Realisierung eines Vier-Gewinnt Roboter

Mithilfe von Lego Spike und Mirco Python

Studienarbeit T3_3100

Studiengang Elektrotechnik

Studienrichtung Automation

Duale Hochschule Baden-Württemberg Ravensburg, Campus Friedrichshafen

von

Patrik Peters / Simon Gschell

Abgabedatum:	8. Januar 2025
Bearbeitungszeitraum:	10.10.2024 - 13.06.2025
Matrikelnummer:	187 /0815
Kurs:	TEA22
Betreuerin / Betreuer:	Prof. Dr. ing Thorsten Kever

Erklärung

gemäß Ziffer 1.1.14 der Anlage 1 zu §§ 3, 4 und 5 der Studien- und Prüfungsordnung für die Bachelorstudiengänge im Studienbereich Technik der Dualen Hochschule Baden-Württemberg vom 29.09.2017 in der Fassung vom 24.07.2023.

Ich versichere hiermit, dass ich meine Studienarbeit T3_3100 mit dem Thema:

Realisierung eines Vier-Gewinnt Roboter

selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Ich versichere zudem, dass die eingereichte elektronische Fassung mit der gedruckten Fassung übereinstimmt.

Musterstadt, den 8. Januar 2025

Patrik Peters / Simon Gschell

Kurzfassung

In der vorliegenden Studienarbeit wird die Entwicklung eines Roboters für das Spiel „Vier gewinnt“ unter Verwendung des LEGO Spike Prime Systems behandelt. Ziel des Projekts ist es, einen Roboter zu entwerfen, der in der Lage ist, autonom die Rolle eines menschlichen Gegners im Spiel „Vier gewinnt“ zu übernehmen. Der Roboter soll nicht nur die Spielzüge des menschlichen Mitspielers erkennen und darauf reagieren, sondern auch selbstständig Spielsteine in das Spielfeld einwerfen und sicherstellen, dass das Spielfeld für den nächsten Zug bereit ist. Dies erfordert eine präzise Steuerung des Roboters, insbesondere beim Platzieren der Spielsteine, sowie die Fähigkeit, das Spielfeld zu überwachen, um die Position der bereits gesetzten Steine zu erkennen. Das Projekt umfasst verschiedene technische und organisatorische Aspekte. Dazu gehört die mechanische Konstruktion des Roboters, einschließlich des Mechanismus zum Einwerfen der Spielsteine und die Überwachung des Spielfelds, sowie die Entwicklung der Software, die die Spielzüge und das Verhalten des Roboters steuert. Ein weiterer wichtiger Punkt ist die Sensorik: Der Roboter muss in der Lage sein, die aktuelle Spielsituation durch Farbsensoren zu erfassen, um zu wissen, welche Felder im Spielfeld bereits besetzt sind und wo er seinen nächsten Spielstein platzieren kann. Zum Abschluss des Projekts wird ein kleines Turnier organisiert, bei dem die von verschiedenen Teams entwickelten Roboterlösungen gegeneinander antreten. Dies bietet die Möglichkeit, den Roboter unter realen Bedingungen zu testen und seine Fähigkeiten im direkten Vergleich mit den Lösungen der anderen Kommilitonen zu messen. Um zusätzliche Motivation zu schaffen, wird die beste Lösung am Ende prämiert, was den Wettbewerbsgedanken fördert und den Anreiz erhöht eine effektive Lösungen zu entwickeln.

Abstract

This student research project deals with the development of a robot for the game "Four Wins" using the LEGO Spike Prime system. The aim of the project is to design a robot that is capable of autonomously assuming the role of a human opponent in the game "Four Wins". The robot should not only recognize the moves of the human opponent and react to them, but also independently place pieces on the playing field and ensure that the playing field is ready for the next move. This requires precise control of the robot, especially when placing the pieces, as well as the ability to monitor the playing field in order to recognize the position of the pieces already placed. The project involves various technical and organizational aspects. These include the mechanical design of the robot, including the mechanism for inserting the tiles and monitoring the playing field, as well as the development of the software that controls the moves and behavior of the robot. Another important point is the sensor technology: the robot must be able to detect the current game situation using color sensors in order to know which squares in the playing field are already occupied and where it can place its next piece. At the end of the project, a small tournament is organized in which the robot solutions developed by different teams compete against each other. This offers

Translated with DeepL.com (free version)

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

2 Grundlagen des Spiels Vier Gewinnt

Im Kapitel Grundlagen wird auf die Regeln des Spiels, sowie auf den geschichtlichen Hintergrund als auch die mathematischen Eigenschaften des Spiels 4Gewinnt genauer eingegangen.

2.1 Spielregeln und Spielablauf

Das originale Spiel 4Gewinnt besteht aus einer Rasterwand mit sechs Zeilen und sieben Spalten, also 42 Löchern. Außerdem besteht es aus 21 roten Spielchips und 21 gelben Spielchips. 4Gewinnt lässt sich nur zu zweit spielen. Ziel des Spieles ist es, vier Spielchips einer Farbe in eine Reihe (waagrecht, senkrecht oder diagonal) zu bringen. Der jüngste Spieler beginnt das Spiel. Der Spieler, der an der Reihe ist, wirft einen Spielstein seiner Farbe durch die Öffnung der Rasterwand, wo durch der gespielte Stein auf den untersten freien Platz in der Spalte fällt. Danach ist der andere Spieler an der Reihe. Die Spieler werfen so lange ihre Spielchips in das Raster, bis einer das Ziel erreicht hat oder alle 42 Felder belegt sind. Für den Fall, dass alle 42 Felder des Rasters belegt sind, endet das Spiel unentschieden. Um ein neues Spiel zu starten, muss ein Spieler die Steine aus dem Raster fallen lassen. Diese werden dann wieder unter den Spielern aufgeteilt und eine neue Runde 4Gewinnt kann beginnen[Has20].

