Analysis III

January 24, 2015

Contents

Chapter 1

Wegintegrale

1.1 Wege und Kurven, Parametrisierungen, Tangentenvektor

Definition (Weg)**.** Sei $I \subseteq \mathbb{R}$. Eine *stetige* Abbildung $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ heißt Weg.

Sei im Folgenden γ stets ein so definierter Weg.

Definition (Regulärer Weg)**.** Ein Weg γ heißt *regulär* wenn γ stetig differenzierbar ist und $\forall t \in I : \dot{\gamma}(t) \neq 0$.

Definition (Parametertransformation)**.** Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle. Eine *zulässige Parametertransformation* ist eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : I \to J$ mit $\dot{\varphi}(t) > 0, \forall t \in I$

Definition (Kurve)**.** Eine orientierte (reguläre) Kurve C ist eine Äquivalenzklasse von (regulären) Wegen, wobei zwei Wege γ_1 und γ_2 genau dann äquivalent sind, wenn es eine zulässige Parametertransformation φ gibt, sodass $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$.

Jeder Repräsentant γ von C heißt eine Parametrisierung von C.

1.2 Weglänge, Parametrisierung mittels Weglänge

Definition (Bogenlänge)**.** Sei γ ein stckweise stetig differenzierbarer Weg, dann heißt

$$L(\gamma) := \int_a^b ||\dot{\gamma}(t)||dt$$

die Bogenlänge von γ.

Lemma (Invarianz unter Parametertransformation)**.** Seien γ_1 und γ_2 äquivalent, dann gilt $L(\gamma_1) = L(\gamma_2)$.

Proof. Substitution. $\square$

evt. Beweis schreiben

Korollar. Die Länge einer regulären Kurve ist wohldefiniert.

Definition (Parametrisierung nach der Weglänge)**.** Sei $\tilde{\gamma}$ eine Parametrisierung, sodass $||\dot{\tilde{\gamma}}(t)|| = 1$. Dann ist $\tilde{\gamma}$ die *Parametrisierung nach der Weglänge.*

evt. Methode zur Ermittlung nachliefern

1.3 Vektorfelder und 1-Formen

Im Folgenden sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $p \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^1$ Funktion.

Definition (Vektorfeld)**.** Eine Abbildung $v : U \to \mathbb{R}^n$ heißt Vektorfeld auf U.

Definition (Gradientenfeld)**.** Sei U zusätzlich offen, dann nennt man das stetige Vektorfeld $v(p) := \nabla f(p)$ ein Gradientenfeld.

Definition (1-Form)**.** Eine 1-Form auf U ist eine Abbildung $\omega : U \to (\mathbb{R}^n)^*$.

Bemerkung (Spezialfall: Gradient)**.** Unter der Identifikation des Gradienten mit dem *Zeilen*vektor der partiellen Ableitungen ist $\nabla f : U \to (\mathbb{R}^n)^*$ ist eine 1-Form.[1]

Definition (Äußeres Differential)**.** Die durch ∇ induzierte 1-Form bezeichnen wir mit df.

[1] $\nabla f(p)$ wäre im eindimensionalen Fall z.B. gerade die Steigung im Punkt p, aber nicht als Zahl, sondern als lineares Funktional (i.e. Multiplikation mit der Steigung).

Bemerkung (Darstellung durch das innere Produkt)**.** Lineare Funktionale kann man stets als inneres Produkt schreiben, also erhalten wir allgemeiner für $h \in \mathbb{R}^n$:

$$\underbrace{\underbrace{df(p)}_{\in(\mathbb{R}^n)^*}(h)}_{\in\mathbb{R}} = \langle \nabla f(p), h \rangle$$

Definition (Basis)**.** Mit dx_j bezeichnen wir von der j-ten Koordinatenprojektion ${pr_j}^2$ induzierte 1-Form.

Bemerkung (Dualität)**.** Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ die Standardbasis in $\mathbb{R}^n$, dann gilt $\forall p \in U$:

$$\begin{aligned} dx_j(p)(e_i) &= \langle \nabla pr_j(p), e_i \rangle \\ &= \langle e_j, e_i \rangle \\ &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

Also ist $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ die zu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ duale Basis; daraus folgt die folgende Darstellung von $df(p)$:

$$df(p) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{D_i f(p)}_{\in\mathbb{R}} \underbrace{dx_i(p)}_{\in(\mathbb{R}^n)^*}$$

Proposition (Identifikation von 1-Formen mit Vektorfeldern)**.** Sei U offen.

Für jede 1-Form ω existiert genau ein $f = (f_1, \ldots, f_n) : U \to \mathbb{R}^n$ sodass $\forall p \in U$:

$$\omega(p) = \sum_{i=1}^{n} f_i(p) dx_i(p) \tag{1.1}$$

Außerdem ist $v = (v_1, \ldots, v_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} v_i dx_i$ ein Isomorphismus (i.e. bijektiv und linear).

Proof. Technischer Beweis. □

Definition (Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer 1-Form)**.** Eine 1-Form ist genau dann stetig/differenzierbar wenn es all ihre Komponentenfunktionen (vgl. (1.1)) sind.

---

[2] $pr_j(x_1, \ldots, x_n) = x_j$

1.4 Wegintegral (Kurvenintegral) einer 1-Form

Definition (Wegintegral von ω über γ)**.**

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b \underbrace{\omega(\gamma(t))}_{\in(\mathbb{R}^n)^*}(\underbrace{\dot\gamma(t)}_{\in\mathbb{R}^n})dt$$

Bemerkung. Findet man eine Darstellung von ω mit Komponentenfunktionen $(f_1, \dots, f_n) = f$, so haben wir:

$$\omega(\gamma(t))(\dot\gamma(t)) = \sum_{i=1}^n f_i(\gamma(t))(\dot\gamma(t))_i = \langle f(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle$$

Lemma (Unabhängigkeit des Wegintegrals von der Parametrisierung)**.** Sei φ eine zuläßige Parametertransformation, dann gilt:

$$\int_{\gamma\circ\varphi} \omega = \int_\gamma \omega \tag{1.2}$$

Proof. Substitution. □

Definition (Kurvenintegral)**.** Sei γ ein beliebiger Repräsentant der Kurve C, dann definiert man $\int_C \omega := \int_\gamma \omega$.

Bemerkung. Wegen (1.2) ist das Kurvenintegral wohldefiniert.

Bemerkung. Mit der Identifikation von 1-Formen und Vektorfeldern (vgl. (1.1), kurz $\tilde v = \langle v, dx\rangle$) können wir folgende Definition vornehmen:

Definition (Kurvenintegrale über Vektorfeler)**.**

$$\int_C \tilde v = \int_C \langle v, dx\rangle = \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle dt$$

1.5 Stammfunktionen, Sätze über deren Existenz

Definition (Stammfunktion einer 1-Form)**.** $F : U \to \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von ω genau dann wenn $dF = \omega$.[3]

[3] $dF = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i$

Definition (Exaktheit)**.** Eine 1-Form heißt exakt, wenn sie eine Stammfunktion besitzt.

Bemerkung (Spezialfall: Vektorfelder)**.** v ist ein Gradientenfeld $\Leftrightarrow$ $\tilde{v}$ ist exakt.

Lemma ("Hauptsatz" für 1-Formen)**.** Sei ω eine exakte 1-Form und F eine Stammfunktion von ω. Für *jeden* stückweisen $\mathcal{C}^1$ Weg $\gamma : [a, b] \to U$ gilt:

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma dF = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \tag{1.3}$$

Proof. Kettenregel. □

Korollar (Integration über geschlossene Wege)**.** ω exakt $\Rightarrow \int_\gamma \omega = 0$ für alle γ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Definition (Gebiet)**.** Ein Gebiet im $\mathbb{R}^n$ ist eine offene und wegzusammenhängende Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Lemma (Stückweise Differenzierbarkeit von Wegen in Gebieten)**.** In einem Gebiet lassen sich je zwei Punkt nicht nur durch einen stetigen Weg, sondern sogar durch einen stückweise stetig differenzierbaren Weg verbinden.

