Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Ravensburg
Campus Friedrichshafen

Realisierung eines Vier-Gewinnt Roboters

Teil 1: Spieltheorie

Studienarbeit T3_3100

Studiengang Elektrotechnik

Studienrichtung Automation

Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg, Campus Friedrichshafen

von

Patrik Peters / Simon Gschell

Abgabedatum:	13. Januar 2025
Bearbeitungszeitraum:	10.10.2024 - 13.06.2025
Matrikelnummer:	8379878/ 4995162
Kurs:	TEA22
Betreuerin / Betreuer:	Prof. Dr.-Ing. Thorsten Kever

Erklärung

gemäß Ziffer 1.1.14 der Anlage 1 zu §§ 3, 4 und 5 der Studien- und Prüfungsordnung für die Bachelorstudiengänge im Studienbereich Technik der Dualen Hochschule Baden-Württemberg vom 29.09.2017 in der Fassung vom 24.07.2023.

Wir versichern hiermit, dass wir unsere Studienarbeit T3_3100 mit dem Thema:

Realisierung eines Vier-Gewinnt Roboters

selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt haben. Wir versicheren zudem, dass die eingereichte elektronische Fassung mit der gedruckten Fassung übereinstimmt.

Friedrichshafen, den 13. Januar 2025

P. Peters

Patrik Peters / Simon Gschell

Kurzfassung

In der vorliegenden Studienarbeit wird die Entwicklung eines Roboters für das Spiel „Vier gewinnt“ unter Verwendung des LEGO Spike Prime Systems behandelt. Ziel des Projekts ist es, einen Roboter zu entwerfen, der in der Lage ist, autonom die Rolle eines menschlichen Gegners im Spiel „Vier gewinnt“ zu übernehmen. Der Roboter soll nicht nur die Spielzüge des menschlichen Mitspielers erkennen und darauf reagieren, sondern auch selbstständig Spielsteine in das Spielfeld einwerfen und sicherstellen, dass das Spielfeld für den nächsten Zug bereit ist. Dies erfordert eine präzise Steuerung des Roboters, insbesondere beim Platzieren der Spielsteine, sowie die Fähigkeit, das Spielfeld zu überwachen, um die Position der bereits gesetzten Steine zu erkennen. Das Projekt umfasst verschiedene technische und organisatorische Aspekte. Dazu gehört die mechanische Konstruktion des Roboters, einschließlich des Mechanismus zum Einwerfen der Spielsteine und die Überwachung des Spielfelds, sowie die Entwicklung der Software, die die Spielzüge und das Verhalten des Roboters steuert. Ein weiterer wichtiger Punkt ist die Sensorik: Der Roboter muss in der Lage sein, die aktuelle Spielsituation durch Farbsensoren zu erfassen, um zu wissen, welche Felder im Spielfeld bereits besetzt sind und wo er seinen nächsten Spielstein platzieren kann. Zum Abschluss des Projekts wird ein kleines Turnier organisiert, bei dem die von verschiedenen Teams entwickelten Roboterlösungen gegeneinander antreten. Dies bietet die Möglichkeit, den Roboter unter realen Bedingungen zu testen und seine Fähigkeiten im direkten Vergleich mit den Lösungen der anderen Kommilitonen zu messen. Um zusätzliche Motivation zu schaffen, wird die beste Lösung am Ende prämiert, was den Wettbewerbsgedanken fördert und den Anreiz erhöht eine effektive Lösungen zu entwickeln.
Die Studienarbeit gliedert sich in zwei Teilen. In diesem Teil wird ausschließlich auf die Spieltheorie von 4Gewinnt eingegangen. Mit dieser Ausgangslage kann in Teil 2 ein Algorithmus programmiert werden und den Hardwareaufbau des Roboters realisiert werden.

Abstract

This student research project deals with the development of a robot for the game "Four Wins" using the LEGO Spike Prime system. The aim of the project is to design a robot that is capable of autonomously assuming the role of a human opponent in the game "Four Wins". The robot should not only recognize the moves of the human opponent and react to them, but also independently place pieces on the playing field and ensure that the playing field is ready for the next move. This requires precise control of the robot, especially when placing the pieces, as well as the ability to monitor the playing field in order to recognize the position of the pieces already placed. The project involves various technical and organizational aspects. These include the mechanical design of the robot, including the mechanism for inserting the tiles and monitoring the playing field, as well as the development of the software that controls the moves and behavior of the robot. Another important point is the sensor technology: the robot must be able to detect the current game situation using color sensors in order to know which squares in the playing field are already occupied and where it can place its next piece. At the end of the project, a small tournament is organized in which the robot solutions developed by different teams compete against each other. This offers the opportunity to test the robot under real conditions and to measure its capabilities in direct comparison with the solutions of the other fellow students. To create additional motivation, the best solution is awarded a prize at the end, which promotes the idea of competition and increases the incentive to develop an effective solution.

The coursework is divided into two parts. This part deals exclusively with the game theory of 4Gewinnt. With this starting point, an algorithm can be programmed in part 2 and the hardware structure of the robot can be realized.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Entwicklung eines Vier-Gewinnt-Roboters mit der Verwendung des LEGO Spike Prime Systems stellt eine faszinierende Herausforderung an der Schnittstelle von Spieltheorie, Informatik und Robotik dar. Diese Studienarbeit befasst sich mit der systematischen Konzeptionierung und Umsetzung eines solchen Roboters. Er soll in der Lage sein, autonom und effektiv als Gegner Vier Gewinnt zu spielen.
Vier Gewinnt, ein klassisches und beliebtes Strategiespiel für zwei Personen, bietet trotz seiner scheinbaren Einfachheit eine sehr große strategische Tiefe. Die Aufgabe, einen Roboter zu entwickeln, der dieses Spiel beherrscht, erfordert nicht nur ein tiefgreifendes Verständnis der Spielmechanik. Sondern es erfordert auch die Fähigkeit, komplexe Algorithmen in einem Umfeld mit beschränkten Ressourcen zu entwerfen.

Im Rahmen des ersten Teils dieser Arbeit werden zunächst die spieltheoretischen Grundlagen von Vier Gewinnt näher eingegangen. Dabei werden zentrale Konzepte wie dominante Strategien, Nash-Gleichgewichte und das Minimax-Prinzip auf Vier Gewinnt angewandt und näher analysiert.
Ein besonderer Fokus wird dabei auf die Entwicklung und Optimierung von Algorithmen gelegt. Insbesondere auf den Alpha-Beta-Algorithmus. Dieser ermöglicht es, effizient optimale Spielzüge zu berechnen.

Diese Studienarbeit zielt darauf ab, nicht nur einen funktionsfähigen Vier-Gewinnt-Roboter zu entwickeln, sondern auch die Verbindung zwischen theoretischen Konzepten und praktischer Anwendung in der Robotik zu demonstrieren. Sie wird dabei in folgende Unterpunkte eingeteilt.

- **Grundlagen des Spiels Vier Gewinnt:** In diesem Kapitel geht es um die Erläuterung des Spielverlaufs und der Spielregeln. Ebenso wird auch auf den historischen Hintergrund sowie auf die mathematischen Eigenschaften von Vier Gewinnt eingegangen.

- **Spieltheoretische Grundlagen:** Im zweiten Kapitel geht es um Definition und Konzepte der Spieltheorie. Ebenso um die Klassifikation von Spielen und relevante spieltheoretische Konzepte für Vier Gewinnt.

- **Analyse von Vier Gewinnt aus spieltheoretischer Sicht:** Im Kapitel hier wird auf die Darstellung des Spiels in Normalform, Darstellung des Spiels in Extensivform, Komplexität des Spielbaums und Strategien und Gleichgewichte eingegangen.

- **Lösungsansätze für Vier Gewinnt:** In Kapitel fünf werden optimale Strategien und Heuristische Ansätze analysiert. Es wird aber auch auf die Entwicklung von Algorithmen (MinMax und AlphaBeta) eingegangen.

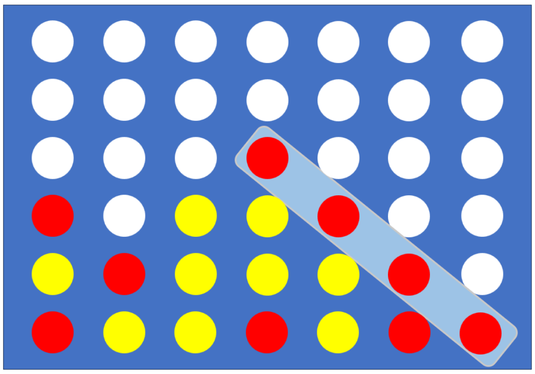
- **Anwendung der Spieltheorie auf Vier Gewinnt:** Hierbei wird auf die Analyse von Spielsituationen, ebenso auf die Berechnung von Gewinnwahrscheinlichkeiten und die Entwicklung von Spielstrategien näher eingegangen.

2 Grundlagen des Spiels Vier Gewinnt

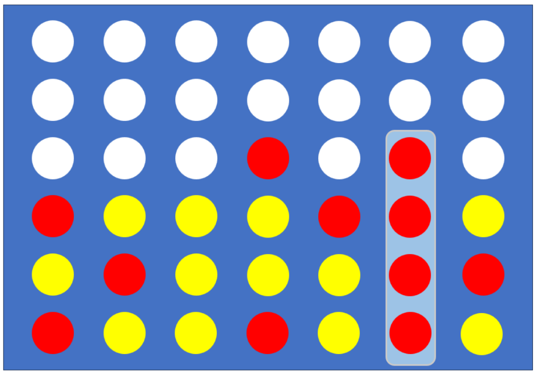
Im Kapitel Grundlagen wird auf die Regeln des Spiels, sowie auf den geschichtlichen Hintergrund als auch die mathematischen Eigenschaften des Spiels 4Gewinnt genauer eingegangen.

