2. zápočtový test
(45 minut)

Úvod do praktické fyziky
NOFY055

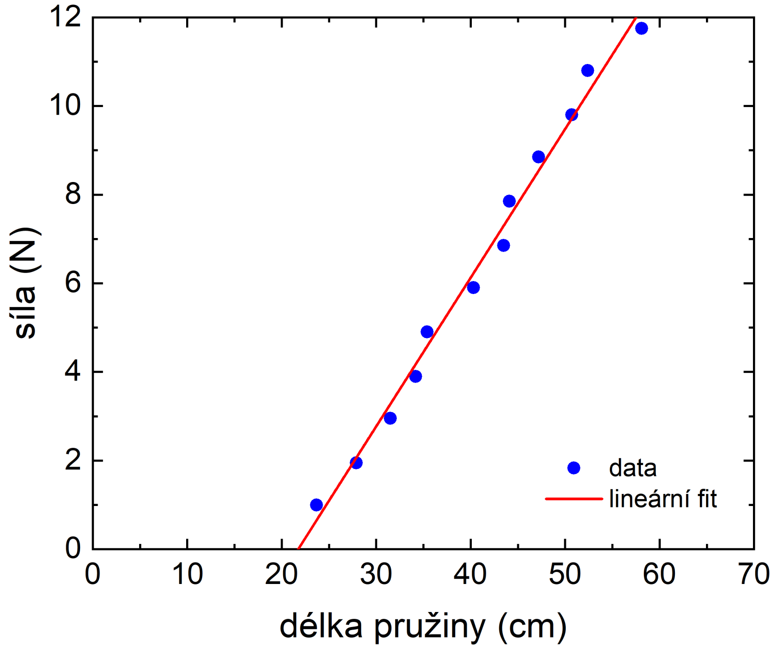
6. a 7. ledna 2025

Příklad 1a - lineární regrese

Zadání:
V experimentu byla změřena závislost síly, napínající pružinu, na její délce, viz obrázek. Pro velikost síly, působící na pružinu, platí lineární vztah

$$F = k \cdot \Delta y,$$

kde k je tuhost pružiny a $\Delta y = y - y_0$ je prodloužení pružiny v důsledku působení síly F.



Naměřená závislost byla proložena obecnou přímkou danou rovnicí $\lambda(x) = ax + b$ s následujícími parametry: $a = 0.3354$, $\sigma_a = 0.0014$, $b = -7.2931$, $\sigma_b = 0.0603$, $\mathrm{cov}(a, b) = -0.000084$.
Určete tuhost pružiny a její délku v nezatíženém stavu.

Poznámky k řešení:

(a) Jaké jsou jednotky parametrů a, σ_a, b, σ_b a $\mathrm{cov}(a, b)$?

(b) Jaký je vztah mezi tuhostí pružiny k, délkou nezatížené pružiny y_0 a nafitovanými parametry a, b? Pro výpočet chyb k a y_0 použijte tyto vztahy a metodu přenosu chyb.

(c) Výsledky zapište **ve správném tvaru** a se správnou jednotkou SI!

(10 bodů)

Řešení:
Označme si sílu jako F a délku pružiny jako y. Závislost $F(y)$ jsme nafitovali lineární funkcí s předpisem $F = ay + b$. Z obrázku vidíme, že jednotkou síly je $[F] = \mathrm{N}$, zatímco jednotkou délky je $[y] = \mathrm{cm}$. Parametr a tudíž musí mít jednotku $[a] = \mathrm{N\,cm^{-1}}$ a parametr b jednotku $[b] = \mathrm{N}$. Totéž samozřejmě platí i pro (absolutní) chyby těchto parametrů σ_a a σ_b. Kovariance $\mathrm{cov}(a, b)$ má stejnou jednotku jako součin chyb $\sigma_a\sigma_b$, tj. $[\mathrm{cov}(a, b)] = \mathrm{N^2cm^{-1}}$.

