1 NP 問題

從開始學習演算法到現在，我們已經針對許多問題提出了高效的算法，而這些算法通常有多項式級別的複雜度，然而有些問題人類還是一籌莫展，沒辦法發展出多項式級別的解法。底下我們會簡單地介紹 *NP* 系列的複雜度類別，並且介紹一些經典的 *NP* 類問題。為了分析所謂的「問題」，在開始之前，我們得先簡單的定義我們要討論的「決定性問題」是什麼：

Definition 1 一個決定性問題必須要有一個問題的「敘述」，滿足我們可以透過此「敘述」將所有的「輸入」分割成「是」(`Yes`) 或「否」(`No`) 兩種結果。

一個決定性問題的解則必須給出對應的方案：`Yes/No` 問題如果答案為 `Yes`，那麼須給出一組滿足條件的解；如果答案為 `No`，也須給出一個滿足條件的證明 (本文終將不會討論到 `No` 的情形，所以請先別太在意)。

舉個經典的決定性問題例子：給定一個正整數 n，決定 n 是否為質數。在這個問題中，問題的敘述便將所有的質數 n 分割成了 `Yes`，除此之外都算是 `No`。這邊可以注意到我們並沒有討論該如何判斷輸入被分割到哪裡，因為那是「演算法」的任務。

看到這裡可能會有一個疑問：那像背包問題 (找到最好的選擇使得價值總和最大) 這類問題又算什麼？這種找到極值的問題大多數都被稱作「最優化問題」，而「最優化問題」往往皆被認為存在「對應的決定性問題」。例如，背包問題對應的決定性問題便是「是否存在一種選擇，使得價值總和小於 k」。

一般認為，大多數問題只要解決了對應的決定性問題就可以同樣被解決 (像是我們只要在背包問題的對應決定性問題「對答案二分搜」，就可以得到原始背包問題的答案)，也因此在資訊科學當中決定性問題會成為大家研究的主要對象。所以，以下討論的問題將皆為「決定性問題」。

接著我們要介紹四種問題的級別：*P*、*NP*、*NP-hard*、*NP-complete* 的定義

Definition 2 *P (polynomial time)* 是由存在多項式複雜度解演算法的問題形成的集合。

這是我們目前最熟悉的複雜度類型，舉凡有 $O(n), O(n\log n), O(nk)$ 時間複雜度解法的問題都屬於此類。

Definition 3 *NP (nondeterministic polynomial time)* 是由存在多項式複雜度驗證演算法的問題形成的集合。

※*NP* 並不是 not polynomial time。

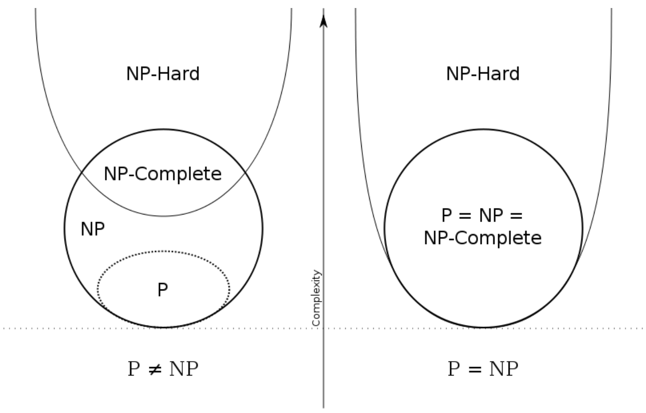
對於一個問題 P 以及一個對於此問題的輸入 w，如果 P 對 w 有解 (P 為最優化問題，或者 P 為 `Yes/No` 問題且答案為 `Yes`)，那麼對於此解 s，若存在一個演算法能驗證 s 是否為 P 對 w 的解，那麼我們說這個演算法是 P 的一個驗證演算法 (identifier)。舉例而言，排序問題 (P) 的輸入為一組序列 (w)，解也是一組序列 (s)，而我們可以透過檢查 s 是否遞增與 s 的元素是否可與 w 內相同的元素一一對應，來驗證 s 是否為排序問題對 w 的一組解。我們至少可以在 $O(n^2)$ 內完成這件事情，因此排序問題也屬於 *NP* 集合。顯然 P 是 *NP* 的子集 (一個可以得到解的演算法本身就可以作為一個驗證演算法)，但是否 *NP* 也是 P 的子集 (即 P=*NP*) 則尚未確定。

Definition 4 *NP-hard* 是由滿足如下條件的問題 P 組成的集合：如果 P 存在多項式解演算法，則任意屬於 *NP* 集合的問題都存在多項式解演算法。意即，所有屬於 *NP* 的問題都可以在多項式時間歸約到 P 問題。

也就是說，對於一個屬於 *NP-hard* 的問題 P ，以及任意一個屬於 *NP* 集合的問題 Q，Q 都可以在多項式時間內歸約到 P。要證明一個問題是 *NP-hard* 非常不容易，因為必須要能夠證明任意一個 *NP* 問題都能夠歸約到該問題。

Definition 5 *NP-complete(NPC)* = *NP* ∩ *NP-hard*

NP-hard 並不一定完全包含 *NP*，兩者的交集為 *NPC* 。以下為 $P \neq NP$ 和 $P = NP$ 時，P、*NP*、*NPC*、*NP-hard* 之間的關係：(Image from Wiki)



要證明一個問題屬於 *NP-complete* 非常困難，因為要同時證明屬於 *NP* 和 *NP-hard*。一般來說，要證明一個問題屬於 *NP* 其實不太困難，瓶頸還是在證明屬於 *NP-hard*。以下將介紹第一個被證明為 *NP-complete* 的問題。

Definition 6 *CNF (Conjunctive normal form)* 的定義如下：

- 一個布林變數 (Boolean variable) v 只可能為兩種值：`True(T)` 或 `False(F)`。若 $v = \mathtt{T}$，則 $\neg v = \mathtt{F}$；若 $v = \mathtt{F}$，則 $\neg v = \mathtt{T}$。
- 一個文字 (literal) l 形如 v 或 $\neg v$
- 一個子句 (clause) c_i 形如 $(l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_{m_i})$
- 一個合取範式 (CNF) 的布林算式 (Boolean formula) 形如 $c_1 \wedge c_2 \wedge \cdots \wedge c_n$

(注：$\vee$ 為布林運算中的「或 (OR)」，$\wedge$ 為布林運算中的「且 (AND)」)

舉例來說，算式 $(a \vee b) \wedge (\neg b \vee c)$ 是 CNF，而算式 $(a \wedge b) \vee (\neg b \wedge c)$ 則不是 CNF。

Definition 7 *CNF-SAT (Boolean Satisfiability problem)* 的輸入為一個布林變數集合 X 以及一個由 X 構成的 *CNF* 算式 f，其問題為「是否存在一種賦予 X 內所有變數值的方法，使得 f 的算式結果為真」。

依照一開始對問題的定義，如果該問題答案為 `Yes`，需要給出每個變數的值；如果答案為 `No`，則需要給出證明 (我們不會討論到這個部分)。以上述的算式舉例，輸入為 $X = \{a, b, c\}, f = (a \vee b) \wedge (\neg b \vee c)$，而答案為 `Yes`，因為可以賦值 $a = \mathtt{T}, b = \mathtt{F}, c = \mathtt{T}$ 來使 f 的運算結果為真。

Theorem 1 *(Cook-Levin Theorem) CNF-SAT $\in$ NPC*。

有了以上定理，我們就可以更容易的證明一個問題 P 屬於 *NP-hard* 了：只要隨意找一個屬於 *NP-hard* 的問題 Q (例如 CNF-SAT)，並證明 Q 可以在多項式時間內歸約到 P 就可以了。如此一來，所有屬於 *NP* 的問題都可以先歸約到 Q (由 *NP-hard* 的定義)，再由 Q 歸約到 P ，於是所有屬於 *NP* 的問題都可以在多項式時間內歸約到 P ，因此 P 就屬於 *NP-hard*。

例題 1

3-CNF 為一種特殊形態的 CNF ，其中每個 clause 都恰好有 3 個 literal。請證明 3-CNF-SAT $\in$ *NPC*。

解答

證明分為兩部分，需要證明 3-CNF-SAT $\in$ *NP* 和 3-CNF-SAT $\in$ *NP-hard*

(1) 首先證明 3-CNF-SAT $\in$ *NP*。
驗證解答很簡單，只要將每個變數的值代入，就可以在 $O(n)$(n 為 clause 數量) 時間內得到算式的結果，再判斷是否為 `T` 就可以了。由於可以在多項式時間內驗證解答，3-CNF-SAT $\in$ *NP*。

(2) 為了證明 3-CNF-SAT $\in$ *NP-hard*，我們將已知為 *NP-hard* 的 CNF-SAT 問題歸約到 3-CNF-SAT 問題。
對於任意的 CNF 算式 $f = c_1 \wedge c_2 \wedge \cdots \wedge c_n$，$c_i$ 不一定恰好包含 3 個 literal，但我們可以用以下方法產生等價的 3-CNF 算式。

- $c_i = (l_1)$：將 c_i 替換為 $(l_1 \vee l_1 \vee l_1)$
- $c_i = (l_1 \vee l_2)$：將 c_i 替換為 $(l_1 \vee l_2 \vee l_2)$
- $c_i = (l_1 \vee l_2 \vee l_3)$：維持不變
- $c_i = (l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_{m_i})$：將 c_i 替換為 $(l_1 \vee l_2 \vee t_1) \wedge (\neg t_1 \vee l_3 \vee t_2) \wedge (\neg t_2 \vee l_4 \vee t_3) \wedge \cdots \wedge (\neg t_{m_i-3} \vee l_{m_i-1} \vee l_{m_i})$，其中 t_j 為新增的變數。

替換的複雜度 $O(nm)$，為多項式時間。經替換後的算式 f' 為 3-CNF-SAT 的合法輸入，且雖然變數數量不同 (f' 新增了多項式量級的變數量)，但 f 有解 $\Leftrightarrow$ f' 有解 (術語為 equisatisfiable)，於是我們就將 CNF-SAT 問題歸約到 3-CNF-SAT，從而證明了 3-CNF-SAT $\in$ *NP-hard*。

由 (1),(2)，得證 3-CNF-SAT $\in$ *NPC*。

習題

1. 請找出可以讓以下布林算式的運算結果為 `T` 的解。如果無解，請直接寫無解。
   (a) (10 pts) $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (\neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee b \vee c)$
   (b) (10 pts) $(a \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (a \vee \neg c \vee d)$

2. De Morgan's laws (狄摩根定律)：
   - $\neg(a \vee b) = (\neg a) \wedge (\neg b)$
   - $\neg(a \wedge b) = (\neg a) \vee (\neg b)$

   DNF (Disjunctive normal form) 的定義如下：
   - 一個布林變數 v 只可能為兩種值：`True(T)` 或 `False(F)`。
   - 一個文字 (literal) l 形如 v 或 $\neg v$
   - 一個子句 (clause) c_i 形如 $(l_1 \wedge l_2 \wedge \cdots \wedge l_{m_i})$
   - 一個 DNF 的布林算式形如 $c_1 \vee c_2 \vee \cdots \vee c_n$

   ※ 以下題目皆假設每個 clause 不會有重複的布林變數，例如 $(a \vee b \vee \neg a)$。

   (a) (10 pts) 給定一個 CNF 算式 f ，請將 $\neg f$ 用 DNF 表示。
   (b) (10 pts) 假設 $P \neq NP$，給定一個 DNF 算式 f，請問是否存在多項式時間的演算法，可以判斷 f 的運算結果是否可以為 `T` ？如果有，請描述該算法；如果沒有，請證明。
   (c) (20 pts) 假設 $P \neq NP$，給定一個 DNF 算式 f，請問是否存在多項式時間的演算法，可以判斷 f 的運算結果是否可以為 `F` ？如果有，請描述該算法；如果沒有，請證明。
   (d) (20 pts) 已知可以利用布林運算的分配律和 De Morgan's laws 將所有的布林算式轉換成 CNF 形式。假設 $P \neq NP$，請問是否存在演算法可以在多項式時間內將任意布林算式轉換成 CNF 形式呢？如果存在，請描述該算法；如果不存在，請證明。

3. 兩個布林算式可能看起來不同，但表示的其實是同一個函數，如以下兩個算式是等價的 (分配律)：
   $$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$
   現在有一個問題 A 為「判斷兩個布林算式是否等價」。嚴謹定義 A 的話，A 的輸入為一個布林變數集合 X 以及兩個由 X 構成的布林算式 f, g，其問題為「是否所有賦予 X 內所有變數值的方法，代入 f 的算式結果與 g 的算式結果都相同」。

   (a) (15 pts)
   請證明：$\bar{A}$ (即判斷兩個布林算式是否「不等價」) 為 *NP-hard* 問題。
   (b) (5 pts)
   請證明：在已知 $\bar{A} \in$ *NP-hard* 的情況下，$\bar{A} \in NPC$。