Analysis III

January 27, 2015

Contents

Chapter 1

Wegintegrale

1.1 Wege und Kurven, Parametrisierungen, Tangentenvektor

Definition (Weg)**.** Sei $I \subseteq \mathbb{R}$. Eine *stetige* Abbildung $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ heißt Weg.

Sei im Folgenden γ stets ein so definierter Weg.

Definition (Regulärer Weg)**.** Ein Weg γ heißt *regulär* wenn γ stetig differenzierbar ist und $\forall t \in I : \dot{\gamma}(t) \neq 0$.

Definition (Parametertransformation)**.** Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle. Eine *zulässige Parametertransformation* ist eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : I \to J$ mit $\dot{\varphi}(t) > 0$, $\forall t \in I$

Definition (Kurve)**.** Eine orientierte (reguläre) Kurve C ist eine Äquivalenzklasse von (regulären) Wegen, wobei zwei Wege γ_1 und γ_2 genau dann äquivalent sind, wenn es eine zulässige Parametertransformation φ gibt, sodass $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$.

Jeder Repräsentant γ von C heißt eine Parametrisierung von C.

1.2 Weglänge, Parametrisierung mittels Weglänge

Definition (Bogenlänge)**.** Sei γ ein stckweise stetig differenzierbarer Weg, dann heißt

$$L(\gamma) := \int_a^b ||\dot{\gamma}(t)||dt$$

die Bogenlänge von γ.

Lemma (Invarianz unter Parametertransformation)**.** Seien γ_1 und γ_2 äquivalent, dann gilt $L(\gamma_1) = L(\gamma_2)$.

Proof. Substitution. □

Korollar. Die Länge einer regulären Kurve ist wohldefiniert.

Definition (Parametrisierung nach der Weglänge)**.** Sei $\tilde{\gamma}$ eine Parametrisierung, sodass $||\dot{\tilde{\gamma}}(t)|| = 1$. Dann ist $\tilde{\gamma}$ die *Parametrisierung nach der Weglänge.*

evt. Methode zur Ermittlung nachliefern

1.3 Vektorfelder und 1-Formen

Im Folgenden sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $p \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^1$ Funktion.

Definition (Vektorfeld)**.** Eine Abbildung $v : U \to \mathbb{R}^n$ heißt Vektorfeld auf U.

Definition (Gradientenfeld)**.** Sei U zusätzlich offen, dann nennt man das stetige Vektorfeld $v(p) := \nabla f(p)$ ein Gradientenfeld.

Definition (1-Form)**.** Eine 1-Form auf U ist eine Abbildung $\omega : U \to (\mathbb{R}^n)^*$.

Bemerkung (Spezialfall: Gradient)**.** Unter der Identifikation des Gradienten mit dem *Zeilen*vektor der partiellen Ableitungen ist $\nabla f : U \to (\mathbb{R}^n)^*$ ist eine 1-Form.[1]

Definition (Äußeres Differential)**.** Die durch ∇ induzierte 1-Form bezeichnen wir mit df.

[1] $\nabla f(p)$ wäre im eindimensionalen Fall z.B. gerade die Steigung im Punkt p, aber nicht als Zahl, sondern als lineares Funktional (i.e. Multiplikation mit der Steigung).

Bemerkung (Darstellung durch das innere Produkt)**.** Lineare Funktionale kann man stets als inneres Produkt schreiben, also erhalten wir allgemeiner für $h \in \mathbb{R}^n$:

$$\underbrace{\underbrace{df(p)}_{\in(\mathbb{R}^n)^*}(h)}_{\in\mathbb{R}} = \langle \nabla f(p), h \rangle$$

Definition (Basis)**.** Mit dx_j bezeichnen wir von der j-ten Koordinatenprojektion ${pr_j}^2$ induzierte 1-Form.

Bemerkung (Dualität)**.** Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ die Standardbasis in $\mathbb{R}^n$, dann gilt $\forall p \in U$:

$$\begin{aligned} dx_j(p)(e_i) &= \langle \nabla pr_j(p), e_i \rangle \\ &= \langle e_j, e_i \rangle \\ &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

Also ist $\{dx_1, \dots, dx_n\}$ die zu $\{e_1, \dots, e_n\}$ duale Basis; daraus folgt die folgende Darstellung von $df(p)$:

$$df(p) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{D_i f(p)}_{\in\mathbb{R}} \underbrace{dx_i(p)}_{\in(\mathbb{R}^n)^*}$$

Proposition (Identifikation von 1-Formen mit Vektorfeldern)**.** Sei U offen.

Für jede 1-Form ω existiert genau ein $f = (f_1, \dots, f_n) : U \to \mathbb{R}^n$ sodass $\forall p \in U$:

$$\omega(p) = \sum_{i=1}^{n} f_i(p) dx_i(p) \tag{1.1}$$

Außerdem ist $v = (v_1, \dots, v_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} v_i dx_i$ ein Isomorphismus (i.e. bijektiv und linear).

Proof. Technischer Beweis. □

Definition (Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer 1-Form)**.** Eine 1-Form ist genau dann stetig/differenzierbar wenn es all ihre Komponentenfunktionen (vgl. (1.1)) sind.

[2] $pr_j(x_1, \dots, x_n) = x_j$

1.4 Wegintegral (Kurvenintegral) einer 1-Form

Definition (Wegintegral von ω über γ)**.**

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b \underbrace{\omega(\gamma(t))}_{\in(\mathbb{R}^n)^*}(\underbrace{\dot\gamma(t)}_{\in\mathbb{R}^n})dt$$

Bemerkung. Findet man eine Darstellung von ω mit Komponentenfunktionen $(f_1, \dots, f_n) = f$, so haben wir:

$$\omega(\gamma(t))(\dot\gamma(t)) = \sum_{i=1}^n f_i(\gamma(t))(\dot\gamma(t))_i = \langle f(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle$$

Lemma (Unabhängigkeit des Wegintegrals von der Parametrisierung)**.** Sei φ eine zuläßige Parametertransformation, dann gilt:

$$\int_{\gamma\circ\varphi} \omega = \int_\gamma \omega \tag{1.2}$$

Proof. Substitution. □

Definition (Kurvenintegral)**.** Sei γ ein beliebiger Repräsentant der Kurve C, dann definiert man $\int_C \omega := \int_\gamma \omega$.

Bemerkung. Wegen (1.2) ist das Kurvenintegral wohldefiniert.

Bemerkung. Mit der Identifikation von 1-Formen und Vektorfeldern (vgl. (1.1), kurz $\tilde v = \langle v, dx\rangle$) können wir folgende Definition vornehmen:

Definition (Kurvenintegrale über Vektorfeler)**.**

$$\int_C \tilde v = \int_C \langle v, dx\rangle = \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle dt$$

1.5 Stammfunktionen, Sätze über deren Existenz

Definition (Stammfunktion einer 1-Form)**.** $F : U \to \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von ω genau dann wenn $dF = \omega$.[3]

[3] $dF = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i$

Definition (Exaktheit)**.** Eine 1-Form heißt exakt, wenn sie eine Stammfunktion besitzt.

Bemerkung (Spezialfall: Vektorfelder)**.** v ist ein Gradientenfeld $\Leftrightarrow$ $\tilde{v}$ ist exakt.

Lemma ("Hauptsatz" für 1-Formen)**.** Sei ω eine exakte 1-Form und F eine Stammfunktion von ω. Für *jeden* stückweisen $\mathcal{C}^1$ Weg $\gamma : [a,b] \to U$ gilt:

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma dF = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \tag{1.3}$$

Proof. Kettenregel. □

Korollar (Integration über geschlossene Wege)**.** ω exakt $\Rightarrow \int_\gamma \omega = 0$ für alle γ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Definition (Gebiet)**.** Ein Gebiet im $\mathbb{R}^n$ ist eine offene und wegzusammenhängende Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Lemma (Stückweise Differenzierbarkeit von Wegen in Gebieten)**.** In einem Gebiet lassen sich je zwei Punkt nicht nur durch einen stetigen Weg, sondern sogar durch einen stückweise stetig differenzierbaren Weg verbinden.

Proof. Idee: Da man in einer offenen Teilmenge ist, kann man einen Weg als endliche Vereinigung linearer (also insbesondere differenzierbarer) Abschnitte mit Abstand echt größer 0 zum Rand konstruieren. □

Theorem (Zusammenhang exakt und Integral über geschlossene Wege)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, ω eine stetige 1-Form auf U und γ ein beliebiger geschlossener, stückweise stetig differenzierbarer Weg in U. Dann gilt:
ω exakt in $U \Leftrightarrow \int_\gamma \omega = 0$

Proof. "$\Rightarrow$" wurde bereits gezeigt.

"$\Leftarrow$": Idee: Setze $F(x) = \int_{x_0}^x \omega = \int_\alpha \omega$ mit $\alpha(0) = x_0, \alpha(1) = x$.

Wohldefiniert, denn für jeden[4] anderen Weg β mit $\beta(0) = x_0, \beta(1) = x$ gilt: $\alpha + (-\beta) =: \gamma$ ist ein geschlossener Weg und $0 = \int_\gamma \omega = \int_\alpha \omega - \int_\beta \omega$.

Um zu zeigen, dass das tatsächlich eine Stammfunktion von ω ist, i.e. $dF = \omega$, zeigt man, dass für $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$ gilt: $f_i = D_i F$.

Betrachte dafür $F(x + he_i) - F(x)$ im Grenzwert $h \to 0$. □

[4] Alle Wege müssen natürlich in U liegen.

1.6 Integrabilitätsbedingungen und Lemma von Poincaré

Definition (Geschlossenheit)**.** Eine stetig differenzierbare 1-Form $\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i$ auf U heißt geschlossen, falls

$$D_i f_j = D_j f_i \tag{1.4}$$

Theorem (Pointcaré)**.** Sei U ein sternförmiges Gebiet und ω eine stetig differenzierbare 1-Form, dann gilt:

ω exakt $\Leftrightarrow$ ω geschlossen[5]

Proof. "$\Rightarrow$": Nach dem Satz von Schwarz gilt: ω exakt $\Rightarrow$ ω geschlossen.

"$\Leftarrow$": Sei oBdA U sternförmig bez. 0. Dann definiert man $F(x) := \int_0^1 \omega(tx)(x)dt$.

Als Parameterintegral ist es stetig differenzierbar.

Es bleibt zu zeigen, dass $D_i F = f_i$. □

[5] "Geschlossenheit" hat *nichts* mit dem Integral über geschlossene Wege zu tun. Das sind nur die Integrationsbedingungen (1.4)!

Chapter 2

Mannigfaltigkeiten

2.1 (Satz über implizite Funktionen und) Satz von der Umkehrabbildung

Theorem (Satz über implizite Funktionen)**.** Sei $(a,b) \in U_1 \times U_2 \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ (U_1, U_2 offen) mit $F : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$, $F(a,b) = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)$[1] invertierbar.

Dann gibt es offene Umgebungen $V_1 \subseteq U_1$ von a, $V_2 \subseteq U_2$ von b und eine eindeutige, stetig differenzierbare Abbildung $g : V_1 \to V_2$ mit $g(a) = b$ und $F(x, g(x))$ für alle $(x,y) \in V_1 \times V_2$.

Außerdem gilt $Dg(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))$.

Bemerkung (Merkhilfe)**.**

$$DF(x, g(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x)) Dg(x)$$

Da $F(x, g(x)) = 0$ in einer geeigneten Umgebung ist

$$Dg(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))$$

Theorem (Satz von der Umkehrabbildung)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $a \in U$ und $b := f(a)$.

Falls $Df(a)$ invertierbar ist, dann existiert eine offene Umgebung U_0 von a und analog V_0 eine offene Umgebung von b mit $f|_{U_0} : U_0 \to V_0$ bijektiv und für $g := (f|_{U_0})^{-1}$ gilt die Gleichung

[1] y ist das zweite Argument

$$Dg(b) = (Df(a))^{-1}$$

Bemerkung (Aussage des Theorems)**.** Um zu überprüfen ob eine Abbildung lokal invertierbar ist reicht es sich die Ableitung an dem Punkt anzusehen.

2.2 Immersion

Definition (Diffeomorphismus)**.** $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to V$ bijektiv und $\mathcal{C}^1$. Ist f^{-1} ebenfalls $\mathcal{C}^1$, so nennt man f einen $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus.

Lemma ($\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismen)**.** Ist f ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus und k-mal stetig differenzierbar, dann ist f ein $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus.

Definition (Immersion)**.** Sei $T \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $\Phi : T \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $\forall t \in T : \text{Rang} D\Phi(t) = k$ dann heißt Φ Immersion.

Definition (k-Flächen)**.** $F := \Phi(T) \subseteq \mathbb{R}^n$ wird als parametrisierte k-Fläche bezeichnet.

Bemerkung (Eigenschaften von Immersionen)**.**

- $\forall t \in T : \text{Rang} D\Phi(t) = k$ impliziert $k \leq n$.
- $\forall t \in T : \text{Rang} D\Phi(t) = k$ impliziert auch, dass man für jedes $t \in T$ k von den n Komponentenfunktionen auswählen können, sodass $\det \frac{\partial(\Phi_{i_1}, \ldots, \Phi_{i_k})}{\partial(t_1, \ldots, t_k)}(t) \neq 0$ für eine offene Umgebung von t.
- Für $k = 1$ erhalten wir reguläre Kurven.
- Für $k = n$ ist Φ ein lokaler $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus.

Definition (Homöomorphismus)**.** Ist Φ stetig und bijektiv mit stetiger Inverser, nennt man es einen Homöomorphismus.

Lemma (Immersion ist ein Homöomorphismus)**.** $\Phi : T \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion. Dann gibt es für alle $t \in T$ eine offene Umgebung $V \subseteq T$, sodass $\Phi|_V$ ein Homöomorphismus ist.

Proof. Idee: Satz von der Umkehrabbildung und Einschränkung auf die Komponenten für die $\det \frac{\partial(\Phi_{i_1}, \ldots, \Phi_{i_k})}{\partial(t_1, \ldots, t_k)}(t) \neq 0$ gilt. $\square$

2.3 Untermannigfaltigkeit und Charakterisierungen

Definition (Untermannigfaltigkeit)**.** $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ falls $\forall a \in M : \exists$ offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von a, $T \subseteq \mathbb{R}^k$ und eine Immersion $\Phi : T \to \mathbb{R}^n$, sodass:

- Φ ist ein Homöomorphismus $T \to \Phi(T)$[2]
- $\Phi(T) = M \cap U$

Weiters nennen wir $\Phi : T \to M \cap U$ eine *lokale Parametrisierung* von M nahe a und Φ^{-1} eine *Karte*.

Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt differenzierbar, falls sie überall lokal differenzierbar ist.

für konkrete Beispiele wie Rotationsflächen, etc. bitte das Skriptum nehmen.

Theorem. Für $M \subseteq \mathbb{R}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- M ist eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit
- *Lokale Darstellung als Graph:* $\forall a = (a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_n) \in M$ gilt: zu $a' = (a_1, \ldots, a_k)$ und $a'' = (a_{k+1}, \ldots, a_n)$[3] gibt es offene Umgebungen $U' \subseteq \mathbb{R}^k$ und $U'' \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $g : U' \to U''$, sodass $M \cap (U' \times U'') = \{(x, g(x)) : x \in U'\}$
- *Lokale Beschreibung als Nullstellenmenge:* $\forall a \in M$ existiert offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und stetig differenzierbare Funktionen $f_1, \ldots, f_{n-k} : U \to \mathbb{R}$ mit $\forall x \in M \cap U : \mathrm{Rang}\frac{\partial(f_1,\ldots,f_{n-k})}{\partial(x_1,\ldots,x_{n-k})}(x) = n - k$ und $M \cap U = \{x \in U : f_1(x) = \cdots = f_{n-k}(x) = 0\}$.
- *Lokal diffeomorph zu einem k-dimensionalen Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$:* Sei $E_k := \{x_1, \ldots, x_k, 0 \ldots, 0 : x_i \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ die Einbettung eines k-dimensionalen Vektorraumes in $\mathbb{R}^n$. Für alle $a \in M$ existiert eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein offenes $V \subseteq \mathbb{R}^n$, sowie einen $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus $F : U \to V$ mit $F(M \cap U) = E_k \cap V$.

[2] Dass es ein T gibt, sodass $\Phi|_T$ ein Homöomorphismus ist wurde im vorigen Lemma gezeigt; die Bedingung ist also mehr als Einschränkung für die nächste ($\Phi(T) = M \cap U$) zu sehen.

[3] evt. nach Umnummerierung

Proof. Der Beweis sei dem interessierten Leser als Übungsaufgabe überlassen. $\square$

Korollar (Niveaumengen)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $c \in \mathbb{R}$ und $N_f(c) := f^{-1}(c) \subseteq \mathbb{R}^n$. Falls $\forall x \in N_f(c) : \nabla f(x) \neq 0$, dann ist $N_f(c)$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

2.4 Tangentenvektor, Normalenvektor an Untermannigfaltigkeit

Sei im Folgenden M stets eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

Definition (Tangentialvektor)**.** $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor an M im Punkt a, wenn es einen stetig differenzierbaren Weg $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ gibt, mit $\gamma(0) = a$ und $\dot{\gamma}(0) = v$.

Definition (Normalenvektor)**.** $n \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor an M im Punkt a, wenn $\langle n, v \rangle = 0$ für alle Tangentenvektoren v.

Definition (Tangential-/Normalenraum)**.**

$$T_a(M) := \{v \in \mathbb{R}^n : v \text{ Tangentialvektor an M in a}\}$$

$$N_a(M) := \{w \in \mathbb{R}^n : w \text{ Normalenvektor an M in a}\}$$

Definition (Tangential-/Normalenbündel)**.**

$$T(M) := \bigcup_{a \in M} \{a\} \times T_a(M)$$

$$N(M) := \bigcup_{a \in M} \{a\} \times N_a(M)$$

Theorem (Basis des Tangential-/Normalenraums)**.** Für jede lokale Parametrisierung Φ mit $\Phi(t_0) = a$ ist $\{D_1\Phi(t_0), \ldots, D_k\Phi(t_0)\}$ eine Basis von $T_a(M)$.

