Game Theory

摘要

- 介紹此理論處理的問題、情況
- 賽局狀態 Game State
- 理論基石 Nim Game
- Sprague-Grundy Theorem
- Grundy Numbers
- 其他變體

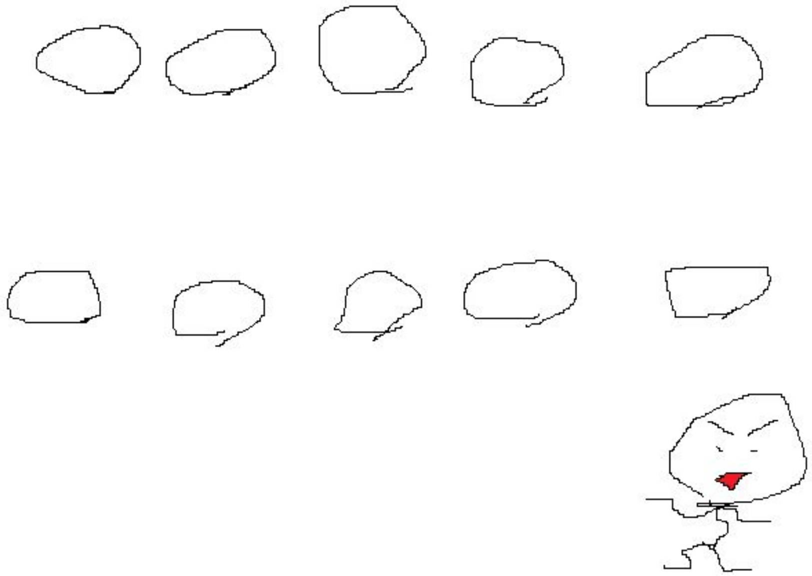
處理的問題 - 不偏賽局 Impartial Game

我們將會解決符合以下條件的賽局

1. 由二個玩家**輪流**採取行動
2. 賽局中的狀況可以對應到一個可描述的**狀態**
3. 每位玩家能採取的行動**只跟狀態有關**, 跟現在輪到的玩家無關
4. 賽局在某位玩家**無法採取任何行動**時就會結束
5. 賽局會在**有限步數內**結束
6. 賽局的所有資訊對每個玩家都是**公開**透明的, 且沒有任何隨機因素

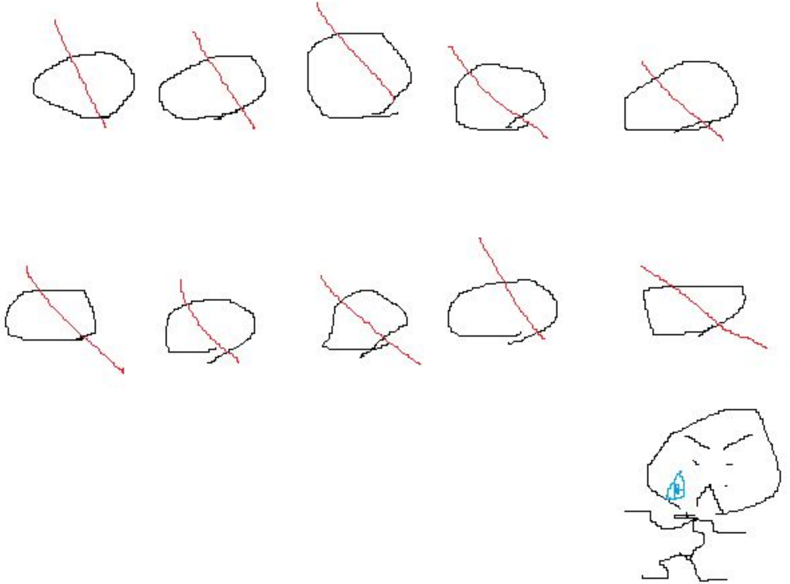
Game States 賽局狀態

我們來想想一個簡單的賽局...



Game States 賽局狀態

想想輸的人會遇到什麼狀況...



必勝態 Winning State

遭遇 0 顆的狀況必輸
反過來說, 遭遇 1, 2, 3 顆的狀況必勝

我們把繼續玩下去一定會贏的狀態叫做必勝態！

那麼 4 顆呢？

所剩石頭個數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
狀態	X	O	O	O	?	?	?	?	?	?	?

