Univerza na Primorskem

Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije

Matej Čeč

Povezanost grafov

Zaključna naloga

Koper, avgust 2010

Mentor: doc. dr. Martin Milanič

ZAHVALA

Za strokovno vodenje, pomoč in nasvete pri izdelavi zaključne naloge se zahvaljujem mentorju doc. dr. Martinu Milaniču.

Kazalo

1 Uvod **5**

2 Osnovne definicije in pojmi **7**
2.1 Povezanost po povezavah 8
2.2 Povezanost po točkah 8
2.3 Prerezi in minimalni neprazni prerezi 11

3 2-povezani grafi in podgrafi **12**

4 3-povezani grafi **19**
4.1 3-povezani grafi in polni graf K_4 19
4.2 Nekaj malega algebre 20

5 Mengerjev izrek **25**
5.1 Nekaj posledic Mengerjevega izreka 29

6 Maderjev izrek **31**

7 Zaključek **36**

Slike

1.1 Primer cestnega omrežja, predstavljenega kot graf. 5

2.1 Primer 3-povezanega grafa po povezavah. 8
2.2 Primer grafa s prerezno točko. 9
2.3 Primer 3-povezanega grafa po točkah. 9

3.1 Primer grafa in njegovega bločnega grafa. 13
3.2 Primer konstrukcije 2-povezanega grafa. 14
3.3 Primer množice X, ki loči točki a in b. 15
3.4 Primer množic X in X', ki ločita točki a in b. 16
3.5 Primer poti P, Q in P' v dokazu izreka 3.10. 17

4.1 Primer točk, ki ločijo graf G. 19
4.2 Primer komponent C_1 in C_2 grafa G. 20
4.3 Primer ene izmed štirih možnosti, ko $e \notin C$. 22
4.4 Iskanje osnovnega cikla C_i. 23

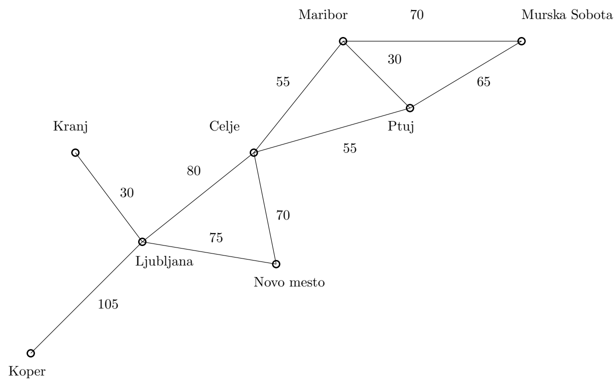
5.1 Primer grafa s podmnožicama točk A in B. 25
5.2 Primer alternirajočega sprehoda W. 27
5.3 Primer alternirajočih sprehodov v dokazu leme 5.6. 28

6.1 Primer prirejanja. 31
6.2 Primer dveh disjunktnih $\mathcal{S}$-poti. 34

Poglavje 1

Uvod

Osrednja tema zaključne naloge je povezanost grafov. Pri tem se nam postavi vprašanje, koliko povezav oziroma točk moramo odstraniti iz danega povezanega grafa, da dobimo nepovezan graf. Takšna in podobna vprašanja si zastavljajo inžinerji pri načrtovanju cestnih, telekomunikacijskih in drugih omrežij. Predvsem pri telekomunikaciji je pomembno, da omrežje deluje, tudi če pride do preobremenitve nekaterih linij ali postaj. V grafu si kot postajo predstavljamo točko, kot linijo pa povezavo.



Slika 1.1: Primer cestnega omrežja, predstavljenega kot graf.

V grafih poznamo dve vrsti povezanosti, in sicer povezanost po točkah in povezanost po povezavah. V nalogi bo izpostavljena predvsem povezanost grafa po točkah, razen če bo drugače navedeno.

V drugem poglavju bo podanih nekaj osnovnih definicij in izrekov o povezanosti grafov, prerezih in poteh, ki jih bomo potrebovali skozi nalogo.
V tretjem poglavju bo govora o blokih v grafih, podana bo definicija bločnega grafa. Predstavljeni bodo 2-povezani grafi, njihovi podgrafi in podan bo tudi najpomembnejši izrek v tem poglavju, ki nam odgovori na vprašanje, kako lahko

konstruiramo vsak 2-povezan graf.
Četrto poglavje se nanaša na 3-povezane grafe, ogledali si bomo povezavo med 3-povezanimi grafi in polnim grafom na štirih točkah K_4. V istem poglavju bo tudi govora o prostoru ciklov 3-povezanih grafov.
Eden najpomembnejših izrekov v teoriji grafov, t.i. Mengerjev izrek, ki ga lahko dokažemo bodisi direktno z indukcijo po številu povezav v grafu ali pa s pomočjo drugih znanih izrekov, bo predstavljen v petem poglavju.
Naloga se zaključi v šestem poglavju z Maderjevim izrekom, ki nam pove, kolikšno je največje število neodvisnih poti, ki se začnejo in končajo v nekem podgrafu danega grafa.

Poglavje 2

Osnovne definicije in pojmi

V tem poglavju so predstavljene osnovne definicije in pojmi, ki se bodo uporabljali v nadaljevanju naloge. Omenili bomo povezanost v grafu, prereze in poti v grafu. Poznamo dve vrsti povezanosti, povezanost po povezavah in povezanost po točkah. V nadaljevanju naloge bomo, če ne bo drugače omenjeno, besedo povezanost uporabljali za povezanost grafa po točkah. Preučevali bomo končne neusmerjene grafe brez zank in vzporednih povezav. Manjkajoče definicije lahko bralec poišče v prvem in tretjem poglavju knjige [2] in v devetem poglavju knjige [13].

Če ne bo drugače omenjeno, bomo označevali graf z $G = (V, E)$, pri čemer je $V = V(G)$ množica točk grafa G in $E = E(G)$ množica povezav grafa G. Za naravna števila $\mathbb{N}$ bomo vzeli množico števil $\{0, 1, 2, \dots\}$.

Vse definicije, izreki, leme in trditve iz tega poglavja so vzete iz prvega poglavja knjige [2], razen če bo drugače označeno.

Definicija 2.1. *Pot je neprazen graf oblike $P = (V, E)$, kjer je $V = \{x_0, \dots, x_k\}$ množica točk in $E = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\}$ množica povezav, x_i so paroma različni, $i, k \in \mathbb{N}$ in $i \leq k$. Pišemo tudi $P = x_0 \dots x_k$.*
Če je $k \geq 3$ in poti $P = (V, E)$ dodamo še povezavo x_kx_0, dobimo cikel $C = (V, E \cup \{x_kx_0\})$.

Definicija 2.2. *Naj bo $G = (V, E)$ graf in naj bosta A, B množici točk. Rečemo, da je pot $P = x_0 \dots x_k$ $(k \in \mathbb{N})$ A–B pot, če velja $V(P) \cap A = \{x_0\}$ in $V(P) \cap B = \{x_k\}$.*
Poti $P_1, \dots, P_n$ so neodvisne, če velja $V(\mathring{P}_i) \cap V(\mathring{P}_j) = \emptyset$, za vsak $i \neq j$, kjer so $i, j, n \in \mathbb{N}$ in $i, j \leq n$ in kjer za pot $P = x_0 \dots x_k$ označimo $\mathring{P} = x_1 \dots x_{k-1}$.

Definicija 2.3. *Naj bo H graf. Pot $P = x_0 \dots x_k$ $(k \in \mathbb{N})$ imenujemo H-pot, če je P netrivialna (tj. $k \geq 1$) in ima v H samo končni točki x_0 in x_k.*

Neprazen graf G je povezan, če v njem obstaja pot med poljubnima dvema točkama.

Definicija 2.4. *Naj bosta $G_1 = (V_1, E_1)$ in $G_2 = (V_2, E_2)$ grafa. Unijo grafov G_1 in G_2 označimo z $G_1 \cup G_2$ in je enaka $(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.*

Definicija 2.5. *Naj bosta $G = (V, E)$ in $G' = (V', E')$ grafa. Če velja $V' \subseteq V$ in $E' \subseteq E$, potem pravimo, da je graf G' podgraf grafa G.*

Definicija 2.6. *Naj bo $G = (V, E)$ graf in $U \subseteq V$. Z $G[U]$ označujemo graf na množici točk U, katerega povezave so natanko povezave grafa G s krajišči v množici U ($G[U]$ je podgraf grafa G, induciran z množico U).*

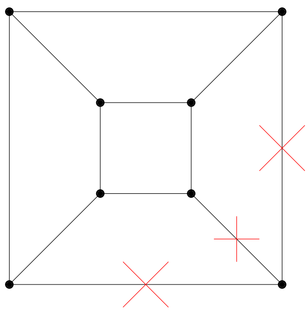
Definicija 2.7. *Naj bo $G = (V, E)$ graf in $U \subseteq V$. Z $G - U$ označujemo graf $G[V \backslash U]$.*

2.1 Povezanost po povezavah

Pri povezanosti po povezavah se vprašamo, koliko povezav moramo odstraniti iz danega grafa, da dobimo nepovezan graf.

Definicija 2.8 ([13])**.** *Povezanost po povezavah $\lambda(G)$ povezanega grafa G je najmanjše število povezav, z odstranitvijo katerih postane graf G nepovezan. Če je $\lambda(G) \geq k$, je graf G po povezavah k-povezan.*

Na naslednji sliki je primer kocke Q_3, množica prečrtanih povezav pokaže, da je $\lambda(Q_3) \leq 3$.



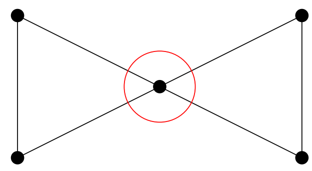
Slika 2.1: Primer 3-povezanega grafa po povezavah.

2.2 Povezanost po točkah

Povezanost po točkah si predstavljamo tako, da pogledamo število točk, ki jih moramo iz danega grafa odstraniti, da dobimo nepovezan graf.

Definicija 2.9. *Naj bo $G = (V, E)$ graf. Maksimalen povezan podgraf grafa G imenujemo komponenta grafa G.*

Definicija 2.10. *Prerezna točka v povezanem grafu G je točka, z odstranitvijo katere postane G nepovezan. Za nepovezane grafe pa je prerezna točka, točka, z odstranitvijo katere se v grafu poveča število komponent.*



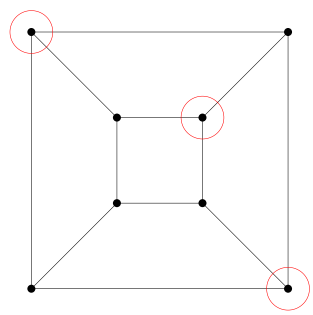
Slika 2.2: Primer grafa s prerezno točko.

Definicija 2.11. *Graf $G = (V, E)$ je k-povezan, kjer je $k \in \mathbb{N}$, če je $|V| > k$ in je $G - X$ povezan za vsako množico $X \subseteq V$, za katero je $|X| < k$.*
Z drugimi besedami, nobeni dve točki grafa G nista ločeni z manj kot k ostalimi točkami.

Vsak graf je 0-povezan. 1-povezani grafi so natanko netrivialni povezani grafi.

Definicija 2.12. *Največje tako število k, da je graf G k-povezan, označimo s $\kappa(G)$ in mu rečemo povezanost grafa G.*

Na sliki je kocka, ki je tudi 3-povezan graf po točkah. Če odstranimo obkrožene točke, postane graf nepovezan. To pomeni, da je $\kappa(Q_3) \leq 3$. Lahko se tudi prepričamo, da je $\kappa(Q_3) \geq 3$, saj z odstranitvijo poljubnih dveh točk grafa ne moremo narediti nepovezanega.



