

# Theoriesammlung Analysis 1

Danilo Bargaen  
<http://ich-wars-nicht.ch/>

January 17, 2011

# Contents

<b>1 Funktionen</b>	<b>2</b>
1.1 Gerade, ungerade und periodische Funktion . . . . .	2
1.2 Umkehrbarkeit . . . . .	2
1.3 Allgemeine Gleichungsregel . . . . .	2
1.4 Gleichungsregel für das Wegschaffen von Wurzeln . . . . .	2
1.5 Monotone Funktionen . . . . .	2
1.6 Allgemeine Ungleichungsregel . . . . .	3
1.7 Arithmetische Grundoperationen mit Funktionen . . . . .	3
1.8 Verkettung oder Komposition . . . . .	3
1.9 Graphen der Verkettung von Funktionen mit linearen Funktionen . . . . .	4
1.10 Umkehrfunktion . . . . .	4
1.11 Graphen von Umkehrfunktionen . . . . .	4
1.12 Verkettung einer Funktion mit ihrer Umkehrfunktion . . . . .	4
1.13 Eigentliche und Uneigentliche Grenzwerte . . . . .	5
1.14 Stetigkeit . . . . .	5
<b>2 Differentialrechnung</b>	<b>5</b>
2.1 Ableitung . . . . .	5
2.2 Wichtige Ableitungsfunktionen . . . . .	5
2.3 Linearitätsregeln für die Ableitung . . . . .	6
2.4 Produkt- und Quotientenregel für Ableitungen . . . . .	6
2.5 Kettenregel für Ableitungen . . . . .	6
2.6 Linearisierungsformel . . . . .	7
2.7 Algorithmus von Newton . . . . .	7
2.8 Regel von Bernoulli-l'Hôpital . . . . .	7
2.9 Taylor-Polynom . . . . .	8
2.10 Konvergenz von Taylorreihen . . . . .	8

# 1 Funktionen

## 1.1 Gerade, ungerade und periodische Funktion

Die Funktion  $f$  heisst

- *gerade*, wenn

$$\forall x \in DB(f) : f(-x) = f(x)$$

- *ungerade*, wenn

$$\forall x \in DB(f) : f(-x) = -f(x)$$

- *periodisch* mit der Periode  $p$ , wenn

$$\forall x \in DB(f) : f(x + p) = f(x)$$

Die kleinste positive Periode heisst *primitive Periode*.

## 1.2 Umkehrbarkeit

Die Funktion  $f$  heisst *umkehrbar*, wenn

$$(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$$

## 1.3 Allgemeine Gleichungsregel

Für jede umkehrbare Funktion  $f$  gilt: Man darf beidseitig einer Funktion dieselbe umkehrbare Funktion anwenden, wenn beide Seiten in ihrem Definitionsbereich liegen. Mathematisch ausgedrückt:

$$\forall x_1, x_2 \in DB(f) : x_1 = x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

## 1.4 Gleichungsregel für das Wegschaffen von Wurzeln

Um die Wurzel auf der linken Seite der Gleichung

$$\sqrt{R} = S$$

wegzuschaffen, sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- Wenn  $S \geq 0$  ist, so ist die Gleichung äquivalent zu  $R = S^2$
- Wenn  $S < 0$  ist, ist die Gleichung unerfüllbar.

oder auf eine kurze Formel gebracht:

$$\sqrt{R} = S \Leftrightarrow R = S^2 \wedge S \geq 0$$

## 1.5 Monotone Funktionen

- Sei  $f$  eine monoton steigende Funktion. Dann gilt

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$$

- Ist aber  $f$  eine monoton fallende Funktion, so gilt

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 > x_2$$

## 1.6 Allgemeine Ungleichungsregel

Für jede streng monoton steigende Funktion  $f$  gilt: Man darf beidseitig einer Ungleichung dieselbe streng monoton steigende Funktion anwenden, wenn beide Seiten in ihrem Definitionsbereich liegen. Oder mathematisch ausgedrückt:

$$\forall x_1, x_2 \in DB(f) : x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Ferner gilt für jede streng monoton fallende Funktion  $f$ : Man darf beidseitig einer Ungleichung dieselbe streng monoton fallende Funktion anwenden, wenn beide Seiten in ihrem Definitionsbereich liegen. Dabei ist aber das Vergleichszeichen umzudrehen. Mathematisch ausgedrückt:

$$\forall x_1, x_2 \in DB(f) : x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

