

Analysis III

January 25, 2015

Contents

1	Wegintegrale	3
1.1	Wege und Kurven, Parametrisierungen, Tangentenvektor . . .	3
1.2	Weglänge, Parametrisierung mittels Weglänge	3
1.3	Vektorfelder und 1-Formen	4
1.4	Wegintegral (Kurvenintegral) einer 1-Form	6
1.5	Stammfunktionen, Sätze über deren Existenz	6
1.6	Integrabilitätsbedingungen und Lemma von Poincaré	8
2	Mannigfaltigkeiten	9
2.1	(Satz über implizite Funktionen und) Satz von der Umkehrabbildung	9
2.2	Immersion	10
2.3	Untermannigfaltigkeit und Charakterisierungen	11
2.4	Tangentenvektor, Normalenvektor an Untermannigfaltigkeit .	12
3	Mehrfache Integrale	14
3.1	Iteriertes Integral und Vertauschung der Reihenfolge	14
3.2	Allgemeine Eigenschaften von Integralen	15
3.3	Partielle Integration	15
3.4	Prinzip von Cavalieri	16
3.5	Transformationsformel (genaue Formulierung, Partition der Eins, Beweisidee)	16
3.6	Oberflächenintegrale über Funktionen und über Vektorfelder .	17
3.7	Lebesgue-Integral	17
4	Integralsätze	18
4.1	Green und Gauß für Normalenbereiche	18
4.2	Differentialformen	18

4.3	Äußere Ableitung (Spezialfälle: div, rot, grad)	18
4.4	Integral über Differentialformen	18
4.5	Pullback	18
4.6	Allgemeine Formulierung des Satzes von Stokes	18

Chapter 1

Wegintegrale

1.1 Wege und Kurven, Parametrisierungen, Tangentenvektor

Definition (Weg). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$. Eine *stetige* Abbildung $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Weg.

Sei im Folgenden γ stets ein so definierter Weg.

Definition (Regulärer Weg). Ein Weg γ heißt *regulär* wenn γ stetig differenzierbar ist und $\forall t \in I : \dot{\gamma}(t) \neq 0$.

Definition (Parametertransformation). Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle. Eine *zulässige Parametertransformation* ist eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : I \rightarrow J$ mit $\dot{\varphi}(t) > 0, \forall t \in I$

Definition (Kurve). Eine orientierte (reguläre) Kurve C ist eine Äquivalenzklasse von (regulären) Wegen, wobei zwei Wege γ_1 und γ_2 genau dann äquivalent sind, wenn es eine zulässige Parametertransformation φ gibt, sodass $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$.

Jeder Repräsentant γ von C heißt eine Parametrisierung von C .

1.2 Weglänge, Parametrisierung mittels Weglänge

Definition (Bogenlänge). Sei γ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg, dann heißt

$$L(\gamma) := \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

die Bogenlänge von γ .

Lemma (Invarianz unter Parametertransformation). Seien γ_1 und γ_2 äquivalent, dann gilt $L(\gamma_1) = L(\gamma_2)$.

Proof. Substitution. □

Korollar. Die Länge einer regulären Kurve ist wohldefiniert.

Definition (Parametrisierung nach der Weglänge). Sei $\tilde{\gamma}$ eine Parametrisierung, sodass $\|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\| = 1$. Dann ist $\tilde{\gamma}$ die *Parametrisierung nach der Weglänge*.

evt.
Be-
weis
schreiben

1.3 Vektorfelder und 1-Formen

Im Folgenden sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $p \in U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine \mathcal{C}^1 Funktion.

Definition (Vektorfeld). Eine Abbildung $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Vektorfeld auf U .

Definition (Gradientenfeld). Sei U zusätzlich offen, dann nennt man das stetige Vektorfeld $v(p) := \nabla f(p)$ ein Gradientenfeld.

Definition (1-Form). Eine 1-Form auf U ist eine Abbildung $\omega : U \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$.

Bemerkung (Spezialfall: Gradient). Unter der Identifikation des Gradienten mit dem *Zeilenvektor* der partiellen Ableitungen ist $\nabla f : U \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ ist eine 1-Form.¹

Definition (Äußeres Differential). Die durch ∇ induzierte 1-Form bezeichnen wir mit df .

¹ $\nabla f(p)$ wäre im eindimensionalen Fall z.B. gerade die Steigung im Punkt p , aber nicht als Zahl, sondern als lineares Funktional (i.e. Multiplikation mit der Steigung).

evt.
Meth-
ode
zur
Ermit-
tlung
nach-
liefern

Bemerkung (Darstellung durch das innere Produkt). Lineare Funktionale kann man stets als inneres Produkt schreiben, also erhalten wir allgemeiner für $h \in \mathbb{R}^n$:

$$\underbrace{df(p)}_{\substack{\in (\mathbb{R}^n)^* \\ \in \mathbb{R}}}(h) = \langle \nabla f(p), h \rangle$$

Definition (Basis). Mit dx_j bezeichnen wir von der j-ten Koordinatenprojektion pr_j ² induzierte 1-Form.

Bemerkung (Dualität). Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ die Standardbasis in \mathbb{R}^n , dann gilt $\forall p \in U$:

$$\begin{aligned} dx_j(p)(e_i) &= \langle \nabla pr_j(p), e_i \rangle \\ &= \langle e_j, e_i \rangle \\ &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

Also ist $\{dx_1, \dots, dx_n\}$ die zu $\{e_1, \dots, e_n\}$ duale Basis; daraus folgt die folgende Darstellung von $df(p)$:

$$df(p) = \sum_{i=1}^n \underbrace{D_i f(p)}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{dx_i(p)}_{\in (\mathbb{R}^n)^*}$$

Proposition (Identifikation von 1-Formen mit Vektorfeldern). Sei U offen.

Für jede 1-Form ω existiert genau ein $f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ sodass $\forall p \in U$:

$$\omega(p) = \sum_{i=1}^n f_i(p) dx_i(p) \tag{1.1}$$

Außerdem ist $v = (v_1, \dots, v_n) \mapsto \sum_{i=1}^n v_i dx_i$ ein Isomorphismus (i.e. bijektiv und linear).

Proof. Technischer Beweis. □

Definition (Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer 1-Form). Eine 1-Form ist genau dann stetig/differenzierbar wenn es all ihre Komponentenfunktionen (vgl. (1.1)) sind.

² $pr_j(x_1, \dots, x_n) = x_j$

1.4 Wegintegral (Kurvenintegral) einer 1-Form

Definition (Wegintegral von ω über γ).

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b \underbrace{\omega(\gamma(t))}_{\in (\mathbb{R}^n)^*} \underbrace{(\dot{\gamma}(t))}_{\in \mathbb{R}^n} dt$$

Bemerkung. Findet man eine Darstellung von ω mit Komponentenfunktionen $(f_1, \dots, f_n) = f$, so haben wir:

$$\omega(\gamma(t))(\dot{\gamma}(t)) = \sum_{i=1}^n f_i(\gamma(t))(\dot{\gamma}(t))_i = \langle f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle$$

Lemma (Unabhängigkeit des Wegintegrals von der Parametrisierung). Sei φ eine zulässige Parametertransformation, dann gilt:

$$\int_{\gamma \circ \varphi} \omega = \int_{\gamma} \omega \quad (1.2)$$

Proof. Substitution. □

Definition (Kurvenintegral). Sei γ ein beliebiger Repräsentant der Kurve C , dann definiert man $\int_C \omega := \int_{\gamma} \omega$.

Bemerkung. Wegen (1.2) ist das Kurvenintegral wohldefiniert.

Bemerkung. Mit der Identifikation von 1-Formen und Vektorfeldern (vgl. (1.1), kurz $\tilde{v} = \langle v, dx \rangle$) können wir folgende Definition vornehmen:

Definition (Kurvenintegrale über Vektorfelder).

$$\int_C \tilde{v} = \int_C \langle v, dx \rangle = \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt$$

1.5 Stammfunktionen, Sätze über deren Existenz

Definition (Stammfunktion einer 1-Form). $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von ω genau dann wenn $dF = \omega$.³

³ $dF = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i$

Definition (Exaktheit). Eine 1-Form heißt exakt, wenn sie eine Stammfunktion besitzt.

Bemerkung (Spezialfall: Vektorfelder). v ist ein Gradientenfeld $\Leftrightarrow \tilde{v}$ ist exakt.

Lemma (“Hauptsatz” für 1-Formen). Sei ω eine exakte 1-Form und F eine Stammfunktion von ω . Für *jeden* stückweisen \mathcal{C}^1 Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ gilt:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} dF = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \quad (1.3)$$

Proof. Kettenregel. □

Korollar (Integration über geschlossene Wege). ω exakt $\Rightarrow \int_{\gamma} \omega = 0$ für alle γ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Definition (Gebiet). Ein Gebiet im \mathbb{R}^n ist eine offene und wegzusammenhängende Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Lemma (Stückweise Differenzierbarkeit von Wegen in Gebieten). In einem Gebiet lassen sich je zwei Punkt nicht nur durch einen stetigen Weg, sondern sogar durch einen stückweise stetig differenzierbaren Weg verbinden.

Proof. Idee: Da man in einer offenen Teilmenge ist, kann man einen Weg als endliche Vereinigung linearer (also insbesondere differenzierbarer) Abschnitte mit Abstand echt größer 0 zum Rand konstruieren. □

Theorem (Zusammenhang exakt und Integral über geschlossene Wege). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, ω eine stetige 1-Form auf U und γ ein beliebiger geschlossener, stückweise stetig differenzierbarer Weg in U . Dann gilt:

$$\omega \text{ exakt in } U \Leftrightarrow \int_{\gamma} \omega = 0$$

Proof. “ \Rightarrow ” wurde bereits gezeigt.

“ \Leftarrow ”: Idee: Setze $F(x) = \int_{x_0}^x \omega = \int_{\alpha} \omega$ mit $\alpha(0) = x_0, \alpha(1) = x$.

Wohldefiniert, denn für jeden⁴ anderen Weg β mit $\beta(0) = x_0, \beta(1) = x$ gilt: $\alpha + (-\beta) =: \gamma$ ist ein geschlossener Weg und $0 = \int_{\gamma} \omega = \int_{\alpha} \omega - \int_{\beta} \omega$.

Um zu zeigen, dass das tatsächlich eine Stammfunktion von ω ist, i.e. $dF = \omega$, zeigt man, dass für $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$ gilt: $f_i = D_i F$.

Betrachte dafür $F(x + he_i) - F(x)$ im Grenzwert $h \rightarrow 0$. □

⁴Alle Wege müssen natürlich in U liegen.

1.6 Integrabilitätsbedingungen und Lemma von Poincaré

Definition (Geschlossenheit). Eine stetig differenzierbare 1-Form $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$ auf U heißt geschlossen, falls

$$D_i f_j = D_j f_i \quad (1.4)$$

Theorem (Poincaré). Sei U ein sternförmiges Gebiet und ω eine stetig differenzierbare 1-Form, dann gilt:

$$\omega \text{ exakt} \Leftrightarrow \omega \text{ geschlossen}^5$$

Proof. “ \Rightarrow ”: Nach dem Satz von Schwarz gilt: ω exakt $\Rightarrow \omega$ geschlossen.

“ \Leftarrow ”: Sei oBdA U sternförmig bez. 0 . Dann definiert man $F(x) := \int_0^1 \omega(tx)(x) dt$.

Als Parameterintegral ist es stetig differenzierbar.

Es bleibt zu zeigen, dass $D_i F = f_i$. □

technischer
Be-
weis,
evt.
nach-
brin-
gen

⁵“Geschlossenheit” hat *nichts* mit dem Integral über geschlossene Wege zu tun. Das sind nur die Integrationsbedingungen (1.4)!

Chapter 2

Mannigfaltigkeiten

2.1 (Satz über implizite Funktionen und) Satz von der Umkehrabbildung

Theorem (Satz über implizite Funktionen). Sei $(a, b) \in U_1 \times U_2 \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ (U_1, U_2 offen) mit $F : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$, $F(a, b) = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)^1$ invertierbar.

Dann gibt es offene Umgebungen $V_1 \subseteq U_1$ von a , $V_2 \subseteq U_2$ von b und eine eindeutige, stetig differenzierbare Abbildung $g : V_1 \rightarrow V_2$ mit $g(a) = b$ und $F(x, g(x))$ für alle $(x, y) \in V_1 \times V_2$.

Außerdem gilt $Dg(x) = - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x)) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))$.

Bemerkung (Merkhilfe).

$$DF(x, g(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))Dg(x)$$

Da $F(x, g(x)) = 0$ in einer geeigneten Umgebung ist

$$Dg(x) = - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x)) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))$$

Theorem (Satz von der Umkehrabbildung). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $a \in U$ und $b := f(a)$.

Falls $Df(a)$ invertierbar ist, dann existiert eine offene Umgebung U_0 von a und analog V_0 eine offene Umgebung von b mit $f|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0$ bijektiv und für $g := (f|_{U_0})^{-1}$ gilt die Gleichung

¹ y ist das zweite Argument

$$Dg(b) = (Df(a))^{-1}$$

Proof.

□

Bemerkung (Aussage des Theorems). Um zu überprüfen ob eine Abbildung lokal invertierbar ist reicht es sich die Ableitung an dem Punkt anzusehen.

evt.
Be-
weisidee
brin-
gen

2.2 Immersion

Definition (Diffeomorphismus). $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow V$ bijektiv und \mathcal{C}^1 . Ist f^{-1} ebenfalls \mathcal{C}^1 , so nennt man f einen \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus.

Lemma (\mathcal{C}^k -Diffeomorphismen). Ist f ein \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus und k -mal stetig differenzierbar, dann ist f ein \mathcal{C}^k -Diffeomorphismus.

Definition (Immersion). Sei $T \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $\Phi : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $\forall t \in T : \text{Rang } D\Phi(t) = k$ dann heißt Φ Immersion.

Definition (k -Flächen). $F := \Phi(T) \subseteq \mathbb{R}^n$ wird als parametrisierte k -Fläche bezeichnet.

Bemerkung (Eigenschaften von Immersionen). –

- $\forall t \in T : \text{Rang } D\Phi(t) = k$ impliziert $k \leq n$.
- $\forall t \in T : \text{Rang } D\Phi(t) = k$ impliziert auch, dass man für jedes $t \in T$ k von den n Komponentenfunktionen auswählen können, sodass $\det \frac{\partial(\Phi_{i_1}, \dots, \Phi_{i_k})}{\partial(t_1, \dots, t_k)}(t) \neq 0$ für eine offene Umgebung von t .
- Für $k = 1$ erhalten wir reguläre Kurven.
- Für $k = n$ ist Φ ein lokaler \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus.

Definition (Homöomorphismus). Ist Φ stetig und bijektiv mit stetiger Inverser, nennt man es einen Homöomorphismus.

Lemma (Immersion ist ein Homöomorphismus). $\Phi : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Immersion. Dann gibt es für alle $t \in T$ eine offene Umgebung $V \subseteq T$, sodass $\Phi|_V$ ein Homöomorphismus ist.

Proof. Idee: Satz von der Umkehrabbildung und Einschränkung auf die Komponenten für die $\det \frac{\partial(\Phi_{i_1}, \dots, \Phi_{i_k})}{\partial(t_1, \dots, t_k)}(t) \neq 0$ gilt. □

2.3 Untermannigfaltigkeit und Charakterisierungen

Definition (Untermannigfaltigkeit). $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt k -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n falls $\forall a \in M : \exists$ offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von a , $T \subseteq \mathbb{R}^k$ und eine Immersion $\Phi : T \rightarrow \mathbb{R}^n$, sodass:

- Φ ist ein Homöomorphismus $T \rightarrow \Phi(T)$
- $\Phi(T) = M \cap U$

Weiters nennen wir $\Phi : T \rightarrow M \cap U$ eine *lokale Parametrisierung* von M nahe a und Φ^{-1} eine *Karte*.

Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt differenzierbar, falls sie überall lokal differenzierbar ist.

wofür braucht man die Bedingung?

Theorem. Für $M \subseteq \mathbb{R}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- M ist eine k -dimensionale Mannigfaltigkeit
- *Lokale Darstellung als Graph:* $\forall a = (a_1, \dots, a_k, \dots, a_n) \in M$ gilt: zu $a' = (a_1, \dots, a_k)$ und $a'' = (a_{k+1}, \dots, a_n)^2$ gibt es offene Umgebungen $U' \subseteq \mathbb{R}^k$ und $U'' \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $g : U' \rightarrow U''$, sodass $M \cap (U' \times U'') = \{(x, g(x)) : x \in U'\}$
- *Lokale Beschreibung als Nullstellenmenge:* $\forall a \in M$ existiert offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und stetig differenzierbare Funktionen $f_1, \dots, f_{n-k} : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\forall x \in M \cap U : \text{Rang}_{\frac{\partial(f_1, \dots, f_{n-k})}{\partial(x_1, \dots, x_{n-k})}}(x) = n - k$ und $M \cap U = \{x \in U : f_1(x) = \dots = f_{n-k}(x) = 0\}$.
- *Lokal diffeomorph zu einem k -dimensionalen Untervektorraum des \mathbb{R}^n :* Sei $E_k := \{x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0 : x_i \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ die Einbettung eines k -dimensionalen Vektorraumes in \mathbb{R}^n . Für alle $a \in M$ existiert eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein offenes $V \subseteq \mathbb{R}^n$, sowie einen \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus $F : U \rightarrow V$ mit $F(M \cap U) = E_k \cap V$.

für konkrete Beispiele wie Rotationsflächen, etc. bitte das Skriptum nehmen.

²evt. nach Umnummerierung

Proof. Der Beweis sei dem interessierten Leser als Übungsaufgabe überlassen. \square

Korollar (Niveaumengen). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $c \in \mathbb{R}$ und $N_f(c) := f^{-1}(c) \subseteq \mathbb{R}^n$. Falls $\forall x \in N_f(c) : \nabla f(x) \neq 0$, dann ist $N_f(c)$ eine $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n .

2.4 Tangentenvektor, Normalenvektor an Untermannigfaltigkeit

Sei im Folgenden M stets eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n .

Definition (Tangentialvektor). $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor an M im Punkt a , wenn es einen stetig differenzierbaren Weg $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ gibt, mit $\gamma(0) = a$ und $\dot{\gamma}(0) = v$.

Definition (Normalenvektor). $n \in \mathbb{R}^n$ heißt Normalenvektor an M im Punkt a , wenn $\langle n, v \rangle = 0$ für alle Tangentenvektoren v .

Definition (Tangential-/Normalenraum).

$$T_a(M) := \{v \in \mathbb{R}^n : v \text{ Tangentialvektor an } M \text{ in } a\}$$

$$N_a(M) := \{w \in \mathbb{R}^n : w \text{ Normalenvektor an } M \text{ in } a\}$$

Definition (Tangential-/Normalenbündel).

$$T(M) := \bigcup_{a \in M} \{a\} \times T_a(M)$$

$$N(M) := \bigcup_{a \in M} \{a\} \times N_a(M)$$

Theorem (Basis des Tangential-/Normalenraums). Für jede lokale Parametrisierung Φ mit $\Phi(t_0) = a$ ist $\{D_1\Phi(t_0), \dots, D_k\Phi(t_0)\}$ eine Basis von $T_a(M)$.

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von a und M nahe a gegeben durch $M \cap U = \{x \in U : f_1(x) = \dots = f_{n-k}(x) = 0\}$, dann ist $\{\nabla f_1(a), \dots, \nabla f_{n-k}(a)\}$ eine Basis von $N_a(M)$.

Korollar (Lagrangemultiplikatoren). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\underbrace{f}_{\text{Hauptbedingung}}$, $\underbrace{g_1, \dots, g_r}_{\text{Nebenbedingungen}}$:
 $U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $r \leq n$, Rang der Jacobimatrix $D(g_1, \dots, g_r)$
maximal für alle $x \in M$, wobei $M = \{x \in U : g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$.

Falls f in $a \in M$ ein lokales Minimum/Maximum besitzt, dann existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, sodass

$$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \nabla g_i(a)$$

Proof. Idee: Wissen, dass M eine $(n - r)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Angenommen f habe in a ein lokales Maximum/Minimum, dann gilt für jeden \mathcal{C}^1 Weg γ auf M mit $\gamma(0) = a$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}(f(\gamma(t)))|_{t=0} = \langle \nabla f(\gamma(0)), \dot{\gamma}(0) \rangle$$

Da das für beliebige Wege γ gilt durchlaufen wir dabei den ganzen Tangentialraum; also ist $\nabla f(a) \in N_a(M)$. \square

Chapter 3

Mehrfache Integrale

3.1 Iteriertes Integral und Vertauschung der Reihenfolge

Lemma (Reihenfolge Doppelintegral). Ist $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann gilt:

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

Proof. Idee: Definiere Hilfsfunktion $\varphi(y) := \int_a^b \left(\int_c^y f(x, t) dt \right) dx$, man sieht $\varphi'(y) = \int_a^b f(x, y) dx$. Setzt man nun das Integral in der verkehrten Reihenfolge an, benutzt die Identität $\varphi'(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ und $\varphi(c) = 0$ erhält man das gewünschte Ergebnis. \square

Definition (Integral über Quader). Sei $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ ein Quader, dann ist für jede stetige Funktion $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ das Integral von f über Q definiert als: $\int_Q f(x) dx := \int_{a_n}^{b_n} \left(\dots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) \dots \right) dx_n$.

Definition (Support einer Funktion). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, dann ist der Träger von f definiert als: $\text{supp } f := \overline{\{x \in U : f(x) \neq 0\}} \cap U$

Definition (Vektorraum stetiger Funktionen mit kompaktem Träger). Mit $\mathcal{C}_c(U) := \{f \in \mathcal{C}(U) : \text{supp } f \text{ ist kompakt}\}$ bezeichnen wir den Vektorraum stetiger Funktionen mit kompaktem Träger.

Definition. Für $f \in \mathcal{C}_c$ definieren wir $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx := \int_Q f(x) dx$ für ein geeignetes Q .

3.2 Allgemeine Eigenschaften von Integralen

Theorem (Eigenschaften des Integrals auf $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$). Seien $f, g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt:

- $\int_{\mathbb{R}^n} (f + \lambda g)(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx$
- angenommen $\forall x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq g(x)$, dann gilt: $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx$
- sei $a \in \mathbb{R}^n$, dann gilt: $\int_{\mathbb{R}^n} f(x + a) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$

Proof. Die ersten beiden Punkte folgen direkt aus der Definition (iterierte eindimensionale Integrale), der letzte Punkt mittels Substitution in jedem der iterierten Integrale. \square

Bemerkung (Integral als lineares Funktional). Das so definierte Integral ist ein lineares, monotonen und translationsinvariantes Funktional auf $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$; man kann zeigen, dass jedes lineare Funktional mit diesen Eigenschaften (bis auf Normierung) gerade durch ein Integral gegeben sein muss.

Theorem (Stetigkeit des Integrals). Seien $f, f_k \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ für $k \in \mathbb{N}$ und es existiere K kompakt mit $\text{supp}(f_k) \subseteq K$. Wenn $f_k \rightarrow f$ glm., dann

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx.$$

Proof.

\square

wofür
braucht
man
hier
das φ ?

3.3 Partielle Integration

Im Folgenden bezeichne $\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x \in U \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n \setminus U \end{cases}$

Definition (Integral über offene Teilmengen). Für $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, setze $\int_U f(x) dx := \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x) dx$

Theorem. Sei $f \in \mathcal{C}^1(U)$, $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(U)$, dann gilt:

$$\int_U D_j \varphi(x) = 0$$

und

$$\int_U D_j f(x) \varphi(x) dx = - \int_U f(x) D_j \varphi(x) dx$$

Proof. Die erste Gleichung folgt durch aufspalten in iterierte Integrale und Vertauschung der abgeleiteten Komponente nach innen; Integration über 0 bleibt 0 und das Ergebnis folgt.

Die zweite Gleichung folgt aus partieller Integration (erinnere: $D_j(f\varphi) = D_j f \varphi + f D_j \varphi$) und daraus, dass $\int_U D_j(f\varphi) = 0$ ist (wegen der ersten Gleichung). \square

3.4 Prinzip von Cavalieri

Idee: Schneide $K \subseteq \mathbb{R}^n$ in $(n-1)$ -dimensionale “Scheiben” $K_t := \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : (x', t) \in K\} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$.

Theorem (Cavalieri). Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, dann gilt:

$$\text{Vol}_n(K) = \int_{\mathbb{R}} \text{Vol}_{n-1}(K_t) dt$$

Proof. K_t ist wieder kompakt und es gilt $\chi_{K_t}(x') = \chi_K(x', t)$, daher ist

$$\text{Vol}_n(K) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_{K_t}(x') dx' dt = \int_{\mathbb{R}} \text{Vol}_{n-1}(K_t) dt.$$

\square

3.5 Transformationsformel (genaue Formulierung, Partition der Eins, Beweisidee)

Theorem (Transformationsformel). Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi : U \rightarrow V$ ein \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus, dann gilt: $\forall f \in \mathcal{C}_c(V)$ ist $f \circ \Phi \in \mathcal{C}_c(U)$ und

$$\int_U f(\Phi(x)) |\det D\Phi(x)| dx = \int_V f(x) dx$$

Proof. Idee:

- Jeder Diffeomorphismus G lässt sich lokal als Verknüpfung zweier Typen aufspalten:
 Typ A: $G(x) = (x_1, \dots, x_{m-1}, g(x), x_{m+1}, \dots, x_n)$
 Typ B: Transposition die zwei Basisvektoren vertauscht und alle anderen fix lässt

- Die Partition der Eins ermöglicht genau so eine Lokalisierung.
- Durch Aufspalten in iterierte Integrale kann man die Substitutionsregel aus dem Eindimensionalen auf Typ A anwenden, Typ B kehrt lediglich das Vorzeichen um.

□

diesen
Be-
weis
nochmal
genau
an-
schauen

3.6 Oberflächenintegrale über Funktionen und über Vektorfelder

Definition (Oberflächenintegral im \mathbb{R}^3). Sei $T \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $\Phi : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Immersion und $K \subseteq T$ kompakt, dann definiert man für stetige $f : \Phi(K) \rightarrow \mathbb{R}$ das *Oberflächenintegral*

$$\int_{\Phi(K)} f dS := \int_K f(\Phi(t)) \|N_\Phi(t)\| dt$$

wobei $N_\Phi(t) = D_{t_1}\Phi(t) \times D_{t_2}\Phi(t)$, also der Normalenvektor (=Kreuzprodukt der Tangentialvektoren) ist.

Lemma (Unabhängigkeit von der Parametrisierung).

3.7 Lebesgue-Integral

Siehe Einleitung von Gröchenig (ist bereits kurz und bündig zusammengefasst).

Chapter 4

Integralsätze

- 4.1 Green und Gauß für Normalenbereiche
- 4.2 Differentialformen
- 4.3 Äußere Ableitung (Spezialfälle: div, rot, grad)
- 4.4 Integral über Differentialformen
- 4.5 Pullback
- 4.6 Allgemeine Formulierung des Satzes von Stokes