(Osnovne) Igre ustvarjanja omrežja

Kratka predstavitev diplome

Peter Milivojević

Fakulteta za matematiko in fiziko

11. januar 2024

(Osnovne) Igre ustvarjanja omrežja

Omrežje lahko ustvarimo na več načinov in pri različnih optimizacijskih pogojih. Omrežje lahko ustvari centralna avtoriteta in tako doseže socialni optimum ali pa več sebičnih igralcev, kjer vsak poskuša doseči svoj sebični optimum v dani situaciji. V diplomski nalogi se bom pretežno ukvarjal z dvema verzijama osnovnih iger ustvarjanja omrežja:

- Maksimalna oddaljenos
- Vsota oddaljenosti

Uporabne definicije

Definicija

Naj bo G povezan graf in $u, v \in V(G)$. Razdalja $d(u, v)$ je dolžina najkrajše poti med vozliščema u in v (t.j. razdalja med u in v) v grafu G.

Definicija

Naj bo G povezan graf. Premer grafa G je definiran kot diam$(G) = \max_{u,v\in V(G)} d(u, v)$, kjer je $d(u, v)$ razdalja med vozliščema u in v v grafu G.

Definicija

Naj bo G povezan graf. Lokalni premer točke v grafa G je definiran kot diam$(G) = \max_{u\in V(G)} d(u, v)$, kjer je $d(u, v)$ razdalja med vozliščema u in v v grafu G.

Definiciji ravnovesja

Definicija

Graf je v $ravnote\check{z}ju\ glede\ na\ vsoto\ razdalj$*, če za vsako povezavo* vw *in za vsako vozlišče* w' *zamenjava povezave* vw *z povezavo* vw' *ne zmanjša celotne vsote razdalj od vozlišča* v *do vseh ostalih vozlišč.*

Definicija

Graf je v $ravnote\check{z}ju\ glede\ na\ maksimalno\ razdaljo$*, če za vsako povezavo* vw *in za vsako vozlišče* w' *zamenjava povezave* vw *z povezavo* vw' *ne zmanjša lokalnega premera vozlišča* v*. Nadalje odstranitev povezave* vw *poveča lokalni premer vozlišča* v*.*

Kritičnost in stabilnost

Definicija

Naj bo G povezan graf. Graf G je $kritičen$ za $odstranitev$ $povezave$, če odstranitev katere koli povezave $uv \in E(G)$ poveča lokalni premer vozlišča v in vozlišča u.

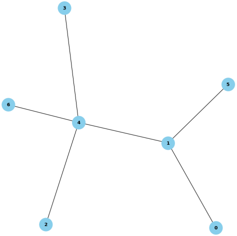
Definicija

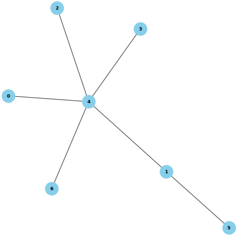
Naj bo G povezan graf. Graf G je $stabilen$ za $dodajanje$ $povezave$, če dodajanje katere koli povezave $uv \in E(G)$ ne zmanjša lokalnega premera vozlišča v in vozlišča u.

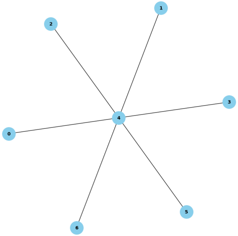
Drevesa: skupna vsota razdalj

Izrek

Če je ravnovesni graf za skupno vsoto razdalj v preprosti igri ustvarjanja omrežja drevo, potem ima premer največ 2 in je kot tak zvezda.







Drevesa: maksimalna razdalja

Lema

V vsakem ravnovesnem grafu igre maksimalne razdalje se lokalni premer za katera koli 2 *poljubna vozlišča razlikuje največ za* 1.

Lema

Če ima ravnovesni graf za maksimalno razdaljo prerezno vozlišče, potem ima lahko samo ena izmed povezanih komponent $G - v$ *vozlišče z razdaljo več kot* 1 *od* v.

Izrek

Če je ravnovesni graf za maksimalno razdaljo drevo, potem ima premer največ 3.

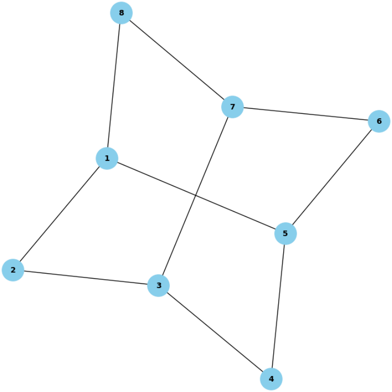
Skupna vsota razdalj: spodnje meje

Izrek

Obstaja ravnovesni graf za skupno vsoto razdalj s premerom 3.

Lema

Za vozlišče v z lokalnim premerom 2, zamenjava sosednje povezave ne izboljša vsote razdalj od v.



Skupna vsota razdalj: zgornja meja $2^{O(\sqrt{\lg n})}$

Izrek

Vsak ravnovesni graf za skupno vsoto razdalj ima premer $2^{O(\sqrt{\lg n})}$.

Lema

Vsak ravnovesni graf za skupno vsoto razdalj ima premer največ $2 \lg n$ *ali za vsako vozlišče* v *obstaja povezava* xy *kjer je* $d(u, x) \leq \lg n$ *in zamenjava povezave* xy *zmanjša vsoto razdalj od* x *za največ* $2n(1 + \lg n)$.

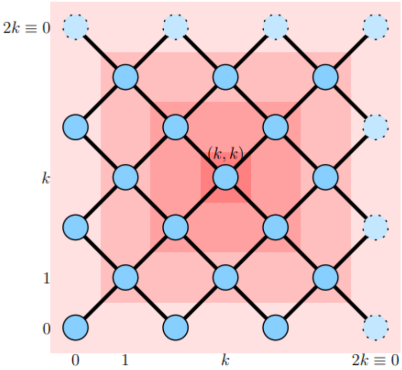
Lema

V vsakem ravnovesnem grafu za skupno vsoto razdalj dodajanje poljubne povezave uv *zmanjša vsoto razdalj od* u *za največ* $5n \log n$.

Maksimalna razdalja

Izrek

Obstaja ravnovesni graf za maksimalno razdaljo z premerom $\Theta(\sqrt{n})$.



Povezava z grafi z enotsko razdaljo

Izrek

Vsak ravnovesni graf za skupno vsoto razdaljo G *z* $n \geq 24$ *vozlišč in premerom* $d > 2\lg n$ *inducira podgraf z* ϵ*-skoraj-enotno-razdaljo* G' *z* n *vozlišči in premerom* $\Theta\left(\frac{\varepsilon d}{\lg n}\right)$ *in podgraf z* ϵ*-enotno-razdaljo* G' *z* n *vozlišči in premerom* $\Theta\left(\frac{\varepsilon d}{\lg^2 n}\right)$.

Domneva

Razdaljno skoraj enotni grafi imajo premer $O(\lg n)$.