必輸態 Losing State

那麼 4 顆呢？

4 顆再怎麼拿都只會到必勝態

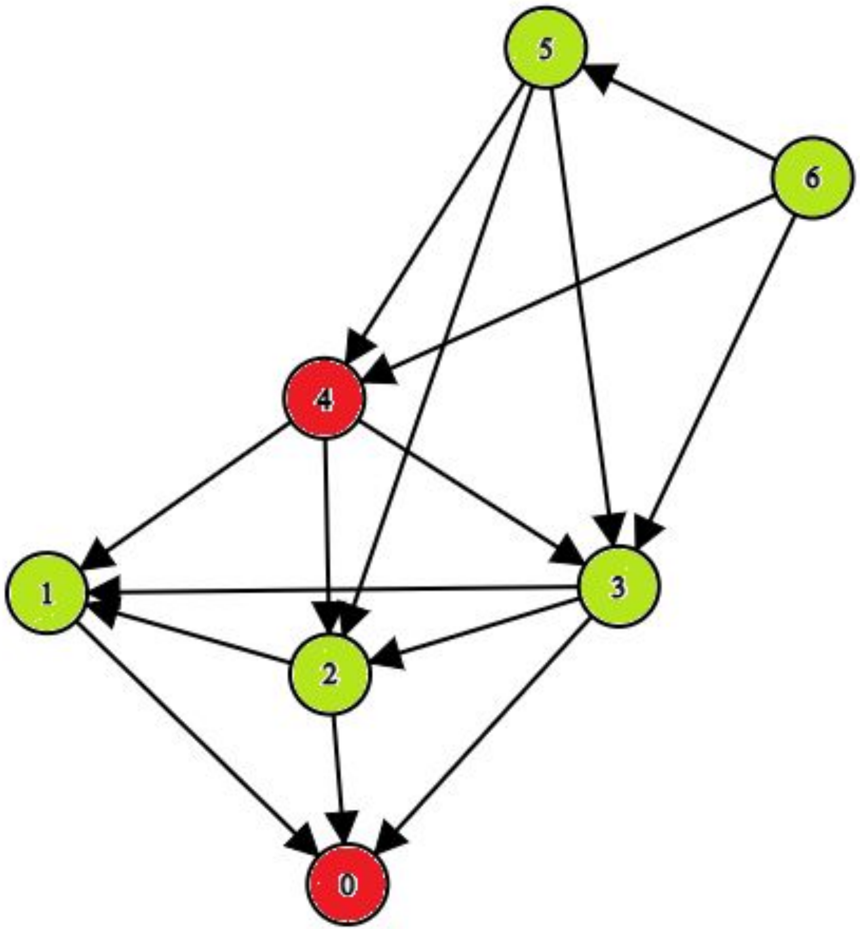
只要玩家**<u>任何</u>**一個操作都送對方到必勝態, 就是必輸態
只要玩家**<u>存在</u>**一個操作能讓對方到必輸態, 就是必勝態

所剩石頭個數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
狀態	X	O	O	O	X	O	O	O	X	O	O

狀態圖 State Graph

將賽局中出現的狀況做為點
可以從 a 狀態變成 b 狀態就連一條邊

紅點表示 losing state
綠點表示 winning state

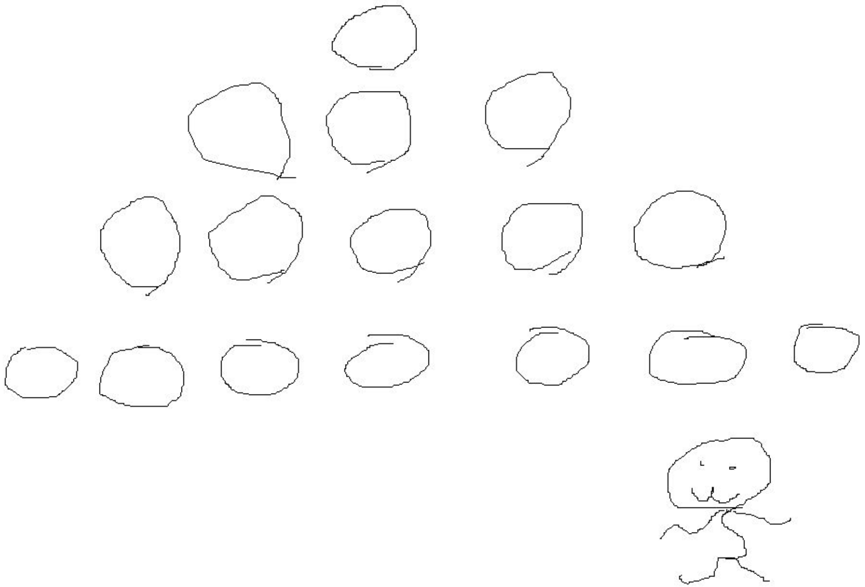


Nim Game

不偏賽局的基石

Nim Game 介紹

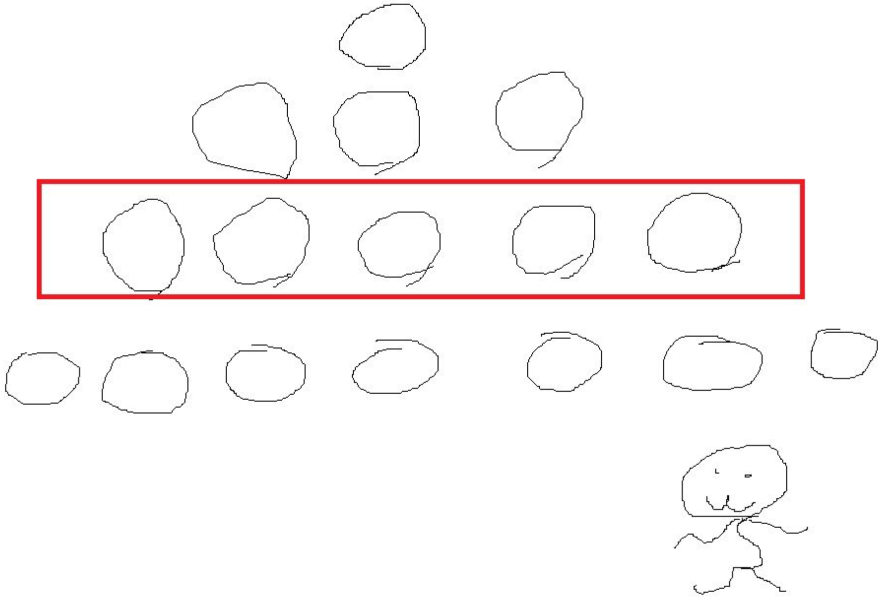
每次操作必須挑其中一條橫列
拿至少 1 顆、至多整排的石頭
拿到最後一顆石頭的人就贏了