Slika 2.3: Primer 3-povezanega grafa po točkah.

Trditev 2.13. *Točke $V(G)$ povezanega grafa G lahko vedno označimo z $v_1, \ldots, v_n$, tako da je graf $G_i := G[v_1, \ldots, v_i]$ povezan za vsak i.*

Dokaz. Brez škode za splošnost lahko označimo katerokoli točko z v_1 in induktivno predpostavimo, da so točke $v_1, \dots, v_i$ izbrane za nek $i < |V(G)|$. Sedaj si izberimo točko $v \in G - V(G_i)$. G je povezan graf, iz tega sledi, da obstaja pot P v grafu G od točke v_1 do točke v.
Izberimo točko v_{i+1} tako, da je v_{i+1} prva točka poti P v grafu $G - G_i$. Potem ima v_{i+1} soseda v grafu G_i.
Povezanost vsakega grafa G_i sledi z indukcijo po i. □

Definicija 2.14. *Naj bo $G = (V, E)$ graf in $e \in E$. Z $G - e$ označujemo graf $G - \{e\}$.*

Definicija 2.15. *Naj bo $G = (V, E)$ graf. Z $d_G(v)$ označujemo stopnjo točke v grafa G, $N_G(v)$ pa je množica sosedov točke v grafa G, tj. $N_G(v) = \{u \mid u \in V(G), uv \in E(G)\}$. Torej velja $d_G(v) = |N_G(v)|$.*

Izrek 2.16 ([12])**.** *Za katerikoli povezani graf G velja:*

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G),$$

kjer je $\delta(G)$ najmanjša stopnja točke grafa G.

Dokaz. Vzemimo točko $v \in G$. Če ima v stopnjo $\delta(G)$ in če odstranimo vse povezave, na katerih leži v, potem G razpade na vsaj dve povezani komponenti. Sledi, da povezanost po povezavah $\lambda(G)$ ne more biti večja od minimalne stopnje točke $\delta(G)$. Torej dobimo, da $\lambda(G) \leq \delta(G)$.
Sedaj pokažimo še, da velja $\kappa(G) \leq \lambda(G)$.
Z F označimo tako minimalno podmnožico množice povezav E, da je graf $G - F$ nepovezan.
Pokažimo, da velja $\kappa(G) \leq |F|$. Najprej predpostavimo, da ima graf G točko v, ki ne leži na nobeni povezavi iz množice F.
Naj bo C komponenta grafa $G - F$, ki vsebuje točko v. Potem točke komponente C, ki so incidenčne povezavam v F, ločijo točko v od grafa $G - C$. Ker nima nobena povezava v F obeh koncev v C (to sledi po minimalnosti F), potem sledi, da obstaja množica točk W z $|W| \leq |F|$, za katero je $G - W$ nepovezan. Posledično je $\kappa(G) \leq |F|$.
Predpostavimo, da je vsaka točka incidenčna z neko povezavo v F. Naj bo v_1 katerakoli točka in naj bo C komponenta grafa $G - F$, ki vsebuje točko v_1. Potem sosedje w, točke v_1 s povezavami $v_1 w \notin F$ (to so sosedje točke v v grafu $G - F$), ležijo v C in so incidenčni z disjunktnimi povezavami v F. Iz teh dejstev dobimo, da velja $d_G(v) \leq |F|$. Ker $N_G(v)$ loči v_1 od vseh točk v grafu G, dobimo da je $\kappa(G) \leq |F|$, razen v primeru, da velja $\{v_1\} \cup N_G(v_1) = V$. Vendar, ker je bila v_1 poljubna točka, lahko predpostavimo, da je G poln graf, in dobimo $\kappa(G) = \lambda(G) = |V(G)| - 1$. □

2.3 Prerezi in minimalni neprazni prerezi

Definicija 2.17. *Naj bo $G = (V, E)$ graf in X in Y podmnožici množice V. Naj bo $x \in X$, $y \in Y$ in če obstaja povezava $xy \in E$, potem pravimo taki povezavi tudi X–Y povezava.*
Množico vseh X–Y povezav v množici E označimo z $E(X, Y)$.

Definicija 2.18. *Naj bo $G = (V, E)$ graf in $\{V_1, V_2\}$ particija množice V. Potem množici $E(V_1, V_2)$ vseh povezav grafa G, ki sekajo to particijo, rečemo prerez.*
Če je $V_1 = \{v\}$, potem tak prerez označimo z $E(v)$.

Definicija 2.19. *Naj bo $G = (V, E)$ graf. Če so množice $A, B \subseteq V$ in $X \subseteq V \cup E$ take, da ima vsaka A–B pot v grafu G točko ali povezavo iz X, potem pravimo, da X loči množici A in B v grafu G.*
V splošnem pravimo, da X loči G, če je graf $G - X$ nepovezan, tj. X loči v G dve točki, ki nista v X.
Taki množici X pravimo tudi prerezna množica.

Lema 2.20. *Vsak prerez je enak disjunktni uniji minimalnih nepraznih prerezov.*

Dokaz. Poglejmo povezan graf $H = (V, E)$, povezan podgraf $C \subseteq H$ in komponento D iz $H - C$. Potem je $H - D$ tudi povezan in povezave med D in $H - D$ tvorijo minimalen prerez.
Glede na to, kako smo si izbrali D, je ta prerez natanko množica $E(C, D)$ vseh C–D povezav v H.
Naj bo dan prerez v grafu $G = (V, E)$, s particijo $\{V_1, V_2\}$ množice V. Poglejmo komponento C iz $G[V_1]$ in naj bo H komponenta grafa G, ki vsebuje C.
Potem je $E(C, V_2) = E(C, H - C)$ disjunktna unija množice povezav $E(C, D)$ nad vsemi komponentami D iz $H - C$. Od prej vemo, da so te množice minimalni prerezi v H in zato so neprazni minimalni prerezi v G.
Disjunktna unija vseh množic povezav $E(C, V_2)$ nad vsemi komponentami C iz $G[V_1]$, je natanko prerez $E(V_1, V_2)$. □

Poglavje zaključimo z definicijo, ki bo uporabljena v naslednjih poglavjih.

Definicija 2.21. *Naj bo $G = (V, E)$ graf in $e \in E$. Z G/e označujemo graf, ki ga dobimo iz grafa G tako, da namesto povezave $e = xy$, kjer sta $x, y \in V$, dodamo točko v_{xy}, kjer odstranimo točki x in y in točka v_{xy} postane sosednja vsem točkam, ki so bile v grafu G sosednje bodisi z x ali z y.*

Poglavje 3

2-povezani grafi in podgrafi

Poglavje se prične z bločnimi grafi. Videli bomo, kako lahko konstruiramo vsak 2-povezan graf, in predstavljenih bo še nekaj trditev o 2-povezanih grafih.
Vse definicije, leme, izreki in trditve iz tega poglavja so vzete iz prvega in tretjega poglavja knjige [2], razen če bo drugače omenjeno.

Definicija 3.1. *Naj bo G graf. Povezavi e v grafu G pravimo most, če z odstranitvijo te povezave dobimo graf z več komponentami, kot jih je v grafu G.*

Definicija 3.2. *Naj bo G graf. Točki v grafu G, skozi katero ne gre nobena povezava, pravimo izolirana točka.*

Definicija 3.3. *Blok grafa je maksimalen povezan podgraf brez prereznih točk.*

Ker je prerezna točka taka točka, ki povzroči nepovezanost grafa ob njeni odstranitvi, to pomeni, da je vsak blok grafa ali maksimalen 2-povezan podgraf, ali most, ali pa izolirana točka. In tudi vsak tak podgraf je blok. Po maksimalnosti blokov se različni bloki grafa prekrivajo v največ eni točki, tj. v prerezni točki grafa. Vsaka povezava grafa torej leži v enolično določenem bloku in vsak graf je unija svojih blokov.
Cikli in minimalni prerezi grafa so omejeni na en sam blok:

Lema 3.4. *Naj bo G graf. Potem velja:*

1. *Cikli grafa G so natanko cikli njegovih blokov.*

2. *Minimalni (neprazni) prerezi grafa G so natanko minimalni prerezi blokov v grafu G.*

Dokaz.

1. Vsak cikel v grafu G je povezan podgraf brez prereznih točk in leži v maksimalnem takem podgrafu. Po definiciji 3.3 je to blok grafa G.

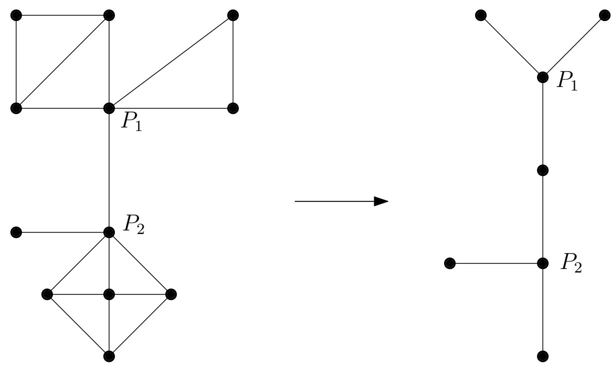
2. Dokaz druge trditve razdelimo na dva dela:

(a) Naj bo B blok v grafu $G = (V, E)$ in naj bo $F \subseteq E$ minimalen prerez v bloku B. Ker je B blok, vemo da graf G ne vsebuje B-poti, torej je F tudi minimalen prerez v grafu G.

(b) Naj bo $F \subseteq E$ minimalen prerez v grafu $G = (V, E)$. Če vse povezave $e_i \in F$ ležijo v istem bloku B grafa G, potem vemo da je F tudi minimalen prerez v bloku B.
Sedaj poglejmo, če se lahko zgodi, da povezave $e_i \in F$ ne ležijo v istem bloku grafa G. Recimo, da $e_1 \in F$ leži v B_1 in $e_2 \in F$ leži v B_2, kjer sta $e_1 \neq e_2$ in $B_1 \neq B_2$ bloka grafa G. Ker je F minimalen prerez grafa G, potem mora vsebovati minimalen prerez vsaj enega bloka, sicer F ne bi bil prerez grafa G. Sedaj pa smo v protislovju z minimalnostjo množice F, saj smo F sestavili iz vsaj enega minimalnega prereza nekega bloka in še vsaj ene povezave v nekem drugem bloku.
Torej velja, da je F tudi minimalen prerez v nekem bloku.

$\square$

Definicija 3.5. *Naj bo G graf, A množica prereznih točk grafa G in naj bo $\mathcal{B}$ množica blokov grafa G. Bločni graf grafa G je dvodelni graf na $A \cup \mathcal{B}$, ki ga sestavljajo povezave aB, kjer je $a \in A$ in $B \in \mathcal{B}$.*



Slika 3.1: Primer grafa in njegovega bločnega grafa.

