智能无人机技术设计实践

--坐标转换

徐远帆
联系方式: xuyuanfa16@mails.tsinghua.edu.cn
时间：2019.9.28

目 录

- 1 旋转矩阵
- 2 旋转向量和欧拉角
- 3 四元数
- 4 相机模型

1 旋转矩阵

- **基本概念**
  - 点
  - 向量
    - 区分坐标和向量
    - 确定一个坐标系，即一个线性空间的基 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$，就可以谈论向量 $\boldsymbol{a}$ 在这组基下的坐标：

$$\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3.$$

    - 向量的内积和外积（三维向量为例）

$$a \cdot b = a^T b = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = |a|\,|b| \cos\langle a, b\rangle$$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{b} \triangleq \boldsymbol{a}^\wedge \boldsymbol{b}.$$

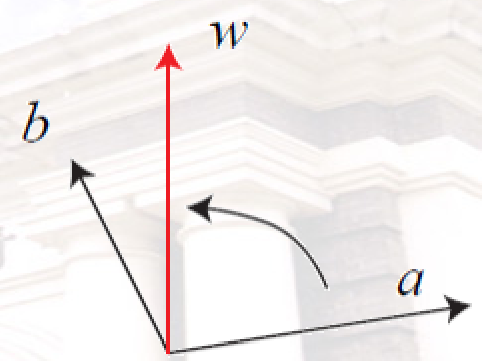
1 旋转矩阵

- **基本概念**

  ➢ 向量

  - 外积的方向垂直于这两个向量，大小为 $|a|\,|b|\sin\langle a,b\rangle$ ，几何意义就是是两个向量张成的四边形的有向面积

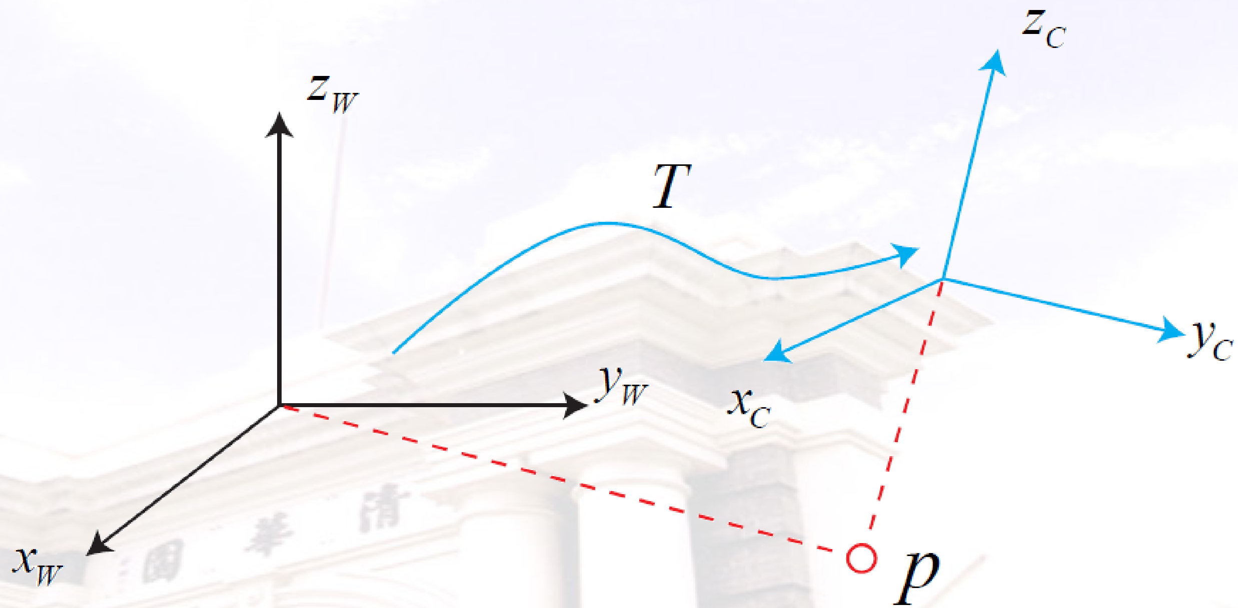
  - 外积只对三维向量存在定义，我们用外积表示向量的旋转：



旋转表示

1 旋转矩阵

- **坐标系间的欧式变换**
  - 欧式变换：同一个向量在各个坐标系下的长度和夹角都不会发生变化。



图中示例可以看作从世界坐标系到相机坐标系的TF

  - 一次欧式变换可以分解成一次旋转和一次平移。

1 旋转矩阵

- **坐标系间的欧式变换**
  - ➢ 旋转矩阵

对于同一个向量 $\boldsymbol{a}$，

$$[e_1, e_2, e_3]\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = [e_1^{'}, e_2^{'}, e_3^{'}]\begin{bmatrix} a_1^{'} \\ a_2^{'} \\ a_3^{'} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1^T e_1^{'} & e_1^T e_2^{'} & e_1^T e_3^{'} \\ e_2^T e_1^{'} & e_2^T e_2^{'} & e_2^T e_3^{'} \\ e_3^T e_1^{'} & e_3^T e_2^{'} & e_3^T e_3^{'} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1^{'} \\ a_2^{'} \\ a_3^{'} \end{bmatrix} \triangleq \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}^{'}.$$

我们把 $\boldsymbol{R}$ 称为旋转矩阵，这个矩阵由两组基相乘得到，描述了旋转前后同一个向量的坐标变换关系。其具有以下性质：

- 行列式为1的正交矩阵，反之，行列式为1 的正交矩阵也是一个旋转矩阵。
- 它的逆（即转置）描述了一个相反的旋转 $\boldsymbol{a}^{'} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{a}$

➢ 旋转加上平移，完整地描述了欧氏空间的坐标变换关系

$$\boldsymbol{a}^{'} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{t}$$

1 旋转矩阵

- **变换矩阵与齐次坐标**
  - 不是线性关系（不满足均匀性），多次变换后形式复杂

    $$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{R}_1\boldsymbol{a} + \boldsymbol{t}_1 \quad \boldsymbol{c} = \boldsymbol{R}_2\boldsymbol{b} + \boldsymbol{t}_2 \quad \boldsymbol{c} = \boldsymbol{R}_2(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{a} + \boldsymbol{t}_1) + \boldsymbol{t}_2$$

  - 引入齐次坐标和变换矩阵：

$$\begin{bmatrix} a' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} \triangleq T \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix}$$

我们把一个三维向量的末尾添加1，变成了四维向量，称为齐次坐标。对于这个四维向量，我们可以把旋转和平移写在一个矩阵里面，使得整个关系变成了线性关系。该式中，矩阵T 称为变换矩阵。

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

  - 一般情况，当我们写 $\boldsymbol{Ta}$ 时，使用的是齐次坐标（不然没法计算）。而写 $\boldsymbol{Ra}$ 时，使用的是非齐次坐标。

2 旋转向量和欧拉角

- 旋转向量引入原因：矩阵表述冗余，用9个量表示3个自由度，16个量表示6个自由度；旋转矩阵自身带有约束
- 对于坐标系的旋转，任意旋转都可以用一个旋转轴和一个旋转角来刻画
- 旋转向量（或轴角，Axis-Angle）：方向与旋转轴一致，而长度等于旋转角。一个3维向量即可表示。
- 对于变换矩阵，一个旋转向量加一个平移向量即可表示，刚好六维。
- 旋转矩阵和旋转向量可以相互转换，具体方法自行查阅了解。

- 欧拉角提供了一种非常直观的方式来描述旋转——它使用了三个分离的转角，把一个旋转分解成三次绕不同轴的旋转。
- ZYX转角相当于把任意旋转分解成以下三个轴上的转角：

1. 绕物体的 Z 轴旋转，得到偏航角yaw;
2. 绕旋转之后的 Y 轴旋转，得到俯仰角pitch;
3. 绕旋转之后的 X 轴旋转，得到滚转角roll。

rpy 角是比较常用的一种欧拉角。

3 四元数（简要介绍）

- 引入原因：旋转矩阵用九个量描述三自由度的旋转，具有冗余性；欧拉角和旋转向量是紧凑的，但具有奇异性（万向锁问题）。事实上，我们找不到不带奇异性的三维向量描述方式。

- 四元数是Hamilton 找到的一种扩展的复数。它既是紧凑的，也没有奇异性。一个四元数 q 拥有一个实部和三个虚部。

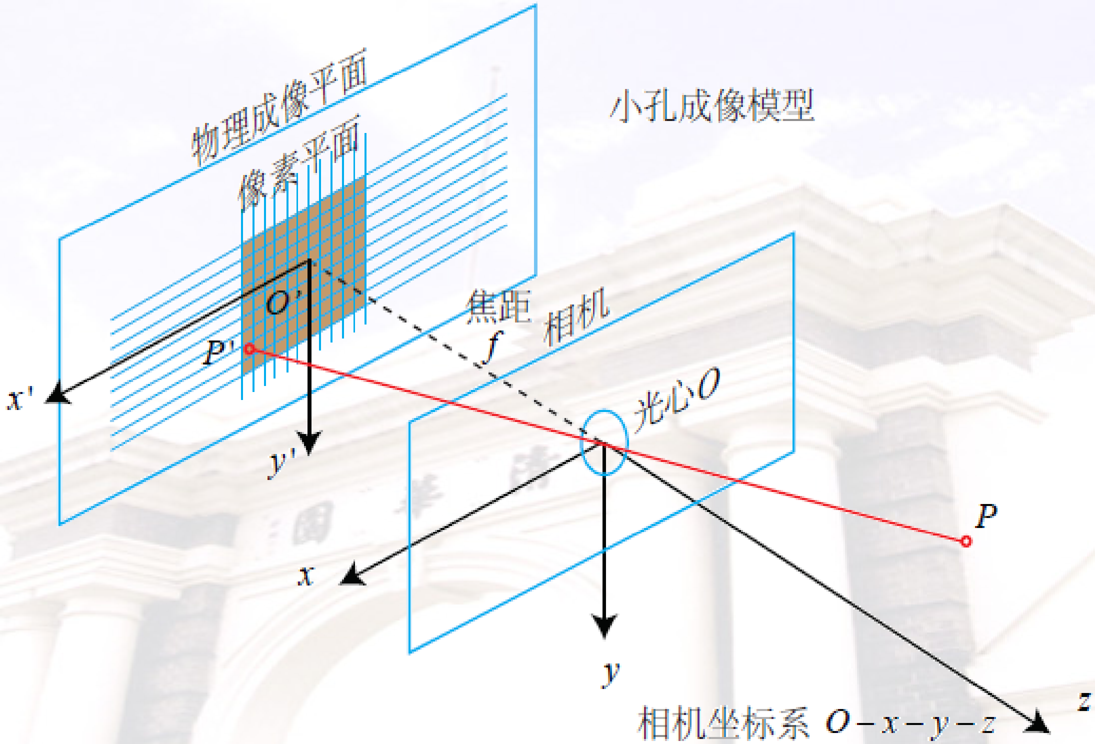
$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k,$$

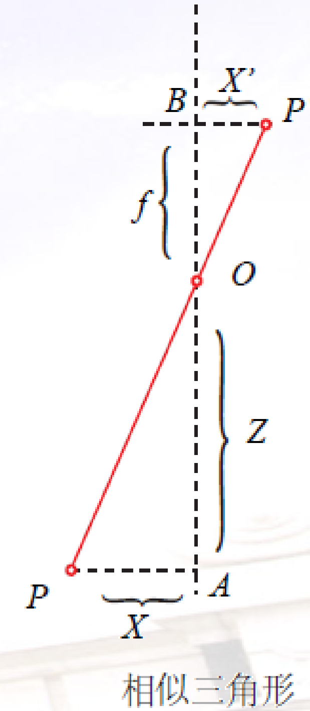
$$\begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ ij = k, ji = -k \\ jk = i, kj = -i \\ ki = j, ik = -j \end{cases}.$$

- 四元数于旋转矩阵、旋转向量均可相互转换

4 相机模型

- 相机将三维世界中的坐标点（单位为米）映射到二维图像平面（单位为像素）的过程能够用一个几何模型进行描述
- 单目相机（针孔相机）模型：





- 相机坐标系到物理成像坐标系：三角形相似关系

$$X' = f\frac{X}{Z}$$

$$Y' = f\frac{Y}{Z}$$

4 相机模型

- 在相机中，我们获得的是具体的像素，这需要在成像平面上对像进行采样和量化。
- 像素坐标系：原点o′ 位于图像的左上角，u 轴向右与x 轴平行，v轴向下与y 轴平行。像素坐标系与成像平面之间，相差了一个缩放和一个原点的平移。我们设像素坐标在u 轴上缩放了α倍，在v 上缩放了β倍。同时，原点平移了$[c_x, c_y]^T$。那么，P′ 的坐标与像素坐标$[u, v]^T$的关系为：

$$\begin{cases} u = \alpha X' + c_x \\ v = \beta Y' + c_y \end{cases} \cdot \xrightarrow[]{\substack{\text{把 } \alpha f \text{ 合并成 } f_x \\ \text{把 } \beta f \text{ 合并成 } f_y}} \begin{cases} u = f_x \frac{X}{Z} + c_x \\ v = f_y \frac{Y}{Z} + c_y \end{cases}$$

f 的单位为米，α、β的单位为像素每米，所以f_x、f_y 的单位为像素。

- 把该式写成矩阵形式，会更加简洁，不过左侧需要用到齐次坐标：

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \triangleq \frac{1}{Z} \boldsymbol{K} \boldsymbol{P}.$$

4 相机模型

- 我们再回顾相机坐标到像素坐标的转换（按照习惯，把Z挪到左侧）：

$$Z\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \triangleq \boldsymbol{KP}$$

- 我们把 $\boldsymbol{K}$ 称为相机的内参数矩阵。一般来说，相机内参在相机出厂时就固定，有的相机生产厂商会告诉你相机的内参，而有时需要你自己确定相机的内参，也就是所谓的标定
- 外参：相机的位姿 $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{t}$

$$Z\boldsymbol{P}_{uv} = Z\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{P}_w + \boldsymbol{t}\right) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{T}\boldsymbol{P}_w$$

P_{uv}是像素坐标，P_w 是世界坐标

后一个式子隐含了一次齐次坐标到非齐次坐标的转换

4 相机模型

总结一下，单目相机的成像过程，其中体现了从世界坐标到像素坐标的转换：

1. 首先，世界坐标系下有一个固定的点P，世界坐标为P_w；
2. 由于相机在运动，它的运动由$\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{t}$ 或变换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 描述。P 的相机坐标为：

$$\tilde{P}_c = RP_w + t$$

3. 这时的 $\tilde{P}_c$ 仍有 XYZ 三个量，把它们投影到归一化平面 Z = 1 上，得到 P的归一化相机坐标：

$$P_c = [X/Z, Y/Z, 1]^T$$

4. 最后，P的归一化坐标经过内参后，对应到它的像素坐标：

$$P_{uv} = KP_c$$

谢谢！