Nim Game 介紹

各排的賽局互不影響、各自獨立

稱各排賽局為 子賽局 Subgame

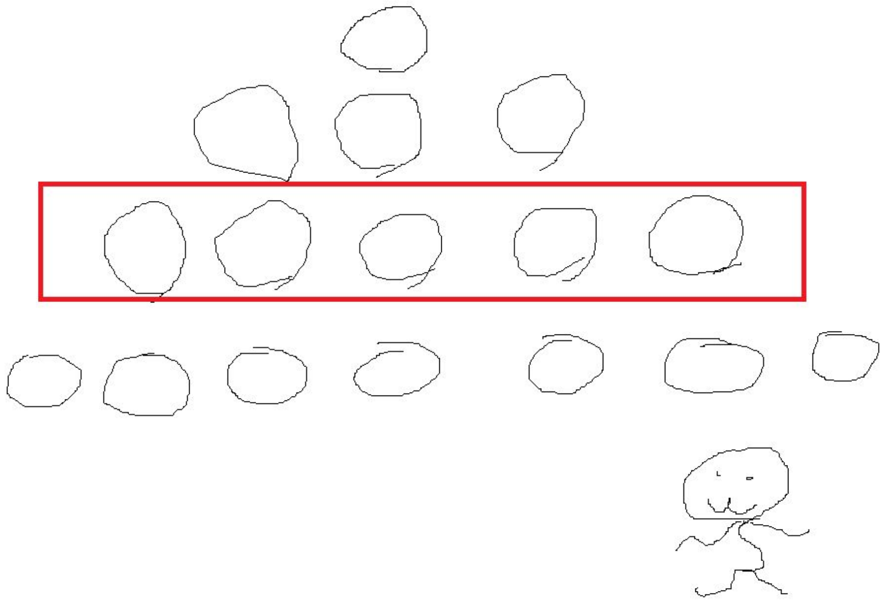


Subgame in Nim

分析單一排的子賽局非常簡單

只有 0 顆時是必輸態

其他 >0 顆皆是必勝態



Subgame in Nim

單純把子賽局二分成必勝態跟必輸態
對於整個賽局並沒有意義

e.g. **石子的數量**應該要扮演重要角色

重新區分子賽局的狀態
將不同必勝態區分出來
進而重新定義整個賽局的狀態

需求:
在必輸態 **無論做任何操作** 都必須得變成 **必勝態**
在必勝態裡 **存在一個操作** 變成 **必輸態**

Nim Sum - 分析用的工具

令第 1 排石頭的個數是 x_1、第 2 排石頭的個數是 x_2 …

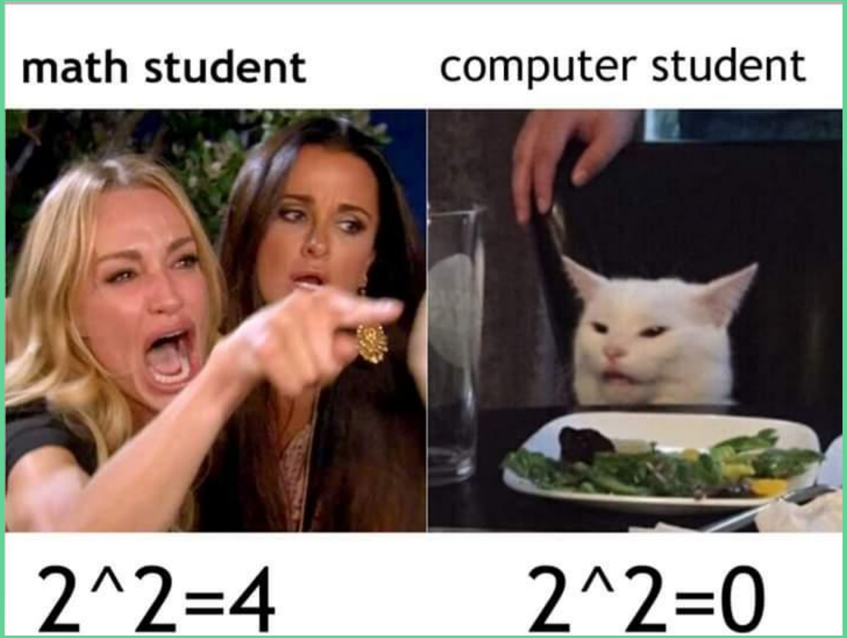
考慮 $f(x_1, x_2, ..., x_n) = z$ 把子賽局的石頭個數射到非負整數