## 1.7 Arithmetische Grundoperationen mit Funktionen

$f$  und  $g$  seien reelle Funktionen. Dann sind folgende Operationen definiert:

- $-f := x \mapsto -f(x)$
- $f + g := x \mapsto f(x) + g(x)$
- $f - g := x \mapsto f(x) - g(x)$
- $f \cdot g := x \mapsto f(x) \cdot g(x)$
- $\frac{f}{g} := x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$

Beim Vorzeichenwechsel ist der Definitionsbereich identisch mit jenem von  $f$ . Bei Summe, Differenz und Produkt ist er gleich dem Durchschnitt der Definitionsbereiche von  $f$  und  $g$  und im Falle des Quotienten darf  $g$  natürlich nicht den Wert 0 haben; er ist daher gleich

$$(DB(f) \cap DB(g)) \setminus \{x | g(x) = 0\}$$

Sei ferner  $c$  eine Zahl. Dann sind folgende Funktionen definiert:

- $(f + c) := x \mapsto f(x) + c$
- $(f - c) := x \mapsto f(x) - c$
- $(c - f) := x \mapsto c - f(x)$
- $(f \cdot c) := x \mapsto f(x) \cdot c$
- $\frac{f}{c} := x \mapsto \frac{f(x)}{c}$  für  $c \neq 0$
- $\frac{c}{f} := x \mapsto \frac{c}{f(x)}$

Im letzten Fall ist der Definitionsbereich gleich  $DB(f) \setminus \{x | f(x) = 0\}$ , in den übrigen Fällen ist er identisch mit jenem von  $f$ .

## 1.8 Verkettung oder Komposition

Gegeben seien die Funktionen  $f$  und  $g$ . Dann nennt man die Funktion

$$x \mapsto f(g(x))$$

die *Verkettung* oder *Komposition* der Funktionen  $f$  und  $g$ . Man bezeichnet sie mit

$$f \circ g$$

und liest das als  $f$  nach  $g$ .

## 1.9 Graphen der Verkettung von Funktionen mit linearen Funktionen

Der Graph der Funktion  $f$  sei bekannt. Dann geht der Graph der Funktion

$$x \mapsto af(x) + b$$

aus jenem von  $f$  durch folgende geometrische Operationen hervor (Reihenfolge wesentlich!)

1. Vertikale Skalierung um den Faktor  $|a|$ 
  - Wenn  $a < 0$  zusätzlich eine Spiegelung an der 1. Koordinatenachse
2. Vertikalverschiebung um  $|b|$  und zwar
  - Nach oben, wenn  $b > 0$
  - Nach unten, wenn  $b < 0$

Ferner geht der Graph der Funktion

$$x \mapsto f(ax + b)$$

aus jenem  $f$  durch folgende geometrische Operationen hervor (Reihenfolge wesentlich!)

1. Horizontalverschiebung um  $|b|$  und zwar
  - Nach links, wenn  $b > 0$
  - Nach rechts, wenn  $b < 0$
2. Horizontale Skalierung um den Faktor  $\frac{1}{|a|}$ 
  - Wenn  $a < 0$  zusätzlich eine Spiegelung an der 2. Koordinatenachse

## 1.10 Umkehrfunktion

Sei  $f$  eine umkehrbare Funktion. Dann heisst die Funktion  $f^{-1}$ , für welche gilt

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

die *Umkehrfunktion* von  $f$ . Für termdefinierte Funktionen gilt also

$$f = x \mapsto y \Leftrightarrow f^{-1} = y \mapsto x$$

In anderen Worten: Bei der Umkehrfunktion werden einfach die Rollen von Argument und Funktionswert vertauscht. Dies läuft auf eine Spiegelung des Graphen der gegebenen Funktion an der ersten Quadrantenhalbierenden hinaus.