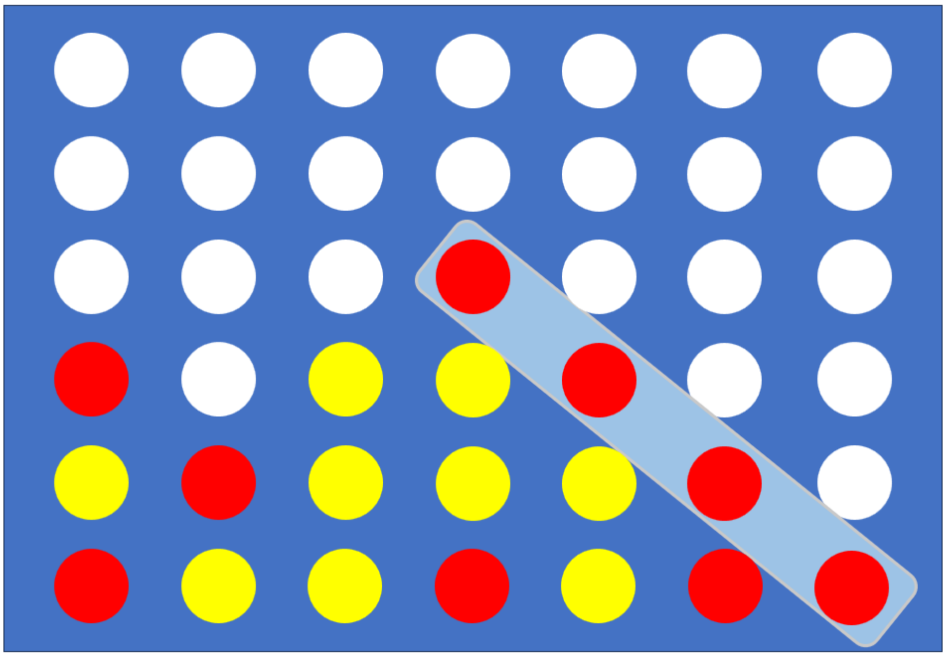


Abbildung 2.1: Vier rote Steine diagonal im Raster

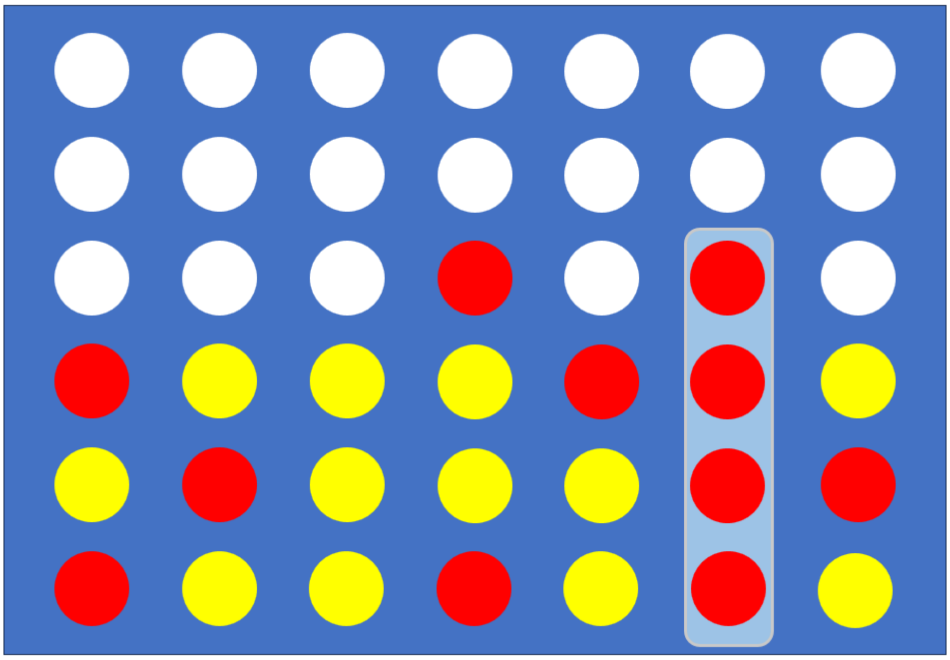


Abbildung 2.2: Vier rote Steine senkrecht im Raster

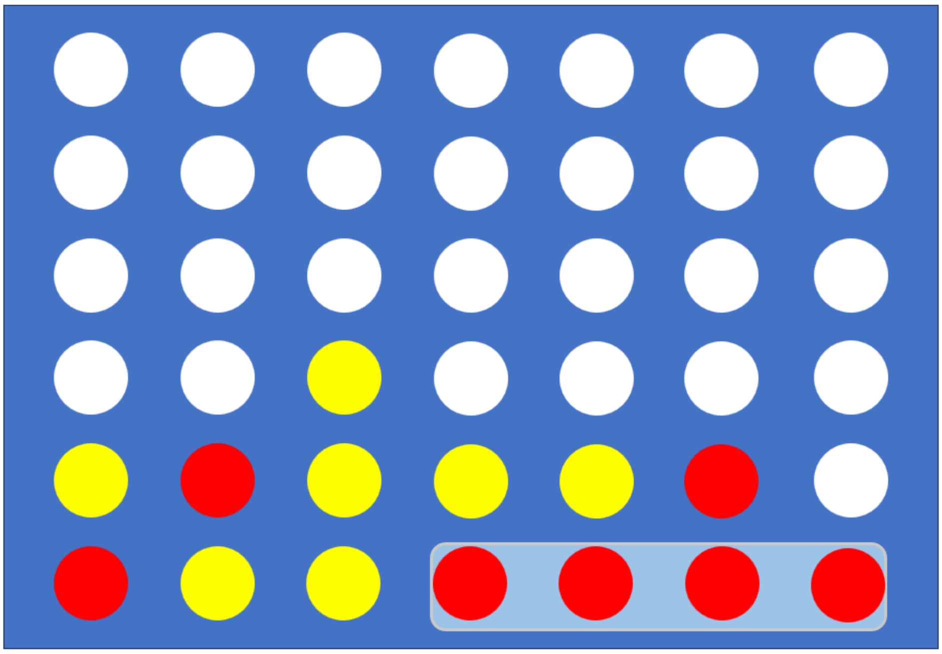


Abbildung 2.3: Vier rote Steine waagrecht im Raster

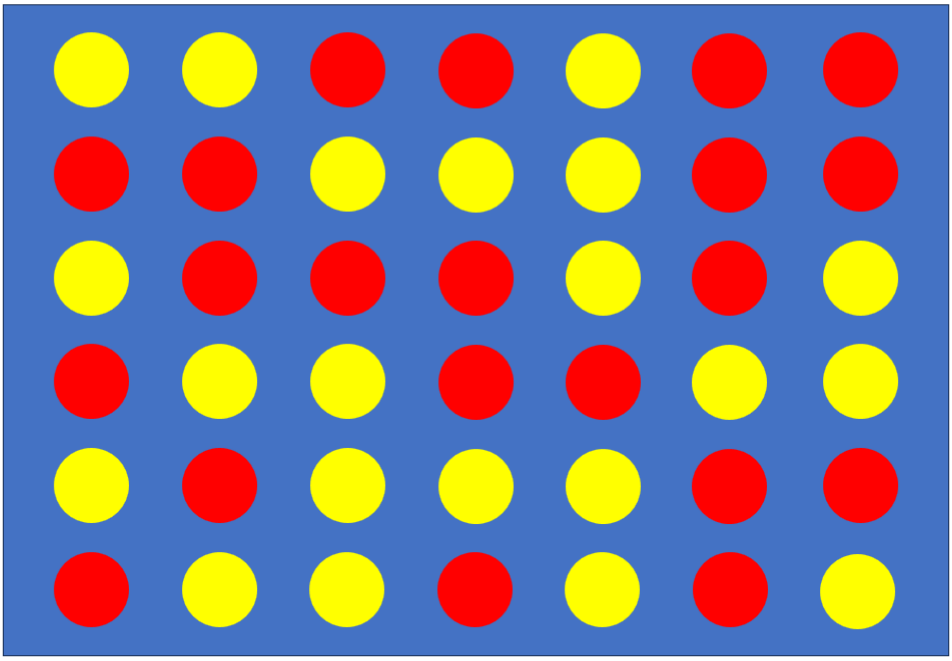


Abbildung 2.4: Unentschieden - es kam keine vierer Reihe zustande

2.2 Historischer Hintergrund

Vier Gewinnt wurde 1973 von Howard Wexler und Ned Strongin entwickelt. Noch im selben Jahr lizenzierten die beiden Erfinder das Spiel an die Firma Milton Bradley, im deutschsprachigen Raum besser bekannt als „MB Spiele" [Gam25][Wik25]. Im darauffolgenden Jahr 1974 wurde das Spiel Vier Gewinnt von Milton Bradley veröffentlicht und in den Handel gebraucht. Das Spiel entwickelte sich seitdem zu einem der bekanntesten und beliebtesten Strategiespiele [Wik25]. Tatsächlich entwickelt es sich sogar zu einem echten Klassiker. Das Spiel ist beliebt bei Jung und Alt, da es recht leicht zu erlernen ist. Vier Gewinnt fördert die Konzentration und das logische Denken [50P25].

Im Jahr 1967 erschien in den USA eine dreidimensionale Variante vom Spiel Vier Gewinnt, unter dem Namen „Score Four". In Deutschland brauchte die Firma Ravensburger 1974 eine dreidimensionale Variante mit dem Namen „Sogo" auf den Markt. (siehe Abbildung:2.5) 1988 wurde das Spiel von Victor Allis und James D. Allen nahezu gleichzeitig und unabhängig voneinander vollständig gelöst. Die Beiden haben mathematisch bewiesen, dass der erste Spieler bei fehlerfreiem Spiel immer gewinnen kann, wenn er den ersten Stein in der mittleren Spalte platziert.[Wik25].

