Analysis III

January 30, 2015

Contents

1 Wegintegrale **3**
1.1 Wege und Kurven, Parametrisierungen, Tangentenvektor . . . 3
1.2 Weglänge, Parametrisierung mittels Weglänge 3
1.3 Vektorfelder und 1-Formen 4
1.4 Wegintegral (Kurvenintegral) einer 1-Form 6
1.5 Stammfunktionen, Sätze über deren Existenz 6
1.6 Integrabilitätsbedingungen und Lemma von Poincaré 8

2 Mannigfaltigkeiten **9**
2.1 (Satz über implizite Funktionen und) Satz von der Umkehrabbildung 9
2.2 Immersion 10
2.3 Untermannigfaltigkeit und Charakterisierungen 11
2.4 Tangentenvektor, Normalenvektor an Untermannigfaltigkeit . 12

3 Mehrfache Integrale **14**
3.1 Iteriertes Integral und Vertauschung der Reihenfolge 14
3.2 Allgemeine Eigenschaften von Integralen 15
3.3 Partielle Integration 15
3.4 Prinzip von Cavalieri 16
3.5 Transformationsformel (genaue Formulierung, Partition der Eins, Beweisidee) 16
3.6 Oberflächenintegrale über Funktionen und über Vektorfelder . 17
3.7 Lebesgue-Integral 17

4 Integralsätze **18**
4.1 Differentialformen 18
4.2 Äußere Ableitung (Spezialfälle: div, rot, grad) 19

4.3 Integral über Differentialformen 20
4.4 Pullback 21
4.5 Allgemeine Formulierung des Satzes von Stokes 22
4.6 Green und Gauß für Normalenbereiche 22

Chapter 1

Wegintegrale

1.1 Wege und Kurven, Parametrisierungen, Tangentenvektor

Definition (Weg)**.** Sei $I \subseteq \mathbb{R}$. Eine *stetige* Abbildung $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ heißt Weg.

Sei im Folgenden γ stets ein so definierter Weg.

Definition (Regulärer Weg)**.** Ein Weg γ heißt *regulär* wenn γ stetig differenzierbar ist und $\forall t \in I : \dot{\gamma}(t) \neq 0$.

Definition (Parametertransformation)**.** Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle. Eine *zulässige Parametertransformation* ist eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : I \to J$ mit $\dot{\varphi}(t) > 0$, $\forall t \in I$

Definition (Kurve)**.** Eine orientierte (reguläre) Kurve C ist eine Äquivalenzklasse von (regulären) Wegen, wobei zwei Wege γ_1 und γ_2 genau dann äquivalent sind, wenn es eine zulässige Parametertransformation φ gibt, sodass $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$.

Jeder Repräsentant γ von C heißt eine Parametrisierung von C.

1.2 Weglänge, Parametrisierung mittels Weglänge

Definition (Bogenlänge)**.** Sei γ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg, dann heißt

$$L(\gamma) := \int_a^b ||\dot{\gamma}(t)||dt$$

die Bogenlänge von γ.

Lemma (Invarianz unter Parametertransformation)**.** Seien γ_1 und γ_2 äquivalent, dann gilt $L(\gamma_1) = L(\gamma_2)$.

Proof. Substitution. □

Korollar. Die Länge einer regulären Kurve ist wohldefiniert.

Definition (Parametrisierung nach der Weglänge)**.** Sei $\tilde{\gamma}$ eine Parametrisierung, sodass $||\dot{\tilde{\gamma}}(t)|| = 1$. Dann ist $\tilde{\gamma}$ die *Parametrisierung nach der Weglänge.*

evt. Methode zur Ermittlung nachliefern

1.3 Vektorfelder und 1-Formen

Im Folgenden sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $p \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^1$ Funktion.

Definition (Vektorfeld)**.** Eine Abbildung $v : U \to \mathbb{R}^n$ heißt Vektorfeld auf U.

Definition (Gradientenfeld)**.** Sei U zusätzlich offen, dann nennt man das stetige Vektorfeld $v(p) := \nabla f(p)$ ein Gradientenfeld.

Definition (1-Form)**.** Eine 1-Form auf U ist eine Abbildung $\omega : U \to (\mathbb{R}^n)^*$.

Bemerkung (Spezialfall: Gradient)**.** Unter der Identifikation des Gradienten mit dem *Zeilen*vektor der partiellen Ableitungen ist $\nabla f : U \to (\mathbb{R}^n)^*$ ist eine 1-Form.[1]

Definition (Äußeres Differential)**.** Die durch ∇ induzierte 1-Form bezeichnen wir mit df.

[1] $\nabla f(p)$ wäre im eindimensionalen Fall z.B. gerade die Steigung im Punkt p, aber nicht als Zahl, sondern als lineares Funktional (i.e. Multiplikation mit der Steigung).

Bemerkung (Darstellung durch das innere Produkt)**.** Lineare Funktionale kann man stets als inneres Produkt schreiben, also erhalten wir allgemeiner für $h \in \mathbb{R}^n$:

$$\underbrace{\underbrace{df(p)}_{\in(\mathbb{R}^n)^*}(h)}_{\in\mathbb{R}} = \langle \nabla f(p), h \rangle$$

Definition (Basis)**.** Mit dx_j bezeichnen wir von der j-ten Koordinatenprojektion pr_j[2] induzierte 1-Form.

Bemerkung (Dualität)**.** Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ die Standardbasis in $\mathbb{R}^n$, dann gilt $\forall p \in U$:

$$\begin{aligned} dx_j(p)(e_i) &= \langle \nabla pr_j(p), e_i \rangle \\ &= \langle e_j, e_i \rangle \\ &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

Also ist $\{dx_1, \dots, dx_n\}$ die zu $\{e_1, \dots, e_n\}$ duale Basis; daraus folgt die folgende Darstellung von $df(p)$:

$$df(p) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{D_i f(p)}_{\in\mathbb{R}} \underbrace{dx_i(p)}_{\in(\mathbb{R}^n)^*}$$

Proposition (Identifikation von 1-Formen mit Vektorfeldern)**.** Sei U offen.

Für jede 1-Form ω existiert genau ein $f = (f_1, \dots, f_n) : U \to \mathbb{R}^n$ sodass $\forall p \in U$:

$$\omega(p) = \sum_{i=1}^{n} f_i(p) dx_i(p) \tag{1.1}$$

Außerdem ist $v = (v_1, \dots, v_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} v_i dx_i$ ein Isomorphismus (i.e. bijektiv und linear).

Proof. Technischer Beweis. □

Definition (Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer 1-Form)**.** Eine 1-Form ist genau dann stetig/differenzierbar wenn es all ihre Komponentenfunktionen (vgl. (1.1)) sind.

[2] $pr_j(x_1, \dots, x_n) = x_j$

1.4 Wegintegral (Kurvenintegral) einer 1-Form

Definition (Wegintegral von ω über γ).

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b \underbrace{\omega(\gamma(t))}_{\in(\mathbb{R}^n)^*}(\underbrace{\dot\gamma(t)}_{\in\mathbb{R}^n})dt$$

Bemerkung. Findet man eine Darstellung von ω mit Komponentenfunktionen $(f_1, \dots, f_n) = f$, so haben wir:

$$\omega(\gamma(t))(\dot\gamma(t)) = \sum_{i=1}^n f_i(\gamma(t))(\dot\gamma(t))_i = \langle f(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle$$

Lemma (Unabhängigkeit des Wegintegrals von der Parametrisierung). Sei φ eine zuläßige Parametertransformation, dann gilt:

$$\int_{\gamma\circ\varphi} \omega = \int_\gamma \omega \tag{1.2}$$

Proof. Substitution. □

Definition (Kurvenintegral). Sei γ ein beliebiger Repräsentant der Kurve C, dann definiert man $\int_C \omega := \int_\gamma \omega$.

Bemerkung. Wegen (1.2) ist das Kurvenintegral wohldefiniert.

Bemerkung. Mit der Identifikation von 1-Formen und Vektorfeldern (vgl. (1.1), kurz $\tilde v = \langle v, dx\rangle$) können wir folgende Definition vornehmen:

Definition (Kurvenintegrale über Vektorfeler).

$$\int_C \tilde v = \int_C \langle v, dx\rangle = \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle dt$$

1.5 Stammfunktionen, Sätze über deren Existenz

Definition (Stammfunktion einer 1-Form). $F : U \to \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von ω genau dann wenn $dF = \omega$.[3]

[3] $dF = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i$

Definition (Exaktheit)**.** Eine 1-Form heißt exakt, wenn sie eine Stammfunktion besitzt.

Bemerkung (Spezialfall: Vektorfelder)**.** v ist ein Gradientenfeld $\Leftrightarrow$ $\tilde{v}$ ist exakt.

Lemma ("Hauptsatz" für 1-Formen)**.** Sei ω eine exakte 1-Form und F eine Stammfunktion von ω. Für *jeden* stückweisen $\mathcal{C}^1$ Weg $\gamma : [a,b] \to U$ gilt:

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma dF = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \tag{1.3}$$

Proof. Kettenregel. □

Korollar (Integration über geschlossene Wege)**.** ω exakt $\Rightarrow \int_\gamma \omega = 0$ für alle γ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Definition (Gebiet)**.** Ein Gebiet im $\mathbb{R}^n$ ist eine offene und wegzusammenhängende Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Lemma (Stückweise Differenzierbarkeit von Wegen in Gebieten)**.** In einem Gebiet lassen sich je zwei Punkt nicht nur durch einen stetigen Weg, sondern sogar durch einen stückweise stetig differenzierbaren Weg verbinden.

Proof. Idee: Da man in einer offenen Teilmenge ist, kann man einen Weg als endliche Vereinigung linearer (also insbesondere differenzierbarer) Abschnitte mit Abstand echt größer 0 zum Rand konstruieren. □

Theorem (Zusammenhang exakt und Integral über geschlossene Wege)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, ω eine stetige 1-Form auf U und γ ein beliebiger geschlossener, stückweise stetig differenzierbarer Weg in U. Dann gilt:

ω exakt in $U \Leftrightarrow \forall\gamma : \int_\gamma \omega = 0$

Proof. "$\Rightarrow$" wurde bereits gezeigt.

"$\Leftarrow$": Idee: Setze $F(x) = \int_{x_0}^{x} \omega = \int_\alpha \omega$ mit $\alpha(0) = x_0, \alpha(1) = x$.

Wohldefiniert, denn für jeden[4] anderen Weg β mit $\beta(0) = x_0, \beta(1) = x$ gilt: $\alpha + (-\beta) =: \gamma$ ist ein geschlossener Weg und $0 = \int_\gamma \omega = \int_\alpha \omega - \int_\beta \omega$.

Um zu zeigen, dass das tatsächlich eine Stammfunktion von ω ist, i.e. $dF = \omega$, zeigt man, dass für $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$ gilt: $f_i = D_i F$.

Betrachte dafür $F(x + he_i) - F(x)$ im Grenzwert $h \to 0$. □

[4] Alle Wege müssen natürlich in U liegen.

1.6 Integrabilitätsbedingungen und Lemma von Poincaré

Definition (Geschlossenheit)**.** Eine stetig differenzierbare 1-Form $\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i$ auf U heißt geschlossen, falls

$$D_i f_j = D_j f_i \tag{1.4}$$

Theorem (Pointcaré)**.** Sei U ein sternförmiges Gebiet und ω eine stetig differenzierbare 1-Form, dann gilt:

ω exakt $\Leftrightarrow$ ω geschlossen[5]

Proof. "$\Rightarrow$": Nach dem Satz von Schwarz gilt: ω exakt $\Rightarrow$ ω geschlossen.

"$\Leftarrow$": Sei oBdA U sternförmig bez. 0. Dann definiert man $F(x) := \int_0^1 \omega(tx)(x)dt$.

Als Parameterintegral ist es stetig differenzierbar.

Es bleibt zu zeigen, dass $D_i F = f_i$. □

[5] "Geschlossenheit" hat *nichts* mit dem Integral über geschlossene Wege zu tun. Das sind nur die Integrationsbedingungen (1.4)!

Chapter 2

Mannigfaltigkeiten

2.1 (Satz über implizite Funktionen und) Satz von der Umkehrabbildung

Theorem (Satz über implizite Funktionen)**.** Sei $(a, b) \in U_1 \times U_2 \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ (U_1, U_2 offen) mit $F : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$, $F(a, b) = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)$[1] invertierbar.

Dann gibt es offene Umgebungen $V_1 \subseteq U_1$ von a, $V_2 \subseteq U_2$ von b und eine eindeutige, stetig differenzierbare Abbildung $g : V_1 \to V_2$ mit $g(a) = b$ und $F(x, g(x))$ für alle $(x, y) \in V_1 \times V_2$.

Außerdem gilt $Dg(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))$.

Bemerkung (Merkhilfe)**.**

$$DF(x, g(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))Dg(x)$$

Da $F(x, g(x)) = 0$ in einer geeigneten Umgebung ist

$$Dg(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))$$

Theorem (Satz von der Umkehrabbildung)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $a \in U$ und $b := f(a)$.

Falls $Df(a)$ invertierbar ist, dann existiert eine offene Umgebung U_0 von a und analog V_0 eine offene Umgebung von b mit $f|_{U_0} : U_0 \to V_0$ bijektiv und für $g := (f|_{U_0})^{-1}$ gilt die Gleichung

[1] y ist das zweite Argument

$$Dg(b) = (Df(a))^{-1}$$

Bemerkung (Aussage des Theorems)**.** Um zu überprüfen ob eine Abbildung lokal invertierbar ist reicht es sich die Ableitung an dem Punkt anzusehen.

2.2 Immersion

Definition (Diffeomorphismus)**.** $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to V$ bijektiv und $\mathcal{C}^1$. Ist f^{-1} ebenfalls $\mathcal{C}^1$, so nennt man f einen $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus.

Lemma ($\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismen)**.** Ist f ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus und k-mal stetig differenzierbar, dann ist f ein $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus.

Definition (Immersion)**.** Sei $T \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $\Phi : T \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $\forall t \in T : \text{Rang} D\Phi(t) = k$ dann heißt Φ Immersion.

Definition (k-Flächen)**.** $F := \Phi(T) \subseteq \mathbb{R}^n$ wird als parametrisierte k-Fläche bezeichnet.

Bemerkung (Eigenschaften von Immersionen)**.**

- $\forall t \in T : \text{Rang} D\Phi(t) = k$ impliziert $k \leq n$.
- $\forall t \in T : \text{Rang} D\Phi(t) = k$ impliziert auch, dass man für jedes $t \in T$ k von den n Komponentenfunktionen auswählen können, sodass $\det \frac{\partial(\Phi_{i_1}, \ldots, \Phi_{i_k})}{\partial(t_1, \ldots, t_k)}(t) \neq 0$ für eine offene Umgebung von t.
- Für $k = 1$ erhalten wir reguläre Kurven.
- Für $k = n$ ist Φ ein lokaler $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus.

Definition (Homöomorphismus)**.** Ist Φ stetig und bijektiv mit stetiger Inverser, nennt man es einen Homöomorphismus.

Lemma (Immersion ist ein Homöomorphismus)**.** $\Phi : T \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion. Dann gibt es für alle $t \in T$ eine offene Umgebung $V \subseteq T$, sodass $\Phi|_V$ ein Homöomorphismus ist.

Proof. Idee: Satz von der Umkehrabbildung und Einschränkung auf die Komponenten für die $\det \frac{\partial(\Phi_{i_1}, \ldots, \Phi_{i_k})}{\partial(t_1, \ldots, t_k)}(t) \neq 0$ gilt. □

2.3 Untermannigfaltigkeit und Charakterisierungen

Definition (Untermannigfaltigkeit)**.** $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ falls $\forall a \in M : \exists$ offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von a, $T \subseteq \mathbb{R}^k$ und eine Immersion $\Phi : T \to \mathbb{R}^n$, sodass:

- Φ ist ein Homöomorphismus $T \to \Phi(T)$[2]
- $\Phi(T) = M \cap U$

Weiters nennen wir $\Phi : T \to M \cap U$ eine *lokale Parametrisierung* von M nahe a und Φ^{-1} eine *Karte*.

Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt differenzierbar, falls sie überall lokal differenzierbar ist.

für konkrete Beispiele wie Rotationsflächen, etc. bitte das Skriptum nehmen.

Theorem. Für $M \subseteq \mathbb{R}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- M ist eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit
- *Lokale Darstellung als Graph:* $\forall a = (a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_n) \in M$ gilt: zu $a' = (a_1, \ldots, a_k)$ und $a'' = (a_{k+1}, \ldots, a_n)$[3] gibt es offene Umgebungen $U' \subseteq \mathbb{R}^k$ und $U'' \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $g : U' \to U''$, sodass $M \cap (U' \times U'') = \{(x, g(x)) : x \in U'\}$
- *Lokale Beschreibung als Nullstellenmenge:* $\forall a \in M$ existiert offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und stetig differenzierbare Funktionen $f_1, \ldots, f_{n-k} : U \to \mathbb{R}$ mit $\forall x \in M \cap U : \operatorname{Rang}\frac{\partial(f_1,\ldots,f_{n-k})}{\partial(x_1,\ldots,x_{n-k})}(x) = n - k$ und $M \cap U = \{x \in U : f_1(x) = \cdots = f_{n-k}(x) = 0\}$.
- *Lokal diffeomorph zu einem k-dimensionalen Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$:* Sei $E_k := \{x_1, \ldots, x_k, 0 \ldots, 0 : x_i \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ die Einbettung eines k-dimensionalen Vektorraumes in $\mathbb{R}^n$. Für alle $a \in M$ existiert eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein offenes $V \subseteq \mathbb{R}^n$, sowie einen $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus $F : U \to V$ mit $F(M \cap U) = E_k \cap V$.

[2] Dass es ein T gibt, sodass $\Phi|_T$ ein Homöomorphismus ist wurde im vorigen Lemma gezeigt; die Bedingung ist also mehr als Einschränkung für die nächste ($\Phi(T) = M \cap U$) zu sehen.

[3] evt. nach Umnummerierung

Proof. Der Beweis sei dem interessierten Leser als Übungsaufgabe überlassen. □

Korollar (Niveaumengen)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $c \in \mathbb{R}$ und $N_f(c) := f^{-1}(c) \subseteq \mathbb{R}^n$. Falls $\forall x \in N_f(c) : \nabla f(x) \neq 0$, dann ist $N_f(c)$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

2.4 Tangentenvektor, Normalenvektor an Untermannigfaltigkeit

Sei im Folgenden M stets eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

Definition (Tangentialvektor)**.** $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor an M im Punkt a, wenn es einen stetig differenzierbaren Weg $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ gibt, mit $\gamma(0) = a$ und $\dot{\gamma}(0) = v$.

Definition (Normalenvektor)**.** $n \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor an M im Punkt a, wenn $\langle n, v \rangle = 0$ für alle Tangentenvektoren v.

Definition (Tangential-/Normalenraum)**.**

$$T_a(M) := \{v \in \mathbb{R}^n : v \text{ Tangentialvektor an M in a}\}$$

$$N_a(M) := \{w \in \mathbb{R}^n : w \text{ Normalenvektor an M in a}\}$$

Definition (Tangential-/Normalenbündel)**.**

$$T(M) := \bigcup_{a \in M} \{a\} \times T_a(M)$$

$$N(M) := \bigcup_{a \in M} \{a\} \times N_a(M)$$

Theorem (Basis des Tangential-/Normalenraums)**.** Für jede lokale Parametrisierung Φ mit $\Phi(t_0) = a$ ist $\{D_1\Phi(t_0), \dots, D_k\Phi(t_0)\}$ eine Basis von $T_a(M)$.

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von a und M nahe a gegeben durch $M \cap U = \{x \in U : f_1(x) = \dots = f_{n-k}(x) = 0\}$, dann ist $\{\nabla f_1(a), \dots, \nabla f_{n-k}(a)\}$ eine Basis von $N_a(M)$.

Korollar (Lagrangemultiplikatoren)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\underbrace{f}_{\text{Hauptbedingung}}$, $\underbrace{g_1, \dots, g_r}_{Nebenbedingungen}$: $U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $r \leq n$, Rang der Jacobimatrix $D(g_1, \dots, g_r)$ maximal für alle $x \in M$, wobei $M = \{x \in U : g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$.

Falls f in $a \in M$ ein lokales Minimum/Maximum besitzt, dann existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, sodass

$$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \nabla g_i(a)$$

Proof. Idee: Wissen, dass M eine $(n-r)$-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Angenommen f habe in a ein lokales Maximum/Minimum, dann gilt für jeden $\mathcal{C}^1$ Weg γ auf M mit $\gamma(0) = a$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}(f(\gamma(t)))|_{t=0} = \langle \nabla f(\gamma(0)), \dot{\gamma}(0) \rangle$$

Da das für beliebige Wege γ gilt durchlaufen wir dabei den ganzen Tangentialraum; also ist $\nabla f(a) \in N_a(M)$. $\square$

Chapter 3

Mehrfache Integrale

3.1 Iteriertes Integral und Vertauschung der Reihenfolge

Lemma (Reihenfolge Doppelintegral)**.** Ist $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig, dann gilt:

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

Proof. Idee: Definiere Hilfsfunktion $\varphi(y) := \int_a^b \left(\int_c^y f(x,t)dt \right) dx$, man sieht $\varphi'(y) = \int_a^b f(x,y)dx$. Setzt man nun das Integral in der verkehrten Reihenfolge an, benutzt die Identität $\varphi'(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ und $\varphi(c) = 0$ erhält man das gewünschte Ergebnis. □

Definition (Integral über Quader)**.** Sei $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ ein Quader, dann ist für jede stetige Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ das Integral von f über Q definiert als: $\int_Q f(x)dx := \int_{a_n}^{b_n} \left(\ldots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \right) \ldots \right) dx_n$.

Definition (Support einer Funktion)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$, dann ist der Träger von f definiert als: $\mathrm{supp} f := \overline{\{x \in U : f(x) \neq 0\}} \cap U$

Definition (Vektorraum stetiger Funktionen mit kompaktem Träger)**.** Mit $\mathcal{C}_c(U) := \{f \in \mathcal{C}(U) : \mathrm{supp} f \text{ ist kompakt}\}$ bezeichnen wir den Vektorraum stetiger Funktionen mit kompaktem Träger.

Definition. Für $f \in \mathcal{C}_c$ definieren wir $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx := \int_Q f(x)dx$ für ein geeignetes Q.

3.2 Allgemeine Eigenschaften von Integralen

Theorem (Eigenschaften des Integrals auf $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$)**.** Seien $f, g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt:

- $\int_{\mathbb{R}^n} (f + \lambda g)(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx$
- angenommen $\forall x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq g(x)$, dann gilt: $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx$
- sei $a \in \mathbb{R}^n$, dann gilt: $\int_{\mathbb{R}^n} f(x + a) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$

Proof. Die ersten beiden Punkte folgen direkt aus der Definition (iterierte eindimensionale Integrale), der letzte Punkt mittels Substitution in jedem der iterierten Integrale. □

Bemerkung (Integral als lineares Funktional)**.** Das so definierte Integral ist ein lineares, monotones und translationsinvariantes Funktional auf $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$; man kann zeigen, dass jedes lineare Funktional mit diesen Eigenschaften (bis auf Normierung) gerade durch ein Integral gegeben sein muss.

Theorem (Stetigkeit des Integrals)**.** Seien $f, f_k \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ für $k \in \mathbb{N}$ und es existiere K kompakt mit $\operatorname{supp}(f_k) \subseteq K$. Wenn $f_k \to f$ glm., dann

$$\lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx.$$

3.3 Partielle Integration

Im Folgenden bezeichne $\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x \in U \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n \setminus U \end{cases}$

Definition (Integral über offene Teilmengen)**.** Für $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, setze $\int_U f(x) dx := \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x) dx$

Theorem. Sei $f \in \mathcal{C}^1(U), \varphi \in \mathcal{C}^1_c(U)$, dann gilt:

$$\int_U D_j \varphi(x) = 0$$

und

$$\int_U D_j f(x) \varphi(x) dx = - \int_U f(x) D_j \varphi(x) dx$$

Proof. Die erste Gleichung folgt durch aufspalten in iterierte Integrale und Vertauschung der abgeleiteten Komponente nach innen; Integration über 0 bleibt 0 und das Ergebnis folgt.

Die zweite Gleichung folgt aus partieller Integration (erinnere: $D_j(f\varphi) = D_j f\varphi + f D_j\varphi$) und daraus, dass $\int_U D_j(f\varphi) = 0$ ist (wegen der ersten Gleichung). □

3.4 Prinzip von Cavalieri

Idee: Schneide $K \subseteq \mathbb{R}^n$ in $(n-1)$-dimensionale "Scheiben" $K_t := \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : (x', t) \in K\} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$.

Theorem (Cavalieri)**.** Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, dann gilt:

$$\mathrm{Vol}_n(K) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{Vol}_{n-1}(K_t)dt$$

Proof. K_t ist wieder kompakt und es gilt $\chi_{K_t}(x') = \chi_K(x', t)$, daher ist

$$\mathrm{Vol}_n(K) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_{K_t}(x')dx'dt = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{Vol}_{n-1}(K_t)dt.$$

□

3.5 Transformationsformel (genaue Formulierung, Partition der Eins, Beweisidee)

Theorem (Transformationsformel)**.** Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi : U \to V$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus, dann gilt: $\forall f \in \mathcal{C}_c(V)$ ist $f \circ \Phi \in \mathcal{C}_c(U)$ und

$$\int_U f(\Phi(x))|\mathrm{det} D\Phi(x)|dx = \int_V f(x)dx$$

Proof. Idee:

- Jeder Diffeomorphismus G läßt sich lokal als Verknpfung zweier Typen aufspalten:
  Typ A: $G(x) = (x_1, \ldots, x_{m-1}, g(x), x_{m+1}, \ldots, x_n)$
  Typ B: Transposition die zwei Basisvektoren vertauscht und alle anderen fix läßt

- Die Partition der Eins ermöglicht genau so eine Lokalisierung.
- Durch Aufspalten in iterierte Integrale kann man die Substitutionsregel aus dem Eindimensionalen auf Typ A anwenden, Typ B kehrt lediglich das Vorzeichen um.

$\square$

diesen Beweis nochmal genau anschauen

3.6 Oberflächenintegrale über Funktionen und über Vektorfelder

Definition (Oberflächenintegral im $\mathbb{R}^3$)**.** Sei $T \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $\Phi : T \to \mathbb{R}^3$ eine Immersion und $K \subseteq T$ kompakt, dann definiert man für stetige $f : \Phi(K) \to \mathbb{R}$ das *Oberflächenintegral*

$$\int_{\Phi(K)} f dS := \int_K f(\Phi(t))||N_\Phi(t)||dt$$

wobei $N_\Phi(t) = D_{t_1}\Phi(t) \times D_{t_2}\Phi(t)$, also der Normalenvektor (=Kreuzprodukt der Tangentialvektoren) ist.

Lemma (Unabhängigkeit von der Parametrisierung)**.**

3.7 Lebesgue-Integral

Siehe Einleitung von Gröchenig (ist bereits kurz und bündig zusammengefasst).

Chapter 4

Integralsätze

Achtung: Dieses Kapitel ist nach dem Skriptum das online verfügbar ist/Wikipedia erarbeitet worden. Sollte etwas anders als in der Vorlesung gemacht worden sein bitte ich um einen Hinweis!

4.1 Differentialformen

Definition (k-Form)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, dann nennt man eine eine Abbildung $\omega : U \to \bigwedge^k (\mathbb{R}^n)^*$ eine k-Form.[1]

Bemerkung (Alternative Notation)**.** Sei $\{dx_{i_1}(p) \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}(p)\}$ die zur Standardbasis im $\mathbb{R}^n$ duale Basis, dann erhält man eine eindeutige Darstellung von k-Formen durch

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} f_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} =: \sum_{|I|=k} f_I dx_I$$

mit Komponentenfunktionen $f_{i_1,\ldots,i_k} : U \to \mathbb{R}$.

