数学物理方法

傅里叶变换

傅里叶变换

傅里叶级数

- 三角级数
  - 定义
    - 由周期为2π的正弦和余弦函数的线性组合而成的无穷级数

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

  - 基本函数族
    - 组成：1，cos(nx)，sin(nx)
    - 性质：任意两个在一个周期上的积分等于0，称为正交性；

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx dx=0,\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx dx=0,\quad n\neq m$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin mx dx=0$$

傅里叶级数

- 傅里叶展开
  - 傅里叶展开定理：
    - 周期为2π的函数f(x)可以展开为三角级数，
    - 展开式系数为

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

  - 狄利克雷收敛定理
    - 收敛条件
      - 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点；
      - 在一个周期内至多只有有限个极值点。
    - 收敛结果
      - 当x是连续点时，级数收敛于该点的函数值；
      - 当x是间断点时，级数收敛于该点左右极限的平均值。

傅里叶级数

- 展开举例
  - 对称函数
    - 奇函数： $a_n = 0, \quad b_n = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx$
    - 偶函数： $a_n = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad b_n = 0$
  - 典型周期函数(周期为2π)

函数	展开式
sgn(x)	$(4/\pi)(\sin x + \sin 3x/3 + \sin 5x/5 + \ldots)$
x	$2(\sin x - \sin 2x/2 + \sin 3x/3 - \sin 4x/4 + \sin 5x/5 + \ldots)$
|x|	$\pi/2 - (4/\pi)(\cos x + \cos 3x/3^2 + \cos 5x/5^2 + \ldots)$

