partial2

Examen parcial 2

Pedro Luis González Roa A01651517

\alpha=7 \\ \beta=-1

1. **Considera W el subespacio de D que tiene base $B = e^{8x}, e^{8x}cos(x), e^{8x}sen(x)$. Sea $T : W \rightarrow W$ definida por $T[f(x)] = f^I(x)$ una transformación lineal de W en W**

    i. **Determina la matriz de la transformación lineal T_D**

$$A = \left[T(e_1) \quad | \quad T(e_2) \quad | \quad T(e_3)\right]$$

$$T(e_1) = D_x(e^{8x}) = 8e^{8x}$$

$$T(e_2) = D_x(e^{8x}cos(x)) = e^{8x}(8cos(x) - sen(x))$$

$$T(e_2) = D_x(e^{8x}cos(x)) = e^{8x}(8sen(x) + cos(x))$$

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

    ii. **Usando el resultado anterior, integra 3 veces la función**

$$f(x) = 200e^{8x} + 25e^{8x}sen(x) - 120e^{8x}cos(x)$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{65}{520} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{64}{520} & \frac{8}{520} \\ 0 & -\frac{8}{520} & \frac{64}{520} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{65}{520} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{64}{520} & \frac{8}{520} \\ 0 & -\frac{8}{520} & \frac{64}{520} \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 200 \\ -120 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{25}{64} \\ -\frac{128873633}{66015625} \\ \frac{8593144}{34328125} \end{bmatrix}$$

iii. **Los profesores de Matemáticas II, que enseñan integrales, a veces suelen evaluar incorrectamente resultados que no tienen la constante de integración. ¿Por qué crees que esta metodología *no toma en cuenta* esto y no regresa el valor de la constante de integración?**
Porque

2. **Considere la transformación lineal de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que corresponde a efectuar, en el siguiente orden, las siguientes transformaciones:**

- **Una contracción en el eje x en un factor de $\frac{1}{8}$**
- **Una reflexión sobre la recta $y = x$**
- **Un corte sobre el eje y con $k = -2$**
- **Una rotación en sentido antihorario de $\theta = \frac{3}{4}\pi$ radianes**

i. **Determine la matriz A que representa esta transformación lineal**

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} cos(\frac{3}{4}\pi) & -sen(\frac{3}{4}\pi) \\ sen(\frac{3}{4}\pi) & cos(\frac{3}{4}\pi) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{x}{8} \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{x}{8} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -\frac{x}{8} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ -\frac{x}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -\frac{x}{8} - 2y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} cos(\frac{3}{4}\pi) & -sen(\frac{3}{4}\pi) \\ sen(\frac{3}{4}\pi) & cos(\frac{3}{4}\pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ -\frac{x}{8} - 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}x}{16} - \frac{\sqrt{2}y}{2} \\ \frac{\sqrt{2}x}{16} + \frac{\sqrt{2}y}{2} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2^{\frac{1}{2}}x}{16} - \frac{2^{\frac{1}{2}}y}{2} \\ \frac{2^{\frac{1}{2}}x}{16} + \frac{2^{\frac{1}{2}}y}{2} \end{bmatrix}$$

ii. **Determine la imagen del vector $\begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$ bajo esta transformación**

$$\begin{bmatrix} \frac{2^{\frac{1}{2}}7}{16} - \frac{2^{\frac{1}{2}}-1}{2} \\ \frac{2^{\frac{1}{2}}7}{16} + \frac{2^{\frac{1}{2}}-1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{8\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{8\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

3. **La empresa *Hertz* tiene algunas sucursales en Detroit. Después de un estudio por el administrador de la empresa, se encontró el patrón de renta y devolución de los automoviles, en tres puntos que son Aeropuerto en la ciudad (AC), Centro © y Aeropuerto fuera de la ciudad (AF). Dichos patrones, descritos en proporciones son:**

- **Si se renta un carro en AC se tiene que 0.85 de ellos se entrega en AC, 0.10 de ellos en C, y 0.05 en AF**
- **Si se renta un carro en C se tiene que 0.07 de ellos se entrega en AC, 0.92 de ellos en C, y 0.01 en AF**
- **Si se renta un carro en AF se tiene que 0.20 de ellos se entrega en AC, 0.70 de ellos en C, y 0.10 en AF**

i. **La matriz de transición que modela la dinámica de esta empresa en Detroit.**

$$T = \begin{bmatrix} .85 & .07 & .20 \\ .10 & .92 & .70 \\ .05 & .01 & .10 \end{bmatrix}$$

ii. **Si se cuenta con una flota de 2,000 automoviles. ¿Cuántos estarán rentados o listos para rentarse en la sucursal ubicada en el centro de la ciudad?**

$$Ker(T - I) = \begin{bmatrix} -0.15 & .07 & .20 \\ .10 & -0.08 & .70 \\ .05 & .01 & -.90 \end{bmatrix} - rref \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -13 \\ 0 & 1 & -25 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Ker(T - I) = Gen \begin{bmatrix} 13 \\ 25 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{13}{29} \\ \frac{25}{39} \\ \frac{1}{39} \end{bmatrix}$$

1283 automoviles en la surcusal C.

4. **En el caso de que la transformación del problema 2 sea invertible, determine la matriz de transformación inversa, y describa geométricamente qué efecto tiene (y en que órden), multiplicar esta matriz de transformación inversa por un vector de** $\mathbb{R}^2$