

# Aproksymacja profilu wysokościowego

## 1. Wstęp

Celem projektu była implementacja i analiza dwóch metod aproksymacji interpolacyjnej, metody wykorzystującej wielomian interpolacyjny Lagrange'a oraz metodą wykorzystującą funkcje sklepane trzeciego stopnia.

### Interpolacja Lagrange'a

Polega na wybraniu  $n+1$  punktów należących do dziedziny  $f$  dla których znane są wartości. Następnie musimy zbudować wielomian  $\phi$  co najwyżej  $n$  takiego, że

$$\varphi(x_0) = y_0, \varphi(x_1) = y_1, \dots, \varphi(x_n) = y_n.$$

Baza Lagrange do interpolacji składa się z funkcji określonych wzorem

$$\phi_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^{n+1} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

### Funkcje sklepane trzeciego stopnia

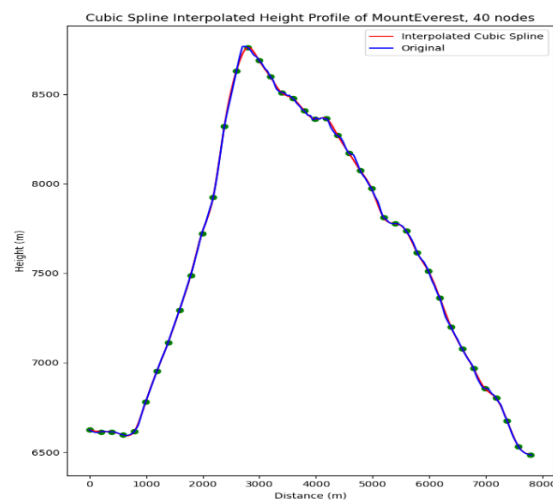
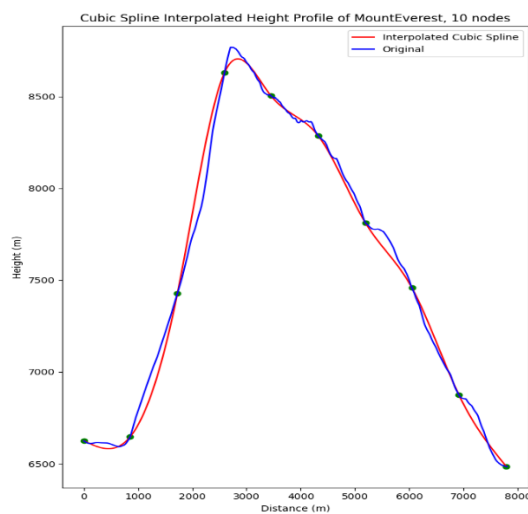
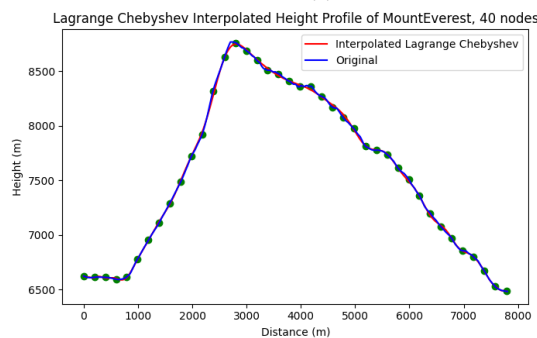
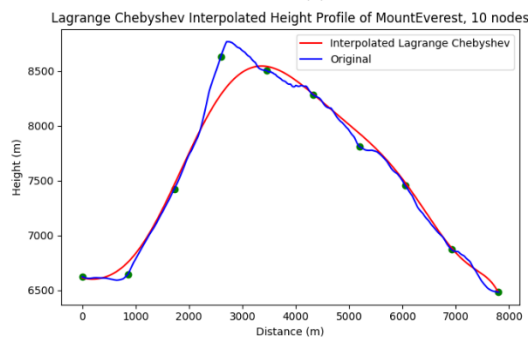
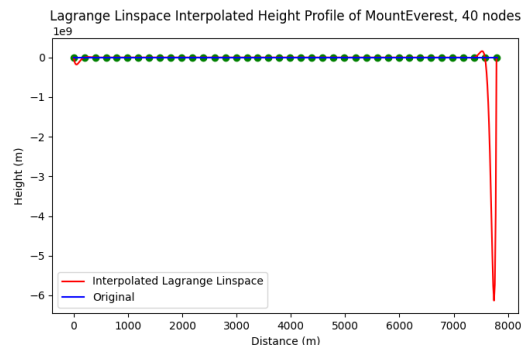
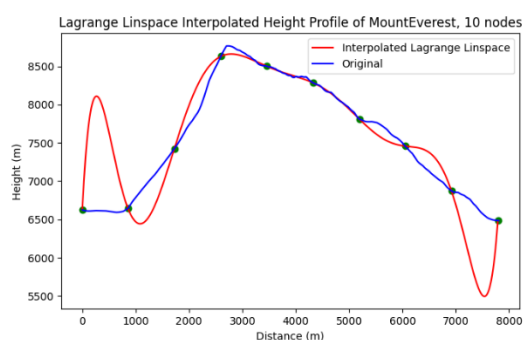
Metoda interpolacji lokalnej wykorzystująca wielomiany trzeciego stopnia. Splajn sześcienny to splajn zbudowany z wielomianów kawałkowych trzeciego rzędu, które przechodzą przez zestaw  $m$  punktów kontrolnych. **Druga pochodna** każdego wielomianu jest zwykle ustawiana na zero w punktach końcowych, ponieważ zapewnia to warunek brzegowy, który uzupełnia układ równań  $m-2$ . Daje to tak zwany "naturalny" splajn sześcienny i prowadzi do prostego układu tridiagonalnego, który można łatwo rozwiązać, aby uzyskać współczynniki wielomianów. Wybór ten nie jest jednak jedynym możliwym i zamiast niego można zastosować inne warunki brzegowe.

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

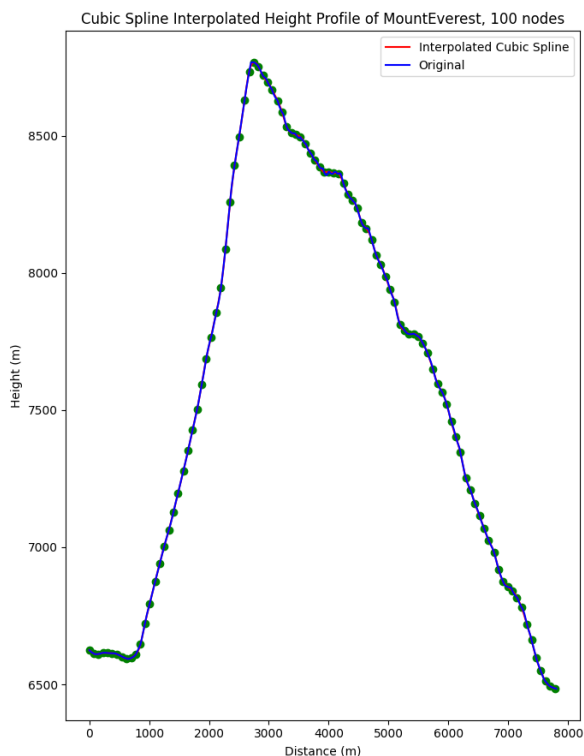
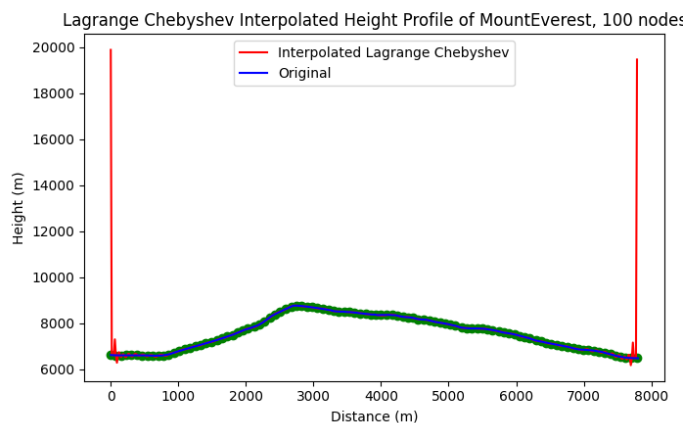
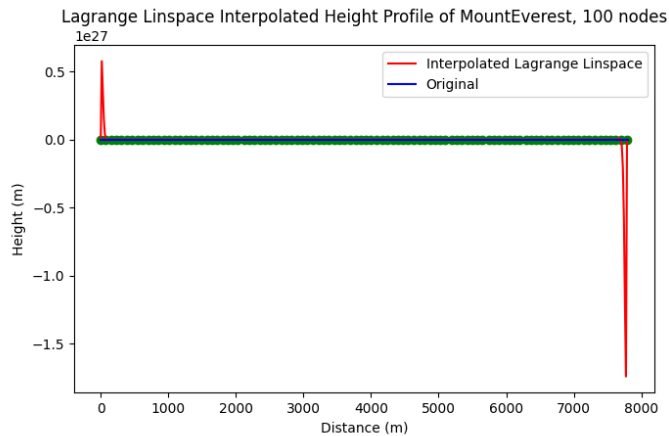
## 2. Analiza metod na poszczególnych przypadkach

Analizę wyżej wspomnianych metod pokaże na dwóch przypadkach. Sprawdziłem, jak zachowują się one w przypadku różnej ilości węzłów oraz jak zachowują się w zależności od kształtu funkcji. W celu dokładniejszej analizy metody Lagrange'a sprawdziłem, jak zachowuje się ona w przypadku węzłów rozmieszczonych równomiernie oraz jak w przypadku węzłów Chebysheva. Dodatkowo sprawdzimy wszystkie metody pod kątem błędu średniokwadratowego oraz błędu różnicowego<sup>1</sup>.

### 1. Mount Everest



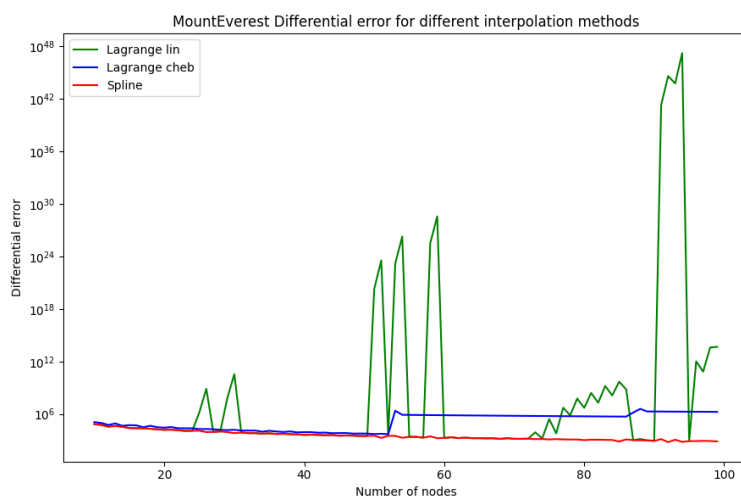
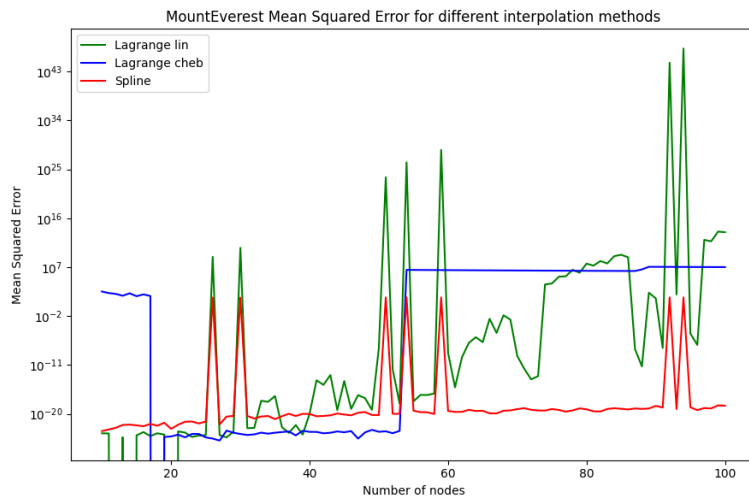
<sup>1</sup> Służy do oceny podobieństwa dwóch kolejnych funkcji aproksymujących, tutaj będzie zdefiniowany jako różnica błędu średniokwadratowego.



Analizując przedstawione wykresy, możemy zauważyć, że najlepsze efekty daje metoda funkcji sklejanych trzeciego stopnia. Dla analizowanych przypadków nie pojawia się u niej efekt Rungego oraz wraz z wzrostem ilości węzłów coraz bardziej dokładnie interpoluje.

Natomiast w metodzie interpolacji Lagrange'a opartej na równomiernie rozmieszczonych punktach już od małej ilości węzłów pojawia się efekt Rungego, który coraz to bardziej rośnie wraz z wzrostem ilości węzłów.

Kiedy oprzemy interpolację Lagrange'a na węzłach Chebysheva to radzi sobie ona o wiele lepiej. Jesteśmy w stanie dość dokładnie aproksymować wartości funkcji bez pojawienia się efektu Rungego. Pojawia się on już natomiast przy większej ilości węzłów.



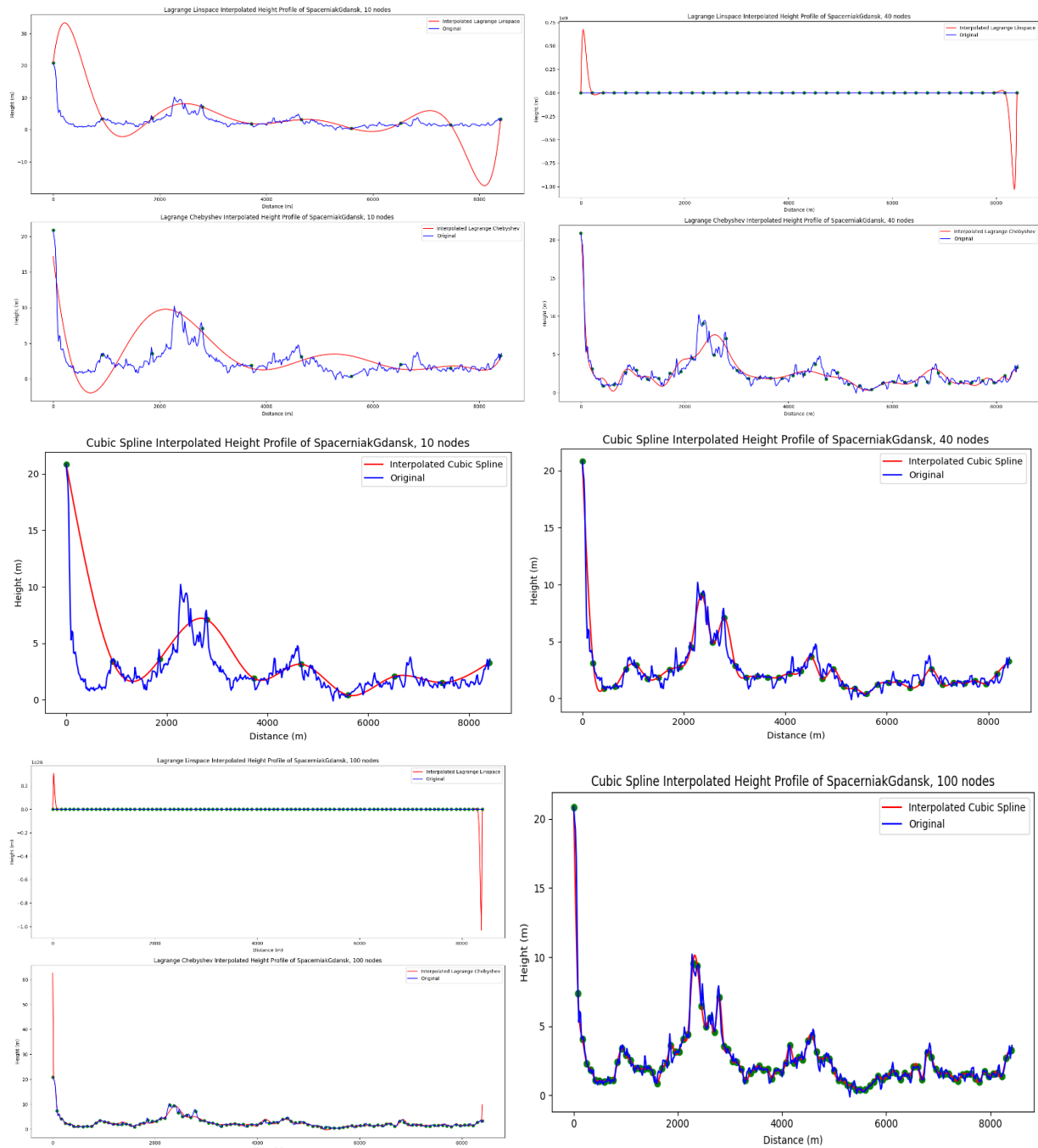
Pierwszy wykres przedstawia nam różnice między wartościami interpolowanymi przez daną metodę, a rzeczywistymi wartościami funkcji.