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von a und M nahe a gegeben durch $M \cap U = \{x \in U : f_1(x) = \cdots = f_{n-k}(x) = 0\}$, dann ist $\{\nabla f_1(a), \ldots, \nabla f_{n-k}(a)\}$ eine Basis von $N_a(M)$.

Korollar (Lagrangemultiplikatoren)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\underbrace{f}_{\text{Hauptbedingung}}, \underbrace{g_1, \ldots, g_r}_{Nebenbedingungen} :$ $U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $r \leq n$, Rang der Jacobimatrix $D(g_1, \ldots, g_r)$ maximal für alle $x \in M$, wobei $M = \{x \in U : g_1(x) = \cdots = g_r(x) = 0\}$.

Falls f in $a \in M$ ein lokales Minimum/Maximum besitzt, dann existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, sodass

$$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \nabla g_i(a)$$

Proof. Idee: Wissen, dass M eine $(n-r)$-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Angenommen f habe in a ein lokales Maximum/Minimum, dann gilt für jeden $\mathcal{C}^1$ Weg γ auf M mit $\gamma(0) = a$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}(f(\gamma(t)))|_{t=0} = \langle \nabla f(\gamma(0)), \dot{\gamma}(0) \rangle$$

Da das für beliebige Wege γ gilt durchlaufen wir dabei den ganzen Tangentialraum; also ist $\nabla f(a) \in N_a(M)$. □

Chapter 3

Mehrfache Integrale

3.1 Iteriertes Integral und Vertauschung der Reihenfolge

Lemma (Reihenfolge Doppelintegral)**.** Ist $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig, dann gilt:

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

Proof. Idee: Definiere Hilfsfunktion $\varphi(y) := \int_a^b \left(\int_c^y f(x,t)dt \right) dx$, man sieht $\varphi'(y) = \int_a^b f(x,y)dx$. Setzt man nun das Integral in der verkehrten Reihenfolge an, benutzt die Identität $\varphi'(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ und $\varphi(c) = 0$ erhält man das gewünschte Ergebnis. □

Definition (Integral über Quader)**.** Sei $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ ein Quader, dann ist für jede stetige Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ das Integral von f über Q definiert als: $\int_Q f(x)dx := \int_{a_n}^{b_n} \left(\dots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n)dx_1 \right) \dots \right) dx_n$.

Definition (Support einer Funktion)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$, dann ist der Träger von f definiert als: $\text{supp} f := \overline{\{x \in U : f(x) \neq 0\}} \cap U$

Definition (Vektorraum stetiger Funktionen mit kompaktem Träger)**.** Mit $\mathcal{C}_c(U) := \{f \in \mathcal{C}(U) : \text{supp} f \text{ ist kompakt}\}$ bezeichnen wir den Vektorraum stetiger Funktionen mit kompaktem Träger.

Definition. Für $f \in \mathcal{C}_c$ definieren wir $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx := \int_Q f(x)dx$ für ein geeignetes Q.

3.2 Allgemeine Eigenschaften von Integralen

Theorem (Eigenschaften des Integrals auf $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$)**.** Seien $f, g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt:

- $\int_{\mathbb{R}^n} (f + \lambda g)(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx$
- angenommen $\forall x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq g(x)$, dann gilt: $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx$
- sei $a \in \mathbb{R}^n$, dann gilt: $\int_{\mathbb{R}^n} f(x + a) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$

Proof. Die ersten beiden Punkte folgen direkt aus der Definition (iterierte eindimensionale Integrale), der letzte Punkt mittels Substitution in jedem der iterierten Integrale. □

Bemerkung (Integral als lineares Funktional)**.** Das so definierte Integral ist ein lineares, monotones und translationsinvariantes Funktional auf $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$; man kann zeigen, dass jedes lineare Funktional mit diesen Eigenschaften (bis auf Normierung) gerade durch ein Integral gegeben sein muss.

Theorem (Stetigkeit des Integrals)**.** Seien $f, f_k \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ für $k \in \mathbb{N}$ und es existiere K kompakt mit $\operatorname{supp}(f_k) \subseteq K$. Wenn $f_k \to f$ glm., dann

$$\lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx.$$

3.3 Partielle Integration

Im Folgenden bezeichne $\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x \in U \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n \setminus U \end{cases}$

Definition (Integral über offene Teilmengen)**.** Für $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, setze $\int_U f(x) dx := \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x) dx$

Theorem. Sei $f \in \mathcal{C}^1(U), \varphi \in \mathcal{C}_c^1(U)$, dann gilt:

$$\int_U D_j \varphi(x) = 0$$

und

$$\int_U D_j f(x) \varphi(x) dx = - \int_U f(x) D_j \varphi(x) dx$$

Proof. Die erste Gleichung folgt durch aufspalten in iterierte Integrale und Vertauschung der abgeleiteten Komponente nach innen; Integration über 0 bleibt 0 und das Ergebnis folgt.

Die zweite Gleichung folgt aus partieller Integration (erinnere: $D_j(f\varphi) = D_j f\varphi + fD_j\varphi$) und daraus, dass $\int_U D_j(f\varphi) = 0$ ist (wegen der ersten Gleichung). □

3.4 Prinzip von Cavalieri

Idee: Schneide $K \subseteq \mathbb{R}^n$ in $(n-1)$-dimensionale "Scheiben" $K_t := \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : (x', t) \in K\} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$.

Theorem (Cavalieri)**.** Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, dann gilt:

$$\mathrm{Vol}_n(K) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{Vol}_{n-1}(K_t)dt$$

Proof. K_t ist wieder kompakt und es gilt $\chi_{K_t}(x') = \chi_K(x', t)$, daher ist

$$\mathrm{Vol}_n(K) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_{K_t}(x')dx'dt = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{Vol}_{n-1}(K_t)dt.$$

□

3.5 Transformationsformel (genaue Formulierung, Partition der Eins, Beweisidee)

Theorem (Transformationsformel)**.** Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi : U \to V$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus, dann gilt: $\forall f \in \mathcal{C}_c(V)$ ist $f \circ \Phi \in \mathcal{C}_c(U)$ und

$$\int_U f(\Phi(x))|\mathrm{det} D\Phi(x)|dx = \int_V f(x)dx$$

Proof. Idee:

- Jeder Diffeomorphismus G läßt sich lokal als Verknpfung zweier Typen aufspalten:
  Typ A: $G(x) = (x_1, \ldots, x_{m-1}, g(x), x_{m+1}, \ldots, x_n)$
  Typ B: Transposition die zwei Basisvektoren vertauscht und alle anderen fix läßt

- Die Partition der Eins ermöglicht genau so eine Lokalisierung.
- Durch Aufspalten in iterierte Integrale kann man die Substitutionsregel aus dem Eindimensionalen auf Typ A anwenden, Typ B kehrt lediglich das Vorzeichen um.

□

diesen Beweis nochmal genau anschauen

3.6 Oberflächenintegrale über Funktionen und über Vektorfelder

Definition (Oberflächenintegral im $\mathbb{R}^3$)**.** Sei $T \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $\Phi : T \to \mathbb{R}^3$ eine Immersion und $K \subseteq T$ kompakt, dann definiert man für stetige $f : \Phi(K) \to \mathbb{R}$ das *Oberflächenintegral*

$$\int_{\Phi(K)} f dS := \int_K f(\Phi(t))||N_\Phi(t)||dt$$

wobei $N_\Phi(t) = D_{t_1}\Phi(t) \times D_{t_2}\Phi(t)$, also der Normalenvektor (=Kreuzprodukt der Tangentialvektoren) ist.

Lemma (Unabhängigkeit von der Parametrisierung)**.**

3.7 Lebesgue-Integral

Siehe Einleitung von Gröchenig (ist bereits kurz und bündig zusammengefasst).

Chapter 4

Integralsätze

Achtung: Dieses Kapitel ist nach dem Skriptum das online verfügbar ist/Wikipedia erarbeitet worden. Sollte etwas anders als in der Vorlesung gemacht worden sein bitte ich um einen Hinweis!

4.1 Differentialformen

Definition (k-Form)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, dann nennt man eine eine Abbildung $\omega : U \to \bigwedge^k (\mathbb{R}^n)^*$ eine k-Form.[1]

Bemerkung (Alternative Notation)**.** Sei $\{dx_{i_1}(p) \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}(p)\}$ die zur Standardbasis im $\mathbb{R}^n$ duale Basis, dann erhält man eine eindeutige Darstellung von k-Formen durch

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} f_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} =: \sum_{|I|=k} f_I dx_I$$

mit Komponentenfunktionen $f_{i_1,\ldots,i_k} : U \to \mathbb{R}$.

Definition (Stetigkeit, etc.)**.** Eine k-Form heißt stetig/differenzierbar/... wenn es ihre Komponentenfunktionen sind.

Definition (Elementare Operationen)**.** Addition, Skalarmultiplikation und das Wedge-Produkt sind alle punktweise definiert.

[1] Streng genommen nehmen k-Formen Elemente aus dem Tangentialraum; da man den im Falle von Untermannigfaltigkeiten (also im euklidischen Raum) aber stets wieder mit dem euklidischen Raum identifizieren kann wird hier darauf kein Wert mehr gelegt.

4.2 Äußere Ableitung (Spezialfälle: div, rot, grad)

Definition (Äußere Ableitung)**.** Für $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $k = 0$ und $f : U \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1$ ist die äußere Ableitung wie gewohnt definiert durch:

$$df := \sum_{i=1}^{n} D_i f \, dx_i$$

Für $k \geq 1$ und $\omega = \sum_{|I|=k} f_I dx_I$:

$$d\omega := \sum_{|I|=k} df_I \wedge dx_I$$

Bemerkung (Spezialfälle im $\mathbb{R}^3$)**.**

1. $k = 1$ und $\omega = \sum_{i=1}^{3} f_i dx_i$:

$$d\omega = \sum_{i,j=1}^{3} D_i f_j dx_i \wedge dx_j = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (D_i f_j - D_j f_i) dx_i \wedge dx_j$$

   wobei diese Koeffizienten genau denen von $\operatorname{rot}(f_1, f_2, f_3)$ entsprechen.

2. $k = 2$ und $\omega = f_{12} dx \wedge dy + f_{13} dx \wedge dz + f_{23} dy \wedge dz$:

$$d\omega = D_3 f_{12} dz \wedge dx \wedge dy + D_2 f_{13} dy \wedge dx \wedge dz + D_1 f_{23} dx \wedge dy \wedge dz$$

$$= (D_1 f_{23} - D_2 f_{13} + D_3 f_{12}) dx \wedge dy \wedge dz$$

   Insbesondere lässt sich unter der Identifizierung $v := (f_{12}, -f_{13}, f_{23})$ das Ergebnis auch als $d\omega = \operatorname{div}(v) dx \wedge dy \wedge dz$ schreiben.

Lemma (Linearität)**.** $d(\omega_1 + \lambda \omega_2) = d\omega_1 + \lambda d\omega_2$

Theorem (Graduierte Leibniz-Regel)**.** Seien ω_k, ω_l zwei stetig differenzierbare k-/l-Formen, dann gilt:

$$d(\omega_k \wedge \omega_l) = (d\omega_k) \wedge \omega_l + (-1)^k \omega_k \wedge (d\omega_l)$$

Theorem ($d \circ d = 0$)**.** Ist ω eine $\mathcal{C}^2$ k-Form, dann gilt:

$$d(d\omega) = 0$$

Bemerkung. Im $\mathbb{R}^3$ bedeutet das gerade

$$\mathrm{rot}(\nabla f) = 0$$

Für ω 2-Form wissen wir dass für ein geeignetes v gilt: $d\omega = \mathrm{div}(v) dx \wedge dy \wedge dz$. Wählt man nun b so, dass $\mathrm{rot}(b) = v$, gilt:

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}(b)) = 0$$

Definition (Geschlossenheit)**.** Eine k-Form ω heißt geschlossen wenn $d\omega = 0$.

Bemerkung. Fr $k = 1$ stimmt diese Definition mit der für 1-Formen überein, denn $d\omega = \sum_{i,j=1}^n D_i f_j dx_i \wedge dx_j = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (D_i f_j - D_j f_i) dx_i \wedge dx_j$.

Definition (Exaktheit)**.** Sei $k \geq 1$ und ω eine stetige k-Form auf U offen, dann heißt ω exakt wenn es eine auf U differenzierbare $(k-1)$-Form ν gibt, sodass $d\nu = \omega$.

Bemerkung. Ist $\omega = d\nu$ exakt, so gilt $d\omega = d(d\nu) = 0$, also folgt Geschlossenheit.

Theorem (Poincaré)**.** U sternförmig und ω geschlossene stetig differenzierbare k-Form auf $U \Leftrightarrow \omega$ exakt.

4.3 Integral über Differentialformen

Definition (Integration von n-Formen)**.** Ist $K \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$, K kompakt, U offen und $\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetige n-Form

$$\int_K \omega := \int_K f(x) dx$$

Definition (Orientierungserhaltende Abbildungen)**.** $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi : U \to V$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus.

Φ heißt orientierungstreu wenn $\det(D\Phi) > 0 \forall x \in U$ und orientierungsumkehrend sonst.[2]

[2] $\det(D\Phi) = 0$ ist unmöglich weil Diffeomorphismus.

Theorem (Unabhängigkeit der Parametrisierung)**.** Ist $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $K \subseteq U$ kompakt, $\Phi : U \to V$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus und ω stetige n-Form auf V.

$$\int_{\Phi(K)} \omega = \pm \int_K \Phi^* \omega$$

wobei das Vorzeichen positiv ist wenn Φ orientierungserhaltend ist und negativ sonst.