2.1 Spielregeln und Spielablauf

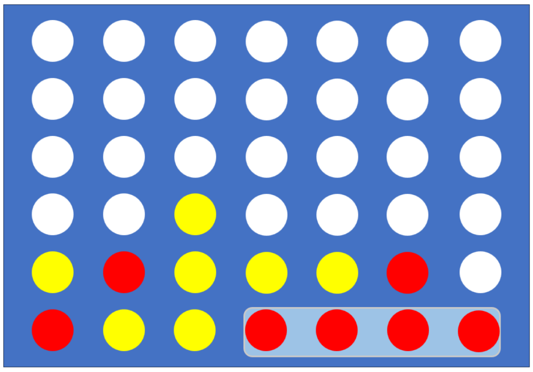
Das originale Spiel 4Gewinnt besteht aus einer Rasterwand mit sechs Zeilen und sieben Spalten, also 42 Löchern. Außerdem besteht es aus 21 roten Spielchips und 21 gelben Spielchips. 4Gewinnt lässt sich nur zu zweit spielen. Ziel des Spieles ist es, vier Spielchips einer Farbe in eine Reihe (waagrecht, senkrecht oder diagonal) zu bringen. Der jüngste Spieler beginnt das Spiel. Der Spieler, der an der Reihe ist, wirft einen Spielstein seiner Farbe durch die Öffnung der Rasterwand, wo durch der gespielte Stein auf den untersten freien Platz in der Spalte fällt. Danach ist der andere Spieler an der Reihe. Die Spieler werfen so lange ihre Spielchips in das Raster, bis einer das Ziel erreicht hat oder alle 42 Felder belegt sind. Für den Fall, dass alle 42 Felder des Rasters belegt sind, endet das Spiel unentschieden. Um ein neues Spiel zu starten, muss ein Spieler die Steine aus dem Raster fallen lassen. Diese werden dann wieder unter den Spielern aufgeteilt und eine neue Runde 4Gewinnt kann beginnen[Has20].



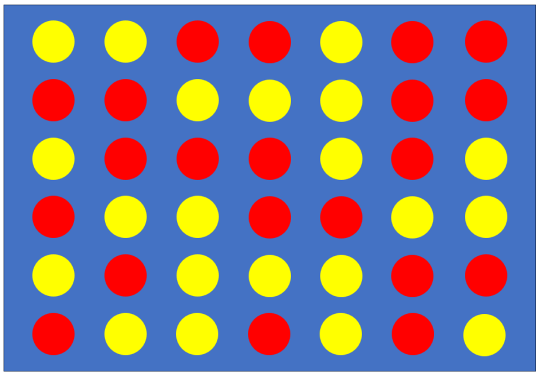
(a) Vier rote Steine diagonal im Raster



(b) Vier rote Steine senkrecht im Raster



(c) Vier rote Steine waagrecht im Raster



(d) Es kam keine vierer Reihe zustande

Abbildung 2.1: Grafische Darstellung der möglichen Spielausgänge

2.2 Historischer Hintergrund

Vier Gewinnt wurde 1973 von Howard Wexler und Ned Strongin entwickelt. Noch im selben Jahr lizenzierten die beiden Erfinder das Spiel an die Firma Milton Bradley, im deutschsprachigen Raum besser bekannt als „MB Spiele" [Gam25][Wik25]. Im darauffolgenden Jahr 1974 wurde das Spiel Vier Gewinnt von Milton Bradley veröffentlicht und in den Handel gebraucht. Das Spiel entwickelte sich seitdem zu einem der bekanntesten und beliebtesten Strategiespiele [Wik25]. Tatsächlich entwickelt es sich sogar zu einem echten Klassiker. Das Spiel ist beliebt bei Jung und Alt, da es recht leicht zu erlernen ist. Vier Gewinnt fördert die Konzentration und das logische Denken [50P25].

Im Jahr 1967 erschien in den USA eine dreidimensionale Variante vom Spiel Vier Gewinnt, unter dem Namen „Score Four". In Deutschland brauchte die Firma Ravensburger 1974 eine dreidimensionale Variante mit dem Namen „Sogo" auf den Markt. (siehe Abbildung: 2.2) 1988 wurde das Spiel von Victor Allis und James D. Allen nahezu gleichzeitig und unabhängig voneinander vollständig gelöst. Die Beiden haben mathematisch bewiesen, dass der erste Spieler bei fehlerfreiem Spiel immer gewinnen kann, wenn er den ersten Stein in der mittleren Spalte platziert.[Wik25].

Abbildung 2.2: dreidimensionale Variante „Sogo" von Ravensburger [Abe25]

2.3 Mathematische Eigenschaften des Spiels

Das Spiel 4Gewinnt weist mehrere mathematische Eigenschaften auf. Diese sind für eine Analyse des Spiels von Bedeutung. Das Strategiespiel ist ein Zwei-Personen-Nullsummenspiel. Das bedeutet, es spielen zwei Teilnehmer gegeneinander. Beide Spieler haben während des Spiels immer die volle Information über den Spielstand. Wenn einer von beiden gewinnt, bedeutet das gleichzeitig, dass der andere verloren hat. Trotz der simplen Spielregeln ist vier Gewinnt dennoch recht komplex. Grund dafür die vielen möglichen Spielstellungen, es gibt nämlich ca. 4,5 Billionen mögliche Spielstellungen. Diese enorm hohe Anzahl an möglichen Spielstellungen kommt durch das Spielfeld mit sieben Spalten und sechs Reihen zustande. Die Komplexität des Baumdiagramms liegt bei etwa 10^{21}, was eine vollständige Analyse des Spielbaums sehr rechenintensiv macht [Rui+09].

Das Lösen des Spiels Vier Gewinnt basiert auf verschiedenen mathematischen Techniken. Zum einen gibt es die Anwendung des Zermelo-Bestimmtheitssatzes. Dieser besagt, dass entweder Spieler 1, Spieler 2 oder kein Spieler die Partie gewinnt. Im Kapitel 6.1 wird näher auf den Bestimmtheitssatz eingegangen wird.
Eine weite Technik zur Analyse ist die Anwendung der Rückwärtsinduktion. Die Rückwärtsinduktion beginnt an der aktuellen Position und arbeitet sich zum Anfang zurück. Hierbei werden für jeden Spielzug die optimalen Entscheidungen der Spieler analysiert, unter der Berücksichtigung aller möglichen Züge. Am Ende dieses Prozesses steht das beste Ergebnis für den beginnenden Spieler [Mül11].
Die Rückwärtsinduktion wird durch die Payoff-Matrix-Analyse ergänzt. Das grundlegende Konzept der Payoff-Matrix-Analyse bietet eine Möglichkeit zur Darstellung strategischer Interaktionen und Entscheidungen dar [Fas24].

		Spieler 2		
		Zentrum	Rand	Defensiv
Spieler 1	Zentrum	$(0,0)$	$(1,-1)$	$(0,0)$
	Rand	$(-1,1)$	$(0,0)$	$(-1,1)$
	Defensiv	$(0,0)$	$(1,-1)$	$(0,0)$

Abbildung 2.3: Payoff-Matrix für Vier gewinntt

Legende der Payoff-Matrix

Rot = Spieler 1, Blau = Spieler 2,

1=Vorteil, 0=Neutral, -1=Verlust

3 Spieltheoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Konzepte der Spieltheorie eingeführt, die als mathematische Grundlage für strategische Entscheidungsfindung dienen. Zunächst erfolgt eine Definition der Spieltheorie sowie eine Klassifikation der verschiedenen Spielarten, die für diese Studienarbeit relevant sind. Anschließend werden zentrale spieltheoretische Konzepte erläutert, die sowohl allgemein anwendbar sind als auch speziell auf das Spiel 4Gewinnt zugeschnitten werden.

3.1 Definition und Konzepte der Spieltheorie

Die Spieltheorie ist ein Teilgebiet der Mathematik, das strategische Entscheidungen in Konflikt- oder Kooperationssituationen analysiert. Ein Spiel besteht dabei aus mehreren Elementen: den Spielern, den möglichen Zügen, den Regeln und dem Ergebnis. Ziel der Spieltheorie ist es, optimale Strategien zu entwickeln und die möglichen Ergebnisse eines Spiels vorherzusagen, wenn die Spieler rational handeln.

Grundelemente eines Spiels sind folgende Aspekte:

1. **Spieler:** Die Teilnehmer eines Spiels, die Entscheidungen treffen. Es können zwei oder mehr Mitspieler beteiligt sein.

2. **Strategien:** Die Handlungsoptionen, die den Spielern zur Verfügung stehen, um ihre Ziele (Sieg gegen den Mitspieler)zu erreichen.

3. **Regeln:** Die Struktur des Spiels legt fest, wie die Züge ablaufen, in welcher Reihenfolge sie gemacht werden und unter welchen Bedingungen das Spiel endet.

4. **Auszahlungen:** Die Ergebnisse des Spiels werden für jeden Spieler anhand einer bestimmten Kombination von Strategien festgelegt. Diese Ergebnisse können in Form von Gewinnen, Verlusten oder Nutzen dargestellt werden.

5. **Informationen:** Spiele können sich darin unterscheiden, ob die Spieler alle Informationen haben (das heißt, sie sehen alle Züge) oder ob es Unsicherheiten gibt (z.B. verdeckte Karten oder Würfelergebnisse).[HIN19].

3.2 Klassifikation von Spielen

Um eine Strategie von 4Gewinnt umsetzen zu können, muss das Spiel an sich ersteinmal analysiert werden. In der Spieltheorie werden Spiele nach bestimmten Kriterien eingeteilt, um ihre Struktur, Dynamik und Lösbarkeit besser zu erfassen. Die wichtigsten Kategorien für diese Einordnung sind im Folgenden aufgeführt.