Możemy zauważyć, że najbardziej stabilnie zachowuje się metoda funkcji sklepanych trzeciego stopnia, która dla wszystkich węzłów osiąga niskie błędy.

Metoda Lagrange'a do pewnego momentu wypada lepiej od pierwszej wspomnianej metody, natomiast potem jej wartości diametralnie rosną, co może już nam mówić o słabej dokładności tej metody dla większej ilości węzłów.

Na drugim z analizowanych wykresów możemy zauważyć, że metoda funkcji sklepanych trzeciego stopnia jest praktycznie stała pod względem podobieństwa pomiędzy jej kolejnymi aproksymacjami podobnie do metody Lagrange'a opartej na węzłach Chebysheva, tylko że w tym przypadku następuje lekki przeskok od pewnej ilości węzłów. Natomiast kiedy węzły są rozłożone równomiernie zachowuje ona się bardzo niestabilnie.

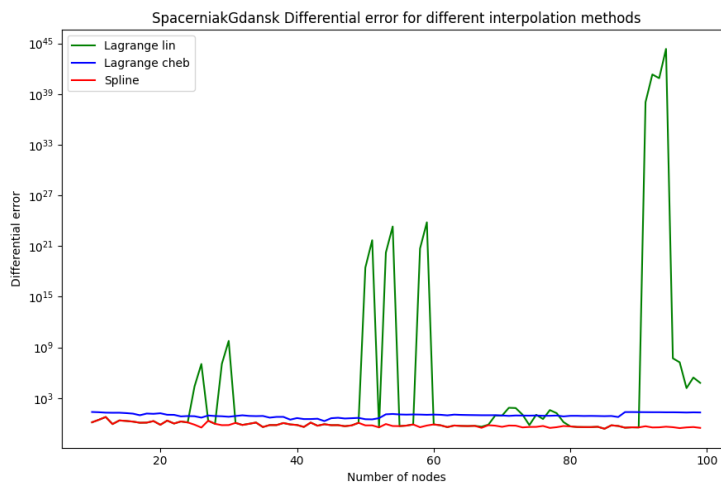
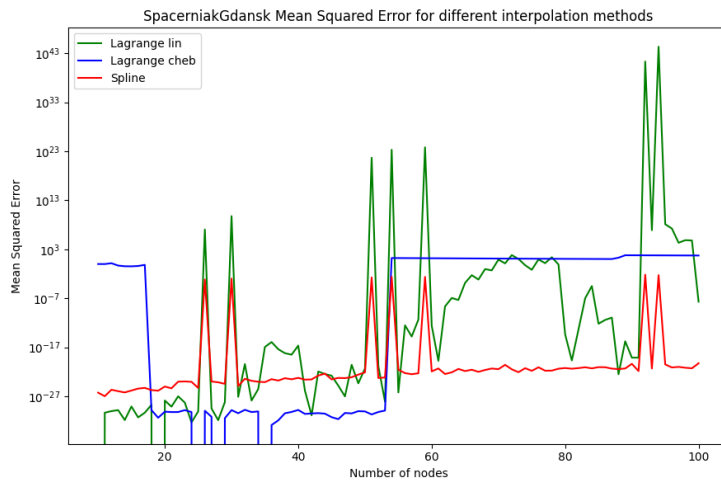
## 2. Spacerniak Gdańsk



Do kolejnego analizowanego przypadku użyliśmy funkcji oryginalnej, która nie jest już tak gładka. Możemy zauważyć, że w tym wypadku metoda Lagrange'a oparta na węzłach Chebysheva nie jest w stanie już tak dokładnie wyznaczyć dokładnej interpolacji przy takiej samej liczbie węzłów jak w przypadku funkcji bardziej gładkiej.

Przy punktach rozłożonych równomiernie widzimy to samo co w poprzednim analizowanym przypadku, że bardzo szybko pojawia się efekt Rungego. Metoda funkcji sklepanych trzeciego stopnia też radzi sobie trochę gorzej przy tego rodzaju funkcji, natomiast kiedy zwiększymy ilość węzłów otrzymujemy już satysfakcjonujące nas wyniki.

Znowu możemy zauważyć, że w przypadku metody Lagrange'a w obu sytuacjach pojawia się efekt Rungego przy większej ilości węzłów, natomiast metoda funkcji sklepanych trzeciego stopnia go nie ma.



Analizując wykresy błędów, podobnie jak poprzednio możemy zauważyć, że najbardziej stabilnie zachowuje się metoda funkcji sklepanych trzeciego stopnia, która dla wszystkich węzłów osiąga niskie błędy.

W tym przypadku, dla niższej ilości węzłów metoda Lagrange'a oparta na węzłach Chebysheva osiąga o wiele mniejsze różnice pomiędzy wartościami interpolowanymi, a rzeczywistymi niż metoda funkcji sklepanych trzeciego stopnia.

Natomiast kiedy punkty są rozłożone równomiernie w metodzie Lagrange'a widzimy dużą niestabilność w obu przypadkach analizowanych błędów.

W błędzie różnicowym dwie pozostałe metody zachowują ponownie mniej więcej stałe wartości.

### 3. Podsumowanie

W każdym z analizowanych przypadków lepiej zaprezentowała się metoda interpolacji oparta na funkcjach sklepanych trzeciego stopnia. Wyższą dokładność tej metody widać było zarówno na subiektywnej ocenie wykresów, jak i na podstawie wartości błędu średniokwadratowego.

Kiedy porównamy metodę Lagrange'a opartą na węzłach Chebysheva i na węzłach rozłożonych równomiernie widzimy spora rozbieżność. Efekt Rungego pojawia się o wiele później w pierwszym wspomnianym przypadku, co pozwala nam na dokładniejszą interpolację.

Metoda Lagrange'a wykazywała tendencję do pojawiania się efektu Rungego przy większej liczbie węzłów interpolacji, podczas gdy metoda funkcji sklepanych trzeciego stopnia zachowywała się bardziej stabilnie, nawet przy zwiększonej liczbie węzłów.

Analizowane przypadki pokazały nam także, że powyższe metody interpolacyjne lepiej radzą sobie z funkcjami, które są bardziej gładkie. Znajdują satysfakcjonujące rozwiązania już przy niższej liczbie węzłów.