定義 f 滿足以下需求

1. f(必輸態) = 0; f(必勝態) ≠ 0
2. $f(0, 0, ..., 0) = 0$
3. 若 $f(X_{old}) = 0$, **任何操作**導致的 X_{new} 都滿足 $f(X_{new}) \neq 0$
4. 若 $f(X_{old}) \neq 0$, **存在一個操作**導致的 X_{new} 都滿足 $f(X_{new}) = 0$

有什麼 f 滿足這些需求呢？

Exclusive OR!!!



Exclusive OR

Exclusive OR，又可簡稱 XOR，中文名稱異或。

以邏輯閘來說 $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0, 0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$
有著相同數字 XOR 會是 0 的性質

若將此定義推廣到非負整數上...?

有趣的性質：
$a \oplus a = 0$
$a \oplus b = c \Rightarrow a \oplus c = b$
$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$

十進位	**二進位**
1	001
3	011
<u>5</u>	101
7	111
XOR	000

十進位	**二進位**
1	001
3	011
<u>2</u>	010
7	111
XOR	111

Nim Sum

定義 f: XOR

1. f(**必輸態**) = 0; f(**必勝態**) ≠ 0
2. f(0, 0, ..., 0) = 0
3. 若 $f(X_{old}) = 0$, <u>**任何操作**</u>導致的 X_{new} 都滿足 $f(X_{new}) \neq 0$
4. 若 $f(X_{old}) \neq 0$, <u>**存在一個操作**</u>導致的 X_{new} 都滿足 $f(X_{new}) = 0$

Nim Sum

需求 1 只是定義

需求 2 顯然滿足

需求 3 可以證明
若當前 XOR 出的數字是 0
只要單排石子數發生任意變化
XOR 的結果就一定不是 0

十進位	二進位
0	000
0	000
0	000
XOR	000

十進位	二進位
1	01
2	10
3	11
XOR	00

十進位	二進位
1	01
2	10
2	10
XOR	01

Nim Sum

假設有 4 排石頭

$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 = y$

$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus (x_4 \oplus y) = y \oplus y = 0$

若能把 x_4 變成 $x_4 \oplus y$

就是把局勢推往必輸態

前提是 $x_4 \oplus y \leq x_4$

e.g.

5(101) 拿走 4 顆石頭, XOR 變成 0

十進位	二進位
1	001
3	011
3	011
5	<u>1</u>01
XOR	<u>1</u>00

十進位	二進位
1	001
3	011
3	011
<u>1</u>	**<u>001</u>**
XOR	000

Nim Sum

觀察到 y 的最高位

根據 XOR 的性質

一定存在某一排石頭 x_i

也有一樣的最高位位置

注意到此時 $x_i \oplus y \le x_i$

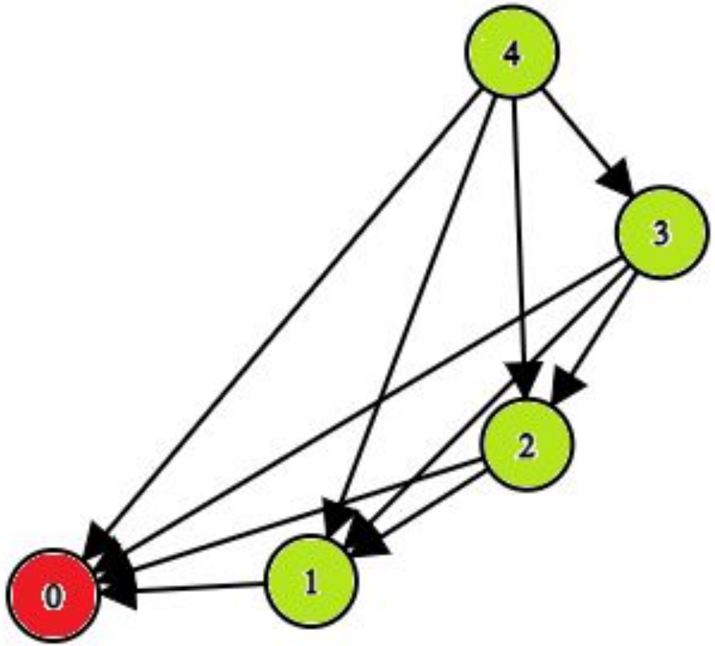
十進位	二進位
3	011
7	**1**11
1	001
2	010
XOR	**1**11

十進位	二進位
3	011
0	**000**
1	001
2	010
XOR	000

Nim Game 結論

- 具有各自獨立的子賽局
- 將不同子賽局的石頭個數 XOR, 可用零或非零來區分必勝態/必輸態
- 勝者的目標是把敗者送到必輸態
- 敗者只能在必輸態中無力掙扎, 最後送出一個必勝態給勝者
- 整個過程, 勝者都在將 XOR 的結果調整回 0
- 打從遊戲一開始, 就能決定先手必勝或是後手必勝

小觀察 - State Graph of Subgame of Nim



Sprague-Grundy Theorem

The General Method to solve the games

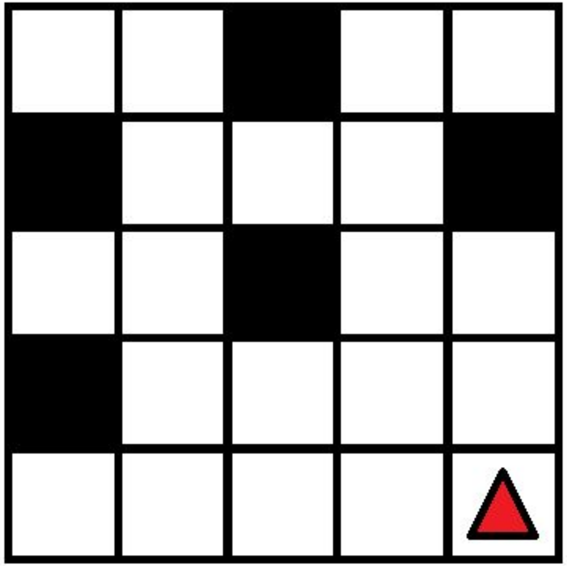
嘿！
不要看到一堆英文就被嚇跑啦

定理介紹

所有不偏賽局皆可透過
定義賽局中每個狀態的 Grundy Number
使其能透過 Nim Game 的方式分析

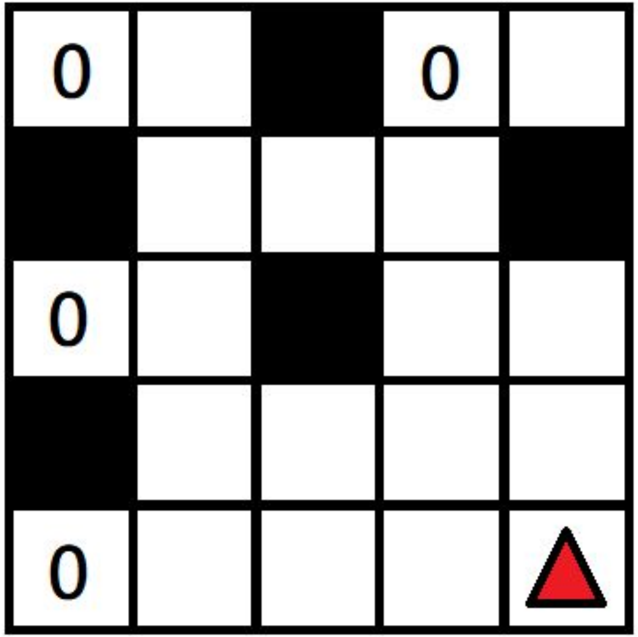
Grundy Number

一樣地, 我們這次從一個稍微複雜一點的賽局看起...



Grundy Number

先把一些明顯的必輸態標上...

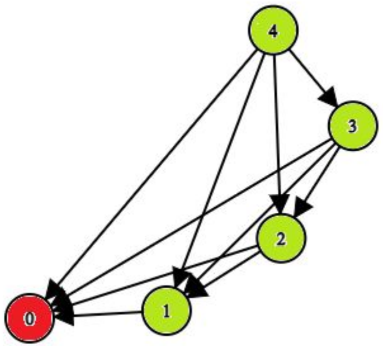


觀察

在 Nim Game 的時候
若只看單個 Subgame 的石頭數量的話
參與者可以採取行動將 x 變成 0~x-1 內的任一數字

在更廣義的 Game 中, 不妨用類似的方式定義這樣的數字

需求:
$g(x_{old}) = y$
存在 x_{new} 使得 $g(x_{new}) = i$ 成立 for all $i = 0 \sim y-1$



Mex Function

X 是一個裝著非負整數的集合
若 X 內含有 0 ~ i - 1 的每個數字
則使滿足此條件的最大 i 為 mex(X)

若 X 內沒有 0, 定義 mex(X) = 0

e.g.

mex{0, 1, 2, 5, 6, 8} = 3

mex{1, 2, 7, 8} = 0

Grundy Number

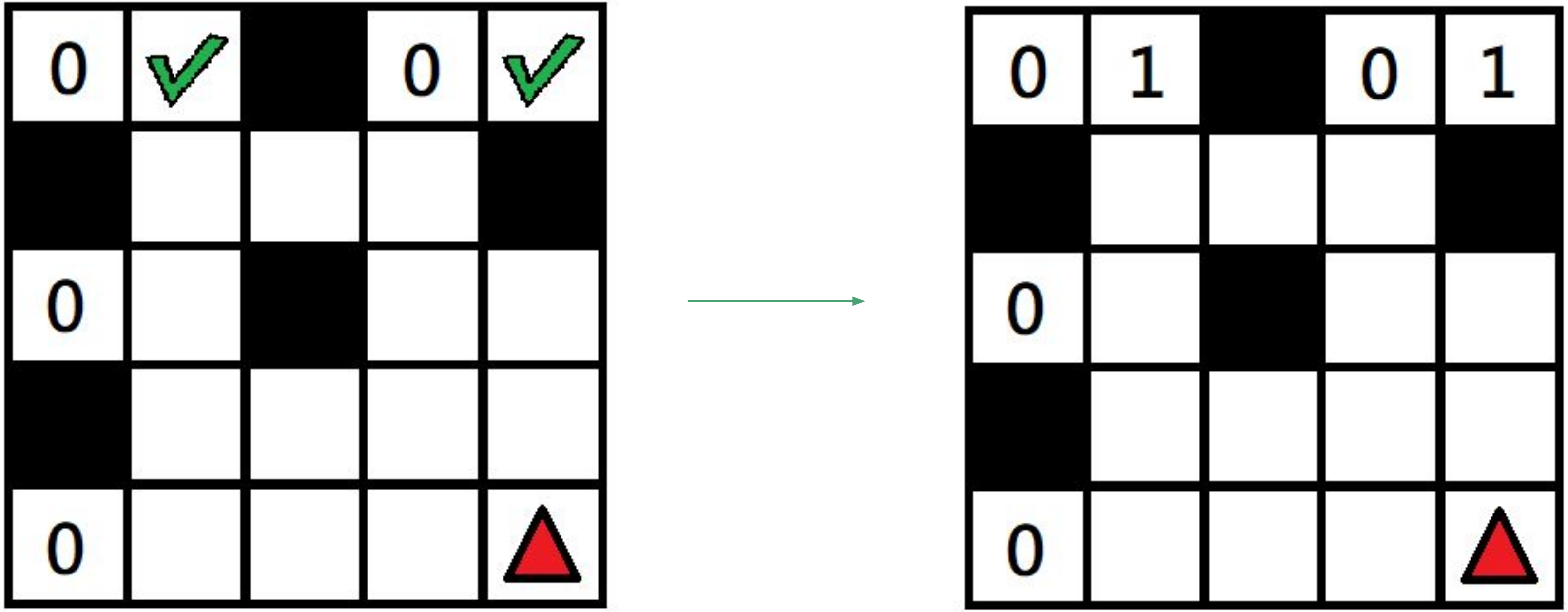
若 x 可以到的狀態有 $x_1, x_2, \ldots, x_n$

則定義 $g(x) = \text{mex}\{g(x_1), g(x_2), \ldots, g(x_n)\}$

這使得行為者可以採取行動將 $g(x)$ 變成 $0 \sim g(x) - 1$ 內的數字

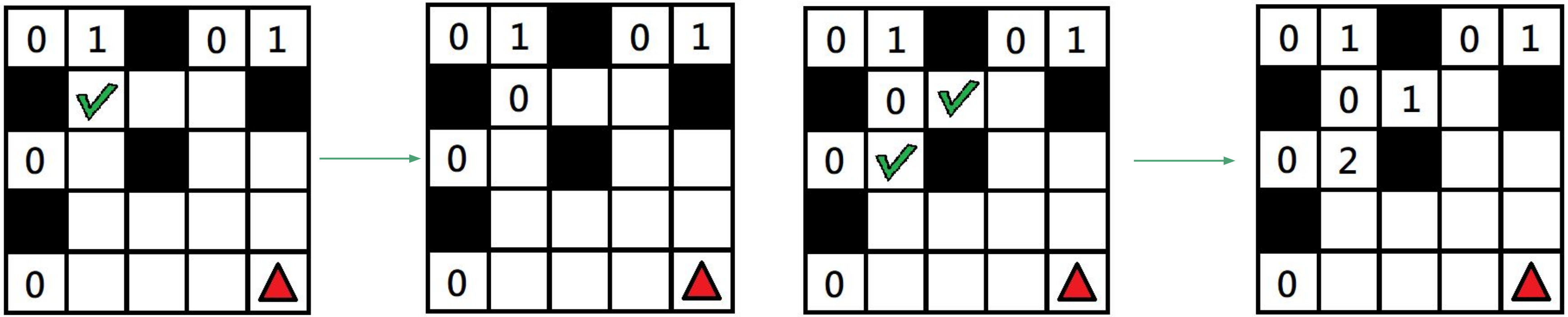
Grundy Number

找出那些已經確定 $g(x_1), g(x_2), \ldots, g(x_n)$ 的 x



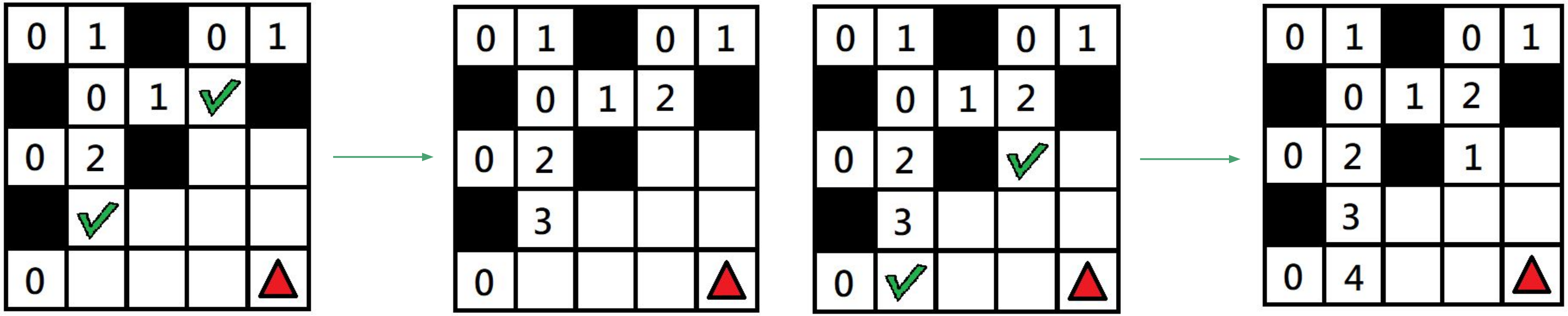
Grundy Number

找出那些已經確定 $g(x_1), g(x_2), \ldots, g(x_n)$ 的 x



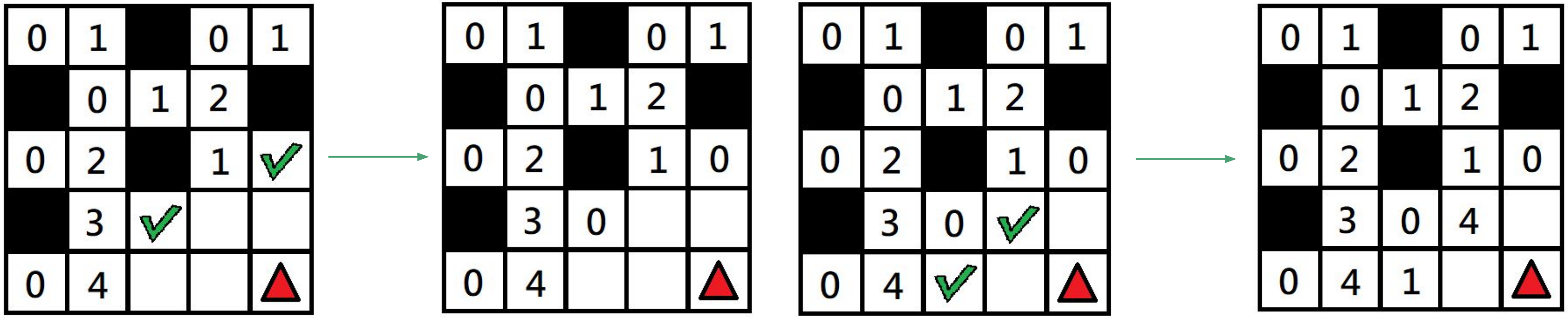
Grundy Number

找出那些已經確定 $g(x_1), g(x_2), \ldots, g(x_n)$ 的 x



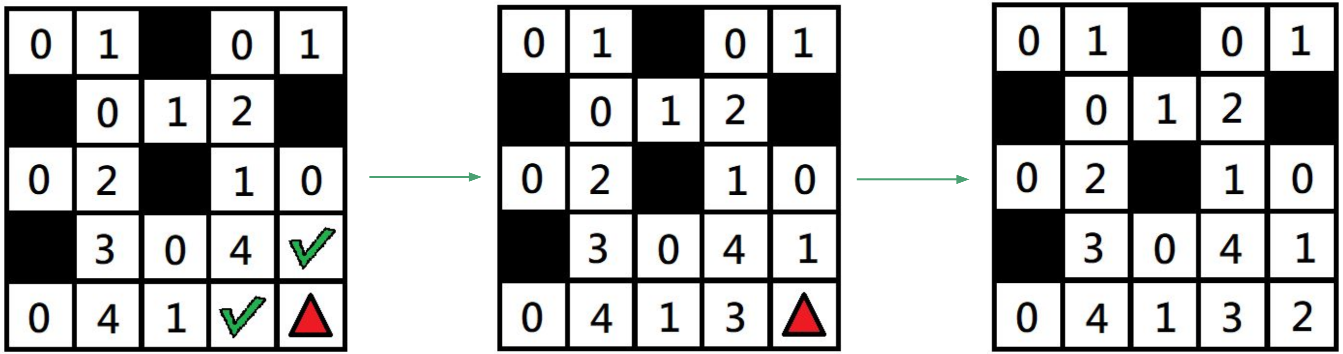
Grundy Number

找出那些已經確定 $g(x_1), g(x_2), \ldots, g(x_n)$ 的 x



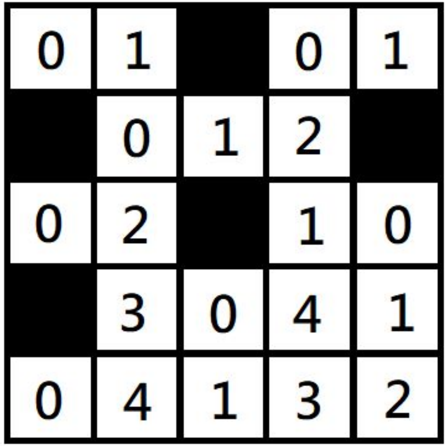
Grundy Number

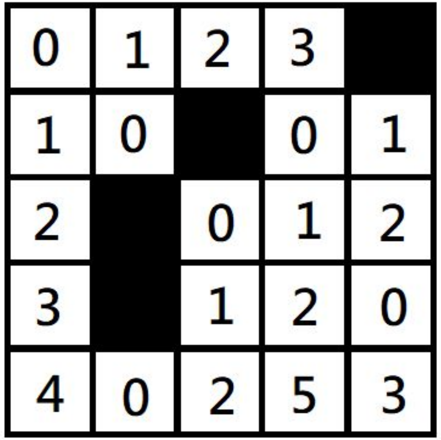
這個賽局的 Grundy Number 就是 2

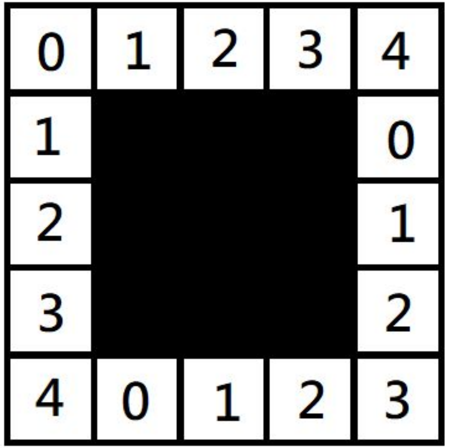


多個 Subgame...

依據 Nim game 的策略
目標是將 XOR of Grundy Number 變為 0







Grundy Number 結論

- 繼 XOR 後, 使用了 mex 定義了類似 Nim Game 中的石頭數
- 不同於 Nim Game 只會走到比較少的石頭數量
- 廣義的 Game 可能可以從 Grundy Number 少去走到多
- 但沒有意義
- 只需好好列出各個狀態的 Grundy Number
- 便能用 Nim Game 的策略分析此賽局

練習題

Luogu P4018

Luogu P4860

Luogu P1247

CodeForces 102984G

其他變體

還有!??

Misere Game

在 Nim Game 中
拿到最後一顆石頭的參與者從贏家變成輸家

跟正常玩法一樣
但當你的下一步操作
會使全部的石頭數量是 1 顆 或是 0 顆

此時就需要改變策略

Misere Game

採取正常策略
一定會在某個時間點
採取完操作後全部的石頭數量不是 1 就是 0

e.g.
0 1 1 1 2
0 0 3

只需將局面留下奇數個 1

Grundy's Game

有些時候
一個賽局會因為參與者的行為而分割成不同的子賽局

Grundy's Game 就是這樣的遊戲
每次可以將個數為 n 的棒棒分成數量不相等的二堆

無法操作者將輸掉這場遊戲

e.g.

4 -> 3 + 1 -> 2 + 1 + 1

Grundy's Game

顯然 $n = 1, 2$ 是必輸態

如何生成其他狀態的 Grundy Number?

e.g.

8 可以分成 $1 + 7, 2 + 6, 3 + 5$

令 $f(8) = \text{mex}\{f(1) \oplus f(7), f(2) \oplus f(6), f(3) \oplus f(5)\}$

Grundy's Game (More Example)

$f(1) = 0$

$f(2) = 0$

$f(3) = \text{mex}\{f(1) \oplus f(2)\} = \text{mex}\{0\} = 1$

$f(4) = \text{mex}\{f(1) \oplus f(3)\} = \text{mex}\{1\} = 0$

$f(5) = \text{mex}\{f(1) \oplus f(4), f(2) \oplus f(3)\} = \text{mex}\{0, 1\} = 2$

$f(6) = \text{mex}\{f(1) \oplus f(5), f(2) \oplus f(4)\} = \text{mex}\{2, 0\} = 1$

$f(7) = \text{mex}\{...\} = \text{mex}\{1, 2, 1\} = 0$

$f(8) = \text{mex}\{...\} = \text{mex}\{0, 1, 3\} = 2$

參考資料

- https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%97%A0%E5%81%8F%E5%8D%9A%E5%BC%88
- https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%B0%BC%E5%A7%86%E6%B8%B8%E6%88%8F
- https://en.wikipedia.org/wiki/Sprague%E2%80%93Grundy_theorem
- https://csacademy.com/app/graph_editor/
- http://www.mathland.idv.tw/game/mathgame.htm
- https://memes.tw/maker

後記

紀政良 在跟他的好友 Zolark 玩 Nim Game，輪到 Zolark 時，我恰好出現。我瞄了一眼地上的石頭，腦袋飛快的運算後不禁脫口而出「阿，必勝克」，在一旁的 Roy 正好吃著披薩當晚餐；Zolark 想了一下便對 紀政良 說「那你不就必輸紀？」這時大廳裡正好響起畢書盡的 <Come back to me>，一切都像是在預告著這場遊戲的結局。