

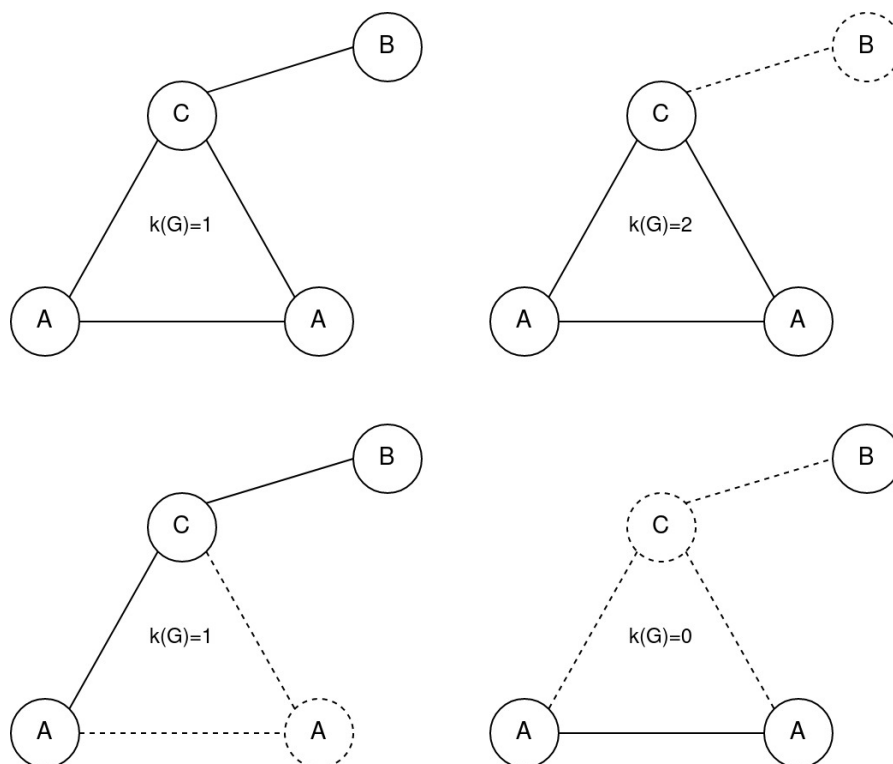
5. mājas darbs

Pēteris Račinskis pr20015

19/12/21

1. Uzdevums

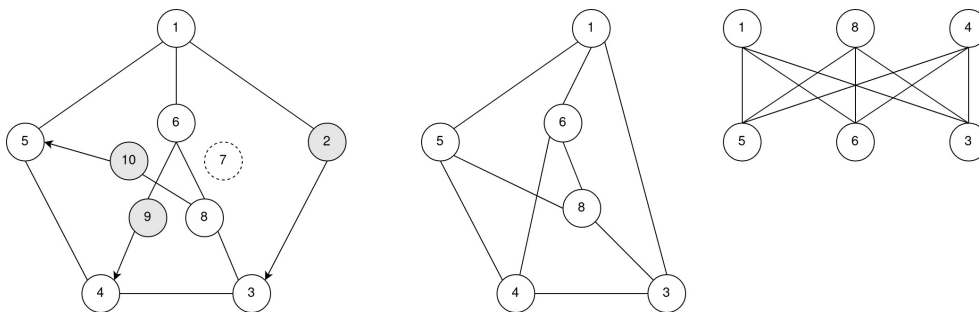
Definējot grafa sakarības skaitli $k(G)$ kā minimālo nešķēlošu virsotņu ceļu skaitu starp katru grafa virsotņu pāri, nesakarīgam grafam $k(G) = 0$, pilnam grafam - $k(G) = n - 1$. Attiecīgi sekojošā konstrukcija izpilda uzdevuma nosacījumus.



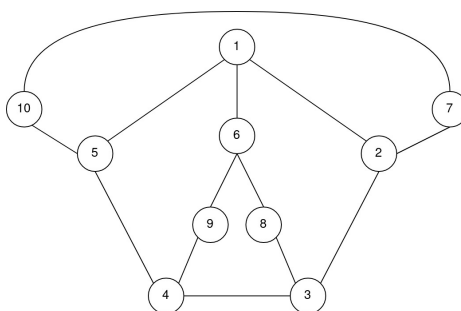
Att. 1: Grafa sakarības skaitļa izmaiņas, izmetot virsotnes.

2. Uzdevums

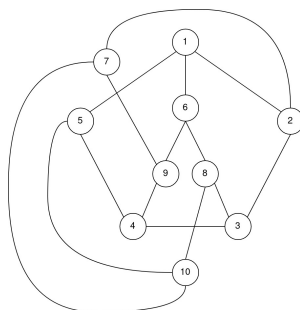
Jebkurš Petersena grafa apakšgrafs, kas iegūts, izmetot vienu virsotni, nav planārs, jo ir reducējams uz $K_{3,3}$, veicot šķautņu savilkšanas visām palikušajām virsotnēm ar $\deg = 2$:



Petersena grafa apakšgrafs, kas iegūts, divām blakus esošām virsotnēm atmetot citu šķautni, ir planārs:



Pievienojot atpakaļ jebkuru no šķautnēm (10-8 vai 7-9) attēlā, iespējams atkārtot augstāk attēloto redukciju uz $K_{3,3}$, tāpēc katra no šķautnēm noteikti šķērsos vismaz vienu citu jau pastāvošo. Līdz ar to Petersena grafs ar minimālu krustojumu skaitu ir ar diviem krustojumiem:

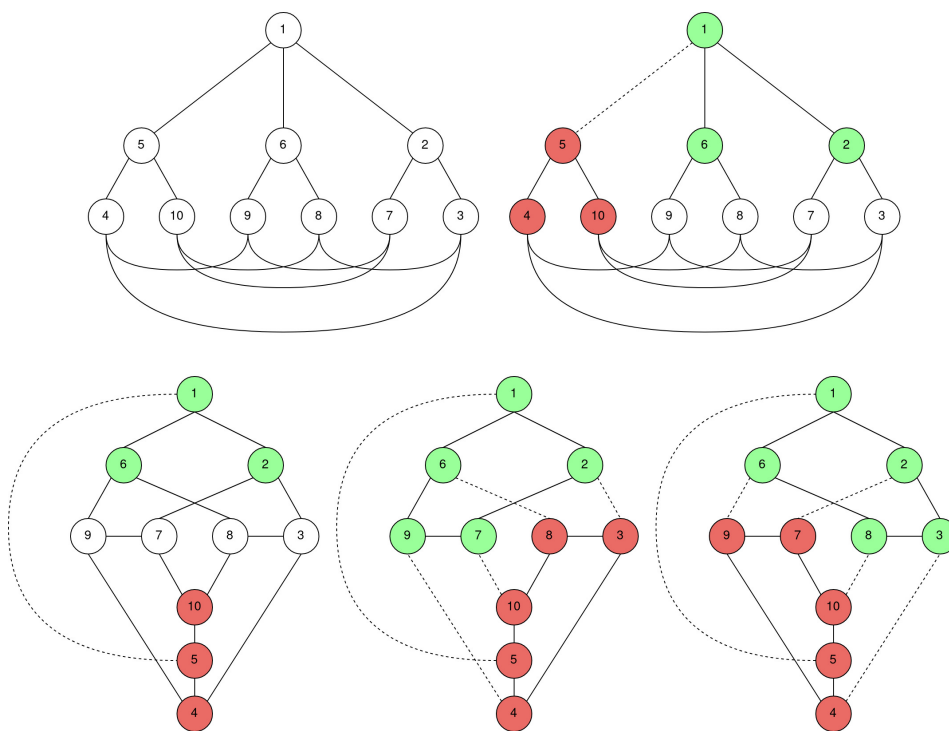


3. Uzdevums

Hamiltona cikla pastāvēšanas nosacījums 3-regulārā grafā: pastāv krāsojums 3 krāsās. k -regulārā grafā ekvivalenta problēma ir 1-faktorizācija (redukcija uz 1-regulāriem apakšgrāfiem ar to pašu virsotņu kopu - 1-faktoriem - kuru šķautņu kopas ir nešķelošas). Tāpat ir jābūt arī pilnajam sapārojamam (1-faktoram), kas nešķēļ Hamiltona ceļu.

Petersena grafā veidojot 1-faktoru (pilno sapārojumu), sākot no jebkuras virsotnes un pievienojot kādu tās šķautni faktoram un atņemot to no sākotnējā grafa tā, lai palikušajā grafā visām virsotnēm $\deg = 2$ var pierādīt, ka iespējami tikai divi varianti (konstrukcija ir vienāda visām virsotņu secībām). Abos gadījumos pārējās šķautnes veido divus 5-ciklus, nevis vienu Hamiltona ciklu.

Šādas 5-cikla komponentes arī nav iespējams 1-faktorizēt (nokrāsot divās palikušajās krāsās), jo jebkurā gadījumā vienai virsotnei ciklā paliks $\deg = 2$ vai $\deg = 0$ (abas šķautnes būs vienā krāsā).



Att. 2: Sākot ar jebkuru šķautni un jebkuru virsotni, ir iespējami tikai divi pilnie sapārojumi.