1. 請回答以下問題：

(a) 請計算 $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n-1}$

解答

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}$$
$$\because \lim_{n\to\infty}(3+\frac{1}{n})=3, \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})=1$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}=\frac{3}{1}=3$$

(b) 請計算 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}$

解答

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+\frac{1}{n}}$$
$$\because \lim_{n\to\infty}(n+\frac{1}{n})=\infty$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+\frac{1}{n}}=0$$

(c) 請證明或否證 $f(n)\in O(2^n) \iff f(n)\in O(2^{n+1})$

解答

此敘述為真，證明如下。

(1) 證明 $f(n)\in O(2^n)\Longrightarrow f(n)\in O(2^{(n+1)})$：

$$\because f(n)\in O(2^n)$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{2^n}=c \quad (c\text{為一常數})$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{2^{n+1}}=\frac{c}{2} \quad (\text{仍然為一常數})$$
$$\therefore f(n)\in O(2^{n+1})$$

(2) 證明 $f(n) \in O(2^n) \Longleftarrow f(n) \in O(2^{n+1})$：

$$
\begin{aligned}
&\because f(n) \in O(2^{n+1}) \\
&\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{2^{n+1}} = c \quad (c\text{為一常數}) \\
&\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{2^{n}} = 2c \quad (\text{仍然為一常數}) \\
&\therefore f(n) \in O(2^n)
\end{aligned}
$$

由 (1),(2)，得到 $f(n) \in O(2^n) \iff f(n) \in O(2^{(n+1)})$ ，該命題為真。

(d) 請證明或否證 $f(n) \in O(n!) \iff f(n) \in O((n+1)!)$

解答

此敘述為假，證明如下。

(1) 證明 $f(n) \in O(n!) \Longrightarrow f(n) \in O((n+1)!)$：

$$
\begin{aligned}
&\because f(n) \in O(n!) \\
&\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n!} = c \quad (c\text{為一常數}) \\
&\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{c}{n+1} = 0 \quad (\text{仍然為一常數}) \\
&\therefore f(n) \in O((n+1)!)
\end{aligned}
$$

(2) 證明 $f(n) \in O(n!) \Longleftarrow f(n) \in O((n+1)!)$：

$$
\begin{aligned}
&\because f(n) \in O((n+1)!) \\
&\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{(n+1)!} = c \quad (c\text{為一常數}) \\
&\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n!} = \lim_{n\to\infty} c(n+1) = \begin{cases} 0 & \text{, if } c = 0 \\ \infty & \text{, if } c > 0 \end{cases} \\
&\therefore f(n) \notin O(n!)
\end{aligned}
$$

由 (1),(2) 可知，往右的箭頭成立，但往左的箭頭並不成立，因此該命題為假。

另解

此題也可以直接給出反例，例如令 $f(n) = (n+1)!$，並證明 $f(n) \in O((n+1)!)$ 和 $f(n) \notin O(n!)$ 即可。

(e) 請證明或否證 $f(n) \in O(n) \implies 2^{f(n)} \in O(2^n)$

解答

此敘述為假，證明如下。
令 $f(n) = 2n$，則

(1) 證明 $f(n) \in O(n)$：

$$\because \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n} = 2 \quad (\text{為一常數})$$
$$\therefore f(n) \in O(n)$$

(2) 證明 $2^{f(n)} \notin O(2^n)$：
先化簡得到 $2^{f(n)} = 2^{2n} = 4^n$。接著，

$$\because \lim_{n\to\infty} \frac{2^{f(n)}}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} (\frac{4}{2})^n = \lim_{n\to\infty} 2^n = \infty \quad (\text{不為一常數})$$
$$\therefore 2^f(n) \notin O(2^n)$$

由 (1),(2) 可知，該命題為假。

2. 已知一遞迴函數

$$f(n) = \begin{cases} 1 & , n = 1 \\ 2f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 2n & , n > 1 \end{cases}$$

證明對所有滿足 $n = 2^m$，其中 m 為正整數的 n，$f(n) \leq 3n \log_2 n$。

解答

先將題目中的 n 以 2^m 取代，得到遞迴函式

$$f(2^m) = \begin{cases} 1 & , m = 0 \\ 2f(2^{m-1}) + 2^{m+1} & , m > 0 \end{cases}$$

且要證明的式子為

$$f(2^m) \leq 3m \cdot 2^m \text{ for } m \geq 1$$

(1) 證明當 $m = 1$ 時命題成立：
在 $m = 1$ 時，

$$f(2^m) = 2f(2^0) + 2^2 = 6 \leq 3 \cdot 1 \cdot 2^1$$

命題成立。

(2) 證明若在 $m = k$ 時命題成立, 則在 $m = k + 1$ 時命題也會成立 $(k \geq 1)$：
假設 $m = k$ 時命題成立，即

$$f(2^k) \leq 3k \cdot 2^k$$

則當 $m = k+1$ 時

$$\begin{aligned} f(2^{k+1}) &= 2f(2^k) + 2^{k+2} \\ &\leq 2 \cdot 3k \cdot 2^k + 2^{k+2} \\ &= 3k \cdot 2^{k+1} + 2 \cdot 2^{k+1} \\ &= 3(k + \frac{2}{3}) \cdot 2^{k+1} \\ &\leq 3(k+1) \cdot 2^{k+1} \end{aligned}$$

命題仍然成立。

由 (1),(2)，以數學歸納法得證。

3. 已知一遞迴函數

$$f(n) = \begin{cases} 1 & , n = 1 \\ f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + f(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + n^2 & , n > 1 \end{cases}$$

證明對所有正整數 n，$f(n) \leq 2n^2 - 1$。(此時代表 $f(n) \in O(n^2)$)

解答

(1) 證明當 $n = 1$ 時命題成立：
在 $n = 1$ 時，

$$f(1) = 1 \leq 2 \cdot 1^2 - 1$$

命題成立。

(2) 證明若在 $n = 1 \cdots k$ 時命題成立, 則在 $n = k+1$ 時命題也會成立 $(k \geq 1)$：
假設 $n = 1 \cdots k$ 時命題成立，即

$$f(x) \leq 2x^2 - 1 \text{ for } 1 \leq x \leq k$$

則當 $n = k+1$ 時，考慮其奇偶性

(i) $k+1$ 為偶數，則令 $k+1 = 2m$，m 為正整數，得到

$$\begin{aligned} f(k+1) &= f(2m) \\ &= f(m) + f(m) + (2m)^2 \\ &\leq (2m^2 - 1) + (2m^2 - 1) + (2m)^2 \\ &= 8m^2 - 2 \\ &\leq 2(2m)^2 - 1 \\ &= 2(k+1)^2 - 1 \end{aligned}$$

(ii) $k+1$ 為奇數，則令 $k+1=2m+1$，m 為正整數，得到

$$\begin{aligned}
f(k+1) &= f(2m+1) \\
&= f(m)+f(m+1)+(2m+1)^2 \\
&\le (2m^2-1)+[2(m+1)^2-1]+(2m+1)^2 \\
&= 8m^2+8m+1 \\
&= 2(2m+1)^2-1 \\
&= 2(k+1)^2-1
\end{aligned}$$

兩種情況之下命題皆成立。

由 (1),(2)，以數學歸納法得證。