(Osnovne) Igre ustvarjanja omrežja

Kratka predstavitev diplome

Peter Milivojević

Fakulteta za matematiko in fiziko

11. januar 2024

(Osnovne) Igre ustvarjanja omrežja

Omrežje lahko ustvarimo na več načinov in pri različnih optimizacijskih pogojih. Omrežje lahko ustvari centralna avtoriteta in tako doseže socialni optimum ali pa več sebičnih igralcev, kjer vsak poskuša doseči svoj sebični optimum v dani situaciji. V diplomski nalogi se bom pretežno ukvarjal z dvema verzijama osnovnih iger ustvarjanja omrežja:

- Maksimalna oddaljenos
- Vsota oddaljenosti oz. povprečna oddaljenost

Uporabne definicije

Definicija

$Graf$ je urejen par G = (V, E), kjer je V neprazna množica točk grafa G in E množica povezav grafa G, pričemer je vsaka povezava par točk.

Definicija

$Graf$ G je povezan, če za vsak par vocliščč $u, v \in V(G)$ obstaja pot od u do v.

Uporabne definicije

Definicija

Naj bo G povezan graf in $v \in V(G)$. Stopnja točke v je enaka vsoti števila povezav, ki imajo to točko za krajišče (in dvojnega števila zank v tej točki). Označimo jo z $deg(v)$.

Definicija

Naj bo G povezan graf in $u, v \in V(G)$. Razdalja $d(u, v)$ je dolžina najkrajše poti med vozliščema u in v (t.j. razdalja med u in v) v grafu G.

Uporabne definicije

Definicija

Naj bo G povezan graf. Premer grafa G je definiran kot $diam(G) = \max_{u,v \in V(G)} d(u,v)$, kjer je $d(u,v)$ razdalja med vozliščema u in v v grafu G.

Definicija

Naj bo G povezan graf. Lokalni premer točke v grafa G je definiran kot $diam(G) = \max_{u \in V(G)} d(u,v)$, kjer je $d(u,v)$ razdalja med vozliščema u in v v grafu G.

Definicija

Povezan graf G ima prerezno vozlišče v, če graf $G - v$ ni povezan.

Uporabne definicije

Definicija

Povezanost po povezavah $\lambda(G)$ povezanega grafa G je najmanjše število povezav, z odstranitvijo katerih postane graf G nepovezan. Če je $\lambda(G) \geq k$, je graf G po povezavah k-povezan.

Definicija

Naj bo G povezan graf z n vozlišči. Weinerjev indeks $W = W(G)$ je definiran kot vsota vseh razdalj med vozlišči.

$$W(G) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} d_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij}$$

kjer d_{ij} označuje dolžino najkrajše poti med vozliščem i in j.

Definiciji ravnovesja

Definicija

Graf je v ravnotežju glede na vsoto razdalj, če za vsako povezavo vw *in za vsako vozlišče* w' *zamenjava povezave* vw *z povezavo* vw' *ne zmanjša celotne vsote razdalj od vozlišča* v *do vseh ostalih vozlišč.*

Definicija

Graf je v ravnotežju glede na maksimalno razdaljo, če za vsako povezavo vw *in za vsako vozlišče* w' *zamenjava povezave* vw *z povezavo* vw' *ne zmanjša lokalnega premera vozlišča* v*. Nadalje odstranitev povezave* vw *poveča lokalni premer vozlišča* v*.*

Kritičnost in stabilnost

Definicija

Naj bo G povezan graf. Graf G je kritičen za odstranitev povezave, če odstranitev katere koli povezave $uv \in E(G)$ poveča lokalni premer vozlišča v in vozlišča u.

Definicija

Naj bo G povezan graf. Graf G je stabilen za dodajanje povezave, če dodajanje katere koli povezave $uv \in E(G)$ ne zmanjša lokalnega premera vozlišča v in vozlišča u.

Upoštevajte igro $G = (N, S, u)$, ki jo določa množica igralcev N, strategijski nabori S_i za vsakega igralca in uporabnosti $u_i : S \to \mathbb{R}$, kjer je $S = S_1 \times \ldots \times S_N$. To imenujemo tudi množica izidov. Lahko definiramo merilo učinkovitosti vsakega izida, ki mu pravimo funkcija blaginje Welf(s):$s \to \mathbb{R}$. Naravni kandidati vključujejo vsoto uporabnosti igralcev (utilitarni cilj)$Welf(s) = \sum_{i \in N} u_i(s)$, minimalno uporabnost (cilj pravičnosti ali egalitarni cilj)$Welf(s) = \min_{i \in N} u_i(s)$. Podmnožico Equil$C_s$ lahko definiramo kot množico strategij v ravnovesju. Cena anarhije je potem definirana kot razmerje med optimalno ′centralizirano′ rešitvijo in najslabšim ′ravnovesjem′:

Ceni anarhije in stabilnosti

V delu se bomo ukvarjalise tudi z ceno anarhije (PoA) in ceno stabilnosti (PoS). Ceni anarhije in stabilnosti merita, kako se učinkovitost sistema poslabša zaradi sebičnega vedenja njegovih agentov. Cena anarhije je razmerje med vrednostjo/ceno, iz socialnega vidika (skupnega vidika vseh igralcev), najslabšega ravnovesja in socialno ceno optimalnega izida Cena stabilnosti igre pa je razmerje med najboljšo socialno ceno ravnovesja in socialno ceno optimalnega izida. V našem primeru sta definirani kot:

Definicija

$$PoA = \frac{\textit{Cena najslabšega ravnovesja}}{\textit{Cena optimalne postavitve}} = \frac{\max_{s \in Equil} Cost(s)}{\min_{s \in S} Cost(s)} = \frac{\max_{s \in Equil} Cost(s)}{\min_{s \in S} Cost(s)}$$

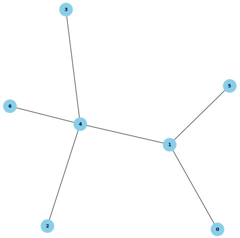
Definicija

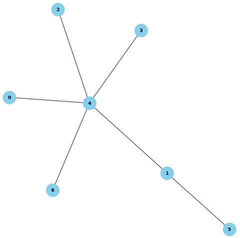
$$PoA \quad \frac{\textit{Cena najboljšega ravnovesja}}{} \quad \frac{\min_{s \in Equil} Cost(s)}{}$$

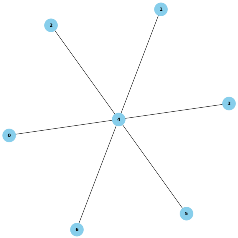
Drevesa: skupna vsota razdalj

Izrek

Če je ravnovesni graf za skupno vsoto razdalj v preprosti igri ustvarjanja omrežja drevo, potem ima premer največ 2 in je kot tak zvezda.







Drevesa: maksimalna razdalja

Lema

V vsakem ravnovesnem grafu igre maksimalne razdalje se lokalni premer za katera koli 2 *poljubna vozlišča razlikuje največ za* 1.

Lema

Če ima ravnovesni graf za maksimalno razdaljo prerezno vozlišče, potem ima lahko samo ena izmed povezanih komponent $G - v$ *vozlišče z razdaljo več kot* 1 *od* v.

Izrek

Če je ravnovesni graf za maksimalno razdaljo drevo, potem ima premer največ 3.

Skupna vsota razdalj: spodnje meje

Lema

Za vozlišče v z lokalnim premerom 2, zamenjava sosednje povezave ne izboljša vsote razdalj od v do vseh ostalih vocilšč. Prav tako tudi svojega lokalnega premera ne more izboljšati.

Posledica

Vsak graf z premerom 2 ali manj je v ravnotežju glede na vsoto razdalj. In hkrati socialni optimum, zato je vena stabilnosti 1.

Skupna vsota razdalj: spodnje meje

Izrek

Naj bo G graf z n vozlišči in m povezavami, potem je $W(G) = n^2 - n - m$, če in samo če je premer grafa 2 ali manj.

Posledica

Za vsak graf G z n vozlišči, m povezavami in premerom večjim od 2 velja:

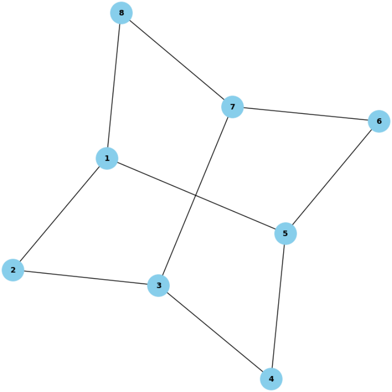
$$W(G) \geq n^2 - n - m + 1.$$

Enačaj velja kadar ima graf G natanko 2 vozlišča z lokalnim premerom 3 in vsa ostala vozlišča z lokalnim premerom 2.

Skupna vsota razdalj: spodnje meje

Izrek

Obstaja ravnovesni graf za skupno vsoto razdalj s premerom 3.



Skupna vsota razdalj: zgornja meja $2^{O(\sqrt{\lg n})}$

Izrek

Vsak ravnovesni graf za skupno vsoto razdalj ima premer $2^{O(\sqrt{\lg n})}$.

Lema

Vsak ravnovesni graf za skupno vsoto razdalj ima premer največ $2 \lg n$ *ali za vsako vozlišče* v *obstaja povezava* xy *kjer je* $d(u, x) \leq \lg n$ *in zamenjava povezave* xy *zmanjša vsoto razdalj od* x *za največ* $2n(1 + \lg n)$.

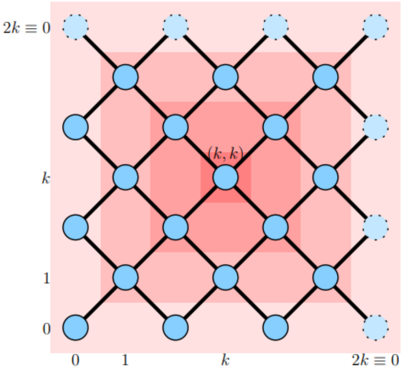
Lema

V vsakem ravnovesnem grafu za skupno vsoto razdalj dodajanje poljubne povezave uv *zmanjša vsoto razdalj od* u *za največ* $5n \log n$.

Maksimalna razdalja

Izrek

Obstaja ravnovesni graf za maksimalno razdaljo z premerom $\Theta(\sqrt{n})$.



Povezava z grafi z enotsko razdaljo

Izrek

Vsak ravnovesni graf za skupno vsoto razdaljo G z $n \geq 24$ vozlišč in premerom $d > 2\lg n$ inducira podgraf z ϵ-skoraj-enotno-razdaljo G' z n vozlišči in premerom $\Theta\left(\frac{\varepsilon d}{\lg n}\right)$ in podgraf z ϵ-enotno-razdaljo G' z n vozlišči in premerom $\Theta\left(\frac{\varepsilon d}{\lg^2 n}\right)$.

Domneva

Razdaljno skoraj enotni grafi imajo premer $O(\lg n)$.