1. **Anzahl der Spieler**

   – **Zwei-Personen-Spiele**: Spiele mit genau zwei Spielern. Solche Spiele werden oft spieltheoretisch analysiert.

   – **Mehrspieler-Spiele**: Spiele mit drei oder mehr Teilnehmern. Die Strategien sind komplexer, da Bündnisse und wechselnde Zusammenschlüsse eine Rolle spielen können.

2. **Spielzüge: gleichzeitige vs. aufeinanderfolgende Entscheidungen**

   – **Simultane Spiele**: Beide Spieler treffen ihre Entscheidungen gleichzeitig, ohne zu wissen, für welche Option der andere sich entschieden hat. Solche Spiele werden oft in einer Matrixform betrachtet, um sie besser zu analysieren.

   – **Sequentielle Spiele**: Die Spieler machen ihre Züge nacheinander und haben die Möglichkeit, auf die Aktionen des Gegners zu reagieren. Um die Reihenfolge der Züge und die verschiedenen Entscheidungsmöglichkeiten anschaulich darzustellen, werden solche Spiele oft in Form eines Baumdiagramms, also einer Extensivform, visualisiert.

3. **Informationen der Spieler**

   – **Spiele mit vollständiger Information**: Alle Spieler sind über die bisherigen Züge und den aktuellen Stand des Spiels informiert. In solchen Situationen lassen sich optimale Strategien durch Rückwärtsinduktion erarbeiten.

   – **Spiele mit unvollständiger Information**: Mindestens ein Spieler hat keine vollständigen Informationen über den Spielzustand oder die Strategie des Gegners. Dies führt zu Unsicherheiten bei der Entscheidungsfindung.

4. **Kooperative vs. nicht-kooperative Spiele**

   – **Kooperative Spiele**: Spieler haben die Möglichkeit, Zusammenschlüsse zu vereinbaren und gemeinsam zu handeln, um sich einen Vorteil zu verschaffen. Dabei spielen Verhandlungen und Absprachen eine entscheidende Rolle für die Ergebnisse.

   – **Nicht-kooperative Spiele**: Jeder Spieler agiert unabhängig und verfolgt ausschließlich seine eigenen Ziele.

5. **Gewinnstruktur: Nullsummenspiele vs. Nicht-Nullsummenspiele**

   – **Nullsummenspiele**: Der Gewinn eines Spielers ist genau der Verlust des anderen. Diese Art von Spielen ist konfliktbeladen, weil der Vorteil für einen Spieler immer mit einem Nachteil für den anderen einhergeht.

   – **Nicht-Nullsummenspiele**: Die Gewinne und Verluste der Spieler müssen nicht unbedingt übereinstimmen. In solchen Spielen kann es vorkommen, dass die Teilnehmer zusammenarbeiten oder ihre Gewinne teilen.

6. **Deterministische vs. stochastische Spiele**

   – **Deterministische Spiele**: Es gibt keine Zufälle im Spiel, alles hängt ganz von den Entscheidungen der Spieler ab.

   – **Stochastische Spiele**: Zufallselemente wie Würfel oder Karten bringen unvorhersehbare Wendungen ins Spiel, was für zusätzliche Spannungen und Unsicherheiten sorgt.

7. **Endliche vs. unendliche Spiele**

   – **Endliche Spiele**: Die Anzahl der möglichen Spielzustände und Züge ist begrenzt. Das bedeutet, dass man solche Spiele komplett durchleuchten und die besten Strategien finden kann.

   – **Unendliche Spiele**: Spiele, bei denen es potenziell unendlich viele Züge oder Zustände gibt und die sich nicht vollständig analysieren lassen [Win19].

Kriterien angewandt auf 4Gewinnt

Anhand diesen genannten Kriterien kann 4Gewinnt klassifiziert werden. 4Gewinnt ist nach den aufgelisteten fünf Kriterien ein kombinatorisches Spiel. Sie bieten einen idealen Rahmen, um Strategien, Entscheidungsfindung und Spieltheorie zu untersuchen. Auch weitere Spiele wie Schach, Dame, Mühle und Tic-Tac-Toe sind ebenfalls kombinatorische Spiele.

Diese folgende fünf Eigenschaften machen ein kombinatorisches Spiel aus:

1. **Zwei-Personen-Spiel:** 4Gewinnt ist ein klassisches Spiel für zwei Personen, bei dem die Spieler abwechselnd ihre Steine in ein Gitter fallen lassen.

2. **Nullsummenspiel:** In "Vier Gewinnt"verfolgen die beiden Spieler gegensätzliche Ziele. Wenn einer von ihnen gewinnt, indem er vier Steine in einer Reihe hat, bedeutet das gleichzeitig, dass der andere verloren hat.

3. **endliches Spiel:** Das Spielfeld hat insgesamt 42 Felder, die sich auf 6 Reihen und 7 Spalten verteilen. Nach einer bestimmten Anzahl an Zügen wird das Feld immer vollständig gefüllt sein. Das bedeutet, dass jedes Spiel immer zu einem Ende kommt – entweder gewinnt ein Spieler oder es endet unentschieden, wenn keine Züge mehr möglich sind.

4. **vollständige Information:** Beide Spieler können jederzeit den aktuellen

Spielstand genau im Blick behalten, da alle Spielsteine offen liegen. Es gibt keine geheimen Informationen, sodass sie ihre Strategien auf Grundlage aller bisherigen Züge entwickeln können.

5. **Determinismus:** Es gibt keine Zufälle, der Ausgang des Spiels hängt ganz von den Entscheidungen der Spieler ab. Jede Spielsituation ist klar und vorhersehbar, solange man die Züge der Spieler kennt.

Durch diese genannten fünf Eigenschaften werden kombinatorische Spiele auch **endliches ZweiPersonen-Nullsummenspiel mit perfekter Information** genannt[HIN19].

3.3 Relevante spieltheoretische Konzepte für 4Gewinnt

Mit Kapitel 3.2 wurde dargestellt, dass das 4Gewinnt ein strategisches Zwei-Personen-Spiel mit vollständiger Information ist und somit mithilfe der Spieltheorie analysieren lässt. Einige zentrale Konzepte der Spieltheorie sind besonders relevant, um die Dynamik und Strategien von 4Gewinnt zu verstehen:

Dominante Strategien:

– Eine Strategie ist dominant, wenn sie unabhängig von den Zügen des Gegners optimal ist.

– In 4Gewinnt existieren situationsabhängige dominante Strategien.

– Die Kontrolle der Mittelspalte gilt als teilweise dominante Strategie, da sie zentrale taktische Vorteile bietet.

Gleichgewichtskonzepte:

– **Nash-Gleichgewicht**: Ein Zustand, in dem kein Spieler durch einseitiges Abweichen ihre Position verbessern kann.

– **Teilspielperfekte Gleichgewichte**: Strategien, die in allen Teilspielen optimal sind.

- **Minimax-Prinzip**: Eine Methode, bei der der Spieler versucht, den maximal möglichen Verlust zu minimieren.

Strategische Tiefe:

- mehrere Züge im Voraus denken ist entscheidend für den Erfolg.
- Erkennung und gezielte Nutzung von Zwangszügen und Zugfolgen.
- Entwicklung von Bedrohungspotenzialen und deren effektive Abwehr.

Positionsbewertung:

- Bewertung von Spielstellungen nach strategischen Kriterien zur Einschätzung der Spielstärke.
- Erkennung von entscheidenden Momenten, die das Ergebnis des Spiels beeinflussen können.
- Untersuchung von Gewinnmöglichkeiten und Risiken, um potenzielle Spielstrategien zu entwerfen.

Zugzwang-Situationen:

- Zugzwang beschreibt Situationen, in denen jeder mögliche Zug die eigene Position verschlechtert.
- Solche Situationen haben eine hohe strategische Bedeutung für die Spielführung.
- Es ist wichtig, gezielte Methoden anzuwenden, um den Gegner in eine schwierige Situation zu bringen und ihn unter Druck zu setzen.

Basierend auf den vorgestellten Konzepte kann nun eine Strategie erstellt werden, der dabei hilft, einen Algorithmus zu konzipieren. Dieser Algorithmus würde verschiedene Elemente der Spieltheorie und strategischen Überlegungen einbeziehen, um die Entscheidungsfindung zu verbessern [MLW08].

4 Analyse von Vier Gewinnt aus spieltheoretischer Sicht

Die spieltheoretische Analyse des Spiels Vier Gewinnt erfordert eine systematische Untersuchung verschiedener strategischer Komponenten und mathematischer Aspekte. Im Folgenden Kapitel „Analyse von Vier Gewinnt aus spieltheoretischer Sicht" werden die wesentlichen Elemente dieser Analyse detailliert dargestellt.

4.1 Darstellung des Spiels in Normalform

In der Normalform-Darstellung oder auch Normalform genannt, wird das Spiel als Zwei-Personen-Nullsummenspiel charakterisiert. Das bedeutet, wenn ein Spieler gewinnt, verliert der andere automatisch . Das Spiel wird in der Normalform rein statisch beschrieben und besteht allgemein aus folgenden Elementen[Sie]:

- Einer Menge Spieler $(I = 1, ..., i, ..., n)$
  Der Wert I gibt die Anzahl der Teilnehmer an.

- Für jeden Spieler i eine Menge von Strategien (S_i)
  (S_i) entspricht der Strategiemenge des Spielers i, aus dieser er seine Züge wählen kann.

- Für jeden Spieler i eine Auszahlungsfunktion/ Nutzenfunktion (u_i)
  Hierbei wird jeder möglichen Strategiekombination aller Spieler einen reellen Zahlenwert zugeordnet.

$$u_i = \sum S_i \to \mathbb{R}^n \tag{4.1}$$

Ist die Normalform endlich und überschaubar, kann sie auch in einer Matrix dargestellt werden. Die Matrix muss dabei die verschiedenen Spielsituationen und deren Ausgänge abbilden, wobei jeder Spieler in seiner Zugfolge bis zu sieben verschiedene Strategien pro Zug zur Verfügung hat. Durch die sehr große Anzahl an Strategien, bei 4Gewinnt, ist es nicht mehr überschaubar und daher eher weniger geeignet.

