Исследование дискретной цепи Маркова.

Прикладная математика. Отчёт по лабораторной №3

Авторы: Петренко Людмила M33001, Кусайкина Елизавета M33001, Шалимов Иван M33021

Копия отчета в Notion:

⛓ Исследование дискретной цепи Маркова.

Код доступен по ссылке (нажмите ‘открыть в Google Colaboratory’):

https://drive.google.com/file/d/14_8JUd79aQWGIbOdyzVlS7Rzw0a_9qQq/view?usp=sharing

▼ Постановка задачи.

- Придумать эргодическую Марковскую цепь из восьми состояний (вероятности остаться в том же состоянии должны присутствовать).
- Записать матрицу переходных вероятностей и задать начальный вектор состояний, точность и количество шагов.
- Промоделировать Марковскую цепь пошагово с двумя разными начальными векторами вероятностей состояний, получить два

конечных вектора в результате моделирования и графики изменения среднеквадратического отклонения на каждом шагу.

- Решить задачу аналитически и получить конечный вектор.
- Проверить, что векторы - результаты численного решения и вектор - результат аналитического решения схожи между собой.

▼ Теория.

- Случайная величина - переменная, значения которой представляют собой численные исходы некоторого случайного процесса/события.
- Цепь Маркова - случайный процесс без последействия, то есть случайный процесс, в котором вероятность события зависит только от текущего состояния цепи.
- Классификация цепей Маркова:
    - **дискретные** - система в таких процессах меняет свое состояние в определенные такты времени (состояние и время дискретны)
    - **непрерывные** - система меняет свое состояние в произвольный момент времени (время пребывания в конкретном состоянии - непрерывная случайная величина, вместо вероятностей перехода используют плотности вероятностей)
    - **однородные** - переходные вероятности такой цепи не зависят от номера шага (матрица переходных вероятностей одинаковая на любом шаге)
    - **разложимые** - содержат невозвратные(поглощающие) состояния - состояния, из которых нельзя перейти ни в какое другое.
    - **периодические** - последовательность смены состояний меняется периодически, все состояния имеют одинаковый период.
    - **эргодические** - неразложимая и нециклическая Марковская цепь.
- Вероятность перехода - вероятность перейти из текущего состояния в какое-то конкретное $p_{ij}^{(k)} = p[A_j^{(k)}, A_i^{(k-1)}]$
- Стохастическая матрица - неотрицательная матрица, в которой сумма элементов любого столбца/строки равна единице.
- Достаточное условие **эргодичности** - эргодические цепи описываются сильносвязанными графами, то есть число состояний конечно и все они достижимы за конечное число шагов.

У эргодических цепей существуют стационарные состояния, в которых распределение вероятностей перестает меняться.

Реализации решений.

Численное решение.

Преобразование вектора вероятностей состояний моделируется путем умножения начального вектора на матрицу перехода нужное количество раз. В результате получаем распределение по состояниям при $m \to \infty$.

Вычисления продолжаются до тех пор, пока среднеквадратическое отклонение между векторами не будет меньше заданной точности: $||\pi^{(n-1)} - \pi^{(n)}|| < \epsilon$

```
# распределение по состояниям, численное решение
def probability_distribution_numeric(matrix, initial_state, eps = 1e-6, steps = 1000):
    mean_average_square_error = []
    state = np.copy(initial_state)
    step = 0
    while step < steps:
        new_state = np.matmul(state, matrix)
        mase = np.std(np.abs(state - new_state))
        if mase < eps:
            break

        mean_average_square_error.append(mase)
        state = new_state
        step += 1

    return state, mean_average_square_error, step
```

Аналитическое решение.

Распределение по состояниям при $m \to \infty$ получаем с помощью решения системы уравнений на финальные вероятности $\pi = P_r \pi$ с учетом условия нормировки.

