1.3 二维Fourier变换

1.3.1 傅里叶级数

周期函数$f(t)$的三角级数展开，要满足如下条件：

狄里赫利条件：函数在一个周期内有有限个极值点和第一类间断点

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos 2\pi n\nu t+b_n\sin 2\pi n\nu t\right)$$

$$\left.\begin{aligned} a_0&=\frac{2}{\tau}\int_0^{\tau}f(t)\mathrm{d}t\\ a_n&=\frac{2}{\tau}\int_0^{\tau}f(t)\cos 2\pi n\nu t\mathrm{d}t\\ b_n&=\frac{2}{\tau}\int_0^{\tau}f(t)\sin 2\pi n\nu t\mathrm{d}t\end{aligned}\right\}$$

1

周期函数也可以展开成指数傅里叶级数形式

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n\exp(j2\pi n\nu t)$$

$$C_n=\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}f(t)\exp(-j2\pi n\nu t)\mathrm{d}t,\quad \mathrm{n}=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

C_n是频率ν的复函数，称为频率函数，由于周期函数中，只包含$0,\pm\nu,\pm2\nu,\cdots$ 等频率分量，频率的取值是离散的，所以周期函数只有离散谱。没有连续谱。

2

是离散求和的形式，表明：

一个随时间或空间变化的周期函数（信号）$f(x)$，可以看作是许多具有不同频率的基元简谐波信号的叠加。各简谐波分量的频率为u，$u=nu$，是离散的；取值为0，$\pm u$，$\pm 2u$，$\pm 3u$，…；$u=0$为直流分量，$\pm u$ 为基频，其余为高次谐波分量。

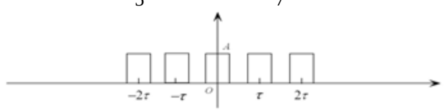
$\exp(j2\pi ux)$ 是其中的某一简谐波成分；系数c_n或(a_n，b_n) 是该简谐波成分的权重，它是频率u的函数，称之为的傅立叶频谱(简称频谱）——Fourier Spectrum.

3

周期为的$\tau=1/f_0$矩形波函数，在一个周期内的解析式为

$$g(x)=\begin{cases}A & |x|<\tau/4\\ 0 & \tau/4<|x|<\tau/2\end{cases}$$

$$g(x)=\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}[\cos 2\pi f_0x-\frac{1}{3}\cos 2\pi(3f_0)x+\frac{1}{5}\cos 2\pi(5f_0)x-\frac{1}{7}\cos 2\pi(7f_0)x+\cdots]$$



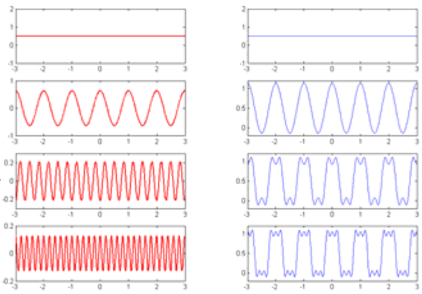
4

$$\frac{A}{2}$$

$$\frac{2A}{\pi}\cos 2\pi f_0 x$$

$$-\frac{2A}{\pi}\frac{1}{3}\cos 2\pi(3f_0)x$$

$$\frac{2A}{\pi}\frac{1}{5}\cos 2\pi(5f_0)x$$



1.3.2　傅立叶积分(Fourier integral)及傅立叶变换(Fourier transform)

若函数 $f(x, y)$ 在整个无限 xy 平面上满足狄里赫利条件，且绝对可积，$f(x, y)$ 可用叠加积分表示成：

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(u,v)\exp[j2\pi(ux+vy)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\exp[-j2\pi(ux+vy)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

是连续求和，是叠加积分；表明：

1. 一个随时间或空间变化的非周期函数(信号)，可以看作是许多不同频率的基元简谐波信号的叠加积分。各简谐波分量的频率为u，频率的取值是连续分布的。
2. Exp[j2π($ux+vy$)]是其中某一简谐波成分；$F(u, v)$ 是该简谐波成分的权重，它是频率 u 的函数，称之为的傅立叶频谱(Fourier Spectrum)，简称频谱。

$$G(u,v)=\iint g(x,y)\exp\{-j2\pi(ux+vy)\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

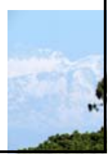
$$G(u,v)=F\{g(x,y)\}$$　　函数g(x,y) 的傅立叶变换

$$g(x,y)=\iint G(u,v)\exp\{j2\pi(ux+vy)\}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

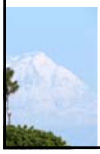
$$g(x,y)=F^{-1}\{G(u,v)\}$$　　函数G(u,v)的逆傅立叶变换

函数g(x,y)和他的傅立叶变换构成一个傅立叶变换对，表示为：

$$g(x,y)\Leftrightarrow G(u,v)$$



- 在电信号处理、通信中，一般是1D时间信号，经常用到一维傅立叶级数和傅立叶变换。
- 在光学中，多数情况下研究的对象是2D或3D图像处理或成像，一般是二维或三维空间分布（可表示为二维或三维空间函数）。