4.2 Komplexität des Spielbaums

Die Komplexität des Spielbaums ist beträchtlich und wird oft als „mittlere Komplexität" beschrieben. Die liegt daran, dass es eine große Anzahl an möglichen Spielzuständen gibt, aber das Spiel dennoch lösbar ist.
Die Anzahl der möglichen Konstellationen bei Vier Gewinnt beträgt laut einer Studie von John Tromp 4.531.985.219.092 (circa $4,5 * 10^{12}$) [Thi12]. Aufgrund dieser enormen Zahl wird deutlich, warum eine vollständige Durchsuchung des Spielbaums für ein Vier-Gewinnt-Spiel eine Herausforderung darstellt.
Pro Zug gib es für den Spieler sieben Möglichkeiten. Bereits in der nach ersten Runde hat der Spielbaum $7 * 7 = 49$ Äste, also 49 mögliche Spielzustände. Das zeigt, dass der Spielbaum trotz der scheinbaren Einfachheit des Spiels Vier Gewinnt, recht komplex ist [Thi12][Rui+09]. Aus diesem Grund wurden Ansätze entwickelt, die den Spielbaum mithilfe von verteilten Rechensystemen effizient lösen. Ein Beispiel hierfür ist „Shard Solver" [YGJ22].

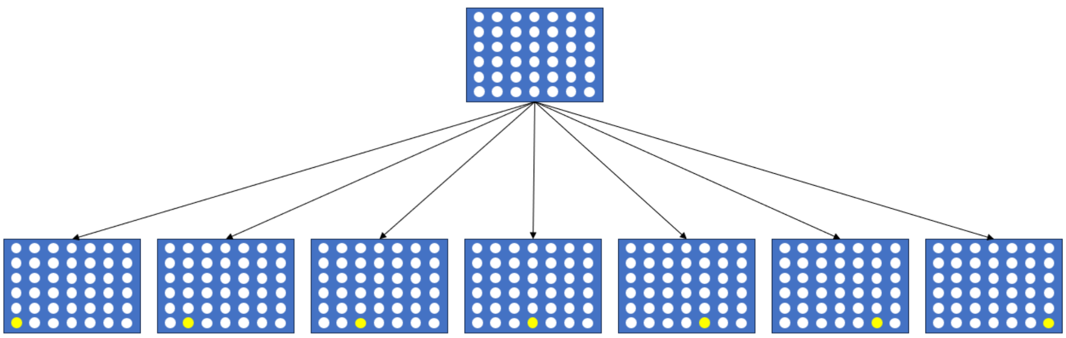


Abbildung 4.1: Spielbaum nach dem 1. Zug von Spieler 1

4.3 Darstellung des Spiels in Extensivform

Die Extensivform Darstellung ist eine aufschlussreiche Methode. Sie ermöglicht eine detaillierte Abbildung des Spielverlaufs und der Entscheidungsmöglichkeiten aller Spieler. In dieser Form wird ein Spielbaum verwendet, der aus Knoten und Kanten besteht [Ein14]. Der Baum beginnt mit einem Wurzelknoten, hier ist es ein leeres Spielfeld mit 42 freien Feldern. Die Verbindungen zwischen den Knoten, auch Kanten genannt, stellen die möglichen Züge für den Spieler dar. Die Knoten, an denen Kanten zusammenlaufen, repräsentieren eine Entscheidung eines Spielers. Die Knoten am Ende zeigen mögliche Ausgänge für das Spiel an. Bei Vier Gewinnt stellt jede Ebene des Spielbaums einen Spielzug dar. Pro Zug gibt es immer sieben Möglichkeiten, den Spielstein zu platzieren. Das bedeutet, von jedem Knoten gehen sieben Kanten weg. Allerdings ist der Baum durch die Spielfeldgröße auf 42 mögliche Züge begrenzt.
Um die Extensivform praktisch nutzen zu können, werden Vereinfachungen und Optimierungen durchgeführt. Eine Möglichkeit ist es, nutzlose Züge wegzulassen. Dadurch soll der Spielbaum vereinfacht werden und sich besser für Analysen eignen [Rui+09].

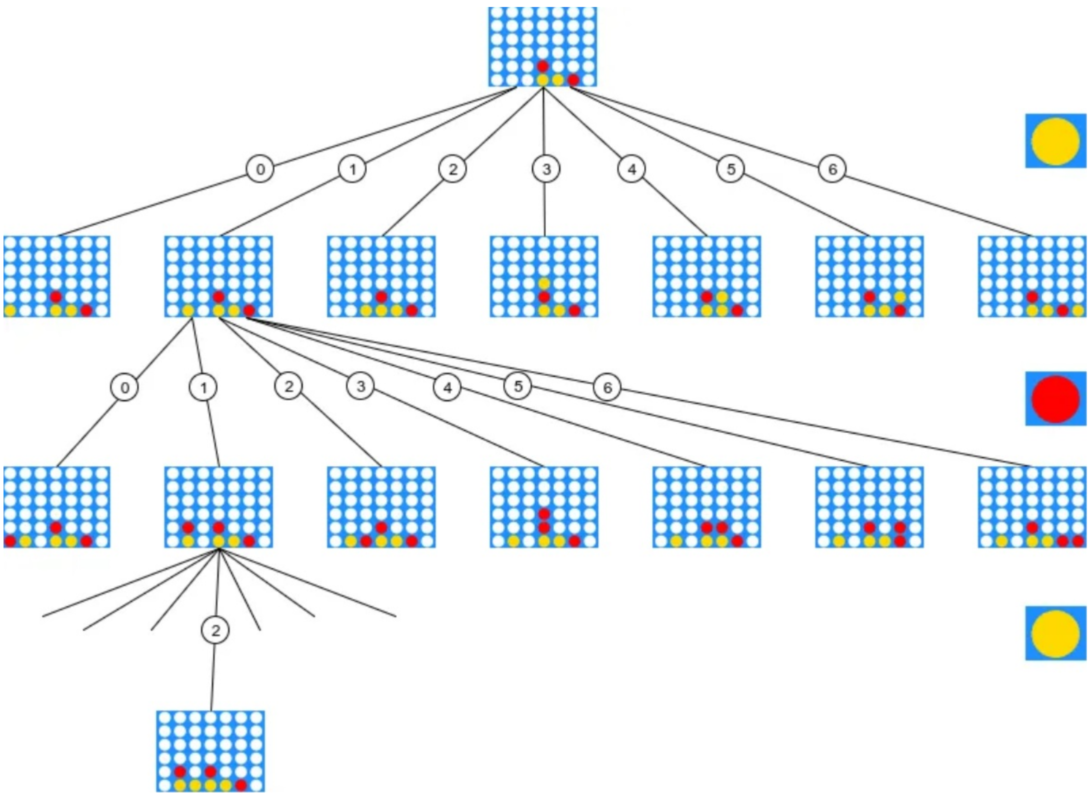


Abbildung 4.2: Schematische Darstellung des Spielbaum nach dem 4. bis zum 7. Zug [Van17]

4.4 Strategien und Gleichgewichte

Das Spiel Vier Gewinnt wird aus mathematischer und spieltheoretischer Sicht, von verschieden Strategien und Gleichgewichten geprägt.

- **Kontrolle des Zentrums:** Die mittlere Spalte des Spielfeldrasters ist strategisch besonders wichtig. Sie bietet den Zugang zu den meisten möglichen Gewinnkombinationen (vertikal, horizontal und diagonal). Beginnt ein Spieler hier oder übernimmt frühzeitig die Kontrolle über das Zentrum, kann ich dadurch seine Chancen auf einen möglichen Sieg stark erhöhen[Uni15].

- **Minimax-Strategie :** Die Minimax-Strategie ist ein weiteres zentrales Konzept, welches bei Vier Gewinnt angewandt wird. Dabei versucht ein Spieler, seinen Verlust so gering wie möglich zu halten und dabei gleichzeitig den Gewinn des Gegners zu minimieren. Diese Strategie fordert eine vorausschauende Planung über mehrere Spielzüge. Hierbei werden sowohl offensive Aspekte als auch defensive berücksichtigt[Uni15].

- **Bedrohungen verzweigen ("Forking") :** Bei der Bedrohungsverzweigung wird der Gegner in eine defensive Spielposition gezwungen. Dies geschieht durch das Erzeugen von Mehrfachbedrohungen. Dabei werden mehrere potenzielle Gewinnmöglichkeiten erzeugt, die der Gegner nicht alle gleichzeitig decken kann. Durch das Verzweigen der Bedrohungen wird die Wahrscheinlichkeit für einen schnellen Sieg erhöht[Cah24][Uni15].

- **Paritätsstrategie:** In der Paritätsstrategie wird darauf abgezielt, Gewinnmöglichkeiten auf bestimmten Reihen (gerade oder ungerade) zu schaffen. Spieler 1 sollte hierbei versuchen, drei Steine in einer Linie zu platzieren, sodass der vierte Stein in einer ungeraden Reihe liegt. Der zweite Spieler kann das spiegeln, indem er in diesem Beispiel auf gerade Reihen abzielt [Cah24].

- **Heuristische Ansätze:** Heuristische Strategien wie das Blockieren von gegnerischen Linien oder die Priorisierung vertikaler Verbindungen werden häufig verwendet, um praktische Entscheidungen zu treffen. Die heuristischen Ansätze sind besonders nützlich für simple KI-Systeme, da sie weniger rechenintensiv sind als andere Ansätze oder sie eignen sich für menschliche Spieler[Cah24].