Преобразуем систему:

Умножим столбец свободных членов на единичную матрицу и перенесем в левую часть матричного уравнения

$$P\pi = \pi <=> P\pi - E\pi = 0 <=> (P - E)\pi = 0$$

Поскольку условие нормировки состоит в том, что сумма финальных вероятностей должна быть равно единице, учесть его можно, добавив в систему уравнение, для которого все коэффициенты в матрице равны единице: $\pi_1 + ... + \pi_n = 1$

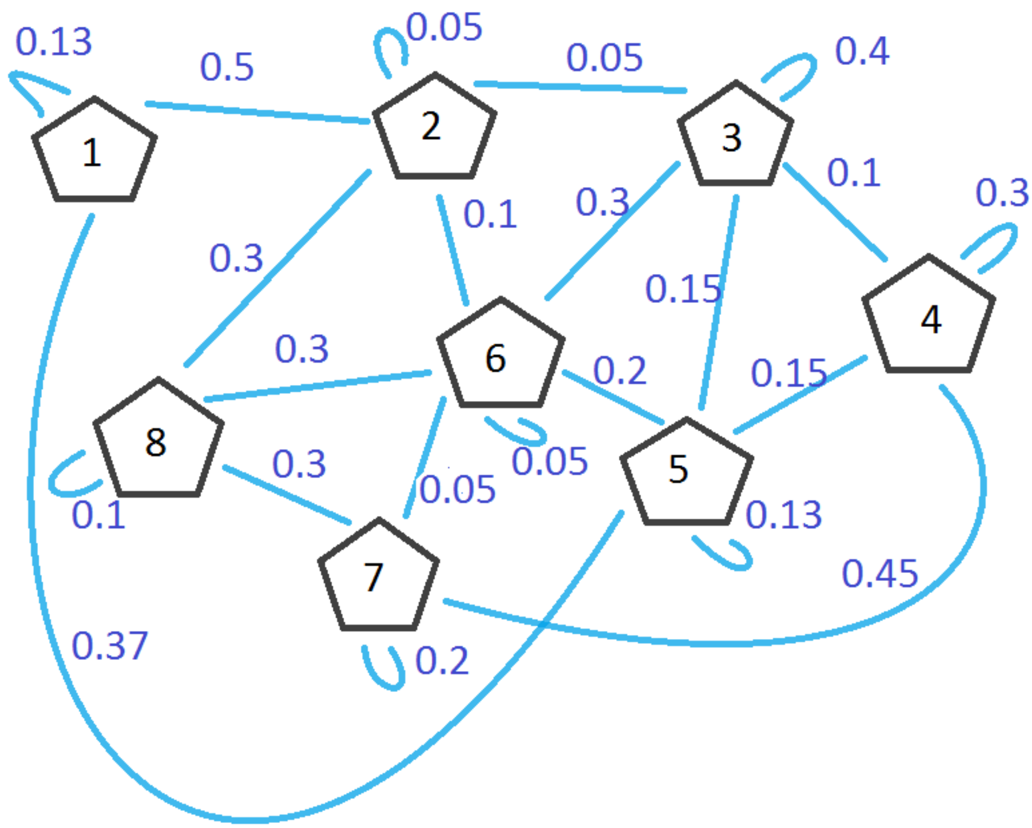
$$\begin{pmatrix} p_{11}-1 & p_{12} & ... & p_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ p_{n1} & p_{n2} & ... & p_{nn}-1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ ... \\ \pi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Note: Чтобы матрица осталась квадратной можно заменить одну из строк на единицы вместо добавления новой строки. Тогда система не будет избыточной, а одна из переменных будет выражаться через остальные.

```
# распределение по состояниям, аналитическое решение
def probability_distribution_analytic(matrix):
    matrix_minus_single = matrix - np.eye(matrix.shape[0])
    b = np.zeros(matrix.shape[0])
    matrix_minus_single[-1] = np.ones(matrix.shape[0])
    b[-1] = 1
    return np.linalg.solve(matrix_minus_single, b)
```

▼ Результаты.

