1. 在影片中提到了換零錢的題目，敘述如下：已知有 n 種貨幣面額 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ ，不失一般性可以假設 $c_1 < c_2 < \cdots < c_n$。對於任意兩種面額 c_i, c_j $(i < j)$，滿足 c_j 一定是 c_i 的倍數，也就是 $c_i | c_j$ ，而且為了確保所有整數的金額都可以湊出，$c_1 = 1$ (例如台灣的硬幣去掉 20 元就滿足這些要求)。對於任意正整數 x ，請問如何使用盡量少的零錢個數湊出 x 元呢？

   (a) 請證明在題目的條件之下，盡量使用面額較高的零錢可以得到最佳解。意即要湊出 x ，可以先使用一枚面額不大於 x 的最大面額零錢 c_i ，剩下的 $x - c_i$ 元用相同的方法湊出。

   解答

   首先，我們做以下定義：

   i. 對於 $1 \le i \le n-1$，令 $r_i = \frac{c_{i+1}}{c_i}$，也就是說 r_i 個第 i 種零錢，價值等於一個第 $i+1$ 種零錢。
   ii. 對於 $1 \le i \le n-1$，令 k_i 為最優解下，第 i 種零錢需要取的數量。
   iii. 假設 c_m 為不大於 x 的最大面額零錢。

   接下來，由於對於第 i $(1 \le i \le n-1)$ 種零錢，每 r_i 個零錢可以換成一個第 $i+1$ 種零錢，而 $r_i \ge 2 > 1$，因此一旦有 r_i 以上個第 i 種零錢，就必定不會是最優解，因此顯而易見的有 $k_i \le r_i - 1, \forall 1 \le i \le n-1$。

   然後我們利用反證法，如果最優解不能利用先取一個 c_m 來得到，表示一個 c_m 都不能取，亦即 $k_m = 0$（同時 $\forall p > m$，因為 $x < c_p$，顯而易見 $k_p = 0$），那麼取的零錢總價值為

   $$\sum_{i=1}^{m-1} k_i c_i \le \sum_{i=1}^{m-1} (r_i - 1) c_i = \sum_{i=1}^{m-1} r_i c_i - c_i = \sum_{i=1}^{m-1} c_{i+1} - c_i = c_m - c_1 < c_m \le x$$

   與湊出總合為 x 元矛盾。

   (b) 在不滿足 $\forall i < j, c_i | c_j$ 的情況下，第一題的貪心算法仍然可以得到最佳解嗎？如果可以，請證明之（可以的意思是不論面額和要湊出的金額為多少，貪心算法得到的解都是正確的）；如果不行，請給出造成反例的面額 $c_1 \cdots c_n$ 、欲湊出的金額 x 、使用貪心法得到的解以及能比貪心法得到的解使用更少個零錢的解。

   解答

   令 $n = 3, c_1 = 1, c_2 = 3, c_3 = 4, x = 6$ ，則貪心算法會使用 $1 \cdot c_3 + 2 \cdot c_1$ 共三枚硬幣，但最佳解為 $2 \cdot c_2$，只使用兩枚硬幣，得證貪心算法不能得到最佳解。

   (c) 在不滿足 $\forall i < j, c_i | c_j$ 的情況下，第一題的貪心算法一定不能得到最佳解嗎？如

果不行，請證明之；如果可以，請給出一組貪心法適用的面額 $c_1 \cdots c_n$ ，並證明在該組面額上，使用貪心法湊出任意金額都可以得到最佳解。

解答

令 $n = 3, c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 3$ ，以下證明貪心算法可以得到最佳解。
首先，我們令貪心算法得到的方案中，每種硬幣的數量為 a_1, a_2, a_3。考慮 x 除以 3 的餘數，貪心算法的方案為

$$(a_1, a_2, a_3) = \begin{cases} (0, 0, \lfloor \frac{x}{3} \rfloor) & \text{if } x \equiv 0 \pmod 3 \\ (1, 0, \lfloor \frac{x}{3} \rfloor) & \text{if } x \equiv 1 \pmod 3 \\ (0, 1, \lfloor \frac{x}{3} \rfloor) & \text{if } x \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$$

在任何情況下，貪心算法所需的硬幣總數量都是 $\lceil \frac{x}{3} \rceil$。
接著我們嘗試用反證法證明不存在使用少於 $\lceil \frac{x}{3} \rceil$ 枚硬幣的作法。
假設存在一組方案 (b_1, b_2, b_3) 使得 $b_1 + b_2 + b_3 < \lceil \frac{x}{3} \rceil$，因為 b_1, b_2, b_3 都是整數，$b_1 + b_2 + b_3 \le \lceil \frac{x}{3} \rceil - 1$。
又一枚硬幣的最大面額為 3，所以得到的金額應該不超過 $3 \times (\lceil \frac{x}{3} \rceil - 1)$。

$$\begin{aligned} 3 \times (\lceil \frac{x}{3} \rceil - 1) &\le 3 \times \lceil \frac{x}{3} \rceil - 3 \\ &< 3 \times (\frac{x}{3} + 1) - 3 \\ &= x \end{aligned}$$

所以方案 (b_1, b_2, b_3) 得到的金額必定小於 x，比貪心算法更佳的解不存在，得證貪心算法得到的解為最佳解。

2. 已知 n 個區間 $(l_1, r_1), (l_2, r_2), \cdots, (l_n, r_n)$ ，希望可以挑選出盡量多個不重疊的區間。請證明先將區間照右界 (r_i) 由小到大排序後，依序挑選與當前挑出的區間不重疊的區間，如此可以挑選出最多的區間。

(例：有四個區間 $(1, 4), (2, 5), (3, 7), (6, 8)$ ，則上述貪心演算法會依序挑選 $(1, 4)$ 和 $(6, 8)$ ，得到最多可以挑選出 2 個區間。當然最佳解不唯一，演算法也可以改成照區間左界由大到小排序，此時挑選出的區間就是 $(6, 8)$ 和 $(2, 5)$ ，但區間數量仍然是最大值。)

解答

假設 $(l_1, r_1), \cdots, (l_n, r_n)$ 為依照區間右界由小到大排序的結果，滿足

$$\forall i \le j, r_i \le r_j$$

而貪心算法選擇的區間編號為 $a_1 \cdots a_p$ 共 p 個區間，任意方法選擇的區間編號

為 $b_1 \cdots b_q$ 共 q 個區間，需要證明的式子為 $p \geq q$。

首先，用數學歸納法證明 $\forall i \leq \min(p, q), a_i \leq b_i$。

(1) 證明當 $n = 1$ 時命題成立：
根據貪心算法，第一個區間一定會被選到，因此 $a_1 = 1 \leq b_1$，命題成立。

(2) 證明若在 $n = k$ 時命題成立, 則在 $n = k + 1 \leq \min(p, q)$ 時命題也會成立：
假設 $n = k$ 時命題成立，即 $a_k \leq b_k$，則由區間的排序方法可以得到

$$r_{a_1} \leq \cdots \leq r_{a_k} \leq r_{b_k}$$

又，區間不能重疊，因此

$$r_{b_k} \leq l_{b_{k+1}}$$

綜合以上兩式得到

$$r_{a_1} \leq \cdots \leq r_{a_k} \leq l_{b_{k+1}}$$

由以上不等式，第 b_{k+1} 個區間一定不會和編號為 $a_1 \cdots a_k$ 的區間重疊，因此 a_{k+1} 不會比 b_{k+1} 大，也就是 $a_{k+1} \leq b_{k+1}$，命題仍然成立。

由 (1),(2)，以數學歸納法得證 $\forall i \leq \min(p, q), a_i \leq b_i$。

假設 $p < q$ ，則考慮第 b_{p+1} 個區間，由和數學歸納法中相同的證明可以得到

$$r_{a_1} \leq \cdots \leq r_{a_p} \leq l_{b_{p+1}}$$

且

$$a_p \leq b_p < b_{p+1}$$

意即第 b_{p+1} 個區間和所有編號 $a_1 \cdots a_p$ 的區間都沒有交集，但貪心算法卻沒有選擇任何編號大於 a_p 的區間，矛盾。因此假設錯誤，得證 $p \geq q$ 。

3. 考慮以下的可分割背包問題：你有一個承重最多 L 的背包，並有 n 個物品，其中第 i 個有重量 w_i 與價值 c_i，每個物品都可以分割，也就是說，對於任意第 i 個物品，你可以選擇要只帶其中 p $(0 \leq p \leq 1)$ 的部分。此時帶這個物品的重量與效用就分別是 pw_i 與 pc_i。

   請證明以下策略為最優解：將物品以 $\frac{c_i}{w_i}$ 由大至小排序，由前往後，如果能取完整個物品則取，不能（背包滿了）則只取剛好讓背包滿的那部分。

解答

利用反證法，如果最佳解有 $\frac{c_i}{w_i}$ 較大的物品 i 沒有被取完（剩下 W_1 沒被取），而 $\frac{c_j}{w_j}$ 較小的物品 j 被取了重量為 W_2 的部分，令 $W = \min(W_1, W_2) > 0$，則將重量為 W 的物品 j 換成重量為 W 的物品 i，價值的改變為 $W(\frac{c_i}{w_i} - \frac{c_j}{w_j}) > 0$，與原先為最優解的假設矛盾。