## 1.11 Graphen von Umkehrfunktionen

Sei  $f$  eine umkehrbare Funktion. Dann ist der Graph von  $f^{-1}$  das Spiegelbild des Graphen von  $f$  an der 1. Quadrantenhalbierenden.

## 1.12 Verkettung einer Funktion mit ihrer Umkehrfunktion

Sei  $f$  eine umkehrbare Funktion. Dann gilt

$$\forall x \in DB(f) : f^{-1}(f(x)) = x$$

oder knapper

$$f^{-1} \circ f = id_{DB(f)}$$

## 1.13 Eigentliche und Uneigentliche Grenzwerte

Eigentliche Grenzwerte sind Grenzwerte, welche gegen eine reelle Zahl streben. Uneigentliche Grenzwerte sind Grenzwerte, welche gegen Unendlich (positiv oder negativ) streben.

## 1.14 Stetigkeit

Wenn die reelle Funktion  $f$  an der Stelle  $a$  definiert ist und

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a)$$

gilt, dann heisst die Funktion bei  $a$  stetig.

Vereinfacht gesagt, kann man sagen, dass eine stetige Funktion gezeichnet werden kann, ohne den Stift abzusetzen.

# 2 Differentialrechnung

## 2.1 Ableitung

$f$  sei eine reelle Funktion und  $x$  ein Argument. Wenn der Grenzwert

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

im eigentlichen Sinne existiert, so heisst die Funktion  $f$  an der Stelle  $x$  *differenzierbar* und der Grenzwert heisst die *Ableitung* von  $f$  an der Stelle  $x$ .

In physikalischen und technischen Anwendungen treten häufig Funktionen auf, in denen das Argument die Zeit  $t$  bedeutet. In diesem Fall hat es sich eingebürgert, die Ableitung mit einem über das Funktionssymbol geschriebenen Punkt zu bezeichnen, also

$$\dot{f}(t) \text{ statt } f'(t)$$

## 2.2 Wichtige Ableitungsfunktionen

Funktion	Ableitungsfunktion
$x \mapsto 1$	$x \mapsto 0$
$id := x \mapsto x$	$x \mapsto 1$
$sqr := x \mapsto x^2$	$x \mapsto 2x$
$rez := x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$
$sqrt := x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto nx^{n-1}$
$exp := x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$
$x \mapsto e^{-x}$	$x \mapsto -e^{-x}$
$ln$	$x \mapsto \frac{1}{x}$ für $x > 0$

Funktion	Ableitungsfunktion
$\sin$	$\cos$
$\cos$	$-\sin$
$\tan$	$1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$
$\arcsin$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan$	$\frac{1}{1+x^2}$

## 2.3 Linearitätsregeln für die Ableitung

$f$  und  $g$  seien differenzierbare Funktionen und  $c$  eine Konstante. Dann gelten diese beiden sogenannte *Linearitätsregeln*

- $(f + g)' = f' + g'$
- $(c \cdot f)' = c \cdot f'$

Wenn die Funktionen durch Terme  $S$  und  $T$  definiert sind, so kann man die Regeln auch auf die Terme übertragen:

- $\frac{d}{dx}(S + T) = \frac{dS}{dx} + \frac{dT}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(c \cdot T) = c \cdot \frac{dT}{dx}$

## 2.4 Produkt- und Quotientenregel für Ableitungen

$f$  und  $g$  seien differenzierbare Funktionen. Dann ist

- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

Wenn die Funktionen mit Hilfe von Zuordnungstermen  $S$  und  $T$  definiert sind, so lassen sich diese Regeln auf die Terme übertragen.