Lineární závislost působící síly na prodloužení pružiny si upravíme následovně.

$$
\begin{aligned}
F &= k(y - y_0) \\
F &= ky - ky_0 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Rovnice (1) tedy odpovídá lineární funkci se směrnicí $a = k$ a konstantním členem $b = -ky_0$. Dosazením do těchto vztahů vypočítáme tuhost pružiny k a její délku v nenapjatém stavu y_0.

$$
\begin{aligned}
k &= a \qquad (2) \\
k &= 0.3354\ \mathrm{N\ cm^{-1}} = 33.54\ \mathrm{N\ m^{-1}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_0 &= -\frac{b}{a} \qquad (3) \\
y_0 &= 21.74\ \mathrm{cm} = 0.2174\ \mathrm{m}
\end{aligned}
$$

Chyba tuhosti σ_k se přímo rovná chybě σ_a parametru a. Musíme si dát jen pozor na jednotku a zaokrouhlit výslednou chybu na 1 platnou číslici.

$$
\begin{aligned}
\sigma_k &= \sigma_a \qquad (4) \\
\sigma_k &= 0.0014\ \mathrm{N\ cm^{-1}} = 0.14\ \mathrm{N\ m^{-1}} \doteq 0.1\ \mathrm{N\ m^{-1}}
\end{aligned}
$$

Chybu délky σ_{y_0} získáme použitím metody přenosu chyb na rovnici (3).

$$
\begin{aligned}
\sigma_{y_0}^2 &= \left(\frac{\partial y_0}{\partial a}\sigma_a\right)^2 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial b}\sigma_b\right)^2 + 2\left(\frac{\partial y_0}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial y_0}{\partial b}\right)\mathrm{cov}(a, b) \\
\sigma_{y_0}^2 &= \left(\frac{b}{a^2}\sigma_a\right)^2 + \left(-\frac{1}{a}\sigma_b\right)^2 + 2\left(\frac{b}{a^2}\right)\left(-\frac{1}{a}\right)\mathrm{cov}(a, b) \\
\sigma_{y_0} &= \sqrt{\left(\frac{b}{a^2}\sigma_a\right)^2 + \left(-\frac{1}{a}\sigma_b\right)^2 - 2\frac{b}{a^3}\mathrm{cov}(a, b)} \qquad (5) \\
\sigma_{y_0} &= 0.09\ \mathrm{cm} = 0.0009\ \mathrm{m}
\end{aligned}
$$

Zapišme výsledek ve správném tvaru.

$$
\begin{aligned}
k &= (33.5 \pm 0.1)\ \mathrm{N\ m^{-1}} \\
\text{případně: } k &= (33.5 \pm 0.1)\ \mathrm{kg\ s^{-2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_0 &= (21.74 \pm 0.09)\ \mathrm{cm} \\
\text{případně: } y_0 &= (217.4 \pm 0.9) \times 10^{-3}\ \mathrm{m}
\end{aligned}
$$

Příklad 2a - odhady parametrů

Zadání:
V tabulce je uvedeno 8 změřených hodnot rychlosti proudící kapaliny.

n	v (cm s^{-1})
1	3.89
2	3.38
3	7.08
4	3.32
5	4.40
6	1.76
7	5.85
8	3.07

(a) Vypočítejte nejlepší odhad očekávané hodnoty a standardní odchylky náhodné proměnné v.

(b) Nakreslete graf hustoty pravděpodobnosti náhodné proměnné v.

(c) Určete průměrnou rychlost proudící kapaliny a její chybu. Výsledek zapište **ve správném tvaru**!

(5 bodů)

Řešení:
(a) Očekávanou hodnotu $\hat{\mu}_v$ odhadneme jako aritmetický průměr naměřených hodnot v_n.

$$\hat{\mu}_v \equiv \bar{v} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} v_n \tag{1}$$

$$\bar{v} = \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{8} v_n = 4.09375 \text{ cm s}^{-1}$$

Odchylku $\hat{\sigma}_v$ vypočítáme pomocí vzorce pro nepředpojatý odhad standardní odchylky.

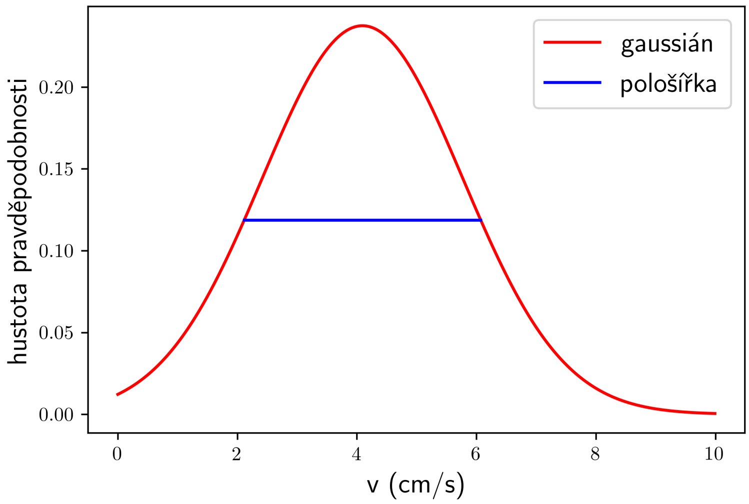
$$\hat{\sigma}_v = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(v_n - \bar{v})^2} \tag{2}$$

$$\hat{\sigma}_v = \sqrt{\frac{1}{7}\sum_{n=1}^{8}(v_n - \bar{v})^2}$$

$$\hat{\sigma}_v = \sqrt{\frac{1}{N-1}\left(\sum_{n=1}^{N} v_n^2 - N\bar{v}^2\right)} \tag{3}$$

$$\hat{\sigma}_v = \sqrt{\frac{1}{7}\left(\sum_{n=1}^{8} v_n^2 - 8\bar{v}^2\right)} \doteq 1.68 \text{ cm s}^{-1}$$

(b) V předchozím bodě jsme implicitně předpokládali, že náhodná proměnná má normální rozdělení $N(\mu_v, \sigma_v)$. Graf hustoty pravděpodobnosti je tedy gaussián s očekávanou hodnotou $\hat{\mu}_v$ a standardní odchylkou $\hat{\sigma}_v$. Postačí nakreslit gaussián centrovaný okolo střední hodnoty 4.1 cm s^{-1} s pološířkou $w = 2\sqrt{2\ln 2}\sigma \doteq 4.0$ cm s^{-1}.



(c) Chybu odhadu $\hat{\mu}_v$ určíme pomocí přenosu chyb jako chybu aritmetického průměru.

$$\sigma_{\bar{v}} = \frac{\hat{\sigma}_v}{\sqrt{N}} = \frac{\hat{\sigma}_v}{\sqrt{8}} \doteq 0.59 \text{ cm s}^{-1} \tag{4}$$

Průměrnou rychlost proudění a její chybu zaokrouhlíme na desetiny cm s^{-1} a výsledek zapíšeme ve správném tvaru následovně.

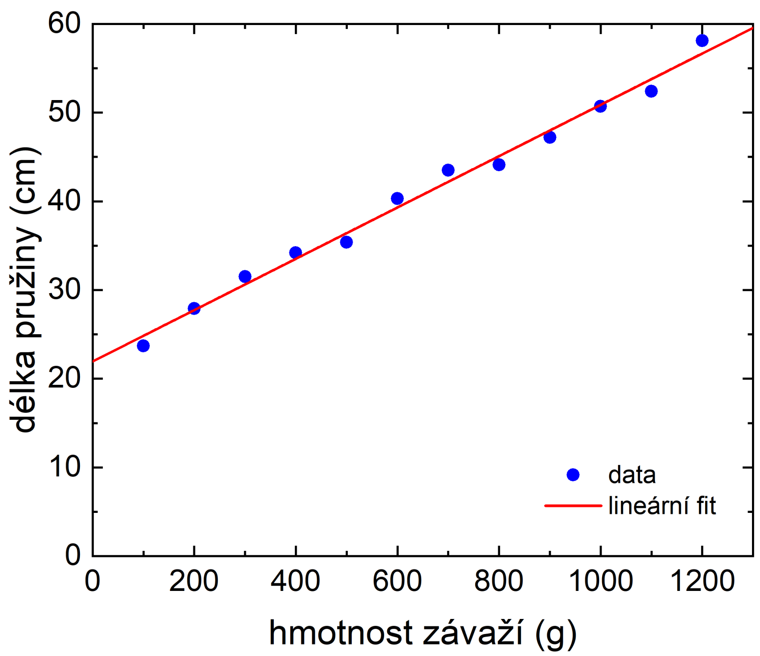
$$\bar{v} = (4.1 \pm 0.6) \text{ cm s}^{-1}$$

Příklad 1b - lineární regrese

V experimentu byla změřena závislost délky pružiny na hmotnosti závaží, kterým byla pružina zatížena, viz obrázek. Pro velikost síly, působící na pružinu, platí lineární vztah

$$F = k \cdot \Delta y,$$

kde k je tuhost pružiny a $\Delta y = y - y_0$ je prodloužení pružiny v důsledku působení síly $F = mg$.