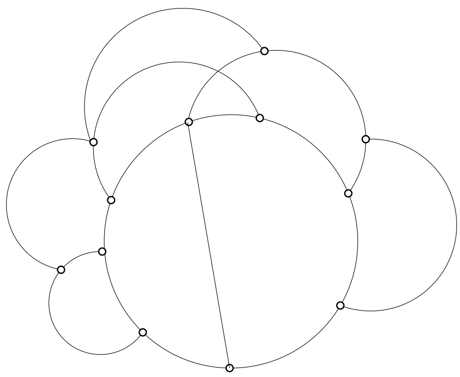
Trditev 3.6. *Bločni graf povezanega grafa G je drevo.*

Dokaz. Za dokaz zgornje trditve moramo preveriti, da bločni graf povezanega grafa nima ciklov in da je povezan. Vemo, da se bloki grafa G sekajo v največ eni točki, ki je prerezna točka grafa G. Po lemi 3.4 je vsak cikel grafa G zajet v nekem bloku in iz tega dobimo, da v bločnem grafu ni ciklov. Dokažimo to s protislovjem.
Recimo, da obstaja cikel v bločnem grafu grafa G. Potem imamo v grafu G cikel, ki gre skozi več blokov. Iz tega sledi, da gre tak cikel skozi prerezne točke

grafa G, saj se bloki grafa sekajo le v prereznih točkah. Označimo ta cikel s $C = a_1P_1a_2P_2 \ldots a_nP_na_1$, kjer je $n \in \mathbb{N}$ in $n \geq 3$, a_i so prerezne točke v grafu G za $i \in \{1, \ldots, n\}$, s P_i pa označimo a_i–a_{i+1} pot v i-tem bloku grafa G. Torej gre C skozi vsaj tri bloke. S tem dobimo protislovje, saj so cikli grafa omejeni na en sam blok.
Dokažimo še povezanost bločnega grafa. Naj bosta B_i in B_j poljubna bloka v grafu G in $B_i \neq B_j$. Vzemimo poljubno točko v bloku B_i, ki ni prerezna točka grafa G in poljubno točko v bloku B_j, ki ni prerezna točka grafa G. Ker je G povezan, vemo, da obstaja pot P med našima izbranima točkama v grafu G. Pot P je pot med dvema različnima blokoma in obvezno vsebuje vsaj eno prerezno točko grafa G. V bločnem grafu grafa G pa za točke vzamemo prerezne točke in bloke grafa G. Torej, ker po prejšnjem razmisleku vemo, da obstaja pot med poljubnima blokoma v grafu G, sledi, da je bločni graf povezanega grafa povezan.
Dokazali smo torej, da bločni graf nima ciklov in da je povezan. Iz tega dobimo, da je bločni graf povezanega grafa drevo. □

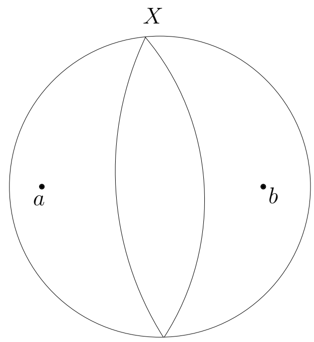
Trditev 3.7 ([12])**.** *Graf je 2-povezan natanko tedaj, ko ga lahko konstruiramo iz nekega cikla z zaporednim dodajanjem poti, ki imajo končne točke v že konstruiranem grafu.*

Dokaz. Dokaz v levo stran je očiten, saj je jasno, da je vsak graf, ki ga konstruiramo na opisan način, 2-povezan.
Dokažimo še implikacijo v desno stran. Naj bo G 2-povezan graf. Potem G vsebuje cikel in torej ima maksimalen podgraf H, zgrajen, kot je zgoraj opisano. Ker vsaka povezava $xy \in E(G) \setminus E(H)$ z $x, y \in H$ definira H-pot, je H induciran podgraf grafa G. Torej, če velja $H \neq G$, potem zaradi povezanosti grafa G obstaja povezava vw, kjer je $v \in V(G - H)$ in $w \in V(H)$. Ker je G 2-povezan, $G - w$ vsebuje v–H pot P. Potem je wvP H-pot v G in $H \cup wvP$ je graf, ki je podgraf v G in je večji kot H. To pa je v protislovju z maksimalnostjo H. □



Slika 3.2: Primer konstrukcije 2-povezanega grafa.

Trditev 3.8. *Naj bo G graf, $a, b \in V(G)$ in $X \subseteq V(G) \backslash \{a, b\}$ množica točk, ki loči a od b. Potem velja:*
X je minimalna množica točk, ki loči a od b natanko tedaj, ko ima vsaka točka v množici X soseda v komponenti C_a grafa $G - V(X)$, ki vsebuje a, in soseda v komponenti C_b grafa $G - V(X)$, ki vsebuje b.

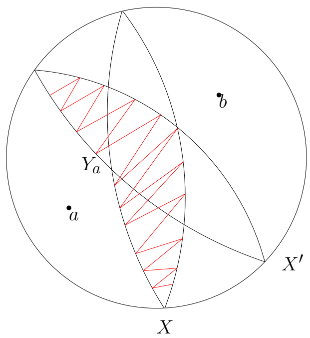


Slika 3.3: Primer množice X, ki loči točki a in b.

Dokaz. Najprej opazimo, da velja: če je X minimalen, potem za vsak $x \in X$ obstaja a–b pot P, da velja $V(P) \cap X = \{x\}$ (sicer bi bil že $X \setminus \{x\}$ prerez).
Če za vsak $x \in X$ obstaja a–b pot P, tako da velja $V(P) \cap X = \{x\}$, potem je X minimalen prerez. Dokažimo najprej prejšnjo trditev. Predpostavimo, da X ni minimalen, potem obstaja nek $x \in X$, tako da je $X \setminus \{x\}$ prerez. Potem za vsako a–b pot P obstaja nek $u \in X \setminus \{x\}$, tako da velja $u \in V(P)$. Torej velja $V(P) \cap X \neq \{x\}$.
Združimo zgornji trditvi in dobimo: X je minimalen natanko tedaj, ko za vsak $x \in X$ obstaja a–b pot P, da velja $V(P) \cap X = \{x\}$.
Dokažimo trditev najprej v desno smer.
Predpostavimo, da je X minimalna množica, ki loči a od b. To pomeni, da za vsak $x \in X$ obstaja a–b pot P, da je $V(P) \cap X = \{x\}$. Iz tega pa dobimo, da morajo biti točke iz X sosednje nekim točkam tako v C_a kot v C_b.
Sedaj pokažimo še levo smer.
Vzemimo poljuben $x \in X$. Po predpostavki ima x soseda tako v C_a kot v C_b. Naj bo x_a sosed točke x v C_a in x_b sosed točke x v C_b. Naj bosta še P_a pot v C_a od a do x_a, P_b pa pot v C_b od b do x_b. Tedaj je $P = P_a x P_b$ pot v grafu G od a do b, za katero velja $V(P) \cap X = \{x\}$. Torej je X minimalen. □

Trditev 3.9. *Naj bo G graf, $a, b \in V(G)$ in $X \subseteq V(G) \backslash \{a, b\}$ množica točk, ki loči a od b. Naj bo še $X' \subseteq V(G) \backslash \{a, b\}$ množica točk, ki loči a od b. Množici C'_a in C'_b definiramo podobno kot C_a in C_b v trditvi 3.8. Definirajmo še $Y_a = (X \cap C'_a) \cup (X \cap X') \cup (X' \cap C_a)$ in $Y_b = (X \cap C'_b) \cup (X \cap X') \cup (X' \cap C_b)$. Potem obe množici Y_a in Y_b ločita točko a od b.*

Dokaz. Zaradi simetrije dokažimo posledico le za množico Y_a.
Dokaz gre s protislovjem, pri tem predpostavimo, da obstaja a–b pot P, za katero velja $P \cap Y_a = \emptyset$. Torej mora veljati $P \cap (X \cap C'_b) \neq \emptyset$ in $P \cap (X' \cap C_b) \neq \emptyset$. Naj bo v prva točka na poti P, vsebovana v $P \cap ((X \cap C'_b) \cup (X' \cap C_b))$ Brez škode za splošnost naj bo $v \in X \cap C'_b$. Vemo tudi, da $v \notin X'$. S P_v označimo podpot poti P od točke a do točke v.
P_v je v grafu $G - X'$ iz tega pa sledi, da je $v \in C'_a$, kar pa nas pripelje do protislovja z izbiro točke v.
Torej Y_a loči točki a in b. In kot je že na začetku dokaza omenjeno, velja podoben dokaz tudi za Y_b, ki prav tako loči točki a in b.

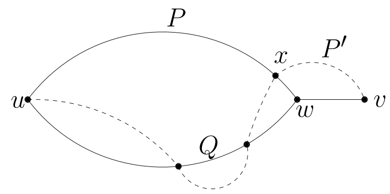


Slika 3.4: Primer množic X in X', ki ločita točki a in b.

□

Izrek 3.10 (Whitney [11], glej tudi [12])**.** *Naj bo $G = (V, E)$ graf in naj bo $|V(G)| \geq 3$. Graf G je 2-povezan natanko tedaj, ko sta poljubni točki v grafu G povezani z vsaj dvema neodvisnima potema.*

Dokaz. Če sta poljubni dve točki v grafu G povezani z vsaj dvema notranje disjunktnima potema, potem je jasno, da je G 2-povezan, če je le $|V(G)| \geq 3$.
Dokažimo še implikacijo v desno smer.
Naj bo G 2-povezan graf. Z indukcijo po razdalji $d(u, v)$ bomo pokazali, da sta katerikoli dve točki u in v v grafu G povezani z vsaj dvema notranje disjunktnima potema.
Najprej predpostavimo, da je $d(u, v) = 1$. Ker je graf G 2-povezan, povezava uv ni prerezna povezava. To vemo iz neenakosti v izreku 2.16. Zato je povezava uv vsebovana v nekem ciklu v grafu G. Iz tega dobimo, da sta u in v povezani z dvema notranje disjunktnima potema v grafu G.
Sedaj predpostavimo, da izrek velja za katerikoli dve točki na razdalji manj kot k in naj bo $d(u, v) = k \geq 2$. Poglejmo u–v pot dolžine k in naj bo točka w pred točko v na tej poti. Ker je $d(u, w) = k - 1$, sledi po indukcijski predpostavki, da imamo dve notranje disjunktni u–w poti, ki ju označimo s P in Q, v grafu G. Ker je G 2-povezan, sledi da je $G - w$ povezan in vsebuje u–v pot P'. Naj bo x zadnja točka poti P', ki je tudi vsebovana v $P \cup Q$ (glej sliko).



Slika 3.5: Primer poti P, Q in P' v dokazu izreka 3.10.

Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da x leži na P. Potem ima G dve notranje disjunktni $u-v$ poti, pri čemer je ena sestavljena iz dela poti P od u do x in dela iz P' od točke x do v, druga pa je sestavljena iz poti Q, skupaj s potjo wv.

□

Posledica 3.11. *Naj bo G 2-povezan graf. Potem za poljubni dve točki grafa G velja, da ležita na skupnem ciklu.*

Dokaz. Dokaz sledi iz izreka 3.10. □

Definicija 3.12. *Naj bo G graf in e in e' njegovi povezavi. Pišemo $e \sim e'$, če velja $e = e'$ ali pa e in e' ležita na nekem skupnem ciklu v G.*

Definicija 3.13. *Naj bo G graf in naj bo B njegov blok. Pravimo, da je blok B trivialen, če sestoji iz ene same točke.*

Trditev 3.14. *Relacija $\sim$, definirana v 3.12 , je ekvivalenčna relacija na množici povezav $E(G)$, katere ekvivalenčni razredi so natanko množice povezav netrivialnih blokov v G.*

Dokaz. Dokaz zgornje trditve napravimo v dveh korakih.