Abbildung 2.5: dreidimensionale Variante „Sogo" von Ravensburger

2.3 Mathematische Eigenschaften des Spiels

Das Spiel 4Gewinnt weist mehrere mathematische Eigenschaften auf. Diese sind für eine Analyse des Spiels von Bedeutung. Das Strategiespiel ist ein Zwei-Personen-Nullsummenspiel. Das bedeutet, es spielen zwei Teilnehmer gegeneinander. Beide Spieler haben während des Spiels immer die volle Information über den Spielstand. Wenn einer von beiden gewinnt, bedeutet das gleichzeitig, dass der andere verloren hat. Trotz der simplen Spielregeln ist vier Gewinnt dennoch recht komplex. Grund dafür die vielen möglichen Spielstellungen, es gibt nämlich ca. 4,5 Billionen mögliche Spielstellungen. Diese enorm hohe Anzahl an möglichen Spielstellungen kommt durch das Spielfeld mit sieben Spalten und sechs Reihen zustande. Die Komplexität des Baumdiagramms liegt bei etwa 10^{21}, was eine vollständige Analyse des Spielbaums sehr rechenintensiv macht [Rui+09].

Das Lösen des Spiels Vier Gewinnt basiert auf verschiedenen mathematischen Techniken. Zum einen gibt es die Anwendung des Zermelo-Bestimmtheitssatzes. Dieser besagt, dass entweder Spieler 1, Spieler 2 oder kein Spieler die Partie gewinnt. Im Kapitel 6.1 wird näher auf den Bestimmtheitssatz eingegangen wird.
Eine weite Technik zur Analyse ist die Anwendung der Rückwärtsinduktion. Die Rückwärtsinduktion beginnt an der aktuellen Position und arbeitet sich zum Anfang zurück. Hierbei werden für jeden Spielzug die optimalen Entscheidungen der Spieler analysiert, unter der Berücksichtigung aller möglichen Züge. Am Ende dieses Prozesses steht das beste Ergebnis für den beginnenden Spieler [Mül11].
Die Rückwärtsinduktion wird durch die Payoff-Matrix-Analyse ergänzt. Das grundlegende Konzept der Payoff-Matrix-Analyse bietet eine Möglichkeit zur Darstellung strategischer Interaktionen und Entscheidungen dar [Fas24].

		Spieler 2		
		Zentrum	Rand	Defensiv
Spieler 1	Zentrum	$(0,0)$	$(1,-1)$	$(0,0)$
	Rand	$(-1,1)$	$(0,0)$	$(-1,1)$
	Defensiv	$(0,0)$	$(1,-1)$	$(0,0)$

Abbildung 2.6: Payoff-Matrix für Vier gewinntt

Legende der Payoff-Matrix

Rot = Spieler 1, Blau = Spieler 2,

1=Vorteil, 0=Neutral, -1=Verlust

3 Spieltheoretische Grundlagen

3.1 Definition und Konzepte der Spieltheorie

Die Spieltheorie ist ein Teilgebiet der Mathematik, das strategische Entscheidungen in Konflikt- oder Kooperationssituationen analysiert. Ein Spiel besteht dabei aus mehreren Elementen: den Spielern, den möglichen Zügen, den Regeln und dem Ergebnis. Ziel der Spieltheorie ist es, optimale Strategien zu entwickeln und die möglichen Ergebnisse eines Spiels vorherzusagen, wenn die Spieler rational handeln.

Grundelemente eines Spiels

1. **Spieler:** Die Teilnehmer eines Spiels, die Entscheidungen treffen. Es können zwei oder mehr Spieler beteiligt sein.

2. **Strategien:** Die Handlungsoptionen, die den Spielern zur Verfügung stehen, um ihre Ziele zu erreichen.

3. **Regeln:** Die Struktur des Spiels, die die möglichen Züge, die Abfolge der Züge und die Bedingungen für den Spielausgang definiert.

4. **Auszahlungen:** Die Ergebnisse des Spiels, die jedem Spieler für eine bestimmte Kombination von Strategien zugeordnet werden. Diese können in Form von Gewinnen, Verlusten oder Nutzen gemessen werden.

5. **Informationen:** Spiele unterscheiden sich darin, ob die Spieler über vollständige Information verfügen (d. h., alle Züge sind sichtbar) oder ob es Elemente von Unsicherheit gibt (z. B. verdeckte Karten oder Würfelergebnisse).

3.2 Klassifikation von Spielen

In der Spieltheorie werden Spiele anhand bestimmter Kriterien klassifiziert, um ihre Struktur, Dynamik und Lösbarkeit besser zu verstehen. Die wichtigsten Kategorien, die zur Einordnung dienen, sind nachfolgend dargestellt.

1. **Anzahl der Spieler**

    - **Zwei-Personen-Spiele**: Spiele mit genau zwei Spielern. Diese sind besonders häufig Gegenstand spieltheoretischer Analysen.

    - **Mehrspieler-Spiele**: Spiele mit drei oder mehr Teilnehmern. Die Strategien sind komplexer, da Koalitionen und wechselnde Allianzen eine Rolle spielen können.

2. **Spielzüge: Gleichzeitige vs. aufeinanderfolgende Entscheidungen**

    - **Simultane Spiele**: Beide Spieler treffen ihre Entscheidungen gleichzeitig, ohne die Wahl des Gegners zu kennen. Solche Spiele werden häufig in der Normalform (Matrix-Darstellung) analysiert.

    - **Sequentielle Spiele**: Die Spieler führen ihre Züge nacheinander aus und können auf die vorherigen Züge des Gegners reagieren. Solche Spiele werden in der Extensivform (Baumdiagramm) dargestellt, um die Reihenfolge der Züge und die Entscheidungsmöglichkeiten zu visualisieren.

3. **Informationen der Spieler**

    - **Spiele mit vollständiger Information**: Alle Spieler kennen die bisherigen Züge und den aktuellen Spielzustand. In solchen Spielen können optimale Strategien durch Rückwärtsinduktion berechnet werden.

    - **Spiele mit unvollständiger Information**: Mindestens ein Spieler hat keine vollständigen Informationen über den Spielzustand oder die Strategie des Gegners. Dies führt zu Unsicherheiten bei der Entscheidungsfindung.

4. **Kooperative vs. nicht-kooperative Spiele**

- **Kooperative Spiele**: Spieler können Allianzen bilden und gemeinsam agieren, um einen Vorteil zu erzielen. Die Ergebnisse werden durch Verhandlungen und Absprachen beeinflusst.

- **Nicht-kooperative Spiele**: Jeder Spieler agiert unabhängig und verfolgt ausschließlich seine eigenen Ziele.

5. **Gewinnstruktur: Nullsummenspiele vs. Nicht-Nullsummenspiele**

   - **Nullsummenspiele**: Der Gewinn eines Spielers entspricht exakt dem Verlust des anderen. Solche Spiele sind konfliktorientiert, da ein Vorteil für einen Spieler immer einen Nachteil für den anderen bedeutet.

   - **Nicht-Nullsummenspiele**: Die Gewinne und Verluste der Spieler sind nicht zwangsläufig gleich. In solchen Spielen können Kooperationen oder geteilte Gewinne auftreten.

6. **Deterministische vs. stochastische Spiele**

   - **Deterministische Spiele**: Es gibt keine Zufallselemente; der Spielverlauf wird allein durch die Entscheidungen der Spieler bestimmt.

   - **Stochastische Spiele**: Zufallselemente wie Würfel oder Karten beeinflussen den Spielverlauf, was zusätzliche Unsicherheiten schafft.

7. **Endliche vs. unendliche Spiele**

   - **Endliche Spiele**: Die Anzahl der möglichen Spielzustände und Züge ist begrenzt. Solche Spiele können vollständig analysiert und optimal gelöst werden.

   - **Unendliche Spiele**: Spiele mit potenziell unbegrenzten Spielzügen oder Zuständen, bei denen keine vollständige Analyse möglich ist.