Proof. Transformationsformel. □

4.4 Pullback

Definition (Pullback)**.** $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) : V \to U \in \mathcal{C}^1$, ω k-Form auf U:

$$\Phi^* \omega := \sum_{|I|=k} (f_I \circ \Phi) d\phi_I$$

Bemerkung (Spezialfälle)**.** a

1. $k = 0$: $\Phi^* f = f \circ \Phi$
2. $k = 1$: $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$, also $\Phi^* \omega = \sum_{i=1}^n (f_i \circ \Phi) d\phi_i$, wobei $d\phi_i = \sum_{j=1}^m D_j \phi_i dt_j$.
3. $m = k$: $\Phi^* \omega = \sum_{|I|=k} (f_I \circ \Phi) d\phi_I$ mit $d\phi_I = \det((D_j \Phi_{i_l})_{l,j=1,\dots,k}) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k$
4. $m = n = k$: $\Phi^* \omega = (f \circ \Phi) \det(D\Phi) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_n$ für $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$

Theorem (Eigenschaften von Pullbacks)**.** a

1. $\Phi^*(\omega_1 + \lambda \omega_2) = \Phi^* \omega_1 + \lambda \Phi^* \omega_2$
2. $\Phi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = (\Phi^* \omega_1) \wedge (\Phi^* \omega_2)$
3. ω in $\mathcal{C}^1$, Φ in $\mathcal{C}^2$, dann gilt $d(\Phi^* \omega) = \Phi^*(d\omega)$
4. Für geeignete Definitions und Bildbereiche: $\Psi^*(\Phi^* \omega) = (\Phi^* \circ \Psi^*) \omega$

4.5 Allgemeine Formulierung des Satzes von Stokes

Theorem (Satz von Stokes)**.** $k \geq 2$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $M \subseteq U$ eine orientierte k-dimensionale $\mathcal{C}^2$ Untermannigfaltigkeit[3], $A \subseteq M$ kompakt mit glattem Rand[4] (induzierte Orientierung), ω stetig differenzierbare $(k-1)$-Form auf U, dann gilt:

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega.$$

4.6 Green und Gauß für Normalenbereiche

Theorem (Green)**.** ∂A positiv orientiert, stückweise stetig differenzierbar eine geschlossene Kurve in einer Ebene und A ein kompaktes Flächenstück. $f, g : A \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

$$\int_{\partial A} (f dx + g dy) = \int_A \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) d(x, y)$$

Proof. Mit Stokes:

$$\int_{\partial A} (f dx + g dy) = \int_{\partial A} \omega = \int_A d\omega$$

$$= \int_A \underbrace{D_x f \wedge dx \wedge dx}_{=0} + \underbrace{D_y f \wedge dy \wedge dx}_{=-D_y f \wedge dx \wedge dy} + D_x g \wedge dx \wedge dy + \underbrace{D_y g \wedge dy \wedge dy}_{=0}$$

$$= \int_A (D_x g - D_y f) \wedge dx \wedge dy = \int_A \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) d(x, y)$$

□

Bemerkung (Spezialfall)**.** Wählt man $\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 1$ (e.g. durch $f(x, y) = -\frac{y}{2}, g(x, y) = \frac{x}{2}$) erhält man genau $\mathrm{Vol}_2(A)$.

[3] $\mathcal{C}^1$ reicht eigentlich, $\mathcal{C}^2$ steht im Skriptum weil es leichter zu beweisen ist.
[4] Rand stets relativ zur Mannigfaltigkeit zu nehmen.

Theorem (Gauß)**.** $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, M eine 3-dimensionale $\mathcal{C}^2$-Untermannigfaltigkeit, $A \subseteq M$ kompakt mit glattem Rand, $\nu : M \to \mathbb{R}^3$ das Einheitsnormalenfeld auf ∂A, $f = (f_1, -f_2, f_3)$[5], $\omega = f_1 d_y \wedge d_z + f_2 d_x \wedge d_z + f_3 d_x \wedge d_z$:

$$\int_{\partial A} \omega = \boxed{\int_{\partial A} \langle f, \nu \rangle dS = \int_A \operatorname{div}(f)} = \int_A d\omega$$

[5]Das "$-$" handelt man sich beim Vertauschen von $dx \wedge dz$ ein, siehe Abschnitt zu äußeren Ableitungen. Alternativ könnte man dem Vorzeichen auch aus dem Weg gehen indem man die zweite Komponente von ω in der Form $d_z \wedge d_x$ schreibt; das wird allerdings leichter für einen Tippfehler gehalten.