Proof. Idee: Da man in einer offenen Teilmenge ist, kann man einen Weg als endliche Vereinigung linearer (also insbesondere differenzierbarer) Abschnitte mit Abstand echt größer 0 zum Rand konstruieren. □

Theorem (Zusammenhang exakt und Integral über geschlossene Wege)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, ω eine stetige 1-Form auf U und γ ein beliebiger geschlossener, stückweise stetig differenzierbarer Weg in U. Dann gilt:

ω exakt in $U \Leftrightarrow \int_\gamma \omega = 0$

Proof. "$\Rightarrow$" wurde bereits gezeigt.

"$\Leftarrow$": Idee: Setze $F(x) = \int_{x_0}^x \omega = \int_\alpha \omega$ mit $\alpha(0) = x_0, \alpha(1) = x$.

Wohldefiniert, denn für jeden[4] anderen Weg β mit $\beta(0) = x_0, \beta(1) = x$ gilt: $\alpha + (-\beta) =: \gamma$ ist ein geschlossener Weg und $0 = \int_\gamma \omega = \int_\alpha \omega - \int_\beta \omega$.

Um zu zeigen, dass das tatsächlich eine Stammfunktion von ω ist, i.e. $dF = \omega$, zeigt man, dass für $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$ gilt: $f_i = D_i F$.

Betrachte dafür $F(x + he_i) - F(x)$ im Grenzwert $h \to 0$. □

evt. Rest des Beweises nachbringen, ist aber auch

[4] Alle Wege müssen natürlich in U liegen.

1.6 Integrabilitätsbedingungen und Lemma von Poincaré

Definition (Geschlossenheit)**.** Eine stetig differenzierbare 1-Form $\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i$ auf U heißt geschlossen, falls

$$D_i f_j = D_j f_i \tag{1.4}$$

Theorem (Pointcaré)**.** Sei U ein sternförmiges Gebiet und ω eine stetig differenzierbare 1-Form, dann gilt:

ω exakt $\Leftrightarrow$ ω geschlossen[5]

Proof. "$\Rightarrow$": Nach dem Satz von Schwarz gilt: ω exakt $\Rightarrow$ ω geschlossen.

"$\Leftarrow$": Sei oBdA U sternförmig bez. 0. Dann definiert man $F(x) := \int_0^1 \omega(tx)(x)dt$.

Als Parameterintegral ist es stetig differenzierbar.

Es bleibt zu zeigen, dass $D_i F = f_i$.

technischer Beweis, evt. nachbringen

$\square$

[5] "Geschlossenheit" hat *nichts* mit dem Integral über geschlossene Wege zu tun. Das sind nur die Integrationsbedingungen (1.4)!

Chapter 2

Mannigfaltigkeiten

2.1 (Satz über implizite Funktionen und) Satz von der Umkehrabbildung

Theorem (Satz über implizite Funktionen)**.** Sei $(a,b) \in U_1 \times U_2 \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ (U_1, U_2 offen) mit $F : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$, $F(a,b) = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)$[1] invertierbar.

Dann gibt es offene Umgebungen $V_1 \subseteq U_1$ von a, $V_2 \subseteq U_2$ von b und eine eindeutige, stetig differenzierbare Abbildung $g : V_1 \to V_2$ mit $g(a) = b$ und $F(x, g(x))$ für alle $(x,y) \in V_1 \times V_2$.

Außerdem gilt $Dg(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,g(x))\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x,g(x))$.

Bemerkung (Merkhilfe)**.**

$$DF(x,g(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,g(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,g(x))Dg(x)$$

Da $F(x,g(x)) = 0$ in einer geeigneten Umgebung ist

$$Dg(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,g(x))\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x,g(x))$$

Theorem (Satz von der Umkehrabbildung)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $a \in U$ und $b := f(a)$.

Falls $Df(a)$ invertierbar ist, dann existiert eine offene Umgebung U_0 von a und analog V_0 eine offene Umgebung von b mit $f|_{U_0} : U_0 \to V_0$ bijektiv und für $g := (f|_{U_0})^{-1}$ gilt die Gleichung

[1] y ist das zweite Argument

$$Dg(b) = (Df(a))^{-1}$$

Proof. □

evt. Beweisidee bringen

Bemerkung (Aussage des Theorems)**.** Um zu überprüfen ob eine Abbildung lokal invertierbar ist reicht es sich die Ableitung an dem Punkt anzusehen.

2.2 Immersion

Definition (Diffeomorphismus)**.** $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to V$ bijektiv und $\mathcal{C}^1$. Ist f^{-1} ebenfalls $\mathcal{C}^1$, so nennt man f einen $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus.

Lemma ($\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismen)**.** Ist f ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus und k-mal stetig differenzierbar, dann ist f ein $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus.

Definition (Immersion)**.** Sei $T \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $\Phi : T \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $\forall t \in T : \mathrm{Rang} D\Phi(t) = k$ dann heißt Φ Immersion.

Definition (k-Flächen)**.** $F := \Phi(T) \subseteq \mathbb{R}^n$ wird als parametrisierte k-Fläche bezeichnet.

Bemerkung (Eigenschaften von Immersionen)**.**

- $\forall t \in T : \mathrm{Rang} D\Phi(t) = k$ impliziert $k \leq n$.
- $\forall t \in T : \mathrm{Rang} D\Phi(t) = k$ impliziert auch, dass man für jedes $t \in T$ k von den n Komponentenfunktionen auswählen können, sodass $\det \frac{\partial(\Phi_{i_1}, \ldots, \Phi_{i_k})}{\partial(t_1, \ldots, t_k)}(t) \neq 0$ für eine offene Umgebung von t.
- Für $k = 1$ erhalten wir reguläre Kurven.
- Für $k = n$ ist Φ ein lokaler $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus.

Definition (Homöomorphismus)**.** Ist Φ stetig und bijektiv mit stetiger Inverser, nennt man es einen Homöomorphismus.

Lemma (Immersion ist ein Homöomorphismus)**.** $\Phi : T \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion. Dann gibt es für alle $t \in T$ eine offene Umgebung $V \subseteq T$, sodass $\Phi|_V$ ein Homöomorphismus ist.

Proof. Idee: Satz von der Umkehrabbildung und Einschränkung auf die Komponenten für die $\det \frac{\partial(\Phi_{i_1}, \ldots, \Phi_{i_k})}{\partial(t_1, \ldots, t_k)}(t) \neq 0$ gilt. □

2.3 Untermannigfaltigkeit und Charakterisierungen

Definition (Untermannigfaltigkeit)**.** $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ falls $\forall a \in M : \exists$ offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von a, $T \subseteq \mathbb{R}^k$ und eine Immersion $\Phi : T \to \mathbb{R}^n$, sodass:

- Φ ist ein Homöomorphismus $T \to \Phi(T)$

wofür braucht man die Bedingung?

- $\Phi(T) = M \cap U$

Weiters nennen wir $\Phi : T \to M \cap U$ eine *lokale Parametrisierung* von M nahe a und Φ^{-1} eine *Karte*.

Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt differenzierbar, falls sie überall lokal differenzierbar ist.

für konkrete Beispiele wie Rotationsflächen, etc. bitte das Skriptum nehmen.

Theorem. Für $M \subseteq \mathbb{R}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- M ist eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit
- *Lokale Darstellung als Graph:* $\forall a = (a_1, \dots, a_k, \dots, a_n) \in M$ gilt: zu $a' = (a_1, \dots, a_k)$ und $a'' = (a_{k+1}, \dots, a_n)$[2] gibt es offene Umgebungen $U' \subseteq \mathbb{R}^k$ und $U'' \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $g : U' \to U''$, sodass $M \cap (U' \times U'') = \{(x, g(x)) : x \in U'\}$
- *Lokale Beschreibung als Nullstellenmenge:* $\forall a \in M$ existiert offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und stetig differenzierbare Funktionen $f_1, \dots, f_{n-k} : U \to \mathbb{R}$ mit $\forall x \in M \cap U : \mathrm{Rang} \frac{\partial(f_1,\dots,f_{n-k})}{\partial(x_1,\dots,x_{n-k})}(x) = n - k$ und $M \cap U = \{x \in U : f_1(x) = \dots = f_{n-k}(x) = 0\}$.
- *Lokal diffeomorph zu einem k-dimensionalen Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$:* Sei $E_k := x_1, \dots, x_k, 0 \dots, 0 : x_i \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ die Einbettung eines k-dimensionalen Vektorraumes in $\mathbb{R}^n$. Für alle $a \in M$ existiert eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein offenes $V \subseteq \mathbb{R}^n$, sowie einen $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus $F : U \to V$ mit $F(M \cap U) = E_k \cap V$.