Das 4 gewinnt Spiel ist ein kombinatorisches Spiel. Sie bieten einen idealen Rahmen, um Strategien, Entscheidungsfindung und Spieltheorie zu untersuchen. Auch weitere Spiele wie Schach, Dame, Mühle und Tic-Tac-Toe sind ebenfalls kombinatorische Spiele.
Diese folgende fünf Eigenschaften machen ein kombinatorisches Spiel aus:

1. **Zwei-Spieler-Struktur:** Kombinatorische Spiele sind auf zwei Spieler beschränkt,

die abwechselnd Züge machen. Dies ermöglicht eine klare Analyse von Strategien und Gegenstrategien.

2. **Nullsummencharakter:** Der Gewinn eines Spielers entspricht exakt dem Verlust des anderen. Dies führt zu einer antagonistischen Spielsituation, in der die Interessen der Spieler direkt gegeneinander stehen.

3. **Endlichkeit:** Die begrenzte Anzahl von Zugmöglichkeiten und die Unmöglichkeit unendlicher Spielverläufe garantieren, dass jedes Spiel zu einem Abschluss kommt.

4. **Perfekte Information:** Beide Spieler haben zu jedem Zeitpunkt vollständige Kenntnis über den Spielstand. Dies eliminiert Unsicherheiten, die in Spielen mit verborgenen Informationen auftreten würden.

5. **Determinismus:** Der Ausschluss von Zufallselementen macht das Spiel vollständig vorhersehbar, sofern die Strategien der Spieler bekannt sind.

Durch diese genannten fünf Eigenschaften werden kombinatorische Spiele auch ëndliches ZweiPersonen-Nullsummenspiel mit perfekter Information"genannt.

3.3 Relevante spieltheoretische Konzepte für Vier Gewinn

Mit Kapitel 3.2 wurde dargestellt, dass das 4Gewinnt ein strategisches Zwei-Personen-Spiel mit vollständiger Information ist und somit mithilfe der Spieltheorie analysieren lässt. Einige zentrale Konzepte der Spieltheorie sind besonders relevant, um die Dynamik und Strategien von 4Gewinnt zu verstehen:

Dominante Strategien:

- Eine Strategie ist dominant, wenn sie unabhängig von den Zügen des Gegners optimal ist.

- Im Spiel *Vier Gewinnt* existieren situationsabhängige dominante Strategien.

- Die Kontrolle der Mittelspalte gilt als teilweise dominante Strategie, da sie zentrale taktische und strategische Vorteile bietet.

Gleichgewichtskonzepte:

- **Nash-Gleichgewicht**: Ein Zustand, in dem keine Partei durch einseitiges Abweichen ihre Position verbessern kann.
- **Teilspielperfekte Gleichgewichte**: Strategien, die in allen Teilspielen optimal sind.
- **Minimax-Prinzip**: Eine Methode, bei der der Spieler versucht, den maximal möglichen Verlust zu minimieren.

Strategische Tiefe:

- Vorausschauendes Spiel über mehrere Züge ist entscheidend für den Erfolg.
- Erkennung und gezielte Nutzung von Zwangszügen und Zugfolgen.
- Aufbau von Drohpotentialen sowie deren effektive Abwehr.

Positionsbewertung:

- Bewertung von Spielstellungen nach strategischen Kriterien zur Einschätzung der Spielstärke.
- Identifikation kritischer Positionen, die über den Spielausgang entscheiden können.
- Analyse von Gewinnmustern und Drohungen, um mögliche Spielstrategien zu entwickeln.

Zugzwang-Situationen:

- Zugzwang beschreibt Situationen, in denen jeder mögliche Zug die eigene Position verschlechtert.
- Solche Situationen haben eine hohe strategische Bedeutung für die Spielführung.

- Methoden zur gezielten Herbeiführung von Zugzwang sind entscheidend, um den Gegner in eine nachteilige Lage zu bringen.

4 Analyse von Vier Gewinnt aus spieltheoretischer Sicht

Die spieltheoretische Analyse des Spiels Vier Gewinnt erfordert eine systematische Untersuchung verschiedener strategischer Komponenten und mathematischer Aspekte. Im Folgenden Kapitel „Analyse von Vier Gewinnt aus spieltheoretischer Sicht” werden die wesentlichen Elemente dieser Analyse detailliert dargestellt.

4.1 Darstellung des Spiels in Normalform

In der Normalform-Darstellung oder auch Normalform genannt, wird das Spiel als Zwei-Personen-Nullsummenspiel charakterisiert. Das bedeutet, wenn ein Spieler gewinnt ,verliert der andere automatisch . Das Spiel wird in der Normalform rein statisch beschrieben und besteht allgemein aus folgenden Elementen[Sie]:

- Einer Menge Spieler $(I = 1, ..., i, ..., n)$
  Der Wert I gibt die Anzahl der Teilnehmer an.

- Für jeden Spieler i eine Menge von Strategien (S_i)
  (S_i) entspricht der Strategiemenge des Spielers$i$, aus dieser er seine Züge wählen kann.

- Für jeden Spieler i eine Auszahlungsfunktion/ Nutzenfunktion (u_i)
  Hierbei wird jeder möglichen Strategiekombination aller Spieler einen reellen Zahlenwert zugeordnet.

$$u_i = \sum S_i \to \mathbb{R}^n \tag{4.1}$$

Ist die Normalform endlich und überschaubar, kann sie auch in einer Matrix dargestellt werden. Die Matrix muss dabei die verschiedenen Spielsituationen und deren Ausgänge abbilden, wobei jeder Spieler in seiner Zugfolge bis zu sieben verschiedene Strategien pro Zug zur Verfügung hat. Durch die sehr große Anzahl an Strategien ist es nicht mehr überschaubar.

4.2 Darstellung des Spiels in Extensivform

Der Spielbaum in der Extensivform zeigt die sequentielle Struktur des Spiels. Jeder Knoten repräsentiert eine Spielsituation, von der aus verschiedene Zugmöglichkeiten ausgehen. Die Teilspielanalyse ermöglicht es, einzelne Spielsituationen isoliert zu betrachten und optimale Strategien zu entwickeln5 . Bei perfektem Spiel beider Spieler ergeben sich dabei klare Strukturen, die durch den Zermelo'schen Bestimmtheitssatz beschrieben werden können

4.3 Strategien und Gleichgewichte

Die Analyse der Strategien zeigt, dass es im Vier Gewinnt dominante Strategien gibt. Nach dem Zermelo'schen Bestimmtheitssatz lässt sich das Spiel in eine von drei Kategorien einordnen, wobei sich herausgestellt hat, dass der erste Spieler eine dominante Strategie besitzt5 . Die Nash-Gleichgewichte manifestieren sich in den optimalen Zugfolgen, wobei die Kontrolle der zentralen Spalten eine entscheidende Rolle spielt2 .

4.4 Komplexität des Spielbaums

Die Komplexität des Spielbaums ist beträchtlich. Der Verzweigungsfaktor wird durch die sieben möglichen Züge pro Spielsituation bestimmt, wobei sich die Komplexität mit jeder Erhöhung der Baumtiefe multipliziert2 . Die computationellen Herausforderungen ergeben sich aus der Notwendigkeit, große Mengen von Spielzuständen zu analysieren und zu bewerten. Dabei müssen bestimmte Verhaltensregeln der Spieler berücksichtigt werden, wie etwa das sofortige Nutzen von Gewinnmöglichkeiten und das Verhindern gegnerischer Gewinnzüge2 . Die Analyse zeigt, dass trotz der scheinbaren Einfachheit der Spielregeln eine erhebliche mathematische Komplexität vorliegt. Die praktische Implementierung optimaler Strategien erfordert daher sowohl theoretisches Verständnis als auch effiziente Algorithmen zur Bewältigung des großen Zustandsraums. Besonders die Kontrolle strategisch wichtiger Positionen und die Fähigkeit, mehrere Züge vorauszudenken, sind entscheidend für den Spielerfolg2 .