1. Najprej pokažemo, da velja: $e \sim e'$ natanko tedaj, ko sta e in e' vsebovani v istem bloku.
   Predpostavimo, da velja $e \sim e'$. Iz definicije 3.12 vemo, da je $e = e'$ ali pa e in e' ležita na nekem skupnem ciklu v grafu G.
   Vemo tudi, da so cikli grafa omejeni na en sam blok, torej e in e' sta vsebovani v istem bloku.
   Dokažimo predpostavko še v levo smer, torej predpostavimo, da sta e in e' vsebovani v istem bloku.
   Bloki, ki vsebujejo povezave so lahko 2-povezani podgrafi ali mostovi. Če je takšen blok most, potem imamo samo eno povezavo, torej sledi, da velja $e \sim e'$. Ostane nam še druga možnost, tj. takšen blok je 2-povezan podgraf.
   Če je $e = e'$, potem velja $e \sim e'$. Če pa je $e \neq e'$, pa na povezavo e dodamo še eno točko, slednja je stopnje 2. Enako naredimo tudi s povezavo e'. Torej dobimo dve novi točki stopnje 2 in tak podgraf je še vedno 2-povezan. Po

posledici 3.11 ti dve novi točki ležita na nekem skupnem ciklu. Iz tega sledi, da tudi povezavi e in e' iz prvotnega podgrafa ležita na skupnem ciklu, saj sta na novo dodani točki stopnje 2. Torej velja $e \sim e'$.

2. Pokazati moramo še: ker množica $\{E(B),\ B$ netrivialen blok$\}$ tvori particijo množice $E(G)$, sledi da je relacija $\sim$ ekvivalenčna relacija.
   Množica $\{E(B),\ B$ netrivialen blok$\}$ tvori particijo množice $E(G)$, to pomeni, da je $E(G) = \bigcup_B E(B)$ in da sta katerikoli dve množici iz te particije med seboj disjunktni. Po prejšnji točki tega dokaza vemo tudi, da velja: $e \sim e'$ natanko tedaj, ko sta e in e' vsebovani v istem bloku. Iz vsega skupaj sledi, da vsaka množica iz te particije tvori ekvivalenčni razred relacije $\sim$, torej je $\sim$ ekvivalenčna relacija.

□

Trditev 3.15. *Naj bo G 2-povezan graf, ki ni trikotnik in naj bo e njegova povezava. Potem je ali $G - e$ ali G/e 2-povezan graf.*

Dokaz. Če odstranimo takšno povezavo $e = xy$, da po odstranitvi povezave x in y še vedno ležita na nekem ciklu, potem je graf $G - e$ 2-povezan.
Če pa bi odstranili povezavo $e = xy$, tako da x in y ne bi več ležala na nekem ciklu, to ne bi bil več 2-povezan graf. Za ta primer si oglejmo G/e. Če namesto povezave e vstavimo v graf točko v_{xy}, postane ta točka sosednja vsem točkam, ki so bile prej sosednje točki x ali točki y. To pa pomeni, da poljubni dve točki iz grafa G/e ležita na nekem ciklu in zato je graf 2-povezan. □

Poglavje 4

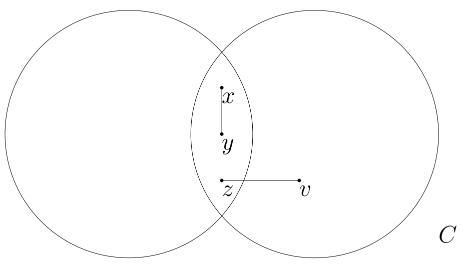
3-povezani grafi

V tem poglavju si bomo pogledali, kako lahko iz polnega grafa K_4 dobimo vsak 3-povezan graf. Omenjen bo tudi izrek, ki govori o prostoru ciklov 3-povezanega grafa. Celotno poglavje je povzeto po prvem in tretjem poglavju knjige [2].

4.1 3-povezani grafi in polni graf K_4

Lema 4.1. *Naj bo $G = (V, E)$ graf. Če je graf G 3-povezan in $|V(G)| > 4$, potem G vsebuje tako povezavo e, da velja: G/e je 3-povezan.*

Dokaz. Predpostavimo, da G ne vsebuje take povezave e, da bi veljalo, da je G/e 3-povezan. Potem velja za vsako povezavo $xy \in G$, da ima graf G/xy neko prerezno množico S z največ dvema točkama.
Ker pa je $\kappa(G) \geq 3$, vemo, da točka $v_{xy} \in G/xy$ leži v S in $|S| = 2$, tj. G ima točko $z \notin \{x, y\}$, za katero velja, da množica $\{v_{xy}, z\}$ loči graf G/xy.
To pomeni, da če si izberemo poljubni dve točki, ki ju množica $\{v_{xy}, z\}$ loči v G/xy, ju množica $\{x, y, z\}$ loči v grafu G. Ker ni nobene prave podmnožice množice $\{x, y, z\}$, ki bi ločila G, ima vsaka točka iz $\{x, y, z\}$ soseda v vsaki komponenti C grafa $G - \{x, y, z\}$.
Izberimo povezavo xy, točko z in komponento C, tako da je $|V(C)|$ najmanjša možna in pogledamo soseda točke z v množici C, ki ga označimo z v.



Slika 4.1: Primer točk, ki ločijo graf G.

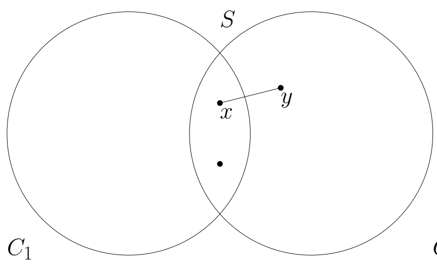
Potem po predpostavki G/zv zopet ni 3-povezan, torej obstaja točka w tako, da $\{z, v, w\}$ loči G in ravno tako kot prej ima vsaka točka v $\{z, v, w\}$ soseda v vsaki komponenti grafa $G - \{z, v, w\}$.
Ker sta x in y sosednja, ima $G - \{z, v, w\}$ komponento D, tako da velja $V(D) \cap \{x, y\} = \emptyset$. Iz tega sledi, da vsak sosed točke v, vsebovan v množici D, leži v C (saj vemo, da je $v \in C$). Torej $D \cap C \neq \emptyset$ in velja $D \subset C$, kar pa je v protislovju z izbiro povezave xy, točke z in komponente C.

□

Izrek 4.2 (Tutte [8]). *Naj bo G graf. G je 3-povezan natanko tedaj, ko obstaja zaporedje grafov $G_0, \ldots, G_n$ z naslednjima lastnostma:*

1. *$G_0 = K_4$ in $G_n = G$;*
2. *G_{i+1} ima povezavo xy z $d(x), d(y) \geq 3$ in $G_i = G_{i+1}/xy$, za vsak $i < n$.*

Dokaz. Če je G 3-povezan, potem zaporedje grafov, ki zadosti pogojema v izreku 4.2, obstaja po lemi 4.1.
Sedaj poglejmo dokaz v levo stran, naj bo torej $G_0, \ldots, G_n$ zaporedje grafov, za katero veljata pogoja v izreku 4.2.
Če je $G_i = G_{i+1}/xy$ 3-povezan, potem je 3-povezan tudi graf G_{i+1} za vsak $i < n$. Pa predpostavimo, da to ne drži. Naj bo S prerezna množica z največ dvema točkama v grafu G_{i+1} in naj bosta C_1 in C_2 komponenti grafa $G_{i+1} - S$. Ker sta x in y sosednji točki, lahko predpostavimo, da velja $\{x, y\} \cap V(C_1) = \emptyset$.
Potem C_2 ne vsebuje obeh x in y in ne vsebuje nobene točke $v \notin \{x, y\}$, ker bi bila sicer točka v_{xy} ali v ločena od C_1 v grafu G_i z največ dvema različnima točkama. Torej C_2 vsebuje samo eno točko: ali x ali y. To pa je v protislovju z našo predpostavko, da je $d(x), d(y) \geq 3$.



Slika 4.2: Primer komponent C_1 in C_2 grafa G.

□

4.2 Nekaj malega algebre

Definicija 4.3. *Naj bo $G = (V, E)$ graf z n točkami in m povezavami, tj. $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ in $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Vektorski prostor nad poljem $\mathbb{Z}_2$ vseh* *funkcij, ki slikajo iz V v $\mathbb{Z}_2$, imenujemo prostor točk grafa G in ga označimo z $\mathcal{V}(G)$.*

Vsak element iz $\mathcal{V}(G)$ predstavlja podmnožico množice točk V. Vsaka podmnožica množice V je enolično določena v $\mathcal{V}(G)$ z indikatorsko funkcijo. Tako si lahko predstavljamo množico $\mathcal{V}(G)$ kot potenčno množico množice V. Vektorsko seštevanje $U \oplus U'$ je simetrična razlika množic U in U', kjer sta $U, U' \subseteq V$. Ničlo v $\mathcal{V}(G)$ predstavlja prazna množica. Standardna baza za $\mathcal{V}(G)$ je $\{\{v_1\}, \ldots, \{v_n\}\}$.

Definicija 4.4. *Podobno kot v definiciji 4.3, funkcije $f : E \to \mathbb{Z}_2$ tvorijo prostor povezav grafa G, ki ga označimo z $\mathcal{E}(G)$.*

Elementi prostora $\mathcal{E}(G)$ so podmnožice množice E, vektorsko seštevanje dveh množic je enako njuni simetrični razliki in prazna množica je ničla v $\mathcal{E}(G)$, saj tudi $\emptyset \subseteq E$. Standardna baza za $\mathcal{E}(G)$ je $\{\{e_1\}, \ldots, \{e_m\}\}$.
Prostor ciklov $\mathcal{C}(G)$ je podprostor prostora $\mathcal{E}(G)$, generiran z vsemi cikli grafa G.

Definicija 4.5. *Naj bo G graf. Povezavi, ki povezuje dve točki cikla C v grafu G in ni vsebovana v ciklu C, pravimo tetiva cikla C.*

Definicija 4.6. *Naj bo G graf. Induciran cikel grafa G je cikel brez tetiv in tvori induciran podgraf grafa G.*

Trditev 4.7. *Naj bo G graf. Inducirani cikli v grafu G generirajo celoten prostor ciklov v grafu G.*

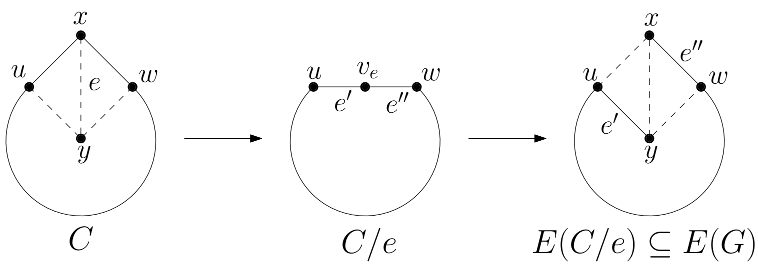
Dokaz. Glede na to, kako smo definirali naš $\mathcal{C}(G)$, je dovolj pokazati, da inducirani cikli v grafu G generirajo vsak cikel $C \subseteq G$ s tetivo e. To sledi z indukcijo po $|V(C)|$: dva cikla v grafu $C \oplus e$, ki jima je skupna le povezava e, sta krajša kot cikel C in njuna simetrična razlika je enaka C. □

Definicija 4.8. *Poglejmo povezan graf $G = (V, E)$ in naj bo $T \subseteq G$ vpeto drevo grafa G. Za vsako povezavo $e \in E \setminus E(T)$ obstaja enolično določen cikel C_e v grafu $T + e$. Potem ciklom C_e rečemo temeljni cikli grafa G glede na podgraf T.*

Izrek 4.9 (Tutte [9]). *Prostor ciklov 3-povezanega grafa je generiran z neprereznimi induciranimi cikli grafa.*

Dokaz. ([7]) Naj bo $G = (V, E)$ graf. Za dokaz izreka bomo uporabili indukcijo po moči množice $V(G)$, tj. red grafa G.
Začnimo s štirimi točkami. 3-povezan graf na štirih točkah je K_4. V grafu K_4 je vsak cikel trikotnik, ali pa simetrična razlika trikotnikov (gledano po povezavah). Ker so pa ti cikli (trikotniki) neprerezni za graf K_4 in inducirani, izrek velja za $|V(G)| = 4$.
Za indukcijski korak naj bo $e = xy$ povezava grafa G, za katerega velja, da je

$G' := G/e$ zopet 3-povezan. Taka povezava obstaja po lemi 4.1.
Vsaka povezava $e' \in E(G') \setminus E(G)$ je oblike $e' = uv_e$, kjer vsaj ena od povezav ux in uy leži v grafu G in $u \in V(G)$. Izberemo si tisto povezavo, ki leži v grafu G, tj. ali ux ali uy, in jo označimo z e'. Sedaj e' označuje obe povezavi, in sicer povezavo uv_e grafa G' in eno izmed povezav ux ali uy. Torej lahko upoštevamo $E(G')$ kot podmnožico $E(G)$ in $\mathcal{E}(G')$ kot podprostor $\mathcal{E}(G)$.
Posebno vlogo v tem dokazu bodo odigrali trikotniki uxy v grafu G, ki vsebujejo povezavo e. Imenovali jih bomo temeljni trikotniki grafa G. Vsi ti trikotniki so neprerezni in inducirani, ker bi drugače množica $\{u, v_e\}$ ločila graf G', kar pa bi bilo v protislovju z lemo 4.1.
Poglejmo induciran cikel $C \subseteq G$, ki ni temeljni trikotnik. Če je $e \in E(C)$, potem je C/e cikel v grafu G'. Če pa $e \notin E(C)$, potem največ ena od točk x ali y leži na C, sicer bi bila povezava e tetiva. Točke cikla C prav tako tvorijo cikel v grafu G' (zamenjamo točko x ali y z točko v_e), ta cikel označimo z C/e. Torej, za vsak induciran cikel $C \subseteq G$, ki ni temeljni trikotnik, C/e označuje enolično določen cikel v grafu G'. Tudi v primeru, ko $e \notin C$, množica povezav C/e gledana kot podmnožica povezav $E(G)$, ne sovpada nujno z $E(C)$, lahko pa tudi, da sploh ne tvori cikla.



Slika 4.3: Primer ene izmed štirih možnosti, ko $e \notin C$.

S pojmom osnovni cikli bomo označevali neprerezne inducirane cikle grafa G ali G'. Radi bi pokazali, da je vsak element iz $\mathcal{C}(G)$ vsota osnovnih ciklov v grafu G. Naj bo podan $C \in \mathcal{C}(G)$. Po trditvi 4.7 in ker so temeljni trikotniki osnovni cikli, lahko privzamemo, da je C induciran cikel, vendar ni temeljni trikotnik. Torej $C' := C/e$ je cikel v G'.
Z indukcijo moramo generirati cikel C' iz osnovnih ciklov v grafu G' in s pomočjo tega moramo dobiti osnovne cikle v grafu G, ki generirajo C. Kot smo videli, se lahko povezave množice C' razlikujejo od povezav iz C in podobno se lahko osnovni cikli grafa G', ki generirajo C', malo razlikujejo od osnovnih ciklov grafa G. Da te razlike določimo natančno in da pokažemo, da niso pomembne za naš dokaz, rečemo, da sta množici povezav $F, F^* \in \mathcal{C}(G)$ podobni, če se razlikujeta samo po temeljnih trikotnikih in v povezavi e, tj. če obstaja vsota (simetrična razlika) D temeljnih trikotnikov, tako da velja:

$$F \oplus F^* \oplus D \in \{\emptyset, \{e\}\}.$$

Jasno je, da je podobnost (definirana zgoraj med F in F^*) ekvivalenčna relacija. Namesto da bi generirali cikel C iz osnovnih ciklov, je dovolj, da zgeneriramo množico $C^* \in \mathcal{C}(G)$, ki je podobna ciklu C. Veljati mora:

Če je C podobna $C^* \in \mathcal{C}(G)$ in če je C^* vsota osnovnih ciklov v G, potem je tudi C vsota osnovnih ciklov v G. (4.1)

Če je D vsota temeljnih trikotnikov, tako da velja $C \oplus C^* \oplus D \in \{\emptyset, \{e\}\}$, potem je $C \oplus C^* \oplus D = \emptyset$, ker $C \oplus C^* \oplus D$ leži v $\mathcal{C}(G)$, ampak $\{e\}$ pa ne leži v $\mathcal{C}(G)$. Torej, ker je D vsota osnovnih ciklov, je $C = C^* \oplus D$. S tem smo pokazali (4.1). Začnimo naš dokaz s trditvijo:

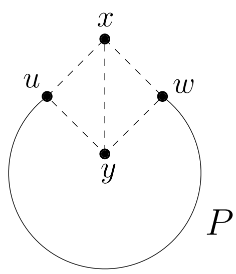
$$C' \text{ je podobna } C. \tag{4.2}$$

Če je $e \in C$ ali pa x in y ne ležita na C, potem se C' razlikuje od C natanko v povezavi e ali pa se C' in C sploh ne razlikujeta. Sicer C vsebuje natanko eno od točk x ali y. Potem velja $v_e \in V(C')$. Naj bosta u in w soseda točke v_e na ciklu C' in $e' = uv_e$ ter $e'' = v_e w$ sta njeni incidenčni povezavi.

Če $e' \notin C$, potem naj bo D_u temeljni trikotnik uxy, sicer naj bo $D_u := \emptyset$. Če $e'' \notin C$, potem naj bo D_w temeljni trikotnik wxy, sicer naj bo $D_w := \emptyset$.
V primeru da velja zgornje, dobimo, da je $C \oplus C' \oplus D_u \oplus D_w \in \{\emptyset, \{e\}\}$, in res velja, da je C' podoben C, s tem smo dokazali (4.2).
Po indukcijski predpostavki je C' vsota osnovnih ciklov $C'_1, \ldots, C'_k$ v grafu G'. Potem mora za graf G veljati:

Za vsak $i = 1, \ldots, k$ obstaja osnovni cikel C_i v grafu G, tako da je podoben ciklu C'_i. (4.3)

Za dokaz točke (4.3) si izberimo C_i tako, da velja $C_i/e = C'_i$. Če $v_e \notin C'_i$, potem (4.3) velja za $C_i := C'_i$, torej lahko predpostavimo, da je $v_e \in C'_i$. Naj bosta u in w soseda točke v_e na ciklu C'_i in naj bo P u–v pot v C'_i, ki ne gre skozi v_e (glej sliko). Potem je $P \subseteq G$.



Slika 4.4: Iskanje osnovnega cikla C_i.

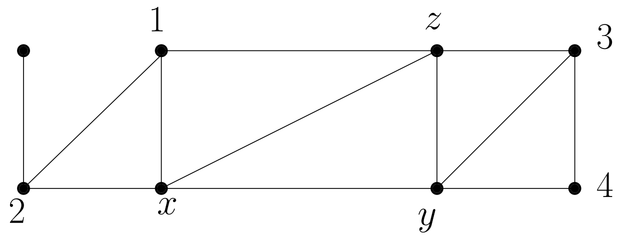
Najprej predpostavimo, da $\{ux, uy, wx, wy\} \subseteq E(G)$ in naj velja še $C_x := uPwxu$ in $C_y := uPwyu$. Oba cikla sta inducirana cikla v grafu G (ker je C'_i induciran v G') in jasno je, da velja $C_x/e = C'_i = C_y/e$. Noben od teh dveh ciklov ne loči nobenih dveh točk v $G - (V(P) \cup \{x, y\})$ grafa G, ker C'_i ne loči takih točk v G'. Torej, če je C_x prerezni cikel v G, potem mora veljati, da ena od komponent grafa $G - C_x$ sestoji samo iz y. Prav tako, če C_y loči G, ena od komponent grafa sestoji samo iz x. Vendar se to ne more zgoditi za oba C_x in C_y hkrati, sicer $N_G(\{x, y\}) \subseteq V(P)$ in $N_G(\{x, y\}) = \{u, w\}$ (ker C'_i nima tetive). S tem smo pa v protislovju, saj je $\kappa(G) \geq 3$. Vsaj eden izmed C_x in C_y je torej osnoven cikel v G, izberemo ga kot C_i.
Ostane nam še primer: $\{ux, uy, wx, wy\} \nsubseteq E(G)$, pa recimo da $ux \notin E(G)$. Dobimo, da je ali $uPwyu$ ali $uPwxyu$ osnovni cikel v G (ki ga izberemo kot C_i). S tem je dokazana točka (4.3).
Če upoštevamo (4.3), potem je $C^* := C_1 \oplus \cdots \oplus C_k$ podoben $C' := C'_1 \oplus \cdots \oplus C'_k$, ki pa je tudi podoben ciklu C po točki (4.2). Če upoštevamo še točko (4.1), dobimo, da je C tudi vsota osnovnih ciklov v grafu G, slednji so ravno neprerezni in inducirani, s tem je naš dokaz končan. $\square$

Poglavje 5

Mengerjev izrek

Mengerjev izrek je eden najpomembnejših izrekov v teoriji grafov. Mengerjev izrek in vse ostalo iz tega poglavja je povzeto po [2].

Izrek 5.1 (Menger [5])**.** *Naj bo $G = (V, E)$ graf in naj bosta $A, B \subseteq V$. Potem je najmanjše število točk, ki ločijo A od B, enako največjemu številu paroma disjunktnih A–B poti v grafu G.*



$A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$

Slika 5.1: Primer grafa s podmnožicama točk A in B.

V zgornjem grafu je najmanjše število točk, ki ločijo množici A in B, enako 2, tj. odstranimo dve izmed točk: ali z in x ali pa z in y. Največje število paroma disjunktnih A–B poti v zgornjem grafu je tudi enako 2. S tem smo se torej prepričali, da izrek 5.1 velja za naš primer.

Predstavljena bosta dva dokaza zgornjega izreka. Oznake G, A in B, ki bodo uporabljene v dokazih, naj imajo enak pomen kot v 5.1. S $k = k(G, A, B)$ bomo označevali najmanjše število točk, ki ločijo A od B v grafu G.
Jasno je, da G ne more vsebovati več kot k disjunktnih A–B poti. Pokazali bomo, da G vsebuje natanko k takih poti.

Dokaz. Dokaz Mengerjevega izreka gre z indukcijo po $|E(G)|$.
Če graf G ne vsebuje nobene povezave, potem je $|A \cap B| = k$ in imamo k

trivialnih A–B poti.
Zato predpostavimo, da ima G povezavo $e = xy$. Če G nima k disjunktnih A–B poti, potem tudi graf G/e nima k disjunktnih A–B poti.
Pri tem imamo skrčitveno točko v_e za element množice A (oziroma B) v G/e, če seveda ena od x ali y leži v množici A (oziroma B) v grafu G.
Po indukciji vsebuje G/e prerezno množico Y množic A in B, ki ima manj kot k točk. Med temi točkami mora biti tudi točka v_e, ker bi bila drugače $Y \subseteq V$ prerezna množica množic A in B v grafu G. Potem je $X := (Y \backslash \{v_e\}) \cup \{x, y\}$ prerezna množica množic A in B v grafu G z natanko k točkami.
Sedaj poglejmo še graf $G - e$. Ker sta $x, y \in X$, je vsaka prerezna množica množic A in X v $G - e$ tudi prerezna množica množic A in B v grafu G in torej vsebuje vsaj k točk.
Po indukciji obstaja k disjunktnih A–X poti v $G - e$ in podobno obstaja tudi k disjunktnih X–B poti v $G - e$.
Ker je X prerezna množica množic A in B, se A–X poti in X–B poti ne sekajo izven množice X in jih lahko združimo v k disjunktnih A–B poti. $\square$

Za drugi dokaz Mengerjevega izreka potrebujemo naslednjo definicijo.

Definicija 5.2. *Naj bo $G = (V, E)$ graf, $A, B \subseteq V$, s $\mathcal{P}$ označimo množico disjunktnih A–B poti in naj bo $\mathcal{Q}$ še ena množica z enako lastnostjo kot $\mathcal{P}$. Pravimo, da množica $\mathcal{Q}$ presega množico $\mathcal{P}$, če točke iz množice A, ki ležijo na neki poti v množici $\mathcal{P}$, sestavljajo pravo podmnožico točk množice A, ki leži na neki poti v $\mathcal{Q}$, podobno mora veljati tudi za množico B.*

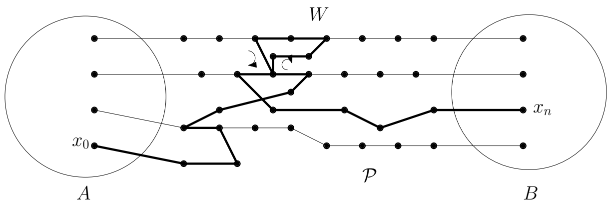
V splošnem velja, da je $|\mathcal{Q}| \geq |\mathcal{P}| + 1$, če $\mathcal{Q}$ presega $\mathcal{P}$
Pred drugim dokazom izreka 5.1 si poglejmo dve pomožni lemi, ki ju bomo potrebovali v dokazu.
Naj bodo G, A in B enaki kot prej (tj. pred prvim dokazom izreka 5.1) in naj bo $\mathcal{P}$ množica disjunktnih A–B poti v grafu G. Recimo, da množica $X \subseteq V$, ki loči A in B, leži na $\mathcal{P}$, če lahko iz vsake poti v množici $\mathcal{P}$ vzamemo natanko eno točko, tako da dobimo množico X. Če lahko najdemo tako prerezno množico X, potem je jasno, da $k \leq |X| = |\mathcal{P}|$ in s tem dokažemo naš izrek.
Vpeljimo še nekaj oznak, ki jih bomo potrebovali v preostanku tega poglavja. Naj bo $G = (V, E)$ graf, $P = x_0, \ldots, x_k$ neka pot v grafu G in naj bosta i in j celi števili, za kateri velja $0 \leq i \leq j \leq k$. Potem definiramo:
$Px_i := x_0 \ldots x_i$, $x_iP := x_i \ldots x_k$, $x_iPx_j := x_i \ldots x_j$ in $\mathring{P} := x_1 \ldots x_{k-1}$,
$P\mathring{x}_i := x_0 \ldots x_{i-1}$, $\mathring{x}_iP := x_{i+1} \ldots x_k$, $\mathring{x}_iP\mathring{x}_j := x_{i+1} \ldots x_{j-1}$.

Definicija 5.3. *Naj bo $G = (V, E)$ graf. Sprehod dolžine k v grafu G je neprazno alternirajoče zaporedje $v_0e_0v_1e_1 \ldots e_{k-1}v_k$ točk in povezav v grafu G, kjer velja $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ za vsak $i < k$ in sta $i, k \in \mathbb{N}$.*
Če velja $v_0 = v_k$, potem pravimo takšnemu sprehodu zaprt sprehod.

Definicija 5.4. *Naj bo $G = (V, E)$ graf, $A, B \subseteq V$ in $\mathcal{P}$ množica disjunktnih A–B poti. Naj bosta še $V[\mathcal{P}] := \bigcup\{V(P) \mid P \in \mathcal{P}\}$ in $E[\mathcal{P}] := \bigcup\{E(P) \mid P \in$*

$\mathcal{P}\}$. *Sprehodu* $W = x_0e_0x_1e_1 \dots e_{n-1}x_n$ *v grafu* G*, kjer je* $e_i \neq e_j$ *za* $i \neq j$*, rečemo alternirajoči sprehod glede na množico* $\mathcal{P}$*, če se začne v množici* $A \backslash V[\mathcal{P}]$ *in če naslednje tri predpostavke držijo za vsak* $i < n$*:*

1. *če* $e_i = e \in E[\mathcal{P}]$*, potem gre* W *po povezavi* e *v obratni smeri, tj.* $x_{i+1} \in P\mathring{x}_i$*, za nek* $P \in \mathcal{P}$*;*
2. *če* $x_i = x_j$*, kjer sta* $i \neq j$*, potem je* $x_i \in V[\mathcal{P}]$*;*
3. *če* $x_i \in V[\mathcal{P}]$*, potem je* $\{e_{i-1}, e_i\} \cap E[\mathcal{P}] \neq \emptyset$*.*



Slika 5.2: Primer alternirajočega sprehoda W.

Po drugi predpostavki iz definicije 5.4 vemo, da se katerakoli točka, ki ni v $V[\mathcal{P}]$, pojavi največ enkrat na sprehodu W.
Ker so povezave e_i sprehoda W vse med seboj disjunktne, po tretji predpostavki vemo, da se katerakoli točka $v \in V[\mathcal{P}]$ pojavi največ dvakrat na sprehodu W. Za točko $v \neq x_n$ se lahko to zgodi na natanko dva načina, in sicer, če je $x_i = x_j$, kjer sta $0 < i < j < n$, potem velja ali $e_{i-1}, e_j \in E[\mathcal{P}]$ in $e_i, e_{j-1} \notin E[\mathcal{P}]$ ali pa $e_i, e_{j-1} \in E[\mathcal{P}]$ in $e_{i-1}, e_j \notin E[\mathcal{P}]$.

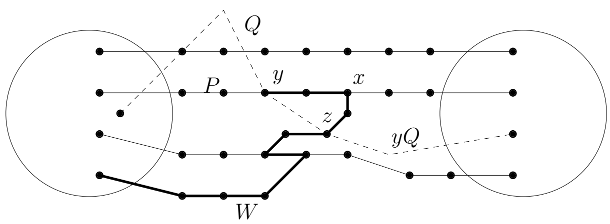
Lema 5.5. *Če se alternirajoči sprehod* W*, ki je podan v 5.4, konča v množici* $B \backslash V[\mathcal{P}]$*, potem graf* G *vsebuje množico disjunktnih* A*–*B *poti, ki presega množico* $\mathcal{P}$*. Pri tem so tudi* G*,* A*,* B *in* $V[\mathcal{P}]$ *enaki kot v definiciji 5.4.*

Dokaz. Predpostavimo lahko, da ima sprehod W samo začetno točko v množici $A \backslash V[\mathcal{P}]$ in samo zadnjo točko v množici $B \backslash V[\mathcal{P}]$. Naj bo H graf na množici točk $V(G)$, katerega množica povezav je ravno simetrična razlika med množicama $E[\mathcal{P}]$ in $\{e_0, \dots, e_{n-1}\}$. V grafu H imajo končne točke poti iz množice $\mathcal{P}$ in W stopnjo enako 1 (če je pot ali W trivialen je lahko stopnja točke tudi 0), vse ostale točke pa imajo stopnjo enako 2 ali 0.
Naj bo točka $a \in (A \cap V[\mathcal{P}]) \cup \{x_0\}$. Komponenta grafa H, ki vsebuje točko a je pot $P = v_0 \dots v_k$, ki se začne v a in konča v A ali B. Uporabimo prvo in tretjo predpostavko iz definicije 5.4 in z indukcijo po $i = 0, \dots, k-1$ vidimo, da gre P v smeri naprej po vsaki od svojih povezav $e = v_iv_{i+1}$ glede na $\mathcal{P}$ ali W (tj. če je $e \in P'$, kjer je $P' \in \mathcal{P}$, potem je $v_i \in V(P'\mathring{v}_{i+1})$, če pa velja $e = e_j \in W$, potem je $v_i = x_j$ in $v_{i+1} = x_{j+1}$). Torej: P je A–B pot.

Podobno kot zgoraj, za vsak $b \in (B \cap V[\mathcal{P}]) \cup \{x_n\}$ obstaja A–B pot v grafu H, ki se konča v b.
Torej množica A–B poti v grafu H presega množico $\mathcal{P}$. □

Lema 5.6. *Naj bodo G, A, B, W in $V[\mathcal{P}]$ kot v definiciji 5.4. Če se noben alternirajoči sprehod W ne konča v $B \setminus V[\mathcal{P}]$, potem graf G vsebuje množico, ki loči A in B in leži na $\mathcal{P}$.*

Dokaz. Naj bodo $A_1 := A \cap V[\mathcal{P}]$, $A_2 := A \setminus A_1$, $B_1 := B \cap V[\mathcal{P}]$ in $B_2 := B \setminus B_1$. Za vsako pot $P \in \mathcal{P}$, naj bo x_P zadnja točka poti P, ki leži na nekem alternirajočem sprehodu. Če takšna točka ne obstaja, pa naj bo x_P prva točka poti P. Naš cilj je pokazati, da je v množici $X := \{x_P \mid P \in \mathcal{P}\}$ neka točka iz vsake A–B poti v grafu G, to pomeni, da X loči množici A in B in leži na $\mathcal{P}$.
Pa predpostavimo, da obstaja neka A–B pot Q, ki ne gre skozi X. Vemo, da mora Q iti skozi $V[\mathcal{P}]$, sicer se lahko alternirajoči sprehod konča v B_2.
A–$V[\mathcal{P}]$ pot v Q je ali alternirajoči sprehod, ali pa sestoji samo iz prve točke iz neke poti v $\mathcal{P}$. Torej gre Q tudi skozi množico točk $V[\mathcal{P}']$, kjer je $\mathcal{P}' := \{Px_P \mid P \in \mathcal{P}\}$.
Naj bo $y \in P \in \mathcal{P}$ zadnja točka poti Q v množici točk $V[\mathcal{P}']$ in naj bo $x := x_P$. Ker Q ne gre skozi X in posledično tudi ne skozi x, je $y \in P\mathring{x}$.
$x := x_P$ ni prva točka poti P in zato obstaja alternirajoči sprehod W, ki se konča v točki x. Potem je $W \cup xPyQ$ sprehod od A_2 do B. Če je ta sprehod alternirajoči in če se konča v B_2, pridemo do željenega protislovja.
Kaj pa če $W \cup xPyQ$ ni alternirajoči sprehod? Na primer, v sprehodu W je lahko povezava iz xPy. Ampak, če je x' prva točka sprehoda W na poti $xP\mathring{y}$, potem je $W' := Wx'Py$ alternirajoči sprehod od A_2 do y.
Ampak tudi naš novi sprehod $W'yQ$ ni nujno alternirajoči, saj se W' lahko še vedno sreča z $\mathring{y}\,Q$. Po definiciji $\mathcal{P}'$ in W ter po izbiri y na Q sledi, da $V(W') \cap V[\mathcal{P}] \subseteq V[\mathcal{P}']$ in $V(\mathring{y}Q) \cap V[\mathcal{P}'] = \emptyset$.
Torej se W' in $\mathring{y}Q$ lahko srečata samo izven $\mathcal{P}$.
Če W' dejansko sreča $\mathring{y}Q$, potem z z označimo prvo točko sprehoda W' na $\mathring{y}Q$ in naj bo še $W'' := W'zQ$, sicer pa naj bo $W'' := W' \cup yQ$. V obeh primerih, glede na to kako definiramo W'', je W'' alternirajoči sprehod glede na $\mathcal{P}'$, ker je tudi W' alternirajoči sprehod in $\mathring{y}Q$ ne gre skozi $V[\mathcal{P}']$.



Slika 5.3: Primer alternirajočih sprehodov v dokazu leme 5.6.

Pogledamo, kako je definiran $\mathcal{P}'$, in vidimo, da W'' ne gre skozi $V[\mathcal{P}] \setminus V[\mathcal{P}']$. Torej je W'' prav tako alternirajoči sprehod glede na $\mathcal{P}$ in se konča v B_2, kar pa je v protislovju z našo predpostavko. $\square$

Sedaj, ko imamo vse potrebno definirano in so naši pomožni izreki dokazani, si poglejmo še drugi dokaz izreka 5.1.

Dokaz. Dokaz Mengerjevega izreka s pomočjo lem 5.5 in 5.6.
Naj $\mathcal{P}$ v grafu G vsebuje vse možne disjunktne A–B poti. Potem se po lemi 5.5 noben alternirajoči sprehod ne konča v $B \setminus V[\mathcal{P}]$. Po lemi 5.6 pa velja, da ima G množico X, ki loči A in B na množici $\mathcal{P}$ in iz tega vemo, da $k \leq |X| = |\mathcal{P}|$. $\square$

5.1 Nekaj posledic Mengerjevega izreka

Iz globalne verzije Mengerjevega izreka je moč izpeljati vrsto uporabnih izrekov. Pogledali si bomo tri. Za prvega potrebujemo naslednjo definicijo:

Definicija 5.7. *Naj bo $G = (V, E)$ graf in $A, B \subseteq V(G)$ ter naj bo $a \in A$. Množici a–B poti pravimo a–B ventilator, če imata katerekoli dve a–B poti skupno samo točko a.*

Posledica 5.8. *Naj bo $G = (V, E)$ graf. Za $B \subseteq V$ in za $a \in V \setminus B$ velja: najmanjše število točk, ki so različne od a in ločijo točko a od množice B v grafu G, je enako največjemu številu poti, ki tvorijo a–B ventilator v grafu G.*

Dokaz. Uporabimo izrek 5.1, pri čemer predefiniramo množico A, tj. $A := N(a)$. $\square$

Posledica 5.9. *Naj bosta a in b različni točki v grafu G.*

1. *Če $ab \notin E$, potem je najmanjše število točk, ki so različne od a in b in ki ločijo a od b v grafu G, enako največjemu številu neodvisnih a–b poti v grafu G.*

2. *Najmanjše število povezav, ki ločijo a od b v grafu G, je enako največjemu številu paroma povezavno-disjunktnih a–b poti v grafu G.*

Dokaz. Za prvo točko uporabimo izrek 5.1, pri čemer upoštevamo, da je $A := N(a)$ in $B := N(b)$.
Za dokaz druge točke uporabimo izrek 5.1 na povezavnem grafu grafa G in upoštevamo, da je $A := E(a)$ in $B := E(b)$. $\square$

Izrek 5.10. *Naj bo G graf z $|V(G)| \geq 2$. Potem velja:*

1. *Graf G je k-povezan natanko tedaj, ko med poljubnima dvema točkama vsebuje k neodvisnih poti .*

2. *Graf G je k-povezan po povezavah natanko tedaj, ko med poljubnima dvema točkama vsebuje k paroma povezavno-disjunktnih poti .*

Dokaz.

1. Če graf G vsebuje k neodvisnih poti med katerimakoli točkama, potem $|V(G)| > k$ in grafa G ne moremo ločiti z manj kot k točkami, torej G je k-povezan.
   Predpostavimo obratno, tj. da je graf G k-povezan, ampak G naj še vsebuje točki a in b, ki nista povezani s k neodvisnimi potmi. Po prvi točki iz posledice 5.9 sta a in b sosednji. Naj bo $G' := G - ab$, potem G' vsebuje največ $k-2$ neodvisnih a–b poti. Po prvi točki posledice 5.9, lahko ločimo a in b v grafu G' z množico X, ki ima največ $k-2$ točk. Ker je $|V(G)| > k$, potem vemo, da obstaja vsaj ena točka $v \notin X \cup \{a, b\}$ v grafu G. Sedaj X loči točko v v grafu G' od a ali od b, pa brez škode za splošnost recimo, da od a. Potem je $X \cup \{b\}$ množica z največ $k-1$ točkami, ki ločijo točko v od točke a v grafu G, to pa je v protislovju s predpostavko, da je G k-povezan.

2. Za dokaz druge točke uporabimo drugo točko posledice 5.9.

□

Poglavje 6

Maderjev izrek

V tem poglavju bomo spoznali, kaj je prirejanje, brez dokaza bo podana Tutte-Bergeova formula, sledil bo še Maderjev izrek in ena izmed njegovih posledic. To poglavje je povzeto po poglavjih 24 in 73 knjige [6], razen, če bo drugače omenjeno.

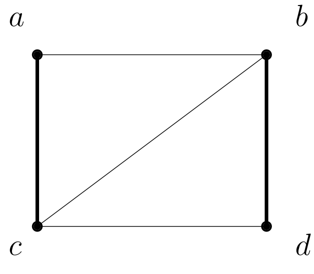
Definicija 6.1. *Naj bo $G = (V, E)$ graf in naj bo $M \subseteq E$. Pravimo, da je M prirejanje v grafu G, če noben par povezav iz množice M nima skupnega krajišča.*

Definicija 6.2. *Naj bo $G = (V, E)$ graf in K naj bo neka komponenta grafa G. Pravimo, da je komponenta K liha, če ima liho število točk. Število lihih komponent grafa G označimo z $o(G)$.*

Izrek 6.3 (Tutte-Bergeova formula [10], [1])**.** *Naj bo $G = (V, E)$ graf. Potem velja:*

$$\nu(G) = \min_{U \subseteq V} \frac{1}{2}(|V| + |U| - o(G - U)),$$

kjer je $\nu(G)$ največja vrednost prirejanja v grafu G.



Slika 6.1: Primer prirejanja.

Poudarjene povezave na zgornji sliki sestavljajo prirejanje $M = \{ac, bd\}$. Z uporabo prejšnjega izreka in malo računanja se prepričamo, da je $|M| = 2$ tudi vrednost izraza na desni strani Tutte-Bergeove formule.

Izrek 6.4 (Gallai [3]). *Naj bo $G = (V, E)$ graf in $T \subseteq V$. Največje število disjunktnih T-poti je enako najmanjši vrednosti števila*

$$\mu = |U| + \sum_K \lfloor \frac{1}{2}|K \cap T| \rfloor,$$

kjer je $U \subseteq V$ in K gre po komponentah grafa $G - U$.

Dokaz. Največje število disjunktnih T-poti, ne presega najmanjše vrednosti števila $|U| + \sum_K \lfloor \frac{1}{2}|K \cap T| \rfloor$, ker za vsak $U \subseteq V$ vsaka T-pot seka U ali pa ima krajišči v množici $K \cap T$, za neko komponento K grafa $G - U$.
Da dokažemo enakost, vpeljimo oznako μ, ki naj bo enaka najmanjši vrednosti števila $|U| + \sum_K \lfloor \frac{1}{2}|K \cap T| \rfloor$.
Z $\widetilde{G} = (\widetilde{V}, \widetilde{E})$ označimo graf, ki preide iz grafa G tako, da dodamo disjunktno kopijo G' grafa $G - T$ in naredimo kopijo v' vsake točke $v \in V \setminus T$, ki jo povežemo z v in z vsako točko, ki je sosednja točki v v grafu G. Z uporabo Tutte-Bergeove formule vidimo, da ima graf $\widetilde{G}$ prirejanje M velikosti $\mu + |V \setminus T|$.
Da se prepričamo, da prejšnja trditev drži, moramo pokazati, da za vsak $\widetilde{U} \subseteq \widetilde{V}$ velja:

$$|\widetilde{U}| + \sum_{\widetilde{K}} \lfloor \frac{1}{2}|\widetilde{K}| \rfloor \geq \mu + |V \setminus T|, \tag{6.1}$$

kjer gre $\widetilde{K}$ po komponentah grafa $\widetilde{G} - \widetilde{U}$. Sedaj vzemimo neko točko $v \in V \setminus T$, če natanko ena od točk v ali v' pripada $\widetilde{U}$, potem jo lahko odstranimo iz $\widetilde{U}$, ne da bi povečali levo stran v neenačbi (6.1).
Torej lahko predpostavimo, da za vsak $v \in V \setminus T$ velja, da sta $v, v' \in \widetilde{U}$ ali pa sta $v, v' \notin \widetilde{U}$. Pred nadaljevanjem dokaza definirajmo $U := \widetilde{U} \cap V$. Potem je vsaka komponenta K grafa $G - U$ enaka $\widetilde{K} \cap V$, za neko komponento $\widetilde{K}$ grafa $\widetilde{G} - \widetilde{U}$.
Torej velja:

$$|\widetilde{U}| + \sum_{\widetilde{K}} \lfloor \frac{1}{2}|\widetilde{K}| \rfloor = |U| + \sum_K \lfloor \frac{1}{2}|K \cap T| \rfloor + |V \setminus T| \geq \mu + |V \setminus T|, \tag{6.2}$$

kjer gre K po vseh komponentah grafa $G - U$. S tem smo dokazali neenakost (6.1).
Torej graf $\widetilde{G}$ ima prirejanje M velikosti $\mu + |V \setminus T|$.
Naj bo N prirejanje $\{vv' | v \in V \setminus T\}$ v grafu $\widetilde{G}$. Ker je $|M| = \mu + |V \setminus T| = \mu + |N|$, ima $M \cup N$ vsaj μ komponent z več povezavami v M kot pa v N. Vsaka taka komponenta je pot, ki povezuje dve točki v T. Če skrčimo povezave v N, dobimo natanko μ disjunktnih T-poti v grafu G. □

Definicija 6.5. *Naj bo $G = (V, E)$ graf in naj bo $\mathcal{S}$ množica dveh ali več disjunktnih podmnožic množice V. Pot v grafu G se imenuje $\mathcal{S}$-pot, če povezuje dve različni množici v $\mathcal{S}$ in nima nobene notranje točke v množicah iz $\mathcal{S}$. Označimo $T := \bigcup \mathcal{S}$.*

Izrek 6.6 (Mader [4]). *Največje število disjunktnih $\mathcal{S}$-poti je enako najmanjši vrednosti števila*

$$|U_0| + \sum_{i=1}^{n} \lfloor \frac{1}{2}|B_i| \rfloor,$$

gledano po vseh takih particijah $U_0, \ldots, U_n$ množice V, da vsaka $\mathcal{S}$-pot seka množico U_0 ali pa vsebuje neko povezavo, ki jo napenja množica U_i. Z B_i označujemo množico točk v U_i, ki pripadajo množici T ali pa imajo soseda v množici točk $V \setminus (U_0 \cup U_i)$.

Dokaz. Naj bo μ najmanjša vrednost števila $|U_0| + \sum_{i=1}^{n} \lfloor \frac{1}{2}|B_i| \rfloor$, ki je navedeno v zgornjem izreku. Največje število disjunktnih $\mathcal{S}$-poti je največ μ, ker ima vsaka $\mathcal{S}$-pot, ki je disjunktna z množico U_0 in gre prek povezave, ki jo napenja nek U_i, vsaj dve točki iz množice B_i.
Naj bo $G = (V, E)$ graf in $\mathcal{S}$ protiprimer. Fiksirajmo množico V in izberimo E in $\mathcal{S}$ tako, da bo vrednost naslednjega izraza minimalna:

$$|E| - |\{\{x, y\} | x, y \in V, \exists X, Y \in \mathcal{S} : x \in X, y \in Y, X \neq Y\}|. \tag{6.3}$$

Potem je vsak $X \in \mathcal{S}$ neodvisna množica grafa G, ker če odstranimo katerokoli povezavo e, ki jo napenja množica X, se največja in najmanjša vrednost v Maderjevem izreku ne spremenita, medtem ko se pa vrednost števila (6.3) zmanjša, saj povezava e ni vsebovana na nobeni $\mathcal{S}$ poti.
Če je $|X| = 1$ za vsak $X \in \mathcal{S}$, potem naš izrek preide na izrek 6.4: za U_0 vzamemo katerokoli množico U, ki minimizira število $|U| + \sum_K \lfloor \frac{1}{2}|K \cap T| \rfloor$ in za množice $U_1, \ldots, U_n$ vzamemo komponente grafa $G - U$.
Torej predpostavimo, da je $|X| \geq 2$, za nek $X \in \mathcal{S}$. Definirajmo množico $\mathcal{S}'$ kot:

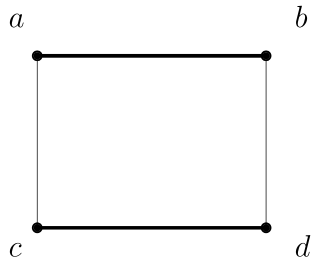
$$\mathcal{S}' := (\mathcal{S} \setminus \{X\}) \cup \{X \setminus \{s\}, \{s\}\}, \text{kjer je } s \in X. \tag{6.4}$$

Če zamenjamo množico $\mathcal{S}$ z množico $\mathcal{S}'$, potem se število (6.3) zmanjša, najmanjša vrednost v Maderjevem izreku pa ostane enaka, zato ker je vsaka $\mathcal{S}$-pot tudi $\mathcal{S}'$-pot in ker je $\bigcup \mathcal{S}' = T$. Torej obstaja neka množica $\mathcal{P}$, ki vsebuje μ disjunktnih $\mathcal{S}'$-poti. Obvezno mora obstajati pot $P_0 \in \mathcal{P}$, ki povezuje točko s z neko drugo točko iz množice X, sicer bi bilo v množici $\mathcal{P}$ μ disjunktnih $\mathcal{S}$-poti. Vse ostale poti v množici $\mathcal{P}$ so $\mathcal{S}$-poti.
Naj bo u neka notranja točka poti P_0 (tak u obstaja, ker je X neodvisna množica).
Definirajmo množico $\mathcal{S}''$ kot:

$$\mathcal{S}'' := (\mathcal{S} \setminus \{X\}) \cup \{X \cup \{u\}\}. \tag{6.5}$$

Z zamenjavo množice $\mathcal{S}$ z množico $\mathcal{S}''$ zmanjšamo število (6.3), vendar ne zmanjšamo najmanjše vrednosti v Maderjevem izreku, ker je vsaka $\mathcal{S}$-pot tudi $\mathcal{S}''$-pot in ker je $T \subseteq \bigcup \mathcal{S}''$.
Torej obstaja množica $\mathcal{Q}$, ki vsebuje μ disjunktnih $\mathcal{S}''$-poti. Izberimo množico $\mathcal{Q}$, tako da je v njej najmanjše število povezav, ki niso vsebovani v elementih

množice $\mathcal{P}$.
Obvezno je točka u krajišče neke poti $Q_0 \in \mathcal{Q}$, sicer bi bilo v $\mathcal{Q}$ μ disjunktnih $\mathcal{S}$-poti. Potem so vse ostale poti v množici $\mathcal{Q}$ $\mathcal{S}$-poti. Ker je $|\mathcal{P}| = |\mathcal{Q}|$ in ker točka u ni krajišče nobene od poti iz množice $\mathcal{P}$, obstaja krajišče r neke poti $P \in \mathcal{P}$, tako da r ni krajišče nobene od poti iz množice $\mathcal{Q}$.
Iz zgornjega vemo, da presek poti P z neko potjo iz množice $\mathcal{Q}$ ni prazen, sicer bi bilo v množici $(\mathcal{Q} \setminus \{Q_0\}) \cup \{P\}$ μ disjunktnih $\mathcal{S}$-poti. Pot P se začne v točki r, zanjo obstaja prva točka w, ki se nahaja na neki poti $Q \in \mathcal{Q}$. Pot Q razdelimo na dva dela, tj. na dve podpoti Q' in Q'' (lahko sta tudi dolžine 0), kjer je točka w končna točka prve in začetna točka druge podpoti. S P' označimo del poti P od točke r do točke w.
Če velja $E(Q') \nsubseteq E(P)$ in $E(Q'') \nsubseteq E(P)$, potem lahko predpostavimo, da točka r, ni v istem razredu množice $\mathcal{S}''$, kot končna točka podpoti Q'. Zamenjamo Q'' s potjo P' na poti Q. Še vedno je Q $\mathcal{S}''$-pot, ki je disjunktna z ostalimi potmi v množici $\mathcal{Q}$. To pa je v protislovju z minimalnostjo množice $\mathcal{Q}$.
Torej lahko predpostavimo, da velja $EQ' \subseteq EP$. Če je $P \neq P_0$ in ko Q ponastavimo na P, potem Q ostaja $\mathcal{S}''$-pot, ki je disjunktna z ostalimi potmi v množici $\mathcal{Q}$. In zopet smo v protislovju z minimalnostjo množice $\mathcal{Q}$.
Torej $P = P_0$ in velja $Q = Q_0$. Zamenjamo Q' s potjo P' v poti Q in s tem dobimo μ disjunktnih $\mathcal{S}$-poti. $\square$



$\mathcal{S} = \{\{a, c\}, \{b, d\}\}$

Slika 6.2: Primer dveh disjunktnih $\mathcal{S}$-poti.

Na zgornji sliki so poudarjeno označene vse možne disjunktne $\mathcal{S}$-poti v danem grafu. Z uporabo prejšnjega izreka se lahko tudi prepričamo, da obstajata natanko dve taki poti.

Definicija 6.7. *Naj bo $G = (V, E)$ graf in naj bo $U \subseteq V$. Z $B_G(U)$ označujemo množico točk, v kateri so točke iz množice U, ki nimajo nobenega soseda v U.*

Posledica 6.8. *Naj bo $G = (V, E)$ graf in naj bo T neodvisna podmnožica (tj. podmnožica paroma nepovezanih točk) množice točk V. Potem je največje* *število neodvisnih T-poti, ki med seboj nimajo nobene skupne točke, enako minimalni vrednosti števila*

$$|U_0| + \sum_{i=1}^{n} \lfloor \frac{1}{2} |B_{G-U_0}(U_i)| \rfloor,$$

kjer je $U_0, U_1, \ldots, U_n$ particija množice $V \setminus T$, tako da vsaka T-pot seka množico U_0 ali pa vsebuje neko povezavo, ki jo napenja množica U_i.

Dokaz. Največje število neodvisnih T-poti, ki so disjunktne po točkah, ne more presegati najmanjše vrednosti števila $|U_0| + \sum_{i=1}^{n} \lfloor \frac{1}{2} |B_{G-U_0}(U_i)| \rfloor$, ker vsaka T-pot, ki se ne seka z množico U_0, vsebuje vsaj dve točki v nekem U_i.
Da se prepričamo, da velja enakost v izreku, predpostavimo, da nobeni dve točki v množici T nimata skupnega soseda v. Sicer uporabimo indukcijo, tako da odstranimo točko v, kar pa zmanjša našo največjo in najmanjšo vrednost števila za ena. Naša posledica sledi iz izreka 6.6, ki ga uporabimo na grafu $G - T$ in družini množic $\mathcal{S} := \{N_{G-T}(s), s \in T\}$ $\square$

Poglavje 7

Zaključek

V zaključni nalogi smo spoznali, kaj je povezanost v grafih, in sicer predvsem povezanost po točkah.
Videli smo, da lahko vsak 2-povezan podgraf konstruiramo iz danega cikla, z dodajanjem novih poti v dan graf. Predstavljen je bil bločni graf. Ugotovili smo, da je bločni graf povezanega grafa drevo, podana je bila ekvivalenčna relacija na množici povezav danega grafa.
Govora je bilo tudi o 3-povezanih grafih in njihovi povezavi s polnim grafom na štirih točkah. Dotaknili smo se tudi nekaj malega algebre v povezavi z grafi, dokazan je bil izrek, ki pove, da je prostor ciklov 3-povezanega grafa generiran z neprereznimi induciranimi cikli grafa.
Na dva načina smo predstavili dokaz Mengerjevega izreka in še nekaj ostalih izrekov, posledic in lem, ki so povezane s tem znamenitim izrekom.
Predstavljena je bila definicija prirejanja, brez dokaza je bila podana Tutte-Berge formula in čisto na koncu je sledil še Maderjev izrek in ena izmed njegovih pomembnejših posledic.

Vse o čemer govori naloga je le majhen del obsežne teme o povezanosti v teoriji grafov. Vsi tisti, ki jih mogoče zanima kaj več o povezanosti, si lahko npr. pogledajo teme, ki govorijo o strukturi minimalnih k-povezanih grafov (to so takšni k-povezani grafi, ki niso več k-povezani, čim jim odstranimo poljubno povezavo). Povezanost v grafih, še posebej Mengerjev izrek, je izjemnega pomena tudi v obsežni teoriji grafovskih minorjev. Struktura grafov iz grafovskih razredov, zaprtih za minorje, je podrobneje predstavljena v seriji več kot dvajsetih člankov N. Robertsona in P. Seymoura s skupnim podnaslovom *Graph Minors*. Definicija grafovskega minorja je podana v prvem poglavju, kratek pregled glavnih rezultatov te teorije pa v dvanajstem poglavju knjige [2].

Literatura

[1] C. Berge, *Sur le couplage maximum d'un graphe*, C. R. Acad. Sci. Paris 247 (1958) 258–259.

[2] R. Diestel, *Graph Theory*, Third Electronic Edition, Springer, New York, 2005.

[3] T. Gallai, *Maximum-minimum Sätze und verallgemeinerte Faktoren von Graphen*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 12 (1961) 131–173.

[4] W. Mader, *Über die Maximalzahl kreuzungsfreier H-Wege*, Archiv Math. (Basel) 31 (1978) 387–402.

[5] K. Menger, *Zur allgemeinen Kurventheorie*, Fund. Math. 10 (1927) 96—115.

[6] A. Schrijver, *Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency*, Springer, 2004.

[7] C. Thomassen, *Planarity and duality of finite and infinite graphs*, J. Combin. Theory B 29 (1980) 244–271.

[8] W.T. Tutte, *A theory of* 3*-connected graphs*, Indag. Math. 23 (1961) 441–455.

[9] W.T. Tutte, *How to draw a graph*, Proc. London Math. Soc. 13 (1963) 743–768.

[10] W.T. Tutte, *The factorization of linear graphs*, J. London Math. Soc. 22 (1947) 107–111.

[11] D. B. West, *Introduction to Graph Theory*, Second Edition, Pearson Education (Singapore) Pte. Ltd., 2002.

[12] H. Whitney, *Congruent Graphs and the Connectivity of Graphs*, Amer. J. Math. 54 (1932) 150–168.

[13] R. J. Wilson in J. J. Watkins, *Uvod v teorijo grafov*, DMFA, Ljubljana, 1997.