[2] evt. nach Umnummerierung

Proof. Der Beweis sei dem interessierten Leser als Übungsaufgabe überlassen. □

Korollar (Niveaumengen)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $c \in \mathbb{R}$ und $N_f(c) := f^{-1}(c) \subseteq \mathbb{R}^n$. Falls $\forall x \in N_f(c) : \nabla f(x) \neq 0$, dann ist $N_f(c)$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

2.4 Tangentenvektor, Normalenvektor an Untermannigfaltigkeit

Sei im Folgenden M stets eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

Definition (Tangentialvektor)**.** $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor an M im Punkt a, wenn es einen stetig differenzierbaren Weg $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ gibt, mit $\gamma(0) = a$ und $\dot{\gamma}(0) = v$.

Definition (Normalenvektor)**.** $n \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor an M im Punkt a, wenn $\langle n, v \rangle = 0$ für alle Tangentenvektoren v.

Definition (Tangential-/Normalenraum)**.**

$$T_a(M) := \{v \in \mathbb{R}^n : v \text{ Tangentialvektor an M in a}\}$$

$$N_a(M) := \{w \in \mathbb{R}^n : w \text{ Normalenvektor an M in a}\}$$

Definition (Tangential-/Normalenbündel)**.**

$$T(M) := \bigcup_{a \in M} \{a\} \times T_a(M)$$

$$N(M) := \bigcup_{a \in M} \{a\} \times N_a(M)$$

Theorem (Basis des Tangential-/Normalenraums)**.** Für jede lokale Parametrisierung Φ mit $\Phi(t_0) = a$ ist $\{D_1\Phi(t_0), \dots, D_k\Phi(t_0)\}$ eine Basis von $T_a(M)$.

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von a und M nahe a gegeben durch $M \cap U = \{x \in U : f_1(x) = \cdots = f_{n-k}(x) = 0\}$, dann ist $\{\nabla f_1(a), \dots, \nabla f_{n-k}(a)\}$ eine Basis von $N_a(M)$.

Korollar (Lagrangemultiplikatoren)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\underbrace{f}_{\text{Hauptbedingung}}, \underbrace{g_1, \dots, g_r}_{Nebenbedingungen} :$ $U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $r \leq n$, Rang der Jacobimatrix $D(g_1, \dots, g_r)$ maximal für alle $x \in M$, wobei $M = \{x \in U : g_1(x) = \cdots = g_r(x) = 0\}$.

Falls f in $a \in M$ ein lokales Minimum/Maximum besitzt, dann existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, sodass

$$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \nabla g_i(a)$$

Proof. Idee: Wissen, dass M eine $(n-r)$-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Angenommen f habe in a ein lokales Maximum/Minimum, dann gilt für jeden $\mathcal{C}^1$ Weg γ auf M mit $\gamma(0) = a$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}(f(\gamma(t)))|_{t=0} = \langle \nabla f(\gamma(0)), \dot{\gamma}(0) \rangle$$

Da das für beliebige Wege γ gilt durchlaufen wir dabei den ganzen Tangentialraum; also ist $\nabla f(a) \in N_a(M)$. □

Chapter 3

Mehrfache Integrale

3.1 Iteriertes Integral und Vertauschung der Reihenfolge

3.2 Allgemeine Eigenschaften von Integralen

3.3 Partielle Integration

3.4 Prinzip von Cavalieri

3.5 Transformationsformel (genaue Formulierung, Partition der Eins, Beweisidee)

3.6 Oberflächenintegrale über Funktionen und über Vektorfelder

3.7 Konstruktion des Lebesgue-Integrals (Treppenfunktionen, Hüllreihen, $\|\cdot\|_1$-Halbnorm)

3.8 Eigenschaften des Lebesgue-Integrals

3.9 Klassen Lebesgue-integrierbarer Funktionen

Chapter 4

Integralsätze

4.1 Green und Gaußfür Normalenbereiche

4.2 Differentialformen

4.3 Äußere Ableitung (Spezialfälle: div, rot, grad)

4.4 Integral über Differentialformen

4.5 Pullback

4.6 Allgemeine Formulierung des Satzes von Stokes