - y^2} \begin{bmatrix} x & -y \\ -y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \frac{1}{x^2 - y^2} & y \frac{1}{x^2 - y^2} \\ -y \frac{1}{x^2 - y^2} & x \frac{1}{x^2 - y^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio 6

Suponga que $A \in M_{m \times n}(R)$ no es una matriz cuadrada. Suponga que x es un vector columna de tamaño n y y es un vector columna de tamaño m . ¿Qué condición debe imponerse para que la ecuación $Ax = y$ tenga solución única para el vector x ?

$$A_{m \times n} x_{n \times 1} = y_{m \times 1}$$

$$A^t Ax = A^t y$$

$$D = A^t A$$

$$Dx = A^t y$$

Para que el sistema tenga una solución única es necesario que D sea

invertible.