- **Dominante Strategien :** Eine dominante Strategie für den ersten Spieler besteht darin, den ersten Zug des Spiels in der Mitte zu platzieren und im weiteren Spielverlauf optimal zu spielen. Für den zweiten Spieler bedeutet das, er muss die Bedrohungen von Spieler1 konsequent blockieren und versuchen, möglichst viele eigene Gewinnmöglichkeiten aufzubauen[Uni15].

- **Perfektes Spiel :** Das Konzept des perfekten Spiels formalisierte Victor Allis in seiner Arbeit. Er bewies, dass der erste Spieler bei einem Spiel immer gewinnen kann [Uni15]. Dadurch wird die Bedeutung des ersten Spielzuges unterstrichen und gleichzeitig zeigt sich, dass zwischen den Spielern strategische Asymmetrie vorliegt.

- **Nash-Gleichgewicht :** Ein Nash-Gleichgewicht entsteht, wenn kein Spieler seine Strategie anpassen kann, ohne seine eigene Lage zu verschlechtern, vorausgesetzt, der andere Spieler behält seine Strategie bei[Che24]. Dies trifft auf, wenn beide Spieler optimal aufeinander reagieren, sodass keiner einen Vorteil durch Abweichen erzielen kann. In diesem Fall ist das Nash-Gleichgewicht stark mit der Minimax-Strategie verknüpft. Vier Gewinnt ist ein Nullsummenspiel, aus diesem Grund existiert immer mindestens ein Nash-Gleichgewicht[Cah24].

5 Lösungsansätze für Vier Gewinnt

5.1 Optimale Strategien

Die Analyse von 4Gewinnt aus der Perspektive der Spieltheorie zeigt eine Reihe von strategischen Prinzipien und optimalen Spielweisen um gezielte Strategien zu entwickeln. Diese Erkenntnisse beruhen sowohl auf grundlegenden Prinzipien, welche in Kapitel 3 aufgearbeitet wurden, als auch auf fortgeschrittenen Taktiken, die im Verlauf des Spiels entscheidend sein können.

Ein wichtiges Grundprinzip ist die Bedeutung des ersten Zuges. Es wurde festgestellt, dass der erste Spieler, wenn er perfekt spielt, immer gewinnen kann – vorausgesetzt, er wählt den besten Eröffnungszug. Der optimale Zug ist dabei, den ersten Stein in die Mitte zu setzen. Diese Eröffnung ermöglicht die beste Kontrolle über das Spielbrett und eröffnet viele Möglichkeiten für offensive und defensive Züge. Zieht der erste Spieler jedoch in eine der angrenzenden Spalten, führen beide Spieler bei optimalem Spiel zu einem Unentschieden. Alle anderen Eröffnungszüge gelten als weniger effektiv und führen, wenn der Gegner ebenfalls perfekt spielt, unweigerlich zur Niederlage des ersten Spielers.

Ein weiteres zentrales Prinzip ist die Kontrolle des Zentrums, die eine entscheidende Rolle spielt. Die Kontrolle über die mittleren drei Spalten (insbesondere 3, 4 und 5) ist strategisch besonders wichtig, da sie die besten Chancen für horizontale, vertikale und diagonale Gewinnreihen bietet. Auch die Spalten 2 und 5 – die zweite und vorletzte Spalte – sind wichtig, denn ohne sie kann der Spieler keine vollständigen diagonalen oder horizontalen Viererreihen bilden. Diese Kontrolle hilft nicht nur beim eigenen Spielaufbau, sondern schränkt auch die Möglichkeiten des Gegners ein.

Im Laufe des Spiels kommen zudem fortgeschrittene taktische Elemente ins Spiel. Eine wichtige Taktik ist die Schaffung von Zugzwang-Situationen, in denen der Gegner gezwungen wird, einen Zug zu machen, der seine eigene Position schwächt. Diese Situationen sind besonders am Ende des Spiels von Bedeutung, wenn nur noch wenige Felder zur Verfügung stehen und der Druck auf beide Spieler steigt. Eine weitere wichtige Taktik sind Fallenkombinationen, bei denen der Gegner durch clevere Kombinationen von Bedrohungen in eine Falle gelockt wird. Besonders wirkungsvoll sind Doppelfallen, bei denen zwei gleichzeitige Drohungen entstehen, die der Gegner nicht gleichzeitig abwehren kann. Auch Auffüllfallen sind relevant: Hier zwingt ein Spieler den Gegner durch einen Mangel an freien Feldern dazu, einen entscheidenden Stein in eine vorbereitete Blockade zu setzen[Win19].

Die spieltheoretische Analyse von „Vier Gewinnt“ wurde durch mathematische und computerbasierte Methoden weiter vertieft. Unabhängig voneinander fanden zwei Forscher eine vollständige Lösung für das Spiel. Victor Allis entwickelte 1988 einen speziellen Regelsatz zur systematischen Analyse, während James D. Allen 1990 Computerprogramme einsetzte, um das Spiel vollständig zu berechnen. Beide kamen unabhängig zum gleichen Schluss: Der erste Spieler kann bei optimalem Spiel und einer Eröffnung in der Mitte immer gewinnen. Diese Erkenntnis hat nicht nur wissenschaftliche Bedeutung, sondern bildet auch die Basis für die Entwicklung von Algorithmen, die in Computerprogrammen oder Robotersystemen verwendet werden, um das Spiel optimal zu spielen. [Wik25].

Mögliche Startpositionen und Spielausgänge

1. Startposition 4 (mittlere Spalte) Wenn der erste Spieler in die mittlere Spalte setzt, hat er einen nachgewiesenen Vorteil und kann bei perfektem Spiel gewinnen. Diese Eröffnung maximiert die Kontrolle über das Spielfeld.

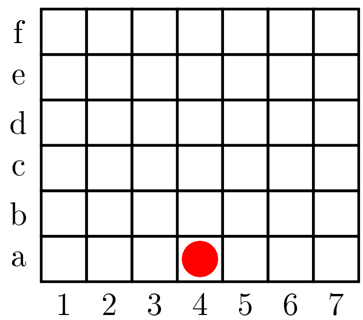


Abbildung 5.1: ROT gewinnt bei optimalen Spiel

2. Startpositionen 3 oder 5 (benachbarte Spalten zur Mitte) Ein Zug in die Spalte 3 oder 5 führt bei optimalem Spiel zu einem Remis, da der zweite Spieler durch eine Kombination aus Zentrums- und Blockstrategien den Sieg verhindern kann.

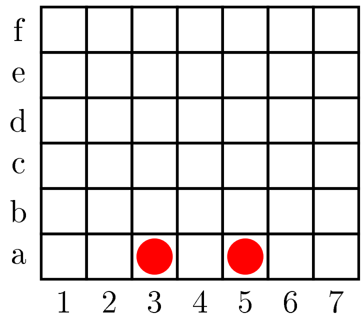


Abbildung 5.2: Remis bei optimalen Spiel

3. Startpositionen 1, 2, 6 oder 7 (äußere Spalten) Züge in die äußeren Spalten gelten als suboptimal. Der erste Spieler verliert bei perfektem Gegenspiel des zweiten Spielers, da diese Positionen weniger Kontrolle über das Zentrum und die Gewinnlinien bieten.

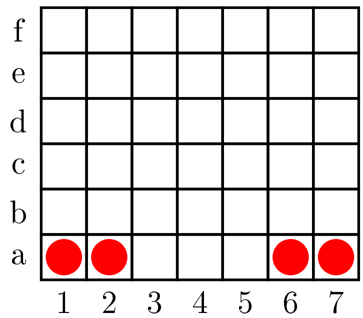


Abbildung 5.3: ROT verliert bei optimalen Spiel

Diese Analyse zeigt, wie wichtig die Wahl der Startposition für den weiteren Spielverlauf ist. Der erste Zug in die Mitte eröffnet dem Spieler die besten Chancen, während Züge in die äußeren Spalten zu deutlichen Nachteilen führen können.

5.2 Heuristische Ansätze

Die Bewertung von Positionen auf dem Spielfeld ist ein zentraler heuristischer Ansatz bei der Strategieentwicklung für 4Gewinnt. Dieser Ansatz zielt darauf ab, den strategischen Wert jeder Position zu analysieren und darauf aufbauend optimale Züge zu planen.

Die dargestellte Tabelle veranschaulicht die strategische Bewertung jedes Spielfelds. Jedes Feld erhält einen numerischen Wert, der angibt, wie viele mögliche Viererreihen dieses Feld beeinflussen kann. Ein Zug auf ein Feld mit einem höheren Wert ist in der Regel strategisch besser, da er potenziell mehr Siegoptionen eröffnet. Solche Bewertungsansätze werden auch in computergesteuerten Spielen angewendet, um optimale Züge zu berechnen[MLW08].

f	3	4	5	7	5	4	3
e	4	6	8	10	8	6	4
d	5	8	11	13	11	8	5
c	5	8	11	13	11	8	5
b	4	6	8	10	8	6	4
a	3	4	5	7	5	4	3
	1	2	3	4	5	6	7

Abbildung 5.4: Bewertungstabelle: mögliche Anzahl an Vierer-Reihen

Erklärung der Werte:

Zentrum des Spielfelds: Die Felder im Zentrum (insbesondere Spalte 4 und die Zeilen neben dran 3 und 5) haben die höchsten Werte, da sie Teil mehrerer potenzieller Viererreihen sein können – sowohl horizontal, vertikal als auch diagonal. Das erklärt, warum das Feld in Spalte 4, Zeilen c und d, den maximalen Wert von 13 besitzt.

Ränder des Spielfelds: Die Felder am Rand (also die ersten und siebten Spalten sowie die Reihen a und f) zeigen deutlich niedrigere Werte. Das liegt daran, dass sie weniger Gewinnlinien bieten. Ein Randfeld kann höchstens Teil einer horizontalen und einer diagonalen Viererreihe sein, weshalb dort oft Werte von 3 oder 4 zu finden sind.

