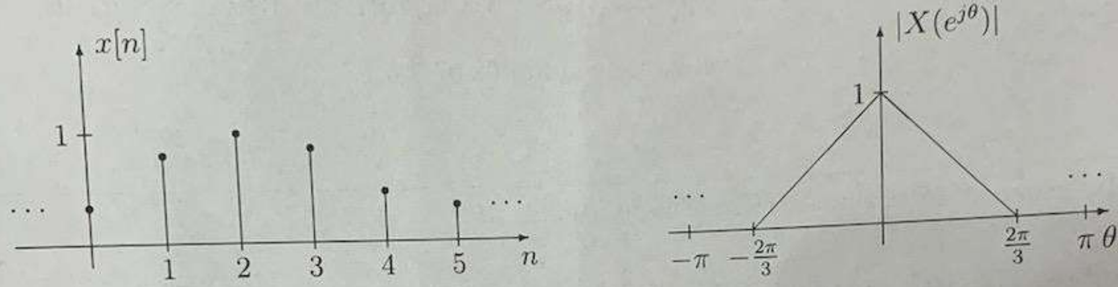
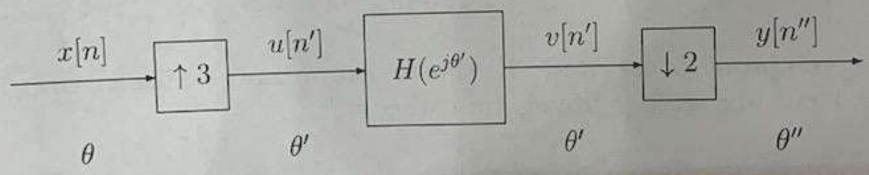
Aufgabe 1 (25 Punkte)

Gegeben seien das Signal $x[n]$ und der Betrag seiner Fouriertransformierten, $|X(e^{j\theta})|$ wie folgt:



Wir schicken das Signal durch das folgende Multiratensystem:



Das Filter $H(e^{j\theta'})$ ist ein idealer Tiefpass mit Grenzfrequenz $\theta'_g = \pi/3$,

$$H(e^{j\theta'}) = \begin{cases} 1, & |\theta'| \leq \theta'_g \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}.$$

(a) Skizzieren Sie die Zeitsignale $u[n'], v[n']$ und $y[n'']$.

(b) Skizzieren Sie die Beträge der Fouriertransformierten $|U(e^{j\theta'})|, |V(e^{j\theta'})|$ und $|Y(e^{j\theta''})|$ für mindestens zwei Perioden. Tritt während des Downsamplings Aliasing und/oder Informationsverlust auf?

(c) Wiederholen Sie Punkt (a) und (b) für das Multiratensystem *ohne* das Filter $H(e^{j\theta'})$, d. h. für $v[n'] = u[n']$.

Aufgabe 2 (25 Punkte)

Gegeben sei das analoge Signal:

$$x(t) = 3\cos(200\pi t) + 5\cos(600\pi t) + 10\cos(1200\pi t)$$

Nehmen Sie ferner an, dass Ihnen ein ideales Abtast- und Rekonstruktionssystem zur Verfügung steht.

(a) Zeichnen Sie die Fourier-Transformation $X(j\omega)$ von $x(t)$. Welche Frequenzen treten im kontinuierlichen Signal $x(t)$ auf? Nehmen Sie ein ideales Abtastsystem zur Erhaltung des zeitdiskreten Signals $x[n]$ an und wählen Sie die kleinstmögliche Abtastfrequenz f_s für welche kein Aliasing und/oder Informationsverlust auftritt. Zeichnen Sie die entsprechende DTFT für mindestens zwei Perioden. Wie lautet das zeitdiskrete Signal $x[n]$ nach der Abtastung?

(b) Nehmen Sie nun an, dass das Signal $x(t)$ mit einer Abtastrate von $f_s = 500$ Hz abgetastet wird. Zeichnen Sie die entsprechende DTFT für mindestens zwei Perioden. Tritt Aliasing und/oder Informationsverlust auf? Wie lautet das zeitdiskrete Signal $x'[n]$ nach der Abtastung?

(c) Mit derselben Abtastrate wie in **(b)**: Wie lautet das analoge Signal $\hat{x}(t)$ welches Sie aus $x'[n]$ rekonstruieren können bei Annahme einer idealen Interpolation? Zeichnen Sie die entsprechende Fourier-Transformation. Ist $\hat{x}(t)$ unterschiedlich von $x(t)$ und falls ja, warum?

(d) Zeichnen Sie ein Blockdiagramm des idealen Abtast- und Rekonstruktionssystems (Sie können ein System annehmen, welches beliebige Abtastfrequenzen unterstützt).

Bitte achten Sie darauf, dass die Achsen in Ihren Skizzen richtig beschriftet sind.

Aufgabe 3 (25 Punkte)

Gegeben sei die Folge

$$x[n] = 1\delta[n] + 2\delta[n-1] - 1\delta[n-2]$$

mit der Fourier Transformierten $X(e^{\jmath\theta})$.

Berechnen Sie durch Verwendung von Eigenschaften der DTFT (siehe Formelsammlung) die Folgen (unter Angabe aller Zwischenschritte)

(a)

$$y_1[n] = \mathrm{DTFT}^{-1}\{X(e^{-\jmath\theta})\}$$

(b)

$$y_2[n] = \mathrm{DTFT}^{-1}\{\mathfrak{Re}\{X(e^{\jmath\theta})\}\}$$

(c)

$$y_3[n] = \mathrm{DTFT}^{-1}\{|X(e^{\jmath\theta})|^2\}$$

(d)

$$y_4[n] = \mathrm{DTFT}^{-1}\{X(e^{\jmath\theta}) - X^*(e^{\jmath\theta})\}$$

Ermitteln Sie ferner)

(e)

$$X(e^{\jmath\theta})\big|_{\theta=0}$$

(f)

$$\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{\jmath\theta})|^2 d\theta$$

Aufgabe 4 (25 Punkte)

Die Impulsantwort eines FIR-Filters sei gegeben als

$$h[n] = a\delta[n] + b\delta[n-1] + b\delta[n-2] + a\delta[n-3]$$

wobei a und b reelle Zahlen sind.

(a) Geben Sie die Übertragungsfunktion $H(z)$ des Filters an, und zeigen Sie dass diese eine Nullstelle bei $z = -1$ besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass die restlichen Nullstellen von $H(z)$ bei

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} - \frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b}{2a} - \frac{3}{4}}$$

liegen. **Hinweis:** Reduzieren Sie das Zählerpolynom um eine Ordnung indem Sie eine Polynomdivision durch die bekannte Nullstelle durchführen.

(c) Berechnen Sie den Frequenzgang $H(e^{j\theta})$ des Systems. Zerlegen Sie diesen in Betrag und Phase.

(d) Wählen Sie nun $a = b = 1$ und zeichnen Sie das Pol-/Nullstellendiagramm.

(e) Skizzieren Sie für $a = b = 1$ qualitativ den Betragsfrequenzgang und den Phasengang. Beschriften Sie die Achsen!

(f) Um welche Art von Filter handelt es sich?