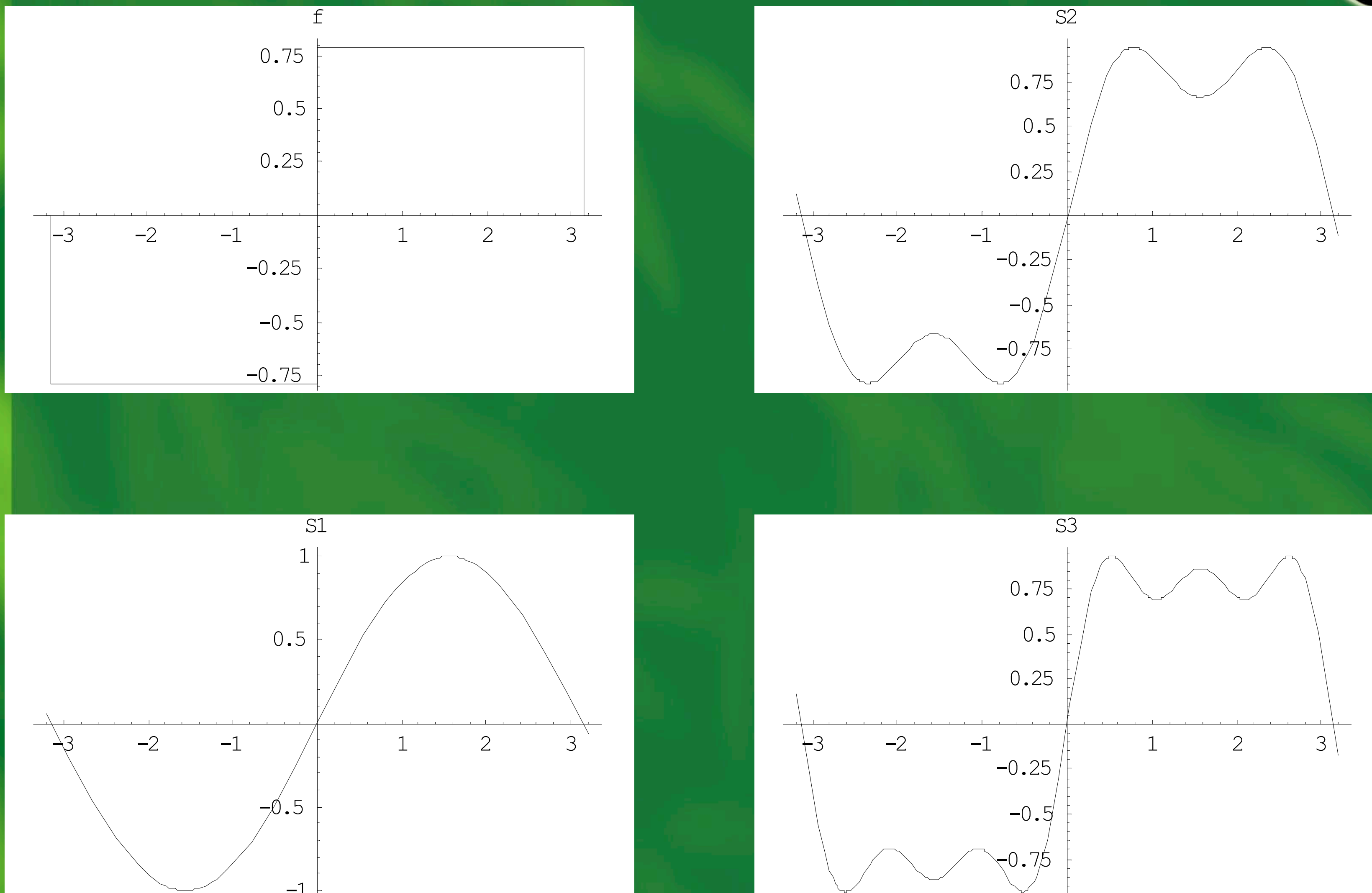
傅里叶级数

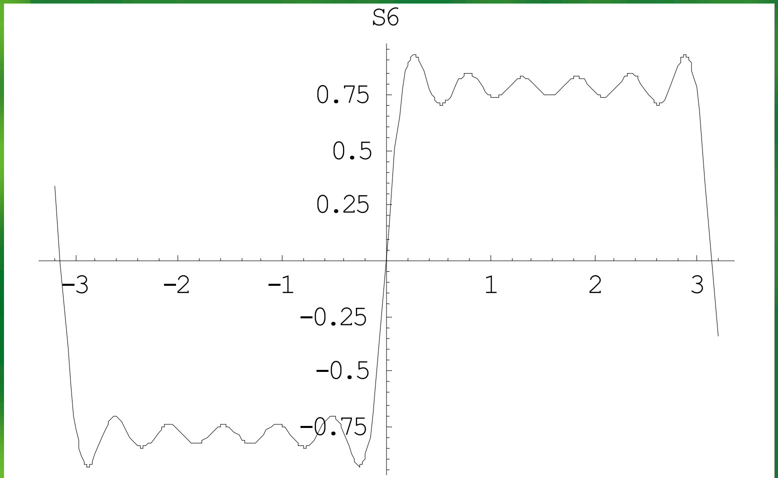
- 傅里叶展开的意义：
  - 理论意义：把复杂的周期函数用简单的三角级数表示；
  - 应用意义：用三角函数之和近似表示复杂的周期函数。
  - 例如：对称方波的傅里叶展开

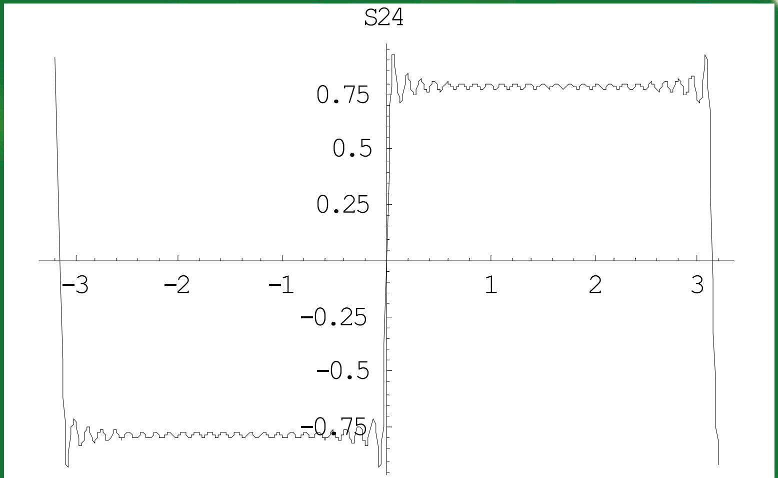
$$f(x) = \begin{cases} +\pi/4, & 0 < x < +\pi \\ -\pi/4, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

