算法班手寫作業 10

李緒成

May 28, 2021

1. 證明 $\text{lowbit}(x) = x\&(-x)$

 - 設 $x > 0$，設 x 的二進位表示法中，第 x 位為 1，第 0 到第 $k-1$ 位都為 0
 - 對 x 的二進位表示法取反 $(\sim x)$，可以得到 $\sim x$ 的二進位表示法中，第 k 位為 0，第 0 到第 $k-1$ 位都為 1
 - 得到 $\sim x+1$ 的二進位表示法的第 $k+1$ 位至其最高位都為與 x 的二進位表示法中相反的數字
 - 而 $\sim x+1$ 的二進位表示法的第 k 為 1，第 0 至第 $k-1$ 位都為 0
 - 且 x 的二進位表示法的第 k 位為 1
 - 所以將 $\sim x+1$ 與 x 進行 & 運算後，即可得到 x 的 lowbit
 - 又 $-x = \sim x+1$ ，所以 $\text{lowbit}(x) = x\&(-x)$

2. (a) 證明 $\sum_{i=0}^{n} i \cdot 2^{i-1} = (n-1) \cdot 2^n + 1$

i. 證 $n = 1$ 時成立:
帶入後得到

$$\sum_{i=0}^{1} i \cdot 2^{i-1} = (1-1) \cdot 2^1 + 1 = 1$$

命題成立

ii. 證若在 $n = k$ 時成立, 則 $n = k + 1$ 時也會成立:
假設 $n = k$ 時成立，即

$$\sum_{i=0}^{k} i \cdot 2^{i-1} = (k-1) \cdot 2^k + 1$$

則當 $n = k + 1$ 時

$$\sum_{i=0}^{k+1} i \cdot 2^{i-1} = ((k+1)-1) \cdot 2^{k+1} + 1$$

$$\sum_{i=0}^{k} i \cdot 2^{i-1} + (k+1) \cdot 2^k = 2k \cdot 2^k + 1$$

$$\sum_{i=0}^{k} i \cdot 2^{i-1} + (k+1) \cdot 2^k = (k-1) \cdot 2^k + (k+1) \cdot 2^k + 1$$

$$\sum_{i=0}^{k} i \cdot 2^{i-1} + {\color{red}(k+1) \cdot 2^k} = (k-1) \cdot 2^k + 1 + {\color{red}(k+1) \cdot 2^k}$$

命題仍然成立
由 i，ii 以數學歸納法得證

(b) 證明：$f(m) \geq m \cdot 2^{m-1}$, for $m \geq 0$ (即：$f(m) \geq n^2 \cdot log_2 n$, for $n = 2^m, m \geq 0$)

i. 證 $m = 1$ 時成立:
帶入後得到

$$f(1) = 2^1 + \sum_{k=0}^{0} f(k) \geq 1 \cdot 2^0$$

$$3 \geq 1$$

命題成立

ii. 證若在 $n = t$ 時成立, 則 $n = t + 1$ 時也會成立:
假設 $m = t$ 時成立，即

$$f(t) = 2^t + \sum_{k=0}^{t-1} f(k) \geq t \cdot 2^{t-1}$$

則當 $n = t + 1$ 時

$$\begin{aligned} f(t+1) &= 2^{t+1} + \sum_{k=0}^{t} f(k) \geq (t+1) \cdot 2^t \\ &= 2^{t+1} + \sum_{k=0}^{t} f(k) \geq (2t+2) \cdot 2^{t-1} \\ &= 2^{t+1} + \sum_{k=0}^{t} f(k) \geq 2t \cdot 2^{t-1} + 2 \cdot 2^{t-1} \\ &= 2^{t+1} + f(t) + \sum_{k=0}^{t-1} f(k) \geq 2t \cdot 2^{t-1} + 2^t \\ &= f(t) + 2^t + 2^t + \sum_{k=0}^{t-1} f(k) \geq 2t \cdot 2^{t-1} + 2^t \\ &= f(t) + 2^t + f(t) \geq 2t \cdot 2^{t-1} + 2^t \\ &= 2 \cdot f(t) + 2^t \geq 2 \cdot t \cdot 2^{t-1} + 2^t \end{aligned}$$

命題仍然成立
由 i，ii 以數學歸納法得證

3. (a) $\mathrm{query}(2,8)$ 或是假設有 n 個元素，則 $\mathrm{query}(2,n)$
   (b) $O((\log_2 n)^2)$
4. (a) $\mathrm{ans} = \mathrm{query}(\mathrm{dif}, x)$
   (b) $\mathrm{modify}(\mathrm{dif}, b+1, -\mathrm{val})$,$\mathrm{modify}(\mathrm{dif2}, b+1, -\mathrm{val}\cdot(b+1))$;
   $\mathrm{modify}(\mathrm{dif}, a,\mathrm{val})$, $\mathrm{modify}(\mathrm{dif2}, a,\mathrm{val}\cdot a)$;
   (c) $\sum\limits_{i=1}^{x} arr[i] = \sum\limits_{i=1}^{x}(x-i+1)\mathrm{dif}[i]$
   (d) $\mathrm{query}(\mathrm{dif}, x)\cdot(x+1) - \mathrm{query}(\mathrm{dif2}, x)$