Strategische Bedeutung:

Die zentralen Felder sind besonders wichtig, weil sie viele Optionen bieten, um eine Viererreihe zu vervollständigen. Deshalb ist es entscheidend, die mittleren Spalten – vor allem Spalte 4 sowie die angrenzenden Spalten 3 und 5 – im Auge zu behalten. Diese Kontrolle kann den Unterschied im Spiel ausmachen. Im Gegensatz dazu haben die Randfelder weniger Einfluss auf den Verlauf des Spiels. Sie werden oft hauptsächlich defensiv genutzt oder um den Gegner zu bestimmten Zügen zu zwingen.

5.3 Entwicklung von Algorithmen

In diesem Abschnitt werden verschiedene Algorithmen vorgestellt, die in unserem Projekt Anwendung finden können. Jeder Algorithmus wird zunächst in seinen Grundzügen erklärt, gefolgt von einer kritischen Bewertung zur Realisierung.

5.3.1 MinMax-Algorithmus

Die Minimax-Strategie ist ein grundlegender Algorithmus zur Entscheidungsfindung in Nullsummenspielen wie 4Gewinnt. Dieser Ansatz wird verwendet, um optimale Züge für einen Spieler zu finden, indem sowohl die eigenen Möglichkeiten als auch die möglichen Gegenreaktionen des Gegners analysiert werden [Kru16]. In diesem Kapitel wird die Funktionsweise der Minimax-Strategie im Kontext von 4Gewinnt betrachtet.

Grundprinzip der Minimax-Strategie

Der Minimax-Algorithmus basiert auf der Idee, den eigenen Vorteil zu maximieren, während man gleichzeitig den Nutzen des Gegners minimiert. In einem Spielbaum, der alle möglichen Züge und die entsprechenden Reaktionen darstellt, sucht der Algorithmus nach dem besten Zug, indem er die Ergebnisse aller möglichen Entscheidungen bis zu einer bestimmten Tiefe analysiert.

In der Spieltheorie versteht man unter einem Spielbaum einen gerichteten Graphen ohne Zyklen, dessen Knoten die verschiedenen Spielstände darstellen. Dabei kann es vorkommen, dass derselbe Spielstand an mehreren Stellen im Baum auftaucht. Jeder Knoten zeigt auch an, welcher Spieler gerade am Zug ist. Der Spieler hat die Wahl, eine der möglichen Aktionen zu wählen, die durch die Kanten des Graphen repräsentiert werden.

Jeder Zustand im Baum ist entweder ein Endzustand oder hat eine Reihe von möglichen Folgepositionen, die durch die Züge im nächsten Spielzug erreicht werden können.

Die Bewertung der Spielstände erfolgt mithilfe einer Heuristik, die den Wert eines bestimmten Zustands quantifiziert. Bei 4Gewinnt könnte eine einfache Heuristik zum Beispiel folgende Aspekte berücksichtigen:

- Gewonnene Spiele: Ein Zustand, in dem ein Spieler vier Steine in einer Reihe hat, hat den höchsten Wert.

- Blockierte Gewinnchancen: Züge, die verhindern, dass der Gegner vier in einer Reihe erreicht, sind besonders wertvoll.

- Teilweise vervollständigte Reihen: Zustände, in denen drei oder zwei verbundene Steine existieren, sind wertvoller als isolierte Steine.

Der Algorithmus berechnet mögliche Züge und bewertet sie rückwärts ausgehend von den möglichen Endzuständen.

In 4Gewinnt gibt es zwei Spieler:

- Der Maximierer versucht, den eigenen Nutzen zu maximieren (z. B. Spieler 1).

- Der Minimierer versucht, den Nutzen des Gegners zu minimieren (z. B. Spieler 2).

Bei jedem Zug wechselt die Rolle zwischen Maximierer und Minimierer. Der Algorithmus wechselt daher bei jedem Ebenenwechsel zwischen der Maximierung und Minimierung der Heuristikwerte [Kru16].

Beispiel: Minimax-Suchbaum

Im Folgenden wird ein einfacher Suchbaum dargestellt, der die Funktionsweise des Minimax-Algorithmus illustriert. Der Baum hat eine Tiefe von 4 (eine Max-Ebene und eine Min-Ebene).

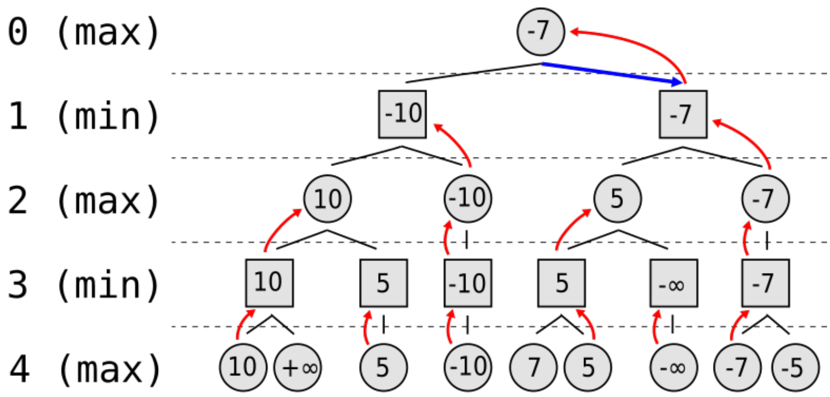


Abbildung 5.5: Minimax-Suchbaum mit einer Tiefe von 4

Erklärung des Suchbaums

Der Suchbaum in Abbildung 5.5 zeigt die Schritte des Minimax-Algorithmus:

1. **Blattebene:** Die unterste Ebene enthält die Bewertungen der möglichen Endzustände aus Sicht des Max-Spielers. Diese Werte könnten durch eine Bewertungsfunktion ermittelt worden sein.

2. **Min-Ebene:** Der Min-Spieler versucht, die Bewertung zu minimieren. Für jeden Min-Knoten wird der niedrigste Wert seiner Kindknoten ausgewählt:

   – z.B. der linke äußere Min-Knoten wählt $\min(10, unendlich) = 10$.

3. **Max-Ebene:** Der Max-Spieler versucht, die Bewertung zu maximieren. Der Max-Knoten wählt den höchsten Wert aus den zurückgegebenen Bewertungen der Min-Knoten:

   – z.B. Der linkere äußere Max-Knoten wählt $\max(10, 5) = 10$.

Optimale Entscheidung:

Der optimale Zug für Max ist die rechte Verzweigung, die zum Wert -7 führt. Obwohl beide Optionen zu negativen Werten führen (-10 auf der linken Seite und -7 auf der rechten Seite), wählt Max den größeren der beiden Werte, also -7. Dies ist die beste Entscheidung für Max unter der Annahme, dass der Gegenspieler (Min) optimal spielt. Der rote Pfeil im Spielbaum zeigt genau diesen optimalen Entscheidungspfad an.

5.3.1 AlphaBeta-Algorithmus

Der Alpha-Beta-Algorithmus ist eine cleverere Variante des Minimax-Algorithmus, die dessen Leistung deutlich verbessert. Er arbeitet so, dass er bestimmte Spielzüge, die für die finale Entscheidung unwichtig sind, einfach ignoriert. Dadurch kann der Alpha-Beta-Algorithmus die Anzahl der Knoten, die im Spielbaum bewertet werden müssen, erheblich reduzieren. Das ist besonders hilfreich in ressourcenbegrenzten Umgebungen, wie zum Beispiel bei einem LEGO Spike Roboter, der nur begrenzte Rechenleistung hat.

Obwohl der Alpha-Beta-Algorithmus die gleichen Berechnungen wie der Minimax-Algorithmus anstellt, nutzt er zusätzlich zwei Parameter, Alpha und Beta. Diese helfen, überflüssige Berechnungen zu vermeiden und machen den Prozess effizienter:

– **Alpha**: Der aktuelle maximale Wert, den der Maximierer sicher erreichen kann.

– **Beta**: Der aktuelle minimale Wert, den der Minimierer sicher erreichen kann.

Während der Spielbaum durchgegangen werden Äste abgeschnitten, welche für die endgültige Entscheidung irrelevant sind – das nennt man Pruning. Das passiert in den folgenden Fällen:

– Ein Knoten einen Wert liefert, der schlechter ist als der bisher bekannte Alpha-Wert für den Maximierer.

– Ein Knoten einen Wert liefert, der schlechter ist als der bisher bekannte Beta-Wert für den Minimierer.

Die Anwendung des Alpha-Beta-Algorithmus auf 4Gewinnt bietet mehrere Vorteile:

– **Effizienz**: Der Algorithmus reduziert die Anzahl der Knoten, die bewertet werden müssen, erheblich. Dies ermöglicht die Analyse tieferer Spielbäume mit derselben Rechenleistung.

– **Flexibilität**: Der Algorithmus lässt sich ganz einfach an die speziellen Bewertungsfunktionen von 4Gewinnt anpassen. So kann er beispielsweise Reihen, Spalten und Diagonalen bewerten.

– **Optimierung für begrenzte Ressourcen**: Ein LEGO Spike Roboter hat begrenzte Rechen- und Speicherkapazitäten. Der Alpha-Beta-Algorithmus ermöglicht es, in Echtzeit Züge zu berechnen, ohne den Roboter zu überlasten [MLW08].

Beispiel: Alpha-Beta-Suchbaum

Im Folgenden wird ein einfacher Suchbaum dargestellt, der die Funktionsweise des Alpha-Beta-Algorithmus illustriert. Der Baum zeigt, wie bestimmte Zweige (*Pruning*) abgeschnitten werden, um die Effizienz zu erhöhen.