9

1.3.2(2)傅里叶变换的存在条件

要保证函数存在二维傅里叶变换对，函数就应该满足*狄里赫利条件*和*绝对可积条件*，这个条件是从纯数学的角度来考虑的，是数学理论研究的范畴，信息光学来说，应该从应用的观点来考虑：

在应用傅里叶变换的各个领域的大量事实表明，作为时间或空间函数而实际存在的物理量，总具备保证其傅里叶变换存在的基本条件。从应用的角度看，可以认为，傅里叶变换实际上总是存在的。

物理上所用到的函数总存在FT

在应用问题中，也会遇到一些理想化的函数，如常数函数、阶跃函数等光学领域中常用的函数，但是他们不满足保证其傅里叶变换存在的充分条件；同时他们在物理上也不能够严格实现，对这类数学难以讨论其经典意义下的傅里叶变换。但是可以借助函数序列极限概念得到这类函数的广义傅里叶变换。

10

可分离变量的傅立叶变换

如果一个二维函数可以分离，那么他的傅立叶变换可以表示成两个一维傅立叶变换的乘积：

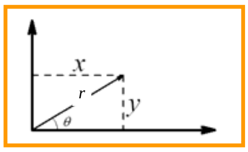
如果 $$g(x,y)=j(x)h(y)$$

那么 $$F\{g(x,y)\}=F\{j(x)h(y)\}=F\{j(x)\}F\{h(x)\}$$

11

3. 极坐标系内的二维傅立叶变换

空域 $$\begin{cases}(x,y)\to(r,\theta)\\ x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$$



频域 $$\begin{cases}(u,v)\to(\rho,\varphi)\\ u=\rho\cos\varphi\\ v=\rho\sin\varphi\end{cases}$$

具有圆对称的函数在极坐标下描述起来更加方便

12

$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\exp[-j2\pi(ux+vy)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$\underline{u=\rho\cos\varphi, v=\rho\sin\varphi}$ $\quad$ $\underline{x=r\cos\theta, y=r\sin\theta}$

$$F(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\exp[-j2\pi(\rho r\cos\theta\cos\varphi+\rho r\sin\theta\sin\varphi)]r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$F(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\exp[-j2\pi\rho r\cos(\theta-\varphi)]r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$F(\rho,\varphi)=F(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$ $\quad$ $f(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$

$$\boxed{F(\rho,\varphi)=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} rf(r,\theta)\exp[-j2\pi\rho r\cos(\theta-\varphi)]\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}$$

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)\exp[j2\pi(ux+vy)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$\underline{x=r\cos\theta, y=r\sin\theta}$ $\quad$ $\underline{u=\rho\cos\varphi, v=\rho\sin\varphi}$

$$f(r\cos\theta,r\sin\theta)=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} F(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\exp[j2\pi(\rho r\cos\theta\cos\varphi+\rho r\sin\theta\sin\varphi)]\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$$

$$f(r\cos\theta,r\sin\theta)=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} F(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\exp[j2\pi\rho r\cos(\varphi-\theta)]\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$$

$f(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ $\quad$ $F(\rho,\varphi)=F(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$

$$\boxed{f(r,\theta)=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \rho F(\rho,\varphi)\exp[j2\pi\rho r\cos(\theta-\varphi)]\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi}$$

极坐标系下的Fourier transformation

$$G(\rho,\varphi)=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \boxed{r}f(r,\theta)\exp[\boxed{-j}2\pi\rho r\cos(\theta-\varphi)]\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$f(r,\theta)=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \boxed{\rho}G(\rho,\varphi)\exp[\boxed{j}2\pi\rho r\cos(\theta-\varphi)]\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$$

傅里叶-贝塞尔变换

$$g(r,\theta)=g(r)$$

$$G(\rho,\varphi)=\int_0^{\infty} rg(r)\left\{\boxed{\int_0^{2\pi}\exp[-j2\pi\rho r\cos(\theta-\varphi)]\mathrm{d}\theta}\right\}\mathrm{d}r$$

其中： $\boxed{\int_0^{2\pi}\exp[-ja\cos(\theta-\varphi)]\mathrm{d}\theta=2\pi \mathrm{J}_0(a)}$

$G(\rho)=2\pi\int_0^{\infty} rg(r)\mathrm{J}_0(2\pi\rho r)\mathrm{d}r$ $\quad$ 也称作零阶Bessel变换

$G(\rho)$ 的傅立叶逆变换

$$g(r)=2\pi\int_0^{\infty} rG(\rho)\mathrm{J}_0(2\pi\rho r)\mathrm{d}\rho$$

$$G(\rho)=2\pi\int_0^{\infty} rg(r)\mathrm{J}_0(2\pi\rho r)\mathrm{d}r$$

$J_0(\cdot)$ 是第一类零阶贝塞耳函数(the zero order Bessel function of the first kind)，与ϕ无关，表明圆对称函数 的FT 和IFT 仍为圆对称函数。
这种特殊形式的傅立叶变换被称为傅立叶-贝塞尔变换