Пусть есть процесс, описываемый эргодической Марковской цепью с соответствующей матрицей переходных вероятностей.




```
matrix = [[0.13, 0.5, 0, 0, 0.37, 0, 0, 0],
          [0.5, 0.05, 0.05, 0, 0, 0.1, 0, 0.3],
          [0, 0.05, 0.4, 0.1, 0.15, 0.3, 0, 0],
          [0, 0, 0.1, 0.3, 0.15, 0, 0.45, 0],
          [0.37, 0, 0.15, 0.15, 0.13, 0.2, 0, 0],
          [0, 0.1, 0.3, 0, 0.2, 0.05, 0.05, 0.3],
          [0, 0, 0, 0.45, 0, 0.05, 0.2, 0.3],
          [0, 0.3, 0, 0, 0, 0.3, 0.3, 0.1]]

initial_state_1 = [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]
initial_state_2 = [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
```

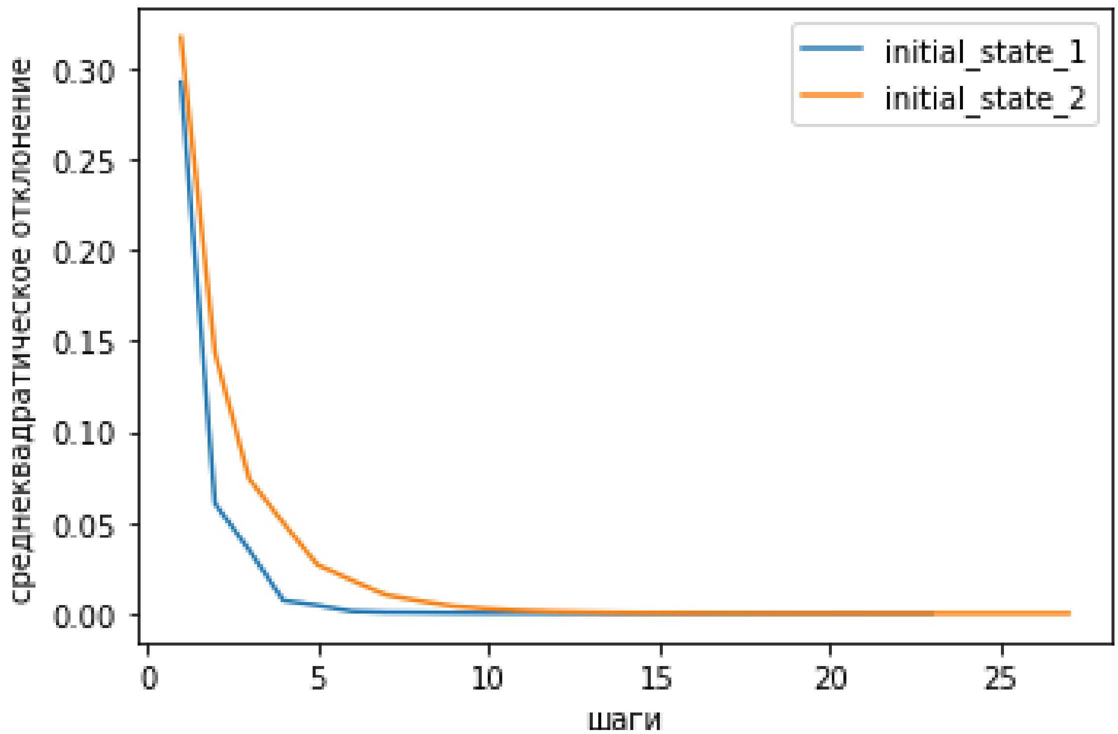
В результате применения **численного решения** получим вектора конечных состояний (с точностью $\epsilon = 1e-6$) для первого и второго начальных состояний соответственно:

```
[0.12500473, 0.12500405, 0.12500067, 0.12499396, 0.12500235, 0.12500085,
0.12499415, 0.12499922]

[0.12500532, 0.1250032, 0.12500067, 0.12499436, 0.12500184, 0.12500085,
0.1249941, 0.12499967]
```

Результаты заданной точности были получены на 23 и 27 шагах соответственно.

Среднеквадратическое отклонение уменьшалось экспоненциально в зависимости от количества шагов



В результате применения **аналитического решения** получим вектор финальных вероятностей

```
[0.125 0.125 0.125 0.125 0.125 0.125 0.125 0.125]
```

▼ Общие выводы.

Финальные вероятности состояний, полученные с помощью решения системы, близки к конечным вероятностям, полученным численным методом.
Конечные и финальные вероятности не зависят от начальных состояний, а зависят только от матрицы переходов.