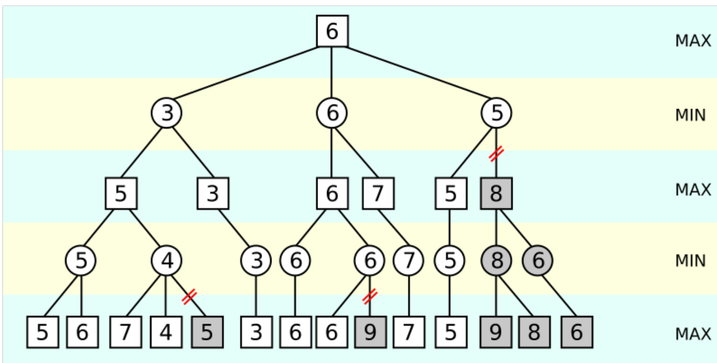


Abbildung 5.6: Alpha-Beta-Suchbaum mit einer Tiefe von 4

Erklärung des Suchbaums

1. **Blattebene:** Die unterste Ebene enthält die Bewertungen der möglichen Endzustände aus Sicht des Max-Spielers. Diese Werte repräsentieren die Spielsituationen.

2. **Min-Ebene:** Der Min-Spieler wählt den minimalen Wert seiner Kindknoten. Durch Alpha-Beta-Schnitte (mit $\times$ markiert) werden einige Äste nicht weiter untersucht, da sie das Endergebnis nicht mehr beeinflussen können.

   – z.B. der linke Min-Knoten wählt $\min(5, 6) = 5$. Der nächste Min-Knoten bricht nach dem Wert von 4 ab, da die Zahl von 5 schon unterschritten wird und somit keinen Einfluss auf den nächsten Max-Knoten mehr hat.

3. **Max-Ebene:** Der Max-Spieler wählt den maximalen Wert. Auch hier werden durch Alpha-Beta-Schnitte (mit $\times$ markiert) einige Äste nicht weiter untersucht, da sie das Endergebnis nicht mehr beeinflussen können.

   – z.B der linke Max-Knoten wählt $\max(5, 4) = 5$

Optimale Entscheidung

Schließlich wählt der Wurzelknoten (MAX) den Wert 6 als Maximum der drei darunterliegenden Werte. Durch Alpha-Beta-Pruning werden einige Zweige nicht weiter untersucht, da sie das Endergebnis nicht mehr beeinflussen können, was die Effizienz des Algorithmus erhöht. Der optimale Spielwert beträgt 6 und wird über den mittleren Pfad erreicht.

Vorteile des Alpha-Beta-Algorithmus

Durch das Alpha-Beta-Pruning werden unnötige Berechnungen vermieden:

– Der Algorithmus durchsucht nur jene Zweige, die potenziell zu besseren Ergebnissen führen.

– Dies erhöht die Effizienz und ermöglicht es, tiefere Suchbäume mit derselben Rechenleistung zu analysieren [MLW08].

6 Anwendung der Spieltheorie auf Vier Gewinnt

In diesem Kapitel werden die spieltheoretischen Aspekte von 4Gewinnt, einschließlich der Analyse von Spielsituationen, der Berechnung von Gewinnwahrscheinlichkeiten und der Entwicklung von Spielstrategien untersucht.

6.1 Analyse von Spielsituationen

Für das Verständnis der Spieldynamik und die Entwicklung effektiver Strategien, ist die Analyse der Spielsituation entscheidend. Vier Gewinnt, ist ein zwei Personen Spiel mit vollständiger Information. Das bedeutet, alle Spieler zu jeder Zeit den gesamten Zustand des Spiels kennen [Rui+09].

Der Bestimmungssatz von Ernst Zermelo besagt, dass sich jedes kombinatorische Spiel in eine der folgenden Kategorien einordnen lässt.

1. Der beginnende Spieler hat eine dominante Strategie. Wenn das Spiel optimal, ohne Fehler verläuft, gewinnt er die Partie.

2. Der nachziehende Spieler 2 hat eine dominante Strategie. Wenn das Spiel optimal verläuft, gewinnt dieser.

3. Keiner der beiden Parteien hat eine dominante Strategie. Wenn beide Spieler optimal spielen, endet das Spiel ohne einen Sieger. Sobald ein Spieler einen Fehler macht, gewinnt der andere Spieler das Spiel [Mül11].

Aus der Analyse geht hervor, dass bestimmte Situationen von besonderer Bedeutung für einen Sieg sind. Das bilden einer horizontalen Viererreihe sind schwer zu erreichen. Umso wichtige ist es einen Sieg die Spalten 1-5 zu kontrollieren.

6.2 Berechnung von Gewinnwahrscheinlichkeiten

Aufgrund der Komplexität des Spiels stellt die Berechnung der Gewinnwahrscheinlichkeit in Anwendung eine Herausforderung dar. Das Spielraster besteht aus sieben Spalten und sechs Zeilen, dadurch entsteht eine enorm große Anzahl an möglichen Zuständen. Was die Wahrscheinlichkeitsberechnung für den Gewinn des Spiels so komplex macht. Moderne Ansätze zur Berechnung der Gewinnwahrscheinlichkeit greifen auf KI-Technik zurück. Die exakte Berechnung für alle möglichen Spielsituationen bleibt aufgrund der Komplexität von Vier Gewinnt eine Herausforderung [Rui+09].

6.3 Entwicklung von Spielstrategien

Um eine gute Strategie für 4Gewinnt mit dem Alpha-Beta-Algorithmus zu entwickeln und später zu programmieren, müssen mehrere Schritte beachtet werden. Hier wird der Ansatz des gesamten Prozess kurz erläutert, von der Spielrepräsentation über die Bewertung von Stellungen bis hin zur Integration des Alpha-Beta-Algorithmus.

1. Spielfeld als Datenstruktur

Zunächst muss das Spielfeld von 4Gewinnt in einer Form dargestellt werden, die von einem Algorithmus verarbeitet werden kann. Hierzu kann ein 2D-Array (6 Zeilen $\times$ 7 Spalten) verwendet werden, das den Zustand des Spielfeldes beschreibt. Für jede Situation kann eine andere Zahl verwendet werden:

- 0: Leeres Feld

- 1: Spielstein von Spieler 1

- -1: Spielstein von Spieler 2

Das Spielfeld kann nun als Array folgendermaßen dargestellt werden:

$$\text{Spielfeld} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Berechnung als Zugmöglichkeiten

Da Spielsteine nur in den unteren freien Reihen platziert werden können, muss eine Funktion implementiert werden, die gültige Züge berechnet:

Listing 6.1: Funktion zur Berechnung gültiger Züge

```
def gueltige_zuege(board):
return [spalte for spalte in range(7) if brett[0][spalte] == 0]
```

3. Bewertung der Spielstellung

Eine Bewertungsfunktion ist entscheidend für die Strategie. Sie schätzt den Wert einer Stellung ein und liefert eine Zahl:

- **Gewinn für Spieler:** Sehr hoher Wert, z. B. $+1000$.
- **Verlust für Gegner:** Sehr niedriger Wert, z. B. -1000.
- **Potenzielle Verbindungen:** Punkte für 2er- und 3er-Reihen, die noch zu einem Sieg führen können.
- **Blockieren von Gegnerzügen:** Zusätzliche Punkte für Züge, die den Gegner daran hindern, 4 in eine Reihe zu bilden.

4. Alpha-Beta-Algorithmus implementieren

Der Alpha-Beta-Algorithmus wird verwendet, um den besten Zug zu berechnen, indem der Suchbaum effizient durchsucht wird. Es geht darum, den besten Zug auszuwählen, basierend auf einer bestimmten Spielsituation und der Tiefe. Der Alpha-Beta-Algorithmus durchsucht den Entscheidungsbaum bis z.B. zur Tiefe 4 und nutzt alpha und beta, um unnötige Pfade auszulassen. maximizingPlayer=True gibt an, ob der Spieler seinen Vorteil maximiert.

Listing 6.2: Alpha-Beta Algorithmus - Überblick

```
# Alpha-Beta Algorithmus in Aktion
bester_Zug = alpha_beta(board, Tiefe=4, alpha=-float('inf'), beta=
  float('inf'), maximizingPlayer=True)
print(f"Bester Zug: Spalte {bester_Zug}")
```

5. Entscheidung für den besten Zug

Im fünften Schritt geht es darum, den optimalen Zug für den aktuellen Spieler zu finden. Dazu werden alle möglichen Züge angeschaut und mithilfe dem Alpha-Beta-Algorithmus bewertet. Der Zug, der am besten abschneidet – je nachdem, ob der Spieler versucht, seinen Punktestand zu maximieren oder zu minimieren – wird dann ausgewählt. Dieser Schritt ist entscheidend für die Entscheidungsfindung und markiert das Ende der Analyse des Spielbaums.

Listing 6.3: Entscheidung für den besten Zug - Überblick

```
# Grober Aufbau der Funktion zur Zugentscheidung
def bester_zug(board, tiefe, spieler):
bester_wert = float('-inf') if spieler == 1 else float('inf')
beste_spalte = None

for spalte in gueltige_zuege(board):
zug_wert = alpha_beta(anwenden_zug(brett, spalte, spieler), tiefe - 1,
    -float('inf'), float('inf'), False)
if (spieler == 1 und zug_wert > bester_wert) or (spieler == -1 und
    zug_wert < bester_wert):
bester_wert = zug_wert
beste_spalte = spalte

return beste_spalte
```

– Die Funktion `bester_zug` ist darauf ausgelegt, den besten Zug für einen Spieler zu bestimmen.

– `gueltige_zuege(board)` gibt alle gültigen Spalten zurück, in die ein Stein gesetzt werden kann.

– `anwenden_zug(board, spalte, spieler)` simuliert das Setzen eines Steins in eine bestimmte Spalte.

– Der *alpha-beta*-Algorithmus wird auf das simulierte Spielfeld angewendet, um die Bewertung des Zugs zu berechnen.

– Der Spieler wählt den Zug mit der höchsten Bewertung (für Maximierer) oder der niedrigsten Bewertung (für Minimierer).

