PEMODELAN DAN SIMULASI (Dr. ASEP JUARNA)
LATIHAN 2 dan SOLUSI

1. **Variabel acak diskrit, probabilitas seragam**
Misalkan x = mata dadu yang keluar dalam pelemparan sebuah dadu. Buktikan bahwa aksioma ke-2 probabilitas benar, yaitu $P(S) = 1$. Tentukan nilai harapan (*expected value*) $E[x]$, variansi var(x), dan deviasi (sesatan atau *error*) Δx, untuk

Jawab:
Ruang sampel x adalah $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dengan probabilitas seragam $p_i = p(x_i) = \frac{1}{6}$ untuk setiap x anggota S; dengan demikian,
- $P(S) = \sum_i p(x_i) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$
- $E[x] = \sum_i xp(x_i) = (1\times\frac{1}{6})+(2\times\frac{1}{6})+(3\times\frac{1}{6})+(4\times\frac{1}{6})+(5\times\frac{1}{6})+(6\times\frac{1}{6}) = \frac{1}{6} \times (1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = 3,5$.
- var(x) = $E[x^2] - (E[x])^2$. Perhatikan perbedaan $E[x^2] - (E[x])^2$ yaitu: $E[x] = \sum_i xp(x_i)$ dan $E[x^2] = \sum_i x^2p(x_i)$ sehingga: $E[x^2] = \sum_i x^2p(x_i) = (1\times\frac{1}{6})+(2^2\times\frac{1}{6})+(3^2\times\frac{1}{6})+(4^2\times\frac{1}{6})+(5^2\times\frac{1}{6})+(6^2\times\frac{1}{6})$ $= \frac{1}{6} \times (1+4+9+16+25+36) = \frac{91}{6} = 15\frac{1}{6} = 15,1667$.
Dengandemikian: var(x) = $E[x^2] - (E[x])^2 = \frac{91}{6} - (\frac{21}{6})^2 = \frac{546-441}{36} = \frac{105}{36} = 2,9167$
- Deviasi Δx adalah $\sqrt{var(x)}$, dengan demikian $\Delta x = \sqrt{var(x)} = \sqrt{2,9167} = 1,7078$.

Catatan:
$E[x]$ kadang dinotasikan sebagai μ atau $\bar{x}$, sering ditautkan dengan Δx misalnya: $x = \bar{x} \pm \Delta x$

2. **Variabel acak diskrit, probabilitas tidak seragam**
Diketahui variabel diskrit x dengan tuang sampel $S = \{0, 1, 2, 3\}$dan masing-masing probabilitas p_i berikut:

i	1	2	3	4
x_i	0	1	2	3
p_i	0,15	0,25	0,35	0,25

Buktikan bahwa aksioma ke-2 probabilitas benar, yaitu $P(S) = 1$. Tentukan nilai harapan $E[x]$ dan varians var(x)

Jawab:
- $P(S) = \sum_i p_i = 0,15 + 0,25 + 0,35 + 0,25 = 1$
- $E[x] = \sum_i xp_i = (0\times0,15) + (1\times0,25) + (2\times0,35) + (3\times0,25) = 1,7$
- $E[x^2] = \sum_i x^2p_i) = (0\times0,15) + (1\times0,25) + (4\times0,35) + (9\times0,25) = 3,9$
- var(x) = $E[x^2] - (E[x])^2 = 3,9 - (1,7)^2 = 1.01$

3. **Variabel acak diskrit, probabilitas tidak seragam**
Diketahui variabel diskrit x dengan tuang sampel $S = \{1, 3, 5, 8\}$dan masing-masing probabilitas p_i berikut:

i	1	2	3	4
x_i	1	3	5	8
p_i	0,07	0,31	0,23	a

Tentukan $p_4 = p(x_4) = p(8)$. Tentukan nilai harapan $E[x]$ dan varians var(x)

Jawab:
- $P(S) = \sum_i p_i = 0,07 + 0,31 + 0,23 + a = 1$, sehingga $a = 1 - 0,61 = 0,39$
- $E[x] = \sum_i xp_i = (1\times0,07) + (3\times0,31) + (5\times0,23) + (8\times0,39) = 4,88$
- $E[x^2] = \sum_i x^2p_i) = (1\times0,07) + (9\times0,31) + (25\times0,23) + (64\times0,39) = 27,72$
- var(x) = $E[x^2] - (E[x])^2 = 27,72 - (4,88)^2 = 3,9056$

4. **Variabel acak kontinyu, fungsi probabilitas *f*(*x*)**
Variabel acak kontinu x dengan fungsi probabilitas $f(x) = 2x$ terdefinisi pada selang $0 \le x \le 1$. Buktikan bahwa aksioma ke-2 probabilitas benar, yaitu $P(S) = \int_0^1 f(x)dx = 1$. Tentukan nilai harapan $E[x]$ dan varians var(x) variabel acak ini ini.

Jawab:

- P(S) = $\int_0^1 f(x)dx \ = \int_0^1 2x\, dx = \ x^2|_0^1 = 1$
- $E[x] = \int_0^1 (x \times 2x)dx = \int_0^1 2x^2 dx = \ \frac{2}{3}x^3|_0^1 = \frac{2}{3}$
- $E[x^2] = \int_0^1 (x^2 \times 2x)dx = \int_0^1 2x^3 dx = \ \frac{2}{4}x^3|_0^1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- var(x) = $E[x^2] - (E[x])^2 = \ \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 0.056$

5. **Variabel acak kontinyu, fungsi probabilitas *f*(*x*)**
Misalkan sebuah variabel acak kontinu mempunyai fungsi probabilitas $f(x) = x$ dan terdefinisi pada selang $0 \le x \le a$. Tentukan nilai a agar aksioma ke-2 probabilitas dipenuhi. Tentukan nilai harapan $E[x]$ dan varians var(x) variabel acak ini ini.

Jawab:

- Aksioma ke-2 probabilitas: $P(S) = 1$ atau $P(S) = \int_0^a f(x)dx \ = \int_0^a x\, dx = \frac{1}{2}x^2|_0^a = \frac{1}{2}a^2 = 1$ sehingga $a = \sqrt{2}$
- $E[x] = \int_0^{\sqrt{2}} (x \times x)dx = \int_0^{\sqrt{2}} x^2 dx = \ \frac{1}{3}x^3|_0^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
- $E[x^2] = \int_0^{\sqrt{2}} (x^2 \times x)dx = \int_0^{\sqrt{2}} x^3 dx = \ \frac{1}{4}x^4|_0^{\sqrt{2}} = \frac{4}{4} = 1$
- var(x) = $E[x^2] - (E[x])^2 = \ 1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$

PEMODELAN DAN SIMULASI (Dr. ASEP JUARNA)

LATIHAN 1 dan SOLUSI

1. Bayangkan sebuah percobaan pelemparan dua koin di mana g menyatakan gambar dan a menyatakan angka. Tentukan ruang sampel *S* dari percobaan tersebut.
   Jawab:
   $S = \{(g,g), (g,a), (a,g), (a,a)\}$, $|S| = 4$

2. Jika *A* adalah himpunan semua pasangan angka dadu yang berjumlah 10 pada pelemparan dadu bermuka 6 dan *B* adalah himpunan semua pasangan angka dadu yang berjumlah 11 pada pelemparan dadu yang sama, tentukan $A \cup B$.
   Jawab:
   Ruang sampel eksperimen ini ada 36 seperti terlihat di tabel berikut.

		Dadu Kedua					
		1	2	3	4	5	6
Dadu Pertama	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

   Dengan demikian peristiwa $A = \{(5,5\}, (6,4), (4,6)\}$ dan peristiwa $B = \{(6,5), (5,6)\}$
   Sehingga: $A \cup B = \{(5,5), (6,4), (4,6), (6,5), (5,6)\}$ dan $|A \cup B| = 5$
   Probabilitas $A \cup B = P(A \cup B) = 5/36$

3. Jika *A* adalah peristiwa munculnya angka saja pada pelemparan dua buah koin, tentukan $P(A)$.
   Jawab:
   Ruang sampel eskperimen: $S = \{(g,g), (g,a), (a,g), (a,a)\}$, $|S| = 4$
   Peristiwa $A = \{(a,a)\}$, $|A| = 1$
   Probabilitas peristiwa A: $P(A) = 1/4$

4. Jika *A* adalah peristiwa munculnya angka dan gambar pada pelemparan dua buah koin, tentukan $P(A)$.
   Jawab:
   Ruang sampel eksperimen: $S = \{(g,g), (g,a), (a,g), (a,a)\}$, $|S| = 4$
   Persitiwa $A = \{(g,a),(a,g)\}$, $|A| = 2$
   $P(A) = 2/4 = 1/2$

5. Di dalam sebuah kotak terdapat 25 buah *spare part*, 10 di antaranya rusak. Dua buah *spare part* diambil secara acak dari kotak tersebut. Probabilitas kedua *spare part* tersebut baik adalah:
   Jawab:
   Yang ditanyakan adalah $P(A \cap B) = P(AB)$, di mana *A* = persitiwa *spare part* pertama adalah baik, dan *B* = persitiwa *spare part* kedua adalah baik.Ini adalah problem *probabilitas bersyarat* di mana peristiwa *B* terjadi dengan syarat atau asumsi persitiwa *A* sudah terjadi.
   Dengan demikian $P(AB) = P(A) \times P(B|A) = (15/25) \times (14/24) = (210/600) = 7/20$

6. Jika *X* adalah peristiwa terambilnya sebuah kartu hati dari 52 kartu remi dan *Y* adalah peristiwa terambilnya kartu King, tentukan $P(X \cup Y)$.

Jawab:
$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(XY)$, di mana XY adalah peristiwa terambilnya king hati (atau *king dan hati* atau king yang hati atau hati yang hati).
Jelas $P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(XY) = (13/52) + (4/52) – (1/52) = 16/52$.

Perhatikan $P(X \cup Y)$ dalam soal ini harus dikurangi $P(XY)$ karena di dalam X ada XY (di dalam 13 kartu hati ada 1 kartu hati yang king), begitu juga di dalam Y ada XY (di dalam 4 kartu king ada 1 kartu king yang hati), dengan demikian "king hati" tercacah dua kali sehingga harus dikurani satu XY. Dikatakan X dan *Y tidak mutually exclusive*.

Bandingkan dengan soal No. 2: A adalah himpunan semua pasangan angka dadu yang berjumlah 10 pada pelemparan dadu bermuka 6 dan B adalah himpunan semua pasangan angka dadu yang berjumlah 11. Di dalam A semua pasangan kartunya berjumlah, di A tidak ada pasangan kartu yang "jumlahnya 10 dan 11", begitu juga di dalam B semua pasangan kartunya berjumlah, di A tidak ada pasangan kartu yang "jumlahnya 11 dan 10", dengan demikian $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, tidak dikurangi $P(AB)$. Dikatakan A dan B bersifat *mutually exclusive*.