Cvičení 4 - Symetrizace

Elektroenergetika 3

Petr Jílek

2024

Obsah

1 Symetrizace

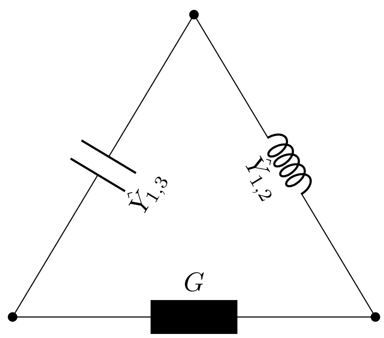
1.1 1 fázová reálná zátěž

Mějme 1 fázovou reálnou zátěž zdanou reálnou admitancí G (Ω^{-1}):

$$G = \frac{1}{R},$$

kde:
R - odpor zátěže (Ω).

Pokud bychom tuto zátěž připojily k 3 fázovému systému, tak by byla nesymetrická. Našim cílem je tuto zátěž symetrizovat. Z této zátěže vytvoříme 3 fázovou symetrickou zátěž následovně:

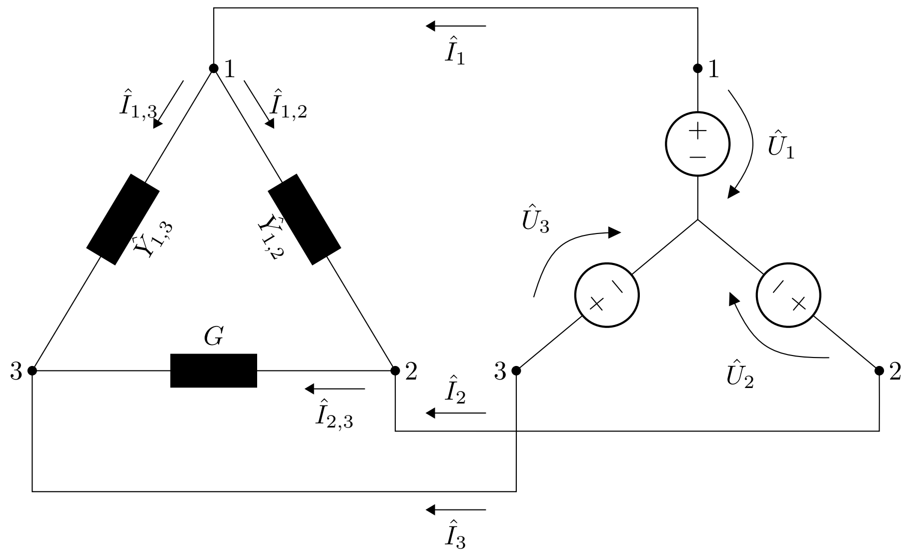


$$Y_{1,2} = -j\frac{G}{\sqrt{3}}$$

$$Y_{1,3} = j\frac{G}{\sqrt{3}}$$

1.1.1 Odvození

Uvažujme následující zapojení prvku v 3 fázovém systému:



Mezi uzly 2 a 3 je zapojena reálná zátěž, kterou chceme symetrizovat o vodivosti G (Ω^{-1}). Požadujeme, aby po připojení admitancí $\hat{Y}_{1,2}$ (Ω^{-1}) a $\hat{Y_{1.3}}$ (Ω^{-1}) byla zátěž reálná a symetrická. Dalším požadavkem je, aby činný výkon odebíraný zátěží zůstal nezměněn. Matematicky to znamená:

- zachování činného výkonu: $\hat{Y}_{1,2}$ a $\hat{Y}_{1,3}$ jsou ryze imaginární,
- výsledné zapojení neodebírá jalový výkon: $\hat{Y}_{1,2} = -\hat{Y}_{1,3}$
- symetrie odebíraných proudů: $\hat{I}_1 = k \cdot \hat{U}_1$, $\hat{I}_2 = k \cdot \hat{U}_2$, $\hat{I}_3 = k \cdot \hat{U}_3$.

Položme: $\hat{Y}_{1,2} = j \cdot Y$ a $\hat{Y}_{1,3} = -j \cdot Y$.