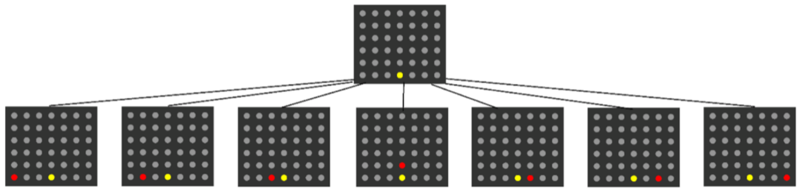


Abbildung 4.1: Spielbaum nach der 2. Tiefe

5 Lösungsansätze für Vier Gewinnt

5.1 Optimale Strategien

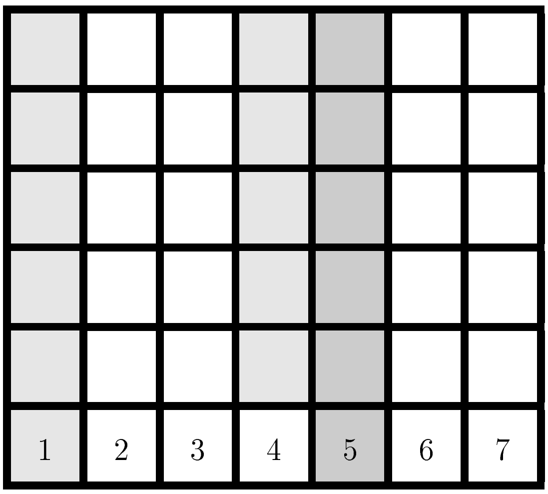
Die spieltheoretische Analyse von „Vier Gewinnt“ offenbart eine Reihe von strategischen Prinzipien und optimalen Spielweisen, die das Verständnis dieses Spiels vertiefen und präzise Strategien für Spieler ermöglichen. Diese Erkenntnisse basieren sowohl auf grundlegenden strategischen Prinzipien als auch auf fortgeschrittenen taktischen Elementen, die im Verlauf des Spiels entscheidend sind.

Zu den grundlegenden strategischen Prinzipien gehört vor allem die Bedeutung der Startposition. Es ist nachgewiesen, dass der erste Spieler bei perfektem Spiel immer gewinnen kann, vorausgesetzt, er wählt die optimale Eröffnung. Diese besteht darin, den ersten Stein in die mittlere Spalte zu setzen. Diese Eröffnung bietet die beste Kontrolle über das Spielfeld und erhöht die Möglichkeiten für offensive und defensive Züge in den folgenden Spielphasen. Züge in die benachbarten Spalten (d.h. die zweite oder sechste Spalte) führen bei optimaler Spielweise beider Spieler hingegen zu einem Remis. Alle anderen Eröffnungszüge gelten als suboptimal und führen bei perfektem Gegenspiel unweigerlich zur Niederlage des ersten Spielers.

Ein weiteres zentrales Prinzip ist die Zentrumsbeherrschung, die eine essenzielle Rolle spielt. Die Kontrolle der mittleren drei Spalten (insbesondere der Spalten c, d und e) ist von strategischer Bedeutung, da sie die größten Möglichkeiten für horizontale, vertikale und diagonale Gewinnreihen bieten. Besonders die Spalten b und f – die zweite und vorletzte Spalte – besitzen ebenfalls strategisches Potenzial, da ohne sie keine vollständigen diagonalen oder horizontalen Viererreihen aufgebaut werden können. Diese Kontrolle ist nicht nur wichtig für den eigenen Spielaufbau, sondern auch, um den Gegner in seiner Strategie einzuschränken.

Neben diesen grundlegenden Prinzipien kommen im Verlauf des Spiels auch fortgeschrittene taktische Elemente ins Spiel. Eine der wichtigsten Taktiken ist die Kontrolle über sogenannte Zugzwang-Situationen. Dabei handelt es sich um Spielsituationen, in denen der Gegner durch geschicktes Manövrieren gezwungen wird, einen Zug zu machen, der seine eigene Position verschlechtert. Diese Situationen sind besonders am Ende des Spiels entscheidend, wenn nur noch wenige Felder verfügbar sind und der Druck auf beide Spieler steigt. Ein weiteres taktisches Element sind Fallenkombinationen, bei denen der Gegner durch geschickte Kombinationen von Drohungen in eine Falle gelockt wird. Besonders effektiv sind sogenannte Doppelfallen, bei denen zwei gleichzeitige Drohungen erzeugt werden, die der Gegner nicht beide blockieren kann. Ebenfalls relevant sind Auffüllfallen, bei denen ein Spieler den Gegner durch Mangel an freien Feldern zwingt, einen entscheidenden Stein unter eine vorbereitete Blockfalle zu setzen.

Die spieltheoretische Analyse von „Vier Gewinnt“ wurde durch mathematische und computerbasierte Methoden weiter vertieft. Unabhängig voneinander gelang es zwei Forschern, eine vollständige Lösung für das Spiel zu finden. Victor Allis entwickelte 1988 einen speziellen Regelsatz zur systematischen Analyse des Spiels, während James D. Allen 1990 Computerprogramme einsetzte, um das Spiel vollständig zu berechnen. Beide kamen unabhängig voneinander zum gleichen Ergebnis: Der erste Spieler kann bei optimaler Spielweise und einer Eröffnung in der Mittelspalte das Spiel immer gewinnen. Diese Erkenntnis hat nicht nur wissenschaftliche Relevanz, sondern bildet auch die Grundlage für die Entwicklung von Algorithmen, die in Computerprogrammen oder Robotersystemen eingesetzt werden, um das Spiel optimal zu spielen.



Mögliche Startpositionen und Spielausgänge

1. Startposition 4 (mittlere Spalte) Wenn der erste Spieler in die mittlere Spalte setzt, hat er einen nachgewiesenen Vorteil und kann bei perfektem Spiel gewinnen. Diese

Eröffnung maximiert die Kontrolle über das Spielfeld.

2. Startpositionen 3 oder 5 (benachbarte Spalten zur Mitte) Ein Zug in die Spalte 3 oder 5 führt bei optimalem Spiel zu einem Remis, da der zweite Spieler durch eine Kombination aus Zentrums- und Blockstrategien den Sieg verhindern kann.

3. Startpositionen 1, 2, 6 oder 7 (äußere Spalten) Züge in die äußeren Spalten gelten als suboptimal. Der erste Spieler verliert bei perfektem Gegenspiel des zweiten Spielers, da diese Positionen weniger Kontrolle über das Zentrum und die Gewinnlinien bieten.

Diese Analyse zeigt, wie wichtig die Wahl der Startposition für den weiteren Spielverlauf ist. Der erste Zug in die Mitte eröffnet dem Spieler die besten Chancen, während Züge in die äußeren Spalten zu deutlichen Nachteilen führen können.

5.2 Heuristische Ansätze

Die Bewertung von Positionen auf dem Spielfeld ist ein zentraler heuristischer Ansatz bei der Strategieentwicklung für Vier Gewinnt. Dieser Ansatz zielt darauf ab, den strategischen Wert jeder Position systematisch zu analysieren und darauf aufbauend optimale Züge zu planen.

Die dargestellte Tabelle veranschaulicht die strategische Bewertung jedes Spielfelds im Spiel „Vier Gewinnt“. Jedes Feld erhält einen numerischen Wert, der angibt, wie viele mögliche Viererreihen dieses Feld beeinflussen kann. Ein Zug auf ein Feld mit einem höheren Wert ist in der Regel strategisch besser, da er potenziell mehr Siegoptionen eröffnet. Solche Bewertungsansätze werden auch in computergesteuerten Spielen angewendet, um optimale Züge zu berechnen.

	0	1	2	3	4	5	6
0	3	4	5	7	5	4	3
1	4	6	8	10	8	6	4
2	5	8	11	13	11	8	5
3	5	8	11	13	11	8	5
4	4	6	8	10	8	6	4
5	3	4	5	7	5	4	3

Achsenbeschriftungen: x steht für die Zeilen (0 bis 5 von oben nach unten) und y für die Spalten (0 bis 6 von links nach rechts).

