UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Peter Milivojević

IGRE USTVARJANJA OMREŽJI

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Sergio Cabello Justo

Ljubljana, 2024

Kazalo

Igre ustvarjanja omrežji

POVZETEK

...

Network creation games

ABSTRACT

...

Math. Subj. Class. (2020): ..., ...
Ključne besede: ..., ...
Keywords: ..., ...

1 Uvod

Namen diplomske naloge se je spoznati z igrami ustvarjanja omrežja s poudarkom na dve osnovni verziji tega problema. V igri ustvarjanja omrežja imamo igralce, predstavljene kot vozlišča v grafu, ki želijo s 'sebično' izbiro svoje strategije izboljšati svoj položaj. Običajno ima vsak igralec dva sebična cilja. Prvi cilj je minimizirat stroške ustvarjanja povezav (omrežja) in drugi je minimizirat razdaljo, do ostalih vozlišč (strošek uporabe omrežja).

V osnovnih igrah omrežji predpostavimo, da se ne da primerjati cene ustvarjanja in vzdrževanja povezav. Zato se omejimo na že v naprej podane grafe (omrežja), kjer lahko vozlišča (igralci) le zamenjajo svoje povezave ali v posebnem primeru odstranijo povezavo, tako da zamenjajo pvezavo za že obstoječo povezavo, s čimer se ena povezava izbriše, saj se bomo ukvarjali le zgrafi brez zank in dvojnih povezav. Ne morejo pa ustvarit novih povezav.

2 Teoretična podlaga

Da bomo lahko razumeli obnašanje igralcev in lastnosti nastalih omrežji bomo prvo obnovili/postavili teoretične temelje. Ukvarjali se bomo izključno z povezanimi enostavnimi grafi.

Za lažje razumevanje nadaljnih izrekov, lem, trditev, posledic in rezultatov bomo ponovili nekaj definicij o grafih.

Definicija 2.1. $Graf$ je urejen par G = (V, E), kjer je V neprazna množica točk grafa G in E množica povezav grafa G, pričemer je vsaka povezava par točk.

Definicija 2.2. $Graf$ G je povezan, če za vsak par voclišč $u, v \in V(G)$ obstaja pot od u do v.

Definicija 2.3. Naj bo G povezan graf in $v \in V(G)$. Stopnja točke v je enaka vsoti števila povezav, ki imajo to točko za krajišče (in dvojnega števila zank v tej točki). Označimo jo z $deg(v)$.

Definicija 2.4. Naj bo G povezan graf in $u, v \in V(G)$. Razdalja $d(u, v)$ je dolžina najkrajše poti med vozliščema u in v (t.j. razdalja med u in v) v grafu G.

Definicija 2.5. Naj bo G povezan graf. Premer grafa G je definiran kot $\text{diam}(G) = \max_{u,v \in V(G)} d(u, v)$, kjer je $d(u, v)$ razdalja med vozliščema u in v v grafu G.

Definicija 2.6. Naj bo G povezan graf. Lokalni premer točke v grafa G je definiran kot $\text{diam}(G) = \max_{u \in V(G)} d(u, v)$, kjer je $d(u, v)$ razdalja med vozliščema u in v v grafu G.

Definicija 2.7. Povezan graf G ima prerezno vozlišče v, če graf $G - v$ ni povezan.

Definicija 2.8. Povezanost po povezavah $\lambda(G)$ povezanega grafa G je najmanjše število povezav, z odstranitvijo katerih postane graf G nepovezan. Če je $\lambda(G) \geq k$, je graf G po povezavah k-povezan.

Weinerjev indeks nam bo pomagal z kasnejšimi dokazi.

Definicija 2.9. Naj bo G povezan graf z n vozlišči. Weinerjev indeks $W = W(G)$ je definiran kot vsota vseh razdalj med vozlišči.

$$W(G) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} d_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij}$$

kjer d_{ij} označuje dolžino najkrajše poti med vozliščem i in j.

3 Igra

Pomembno za razumevanje kasnejših delov diplomske naloge je tudi razumevanje kaj je igra v smislu teorije iger.