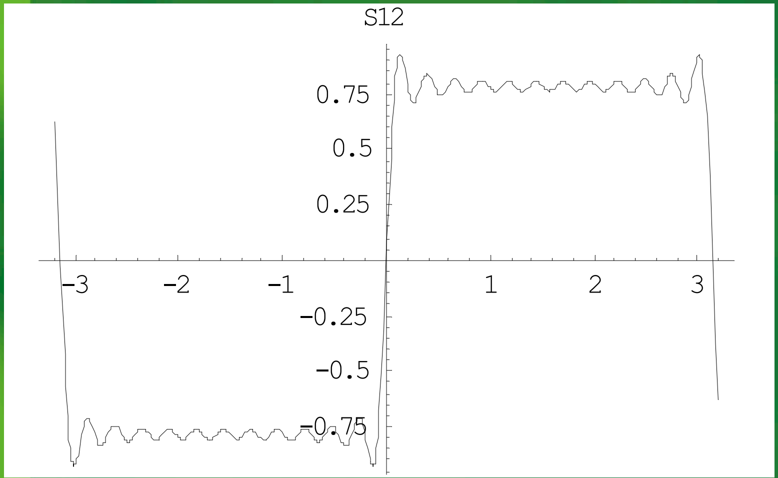
$$S_m(x) = \sum_{n=1}^{m} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

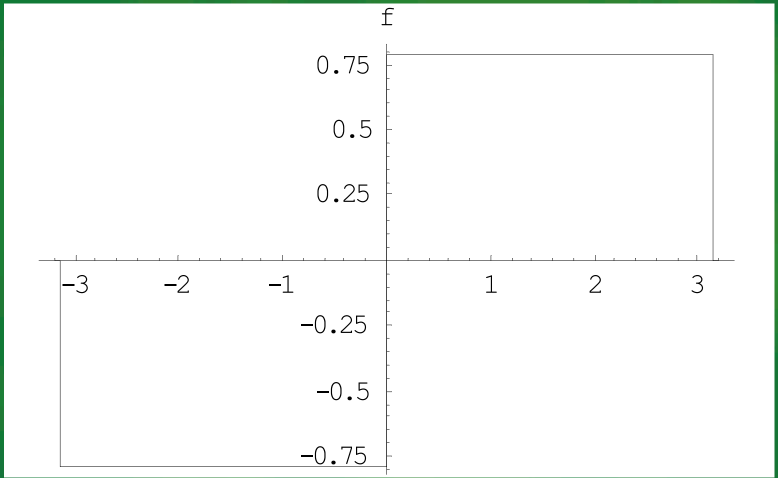
$$\lim_{m\to\infty} S_m(x) = f(x)$$


f
0.75
0.5
0.25
-0.25
-0.5
-0.75
-3
-2
-1
1
2
3
S2
0.75
0.5
0.25
-0.25
-0.5
-0.75
-3
-2
-1
1
2
3
S1
1
0.5
-0.5
-1
-3
-2
-1
1
2
3
S3
0.75
0.5
0.25
-0.25
-0.5
-0.75
-3
-2
-1
1
2
3


S6
0.75
0.5
0.25
-3
-2
-1
1
2
3
-0.25
-0.5
-0.75


S24
0.75
0.5
0.25
-3
-2
-1
1
2
3
-0.25
-0.5
-0.75


S12
0.75
0.5
0.25
-3
-2
-1
1
2
3
-0.25
-0.5
-0.75


f
0.75
0.5
0.25
-3
-2
-1
1
2
3
-0.25
-0.5
-0.75

傅里叶级数

- 重要推广
  - 推广1：
    - 问题：把周期为T=2L的函数f(t)的展开：
    - 方法：对基本公式作变换x→ π t/L，

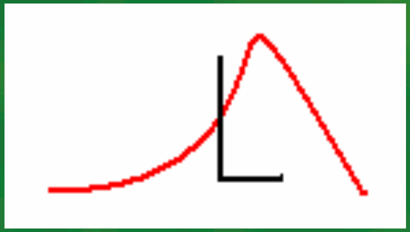
$$f(t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi t}{L}+b_n\sin\frac{n\pi t}{L}\right)$$

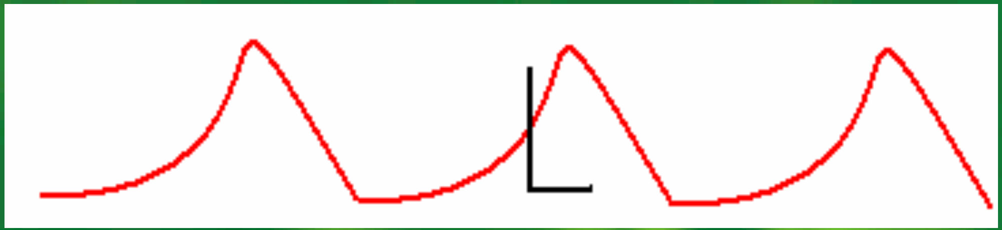
$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt,$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}dt$$

傅里叶级数

- 推广2
  - 问题：把定义在 [-L, L] 上的函数 f(t)展开；
  - 方法：先把它延拓为周期函数(即把它当成是一个周期为2L的函数的一部分)，
    再按推广1展开；
  - 注意：所得到的级数仅在原定义范围中与f(t)一致。
  - 延拓前
  -
  - 延拓后





傅里叶级数

- 推广3
  - 问题：把定义在 [0, L] 上的函数 f(x)展开；
  - 方法：先把它延拓为[-L，L]上的奇函数或偶函数，
    再按推广2把它延拓为周期函数，
    最后按推广1展开；
  - 注意：所得到的级数仅在原定义范围中与f(x)一致。
  - 公式：

$$f_e(x) = f(|x|)$$

$$f_o(x) = \operatorname{sgn}(x) f(|x|)$$

$$\operatorname{sgn}(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

傅里叶级数

- 展开的复数形式
  - 展开公式：

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(i\frac{n\pi x}{L})$$

基本函数族：

$$\exp(i\frac{n\pi x}{L}),\quad n\in Z$$

正交性：

$$\int_{-L}^{L}\overline{\exp(i\frac{n\pi x}{L})}\exp(i\frac{m\pi x}{L})dx=2L\delta_{n,m}$$

展开系数：

$$c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\overline{\exp(i\frac{n\pi x}{L})}f(x)dx$$

傅里叶生平

- 1768年生于法国
- 1807年提出"任何周期信号都可用正弦函数的级数表示"
- 1822年发表"热的分析理论"，首次提出"任何非周期信号都可用正弦函数的积分表示"

返 回

傅里叶变换

- 非周期函数的傅里叶展开
  - 问题：
    - 把定义在（－∞，∞）中的非周期函数 $f(x)$展开；
  - 思路：
    - 把该函数定义在（－L，L）中的部分展开，再令L→∞；
  - 实施：
    - 展开公式

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(i\frac{n\pi x}{L})$$

展开系数：

$$c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\exp(-i\frac{n\pi x}{L})\ f(x)dx$$

  - 困难
    - 展开系数 c_n 为无穷小；
    - 幂指数 $n\pi x/L$ 不确定。

傅里叶变换

- 解决方法：
  - 把 $n\pi/L$ 作为新变量，即定义 $\omega_n = n\pi/L$；
  - 把 c_nL/π 作为新的展开系数，即定义 $F(\omega_n)=c_nL/\pi$.
- 公式的新形式：
  - 展开公式：

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega_n)\exp(i\omega_n x)\Delta\omega_n$$

展开系数：

$$F(\omega_n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L}\exp(-i\omega_n x)f(x)dx$$

- 取极限：
  - 傅里叶变换：

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-i\omega x)f(x)dx$$

傅里叶积分：

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\exp(i\omega x)d\omega$$

傅里叶变换

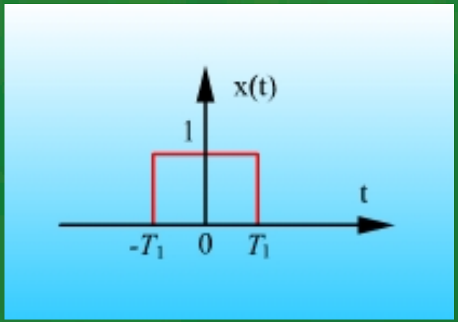
- 例题1
  - 矩形函数的定义为

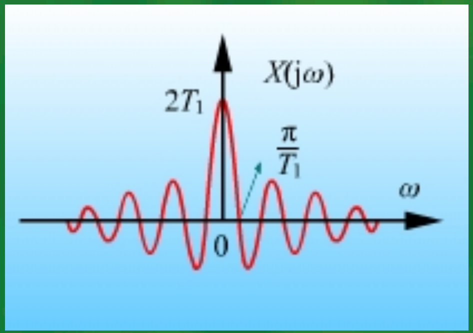
$$\mathrm{rect}(t)=\begin{cases}1, & |t|<\frac{1}{2}\\ 0, & |t|>\frac{1}{2}\end{cases}$$

    - 求矩形脉冲 x (t) = rect(t/2T$_1$)的傅里叶变换。
    - 解：

$$X(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-i\omega t)x(t)dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-T_1}^{T_1}\exp(-i\omega t)dt=\frac{\sin\omega T_1}{\pi\omega}$$





傅里叶变换

- 例题2
  - 将矩形脉冲 f(t) = h rect(t/2T)展开为傅里叶积分。
  - 解：
    - 先求出 f(t) 的傅里叶变换

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-i\omega t)f(t)dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\exp(-i\omega t)hdt=\frac{h\sin\omega T}{\pi\omega}$$

代入傅里叶积分公式，得

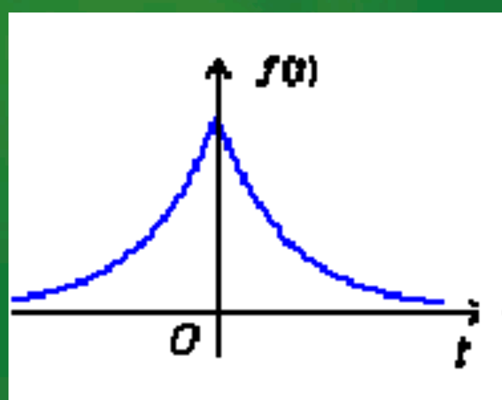
$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h\sin\omega T}{\pi\omega}\exp(i\omega t)d\omega$$

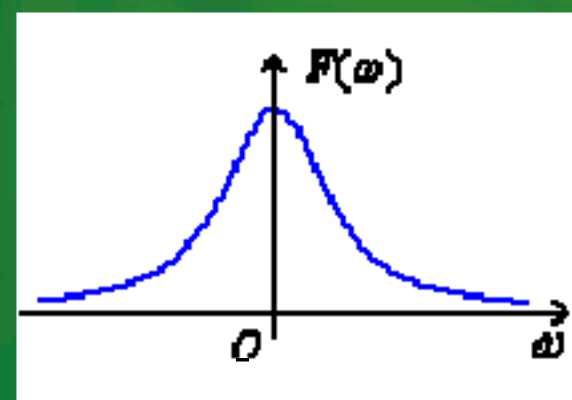
傅里叶变换

- 例题3
  - 求对称指数函数f(t)的傅里叶变换

$$f(t) = e^{-\alpha|t|}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$





傅里叶变换

- 傅里叶变换的意义
  - 数学意义
    - 从一个函数空间(集合)到另一个函数空间(集合)的映射；
    - f(x)称为变换的原函数(相当于自变量)，F(ω)称为象函数。
  - 应用意义
    - 把任意函数分解为简单周期函数之和，F(ω)的自变量为频率，函数值为对应的振幅。
  - 物理意义
    - 把一般运动分解为简谐运动的叠加；
    - 把一般电磁波(光)分解为单色电磁波(光)的叠加。
  - 物理实现
    - 分解方法：棱镜光谱仪、光栅光谱仪；
    - 记录方式：(用照相底版)摄谱仪、(用光电探测器)光度计。

傅里叶变换

- 傅里叶变换的性质
  - 一般假定
    - f(x) → F(ω)， g(x) → G(ω)
  - 奇偶虚实性
    - f(x)为偶函数，F(ω)=∫f(x)cos(ωx)dx/(2π)为实函数；
    - f(x)为奇函数，F(ω)=-i∫f(x)sin(ωx)dx/(2π)为虚函数
  - 线性性质
    - k f(x) → k F(ω)；
    - f(x)+g(x) → F(ω)+ G(ω)
  - 分析性质
    - $f'(x) \to i\omega F(\omega)$；

$$\int_{-\infty}^{x} f(x)dx \to \frac{1}{i\omega}F(\omega)$$

傅里叶变换

- 位移性质
  - $f(x-a) \rightarrow \exp(-i\omega a)F(\omega)$；
  - $\exp(i\phi x)f(x) \rightarrow F(\omega-\phi)$
- 相似性质
  - $f(ax) \rightarrow F(\omega/a)/a$；
  - $f(x/b)/b \rightarrow F(b\omega)$。
- 卷积性质
  - $f(x)*g(x) \equiv \int f(\xi)g(x-\xi)d\xi \rightarrow 2\pi F(\omega)G(\omega)$；
  - $f(x)g(x) \rightarrow F(\omega)*G(\omega) \equiv \int F(\phi)G(\omega-\phi)d\phi$
- 对称性质
  - 正变换与逆变换具有某种对称性；
  - 适当调整定义中的系数后，可以使对称性更加明显。

傅里叶变换

- 应用举例

$$\mathrm{rect}(x) \to \sin\tfrac{1}{2}\omega/(\pi\omega)$$

$$h\,\mathrm{rect}(x) \to h\sin\tfrac{1}{2}\omega/(\pi\omega)$$

$$\mathrm{rect}'(x) \to i\sin\tfrac{1}{2}\omega/\pi$$

$$\mathrm{rect}(x-a) \to e^{-ia\omega}\sin\tfrac{1}{2}\omega/(\pi\omega)$$

$$\mathrm{rect}(x) * \mathrm{rect}(x) = \int \mathrm{rect}(\xi)\mathrm{rect}(x-\xi)d\xi$$

$$= (1-|x|)\mathrm{rect}(x/2) \to 2\sin^2\tfrac{1}{2}\omega/(\pi\omega^2)$$

傅里叶变换

- 验证

$$\{|\xi|<\tfrac{1}{2}\}\cap\{|\xi-x|<\tfrac{1}{2}\}=\begin{cases}\varnothing, & |x|>1\\ \{x-\tfrac{1}{2}<\xi<\tfrac{1}{2}\}, & 0<x<1\\ \{-\tfrac{1}{2}<\xi<\tfrac{1}{2}+x\}, & -1<x<0\end{cases}$$

$$\mathrm{rect}(x)*\mathrm{rect}(x)=\int\mathrm{rect}(\xi)\mathrm{rect}(\xi-x)d\xi=(1-|x|)\mathrm{rect}(x/2)$$

$$\to\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}(1-|x|)\mathrm{rect}(x/2)dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}e^{-i\omega x}(1-|x|)dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{1}\cos\omega x(1-x)dx$$

$$=2\sin^2\tfrac{1}{2}\omega/(\pi\omega^2)$$

傅里叶变换

- 推广
  - 推广1
    - 问题：把定义在 [0, ∞) 上的函数 f(t)展开；
    - 方法：先把它延拓为(-∞, ∞)上的奇函数或偶函数，再按公式进行傅里叶变换；
    - 注意：
      - 偶函数满足条件f'(0)=0，形式为 f(|t|)；
      - 奇函数满足条件f(0)=0，形式为 sgn(t)f(|t|).
    - 结果：所得到的傅里叶积分仅在原定义范围中与f(t)一致。

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-i\omega\ t)f(t)dx$$

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\exp(i\omega\ t)d\omega$$

傅里叶变换

- 推广2
  - 问题：多元函数的傅里叶变换
  - 公式：

$$f(x,y)=\int\int_{-\infty}^{\infty} F(k_x,k_y)e^{i(k_x x+k_y y)}dk_x dk_y$$

$$F(k_x,k_y)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k_x x+k_y y)}f(x,y)dxdy$$

$$\text{令}\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j},\vec{k}=k_x\vec{i}+k_y\vec{j}$$

$$f(\vec{r})=\iint F(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}d\vec{k}$$

$$F(\vec{k})=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}f(\vec{r})d\vec{r}$$

傅里叶变换

- 推广3
  - 傅里叶变换的收敛条件:$|F(\omega)| \leqslant \int |f(x)|dx < \infty$
  - 问题：最简单的函数如多项式不满足傅里叶变换的条件；
  - 方法：对傅里叶变换中的参数ω进行延拓，
    定义 $p=\sigma+i\omega$，其实部为正数；
    同时把变换的区域改成右半轴。

$$F(p)=\int_0^{\infty}\exp(-px)f(x)dx$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(p)\exp(px)dp$$

返 回

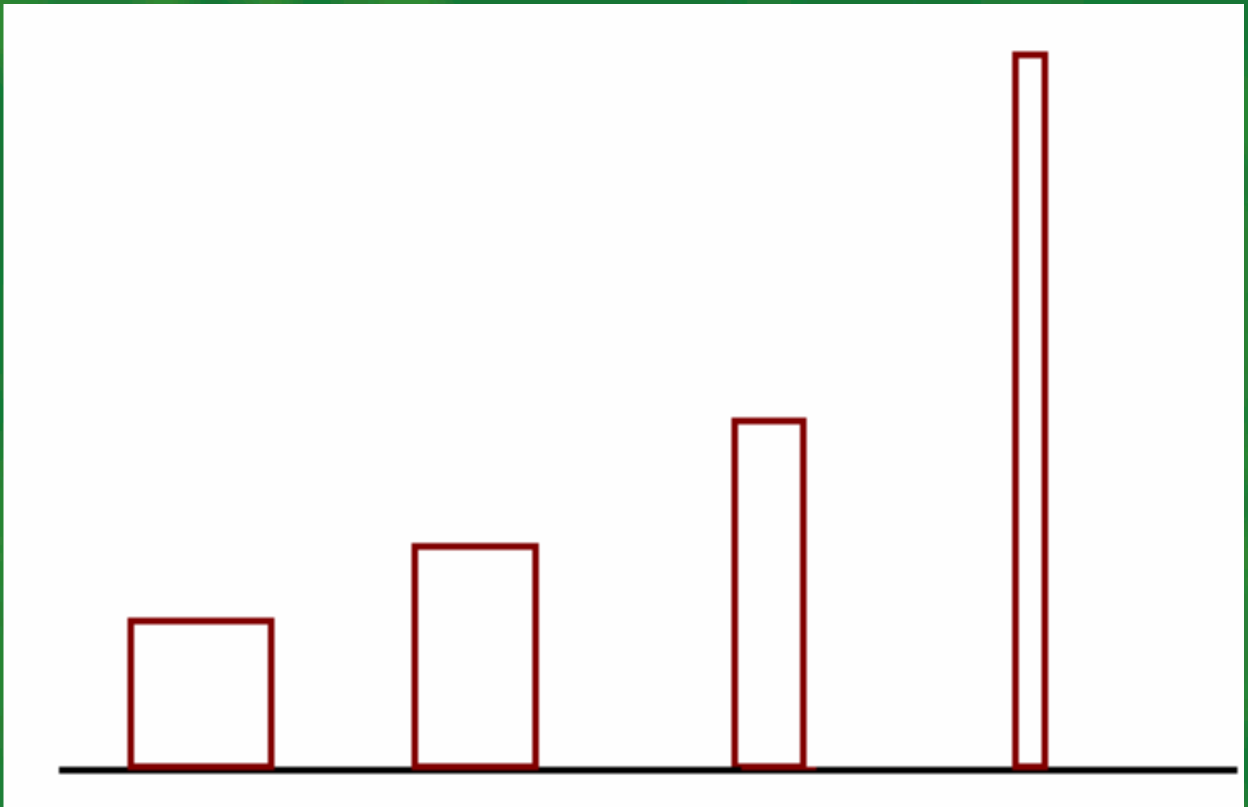
狄拉克函数

- 概念
  - 问题
    - 质点的密度函数如何表示？
  - 思路
    - 质点是物体在尺度趋于零时的理想模型；
    - 一个位于原点的单位质点，可以看成一个线密度为h rect(hx)的物体在宽度d=1/h趋向零时的极限；
    - 极限密度为 $\delta(x)=\lim_{h\to\infty} h\,\mathrm{rect}(hx)$
  - 一般定义

$$\delta(x)=\begin{cases}\infty, & x=0\\ 0, & x\neq 0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1$$

狄拉克函数



狄拉克函数

- 性质
  - 奇偶性质
    - δ(-x)=δ(x)， δ’(-x)=δ’(x)
  - 分析性质

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(x)dx = H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad H'(x) = \delta(x)$$

  - 选择性质
    - ∫f(x)δ(x-a)dx=f(a)， ∫f ’(x)δ(x-a)dx=-f’(a)
  - 变换性质

$$\delta(x) \to \frac{1}{2\pi}\int \delta(x)e^{-i\omega x}dx = \frac{1}{2\pi}, \qquad \delta(x) = \int \frac{1}{2\pi}e^{i\omega x}d\omega$$

狄拉克函数

- 狄拉克函数的应用
  - 描述功能
    - 位于$x=a$处质量为m的质点，质量线密度为$m\delta(x-a)$；
    - 位于$x=a$处电量为q的点电荷，电荷线密度为$q\delta(x-a)$；
    - 位于$t=a$时刻强度为I的脉冲信号，信号函数为$I\delta(t-a)$；
  - 分解功能
    - 质量密度为$\rho(x)$的物体，可分解为质点的空间叠加

      $\rho(x) = \int \rho(a)\delta(a-x)da$
    - 电荷密度为$\rho(x)$的带电体，可分解为点电荷的空间叠加

      $\rho(x) = \int \rho(a)\delta(a-x)da$
    - 信号函数为$\rho(t)$的信号，可分解为脉冲信号的时间叠加

      $\rho(t) = \int \rho(a)\delta(a-t)da$

狄拉克函数

- 计算功能
  - 计算函数在间断点的导数；
  - 计算特别函数的傅里叶变换。
- 例题1
  - 计算f(x) = sgn(x)的导函数。
  - 解： sgn(x) = 2 H(x) - 1

    sgn'(x) = 2 H'(x) = 2 δ (x)
- 例题2
  - 计算 f(x) = |x| 的傅里叶变换。
  - 解：

$$\operatorname{sgn}'(x) = 2\delta(x) \to \frac{1}{\pi}$$

$$\operatorname{sgn}(x) = |x|' \to \frac{1}{i\pi\omega} \Rightarrow |x| \to -\frac{1}{\pi\omega^2}$$

狄拉克函数

- 狄拉克函数的推广
  - 问题：
    - 三维空间中的质点的密度、点电荷的电荷密度。
  - 三维狄拉克函数：
    - $\delta(\mathbf{r})=\delta(x,y,z)=\delta(x)\delta(y)\delta(z)$
  - 应用
    - 位于$\mathbf{r}=\mathbf{a}$处质量为m的质点，质量体密度为$m\delta(\mathbf{r}-\mathbf{a})$；
    - 位于$\mathbf{r}=\mathbf{a}$处电量为q的点电荷，电荷体密度为$q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{a})$；

返 回

本章小结

- 傅里叶级数
  - 周期函数的三角展开公式；
  - 基本三角函数的性质。
- 傅里叶变换
  - 非周期函数的三角展开公式；
  - 傅里叶变换的性质。
- 狄拉克函数
  - 狄拉克函数概念；
  - 狄拉克函数性质；
  - 狄拉克函数功能。