Použijeme operátor pootočení o 120° proti směru hodinových ručiček v komplexní rovině:

$$\hat{a} = e^{\frac{2\pi j}{3}} = \cos(\frac{2\pi}{3}) + j \cdot \sin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\hat{a}^2 = e^{\frac{4\pi j}{3}} = \cos(\frac{4\pi}{3}) + j \cdot \sin(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\hat{a}^3 = e^{\frac{6\pi j}{3}} = e^{2\pi j} = 1$$

$$\hat{a}^4 = e^{\frac{8\pi j}{3}} = e^{\frac{2\pi j}{3}} \cdot e^{\frac{6\pi j}{3}} = e^{\frac{2\pi j}{3}} = \hat{a}$$

Poté fázory napětí můžeme vyjádřit jako:

$$\hat{U}_1 = \hat{U} \cdot \hat{a}$$

$$\hat{U}_2 = \hat{U} \cdot \hat{a}^2$$

$$\hat{U}_3 = \hat{U} \cdot \hat{a}$$

Můžeme napsat rovnice pro proudy:

$$\hat{I}_1 = \hat{I}_{1,2} + \hat{I}_{1,3} = \hat{Y}_{1,2} \cdot \left(\hat{U}_1 - \hat{U}_2\right) + \hat{Y}_{1,3} \cdot \left(\hat{U}_1 - \hat{U}_3\right) =$$

$$= j \cdot Y \cdot U \cdot \left(1 - \hat{a}^2\right) - j \cdot Y \cdot U \cdot (1 - \hat{a}) = k \cdot U$$

$$\hat{I}_2 = \hat{I}_{2,3} - \hat{I}_{1,2} = G \cdot \left(\hat{U}_2 - \hat{U}_3\right) - \hat{Y}_{1,2} \cdot \left(\hat{U}_1 - \hat{U}_2\right) =$$

$$= G \cdot U \cdot \left(\hat{a}^2 - \hat{a}\right) - j \cdot Y \cdot U \cdot \left(1 - \hat{a}^2\right) = k \cdot U \cdot \hat{a}^2$$

$$\hat{I}_3 = -\hat{I}_{1,3} - \hat{I}_{2,3} = -\hat{Y}_{1,3} \cdot \left(\hat{U}_1 - \hat{U}_3\right) - G \cdot \left(\hat{U}_2 - \hat{U}_3\right) =$$

$$= j \cdot Y \cdot U \cdot (1 - \hat{a}) - G \cdot U \cdot \left(\hat{a}^2 - \hat{a}\right) = k \cdot U \cdot \hat{a}$$

Vezmeme konce rovnic, čímž dostaneme:

$$j \cdot Y \cdot U \cdot \left(1 - \hat{a}^2\right) - j \cdot Y \cdot U \cdot (1 - \hat{a}) = k \cdot U$$

$$G \cdot U \cdot \left(\hat{a}^2 - \hat{a}\right) - j \cdot Y \cdot U \cdot \left(1 - \hat{a}^2\right) = k \cdot U \cdot \hat{a}^2$$

$$j \cdot Y \cdot U \cdot (1 - \hat{a}) - G \cdot U \cdot \left(\hat{a}^2 - \hat{a}\right) = k \cdot U \cdot \hat{a}$$

Rovnice jsou lineárně závislé, jelikož součet pravých stran je roven nule:

$$k \cdot U + k \cdot U \cdot \hat{a} + k \cdot U \cdot \hat{a}^2 = k \cdot U \cdot \left(1 + \hat{a} + \hat{a}^2\right) = k \cdot U \cdot 0 = 0$$

Díky lineární závislosti nám stačí vzít pouze dvě rovnice. Vezmeme první a druhou:

$$j \cdot Y \cdot U \cdot (1 - \hat{a}^2) - j \cdot Y \cdot U \cdot (1 - \hat{a}) = k \cdot U$$

$$G \cdot U \cdot (\hat{a}^2 - \hat{a}) - j \cdot Y \cdot U \cdot (1 - \hat{a}^2) = k \cdot U \cdot \hat{a}^2$$

Můžeme pokrátit U:

$$j \cdot Y \cdot (1 - \hat{a}^2) - j \cdot Y \cdot (1 - \hat{a}) = k$$

$$G \cdot (\hat{a}^2 - \hat{a}) - j \cdot Y \cdot (1 - \hat{a}^2) = k \cdot \hat{a}^2$$

Připravíme rovnice na maticový tvar:

$$-k + \left(j \cdot (1 - \hat{a}^2) - j \cdot (1 - \hat{a})\right) \cdot Y = 0$$

$$-k \cdot \hat{a}^2 - j \cdot (1 - \hat{a}^2) \cdot Y = -G \cdot (\hat{a}^2 - \hat{a})$$

Přepíšeme do maticového tvaru:

$$\begin{pmatrix} -1 & j(1 - \hat{a}^2) - j(1 - \hat{a}) \\ -\hat{a}^2 & -j(1 - \hat{a}^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -G(\hat{a}^2 - \hat{a}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & j - j\hat{a}^2 - j + j\hat{a} \\ -\hat{a}^2 & -j + j\hat{a}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -G(\hat{a}^2 - \hat{a}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -j\hat{a}^2 + j\hat{a} \\ -\hat{a}^2 & j\hat{a}^2 - j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -G(\hat{a}^2 - \hat{a}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\hat{a}^2 & -j\hat{a}^4 + j\hat{a}^3 \\ -\hat{a}^2 & j\hat{a}^2 - j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -G(\hat{a}^2 - \hat{a}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\hat{a}^2 & -j\hat{a} + j \\ -\hat{a}^2 & j\hat{a}^2 - j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -G(\hat{a}^2 - \hat{a}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\hat{a}^2 & -j\hat{a} + j \\ 0 & j\hat{a}^2 - j + j\hat{a} - j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -G(\hat{a}^2 - \hat{a}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\hat{a}^2 & -j\hat{a} + j \\ 0 & j\hat{a}^2 + j\hat{a} - 2j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -G(\hat{a}^2 - \hat{a}) \end{pmatrix}$$

Vyřešíme rovnici pro Y:

$$Y = \frac{-G(\hat{a}^2 - \hat{a})}{j\hat{a}^2 + j\hat{a} - 2j} = \frac{-G\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)}{j\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + j\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2j} =$$

$$= \frac{-G\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{-j\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - 2j} = \frac{-G\left(-j\sqrt{3}\right)}{-3j} = \frac{-G\sqrt{3}}{3} = -\frac{G}{\sqrt{3}}$$

Vyřešíme rovnici pro k:

$$-\hat{a}^2 k + (-j\hat{a} + j)Y = 0$$

$$k = \frac{-(-j\hat{a} + j)Y}{-\hat{a}^2} = \frac{(-j\hat{a} + j)Y}{\hat{a}^2} = \frac{(-j\hat{a} + j)\left(-\frac{G}{\sqrt{3}}\right)}{\hat{a}^2} =$$

$$= \frac{\left(-j\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + j\right)\left(-\frac{G}{\sqrt{3}}\right)}{-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\left(j\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + j\right)\left(-\frac{G}{\sqrt{3}}\right)}{-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{\left(j\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{G}{\sqrt{3}}\right)}{-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\left(-j\frac{3}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)G}{-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

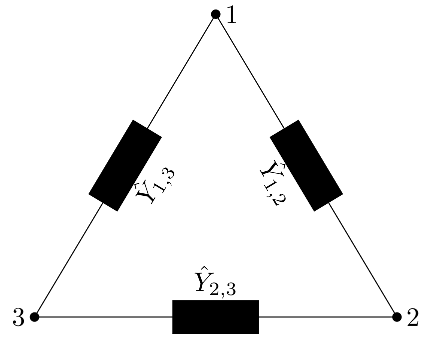
$$= \frac{\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)G}{-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}} = G$$

$$k = G$$

$$Y = -\frac{G}{\sqrt{3}}$$

1.2 Obecná 3f nesymetrická zátěž

Mějme obecnou 3 fázovou nesymetrickou zátěž zadanou admitancemi podle obrázku:



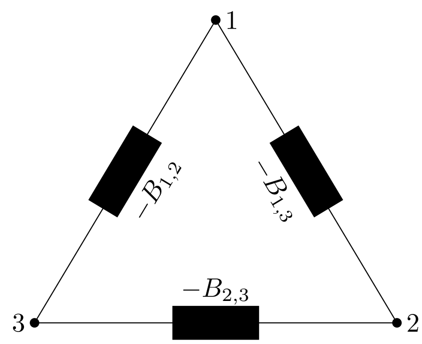
Admitance můžeme zapsat jako:

$$\hat{Y}_{1,2} = G_{1,2} + j \cdot B_{1,2}$$

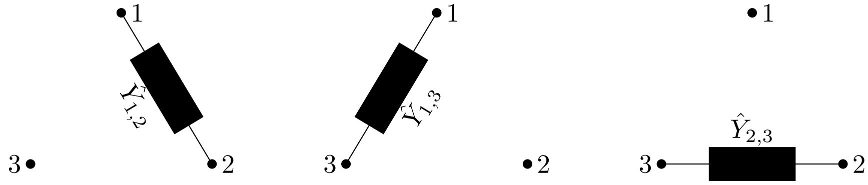
$$\hat{Y}_{1,3} = G_{1,3} + j \cdot B_{1,3}$$

$$\hat{Y}_{2,3} = G_{2,3} + j \cdot B_{2,3}.$$

První krok je provést kompenzaci jalových částí. Stačí pouze vzít zápornou hodnotu jalové části zátěže:



Dále je třeba provést symetrizaci pro každou část zvlášť. Nejprve pro větev 1–2, poté pro větev 1–3 a nakonec pro větev 2–3. Tento krok je znázorněn na obrázku:



Výsledná tabulka symetrizace bude vypadat následovně:

Větev	1–2	1–3	2–3
Kompenzace jalového výkonu	$-jB_{1,2}$	$-jB_{1,3}$	$-jB_{2,3}$
Symetrizace 1–2	0	$-j\frac{G_{1,2}}{\sqrt{3}}$	$j\frac{G_{1,2}}{\sqrt{3}}$
Symetrizace 1–3	$j\frac{G_{1,3}}{\sqrt{3}}$	0	$-j\frac{G_{1,3}}{\sqrt{3}}$
Symetrizace 2–3	$-j\frac{G_{2,3}}{\sqrt{3}}$	$j\frac{G_{2,3}}{\sqrt{3}}$	0

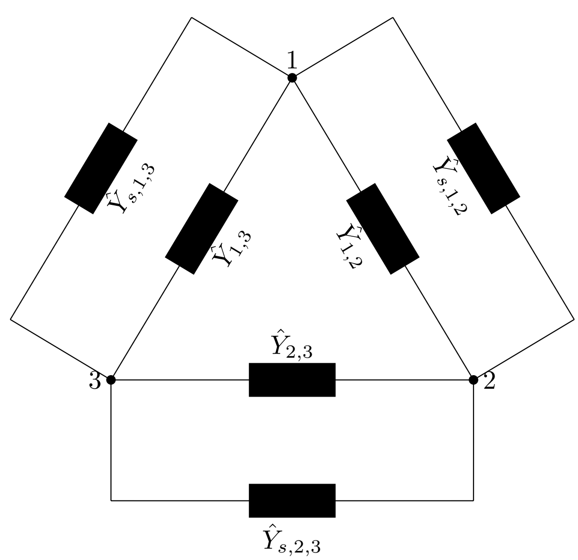
Symetrizační admitanci pro danou větev dostaneme jako součet všech symetrizačních admitancí (suma ve sloupci):

$$\hat{Y}_{s,1,2} = -jB_{1,2} + j\frac{G_{1,3}}{\sqrt{3}} - j\frac{G_{2,3}}{\sqrt{3}}$$

$$\hat{Y}_{s,1,3} = -jB_{1,3} - j\frac{G_{1,2}}{\sqrt{3}} + j\frac{G_{2,3}}{\sqrt{3}}$$

$$\hat{Y}_{s,2,3} = -jB_{2,3} + j\frac{G_{1,2}}{\sqrt{3}} - j\frac{G_{1,3}}{\sqrt{3}}$$

Tyto admitance následně připojíme parallelně k odpovídajícím větvím. Výsledný obvod bude vypadat následovně:



1.3 Přepočet výkonů na admitance

Zátěže jsou často zadány pomocí: činného výkonu, úhlu $\cos(\varphi)$ a informací, zda je zátěž induktivní nebo kapacitní. Tyto informace můžeme převést na admitanci $\hat{Y}$ (Ω^{-1}) následovně:

$$\hat{Y} = \frac{P}{U^2} \cdot (1 - j \cdot \mathrm{tg}(\pm\varphi)) = \frac{P}{U^2} \cdot (1 \mp j \cdot \mathrm{tg}(\varphi)),$$

kde: P - činný výkon (W),
U - efektivní hodnota napětí (V),
j - imaginární jednotka,
φ - úhel $\cos(\varphi)$,
horní znaménko $\pm/\mp$ - induktivní zátěž,
dolní znaménko $\pm/\mp$ - kapacitní zátěž.

Pro induktivní zátěž:

$$\hat{Y} = \frac{P}{U^2} \cdot (1 - j \cdot \mathrm{tg}(\varphi))$$

Pro kapacitní zátěž:

$$\hat{Y} = \frac{P}{U^2} \cdot (1 + j \cdot \mathrm{tg}(\varphi))$$

1.3.1 Odvození 🌶️🌶️🌶️

Ze vztahu pro napětí vyjádříme produ v závislosti na admitanci:

$$\hat{U} = \hat{I} \cdot \hat{Z} = \frac{\hat{I}}{\hat{Y}} \Rightarrow \hat{I} = \hat{U} \cdot \hat{Y}.$$

Dále použijeme vztah pro zdánlivý výkon:

$$\hat{S} = \hat{U} \cdot \hat{I}^* = \hat{U} \cdot \left(\hat{U} \cdot \hat{Y}\right)^* = \hat{U} \cdot \hat{U}^* \cdot \hat{Y}^* = U^2 \cdot \hat{Y}^* \Rightarrow \hat{Y} = \frac{\hat{S}}{U^2}.$$

$$\hat{Y} = \frac{(P + j \cdot Q)^*}{U^2} = \frac{P - j \cdot Q}{U^2} = \frac{P - j \cdot P \cdot \mathrm{tg}(\varphi)}{U^2}$$

Úhel φ je kladný pro induktivní zátěž a záporný pro kapacitní zátěž. Funkce $\mathrm{tg}(\varphi)$ lichá:

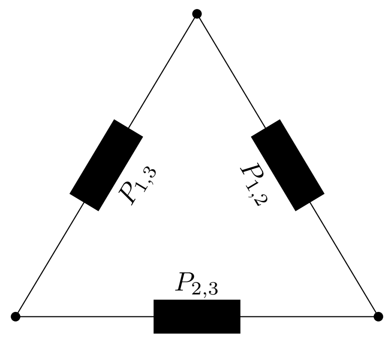
$$\mathrm{tg}(-\varphi) = \frac{\sin(-\varphi)}{\cos(-\varphi)} = \frac{-\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = -\frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = -\mathrm{tg}(\varphi).$$

Tudíž můžeme výsledný vztah zapsat jako:

$$\hat{Y} = \frac{P}{U^2} \cdot (1 \mp j \cdot \mathrm{tg}(\varphi)).$$

1.4 Číselný příklad

Mějme 3 fázovou nesymetrickou zátěž nazančenou na obrázku:



Parametry:

- $U = 400\text{V}$,
- $\cos(\varphi) = 0.8$,
- $P_{1,2} = 63$ kW, induktivní,
- $P_{1,3} = 28$ kW, induktivní,
- $P_{2,3} = 26$ kW, kapacitní.

Provete symetrizaci zátěže.

1.4.1 Řešení

Nejprve získáme úhel φ:

$$\varphi = \arccos(0.8) \approx 0.644 \text{ rad}.$$

Dále vypočítáme $\text{tg}(\varphi)$:

$$\text{tg}(\varphi) = \text{tg}(0.644) \approx 0.751.$$

Následně získáme admitance:

$$Y_{1,2} = \frac{P_{1,2}}{U^2} \cdot (1 - j \cdot \text{tg}(\varphi)) = \frac{63\,000}{400^2} \cdot (1 - j \cdot 0.751) = (0.394 - j \cdot 0.236)\ \Omega^{-1}$$

$$Y_{1,3} = \frac{P_{1,3}}{U^2} \cdot (1 - j \cdot \text{tg}(\varphi)) = \frac{28\,000}{400^2} \cdot (1 - j \cdot 0.751) = (0.175 - j \cdot 0.131)\ \Omega^{-1}$$

$$Y_{2,3} = \frac{P_{2,3}}{U^2} \cdot (1 + j \cdot \text{tg}(\varphi)) = \frac{26\,000}{400^2} \cdot (1 + j \cdot 0.751) = (0.163 + j \cdot 0.122)\ \Omega^{-1}.$$

Dále vytvoříme tabulku symetrizace:

Větev	1–2	1–3	2–3
Kompenzace jalového výkonu	$j0.236$	$j0.131$	$-j0.122$
Symetrizace 1–2	0	$-j\frac{0.394}{\sqrt{3}}$	$j\frac{0.394}{\sqrt{3}}$
Symetrizace 1–3	$j\frac{0.175}{\sqrt{3}}$	0	$-j\frac{0.175}{\sqrt{3}}$
Symetrizace 2–3	$-j\frac{0.163}{\sqrt{3}}$	$j\frac{0.163}{\sqrt{3}}$	0

Symetrizační admitance:

$$Y_{s,1,2} = j0.236 + j\frac{0.175}{\sqrt{3}} - j\frac{0.163}{\sqrt{3}} = j0.236 + j0.101 - j0.094 = j0.243\ \Omega^{-1}$$

$$Y_{s,1,3} = j0.131 - j\frac{0.394}{\sqrt{3}} + j\frac{0.163}{\sqrt{3}} = j0.131 - j0.227 + j0.094 = -j0.002\ \Omega^{-1}$$

$$Y_{s,2,3} = -j0.122 + j\frac{0.394}{\sqrt{3}} - j\frac{0.175}{\sqrt{3}} = -j0.122 + j0.227 - j0.101 = j0.004\ \Omega^{-1}.$$

Výsledné zapojení bude vypadat následovně: