1. 在 $n(n>1)$ 個人當中，任意兩人可能互相認識或互相不認識，證明必定存在兩個人認識的人數一樣多。

> 解答
>
> 假設所有人認識的人數皆不相同，由於每個人認識的人數只可能為 $0, 1, \cdots (n-1)$，共 n 種可能，對於每個整數 $0 \leq k \leq n-1$，恰有一個人認識的人數為 k。然而，不可能同時有一個人認識所有人，以及一個人不認識所有人，否則這兩個人同時互相認識又互相不認識，矛盾。因此，必定存在兩個人認識的人數一樣多。

2. 使用數學歸納法證明：對於正整數 $n \geq 3$，滿足 $3^n + 4^n < 5^n$。

> 解答
>
> 證明分為兩部份
>
> (1) 證明當 $n = 3$ 時命題成立：
> 代入後得到
> $$3^n + 4^n = 91 < 5^n = 125$$
> 命題成立。
>
> (2) 證明若在 $n = k$ 時命題成立, 則在 $n = k+1$ 時命題也會成立 $(k \geq 3)$：
> 假設 $n = k$ 時命題成立，即
> $$3^k + 4^k < 5^k$$
> 則當 $n = k+1$ 時，
> $$3^{k+1} + 4^{k+1} < 5 \times (3^k + 4^k) < 5 \times (5^k) = 5^{k+1}$$
> 命題仍然成立。
>
> 由 (1),(2)，以數學歸納法得證。

> 常見錯誤
>
> 把數學歸納法寫成歸納法，在精神上是不一樣的事情 (不扣分)

3. 使用數學歸納法證明：對於正整數 $n \geq 4$，滿足 $3^n > n^3$。

> 解答
>
> 我們在此先證明一個引理，再藉此引理證明原題。
> 引理：對於正整數 $n \geq 4$，滿足 $\frac{(n+1)^3}{n^3} < 3$ (等價於 $3n^3 > (n+1)^3$)。
> 證明：

(1) 證明當 $n = 4$ 時引理成立：
代入後得到

$$\frac{5^3}{4^3} = 1.953125 < 3$$

引理成立。

(2) 證明若在 $n = k$ 時引理成立, 則在 $n = k + 1$ 時引理也會成立 $(k \geq 4)$：
假設 $n = k$ 時引理成立，即

$$\frac{(k+1)^3}{k^3} < 3$$

則當 $n = k + 1$ 時，

$$\frac{(k+2)^3}{(k+1)^3} < \frac{(k+1)^3}{k^3} < 3$$

引理仍然成立。

由 (1),(2)，以數學歸納法得證引理。接著證明原命題

(1) 證明當 $n = 4$ 時命題成立：
代入後得到

$$3^4 = 81 > 4^3 = 64$$

命題成立。

(2) 證明若在 $n = k$ 時命題成立, 則在 $n = k + 1$ 時命題也會成立 $(k \geq 4)$：
假設 $n = k$ 時命題成立，即

$$3^k > k^3$$

則當 $n = k + 1$ 時，

$$3^{k+1} = 3(3^k) > 3(k^3) > (k+1)^3$$

命題仍然成立。

由 (1),(2)，以數學歸納法得證命題。

4. 序列開始時只包含一個正整數 n，接著每次對此序列進行如下操作：在序列中找到任意一個大於 1 的正整數 k，接著把此數換成任意兩個正整數 a, b，其中 $a + b = k$，則此操作得 $a \times b$ 分，且數列會多出一項。重複進行以上操作，直到序列中的數均為 1 為止。試證：所有操作的得分總和為 $\frac{n^2-n}{2}$。

解答

對於變數 n，將原敘述之所有操作的得分總和記為 $f(n)$，則需要證明的式子為 $f(n) = \frac{n^2-n}{2}$。

(1) 證明當 $n = 1$ 時命題成立：

在 $n = 1$ 時，因為序列中的數均為 1，不需進行任何操作

$$f(1) = 0 = \frac{1^2 - 1}{2}$$

命題成立。

(2) 證明若在 $n = 1 \cdots k$ 時命題成立, 則在 $n = k + 1$ 時命題也會成立 $(k \geq 1)$：假設 $n = 1 \cdots k$ 時命題成立，即

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{2} \text{ for } 1 \leq x \leq k$$

則當 $n = k + 1$ 時，將 n 依題意換成任意兩個正整數 a, b，即可得到 $a \times b$ 分，且 $1 \leq a, b < n$，得到

$$\begin{aligned} f(n) &= f(a) + f(b) + ab \\ &= \frac{a^2 - a}{2} + \frac{b^2 - b}{2} + ab \\ &= \frac{a^2 + 2ab + b^2 - (a + b)}{2} \\ &= \frac{(a + b)^2 - (a + b)}{2} \\ &= \frac{n^2 - n}{2} \end{aligned}$$

命題仍然成立。

由 (1),(2)，以數學歸納法得證。

常見錯誤

只證明某特定拆法能歸納 (例如只考慮將 n 拆成 $n - 1$ 和 1)，但題目要求的是對於所有情況的證明。

5. 有 $n(n \geq 2)$ 個人進行投票，每個人可以投一票給除了自己以外的其他任何人，且不能投廢票。假設最後這 n 個人分別得到了 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 票，請證明只要 $(a_1, \cdots, a_n)$ 滿足以下兩個式子，就是一個可能的投票結果 (也就是存在一種投票方式可以得到該結果)。

- $0 \leq a_k \leq n - 1$
- $\sum_{k=1}^{n} a_k = n$

※ 請注意，要證明的是「滿足式子 $\Rightarrow$ 合法投票」，而不是「合法投票 $\Rightarrow$ 滿足式子」，後者很明顯是對的。

解答

對於一組符合條件的 $(a_1, \cdots, a_n)$，我們先證明至少有兩個人得到票。這裡可以用反證法：若只有一個人得到票，則他必定拿到所有的票，也就是他投給了自己，但這不符合規則，因此至少有兩個人得到票。

接著，假設共 m 個人有得到票 (得票數 ≥ 1)，且這些人的編號為 $x_1, x_2, ..., x_m$，並由以上證明可以得到 $m \geq 2$，我們可以構造以下的投票法滿足該投票結果：

(a) 讓編號 x_1 的人投給編號 x_2 的人，編號 x_2 的人投給編號 x_3 的人，$\cdots$，編號 x_m 的人投給編號 x_1 的人。由於 $m \geq 2$，因此這個步驟不會發生自己投給自己的情況。而且在這之後，編號 $x_1 \cdots x_m$ 中的每個人都恰好得到一票，而他們最後的得票已知都大於等於一票，因此這個步驟也不會發生投太多票的問題。

(b) 其他沒有得到票的人任意投票，將不足的票數補足。由於這些人自己沒有得到票，因此不論怎麼投都滿足投票規則。

由以上的構造法，證明了任意滿足條件的 $(a_1, \cdots, a_n)$ 都是一種可能的投票結果。