

# Simulación en Física: Ecuación Logística.

Pedro Jesús López Abenza

## 1. Introducción al problema

La ecuación logística es una aplicación muy interesante de estudiar, pues reúne un abanico de comportamientos muy diversos y con dinámicas totalmente diferentes según el valor que tomen los parámetros, como la existencia de puntos estables y la aparición del caos determinista. Existen diversas aplicaciones logísticas que ofrecen un comportamiento caótico y pueden ser objeto de estudio, aunque la principal es la primera:

$$\begin{aligned}x_{j+1} &= 4 \cdot r \cdot x_j \cdot (1 - x_j) \\x_{j+1} &= x_j \exp[4 \cdot r \cdot (1 - x_j)] \\x_{j+1} &= r[1 - (2 \cdot x_j - 1)^4] \\x_{j+1} &= r \sin(x_j)\end{aligned}$$

La ecuación logística tiene la peculiaridad de estar regida por un comportamiento asintótico totalmente independiente del valor inicial utilizado, de forma que, tras un número suficiente de iteraciones, tenderá a su valor límite. Sin embargo, esta convergencia depende del valor del parámetro  $r$  asignado. Así, existirá un cierto rango de valores de dicho parámetro para los que la convergencia no existe, otro para los que la convergencia será a un único valor y otros para los que la convergencia es a varios puntos (conocidos como puntos cíclicos).

Así, estudiando la evolución del número de puntos cíclicos existentes en función del valor de dicho parámetro  $r$ , se obtendrá un diagrama de bifurcaciones o diagrama de Feigenbaum. El diagrama de Feigenbaum es un atractor extraño y formará un **fractal caótico**, pues posee dimensión fractal, es infinito y tiene autosemejanza (equivalente a decir que si realizamos un acercamiento se apreciará una figura igual a la apreciada inicialmente). De tal modo, en dicho diagrama de Feigenbaum se aprecia como la convergencia cambia, duplicándose a medida que avanza el parámetro  $r$  hasta un cierto valor nuevo. Sin embargo, se puede apreciar un valor para el que existen infinitos puntos cíclicos, denominado como  $r_\infty$ , y a partir del cual surge el caos.

Así pues, en este trabajo se ha realizado un estudio de la ecuación logística a partir de un análisis numérico de la misma, estudiando cómo se comporta el sistema para un número de iteraciones lo suficientemente grande a medida que se varía el parámetro  $r$ . Por tanto, se ha tratado de apreciar los comportamientos característicos anteriormente señalados, como son la existencia de un comportamiento asintótico según el valor del parámetro  $r$ , el diagrama del número de puntos cíclicos en función del parámetro  $r$  y la aparición para un cierto  $r_\infty$  de infinitos puntos cíclicos.

## 2. Cálculo numérico y simulación

### 2.1. Comportamiento asintótico

En primer lugar, y comenzando por lo más sencillo, analizaremos cómo es la órbita (evolución) de la ecuación logística (y de sus otras variantes) frente al avance de las iteraciones, de manera que tratemos de ver para qué valores del parámetro  $r$  presenta un comportamiento asintótico y a qué valor tiende. Para ello, se ha hecho uso del programa de Fortran `iterarlogistica-pjla.f`, cuya función es simular dicha órbita para un cierto parámetro  $r$  indicado.

Así, realizaremos la simulación numérica con un total de  $N = 1000$  iteraciones (aunque, como veremos, nuestro estudio podría haberse realizado con muchas menos) y utilizando tres posibles valores iniciales para cada valor del parámetro  $r$  seleccionado. En concreto, hemos elegido como valores iniciales  $x_0 = 0,20, x_0 = 0,55$  y  $x_0 = 0,90$ , los cuales serán comunes para los valores del parámetro  $r$  elegidos, que serán  $r = 0,15, r = 0,50, r = 0,85$  y  $r = 0,95$ .

