# BEBERAPA VARIABEL ACAK (Dr. Asep Juarna)

## 1. Variabel Acak Diskrit

### 1.1. Variabel Acak Binomial

Eksperimen: Dilakukan $n$ percobaan, setiap percobaan menghasilkan satu dari dua peristiwa, $E_1$ atau $E_2$ di mana $P(E_1) = p$, tentu saja $P(E_2) = 1 - p$.

Variabel acak: $x$ = banyaknya peristiwa $E_1$ terjadi.
Ruang sampel: $S = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.
Probabilitas $x = i$, $0 \le i \le n$: $\boldsymbol{p_i = P(x = i) = C_{n,i}p^i(1-p)^{n-i}}$, di mana $\boldsymbol{C(n,i) = C_{n,i} = \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}}$ = kombinasi $i$ dari $n$.
Rerata (*mean*, *expected value*): $\boldsymbol{\mu = E[x] = np}$
Varians: $\boldsymbol{\sigma^2 = np(1-p)}$

**Contoh 1:**
Dilakukan percobaan pelemparan koin 5 kali, ingin diketahui berapa kali muncul angka; tentukan ruang sampel $S$, rerata $\mu$, varians $\sigma^2$, dan probabilitas $p_3 = P(x = 3)$..

**Jawab:**
$n = 5$ (cacahan percobaan)
$p = \frac{1}{2}$ (fokus perhatian adalah kemunculan angka, probabilitasnya $= \frac{1}{2}$, dalam hal ini sama dengan probabilitas kemunculan gambar)
Ruang sampel $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, yaitu angka bisa muncul 0 kali, atau 1 kali, atau 2 kali, …, atau 5 kali.
Rerata $\mu = np = 5 \times \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2} = 2{,}5$
Varians $\sigma^2 = np(1\text{-}p) = 5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 2\frac{1}{4} = 2{,}25$
$p_3 = P(x = 3) = \binom{n}{i}(p)^i(1-p)^{n-i} = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5!}{3!2!}\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = 10\left(\frac{1}{32}\right) = \frac{10}{32} = \mathbf{0{,}3125}$

**Contoh 2:**
Suatu kelas mempunyai 40 mahasiswa, 25 pria dan 15 wanita. Dilakukan percobaan pencatatan kehadiran 10 mahasiswa pertama, ingin diketahui berapa kali muncul mahasiswa pria. Tentukan ruang sampel $S$, rerata $\mu$, varians $\sigma^2$, dan probabilitas $p_7 = P(x = 7)$..

**Jawab:**
$n = 10$ (cacahan percobaan)
$p = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$ (fokus perhatian adalah kehadiran mahasiswa pria, probabilitasnya $= \frac{5}{8}$)
Ruang sampel $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, yaitu jumlah mahasiswa pria yang bisa hadir adalah 0, atau 1, atau 2, …, atau 10.
Rerata $\mu = np = 10 \times \frac{5}{8} = \frac{50}{8} = 6{,}25$
Varians $\sigma^2 = np(1\text{-}p) = 10 \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{80}{64} = 1{,}25$
$p_7 = P(x = 7) = \binom{n}{i}(p)^i(1-p)^{n-i} = \binom{10}{7}\left(\frac{5}{8}\right)^7\left(\frac{3}{8}\right)^3 = \frac{10!}{7!3!}(0{,}03725)(0{,}05273) = 120(0{,}03725)(0{,}05273) = \mathbf{0{,}2357}$

## 1.2. Variabel Acak Poisson

Proses Poisson adalah model deretan peristiwa diskrit di mana **rata-rata banyaknya peristiwa persatuan waktu, λ**, diketahui tetapi waktu kejadian setiap peristiwa itu sendiri bersifat acak. Contoh proses Poisson: kedatangan *customer* ke bank, kedatangan *request* ke server *simcard provider*, dll.

Variabel acak: $x$ = banyaknya peristiwa pada selang waktu yang sama dengan selang waktu di dalam λ.

Ruang sampel: $S = \{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$

Probabilitas: $\boldsymbol{P(x = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}}$

Rerata (*mean*, *expected value*): $\boldsymbol{\mu = E[x] = \lambda}$

Varians: $\boldsymbol{\sigma^2 = \lambda}$

**Contoh 3:**

Ruang gawat darurat sebuah rumah sakit memiliki tingkat kedatangan rata-rata pasien sebanyak 4 orang perhari. Asumsikan kedatangan mengikuti proses Poisson. Tentukan probabilitas kedatangan 2 pasien perhari.

**Jawab:**

$\lambda = 4$ (rata-rata kedatangan pasien perhari), $k = 2$ (pasien perhari)

$P(x = 2) = \frac{4^2 e^{-4}}{2!} = 0{,}1465$

**Contoh 4:**

Situasi seperti di atas. Tentukan probabilitas kedatangan *maksimal* 2 pasien perhari.

**Jawab:**

$\lambda = 4$ (pasien perhari), $k \leq 2$ (pasien perhari)

$P(x \leq 2) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) = \frac{4^0 e^{-4}}{0!} + \frac{4^1 e^{-4}}{1!} + \frac{4^2 e^{-4}}{2!} = 0{,}0183 + 0{,}0733 + 0{,}1465 =$ 0,2381.

**Contoh 5:**

Rata-rata kedatangan pembeli ke sebuah kios adalah 10 orang setiap jam. Misalkan pola kedatangan mengikuti proses Poisson. Tentukan:

1. Probabilitas tepat ada 56 kedatangan dalam 8 jam.
2. Probabilitas *maksimal* ada 56 kedatangan dalam 8 jam.
3. Probabilitas *minimal* ada 56 kedatangan dalam 8 jam.

**Jawab:**

$\lambda = 10$ (per jam) = 80 (per 8 jam)

1. $k = 56 \rightarrow P(x = 56) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \frac{80^{56} e^{-80}}{80!} = 4{,}28 \times 10^{-52}$
2. $k \leq 56 \rightarrow P(x \leq 56) = \sum_{k=0}^{56} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = 2{,}40 \times 10^{-5}$
3. $k \geq 56 \rightarrow P(x \geq 56) = \sum_{k=56}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = 1 - \sum_{k=0}^{55} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = 1 - 9{,}00351 \times 10^{-8} = 0{,}99999991$

## 2. Variabel Acak Kontinu "Eksponensial"

### 2.1. Variabel Acak Normal (atau Gauss)

Variabel acak normal mempunyai fungsi probabilitas $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$ , terdefinisi pada selang -∞ < $x$ < ∞ dengan E[$x$] = $\mu$ dan var($x$) = $\sigma^2$ atau deviasi_standar = $\sigma$ . Dengan konversi $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, fungsi probabilitas menjadi $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$ dengan E[$z$] = 0 dan var($z$) = 1 .

### 2.2. Variabel Acak Eksponensial

Variabel acak eksponensial mempunyai fungsi probabilitas $f(x) = ae^{-ax}$ , terdefinisi pada selang 0 < $x$ < ∞ dengan **E[$x$] = $\mu$ = $\frac{1}{a}$** dan **var($x$) =** $\frac{1}{a^2}$ atau deviasi_standar = $\frac{1}{a}$.

E[$x$] ini dihitung sebagai berikut: E[$x$] = $\mu = \int_0^\infty x f(x) dx = \int_0^\infty xae^{-ax} dx = \int_0^\infty axe^{-ax} dx$

Gunakan teknik integral parsial, yaitu: $\int UV'dx = UV - \int U'Vdx$ dan pilih $U$ = $ax$ dan $V'$ = $e^{-ax}$. Pemilihan $U$ = $ax$ karena $U'$ = $\frac{dU}{dx}$ = $a$, konstan sehingga $\int U'Vdx = \int aVdx = a\int Vdx$ merupakan integral atas sebuah fungsi saja. Selanjutnya karena $U = ax$ maka $U' = \frac{dU}{dx} = \frac{d(ax)}{dx} = a$, dan karena $V' = e^{-ax}$ maka $V = \int V'dx = \int e^{-ax} dx = -\frac{1}{a} e^{-ax}$ Dengan demikian:

$$\mathbf{E[x] = \mu} = \int_0^\infty axe^{-ax} dx = (ax)(-\frac{1}{a} e^{-ax}) |_0^\infty - \int_0^\infty (a)(-\frac{1}{a} e^{-ax}) dx$$

$$= (0-0) + \int_0^\infty e^{-ax} dx = 0 - (\frac{1}{a} e^{-ax}) |_0^\infty = 0 - (\frac{1}{a})(0-1) = \mathbf{\frac{1}{a}}$$

**LATIHAN**

1. Jika 20% baut yang diproduksi oleh sebuah mesin rusak, tentukan rpobabilitas bahwa dari 4 baut yang dipilih secara acak terdapat baut yang rusak sebanyak: (a) 1, (b) 0, (c) kurang dari 2.
2. Tentukan probabilitas mendapatkan jumlah angka dadu 7, setidaknya sekali dari tiga pelemparan sepasang dadu.
3. Jika probabilitas baut (yang diproduksi oleh sebuah mesin) rusak adalah 0,1, tentukan: (a) rata-rata, (b) simpangan baku, untuk jumlah baut yang rusak dari total 400 baut.
4. Sepuluh persen baud yang diproduksi ternyata rusak. Tentukan probabilitas bahwa dalam sampel berisi 10 baud yang dipilih secara acak terdapat tepat 2 baud rusak, dengan menggunakan (a) distribusi binomial, (b) pendekatan Poisson terhadap distribusi binomial
5. Jika peluang seseorang akan mengalami demam akibat suntikan serum tertentu adalah 0,001, tentukan peluang bahwa dari 2000 orang yang disuntik ada yang mengalami demam sebanyak (a) tepat 3 orang, (b) lebih dari 2 orang
6. Asumsikan bahwa lama pelayanan (dalam menit) mengikuti distribusi eksponensial dengan parameter $\lambda$ = $\frac{1}{4}$. Jika seseorang tiba di meja pelayanan tepat sebelum Anda tiba, tentukan peluang bahwa Anda harus menunggu (a) kurang dari 5 menit, dan (b) antara 5 dan 10 menit.