- $\frac{d}{dx}(S \cdot T) = \left(\frac{dS}{dx}\right)T + S\left(\frac{dT}{dx}\right)$
- $\frac{d}{dx}\left(\frac{S}{T}\right) = \frac{\left(\frac{dS}{dx}\right)T - S\left(\frac{dT}{dx}\right)}{T^2}$

## 2.5 Kettenregel für Ableitungen

$f$  und  $g$  seien differenzierbare Funktionen. Dann ist die Ableitung ihrer Verkettung an der Stelle  $x$  gegeben durch

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

oder in der Termschreibweise

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot \frac{d}{dx}g(x)$$

Wenn wir beachten, dass  $f'(g(x)) = (f' \circ g)(x)$  ist, bekommen wir für die Ableitungsfunktion

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

## 2.6 Linearisierungsformel

$f$  sei eine an der Stelle  $x_0$  differenzierbare Funktion. Dann ist der Graph der Funktion

$$T := x \mapsto f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

die Tangente an den Graphen von  $f$  im Punkt  $(x_0, f(x_0))$ .

Der Ausdruck  $x - x_0$  kann auch als  $\Delta x$  geschrieben werden.

## 2.7 Algorithmus von Newton

Wir betrachten die Gleichung

$$f(x) = 0$$

$x_0$  sei eine Schätzung für die exakte Lösung  $x^*$ . Die Funktion  $f$  sei zwischen  $x_0$  und  $x^*$  differenzierbar.

Dann strebt die durch die Vorschrift

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

konstruierte Folge unter gewissen, hier nicht näher präzisierten Bedingungen gegen die exakte Lösung  $x^*$ .

## 2.8 Regel von Bernoulli-l'Hôpital

$f$  und  $g$  seien differenzierbare Funktionen. Dann gelten folgende Regeln:

- Wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

oder

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty \wedge \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$$

dann

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$$

- Wenn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$$

oder

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty \wedge \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \pm\infty$$

dann

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$$



- Wenn

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$$

oder

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty \wedge \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \pm\infty$$

dann

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$$

oder kurz und unpräzise:

Man darf bei Grenzwerten den Zähler und den Nenner ableiten, wenn entweder beide nach 0 oder beide nach  $\pm\infty$  gehen.

## 2.9 Taylor-Polynom

Die Funktion  $f$  sei an der Stelle  $x_0$  mindestens  $(n+1)$ -mal differenzierbar. Dann gilt

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_n(x - x_0)^n + R_n(x)$$

oder mit dem  $\sum$ -Zeichen geschrieben

$$f(x) = \left( \sum_{k=0}^n c_k(x - x_0)^k \right) + R_n(x)$$

Dabei gilt

$$c_k = \frac{f^k x_0}{k!} \text{ für } k = 0 \dots n$$

Das Polynom  $c_0 + c_1(x - x_0) + \dots + c_n(x - x_0)^n$  heisst *Taylor-Polynom*.

Das sogenannte *Restglied* beträgt

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)} \xi}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

für ein gewisses  $\xi$  zwischen  $x_0$  und  $x$ .

## 2.10 Konvergenz von Taylorreihen

Die Funktion  $f$  sei bei  $x_0$  beliebig oft differenzierbar. Dann konvergiert die an der Stelle  $x_0$  konstruierte Taylorreihe entweder überall, oder dann in einem Intervall mit den Grenzen  $x_0 - r$  und  $x_0 + r$ , gegen  $f(x_0)$ . Ob das Intervall offen oder geschlossen ist, kann nicht allgemein gesagt werden.  $r$  heisst der *Konvergenzradius* der Taylorreihe.

Die an der Stelle 1 konstruierte Taylorreihe der Funktion  $\ln$  hat den Konvergenzradius 1. Sie konvergiert bei  $1 + 1 = 2$  gerade noch. Bei  $1 - 1 = 0$  kann sie nicht konvergieren, da hier der Funktionswert nicht existiert. Die Taylorreihe konvergiert also im Intervall

$$(0; 2]$$