Los resultados obtenidos para la ecuación logística principal se muestran en las siguientes gráficas, realizadas con ayuda de RStudio:

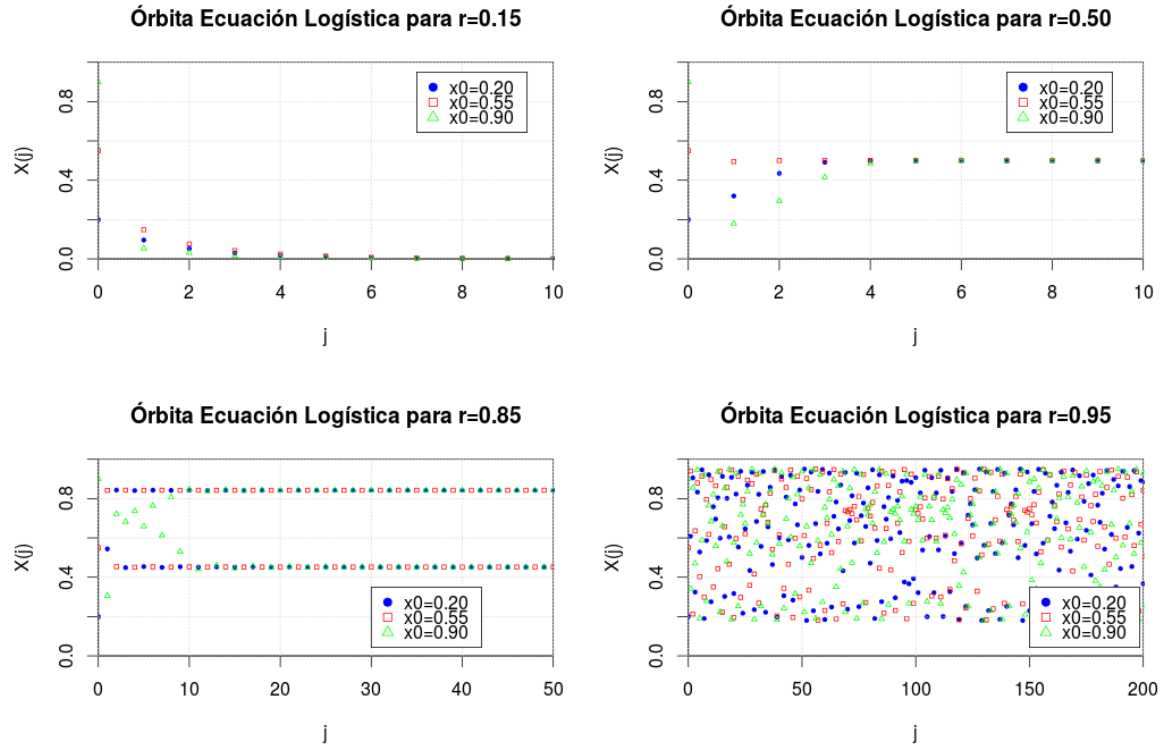


Figura 1

Como podemos apreciar en ellas, para el caso de un valor del parámetro  $r=0.15$  e independientemente del valor inicial elegido, nuestra evolución de la ecuación logística nos lleva hasta un punto estable fijo en 0 lo cual como sabemos se repite en todo el rango de  $r \in (0, \frac{1}{4})$ .

Para el caso de un valor del parámetro  $r=0.50$ , nuestra órbita de la ecuación logística nos lleva para cualquier valor inicial hasta un punto estable fijo no nulo, lo cual ocurre para cualquier parámetro  $r \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ .

Para el caso de un valor del parámetro  $r=0.85$ , obtenemos que nuestra ecuación logística converge en dos valores límite, los cuales va alternando. Como sabemos, a partir de  $r \in (\frac{3}{4}, 1)$  (a excepción de una pequeña región) tiene lugar este comportamiento, de modo que a medida que para ciertos valores del parámetro  $r$  irán apareciendo más bifurcaciones. Para el caso de un valor del parámetro de  $r=0.95$ , apreciamos claramente como ya hemos alcanzado un comportamiento completamente caótico, pues nuestra órbita no presenta una tendencia hasta ningún valor en concreto, sino que selecciona puntos sin relación alguna, puesto que se ha alcanzado el caos.

Vemos como en todos los casos tratados la convergencia se produce de forma muy rápida. Visualmente se puede apreciar que, para los casos de  $r=0.15$  y  $r=0.50$ , la convergencia se produce en la quinta iteración; mientras que en el caso de  $r=0.85$  hay que esperar hasta la iteración  $j = 14$ . Como hemos comentado, en el último caso de  $r=0.95$  no hay convergencia a ningún valor límite, puesto que se ha alcanzado el caos.

## 2.2. Diagrama de Feigenbaum

A continuación, se realizará el estudio del número de puntos cíclicos obtenidos en función del valor del parámetro  $r$ . Para ello, se ha hecho uso del programa de Fortran `feigenbaumlogistica-pjla.f`, en el cual se realiza un barrido para los distintos valores del parámetro  $r$  con un total de  $N_{pasos} = 5000$  pasos, de manera que para cada uno se realiza el cálculo iterativo de la ecuación logística con un total de  $N_{iteraciones} = 1000$  iteraciones y un valor inicial aleatorio para cada valor de  $r$ . Así pues, se han guardado los últimos 500 valores, pues presuntamente en ellos ya se ha alcanzado la convergencia.

A continuación se muestran los resultados obtenidos para el número de puntos cíclicos en función del valor del parámetro  $r$  para la ecuación logística principal se presentan en su diagrama de Feigenbaum. Vemos también un zoom para observar las sucesivas bifurcaciones:

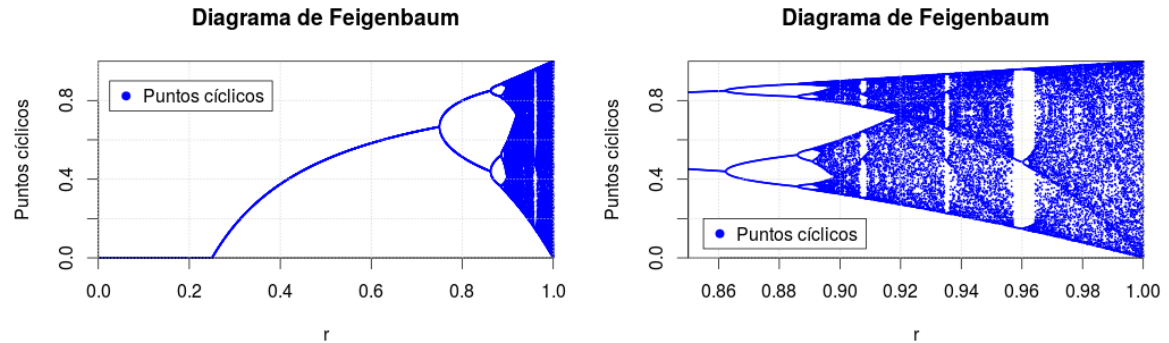


Figura 2: Diagrama de Feigenbaum para la ecuación logística  $x_{j+1} = 4 \cdot r \cdot x_j \cdot (1 - x_j)$  y zoom del mismo en sus primeras bifurcaciones.

Podemos hacer lo propio para el resto de ecuaciones logísticas, de forma que sus diagramas de Feigenbaum serán los siguientes:

- Para la ecuación logística  $x_{j+1} = x_j \exp[4 \cdot r \cdot (1 - x_j)]$ :

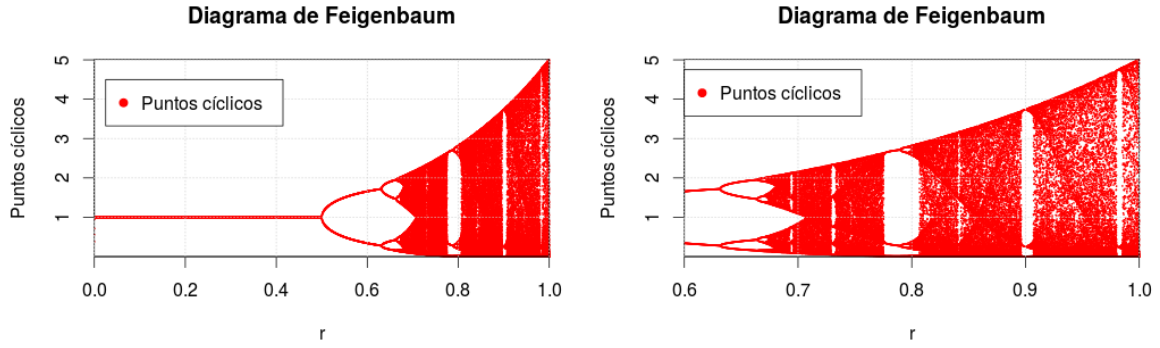


Figura 3: Diagrama de Feigenbaum para la ecuación logística  $x_{j+1} = x_j \exp[4 \cdot r \cdot (1 - x_j)]$  y zoom del mismo en sus primeras bifurcaciones.

- Para la ecuación logística  $x_{j+1} = r[1 - (2 \cdot x_j - 1)^4]$ :

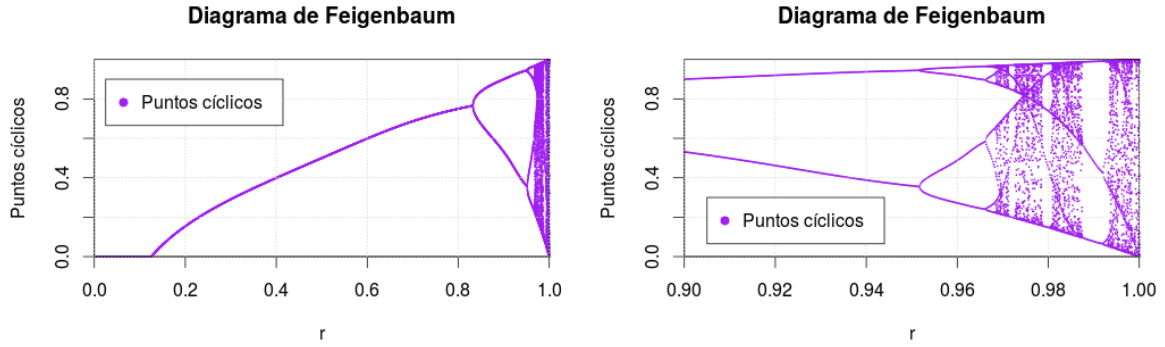


Figura 4: Diagrama de Feigenbaum para la ecuación logística  $x_{j+1} = r[1 - (2 \cdot x_j - 1)^4]$  y zoom del mismo en sus primeras bifurcaciones.

- Para la ecuación logística  $x_{j+1} = r \sin(x_j)$ , cabe destacar que tenemos dos posibilidades en el comportamiento. Por un lado, si el valor inicial del argumento hace que el seno sea positivo, encontramos que algunas de las ramas de bifurcación seguidas son las superiores mientras que, si el valor inicial del argumento hace que el seno sea negativo, las ramas de bifurcación seguidas son las inferiores de nuestro diagrama.

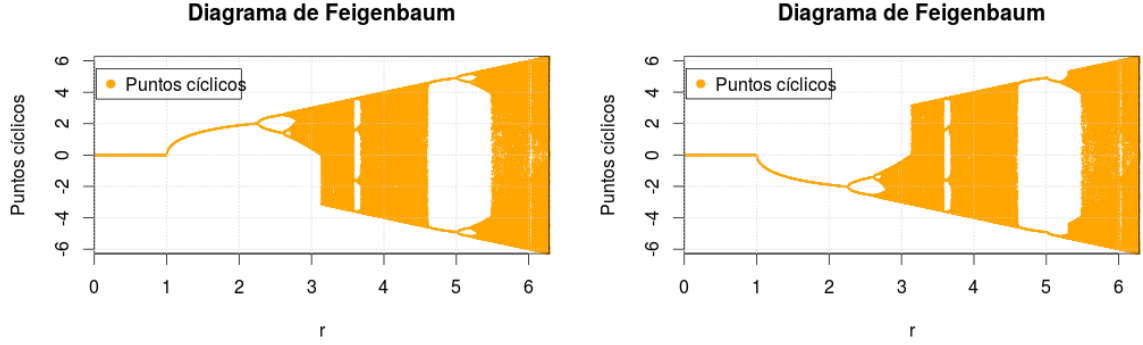


Figura 5: Diagrama de Feigenbaum para la ecuación logística  $x_{j+1} = r \sin(x_j)$  para el caso de un argumento que hace el seno sea positivo y uno que hace el seno sea negativo.

### 2.3. Aparición del comportamiento caótico

Por último, además del estudio de los puntos cíclicos, en el programa `feigenbaumlogistica-pjla.f` se ha tratado de calcular numéricamente el valor del parámetro  $r$  para el que surge el comportamiento caótico. Para ello, se ha realizado una eliminación de todas aquellas soluciones cercanas a un punto estable.

Para ello, se han definido dos tolerancia: Una para los valores del parámetro  $r$  menores o iguales a 0.75 de  $1 \times 10^{-2}$  y otra para los valores de  $r$  mayores que 0.75 de  $5 \times 10^{-5}$ . Así, se han ido recogiendo el número de soluciones encontradas de forma que hemos visto como estas son 0 hasta que llega 0.25, 1 hasta que llega a 0.75, y a partir de dicho valor va bifurcandose y aumentando en forma de potencias de 2.

De acuerdo a nuestro criterio, hemos optado por realizar el cálculo del número de soluciones distintas (en una cierta tolerancia) asociadas para cada  $r$ , obteniendo así el número de soluciones máximas. Así, realizamos la búsqueda del primer valor del parámetro  $r$  para el que se alcanza el número máximo de soluciones encontradas. De tal modo, asociaremos este valor del parámetro como el punto donde tiene lugar la aparición del caos.

Así pues, a continuación se muestra la representación del número de soluciones obtenidas para cada valor del parámetro  $r$ :

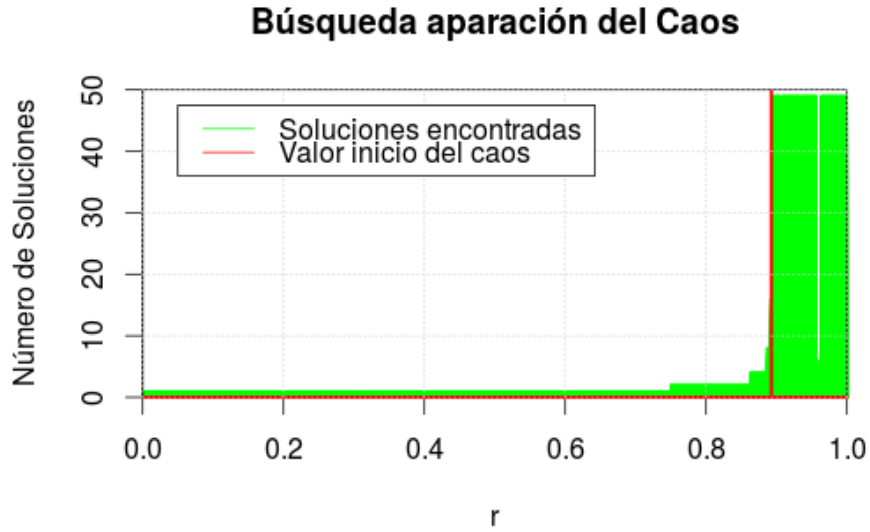


Figura 6: Estudio de la aparición del régimen caótico para la ecuación logística  $x_{j+1} = 4 \cdot r \cdot x_j \cdot (1 - x_j)$

Como nos indica nuestra propia simulación numérica y se ha comprobado gráficamente, el valor para el cual aparecen el número máximo de soluciones encontradas (nuestro punto a partir del cual aparecen infinitos puntos cíclicos) será:

$$r_{\infty} = 0,8926$$

Así pues, cabe destacar que esta solución numérica es bastante correcta, pues el valor obtenido es muy cercano al valor límite teórico  $r_{\infty,teo} = 0,892486$ , con un error relativo de  $\epsilon_{r_{\infty}} = 0,013\%$ .

### 3. Conclusiones

En conclusión, en este trabajo se ha podido realizar un estudio numérico de la ecuación logística en sus distintas formas, de forma que se han reproducido con éxito sus principales características, como son la convergencia, la existencia de puntos cíclicos y aparición de un comportamiento caótico. Así pues, hemos utilizado nuestra simulación numérica para mostrar todos estos comportamientos para distintos valores iniciales y valores del parámetro  $r$ , de modo que hemos sido capaces de obtener el diagrama de Feigenbaum y predecir para que valor de dicho parámetro  $r$  surge un comportamiento caótico.