17

用B{ }表示傅立叶-贝塞尔变换或者零阶汉克尔变换，那么有：

$$\mathrm{BB}^{-1}\{g_R(r)\}=\mathrm{BB}\{g_R(r)\}=g_R(r)$$

$$\mathrm{B}\{g_R(ar)\}=\frac{1}{a^2}G(\rho/a)$$

$$\int x^m\mathrm{J}_{m-1}(x)\mathrm{d}x=x^m\mathrm{J}_m(x)+C$$

18

1.3.3 广义傅里叶变换

1. 如果只考虑经典意义的Fourier变换，那么对一些很有用的函数，都无法确定其Fourier变换，这给Fourier变换带来了很大的局限性。
2. Fourier变换能获得广泛的应用，很大程度上与引入广义傅里叶变换有关。所谓*广义傅里叶变换*是指*极限意义下*的傅里叶变换和脉冲函数(δ 函数)的傅里叶变换。
3. 若函数可看作是某个可变换函数组成的序列极限，对序列中每个函数进行变换，组成一个新的可变函数序列，则这个新序列的极限是原函数的广义变换。

19

1.3.3(1)极限意义下的傅里叶变换和脉冲的FT

1 极限意义下的傅立叶变换

函数f(x)没有经典意义下的傅立叶变换，但是$f(x)$和一个函数序列$g_n(x)$具有如下关系：

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} g_n(x)$$

并且：$G_n(u)=F\{g_n(x)\}$

则定义：$F\{f(x)\}=\lim_{n\to\infty} G_n(u)$

20

例子：

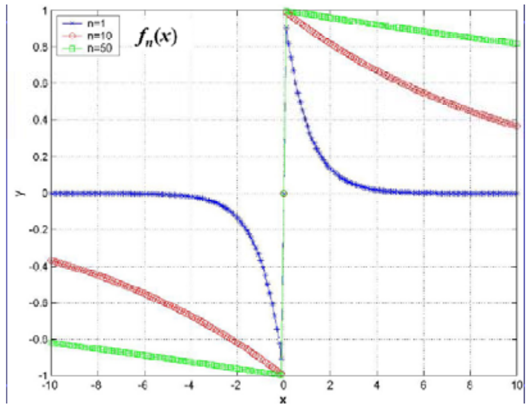
考察函数sgn(*x*)的傅里叶变换：

该函数不满足经典傅里叶变换条件！

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad f_n(x)=\begin{cases}-e^{x/n} & x<0\\ 0 & x=0\\ e^{-x/n} & x>0\end{cases}$$

$$\operatorname{sgn}(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

21



22

$$F_n(\xi)=F\{f_n(x)\}$$
$$=\int_0^{\infty} e^{-x/n}\exp(-j2\pi\xi x)\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{0} e^{x/n}\exp(-j2\pi\xi x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{\infty} e^{-(1/n+j2\pi\xi)x}\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{0} e^{(1/n-j2\pi\xi)x}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{-1}{(1/n+j2\pi\xi)}e^{-(1/n+j2\pi\xi)x}\Big|_0^{\infty}-\frac{1}{(1/n-j2\pi\xi)}e^{(1/n-j2\pi\xi)x}\Big|_{-\infty}^{0}$$
$$=\frac{-j4\pi\xi}{\frac{1}{n^2}+(2\pi\xi)^2}$$

23

Sgn的傅立叶变换就是上式的极限，即：

$$F\{\operatorname{sgn}(x)\}=\lim_{n\to\infty}F_n(\xi)=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{-j4\pi\xi}{\frac{1}{n^2}+(2\pi\xi)^2}\right\}=\begin{cases}-j/\pi\xi, & \xi\neq 0\\ 0, & \xi=0\end{cases}$$

24

2. 脉冲函数的傅里叶变换 $F[\delta(x)] = ?$

根据傅立叶变换的定义：

$$F\{\delta(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\exp(-j2\pi\xi x)\mathrm{d}x$$

$$= \exp(-j2\pi\xi \cdot 0) = 1$$

δ 函数的频谱在整个频域内均匀

$$F[\delta(x)] = 1$$

利用极限的形式来求脉冲函数的广义FT

已知： $\delta(x) = \lim_{n\to\infty} n\mathrm{rect}(nx)$

$$F[\delta(x)] = F\{\lim_{n\to\infty} n\mathrm{rect}(nx)\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} F[n\mathrm{rect}(nx)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathrm{sinc}(u/n) = 1$$

$$F[\delta(x)] = 1$$

常数1的傅里叶逆变换？

$$G(u,v) = 1 \qquad F^{-1}\{G(u,v)\} = ?$$

$$G(u,v) = \lim_{\tau\to\infty} \mathrm{rect}(u/\tau)\mathrm{rect}(v/\tau)$$

$$F^{-1}\{\mathrm{rect}(u/\tau)\} = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \exp(j2\pi ux)\mathrm{d}u = \tau\mathrm{sinc}(\tau x)$$

$$\boxed{\begin{aligned} F^{-1}\{G(u,v)\} &= F^{-1}\{\lim_{\tau\to\infty} \mathrm{rect}(u/\tau)\mathrm{rect}(v/\tau)\} \\ &= \lim_{\tau\to\infty}\{\tau^2 \mathrm{sinc}(\tau x)\mathrm{sinc}(\tau y)\} \end{aligned}}$$

$$\boxed{F^{-1}\{1\} = \delta(x,y)}$$

另外，根据δ(x)函数的广义定义，

只要证明**FT^{-1}[1]**，在积分中的作用相当于**δ(x)**函数即可。

证明：

设有一个函数***f(x)***，它在***x*=0**处连续，并且其**FT**存在，即有：***F*(*u*) = *F* {*f*(*x*)}**，

$$\int F^{-1}\{1\} f(x)dx = \int [\int 1 \bullet \exp(j2\pi ux)\mathrm{d}u] f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int [\int f(x)\exp(j2\pi ux)\mathrm{d}x]\mathrm{d}u$$

$$= \int F(-u)du = \int F(u)du$$

$$= \int F(u)\exp[-j2\pi u \bullet 0]du = f(0)$$

即： $\int F^{-1}\{1\} f(x)dx = f(0)$

又因为： $\int \delta(x) f(x)dx = f(0)$

所以有 $F^{-1}\{1\} = \delta(x)$

也就是说： $\delta(x) \Leftrightarrow 1$

$$F\{1\} = \delta(x) \qquad 1 \Leftrightarrow \delta(x)$$
$$F^{-1}\{\delta(x)\} = 1$$

29

利用逆傅立叶变换的定义就可以证明

$$F^{-1}\{\delta(x)\} = \int \delta(x)\exp[j2\pi ux]\mathrm{d}x = \exp[j2\pi u\cdot 0] = 1$$

习题：证明 $F\{1\} = \delta(x)$

$$F\{\delta(x - x_0)\} = \exp(-j2\pi u x_0)$$

30

3. 广义傅立叶变换计算举例

1. 阶跃函数step(x)的傅立叶变换

$$\mathrm{step}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & \text{other} \end{cases}$$

$$\mathrm{step}(x) = \frac{1}{2}[1 + \mathrm{sgn}(x)]$$

$$F\{\mathrm{step}(x)\} = \frac{1}{2}(F\{1\} + F\{\mathrm{sgn}\}) = \frac{1}{2}\left\{\delta(x) - \frac{j}{\pi\xi}\right\}$$

31

2. 梳状函数comb(x/a)的傅立叶变换(a>0)

$$\mathrm{comb}(x/a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x/a - n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[(x - na)/a]$$

$$= a\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - na)$$

对这个周期函数做傅立叶级数展开(周期为a)

$$\mathrm{comb}(x/a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(-j2\pi nx/a)$$

$$c_n = \frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2} f(x)\exp(-j2\pi nx/a)dx = 1$$

$$\mathrm{comb}(x/a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi nx/a)$$

32

$$\mathrm{F}\{\mathrm{comb}(x/a)\} = F\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(j2\pi nx/a)\}$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int \exp(j2\pi nx/a)\exp(-j2\pi ux)\mathrm{d}x$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int \exp[-j2\pi(u-n/a)x]\mathrm{d}x$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(u-\frac{n}{a}) = a\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(au-n) = a\mathrm{comb}(au)$$

$$\mathrm{F}\{\mathrm{comb}(x)\}=\mathrm{comb}(u)$$

33

3 其他几个函数的FT变换

1. rect函数 $F\{\mathrm{rect}(x)\} = \mathrm{sinc}(u)$

$$F^{-1}\{\mathrm{sinc}(u)\} = \mathrm{rect}(x)$$

2. 三角形函数(tri函数) $\mathrm{tri}(x) = \begin{cases} 1-|x|, & |x|\le 1 \\ 0 & \text{other} \end{cases}$

$$F\{\Lambda(x)\} = \mathrm{sinc}^2(u)$$
$$F^{-1}\{\mathrm{sinc}^2(u)\} = \Lambda(x)$$

34

3. 高斯函数gaus(x)

$$F\{\exp(-\pi x^2)\} = \exp(-\pi u^2)$$

$$F\{\exp(-\pi x^2)\} = \int \exp(-\pi x^2)\exp(-j\pi ux)dx$$
$$= \int \exp[-\pi(x^2 + j2ux)]dx$$
$$= \int \exp\{-\pi[(x+ju)^2 + u^2]\}dx$$
$$= \exp(-\pi u^2)\int \exp[-\pi(x+ju)^2]dx$$
$$= \exp(-\pi u^2)\boxed{\int \exp[-\pi(x+ju)^2]d(x+ju)}$$
$$= \exp(-\pi u^2)$$

35

4. 周期函数的FT

设 $f(x)$ 为周期函数，周期为 d_0，频率为 $f_0=1/d_0$，则

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(j2\pi nf_0 x)$$

其中：$C_n = f_0\int_0^{\frac{1}{f_0}} f(x)\exp(-j2\pi nf_0 x)dx$

此式表明，在空域中（或时间域中），$f(x)$ 可看成是由许多不同频率的简谐波成分叠加而成，是分立的，每一成份的频率为 nf_0，相应的权重为 C_n。

36

这一点在频域中可看得更清楚：

$$F(u) = FT[f(x)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(j2\pi n f_0 x)] \exp(-j2\pi u x) dx$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-j2\pi(u - n f_0)x] dx$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(u - n f_0)$$

可见其频谱是分立谱（离散谱）

37

5. 正弦函数和余弦函数的FT

$$F\{\cos 2\pi u_0 x\} = \frac{1}{2}\{\delta(u-u_0) + \delta(u+u_0)\}$$

$$F\{\sin 2\pi u_0 x\} = -\frac{i}{2}\{\delta(u-u_0) - \delta(u+u_0)\}$$

38

6. 圆域函数的FT

$$f(r) = \mathrm{circ}(r/a)$$

$$FT[\mathrm{circ}(\frac{r}{a})] \Leftrightarrow \frac{2\pi a^2 J_1(\pi \cdot 2\rho a)}{\pi \cdot 2\rho a}$$

$$FT[\mathrm{circ}(r)] \Leftrightarrow \frac{2\pi J_1(\pi \cdot 2\rho)}{\pi \cdot 2\rho}$$

39

证明：

$$G(\rho) = 2\pi \int_0^a r f(r) J_0(2\pi\rho r) dr$$

$$= 2\pi \int_0^a r J_0(2\pi\rho r) dr$$

$$= \frac{2\pi}{(2\pi\rho)^2} \int_0^{2\pi\rho a} (2\pi\rho r) J_0(2\pi\rho r) d(2\pi\rho r)$$

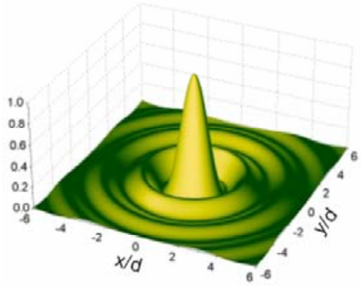
$$= \frac{2\pi}{(2\pi\rho)^2} 2\pi\rho a J_1(2\pi\rho a) \qquad \int_0^x \xi J_0(\xi) d\xi = x J_1(x)$$

$$= \frac{1}{\rho} a J_1(2\pi\rho a) = \pi a^2 \frac{2J_1(\pi \cdot 2\rho a)}{\pi \cdot 2\rho a}$$

$$= \pi a^2 \mathrm{somb}(2\rho a)$$

宽帽沿函数。

40



7 有限余弦波列的FT

$$\mathrm{rect}\left(\frac{x}{2T}\right)\cos(2\pi f_0 x) \Leftrightarrow T\{[\mathrm{sinc}[2(u-f_0)T]+\mathrm{sinc}[2(u+f_0)T]\}$$

8 半边指数函数的FT

$$\exp(-ax)\mathrm{step}(x) \Leftrightarrow \frac{1}{a+j2\pi u} \qquad a>0$$

9 阻尼正弦的FT

$$\exp(-ax)\mathrm{step}(x)\sin(2\pi f_0 x) \Leftrightarrow \frac{2\pi f_0}{(a+j2\pi u)^2+(2\pi f_0)^2}$$

小结：

$$1 \Leftrightarrow \delta(f)$$
$$\delta(t) \Leftrightarrow 1$$
$$rect(t/T) \Leftrightarrow |T|\mathrm{sinc}(Tf)$$
$$\Lambda(t/T) \Leftrightarrow |T|\mathrm{sinc}^2(Tf)$$
$$comb(t/T) \Leftrightarrow |T|\mathrm{comb}(Tf)$$
$$Gaus(t/T) \Leftrightarrow |T|Gaus(Tf)$$
$$\exp(-|t|) \Leftrightarrow \frac{2}{4\pi^2 f^2+1}$$
$$t^{-1} \Leftrightarrow -j\pi\,\mathrm{sgn}(-\pi f^2)$$
$$\mathrm{sgn}(t) \Leftrightarrow (j\pi f)^{-1}$$
$$u(t) \Leftrightarrow 2^{-1}\delta(t)+(j2\pi f)^{-1}$$
$$\cos(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow 2^{-1}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$$
$$\sin(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow (2j)^{-1}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)]$$

$$rect(x/a)rect(y/b) \Leftrightarrow |ab|\mathrm{sinc}(af_x)\mathrm{sinc}(bf_y)$$
$$circ(r/a) \Leftrightarrow \pi|a|^2\, jinc(a\rho)$$
$$\frac{\delta(r)}{\pi r} \Leftrightarrow 1$$
$$\delta(ax,by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|}$$
$$\frac{1}{r} \Leftrightarrow \frac{1}{\rho}$$
$$1 \Leftrightarrow \delta(f_x,f_y)$$
$$\cos(\pi r^2) \Leftrightarrow \sin(\pi\rho^2)$$
$$\exp(\pm j\pi r^2) \Leftrightarrow \pm j\exp(\mp j\pi\rho^2)$$
$$Gaus(ax,by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|}Gaus(f_x/a,f_y/b)$$
$$Gaus(ar) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|^2}Gaus(f_\rho/a)$$
$$comb(x/a)comb(y/b) \Leftrightarrow |ab|comb(af_x)comb(bf_y)$$

1.5 FT的基本性质和有关定理

本节给出一些重要的FT性质，间或加以推导

利用这些性质，只要知道不多的几个函数的FT，就很容易求出其他函数的FT，起到化难为简的作用

这些性质和定理在线性系统分析，信号处理，图像处理等领域经常使用。

1. 5. 1 FT的基本性质

1. 线性性质

设 $F(u,v)=F\{f(x,y)\},G(u,v)=F\{g(x,y)\}$ ***a*, *b***为常数

有 $F\{af(x,y)+bg(x,y)\}=aF(u,v)+bG(u,v)$

a. 和的FT等于FT的和————叠加性
b. 幅值按同样的比例缩放————均匀性
c. 同时具有叠加性和均匀性————线性性质性

45

2 对称性

若 $F(u,v)=\mathcal{F}\{f(x,y)\}$

则 $\mathcal{F}\{F(x,y)\}=f(-u,-v)$

证明：$\mathcal{F}\{F(x,y)\}=\iint F(x,y)\exp[-j2\pi(ux+vy)]dxdy$

$$=\iint F(x,y)\exp[j2\pi((-u)x+(-v)y)]dxdy$$

$$=f(-u,-v)$$

46

对称性的一些其他情形

$f(-x,-y)\Leftrightarrow F(-u,-v)$ $F(u,v)\Leftrightarrow f(-x,-y)$

$-f(-x,-y)\Leftrightarrow -F(-u,-v)$ $F(-u,-v)\Leftrightarrow f(x,y)$

若**f(x,y)** 为偶函数，则***F*(u,v)** 也是偶函数，
即: 若**f(-x,-y) = f(x,y)**, 则***F*(-*u*,-*v*) = *F*(*u*,*v*)**。
若**f(x,y)** 为奇函数，则***F*(u,v)** 也是奇函数，
即：若***f*(-x,-*y*) = -f(*x*,*y*)**, 则***F*(-*u*,-*v*) = -*F*(*u*,*v*)**。

47

3 迭次FT

以连续两次FT为例，二元函数f(x, y)的连续两次FT变换，得到原函数的倒立像，即：

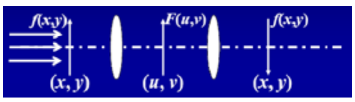
$$F\{F\{f(x,y)\}\}=f(-x,-y)$$

$$\iint\{\iint f(x,y)\exp[-j2\pi(ux+vy)]dxdy\}\exp[-j2\pi(ux'+vy')]dudv$$

$$=\iint f(x,y)dxdy\{\underline{\iint\exp[-j2\pi(u(x+x')+v(y+y')]dudv}\}$$

$$=\iint f(x,y)\underline{\delta(x+x',y+y')}dxdy$$

$$=f(-x',-y')=f(x,y)$$



48

4、FT的坐标缩放性质

若a,b为不等于零的实常数，若***F*(*u*,*v*)=*F*{*f*(*x*,*y*)}**,则有：

$$F\{f(ax,by)\}=\frac{1}{|ab|}F(\frac{u}{a},\frac{v}{b})$$

证明：略

光学上，空域中空间坐标的放大或缩小，导致空间频域中的空间频谱坐标缩小或放大。

如：孔径夫琅和费衍射。

5、FT的平移性

若***F*{*f*(*x*,*y*)}=*F*(*u*,*v*)**,且x_0,y_0为常数，则有

$$\mathcal{F}\{f(x-x_0,y-y_0)\}=\exp[-j2\pi(ux_0+vy_0)]F(u,v)$$

证明：

空域中的平移造成频域中频谱的相移。光场复振幅不具有平移不变性。但强度具有平移不变性。

FT的体积对应关系

假设，***F*{*f*(*x*,*y*)}=*F*(*u*,*v*)**，则有

$$F(0,0)=\iint f(x,y)dxdy$$

$$f(0,0)=\iint F(u,v)dudv$$

7　复共轭函数的FT

若***F*{*f*(*x*,*y*)}=*F*(*u*,*v*)**，则有：

$$F\{f^*(x,y)\}=F^*(-u,-v)$$

$$F\{f^*(-x,-y)\}=F^*(u,v)$$

如果**f(x,y)**为实数，则有：

$$F(u,v)=F^*(-u,-v)$$

证明：

$$F\{f^*(x,y)\}=F\{f(x,y)\}$$

$$F\{f^*(x,y)\}=F^*(-u,-v)$$

1.5.2 FT的基本定理

1. *卷积定理(Convolution Theorem)*

2. *相关定理(Correlation Theorem)*

3. 巴塞伐定理(Parseval’s Theorem)

4. 广义巴塞伐定理(Generalized Parseval’s Theorem)

5. 导数定理(Derivative Theorem)

53

1.卷积定理 (convolution theorem)

设$F\{f(x,y)\}=F(u,v)$, $F\{g(x,y)\}=G(u,v)$，则有

$$F\{f(x,y)*g(x,y)\}=F(u,v)G(u,v)$$
$$F\{f(x,y)g(x,y)\}=F(u,v)*G(u,v)$$

即两个函数卷积的FT等于它们的FT之积。

两个函数乘积的FT等于它们的FT的卷积。

若$f(x,y)$和$g(x,y)$表示两幅图像，卷积定理即表示：两图像卷积的频谱等于两图像频谱之积；两图像乘积的频谱等于两图像频谱之卷积。

54

证明：

$$F\{f(x)*g(x)\}=\int\left[\int f(\alpha)g(x-\alpha)d\alpha\right]\exp(-j2\pi ux)\mathrm{d}x$$
$$=\int f(\alpha)\left[\int g(x-\alpha)\exp(-j2\pi ux)\mathrm{d}x\right]d\alpha$$
$$=\int f(\alpha)G(u)\exp(-j2\pi u\alpha)d\alpha$$
$$=G(u)\int f(\alpha)\exp(-j2\pi u\alpha)d\alpha$$
$$=G(u)F(u)$$

同样可证：$F\{f(x,y)g(x,y)\}=F(u,v)*G(u,v)$

55

卷积定理在FT理论及应用中非常重要：

对于一个复杂函数，其FT难求，若它可表示成几个简单函数的卷积，而这些简单函数的FT易求，则可用卷积定理。

如：
$$F\{\Lambda(x)\}=?$$
$$\Lambda(x)=\mathrm{rect}(x)*\mathrm{rect}(x)$$
$$F\{\Lambda(x)\}=F\{\mathrm{rect}(x)*\mathrm{rect}(x)\}$$
$$=F\{rect(x)\}F\{rect(x)\}$$
$$=\mathrm{sinc}(u)\mathrm{sinc}(u)=\mathrm{sinc}^2(u)$$

当两个函数或图像的卷积难求时，可先求得各自的FT，乘积后，再求IFT，即可得两者之卷积。

56

又比如：

$$\mathrm{sinc}(x)*\mathrm{sinc}(x)=?$$

$$F\{\mathrm{sinc}(x)*\mathrm{sinc}(x)\}=F\{\mathrm{sinc}(x)\}F\{\mathrm{sinc}(x)\}$$
$$=\mathrm{rect}(u)\mathrm{rect}(u)$$
$$=\mathrm{rect}(u)$$

$$\mathrm{sinc}(x)*\mathrm{sinc}(x)=F^{-1}\{\mathrm{rect}(u)\}=\mathrm{sinc}(x)$$

数字图像处理或数字信号处理中有FFT与FIFT算法和程序；
光学上可用FT透镜实现FT和IFT功能。

57

2. 相关定理

(1) 互相关定理

若： $F\{f(x,y)\}=F(u,v)$, $F\{g(x,y)\}=G(u,v)$

则有：$F\{f(x,y)\otimes g(x,y)\}=F^*(u,v)G(u,v)$

通常把 $F^*(u,v)G(u,v)$ 称为 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 的互谱能量密度，简称为互谱密度。

互相关定理表明：两个函数的互相关与其互谱密度构成傅里叶变换对。

58

证明：

because: $f(x)\otimes g(x)=f^*(-x)*g(y)$

and then $F\{f(x)\otimes g(x)\}$
$$=F\{f^*(-x)*g(y)\}$$
$$=F\{f^*(-x)\}F\{g(y)\}$$
$$=F^*(u)G(u)$$

59

(2) 自相关定理

设 $F\{f(x,y)\}=F(u,v)$，则有

$$F\{f(x,y)\otimes f(x,y)\}=|F(u,v)|^2$$

$|F(u,v)|^2$ 称为的 $f(x,y)$ 的能谱密度。

自相关定理表明：一个函数的自相关与其能谱密度构成傅立叶变换对。

60

说明：

相关定理常用来求两个函数或图像的相关；当两个函数或图像的相关难求时，可先求得各自的FT，将第一个函数的FT取复共轭，乘积后，再求IFT, 即可得两者之相关，即：

$F^{-1}[F^*(u)G(u)]=f(x)\otimes g(x)$

相关定理常常用于信号检测、图像识别。根据相关的物理意义和特性。相关函数具有中心峰值分布。当函数是实函数时，其自相关具有中心对称的峰值分布。

61

3. 巴塞伐定理(Parseval's Theorem)