Erklärung der Werte

Zentrum des Spielfelds: Die Felder im Zentrum (insbesondere Spalte 3 und die mittleren Zeilen) haben die höchsten Werte, da sie Teil mehrerer potenzieller Viererreihen sein können – sowohl horizontal, vertikal als auch diagonal. Das erklärt, warum das Feld in Spalte 3, Zeilen 2 und 3, den maximalen Wert von 13 besitzt.

Ränder des Spielfelds: Die Felder am Rand (Spalten 0, 6 und die obersten bzw. untersten Zeilen) haben deutlich geringere Werte, da sie weniger Gewinnlinien ermöglichen. Ein Randfeld kann maximal Teil einer horizontalen und einer diagonalen Viererreihe sein, weshalb Werte wie 3 und 4 an diesen Positionen typisch sind.

Strategische Bedeutung

Die zentralen Felder werden priorisiert, da sie mehr Möglichkeiten eröffnen, eine Viererreihe zu vervollständigen. Dies macht die Kontrolle über die mittleren Spalten (z. B. Spalte 3 und benachbarte Spalten 2 und 4) zu einer entscheidenden Strategie.
Randfelder haben weniger Einfluss auf das Spielgeschehen und dienen meist nur zur Defensive oder zum Erzwingen von Zügen des Gegners.

5.3 Computergestützte Lösungen und Algorithmen

5.4 MinMax-Algorithmus

Die Minimax-Strategie ist ein grundlegender Algorithmus zur Entscheidungsfindung in Nullsummenspielen wie "Vier Gewinnt". Dieser Ansatz wird verwendet, um optimale Züge für einen Spieler zu finden, indem sowohl die eigenen Möglichkeiten als auch die möglichen Gegenreaktionen des Gegners analysiert werden. In diesem Kapitel betrachten wir die Funktionsweise der Minimax-Strategie im Kontext von "Vier Gewinntünd zeigen, wie sie das Spielverhalten verbessern kann.

Grundprinzip der Minimax-Strategie

Der Minimax-Algorithmus funktioniert nach dem Prinzip der Maximierung des eigenen Nutzens und der Minimierung des Nutzens des Gegners. In einem Spielbaum, der alle möglichen Züge und Gegenreaktionen darstellt, sucht der Algorithmus nach dem optimalen Zug, indem er die Ergebnisse aller möglichen Züge bis zu einer bestimmten Tiefe bewertet.

In der Spieltheorie bezeichnet ein Spielbaum einen azyklischen, gerichteten Graphen, in dem die Knoten die verschiedenen Stellungen eines Spiels repräsentieren. Dabei kann dieselbe Stellung an mehreren Knoten des Spielbaums auftreten. Jeder Knoten kennzeichnet zudem, welcher Spieler in dieser Position am Zug ist. Der Spieler hat die Möglichkeit, eine der verfügbaren Aktionen auszuwählen, die durch die Kanten des Graphen dargestellt werden.

Jede Spielstellung im Baum ist entweder eine Endstellung oder besitzt eine Menge von Nachfolgestellungen, die durch die möglichen Züge im nächsten Halbzug des Spiels erreicht werden können.

Die Bewertung erfolgt durch eine sogenannte Heuristik, die den Wert eines Spielzustands quantifiziert. In "Vier Gewinnt"könnte eine einfache Heuristik beispielsweise folgende Aspekte bewerten:

- Gewonnene Spiele: Ein Zustand, in dem ein Spieler vier Steine in einer Reihe hat, hat den höchsten Wert.

- Blockierte Gewinnchancen: Züge, die verhindern, dass der Gegner vier in einer Reihe erreicht, sind besonders wertvoll.

- Teilweise vervollständigte Reihen: Zustände, in denen drei oder zwei verbundene Steine existieren, sind wertvoller als isolierte Steine.

Der Algorithmus berechnet mögliche Züge und bewertet sie rückwärts ausgehend von den möglichen Endzuständen.

Maximierer und Minimierer

In "Vier Gewinnt"gibt es zwei Spieler:

- Der Maximierer versucht, den eigenen Nutzen zu maximieren (z. B. Spieler 1).
- Der Minimierer versucht, den Nutzen des Gegners zu minimieren (z. B. Spieler 2).

Bei jedem Zug wechselt die Rolle zwischen Maximierer und Minimierer. Der Algorithmus wechselt daher bei jedem Ebenenwechsel zwischen der Maximierung und Minimierung der Heuristikwerte.

Beispiel: Minimax-Suchbaum

Im Folgenden wird ein einfacher Suchbaum dargestellt, der die Funktionsweise des Minimax-Algorithmus illustriert. Der Baum hat eine Tiefe von 2 (eine Max-Ebene und eine Min-Ebene).

Suchbaum

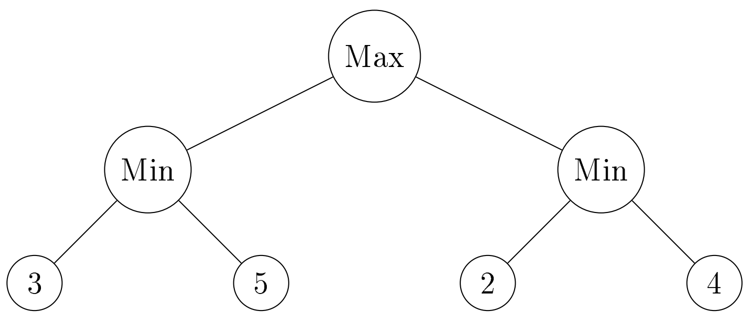


Abbildung 5.1: Ein einfacher Minimax-Suchbaum mit einer Tiefe von 2.

Erklärung des Suchbaums

Der Suchbaum in Abbildung 5.1 zeigt die Schritte des Minimax-Algorithmus:

1. **Blattebene:** Die unterste Ebene enthält die Bewertungen der möglichen Endzustände aus Sicht des Max-Spielers. Diese Werte könnten durch eine Bewertungsfunktion ermittelt worden sein.

- Die Knoten haben die Werte 3, 5, 2 und 4.

2. **Min-Ebene:** Der Min-Spieler versucht, die Bewertung zu minimieren. Für jeden Min-Knoten wird der niedrigste Wert seiner Kindknoten ausgewählt:

   - Der linke Min-Knoten wählt $\min(3, 5) = 3$.

   - Der rechte Min-Knoten wählt $\min(2, 4) = 2$.

3. **Max-Ebene:** Der Max-Spieler versucht, die Bewertung zu maximieren. Der Max-Knoten wählt den höchsten Wert aus den zurückgegebenen Bewertungen der Min-Knoten:

   - Der Max-Knoten wählt $\max(3, 2) = 3$.

Optimale Entscheidung

Der optimale Zug für den Max-Spieler ist derjenige, der zu einer Bewertung von **3** führt.

Zusammenfassung

Der Minimax-Algorithmus analysiert den Baum von unten nach oben:

- Min-Knoten repräsentieren die Entscheidungen des Gegners (Minimierer).

- Max-Knoten repräsentieren die Entscheidungen des Spielers (Maximierer).

Durch diese systematische Analyse findet der Algorithmus den besten Zug für den Maximierer unter der Annahme, dass der Minimierer optimal spielt.

5.5 AlphaBeta-Algorithmus

Der Alpha-Beta-Algorithmus ist eine Optimierung des Minimax-Algorithmus, die dessen Effizienz erheblich steigert. Durch das gezielte Verwerfen von Spielzügen, die für die Entscheidung irrelevant sind, reduziert der Alpha-Beta-Algorithmus die Anzahl der bewerteten Knoten im Spielbaum. Diese Technik ist besonders wertvoll bei ressourcenbeschränkten Systemen wie einem LEGO Spike Roboter, der begrenzte Rechenleistung zur Verfügung hat.

Der Alpha-Beta-Algorithmus führt die gleichen Berechnungen wie der Minimax-Algorithmus durch, ergänzt jedoch zwei zusätzliche Parameter, Alpha und Beta, um unnötige Berechnungen zu vermeiden:

- **Alpha**: Der aktuelle maximale Wert, den der Maximierer sicher erreichen kann.
- **Beta**: Der aktuelle minimale Wert, den der Minimierer sicher erreichen kann.

Während der Traversierung des Spielbaums werden Äste abgeschnitten, die keine Auswirkungen auf die endgültige Entscheidung haben (*Pruning*). Dies geschieht, wenn:

- Ein Knoten einen Wert liefert, der schlechter ist als der bisher bekannte Alpha-Wert für den Maximierer.
- Ein Knoten einen Wert liefert, der schlechter ist als der bisher bekannte Beta-Wert für den Minimierer.

Die Anwendung des Alpha-Beta-Algorithmus auf "Vier Gewinnt"bietet mehrere Vorteile:

- **Effizienz**: Der Algorithmus reduziert die Anzahl der Knoten, die bewertet werden müssen, erheblich. Dies ermöglicht die Analyse tieferer Spielbäume mit derselben Rechenleistung.
- **Flexibilität**: Der Algorithmus kann leicht an die spezifische Bewertungsfunktion von "Vier Gewinntängepasst werden, z. B. zur Bewertung von Reihen, Spalten und Diagonalen.
- **Optimierung für begrenzte Ressourcen**: Ein LEGO Spike Roboter hat begrenzte Rechen- und Speicherkapazitäten. Der Alpha-Beta-Algorithmus ermöglicht es, in Echtzeit Züge zu berechnen, ohne den Roboter zu überlasten.

Beispiel: Alpha-Beta-Suchbaum

Im Folgenden wird ein einfacher Suchbaum dargestellt, der die Funktionsweise des Alpha-Beta-Algorithmus illustriert. Der Baum zeigt, wie bestimmte Zweige (*Pruning*) abgeschnitten werden, um die Effizienz zu erhöhen.

Suchbaum mit Alpha-Beta-Pruning

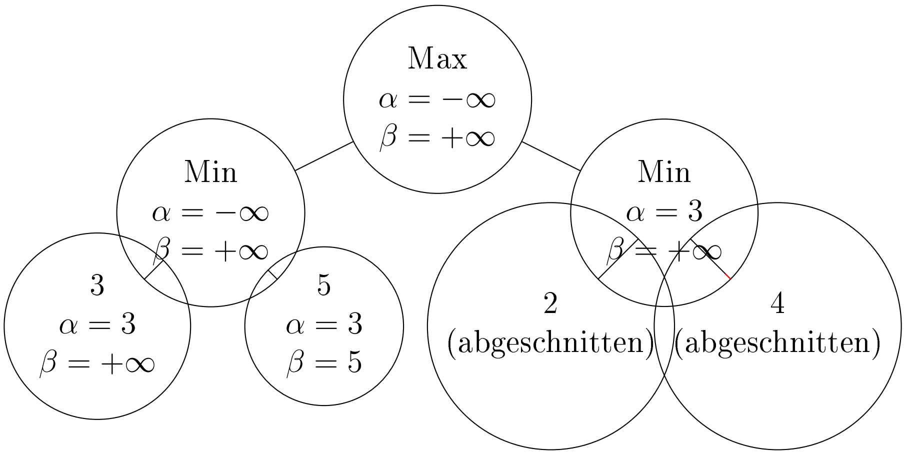


Abbildung 5.2: Ein Alpha-Beta-Suchbaum mit Pruning. Zweige werden abgeschnitten, wenn sie die Grenzen von Alpha und Beta verletzen.

Erklärung des Suchbaums

Der Suchbaum in Abbildung 5.2 zeigt die Schritte des Alpha-Beta-Algorithmus:

1. **Initialisierung:** Die Alpha- und Beta-Werte werden am Wurzelknoten initialisiert:
   - $\alpha = -\infty$: Das beste Ergebnis, das der Maximierer bisher erreicht hat.
   - $\beta = +\infty$: Das schlechteste Ergebnis, das der Minimierer dem Maximierer erlauben würde.
2. **Linker Teilbaum:**
   - Der Maximierer überprüft den linken Teilbaum, in dem der Minimierer aktiv ist.

- Der Min-Knoten prüft seine Kindknoten:
  - Der erste Kindknoten liefert den Wert 3. Der Alpha-Wert wird aktualisiert: $\alpha = 3$.
  - Der zweite Kindknoten liefert den Wert 5. Da 5 größer ist, bleibt $\alpha = 3$ bestehen.

3. **Rechter Teilbaum (Pruning):**
   - Der Maximierer prüft den rechten Teilbaum. Der Min-Knoten beginnt mit der Analyse.
   - Bereits beim ersten Kindknoten erkennt der Algorithmus, dass dessen Wert (2) kleiner ist als $\alpha = 3$.
   - Alle verbleibenden Kindknoten des rechten Teilbaums werden abgeschnitten (*Pruning*), da sie keinen besseren Wert liefern können.

Vorteile des Alpha-Beta-Algorithmus

Durch das Alpha-Beta-Pruning werden unnötige Berechnungen vermieden:

- Der Algorithmus durchsucht nur jene Zweige, die potenziell zu besseren Ergebnissen führen.
- In diesem Beispiel werden zwei Knoten (Wert 2 und 4 im rechten Teilbaum) nicht berechnet.
- Dies erhöht die Effizienz und ermöglicht es, tiefere Suchbäume mit derselben Rechenleistung zu analysieren.

6 Anwendung der Spieltheorie auf Vier Gewinnt

In diesem Kapitel werden die spieltheoretischen Aspekte von Vier Gewinnt, einschließlich der Analyse von Spielsituationen, der Berechnung von Gewinnwahrscheinlichkeiten und der Entwicklung von Spielstrategien untersucht.

6.1 Analyse von Spielsituationen

Für das Verständnis der Spieldynamik und die Entwicklung effektiver Strategien, ist die Analyse der Spielsituation entscheidend. Vier Gewinnt, ist ein zwei Personen Spiel mit vollständiger Information. Das bedeutet, alle Spieler zu jeder Zeit den gesamten Zustand des Spiels kennen [Rui+09].

Der Bestimmungssatz von Ernst Zermelo besagt, dass sich jedes kombinatorische Spiel in eine der folgenden Kategorien einordnen lässt.

1. Der beginnende Spieler hat eine dominante Strategie. Wenn das Spiel optimal, ohne Fehler verläuft, gewinnt er die Partie.

2. Der nachziehende Spieler 2 hat eine dominante Strategie. Wenn das Spiel optimal verläuft, gewinnt dieser.

3. Keiner der beiden Parteien hat eine dominante Strategie. Wenn beide Spieler optimal spielen, endet das Spiel ohne einen Sieger. Sobald ein Spieler einen Fehler macht, gewinnt der andere Spieler das Spiel [Mül11].

Aus der Analyse geht hervor, dass bestimmte Situationen von besonderer Bedeutung für einen Sieg sind. Das bilden einer horizontalen Viererreihe sind schwer zu erreichen. Umso wichtige ist es einen Sieg die Spalten 1-5 zu kontrollieren.

6.2 Berechnung von Gewinnwahrscheinlichkeiten

Aufgrund der Komplexität des Spiels stellt die Berechnung der Gewinnwahrscheinlichkeit in Anwendung eine Herausforderung dar. Das Spielraster besteht aus sieben Spalten und sechs Zeilen, dadurch entsteht eine enorm große Anzahl an möglichen Zuständen. Was die Wahrscheinlichkeitsberechnung für den Gewinn des Spiels so komplex macht. Moderne Ansätze zur Berechnung der Gewinnwahrscheinlichkeit greifen auf KI-Technik zurück. Die exakte Berechnung für alle möglichen Spielsituationen bleibt aufgrund der Komplexität von Vier Gewinnt eine Herausforderung [Rui+09].

