Simulación en Física: Números Aleatorios.

Pedro Jesús López Abenza

1. Introducción al problema

En este trabajo se hará un estudio de los números aleatorios y su aplicación en los cálculos numéricos para simular distintos procesos físicos. Así pues, en base a los resultados numéricos obtenidos numéricamente hemos realizado un análisis estadístico, tratando magnitudes como la media y la varianza. Ellas nos permitirán estudiar cómo son el conjunto de los resultados obtenidos.

Definimos la media como:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

Y la varianza como:

$$\sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

De este modo, por ejemplo, en este proyecto hemos optado por simular ciertos procesos, como el lanzamiento aleatorio de bolas y contar cómo se reparte entre un determinado número de cajas. Por otro lado, también hemos simulado el lanzamiento de dos monedas con distintas probabilidades, de modo que una presenta un cierto trucaje y la otra es totalmente justa.

De tal modo, en estas simulaciones podremos encontrar comportamientos característicos de la estadística, como son la ley de los números grandes y el paseo del borracho.

2. Cálculo numérico y simulación

2.1. Estudio de la ley de los números grandes

Comenzaremos tratando de reproducir la ley de los números grandes, para lo cual vamos a realizar el problema comentado de las bolas y la cajas. Así, simularemos el lanzamiento de un cierto número de bolas y veremos cuantas bolas caen en cada caja a través de nuestro programa leynumgrandes-pjla.f. Repetiremos esto cambiando el número de bolas lanzadas de 250 en 250 (para tener datos equiespaciados), de manera que para cada número total de bolas realizaremos un estudio de la media y la varianza de número de bolas por caja. Así pues, en este caso hemos determinado un total de $N_{cajas} = 100$ cajas para un total de bolas lanzadas variable (de 250 en 250, como hemos comentado) y que va desde 100 hasta 50100.

Así pues, en la siguiente gráfica, realizada con la ayuda de Rstudio, se representa la varianza obtenida en función del número de lanzamientos realizados:

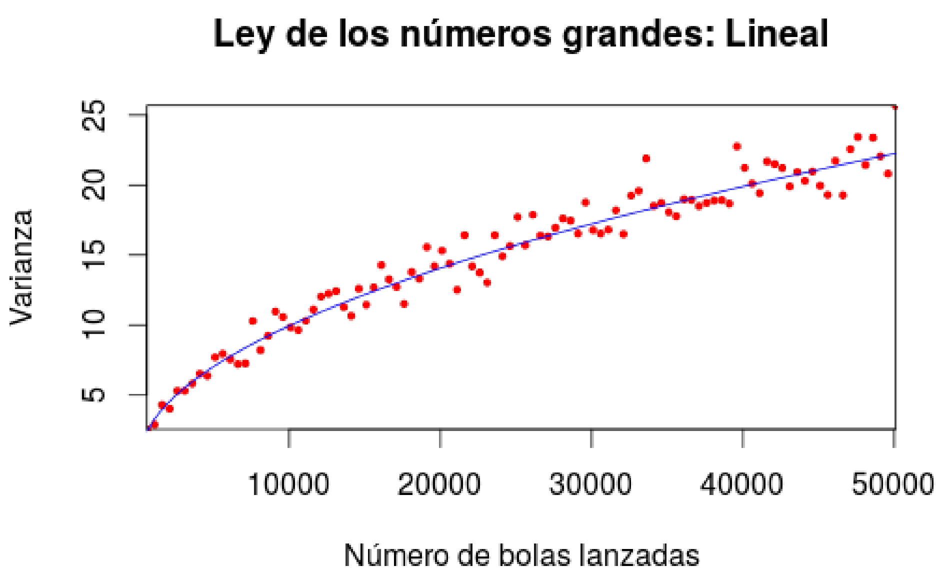

Figura 1: Varianza σ obtenida en función del número de bolas lanzadas N_{bolas} en escala lineal.

Además, hemos superpuesto la curva teórica para la varianza, dada por la siguiente expresión, donde p es un probabilidad, consistente en el número efectivo de lanzamientos por cada caja, y N_{bolas} es el número de bolas lanzadas:

$$\sigma_{teo} = \sqrt{N_{bolas} \cdot p \cdot (1-p)}$$

Asímismo, en la siguiente gráfica podemos ver esta relación entre el número de bolas lanzadas y la varianza en escala logarítmica, de modo que será posible apreciar mejor la relación con la raíz del número de bolas lanzadas:

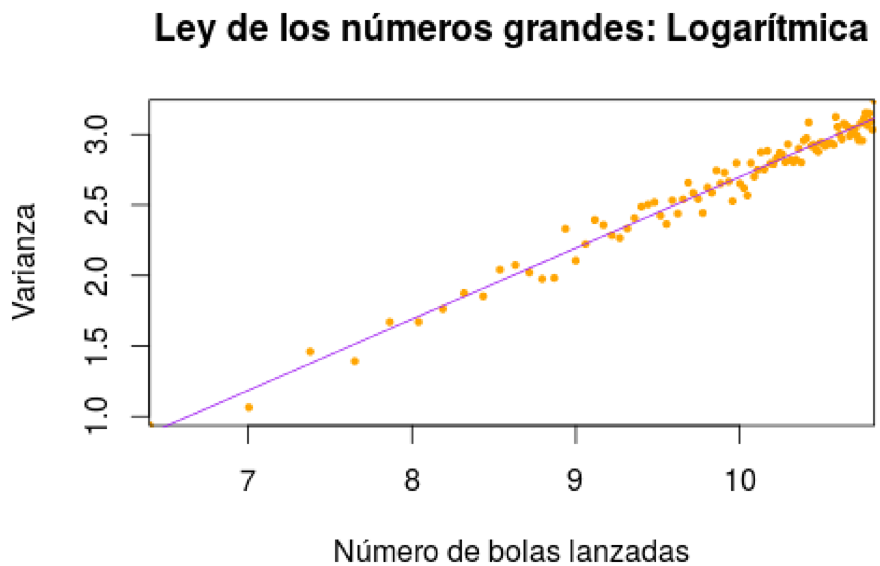

Figura 2: Varianza σ obtenida en función del número de bolas lanzadas N_{bolas} en escala logarítmica.

Así, vemos como existe un crecimiento de acuerdo al aumento del número de lanzamientos. De tal modo, se ha optado por realizar y superponer el ajuste lineal de acuerdo a los datos para apreciar esta relación se da a razón de la raíz del número de lanzamientos. En nuestro ajuste hemos obtenido una relación del tipo:

$$\ln \sigma = 0{,}505 \cdot \ln N_{bolas} - 2{,}350$$

Vemos como efectivamente existe una relación entre logaritmos de aproximadamente $\frac{1}{2}$, de manera que la relación entre el número de bolas lanzadas y la varianza es de acuerdo a la raíz de N_{bolas}.

2.2. Estudio y comparativa de los lanzamientos justo y trucado

A continuación, procedemos al estudio del problema de la moneda trucada. Este consiste en analizar los resultados obtenidos en la simulación numérica del lanzamiento de dos monedas: Por un lado, una moneda justa, cuya probabilidad de que salga cara o cruz es exactamente el 50 %, y una moneda trucada, la cual presenta una probabilidad levemente mayor al 50 % para una de las dos opciones.

Así pues, en nuestro análisis trataremos de determinar cuántos lanzamientos de las monedas son necesarios para poder afirmar con absoluta certeza que la moneda trucada está, efectivamente, trucada. Para ello, utilizaremos el programa monedatrucada-pjla.f.

Comenzaremos reproduciendo el *paseo del borracho* de ambas monedas, para lo cual el algoritmo a utilizar es el siguiente: Realizamos un cierto número de lanzamientos, $N_{tiradas}$, de nuestras dos monedas, de modo que sumamos 1 cuando salga cara y restamos 1 cuando salga cruz. De tal modo, realizamos esto con nuestro programa de Fortran, donde mostraremos el resultado para $N_{tiradas} = 100000$ tiradas.

A continuación, se muestra la representación gráfica del *paseo del borracho* para la moneda justa y la moneda trucada, de modo que se representa el valor adquirido por el contador del valor total obtenido en función del número de lanzamientos realizados:

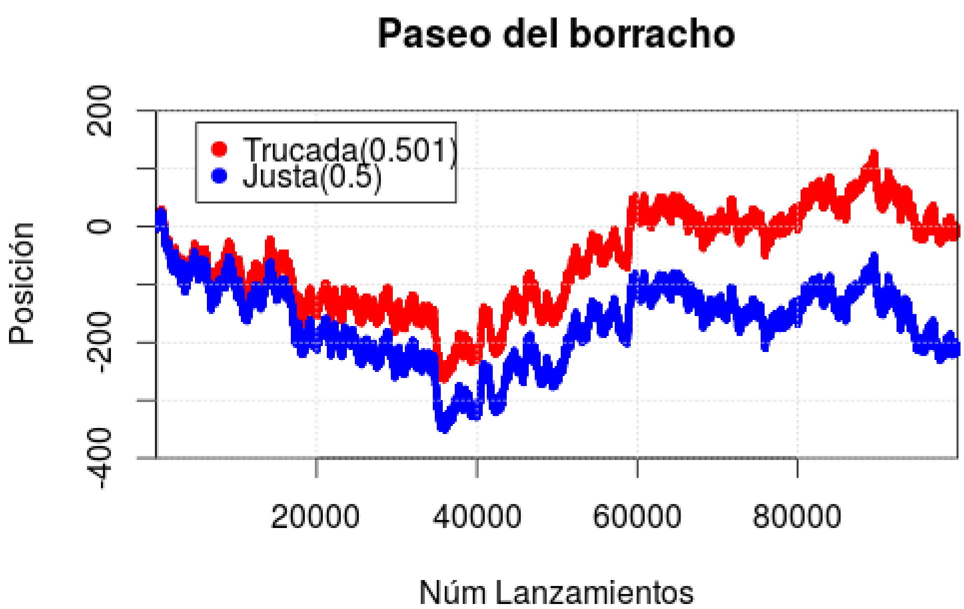

Figura 3: *Paseo del borracho* obtenido para un total de $N_{tiradas} = 100000$ tiradas.

Vemos como efectivamente las trayectorias recorridas por la moneda justa y la trucada son inicialmente muy parecidas pero que, a medida que aumenta el número de lanzamientos, las diferencias se hacen cada vez mayores.

Para tratar de determinar cuántos lanzamientos de las monedas son necesarios para poder afirmar con absoluta certeza que la moneda trucada lo está, de modo que definimos una moneda trucada con una probabilidad $P = 0{,}501$. Así pues, hemos de seguir la evolución del valor medio de dicha moneda trucada, así como de su error, mientras que sabemos que la probabilidad media asociada a la moneda justa es 0.5. De tal modo, nuestro método para determinar que la moneda está trucada con absoluta certeza será el siguiente: Utilizaremos un criterio de 3σ para saber con total seguridad si la probabilidad de la moneda trucada está por encima del 0.5: Representamos las curvas con el valor medio de la supuesta moneda trucada añadiendo y restando el error calculado, de forma que llegará un momento en el que las 3 curvas se sitúen por encima del 0.5 de forma contínua. Por tanto, será a partir de este punto cuando sabremos con total seguridad que la moneda está trucada, pues los resultados obtenidos nos indican que la probabilidad de obtener las caras de dicha moneda tienen probabilidades distintas.

Así pues, hemos simulado el problema con un total de $N_{tiradas} = 10^8$ lanzamientos, de forma que se han ido registrando los resultados cada 100 tiradas. Así pues, a continuación se muestra la representación gráfica de las curvas del valor medio, el valor medio más el error y el valor medio menos el error obtenido para la moneda trucada en función del número de lanzamientos:

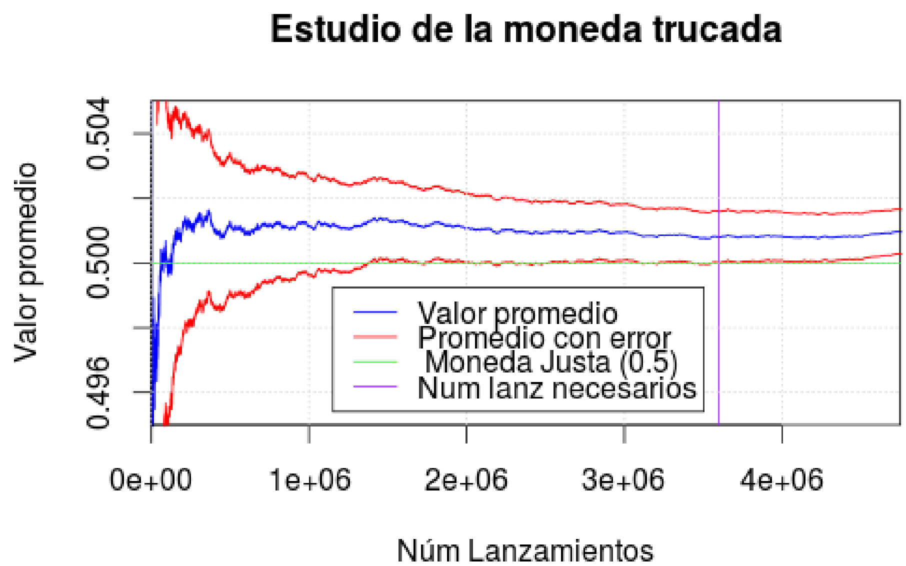

Figura 4: Representación del valor medio, el valor medio más nuestro criterio de error y el valor medio menos nuestro criterio de error obtenido para la moneda trucada en función del número de lanzamiento.

Podemos apreciar haciendo zoom como el corte entre la curva que contiene el valor medio menos 3 veces el error se encuentra cerca de los 3000000. Podemos determinarlo con total precisión utilizando el mismo programa de Fortran indicado anteriormente, el cual nos indica que el total de lanzamientos necesarios es igual a:

$$\boxed{N = 3600200}$$

3. Conclusiones

En conclusión, en este proyecto hemos conseguido introducirnos en el uso de métodos estadísticos y números aleatorios en la simulación numérica. De tal modo, hemos sido capaces de comprobar la ley de los números grandes, así como demostrar con absoluta certeza que una moneda trucada lo está.