Definicija 3.1. Strateška igra s funkcijo preferenc je trojica $(N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ pri čemer:

- N je množica igralcev, v našem primeru je to število točk v grafu
- Za vsakega igralca $i \in N$ je A_i neprazna množica njegovih akcij, med katerimi v danem trenutku izbera igralec i
- Za vsakega igralca $i \in N$ je u_i funkcija preferenc na A_i. Torej $u_i : A_i \to \mathbb{R}$ v splošnem in $u_i : A_i \to \mathbb{N}$ v našem primeru.

Za funkcijo preferenc lahko zapišemo sledeče relacije.
$\forall a, b \in A_i :$

- $(u(a) \geq u(b) \Rightarrow a)$ je vsaj tako dobro kot b
- $(u(a) > u(b) \Rightarrow a)$ je boljše kot b
- $(u(a) = u(b) \Rightarrow b)$ indiferenten med a in b

4 Ravnovesje

V tem delu bomo definirali pravila igre in pogoje za nastanek ravnovesji.

Definicija 4.1. Graf je v *ravnotežju glede na vsoto razdalj*, če za vsako povezavo vw in za vsako vozlišče w' zamenjava povezave vw z povezavo vw' ne zmanjša celotne vsote razdalj od vozlišča v do vseh ostalih vozlišč.

Definicija 4.2. Graf je v *ravnotežju glede na maksimalno razdaljo*, če za vsako povezavo vw in za vsako vozlišče w' zamenjava povezave vw z povezavo vw' ne zmanjša lokalnega premera vozlišča v. Nadalje odstranitev povezave vw poveča lokalni premer vozlišča v.

Definicija 4.3. Naj bo G povezan graf. Graf G je *kritičen za odstranitev povezave*, če odstranitev katere koli povezave $uv \in E(G)$ poveča lokalni premer vozlišča v in vozlišča u.

Definicija 4.4. Naj bo G povezan graf. Graf G je *stabilen za dodajanje povezave*, če dodajanje katere koli povezave $uv \in E(G)$ ne zmanjša lokalnega premera vozlišča v in vozlišča u.

5 Cena anarhije in cena stabilnosti

V delu se bomo ukvarjalise tudi z ceno anarhije (PoA) in ceno stabilnosti (PoS). Ceni anarhije in stabilnosti merita, kako se učinkovitost sistema poslabša zaradi sebičnega vedenja njegovih agentov. Cena anarhije je razmerje med vrednostjo/ceno, iz socialnega vidika (skupnega vidika vseh igralcev), najslabšega ravnovesja in socialno ceno optimalnega izida Cena stabilnosti igre pa je razmerje med najboljšo socialno ceno ravnovesja in socialno ceno optimalnega izida.

V igri vsote.

Definicija 5.1. $PoA = \frac{\text{Cena najslabšega ravnovesja}}{\text{Cena optimalne postavitve}} = \frac{\max_{s \in Equil} Cost(s)}{\min_{s \in S} Cost(s)} = \frac{\max_{s \in Equil} Cost(s)}{\min_{s \in S} Cost(s)}$

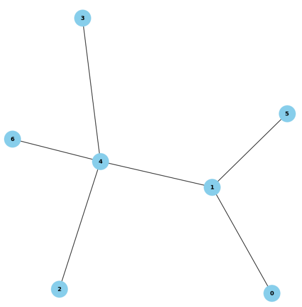
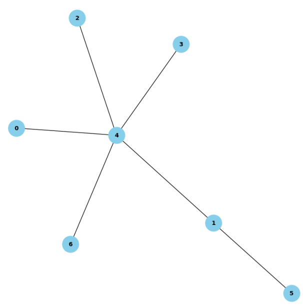
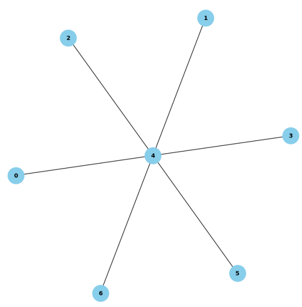
Definicija 5.2. $PoA = \frac{\text{Cena najboljšega ravnovesja}}{\text{Cena optimalne postavitve}} = \frac{\min_{s \in Equil} Cost(s)}{\min_{s \in S} Cost(s)}$

6 Teoretični del diplomske naloge

Nekoliko zahtevnejši in bolj raznoliki grafi od polnih grafov so drevesa.

Izrek 6.1. *Če je ravnovesni graf za skupno vsoto razdalj v preprosti igri ustvarjanja omrežja drevo, potem ima premer največ* 2 *in je kot tak zvezda.*

Dokaz. Dokaza se bomo lotili z protislovjem. Predpostavimo, da je ravnovesni graf drevo s premerom 3 ali več. Ker ima premer vsaj 3 obstajata vozlišči u in v oddaljeni eno od druge za točno 3 preko najkrajše in edine poti, ki gre skozi dve točki, ki jih označimo z a in b. Tako imamo pot $v \to a \to b \to u$. Z s_v, s_a, s_b, s_u označimo število morebitnih točk poddreves upetih na v, a, b, u. Obravnavamo 2 možni zamenjavi: □

Lema 6.2. *V vsakem ravnovesnem grafu igre maksimalne razdalje se lokalni premer za katera koli* 2 *poljubna vozlišča razlikuje največ za* 1.

Dokaz. Predpostavimo, da je graf v *ravnotežju glede na maksimalno razdaljo* in ima vozlišče v z lokalnim premer d in vozlišče w z lokalnim premerom vsaj $d+2$. Naj bo T drevo, ki ga dobimo z iskanjem v širino iz vozlišča v. Vozlišče w z zamenjavo svoje povezave s staršem v T z povezavo do v (korena T) zmanjša svoj lokalni premer. Opazimo, da ta zamenjava lahko le zmanjša ali ohrani globine vozlišč v T, zato lokalni premer vozlišča v ostane največ d. Tako se lokalni premer vozlišča w zmanjša na vsaj $d+1$, saj se w lahko premakne po novo nastali povezavi wv do v in nato sledi poti v do vseh ostalih vozlišča. Ta zamenjava je v nasprotju s predpostavko, da je graf v *ravnotežju glede na maksimalno razdaljo* saj lahko vozlišče u izboljša svoj položaj(zmanjša svoj lokalni premer) z omenjeno zamenjavo povezav. □

Lema 6.3. *Če ima ravnovesni graf za maksimalno razdaljo prerezno vozlišče v, potem ima lahko samo ena izmed povezanih komponent $G - v$ vozlišče z razdaljo več kot 1 od v.*

Dokaz. Ponovno bomo dokazali lemo z protislovjem. Naj bo d lokalni premer prereznega vozlišča v in naj bo vozlišče u na razdalji d od v. Z U označimo povezano komponento $G - v$ ki vsebuje u. Predpostavimo, da $G - U$ vsebuje vozlišče z, ki je za več kot 1 oddaljeno od vozlišča v. Ker je vozlišče v prerezno in z in u nista vozlišči iste povezane komponente $G - v$, mora vsaka pot med njima prečkati v. Tako je najkrajša pot od z do u dolga $d+2$. Lokalni premer z in u je zato vsaj $d+2$ kar se za več kot 1 razlikuje od lokalnega premera vozlišča v in je tako v nasprotju z predhodno lemo in zato graf, ki ima več kot eno povezano komponento $G - v$ z vozliščem z razdaljo več kot 1 od v, ne more biti ravnovesni graf. □

Izrek 6.4. *Če je ravnovesni graf za maksimalno razdaljo drevo, potem ima premer največ 3.*

Dokaz. Predpostavimo, da je ravnovesni graf za maksimalno razdaljo drevo in ima premer vsaj 4. Potem obstajata vozlišči v in u, ki sta na razdalji točno 4 in med njima obstaja pot dolžine 4 $v \to a \to b \to c \to u$. Ker je graf drevo je vozlišče b prerezno vozlišče z dvema povezanima komponentama $G - b$, ki vsebujeta vozlišči v in u, ki sta na razdalji več kot 1 od b in tako v protislovju z predhodno lemo. □

Lema 6.5. *Za vozlišče v z lokalnim premerom 2, zamenjava sosednje povezave ne izboljša vsote razdalj od v do vseh ostalih vocližč. Prav tako tudi svojega lokalnega premera ne more izboljšati.*

Dokaz. Naj ima graf G n vozlišč in naj ima poljubno vozlišče z lokalnim premerom 2 stopnjo $deg(v) = k$. Tako ima vozlišče v, k sosednjih vozlišč in $n-k-1$ vozlišč na razdalji 2, saj je lokalni premer v enak 2. Vsota razdalj od v do vseh ostalih vozlišč je zato $1 * k + 2 * (n - k - 1)$. Vozlišče v z menjavo poljubne povezave ne spremeni števila sosednjih vozlišč k. Zamenjavo ene izmed povezav vozlišča v lahko tretiramo kot odstranitev ene obstoječe povezave, s katero se izgubi eno sosedno vozlišče, in dodajo nove povezave, s katero se pridobi eno sosednje vozlišče. Tako ima vozlišče v ne glede na zamenjavo povezav, k sosednjih vozlišč in $n - k - 1$ vozlišč na razdalji vsaj 2, saj se razdalja do ne sosednjiega vozlišča lahko le poveča ali ostane enaka 2. Zato je vsota razdalj od v do vseh ostalih vocližč, po zamenjavah povezav v enaka ali večja od $1 * k + 2 * (n - k - 1)$. □

Posledica 6.6. *!!!!!!!!!! Vsak graf z premerom 2 ali manj je v ravnotežju glede na vsoto razdalj. In hkrati socialni optimum.*

Posledica 6.7. *Cena stabilnosti je 1.*

Izrek 6.8. *Naj bo G graf z n vozlišči in m povezavami, potem je $W(G) = n^2 - n - m$, če in samo če je premer grafa 2 ali manj.*

Dokaz. Predpostavimo, da je G graf reda n in velikosti m ter da velja $\mathrm{diam}(G) \leq 2$. Definirajmo množici $A = \{u \in V | e(u) = 1\}$ in $B = \{u \in V | e(u) = 2\}$. Potem velja $|A| + |B| = n$. Če je $u \in A$, potem je $d(u) = n - 1$ (vsota vseh razdalj od u do ostalih vozlišč), in če je $u \in B$, definiramo dve množici B_1 in B_2 kot $B_1 = \{v \in V | d(u, v) = 1\}$ in $B_2 = \{v \in V | d(u, v) = 2\}$.

Nato velja:

$$
\begin{aligned}
d(u) &= |B_1| + 2|B_2| \\
&= |B_1| + |B_2| + |B_2| \\
&= n - 1 + (n - 1 - |B_1|) \qquad \text{ker } |B_1| + |B_2| = n - 1 \\
&= 2n - 2 - |B_1| \\
&= 2n - 2 - \deg(u)
\end{aligned}
$$

In zato sledi:

$$
\begin{aligned}
W(G) &= \frac{1}{2} \sum_{u \in V} d(u) \\
&= \frac{1}{2}(\sum_{u \in A} d(u) + \sum_{u \in B} d(u)) \\
&= \frac{1}{2}((n-1)|A| + \sum_{u \in B} 2n - 2 - \deg(u)) \\
&= \frac{1}{2}((n-1)|A| + (2n-2)|B| - \sum_{u \in B} \deg(u)) \\
&= \frac{1}{2}((n-1)(|A| + |B|) + (n-1)|B| - \sum_{u \in B} \deg(u)) \\
&= \frac{1}{2}((n-1)n + (n-1)(n - |A|) - \sum_{u \in B} \deg(u)) \\
&= \frac{1}{2}((n-1)n + (n-1)n - (n-1)|A| - \sum_{u \in B} \deg(u)) \\
&= \frac{1}{2}(2(n-1)n - \sum_{u \in A} \deg(u)) - \sum_{u \in B} \deg(u)) \\
&= \frac{1}{2}(2(n-1)n - \sum_{u \in V} \deg(u)) \\
&= \frac{1}{2}(2(n-1)n - 2m) \qquad \text{ker } \sum_{u \in V} \deg(u) = 2m, u \in V \\
&= n^2 - n - m
\end{aligned}
$$

Kar dokaže, da je $W(G) = n^2 - n - m$ za grafe s premerom manjšim od 2 ($\mathrm{diam}(G) \leq 2$). V drugem delu bomo dokazali, da ta enakost ne velja za grafe z premerom večjim od 2. Za graf G ki ima premer vsaj 3 (($\mathrm{diam}(G) \geq 3$)) bomo definirali množici $A = \{u \in V | e(u) = 2\}$ in $B = \{u \in V | e(u) \geq 3\}$. Za kateri velja $|A| + |B| = n$. Če je $u \in A$, potem iz zgoraj dokazanega velja $d(u) = 2n - 2 - \deg(u)$. Za $u \in B$ pa bomo definirali sledeče 3 podmnožice:

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \{v \in V | d(u,v) = 1\},\\
B_2 &= \{v \in V | d(u,v) = 2\},\\
B_3 &= \{v \in V | d(u,v) \geq 3\}.
\end{aligned}
$$

Očitno, $|B_1| + |B_2| + |B_3| = n - 1$.

$$
\begin{aligned}
d(u) &\geq |B_1| + 2|B_2| + 3|B_3|\\
&= |B_1| + |B_2| + |B_3| + |B_2| + 2|B_3|\\
&= n - 1 + (n - 1 - |B_1|) + |B_3|\\
&= 2n - 2 - \deg(u) + |B_3|\\
&= 2n - 2 - \deg(u) + |B_3|\\
&\geq 2n - 2 - \deg(u) + 1 \qquad \text{saj } \ |B_3| \geq 1\\
&\geq 2n - 1 - \deg(u).\\
\therefore W(G) &= \frac{1}{2}\sum_{u \in V} d(u)\\
&= \frac{1}{2}(\sum_{u \in A} d(u) + \sum_{u \in B} d(u))\\
&\geq \frac{1}{2}((\sum_{u \in A}(2n - 2 - \deg(u)) + (\sum_{u \in B}(2n - 1 - \deg(u)))\\
&= \frac{1}{2}((2n-2)(|A| + |B|) - \sum_{u \in A}\deg(u)) - (\sum_{u \in B}\deg(u)) + |B|)\\
&= \frac{1}{2}((2n-2)n - (\sum_{u \in V}\deg(u)) + |B|)\\
&= \frac{1}{2}(2(n-1)n - 2m + |B|)\\
&= n(n-1) - m + \frac{1}{2}|B|\\
&\geq n(n-1) - m + 1 \qquad \text{saj } \ |B| \geq 2 \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

□

Posledica 6.9. *Za vsak graf G z n vozlišči, m povezavami in premerom večjim od 2 velja:*

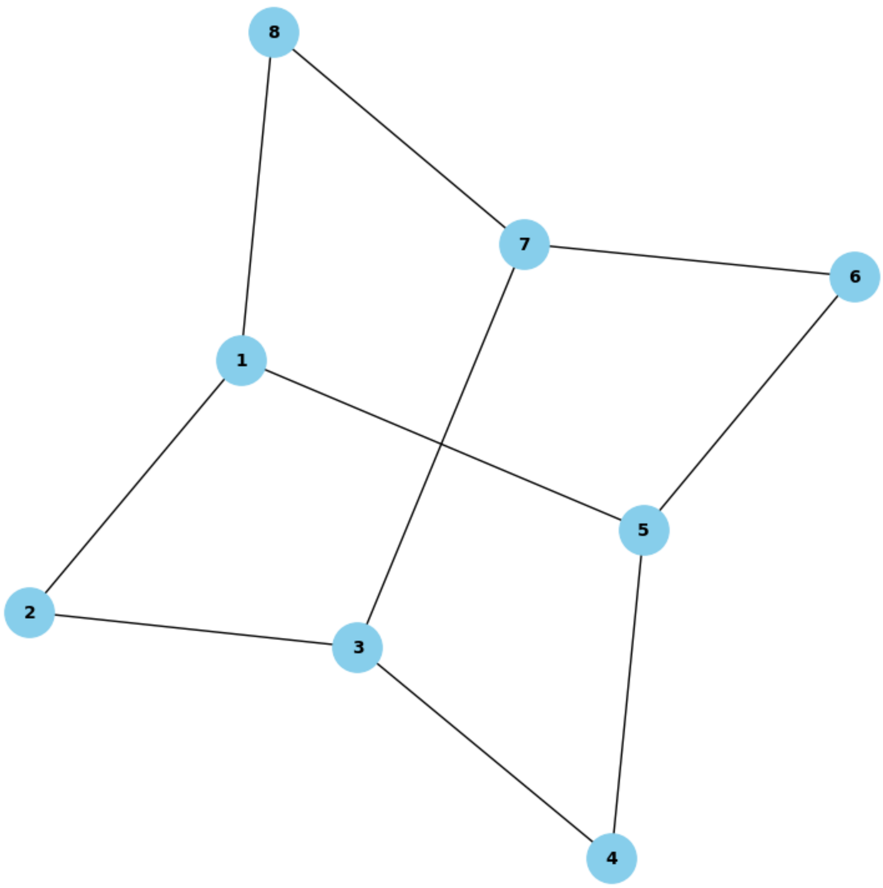
$$W(G) \geq n^2 - n - m + 1.$$

Enačaj velja kadar ima graf G natanko 2 vozlišča z lokalnim premerom 3 in vsa ostala vozlišča z lokalnim premerom 2.

Dokaz. □

Izrek 6.10. *Obstaja ravnovesni graf za skupno vsoto razdalj s premerom 3.*

Dokaz. Graf na spodnji sliki ima premer 3 in je v *ravnotežju glede na vsoto razdalj*. Točke 1, 3, 5 in 7 imajo lokalni premer 2 in tako po predhodni lemi ne morejo same zmanjšati svoje vsote razdalj do vseh ostalih vozlišč. Točke 2, 4, 6 in 8 so simetrične in celo povezavi teh točk so simetrične, zato je dovolj pogledati vse možne zamenjave le za eno izmed povezav teh točk. Točka 2 ima vsoto razdalj do vseh ostalih točk enako 1+1+2+2+2+2+3 = 13. Za preverjanje ali lahko točka 2 izboljša svoj položaj bomo poskusili z zamenjavo povezave med točkama 2 in 1 z novimi povezavami med točko 2 in ostalimi povezavami. Če povezavo 21 zamenjamo s povezavo 24 ima vozlišče 2 vsoto razdalj enako $1+1+2+2+3+3+3 = 15$. Če povezavo 21 zamenjamo s povezavo 25 ima vozlišče 2 vsoto razdalj enako $1+1+2+2+2+2+3 = 13$. Če povezavo 21 zamenjamo s povezavo 26 ima vozlišče 2 vsoto razdalj enako $1+1+2+2+2+3+3 = 14$. Če povezavo 21 zamenjamo s povezavo 27 ima vozlišče 2 vsoto razdalj enako $1+1+2+2+2+3+3 = 14$. Če povezavo 21 zamenjamo s povezavo 28 ima vozlišče 2 vsoto razdalj enako $1+1+2+2+2+3+3 = 13$. □

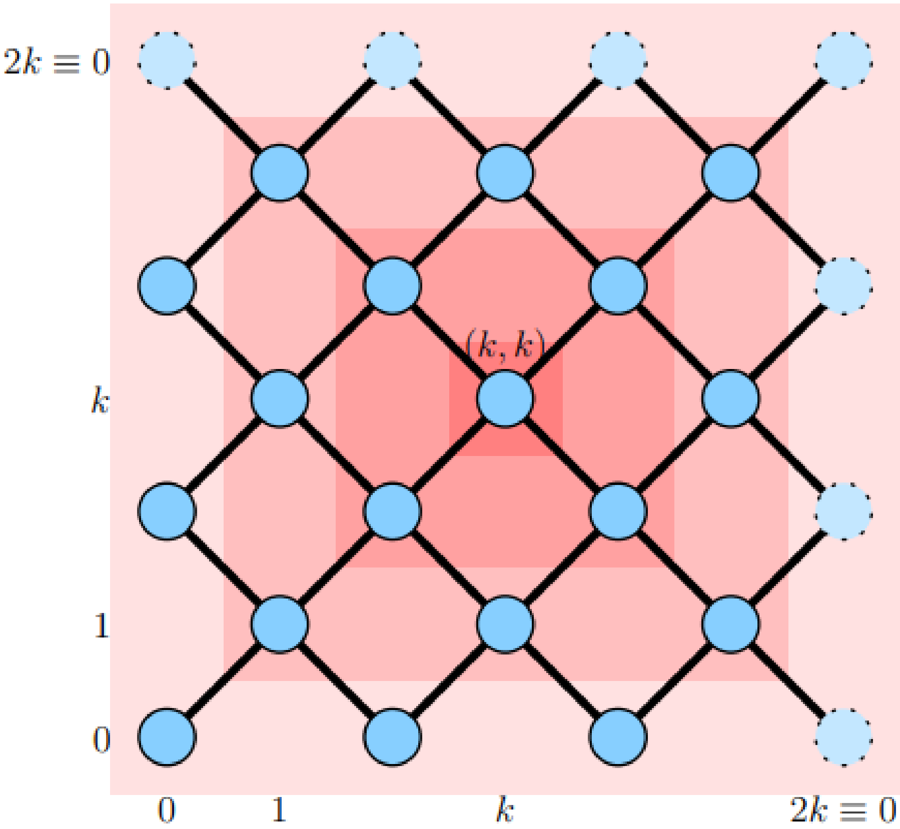


Izrek 6.11. *Vsak ravnovesni graf za skupno vsoto razdalj ima premer* $2^{O(\sqrt{\lg n})}$.

Lema 6.12. *Vsak ravnovesni graf za skupno vsoto razdalj ima premer največ* $2\lg n$ *ali za vsako vozlišče* v *obstaja povezava* xy *kjer je* $d(u,x) \leq \lg n$ *in zamenjava povezave* xy *zmanjša vsoto razdalj od* x *za največ* $2n(1+\lg n)$.

Lema 6.13. *V vsakem ravnovesnem grafu za skupno vsoto razdalj dodajanje poljubne povezave* uv *zmanjša vsoto razdalj od* u *za največ* $5n \log n$.

Izrek 6.14. *Obstaja ravnovesni graf za maksimalno razdaljo z premerom* $\Theta(\sqrt{n})$.



Izrek 6.15. *Vsak ravnovesni graf za skupno vsoto razdaljo G z $n \geq 24$ vozlišč in premerom $d > 2 \lg n$ inducira podgraf z ϵ-skoraj-enotno-razdaljo G' z n vozlišči in premerom $\Theta\left(\frac{\varepsilon d}{\lg n}\right)$ in podgraf z ϵ-enotno-razdaljo G' z n vozlišči in premerom $\Theta\left(\frac{\varepsilon d}{\lg^2 n}\right)$.*

Izrek 6.16. *Vsak ravnovesni graf za osnovne igre ustvarjanja omrežji (mogoče samo za vsoto) ima največ eno po povezavah $2-$povezano komponento.*

Dokaz. !!!!!!!! □

7 Testiranje

Socialni optimum max

n\p	Število povezav														
	n - 1	n	n + 1	n + 2	n + 3	n + 4	n + 5	n + 6	n + 7	n + 8	n + 9	n + 10	n + 11	[illegible]	[illegible]
2	(2, 'Je ravnovesje')														
3	(5, 'Je ravnovesje')	(3, 'Je ravnovesje')													
4	(7, 'Je ravnovesje')	(7, 'Ni max ravnovesje, vozlišču 1 se splača izbrisati povezavo (1, 2)')	(6, 'Ni max ravnovesje, vozlišču 2 se splača izbrisati povezavo (2, 0)')	(4, 'Je ravnovesje')											
5	(9, 'Je ravnovesje')	(9, 'Ni max ravnovesje, vozlišču 1 se splača izbrisati povezavo (1, 2)')	(9, 'Ni max ravnovesje, vozlišču 1 se splača izbrisati povezavo (1, 2)')	(8, 'Ni max ravnovesje, vozlišču 2 [illegible]	[illegible] se splača izbrisati povezavo (2, 0)')	(7, 'Ni max ravnovesje, vozlišču 2 se splača izbrisati povezavo (2, 0)')	(5, 'Je ravnovesje')								
6	(11, 'Je ravnovesje')	(11, 'Ni max ravnovesje, vozlišču 1 se splača izbrisati povezavo (1, 2)')	(11, 'Ni max ravnovesje, vozlišču 1 se splača izbrisati povezavo (1, 2)')	(11, 'Ni max ravnovesje, vozlišču 1 [illegible]	[illegible] se splača izbrisati povezavo (2, 0)')	(10, 'Ni max ravnovesje, vozlišču 2 se splača izbrisati povezavo (2, 0)')	(10, 'Ni max ravnovesje, vozlišču 2 se splača izbrisati povezavo (2, 0)')	(9, 'Ni max ravnovesje, vozlišču 3 se splača izbrisati povezavo (3, 0)')	(9, 'Ni max ravnovesje, vozlišču 3 se splača izbrisati povezavo (3, 0)')	(8, 'Ni max ravnovesje, vozlišču 4 se splača izbrisati povezavo (4, 0)')	(6, 'Je ravnovesje')				
7	(13, 'Je ravnovesje')	(13, 'Ni max ravnovesje, vozlišču 1 se splača izbrisati povezavo (1, 2)')	(13, 'Ni max ravnovesje, vozlišču 1 se splača izbrisati povezavo (1, 2)')	(13, 'Ni max ravnovesje, vozlišču 1 [illegible]	[illegible] se splača izbrisati povezavo (1, 2)')	(12, 'Ni max ravnovesje, vozlišču 2 se splača izbrisati povezavo (2, 0)')	(12, 'Ni max ravnovesje, vozlišču 2 se splača izbrisati povezavo (2, 0)')	(12, 'Ni max ravnovesje, vozlišču 2 se splača izbrisati povezavo (2, 0)')	(12, 'Ni max ravnovesje, vozlišču 2 se splača izbrisati povezavo (2, 0)')	(11, 'Ni max ravnovesje, vozlišču 3 se splača izbrisati povezavo (3, 0)')	(11, 'Ni max ravnovesje, vozlišču 3 se splača izbrisati povezavo (3, 0)')	(11, 'Ni max ravnovesje, vozlišču 3 se splača izbrisati povezavo (3, 0)')	(10, 'Ni max ravnovesje, vozlišču 4 se splača izbrisati povezavo (4, 0)')	(10, 'Ni max ravnovesje, vo[illegible]	[illegible]

Tabela 1: Your table caption goes here.

Premer grafa je največ 2. Vozlišča s premerom 2 bi si želela odstraniti nekatere povezave. Cena stabilnosti je lahko večja od 1 ampak manjša od 2. Ko gre n proti neskončno konvergira proti 2 ali 1. !!!!!! Optimalni grafi se stabilizirajo kot zvezde

n\e	**Število povezav**															
	n - 1	**n**	**n + 1**	**n + 2**	**n + 3**	**n + 4**	**n + 5**	**n + 6**	**n + 7**	**n + 8**	**n + 9**	**n + 10**	**n + 11**	**n + 12**	**n + 13**	**n + 14**
2	(2, 'Je')															
3	(5, 'Je')	(3, 'Je')														
4	(7, 'Je')	(7, 'Ni')	(6, 'Ni')	(4, 'Je')												
5	(9, 'Je')	(9, 'Ni')	(9, 'Ni')	(8, 'Ni')	(8, 'Ni')	(7, 'Ni')	(5, 'Je')									
6	(11, 'Je')	(11, 'Ni')	(11, 'Ni')	(11, 'Ni')	(10, 'Ni')	(10, 'Ni')	(10, 'Ni')	(9, 'Ni')	(9, 'Ni')	(8, 'Ni')	(6, 'Je')					
7	(13, 'Je')	(13, 'Ni')	(13, 'Ni')	(13, 'Ni')	(13, 'Ni')	(12, 'Ni')	(12, 'Ni')	(12, 'Ni')	(12, 'Ni')	(11, 'Ni')	(11, 'Ni')	(11, 'Ni')	(10, 'Ni')	(10, 'Ni')	(9, 'Ni')	(7, 'Je')

Tabela 2: Your table caption goes here.

za max.

Socialni optimum sum, (opti, premer)

n\e	**Število povezav**															
	n - 1	**n**	**n + 1**	**n + 2**	**n + 3**	**n + 4**	**n + 5**	**n + 6**	**n + 7**	**n + 8**	**n + 9**	**n + 10**	**n + 11**	**n + 12**	**n + 13**	**n + 14**
2	(2, 1)															
3	(8, 2)	(6, 1)														
4	(18, 2)	(16, 2)	(14, 2)	(12, 1)												
5	(32, 2)	(30, 2)	(28, 2)	(26, 2)	(24, 2)	(22, 2)	(20, 1)									
6	(50, 2)	(48, 2)	(46, 2)	(44, 2)	(42, 2)	(40, 2)	(38, 2)	(36, 2)	(34, 2)	(32, 2)	(30, 1)					
7	(72, 2)	(70, 2)	(68, 2)	(66, 2)	(64, 2)	(62, 2)	(60, 2)	(58, 2)	(56, 2)	(54, 2)	(52, 2)	(50, 2)	(48, 2)	(46, 2)	(44, 2)	(42, 1)

Tabela 3: Your table caption goes here.

8 ...

9 Zaključek

Slovar strokovnih izrazov