5. Endzustände erkennen

Für die Auswertung der Endzustände wird eine Funktion benötigt, um festzustellen, ob das Spiel vorbei ist. Es können zwei Endzustände eintreffen:

– Einer der Spieler hat 4 Steine in einer Reihe.

– Das Spielfeld ist voll.

Die Funktion Endzustand_erreicht überprüft, ob ein Endzustand in einem Spiel erreicht wurde, indem sie zwei Bedingungen prüft: ob ein Spieler gewonnen hat (über die Funktion Spieler_gewinnt) oder ob das Spielfeld voll ist (über die Funktion Board_voll).

Listing 6.4: Erkennung des Endzustands

```
def Endzustand_erreicht(board):
return Spieler_gewinnt(board) or Board_voll(board[0][spalte] != 0 for
    spalte in range(7))
```

7. Spielstrategie optimieren

Nach dem Programmieren der Spielstrategien steht die Optimierung im Vordergrund. Um die Effizienz zu steigern, sollten Suchtiefe und Zeitlimit angepasst werden.

Die **Suchtiefe** kann je nach **Rechenleistung** variiert werden, um ein gutes Gleichgewicht zwischen der Tiefe des Spielbaums und der benötigten Rechenzeit zu finden. Da der Algorithmus auf einem LEGO Spike Roboter läuft, ist die Rechenzeit begrenzt. Daher ist es sinnvoll, eine Tiefensuche zu implementieren, die es ermöglicht, innerhalb eines festgelegten Zeitlimits die bestmögliche Tiefe zu erreichen [HIN19].

7 Zusammenfassung

Die spieltheoretische Analyse von 4Gewinnt hat gezeigt, dass das Spiel trotz seiner scheinbaren Einfachheit eine hohe strategische Tiefe besitzt. Durch die Anwendung von Algorithmen wie Minimax und dessen Optimierung durch den Alpha-Beta-Algorithmus können optimale Entscheidungen getroffen werden, um entweder zu gewinnen oder ein Unentschieden zu erzwingen. Aber auch verschiedene Strategien haben einen Einfluss auf den Spielverlauf.

Der Alpha-Beta-Algorithmus ist hierbei besonders hervorzuheben, da er durch die effiziente Kürzung des Suchbaums eine präzise Analyse in kürzerer Zeit ermöglicht. Diese Eigenschaft ist für die praktische Umsetzung auf ressourcenbeschränkten Systemen wie dem LEGO SPIKE Roboter entscheidend. Der Algorithmus gewährleistet, dass der Roboter in der Lage ist, komplexe Spielsituationen in Echtzeit zu bewerten und optimale Züge zu berechnen.

Mit den gewonnenen Erkenntnissen aus der Spieltheorie und ist nun der Grundstein für den zweiten Teil dieser Studienarbeit gelegt. In diesem Teil wird ein Programm entwickelt, das den Alpha-Beta-Algorithmus implementiert und mit der Hardware des LEGO SPIKE Roboters zusammenarbeitet.

Literaturverzeichnis

[50P25] 50PLUS. *Vier Gewinnt - Online Spiele*. Online; abgerufen am 1. Januar 2025. 50PLUS, 2025. URL: https://www.50plus.de/spiele/vier-gewinnt.html.

[Abe25] AbeBooks. *Bild MD30859713347*. Image. Online; abgerufen am 1. Januar 2025. AbeBooks, 2025. URL: https://pictures.abebooks.com/inventory/md/md30859713347.jpg.

[Cah24] Lauren Cahn. *How to Win Connect 4 Every Time, According to the Computer Scientist Who Solved It*. 2024. URL: https://www.rd.com/article/how-to-win-connect-4/ (besucht am 10. 01. 2025).

[Che24] James Chen. *Nash Equilibrium: What It Is, How It Works, Example, Limitations*. 2024. URL: https://www.investopedia.com/terms/n/nash-equilibrium.asp (besucht am 10. 01. 2025).

[Ein14] Johanna Einsiedler. „Spieltheorie: Bimatrixspiele und deren praktische Anwendung“. Fachbereichsarbeit. St. Pölten: Mary Ward Privatgymnasium und Oberstufenrealgymnasium St. Pölten, 2014. URL: https://www.oemg.ac.at/Mathe-Brief/fba2014/Spieltheorie_Einsiedler.pdf.

[Fas24] FasterCapital. *Den Code knacken: Rückwärtsinduktion und Payoff-Matrix-Analyse*. FasterCapital. 2024. URL: https://fastercapital.com/de/inhalt/Den-Code-knacken--Rueckwaertsinduktion-und-Payoff-Matrix-Analyse.html (besucht am 05. 01. 2025).

[Gam25] Gameorama. *4 Gewinnt*. Spielmuseum Timeline. Gameorama, 2025. URL: https://www.gameorama.ch/de/museum/spielmuseum/timeline/gewinnt (besucht am 01. 01. 2025).

[Has20] SA Hasbro. *Das Originale 4Gewinnt Anleitung*. Hasbro Gaming, 2020.

[HIN19] Manfred J. Holler, Gerhard Illing und Stefan Napel. *Einführung in die Spieltheorie*. de. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2019. ISBN: 978-3-642-31962-4 978-3-642-31963-1. DOI: 10.1007/978-3-642-31963-1. URL: http://link.springer.com/10.1007/978-3-642-31963-1 (besucht am 08.01.2025).

[Kru16] Patrick M. Krusenotto. „Anwendungsbeispiel 3: Vier Gewinnt". de. In: *Funktionale Programmierung und Metaprogrammierung*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2016, S. 125–161. ISBN: 978-3-658-13743-4 978-3-658-13744-1. DOI: 10.1007/978-3-658-13744-1_10. URL: http://link.springer.com/10.1007/978-3-658-13744-1_10 (besucht am 10.01.2025).

[MLW08] Burkhard Monien, Ulf Lorenz und Daniel Warner. „Der Alphabeta-Algorithmus für Spielbäume: Wie bringe ich meinen Computer zum Schachspielen?" de. In: *Taschenbuch der Algorithmen*. Hrsg. von Berthold Vöcking u. a. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008, S. 285–294. ISBN: 978-3-540-76394-9. DOI: 10.1007/978-3-540-76394-9_28. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-540-76394-9_28 (besucht am 10.01.2025).

[Mül11] Markus Müller. „Seminararbeitaus dem Fach Mathematik". de. In: (2011). URL: https://www.edu.sot.tum.de/fileadmin/w00bed/edu/Schuelerkonferenz/Seminararbeiten_2012/mueller_markus_2012.pdf (besucht am 18.12.2024).

[Rui+09] Benjamin Ruile u. a. *Vier Gewinnt*. Vorlesung Spieltheorie. Ludwig-Maximilians-Universität München, 2009. URL: https://www.mathematik.uni-muenchen.de/~spielth/artikel/VierGewinnt.pdf.

[Sie] Dr. Markus Siepermann. *Normalform*. SpringerGabler. URL: https://wirtschaftslexikon.gabler.de/definition/normalform-39481 (besucht am 08.01.2025).

[Thi12] Markus Thill. „Reinforcement Learning mit N-Tupel-Systemen für Vier Gewinnt". Bachelor's Thesis. Gummersbach: Technische Hochschule Köln, Juni 2012. URL: https://www.gm.th-koeln.de/~konen/research/PaperPDF/Bachelorarbeit%20Thill-2012.pdf.

[Uni15] Cornell University. *Solving Connect Four with Game Theory*. Accessed on 10 January 2025. Cornell University. 2015. URL: https://blogs.cornell.edu/info2040/2015/09/21/solving-connect-four-with-game-theory/ (besucht am 10.01.2025).

[Van17] Gilles Vandewiele. *Creating the (nearly) perfect connect-four bot with limited move time and file size*. Accessed: 2025-01-09. 2017. URL: https://towardsdatascience.com/creating-the-perfect-connect-four-ai-bot-c165115557b0 (besucht am 09. 01. 2025).

[Wik23a] Wikipedia. *Alpha-Beta-Suche*. https://de.wikipedia.org/wiki/Alpha-Beta-Suche. Zugriff am 20. Oktober 2023. 2023.

[Wik23b] Wikipedia contributors. *Minimax-Algorithmus*. https://de.wikipedia.org/wiki/Minimax-Algorithmus. [Online; abgerufen am 30. Oktober 2023]. 2023. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Minimax-Algorithmus.

[Wik25] Wikipedia-Autoren. *Vier gewinnt*. Online; abgerufen am 1. Januar 2025. Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, 2025. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Vier_gewinnt.

[Win19] Stefan Winter. *Grundzüge der Spieltheorie*. Abgerufen am 2025-01-10. 2019.

[YGJ22] Justin Yokota, Dan Garcia Ed. und James James Demmel Ed. *High Efficiency Computation of Game Tree Exploration in Connect 4*. Techn. Ber. UCB/EECS-2022-219. Electrical Engineering und Computer Sciences, University of California, Berkeley, Aug. 2022. URL: https://www2.eecs.berkeley.edu/Pubs/TechRpts/2022/EECS-2022-219.pdf.

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

A Nutzung von Künstliche Intelligenz basierten Werkzeugen

Im Rahmen dieser Arbeit wurden Künstliche Intelligenz (KI) basierte Werkzeuge benutzt. Tabelle 1.1 gibt eine Übersicht über die verwendeten Werkzeuge und den jeweiligen Einsatzzweck.

Tabelle 1.1: Liste der verwendeten KI basierten Werkzeuge

Werkzeug	**Beschreibung der Nutzung**
ChatGPT	– Grundlagenrecherche zu Spieltheorie
Perplexity	– Grundlagenrecherche zu Spieltheorie – Formulierungshilfe
DeepL	– Unterstützung beim Übersetzung von Abstract
Languagetool	– Formulierungshilfe – Rechtschreibkorrektur