设F{f(x, y)}=F(u, v)，并且

$$\iint |f(x,y)|^2\,dxdy \quad \text{and} \quad \iint |F(u,v)|^2\,dudv$$

都存在，那么一定有：

$$\iint |f(x,y)|^2\,dxdy=\iint |F(u,v)|^2\,dudv$$

由于左右两边的积分形式都可以表示某种能量。该定理说明：对能量的计算级可以在空域也可以在频域进行，两者完全相等。

62

还可以用来计算复杂的积分，比如：

$$\int \mathrm{sinc}^2(x)dx=\int[\mathrm{rect}(u)]^2du=1$$

4)广义巴塞伐定理

如果$F\{f(x,y)\}=F(u,v)$, $F\{g(x,y)\}=G(u,v)$, 则有

$$\iint f(x,y)g^*(x,y)dxdy=\iint F(u,v)G^*(u,v)dudv$$

可以用来计算一些复杂函数，例如：

$$\int \mathrm{sinc}^3(x)dx=\int \mathrm{sinc}(x)\mathrm{sinc}^2(x)dx$$

$$=\int \mathrm{rect}(u)\Lambda(u)du=2\int_0^{0.5}(1-u)du=\frac{3}{4}$$

63

5. 导数定理

设 $F\{f(x,y)\}=F(u,v)$,

$$f^{(m,n)}(x,y)=\frac{\partial^{m+n}f(x,y)}{\partial x^m\partial y^n},\ F^{(m,n)}(u,v)=\frac{\partial^{m+n}F(u,v)}{\partial u^m\partial v^n}$$

则有 $F\left\{f^{(m,n)}(x,y)\right\}=(j2\pi u)^m(j2\pi v)^nF(u,v)$

$$F\left\{x^my^nf(x,y)\right\}=(\frac{j}{2\pi})^m(\frac{j}{2\pi})^nF^{(m,n)}(u,v)$$

64

证明：

以一维函数***f*(x)**为例子，

$$\underline{f'(x)g(x)=[f(x)g(x)]'-f(x)g'(x)}$$

$$F\{f'(x)\}=\int f'(x)\exp(-j2\pi ux)dx$$

$$=f(x)\exp(-j2\pi ux)|_{-\infty}^{\infty}-\int f(x)[\exp(-j2\pi ux)]'dx$$

$$=f(x)\exp(-j2\pi ux)|_{-\infty}^{\infty}+j2\pi u\underline{\int f(x)\exp(-j2\pi ux)dx}$$

$$=f(x)\exp(-j2\pi ux)|_{-\infty}^{\infty}+(j2\pi u)\underline{F(u)}$$

$$=(j2\pi u)\underline{F(u)}$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$$

65

6 积分定理

假设*F*{*f*(*x*,*y*)}=F(u,v), 则有

$$F\{\int_0^x f(a)da\}=F\{f(x)*\mathrm{step}(x)\}=F(u)F\{\mathrm{step}(x)\}$$

$$=F(u)[\frac{1}{2}\delta(x)-\frac{1}{2}\frac{i}{\pi u}]=\frac{1}{2}F(0)\delta(x)-\frac{i}{2\pi u}F(u)$$

7 矩定理

函数f(x,y)的m+n阶矩，即为积分：

$$\iint x^m y^n f(x,y)dxdy,\quad m,n=0,1,2,\cdots$$

66

零阶矩定理 $\iint x^0y^0 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=F(0,0)$

一阶矩定理 $\iint x^1y^0 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{j}{2\pi}F^{(1,0)}(0,0)$

$$\iint x^0y^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{j}{2\pi}F^{(0,1)}(0,0)$$

二阶矩定理 $\iint x^1y^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{j}{2\pi}\frac{j}{2\pi}F^{(1,1)}(0,0)$

$$\iint x^2y^0 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left(\frac{j}{2\pi}\right)^2F^{(2,0)}(0,0)$$

$$\iint x^0y^2 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left(\frac{j}{2\pi}\right)^2F^{(0,2)}(0,0)$$

67

常见函数的傅里叶变换

$1\Leftrightarrow\delta(u)$	$\Lambda(x/T)\Leftrightarrow\lvert T\rvert\mathrm{sinc}^2(Tu)$
$\delta(u)\Leftrightarrow 1$	$\mathrm{comb}(x/T)\Leftrightarrow\lvert T\rvert\mathrm{comb}(Tu)$
$\exp(\pm j2\pi u_0x)\Leftrightarrow\delta(u_0\mp u)$	$\mathrm{Gaus}(x/T)\Leftrightarrow\lvert T\rvert\mathrm{Gaus}(Tu)$
$\cos(2\pi u_0x)\Leftrightarrow 2^{-1}[\delta(u-u_0)+\delta(u+u_0)]$	$\mathrm{step}(x)\Leftrightarrow\frac{1}{2}\delta(u)+\frac{1}{j2\pi u}$
$\sin(2\pi u_0x)\Leftrightarrow(2i)^{-1}[\delta(u-u_0)-\delta(u+u_0)]$	$\mathrm{circ}(r)\Leftrightarrow\frac{J_1(2\pi\rho)}{\rho}$
$\mathrm{rect}(x)\Leftrightarrow\mathrm{sinc}(u)$	$\exp(j\pi x^2)\Leftrightarrow\exp(i\pi/4)\exp(-j\pi u^2)$
$x^{-1}\Leftrightarrow -j\pi\,\mathrm{sgn}(-\pi u^2)$	$\exp[j\pi(x^2+y^2)]\Leftrightarrow\exp(j\frac{\pi}{2})\exp[-j\pi(u^2+v^2)]$
$\mathrm{sgn}(x)\Leftrightarrow(j\pi u)^{-1}$	
$\exp(-\lvert x\rvert)\Leftrightarrow\frac{2}{4\pi^2u^2+1}$	

68