Definition (Stetigkeit, etc.)**.** Eine k-Form heißt stetig/differenzierbar/... wenn es ihre Komponentenfunktionen sind.

Definition (Elementare Operationen)**.** Addition, Skalarmultiplikation und das Wedge-Produkt sind alle punktweise definiert.

[1] Streng genommen nehmen k-Formen Elemente aus dem Tangentialraum; da man den im Falle von Untermannigfaltigkeiten (also im euklidischen Raum) aber stets wieder mit dem euklidischen Raum identifizieren kann wird hier darauf kein Wert mehr gelegt.

4.2 Äußere Ableitung (Spezialfälle: div, rot, grad)

Definition (Äußere Ableitung)**.** Für $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $k = 0$ und $f : U \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1$ ist die äußere Ableitung wie gewohnt definiert durch:

$$df := \sum_{i=1}^{n} D_i f dx_i$$

Für $k \geq 1$ und $\omega = \sum_{|I|=k} f_I dx_I$:

$$d\omega := \sum_{|I|=k} df_I \wedge dx_I$$

Bemerkung (Spezialfälle im $\mathbb{R}^3$)**.**

1. $k = 1$ und $\omega = \sum_{i=1}^{3} f_i dx_i$:

   $$d\omega = \sum_{i,j=1}^{3} D_i f_j dx_i \wedge dx_j = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (D_i f_j - D_j f_i) dx_i \wedge dx_j$$

   wobei diese Koeffizienten genau denen von $\operatorname{rot}(f_1, f_2, f_3)$ entsprechen.

2. $k = 2$ und $\omega = f_{12} dx \wedge dy + f_{13} dx \wedge dz + f_{23} dy \wedge dz$:

   $$\begin{aligned} d\omega &= D_3 f_{12} dz \wedge dx \wedge dy + D_2 f_{13} dy \wedge dx \wedge dz + D_1 f_{23} dx \wedge dy \wedge dz \\ &= (D_1 f_{23} - D_2 f_{13} + D_3 f_{12}) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

   Insbesondere lässt sich unter der Identifizierung $v := (f_{12}, -f_{13}, f_{23})$ das Ergebnis auch als $d\omega = \operatorname{div}(v) dx \wedge dy \wedge dz$ schreiben.

Lemma (Linearität)**.** $d(\omega_1 + \lambda\omega_2) = d\omega_1 + \lambda d\omega_2$

Theorem (Graduierte Leibniz-Regel)**.** Seien ω_k, ω_l zwei stetig differenzierbare k-/l-Formen, dann gilt:

$$d(\omega_k \wedge \omega_l) = (d\omega_k) \wedge \omega_l + (-1)^k \omega_k \wedge (d\omega_l)$$

Theorem ($d \circ d = 0$)**.** Ist ω eine $\mathcal{C}^2$ k-Form, dann gilt:

$$d(d\omega) = 0$$

Bemerkung. Im $\mathbb{R}^3$ bedeutet das gerade

$$\mathrm{rot}(\nabla f) = 0$$

Für ω 2-Form wissen wir dass für ein geeignetes v gilt: $d\omega = \mathrm{div}(v) dx \wedge dy \wedge dz$. Wählt man nun b so, dass $\mathrm{rot}(b) = v$, gilt:

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}(b)) = 0$$

Definition (Geschlossenheit)**.** Eine k-Form ω heißt geschlossen wenn $d\omega = 0$.

Bemerkung. Für $k = 1$ stimmt diese Definition mit der für 1-Formen überein, denn $d\omega = \sum_{i,j=1}^n D_i f_j dx_i \wedge dx_j = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (D_i f_j - D_j f_i) dx_i \wedge dx_j$.

Definition (Exaktheit)**.** Sei $k \geq 1$ und ω eine stetige k-Form auf U offen, dann heißt ω exakt wenn es eine auf U differenzierbare $(k-1)$-Form ν gibt, sodass $d\nu = \omega$.

Bemerkung. Ist $\omega = d\nu$ exakt, so gilt $d\omega = d(d\nu) = 0$, also folgt Geschlossenheit.

Theorem (Poincaré)**.** U sternförmig und ω geschlossene stetig differenzierbare k-Form auf $U \Leftrightarrow \omega$ exakt.

4.3 Integral über Differentialformen

Definition (Integration von n-Formen)**.** Ist $K \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$, K kompakt, U offen und $\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetige n-Form

$$\int_K \omega := \int_K f(x) dx$$

Definition (Orientierungserhaltende Abbildungen)**.** $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi : U \to V$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus.

Φ heißt orientierungstreu wenn $\det(D\Phi) > 0 \forall x \in U$ und orientierungsumkehrend sonst.[2]

[2] $\det(D\Phi) = 0$ ist unmöglich weil Diffeomorphismus.

Theorem (Unabhängigkeit der Parametrisierung)**.** Ist $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $K \subseteq U$ kompakt, $\Phi : U \to V$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus und ω stetige n-Form auf V.

$$\int_{\Phi(K)} \omega = \pm \int_K \Phi^* \omega$$

wobei das Vorzeichen positiv ist wenn Φ orientierungserhaltend ist und negativ sonst.

Proof. Transformationsformel. □

4.4 Pullback

Definition (Pullback)**.** $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n) : V \to U \in \mathcal{C}^1$, ω k-Form auf U:

$$\Phi^* \omega := \sum_{|I|=k} (f_I \circ \Phi) d\phi_I$$

Bemerkung (Spezialfälle)**.**

1. $k = 0$: $\Phi^* f = f \circ \Phi$
2. $k = 1$: $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$, also $\Phi^* \omega = \sum_{i=1}^n (f_i \circ \Phi) d\phi_i$, wobei $d\phi_i = \sum_{j=1}^m D_j \phi_i dt_j$.
3. $m = k$: $\Phi^* \omega = \sum_{|I|=k} (f_I \circ \Phi) d\phi_I$ mit $d\phi_I = \det((D_j \Phi_{i_l})_{l,j=1,\ldots,k}) dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_k$
4. $m = n = k$: $\Phi^* \omega = (f \circ \Phi) \det(D\Phi) dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n$ für $\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$

Theorem (Eigenschaften von Pullbacks)**.**

1. $\Phi^*(\omega_1 + \lambda \omega_2) = \Phi^* \omega_1 + \lambda \Phi^* \omega_2$
2. $\Phi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = (\Phi^* \omega_1) \wedge (\Phi^* \omega_2)$
3. ω in $\mathcal{C}^1$, Φ in $\mathcal{C}^2$, dann gilt $d(\Phi^* \omega) = \Phi^*(d\omega)$
4. Für geeignete Definitions und Bildbereiche: $\Psi^*(\Phi^* \omega) = (\Phi^* \circ \Psi^*) \omega$

4.5 Allgemeine Formulierung des Satzes von Stokes

Theorem (Satz von Stokes)**.** $k \geq 2$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $M \subseteq U$ eine orientierte k-dimensionale $\mathcal{C}^2$ Untermannigfaltigkeit[3], $A \subseteq M$ kompakt mit glattem Rand[4] (induzierte Orientierung), ω stetig differenzierbare $(k-1)$-Form auf U, dann gilt:

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega.$$

4.6 Green und Gauß für Normalenbereiche

Theorem (Green)**.** ∂A positiv orientiert, stückweise stetig differenzierbar eine geschlossene Kurve in einer Ebene und A ein kompaktes Flächenstück. $f, g : A \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

$$\int_{\partial A} (f dx + g dy) = \int_A \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) d(x,y)$$

Proof. Mit Stokes:

$$\int_{\partial A} (f dx + g dy) = \int_{\partial A} \omega = \int_A d\omega$$

$$= \int_A \underbrace{D_x f \wedge dx \wedge dx}_{=0} + \underbrace{D_y f \wedge dy \wedge dx}_{=-D_y f \wedge dx \wedge dy} + D_x g \wedge dx \wedge dy + \underbrace{D_y g \wedge dy \wedge dy}_{=0}$$

$$= \int_A (D_x g - D_y f) \wedge dx \wedge dy = \int_A \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) d(x,y)$$

$\square$

Bemerkung (Spezialfall)**.** Wählt man $\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 1$ (e.g. durch $f(x,y) = -\frac{y}{2}, g(x,y) = \frac{x}{2}$) erhält man genau $\mathrm{Vol}_2(A)$.

---

[3] $\mathcal{C}^1$ reicht eigentlich, $\mathcal{C}^2$ steht im Skriptum weil es leichter zu beweisen ist.

[4] Rand stets relativ zur Mannigfaltigkeit zu nehmen.

Theorem (Gauß)**.** $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, M eine 3-dimensionale $\mathcal{C}^2$-Untermannigfaltigkeit, $A \subseteq M$ kompakt mit glattem Rand, $\nu : M \to \mathbb{R}^3$ das Einheitsnormalenfeld auf ∂A, $f = (f_1, -f_2, f_3)$[5], $\omega = f_1 d_y \wedge d_z + f_2 d_x \wedge d_z + f_3 d_x \wedge d_y$:

$$\int_{\partial A} \omega = \boxed{\int_{\partial A} \langle f, \nu \rangle dS = \int_A \operatorname{div}(f)} = \int_A d\omega$$

[5]Das "$-$" handelt man sich beim Vertauschen von $dx \wedge dz$ ein, siehe Abschnitt zu äußeren Ableitungen. Alternativ könnte man dem Vorzeichen auch aus dem Weg gehen indem man die zweite Komponente von ω in der Form $d_z \wedge d_x$ schreibt; das wird allerdings leichter für einen Tippfehler gehalten.