6.3 Entwicklung von Spielstrategien

Um eine spielstarke Strategie für "Vier Gewinnt"mit dem Alpha-Beta-Algorithmus zu entwickeln und später zu programmieren, müssen mehrere Schritte beachtet werden. Hier wird der gesamte Prozess erläutert, von der Spielrepräsentation über die Bewertung von Stellungen bis hin zur Integration des Alpha-Beta-Algorithmus.

1. Spielfeld als Datenstruktur

Zunächst muss das Spielfeld von "Vier Gewinntïn einer Form dargestellt werden, die von einem Algorithmus verarbeitet werden kann:

Verwende ein 2D-Array (6 Zeilen × 7 Spalten), das den Zustand des Spielfeldes beschreibt.

- 0: Leeres Feld
- 1: Spielstein von Spieler 1
- -1: Spielstein von Spieler 2

Das Spielfeld kann folgendermaßen dargestellt werden:

$$\text{Spielfeld} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Zugmöglichkeiten berechnen

Da Spielsteine nur in den unteren freien Reihen platziert werden können, muss eine Funktion implementiert werden, die gültige Züge berechnet:

Listing 6.1: Funktion zur Berechnung gültiger Züge

```
def valid_moves(board):
return [col for col in range(7) if board[0][col] == 0]
```

3. Bewertung der Spielstellung

Eine Bewertungsfunktion ist entscheidend für die Strategie. Sie schätzt den Wert einer Stellung ein und liefert eine Zahl:

- **Gewinn für Spieler:** Sehr hoher Wert, z. B. +1000.
- **Verlust für Gegner:** Sehr niedriger Wert, z. B. -1000.
- **Potenzielle Verbindungen:** Punkte für 2er- und 3er-Reihen, die noch zu einem Sieg führen können.
- **Blockieren von Gegnerzügen:** Zusätzliche Punkte für Züge, die den Gegner daran hindern, 4 in eine Reihe zu bilden.

4. Alpha-Beta-Algorithmus implementieren

Der Alpha-Beta-Algorithmus wird verwendet, um den besten Zug zu berechnen, indem der Suchbaum effizient durchsucht wird. Dieses Beispiel zeigt den Kern des Algorithmus – die Auswahl des besten Zugs basierend auf einer vorgegebenen Spielbrett-Situation (board) und einer Suchtiefe (depth).

Listing 6.2: Alpha-Beta Algorithmus - Kurzer Überblick

```python
# Alpha-Beta Algorithmus in Aktion
best_move = alpha_beta(board, depth=4, alpha=-float('inf'), beta=float('inf'), maximizingPlayer=True)
print(f"Bester Zug: Spalte {best_move}")
```

5. Entscheidung für den besten Zug

fünften Schritt wird der beste Zug für den aktuellen Spieler ermittelt. Dazu werden alle möglichen Züge analysiert, indem sie simuliert und mit dem Alpha-Beta-Algorithmus bewertet werden. Der Zug mit der besten Bewertung (je nach Spieler maximierend oder minimierend) wird ausgewählt. Dieser Schritt stellt die Grundlage für die Entscheidungsfindung dar und bildet den Abschluss der Spielbaum-Analyse.

Listing 6.3: Entscheidung für den besten Zug - Überblick

```python
# Grober Aufbau der Funktion zur Zugentscheidung
def best_move(board, depth, player):
best_value = float('-inf') if player == 1 else float('inf')
best_column = None

for col in valid_moves(board):
move_value = alpha_beta(apply_move(board, col, player), depth - 1, -float('inf'), float('inf'), False)
if (player == 1 and move_value > best_value) or (player == -1 and move_value < best_value):
best_value = move_value
best_column = col

return best_column
```

- Die Funktion `best_move` ist darauf ausgelegt, den besten Zug für einen Spieler (`player`) zu bestimmen.

- `valid_moves(board)` gibt alle gültigen Spalten zurück, in die ein Stein gesetzt werden kann.
- `apply_move(board, col, player)` simuliert das Setzen eines Steins in eine bestimmte Spalte.
- Der *alpha-beta*-Algorithmus wird auf das simulierte Spielfeld angewendet, um die Bewertung des Zugs zu berechnen.
- Der Spieler wählt den Zug mit der höchsten Bewertung (für Maximierer) oder der niedrigsten Bewertung (für Minimierer).

5. Endzustände erkennen

Eine Funktion wird benötigt, um festzustellen, ob das Spiel vorbei ist:

Kriterien für Endzustände:

- Einer der Spieler hat 4 in einer Reihe.
- Das Spielfeld ist voll.

Listing 6.4: Erkennung des Endzustands

```
def is_terminal(board):
return has_winner(board) or all(board[0][col] != 0 for col in range(7))
```

7. Spielstrategie optimieren

Suchtiefe anpassen

Je nach Rechenleistung kann die Tiefe des Spielbaums variiert werden.

Zeitlimit setzen

Da der Algorithmus auf einem LEGO Spike Roboter läuft, ist die Rechenzeit begrenzt. Eine Tiefensuche kann eingesetzt werden, um innerhalb eines Zeitlimits die bestmögliche Tiefe zu erreichen.

7 Zusammenfassung

Auf zwei bis drei Seiten soll auf folgende Punkte eingegangen werden:

- Welches Ziel sollte erreicht werden
- Welches Vorgehen wurde gewählt
- Was wurde erreicht, zentrale Ergebnisse nennen, am besten quantitative Angaben machen
- Konnten die Ergebnisse nach kritischer Bewertung zum Erreichen des Ziels oder zur Problemlösung beitragen
- Ausblick

In der Zusammenfassung sind unbedingt klare Aussagen zum Ergebnis der Arbeit zu nennen. Üblicherweise können Ergebnisse nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ benannt werden, z. B. „... konnte eine Effizienzsteigerung von 12 % erreicht werden." oder „... konnte die Prüfdauer um 2 h verkürzt werden".

Die Ergebnisse in der Zusammenfassung sollten selbstverständlich einen Bezug zu den in der Einleitung aufgeführten Fragestellungen und Zielen haben.

Literaturverzeichnis

[50P25] 50PLUS. *Vier Gewinnt - Online Spiele*. Online; abgerufen am 1. Januar 2025. 50PLUS, 2025. URL: `https://www.50plus.de/spiele/vier-gewinnt.html`.

[Fas24] FasterCapital. *Den Code knacken: Rückwärtsinduktion und Payoff-Matrix-Analyse*. FasterCapital. 2024. URL: `https://fastercapital.com/de/inhalt/Den-Code-knacken--Rueckwaertsinduktion-und-Payoff-Matrix-Analyse.html` (besucht am 05. 01. 2025).

[Gam25] Gameorama. *4 Gewinnt*. Spielmuseum Timeline. Gameorama, 2025. URL: `https://www.gameorama.ch/de/museum/spielmuseum/timeline/gewinnt` (besucht am 01. 01. 2025).

[Has20] SA Hasbro. *Das Originale 4Gewinnt Anleitung*. Hasbro Gaming, 2020.

[Mül11] Markus Müller. „Seminararbeitaus dem Fach Mathematik“. de. In: (2011). URL: `https://www.edu.sot.tum.de/fileadmin/w00bed/edu/Schuelerkonferenz/Seminararbeiten_2012/mueller_markus_2012.pdf` (besucht am 18. 12. 2024).

[Rui+09] Benjamin Ruile u. a. *Vier Gewinnt*. Vorlesung Spieltheorie. Ludwig-Maximilians-Universität München, 2009. URL: `https://www.mathematik.uni-muenchen.de/~spielth/artikel/VierGewinnt.pdf`.

[Sie] Dr. Markus Siepermann. *Normalform*. SpringerGabler. URL: `https://wirtschaftslexikon.gabler.de/definition/normalform-39481` (besucht am 08. 01. 2025).

[Wik25] Wikipedia-Autoren. *Vier gewinnt*. Online; abgerufen am 1. Januar 2025. Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, 2025. URL: `https://de.wikipedia.org/wiki/Vier_gewinnt`.

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis