1 證明方法

1.1 反證法

欲證明某命題時，我們可以先假設該命題不成立，並證明這樣子會產生矛盾，從而得證原命題成立。

例題 1

證明 $\sqrt{2}$ 為無理數。

證明

假設 $\sqrt{2}$ 為有理數，則必定存在 p, q 滿足

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \text{其中 } p, q \in \mathbb{N}, (p, q) = 1$$

將兩邊平方得

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

則 p 必為 2 的倍數，令 $p = 2k$，$k \in \mathbb{N}$，代入上式：

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{4k^2}{q^2} \\ \Rightarrow & q^2 = 2k^2 \\ \Rightarrow & 2|q \\ \Rightarrow & (p, q) \neq 1 \end{aligned}$$

與假設矛盾，因此得證 $\sqrt{2}$ 為無理數。

1.2 數學歸納法

對於一個帶有整數參數 n 的命題 $P(n)$，若我們希望證明對於所有的 $n \geq c$，$P(n)$ 皆成立 (為真)，則只要證明以下兩點即可：

(1) $P(c)$ 為真

(2) 對於所有 $k \geq c$，若 $P(k)$ 為真，則 $P(k+1)$ 也為真

為什麼這樣就證明完了呢？我們可以想一下，要怎麼證明「對於所有 $n \geq c$，$P(n)$ 都成立」這種命題？當然一開始可以先代入前幾項，也就是 $P(c), P(c+1), P(c+2)$，一個一個慢慢嘗試，發現真的全部都成立，但是這樣並不構成一個證明，畢竟誰知道他不會在 $P(c+10000)$ 的時候就不成立了呢？當然，如果把所有大於等於 c 的整數都代入過就可以證明 (窮舉法)，但是這樣的數有無窮多個，這個方法當然不可行。

數學歸納法的精神就像推骨牌一樣。想像每個整數都是一張骨牌，而現在你想證明所有的骨牌都會倒下，但是從上面的描述可以知道，一張一張證明是永遠都證明不完的，因此我們換個方法：

(1) 證明第一張骨牌會倒下

(2) 證明如果一張骨牌倒下了，這張骨牌之後的下一張骨牌也一定會倒下

這樣是不是就證明了所有骨牌都會倒下了呢？因為第一張骨牌倒了，第二張也會倒；因為第二張倒了，第三張也會倒 $\cdots$ 如此一來，所有的骨牌一定都會倒下了。特別一提的是，一定要兩個條件都滿足，證明才會成立。如果只證明了第一點，則無法保證後面的骨牌也會倒下；如果只證明了第二點，則第一張骨牌可能沒倒，這樣後面就沒戲唱了。

大家可以發現，數學歸納法與大家熟悉的遞迴關係，本質其實是一樣的，數學歸納法中的初始條件可以想像成遞迴關係的終止條件，逐步遞推也就是遞迴中問題的拆解。換句話說，其實遞迴關係的正確性就是基於數學歸納法所證明的！數學歸納法在遞迴關係的證明上是非常好用的工具，希望大家好好體會一下。

例題 2

證明對於至少為 4 的正整數 n，滿足 $n! > 2^n$。

證明

證明分為兩部份

(1) 證明當 $n = 4$ 時命題成立：
這一步很簡單，代入後得到

$$4! > 2^4$$

命題成立。

(2) 證明若在 $n = k$ 時命題成立, 則在 $n = k + 1$ 時命題也會成立 $(k \geq 4)$：
假設 $n = k$ 時命題成立，即

$$k! > 2^k$$

則當 $n = k + 1$ 時，

$$\begin{aligned}(k+1)! &= k! \times (k+1) \\ &> k! \times 2 \quad (\because k+1 > 2) \\ &> 2^k \times 2 \quad (\because k! > 2^k) \\ &> 2^{k+1}\end{aligned}$$

命題仍然成立。

由 (1),(2)，以數學歸納法得證。

例題 3

請證明：$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$ (對所有非負整數 n)。

證明

證明分為兩部份

(1) 證明當 $n = 0$ 時命題成立：
代入後得到

$$\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1 = 2^{0+1} - 1$$

命題成立。

(2) 證明若在 $n = k$ 時命題成立, 則在 $n = k + 1$ 時命題也會成立 $(k \geq 0)$：
假設 $n = k$ 時命題成立，即

$$\sum_{i=0}^{k} 2^i = 2^{k+1} - 1$$

則當 $n = k + 1$ 時，

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k+1} 2^i &= 2^{k+1} + \sum_{i=0}^{k} 2^i \\ &= 2^{k+1} + (2^{k+1} - 1) \\ &= 2 \cdot 2^{k+1} - 1 \\ &= 2^{(k+1)+1} - 1\end{aligned}$$

命題仍然成立。

由 (1),(2)，以數學歸納法得證。

例題 4

設遞迴函數 $f(1) = 2, f(n) = 2f(n-1) + 2^n$。證明：對所有正整數 n，$f(n) = n \cdot 2^n$。

證明

證明分為兩部份

(1) 證明當 $n = 1$ 時命題成立：
代入後得到

$$f(1) = 2 = 1 \cdot 2^1$$

命題成立。

(2) 證明若在 $n = k$ 時命題成立, 則在 $n = k + 1$ 時命題也會成立 $(k > 0)$：
假設 $n = k$ 時命題成立，即

$$f(k) = k \cdot 2^k$$

則當 $n = k + 1$ 時，

$$\begin{aligned} f(k+1) &= 2f(k) + 2^{k+1} \\ &= 2(k \cdot 2^k) + 2^{k+1} \\ &= k \cdot 2^{k+1} + 2^{k+1} \\ &= (k+1) \cdot 2^{k+1} \end{aligned}$$

命題仍然成立。

由 (1),(2)，以數學歸納法得證。

1.3 構造法

有些命題要求證明滿足某些條件的元素必定存在，稱為「存在性證明」。此時最直接的證明方法就是構造出符合命題的實例，有時候構造法也可以用來構造一些反例，好配合反證法來證明命題。這類問題的證明通常需要經驗與靈感，可以說是最直接卻也最困難的一種證明方法。

例題 5

試證明對於任意正整數 x 都存在一個質數 p，滿足 p 的下一個質數 q 與 p 的距離 (即 $q - p$) 至少為 x。

證明

若 $x = 1$，則取 $p = 2$，$q = 3$，命題成立。若 $x > 1$，則取 $n = x!$，如此 $n + 2$ 被 2 整除、$n + 3$ 被 3 整除、...、$n + x$ 被 x 整除，因而這連續的 $x - 1$ 個數都是合數。取比 $n + 2$ 小的數中最大的質數為 p (由 $n \geq 2$，滿足的 p 必定存在，取比 $n + x$ 大的數中最小的質數為 q (由於質數有無窮多個，滿足的 q 一定存在)，則 $q - p \geq x$，命題成立。

習題

1. (10 pts) 在 $n(n>1)$ 個人當中，任意兩人可能互相認識或互相不認識，證明必定存在兩個人認識的人數一樣多。

2. (20 pts) 使用數學歸納法證明：對於正整數 $n \geq 3$，滿足 $3^n + 4^n < 5^n$。

3. (20 pts) 使用數學歸納法證明：對於正整數 $n \geq 4$，滿足 $3^n > n^3$。

4. (20 pts) 序列開始時只包含一個正整數 n，接著每次對此序列進行如下操作：在序列中找到任意一個大於 1 的正整數 k，接著把此數換成任意兩個正整數 a, b，其中 $a+b=k$，則此操作得 $a \times b$ 分，且數列會多出一項。重複進行以上操作，直到序列中的數均為 1 為止。試證：所有操作的得分總和為 $\frac{n^2-n}{2}$。

5. (20 pts) 有 $n(n \geq 2)$ 個人進行投票，每個人可以投一票給除了自己以外的其他任何人，且不能投廢票。假設最後這 n 個人分別得到了 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 票，請證明只要 $(a_1, \cdots, a_n)$ 滿足以下兩個式子，就是一個可能的投票結果 (也就是存在一種投票方式可以得到該結果)。

   - $0 \leq a_k \leq n-1$
   - $\sum_{k=1}^{n} a_k = n$

   ※ 請注意，要證明的是「滿足式子 ⇒ 合法投票」，而不是「合法投票 ⇒ 滿足式子」，後者很明顯是對的。