Naměřená závislost byla proložena obecnou přímkou danou rovnicí $\lambda(x) = ax + b$ s následujícími parametry: $a = 0.02894$, $\sigma_a = 0.00017$, $b = 21.94$, $\sigma_b = 0.12$.
Určete tuhost pružiny a její délku v nezatíženém stavu. Počítejte s velikostí tíhového zrychlení $g = 9.81$ m s^{-2}.

Poznámky k řešení:

(a) Jaké jsou jednotky parametrů a, σ_a, b, σ_b?

(b) Jaký je vztah mezi tuhostí pružiny k, délkou nezatížené pružiny y_0 a nafitovanými parametry a, b? Pro výpočet chyb k a y_0 použijte tyto vztahy a metodu přenosu chyb.

(c) Výsledky zapište **ve správném tvaru** a se správnou jednotkou SI!

(5 bodů)

Řešení:
Označme si délku pružiny jako y a hmotnost závaží jako m. Závislost $y(m)$ jsme nafitovali lineární funkcí s předpisem $y = am + b$. Z obrázku vidíme, že jednotkou je $[y] = \mathrm{cm}$, zatímco jednotkou hmotnosti je $[m] = \mathrm{g}$. Parametr a tudíž musí mít jednotku $[a] = \mathrm{cm\ g^{-1}}$ a parametr b jednotku $[b] = \mathrm{cm}$. Totéž samozřejmě platí i pro (absolutní) chyby těchto parametrů σ_a a σ_b.
Lineární závislost působící síly na prodloužení pružiny si upravíme následovně.

$$\begin{aligned} mg &= k(y - y_0) \\ y &= \frac{g}{k}m + y_0 \end{aligned} \tag{1}$$

Rovnice (1) tedy odpovídá lineární funkci se směrnicí $a = g/k$ a konstantním členem $b = y_0$. Dosazením do těchto vztahů vypočítáme tuhost pružiny k a její délku v nenapjatém stavu y_0.

$$\begin{aligned} k &= \frac{g}{a} \\ k &= 338.98\ \mathrm{m\ s^{-2}\ g\ cm^{-1}} = 33.898\ \mathrm{kg\ s^{-2}} \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} y_0 &= b \\ y_0 &= 21.94\ \mathrm{cm} = 0.2194\ \mathrm{m} \end{aligned} \tag{3}$$

Chybu tuhosti σ_k získáme použitím metody přenosu chyb na rovnici (2).

$$\begin{aligned} \sigma_k^2 &= \left(\frac{\partial k}{\partial a}\sigma_a\right)^2 \\ \sigma_k &= \frac{g}{a^2}\sigma_a \\ \sigma_k &= 1.99\ \mathrm{m\ s^{-2}\ g\ cm^{-1}} = 0.199\ \mathrm{kg\ s^{-2}} \doteq 0.2\ \mathrm{kg\ s^{-2}} \end{aligned} \tag{4}$$

Chyba délky σ_{y_0} se přímo rovná chybě σ_b parametru b.

$$\begin{aligned} \sigma_{y_0} &= \sigma_b \\ \sigma_{y_0} &= 0.12\ \mathrm{cm} \doteq 0.1\ \mathrm{cm} \end{aligned} \tag{5}$$

Zapišme výsledek ve správném tvaru, tj. s chybami zaokrouhlenými na 1 platnou číslici a středními hodnotami zaokrouhlenými na stejný řád platné číslice jako příslušné chyby.

$$k = (33.9 \pm 0.2)\ \mathrm{kg\ s^{-2}}$$

$$\begin{aligned} y_0 &= (21.9 \pm 0.1)\ \mathrm{cm} \\ \text{případně: } y_0 &= (219 \pm 1) \times 10^{-3}\ \mathrm{m} \end{aligned}$$

Příklad 2b - odhady parametrů

Zadání:
V tabulce je uvedeno 12 hodnot rychlosti proudící kapaliny změřených učitelem a 5 hodnot rychlosti proudící kapaliny následně změřených studentem.

n_1	v (cm s^{-1})	n_2	v (cm s^{-1})
1	5.34	1	8.07
2	4.87	2	3.09
3	6.24	3	5.91
4	3.81	4	4.29
5	6.17	5	6.27
6	5.52		
7	5.33		
8	4.80		
9	7.09		
10	4.39		
11	5.84		
12	4.98		

(a) Na základě měření provedeného učitelem vypočítejte nejlepší odhad očekávané hodnoty μ a standardní odchylky σ náhodné proměnné v.

(b) Definujte konfidenční interval hodnot $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ neboli tzv. 3σ kritérium.

(c) Otestujte, zda není žádná z hodnot naměřených studentem zatížená hrubou chybou.

(d) Na základě všech spolehlivě naměřených hodnot (učitelem i studentem) vypočítejte nový nejlepší odhad očekávané hodnoty a standardní odchylky náhodné proměnné v.

(e) Určete průměrnou rychlost proudící kapaliny a její chybu. Výsledek zapište **ve správném tvaru**!

(10 bodů)

Řešení:
(a) Očekávanou hodnotu $\hat{\mu}_v$ odhadneme jako aritmetický průměr hodnot v_n naměřených učitelem.

$$\hat{\mu}_v \equiv \bar{v} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} v_n \tag{1}$$

$$\bar{v} = \frac{1}{12} \sum_{n=1}^{12} v_n = 5.365 \text{ cm s}^{-1}$$

Odchylku $\hat{\sigma}_v$ vypočítáme pomocí vzorce pro nepředpojatý odhad standardní odchylky.

$$\hat{\sigma}_v = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(v_n - \bar{v})^2} \tag{2}$$

$$\hat{\sigma}_v = \sqrt{\frac{1}{11}\sum_{n=1}^{12}(v_n - \bar{v})^2}$$

$$\hat{\sigma}_v = \sqrt{\frac{1}{N-1}\left(\sum_{n=1}^{N} v_n^2 - N\bar{v}^2\right)} \tag{3}$$

$$\hat{\sigma}_v = \sqrt{\frac{1}{11}\left(\sum_{n=1}^{12} v_n^2 - 12\bar{v}^2\right)} \doteq 0.89 \text{ cm s}^{-1}$$

(b) V předchozím bodě implicitně předpokládáme, že náhodná proměnná má normální rozdělení $N(\mu_v, \sigma_v)$. Konfidenční interval $(\hat{\mu}_v - 3\hat{\sigma}_v, \hat{\mu} + 3\hat{\sigma}_3)$ definující 3σ kritérium má následující hraniční hodnoty.

$$\hat{\mu}_v - 3\hat{\sigma}_v \doteq 2.69 \text{ cm s}^{-1}$$
$$\hat{\mu}_v + 3\hat{\sigma}_v \doteq 8.04 \text{ cm s}^{-1}$$

(c) Vidíme, že 4 z 5 hodnot naměřených studentem leží v konfidenčním intervalu. Hodnota 8.07 cm s^{-1} leží vně tohoto intervalu, je tedy pravděpodobně změřena s hrubou chybou a proto ji v dalších výpočtech vynecháme.

(d) Dohromady máme k dispozici sadu 16 spolehlivých hodnot rychlosti v. Očekávanou hodnotu a standardní odchylku odhadneme stejným způsobem jako v bodě (a).

$$\hat{\mu}_v \equiv \bar{v} = \frac{1}{16}\sum_{n=1}^{16} v_n = 5.25 \text{ cm s}^{-1}$$

$$\hat{\sigma}_v = \sqrt{\frac{1}{15}\sum_{n=1}^{16}(v_n - \bar{v})^2}$$

$$\hat{\sigma}_v = \sqrt{\frac{1}{15}\left(\sum_{n=1}^{16} v_n^2 - 16\bar{v}^2\right)} \doteq 1.04 \text{ cm s}^{-1}$$

(e) Chybu odhadu $\hat{\mu}_v$ určíme pomocí přenosu chyb jako chybu aritmetického průměru.

$$\sigma_{\bar{v}} = \frac{\hat{\sigma}_v}{\sqrt{N}} = \frac{\hat{\sigma}_v}{\sqrt{16}} \doteq 0.26 \text{ cm s}^{-1} \tag{4}$$

Průměrnou rychlost proudění a její chybu zaokrouhlíme na desetiny cm s^{-1} a výsledek zapíšeme ve správném tvaru následovně.

$$\bar{v} = (5.2 \pm 0.3) \text{ cm s}^{-1}$$