Cvičení 1 - Energie

Elektroenergetika 3

Petr Jílek

2024

Obsah

1 🏔️ Potenciální energie 🌶️

Do jaké výšky vynese energie jedné Fidorky (30 g → 162 kcal) 80 kg člověka?

a) Gravitační zrychlení je konstantní s hodnotou 9,81 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

b) Počáteční výška je 0 m nad mořem a gravitační zrychlení je proměnné. Známe:

- gravitační konstanta: $G = 6,67430 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$,
- poloměr Země: $R = 6\ 371$ km,
- hmotnost Země: $M = 5,97219 \cdot 10^{24}$ kg.

1.1 a

Energie jedné Fidorky:

$$162\ \mathrm{kcal} = 162\ \mathrm{kcal} \cdot 4\ 184\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kcal}} = 677\ 808\ \mathrm{J}.$$

Ze vzorce pro potenciální energii vyjádříme výšku:

$$E_p = m \cdot g \cdot \Delta h \Rightarrow \Delta h = \frac{E_p}{m \cdot g} = \frac{677\ 808}{80 \cdot 9,81} \approx 863,7\ m.$$

1.2 b 🌶️🌶️🌶️

Nejdříve si odvodíme vzorec pro gravitační zrychlení z Newtonova gravitačního zákona:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}, \qquad \mathrm{(N)} \tag{1}$$

kde:
F – gravitační síla (N),
G – gravitační konstanta ($\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$),
m_1 – hmotnost prvního tělesa (kg),
m_2 – hmotnost druhého tělesa (kg),
r – vzdálenost mezi tělesy (m).

Gravitační síla je definována jako:

$$F = m \cdot g, \qquad \mathrm{(N)} \tag{2}$$

kde:
m – hmotnost (kg),
g – gravitační zrychlení ($\mathrm{m \cdot s^{-2}}$).

Dále budeme uvažovat, že hmotnost m_1 je hmotnost Země M a hmotnost m_2 je hmotnost člověka m a dosadíme do Newtonova gravitačního zákona:

$$m \cdot g = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}.$$

Poté gravitační zrychlení g je:

$$g = G \cdot \frac{M}{r^2}.$$

Takto můžeme dosadit do vzorce pro potenciální energii:

$$E_p = m \cdot g \cdot h = m \cdot G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot h.$$

Nyní je třeba si uvědomit, že gravitační zrychlení g je proměnné a závisí na výšce h. Je možné analyzovat kolik potřebujeme energie ΔE_p pro zvýšení výšky h o Δh:

$$\Delta E_p = m \cdot G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \Delta h$$

Zde se dopouštíme jisté nepřesnosti, jelikož pokud například Δh bude 2 m, tak poloměr od středu země se změní taky, čímž se změní gravitační zrychlení. Pro získání přesného výsledku je třeba nahradit Δh infinitesimálně malým dh a ΔE_p bude infinitesimálně malé dE_p:

$$dE_p = m \cdot G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot dh.$$

Toto očividně vede na diferenciální rovnici, která lze snadno řešit separací proměnných, ale pozor. Nyní bychom brali poloměr r jako konstantu. To je chyba, jelikož poloměr r se mění s výškou h. Jeden z přístupů je nahradit výšku h poloměrem r a místo posouvání se o výšku dh se posuneme o poloměr dr. Ale musíme si poté zapamatovat, že počáteční mezí je poloměr země R a konečná mez bude tedy $R + h$. Poté je možné řešit rovnici:

$$E_p = \int_R^{R+h} m \cdot G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot dr.$$

Hmotnost m a M a gravitační konstanta G je konstantní, takže je můžeme vytknout před integrál:

$$E_p = m \cdot G \cdot M \int_R^{R+h} \frac{1}{r^2} \cdot dr = m \cdot G \cdot M \cdot \left[-\frac{1}{r} \right]_R^{R+h} = m \cdot G \cdot M \cdot \left(-\frac{1}{R+h} + \frac{1}{R} \right).$$

Po úpravě dostaneme:

$$E_p = m \cdot G \cdot M \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right).$$

Nyní je třeba osamostatnit h:

$$E_p = m \cdot G \cdot M \cdot \left(\frac{R + h - R}{R \cdot (R + h)} \right) = m \cdot G \cdot M \cdot \left(\frac{h}{R \cdot (R + h)} \right)$$

$$E_p \cdot R \cdot (R + h) = m \cdot G \cdot M \cdot h$$

$$E_p \cdot R^2 + E_p \cdot R \cdot h = m \cdot G \cdot M \cdot h$$

$$E_p \cdot R \cdot h - m \cdot G \cdot M \cdot h = -E_p \cdot R^2$$

$$h \cdot (E_p \cdot R - m \cdot G \cdot M) = -E_p \cdot R^2$$

$$h = \frac{-E_p \cdot R^2}{E_p \cdot R - m \cdot G \cdot M}$$

$$h = \frac{E_p \cdot R^2}{m \cdot G \cdot M - E_p \cdot R}.$$

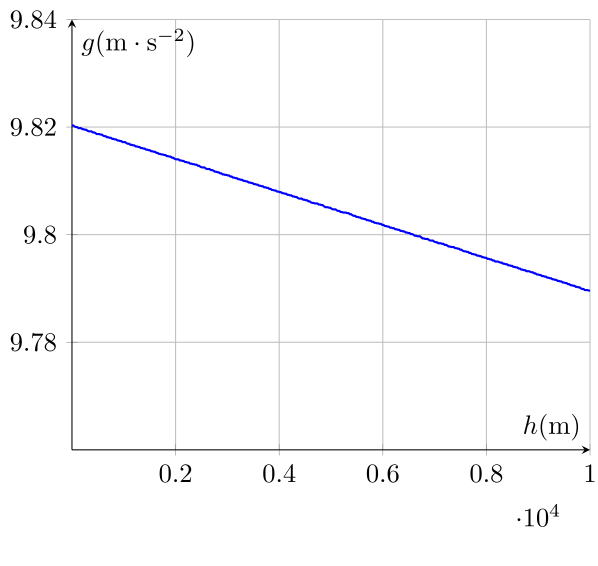
Poté dosadíme hodnoty:

$$h = \frac{677\ 808 \cdot 6\ 371\ 000^2}{80 \cdot 6{,}67430 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97219 \cdot 10^{24} - 677\ 808 \cdot 6\ 371\ 000} \approx$$

$$\approx 862{,}8\ m.$$

Jako dodatek je možné si vytvořit graf závislosti gravitačního zrychlení na výšce h nad mořem:

Závislost gravitačního zrychlení na výšce h nad mořem.



Poznámka

Gravitační zrychlení v grafu pro 0 metrů nad mořem je cca $9,82\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ místo $9,81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Vzorec pro Newtonův gravitační zákon uvažuje sféricky symetrické rozložení hmoty země. V realitě hmota země sféricky symetricky rozložena není. V jádru země je běžně látka s vyšší hustotou než na povrchu země. Tento faktor způsobuje, že reálné gravitační zrychlení na povrchu země je o něco nižší než spočítaná hodnota ze vzorce. Hodnota 9,81 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ je hodnot změřená.
Kvůli této nepřesnosti je i výsledná výška při počítání s proměnným gravitačním zrychlením o něco nižší, než výška při počítání s konstantním gravitačním zrychlením 9,81 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

2 🔥 Tepelná kapacita 🌶️

Na jakou teplotu by energie potřebná k ohřátí vody z 10 °C na 100 °C ohřála ocel a zlato o stejné:

a) hmotnosti,

b) objemu.

Materiál	ρ ($\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$)	c ($\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$)
Voda (H2O)	1 000	4 186
Ocel	7 750	450
Zlato	19 320	129

Tabulka 1: Hustota a měrná tepelná kapacita materiálů.

2.1 a

Rozdíl teplot pro vodu je:

$$\Delta T_{H2O} = 100\ °\mathrm{C} - 10\ °\mathrm{C} = 90\ \mathrm{K}.$$

Podle rovnice pro měrnou tepelnou kapacitu můžeme napsat:

$$m_{H2O} \cdot c_{H2O} \cdot \Delta T_{H2O} = m_{ocel} \cdot c_{ocel} \cdot \Delta T_{ocel} = m_{zlato} \cdot c_{zlato} \cdot \Delta T_{zlato}.$$

A zároveň pro tento příklad hmotnosti jsou stejné:

$$m_{H2O} = m_{ocel} = m_{zlato} = m.$$

Tedy:

$$m \cdot c_{H2O} \cdot \Delta T_{H2O} = m \cdot c_{ocel} \cdot \Delta T_{ocel} = m \cdot c_{zlato} \cdot \Delta T_{zlato}.$$

Rovnici lze vydělit hmotností m ($m > 0$) a dostaneme:

$$c_{H2O} \cdot \Delta T_{H2O} = c_{ocel} \cdot \Delta T_{ocel} = c_{zlato} \cdot \Delta T_{zlato}.$$

Pro ocel platí:

$$\Delta T_{ocel} = \Delta T_{H2O} \cdot \frac{c_{H2O}}{c_{ocel}} = 90 \cdot \frac{4\ 186}{450} \approx 837,2\ \mathrm{K}.$$

Pro zlato platí:

$$\Delta T_{zlato} = \Delta T_{H2O} \cdot \frac{c_{H2O}}{c_{zlato}} = 90 \cdot \frac{4\ 186}{129} \approx 2\ 920,5\ \mathrm{K}.$$

Poznámka

Pokud bychom například takto ohřívali zlato z teploty 0 °C, tak by se zlato mělo ohřát na teplotu 2 920,5 °C. Tato teplota je vyšší než teplota tání zlata, která je 1 064 °C. Zlato by se při této teplotě roztavilo a část energie by byla spotřebována na změnu skupenství. Tudíž výsledná teplota by byla nižší.

2.2 b

Podle rovnice pro měrnou tepelnou kapacitu můžeme napsat:

$$V_{H2O} \cdot \rho_{H2O} \cdot c_{H2O} \cdot \Delta T_{H2O} = V_{ocel} \cdot \rho_{ocel} \cdot c_{ocel} \cdot \Delta T_{ocel} =$$

$$= V_{zlato} \cdot \rho_{zlato} \cdot c_{zlato} \cdot \Delta T_{zlato}$$

A zároveň pro tento příklad objemy jsou stejné:

$$V_{H2O} = V_{ocel} = V_{zlato} = V.$$

Tedy:

$$V \cdot \rho_{H2O} \cdot c_{H2O} \cdot \Delta T_{H2O} = V \cdot \rho_{ocel} \cdot c_{ocel} \cdot \Delta T_{ocel} =$$

$$= V \cdot \rho_{zlato} \cdot c_{zlato} \cdot \Delta T_{zlato}.$$

Rovnici lze vydělit objemem V $(V > 0)$ a dostaneme:

$$\rho_{H2O} \cdot c_{H2O} \cdot \Delta T_{H2O} = \rho_{ocel} \cdot c_{ocel} \cdot \Delta T_{ocel} = \rho_{zlato} \cdot c_{zlato} \cdot \Delta T_{zlato}.$$

Pro ocel platí:

$$\Delta T_{ocel} = \Delta T_{H2O} \cdot \frac{\rho_{H2O} \cdot c_{H2O}}{\rho_{ocel} \cdot c_{ocel}} = 90 \cdot \frac{1\ 000 \cdot 4\ 186}{7\ 750 \cdot 450} \approx 108,0 \text{ K}.$$

Pro zlato platí:

$$\Delta T_{zlato} = \Delta T_{H2O} \cdot \frac{\rho_{H2O} \cdot c_{H2O}}{\rho_{zlato} \cdot c_{zlato}} = 90 \cdot \frac{1\ 000 \cdot 4\ 186}{19\ 320 \cdot 129} \approx 151,1 \text{ K}.$$

3 🚿 Průtokový ohřívač 🌶️

Mějme průtokový ohřívač vody, který ohřívá studenou vodu o teplotě 10 °C na teplotu 40 °C. Při sprchování je spotřeba vody 10 l za minutu.

a) Jaký je výkon ohřívače?

b) Uvažujme, že ohřívač je na jednu fázi 230 V. Bude nám stačit jistič na 16 A?

3.1 a

Objem protečené vody za 1 hodinu je:

$$V = 10\ \frac{\mathrm{l}}{\mathrm{min}} = 10\ \frac{\frac{\mathrm{m}^3}{1000}}{\frac{\mathrm{h}}{60}} = 10\ \frac{\mathrm{m}^3}{1000} \cdot \frac{60}{\mathrm{h}} = 0{,}6\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}.$$

Hmotnost protečené vody za 1 hodinu je:

$$m = V \cdot \rho = 0{,}6\ \mathrm{m}^3 \cdot 1000\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 600\ \mathrm{kg}.$$

Množství energie za 1 hodinu potřebné k ohřátí vody je:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta T.$$

$$Q = 600 \cdot 4\ 186 \cdot 30\ = 75\ 348\ 000\ \mathrm{J}$$

Výkon ohřívače je:

$$P = \frac{Q}{t} = \frac{75\ 348\ 000\ \mathrm{J}}{1\ \mathrm{h}} = \frac{75\ 348\ 000\ \mathrm{Ws}}{3\ 600\ \mathrm{s}} = 20\ 930\ \mathrm{W} = 20{,}93\ \mathrm{kW}.$$

3.2 b

Výkon ohřívače je:

$$P = U_e \cdot I_e,$$

kde:
P – výkon (W),
U – elektrické napětí (V),
I – elektrický proud (A).

Z rovnice pro výkon ohřívače můžeme vyjádřit proud:

$$I = \frac{P}{U} = \frac{20{,}93\ \mathrm{kW}}{230\ \mathrm{V}} = \frac{20\ 930\ \mathrm{W}}{230\ \mathrm{V}} = 91\ \mathrm{A}.$$

Jistič na 16 A tedy nestačí, jelikož proud je 91 A.

4 🔋 Monočlánek 🌶️

Mějme monočlánek s kapacitou 2 500 mAh a napětím 1, 2 V.

a) Kolik litrů vody ohřeje z 10 °C na 100 °C?

b) Jak vysoko vynese 80 kg člověka?

4.1 a

Energie monočlánku je:

$$E = 1,2\ \mathrm{V} \cdot 2\,500\ \mathrm{mAh} = 1,2\ \mathrm{V} \cdot 2,5\ \mathrm{Ah} = 3\ \mathrm{Wh} = 3 \cdot 3\,600\ \mathrm{J} = 10\,800\ \mathrm{J}.$$

Množství energie potřebné k ohřátí vody je:

$$Q = V \cdot \rho \cdot c \cdot \Delta T.$$

Z rovnice pro měrnou tepelnou kapacitu můžeme vyjádřit objem:

$$m = \frac{Q}{\rho \cdot c \cdot \Delta T} = \frac{10\,800}{1000 \cdot 4\,186 \cdot 90} =$$

$$= 2,87 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}^3 = 2,87 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{l} = 28,7\ \mathrm{ml}.$$

4.2 b

Ze vzorce pro potenciální energii vyjádříme výšku:

$$E_p = m \cdot g \cdot \Delta h \Rightarrow \Delta h = \frac{E_p}{m \cdot g} = \frac{10\,800}{80 \cdot 9,81} \approx 13,76\ \mathrm{m}.$$

Cvičení 2 - Sdílení tepla

Elektroenergetika 3

Petr Jílek

2024

Obsah

1 🧱 Zeď 🌶️🌶️

1.1 Fourierova-Kirchhoffova rovnice 🌶️🌶️🌶️

Pro zeď o tloušťce d budeme uvažovat následující zjednodušející předpoklady:

- $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$,
- $\vec{v} = 0$,
- $\dot{Q}_V = 0$,
- $\lambda =$ konstanta,
- $T = T(x)$ - teplota závislá pouze na x.

Poté Fourierova-Kirchhoffova rovnice bude mít tvar:

$$0 = \nabla \cdot \left(\lambda \cdot \vec{\nabla} T \right) = \lambda \cdot \frac{d^2T}{dx^2}.$$

Rovnici můžeme vydělit λ ($\lambda > 0$, záporné tepelné vodivosti nemají fyzikální smysl) a získáme:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0.$$

Tuto rovnici můžeme řešit dvojí integrací. První integrace bude vypadat následovně:

$$\frac{dT}{dx} = \int 0 \cdot dx = 0 + c_1 = c_1.$$

Druhá integrace bude vypadat následovně:

$$T(x) = \int c_1 \cdot dx = c_1 \cdot x + c_2.$$

Obecné řešení bude tedy:

$$T(x) = c_1 \cdot x + c_2.$$

Pro úplné řešení je třeba definovat okrajové podmínky. Pro zeď o tloušťce d budeme uvažovat následující okrajové podmínky:

- Teplota na začátku zdi $T(0) = T_1$:

$$T_1 = T(0) = c_1 \cdot 0 + c_2 = c_2 \Rightarrow c_2 = T_1.$$

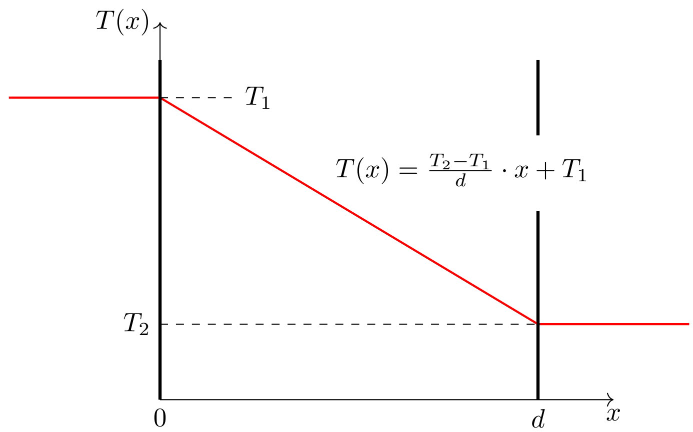
- Teplota na konci zdi $T(d) = T_2$:

$$T_2 = T(d) = c_1 \cdot d + c_2 \Rightarrow c_1 = \frac{T_2 - c_2}{d} = \frac{T_2 - T_1}{d}.$$

Úplné řešení bude tedy:

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{d} \cdot x + T_1.$$

Tuto situaci můžeme znázornit následujícím obrázkem:



1.2 Fourieruv zákon 🌶️🌶️🌶️

Nyní dosadíme řešení z předchozího příkladu do Fourierova zákona, kde za gradient teploty dosadíme derivaci teploty podle osy x, čímž získáme měrný tepelný tok q:

$$\dot{q} = -\lambda \cdot \frac{dT(x)}{dx} = -\lambda \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{T_2 - T_1}{d} \cdot x + T_1\right) =$$

$$= -\lambda \cdot \frac{T_2 - T_1}{d} = \lambda \cdot \frac{T_1 - T_2}{d} = \frac{\Delta T}{\frac{d}{\lambda}}.$$

1.3 Tepelný odpor

Dolní výraz z předchozí sekce $\frac{d}{\lambda}$ je tepelný odpor:

$$R_\vartheta = \frac{d}{\lambda}. \qquad (\mathrm{m^2 \cdot K \cdot W^{-1}}) \quad (1)$$

Měrný tepelný tok q můžeme tedy zapsat jako:

$$\dot{q} = \frac{\Delta T}{R_\vartheta}. \qquad (\mathrm{W \cdot m^{-2}}) \quad (2)$$

Tepelný tok $\dot{Q}$ dostaneme vynásobením měrného tepelného toku plochou průřezu S:

$$\dot{Q} = \dot{q} \cdot S. \qquad (\mathrm{W}) \quad (3)$$

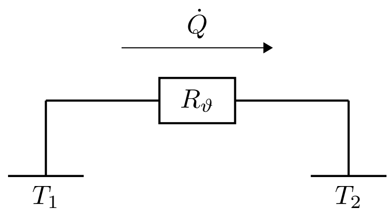
Tepelný tok $\dot{Q}$ můžeme dále rozepsat:

$$\dot{Q} = \dot{q} \cdot S = \lambda \cdot \frac{T_1 - T_2}{d} \cdot S = \lambda \cdot \frac{\Delta T}{d} \cdot S = \frac{\Delta T}{\frac{d}{\lambda \cdot S}}.$$

Dolní výraz $\frac{d}{\lambda \cdot S}$ je absolutní tepelný odpor:

$$R_{\vartheta A} = \frac{d}{\lambda \cdot S} = \frac{R_\vartheta}{S}. \qquad (\mathrm{K} \cdot \mathrm{W}^{-1}) \quad (4)$$

Tento případ lze reprezentovat tepelným obvodem následovně:



Poznámka

Výpočet tepelného odporu je analogický jako výpočet elektrického odporu. Elektrický odpor R_e vypočteme jako:

$$R_e = \frac{l}{\sigma_e \cdot S}, \qquad (\Omega) \quad (5)$$

kde:
l – délka vodiče (m),
σ_e – měrná elektrická vodivost $(\mathrm{S} \cdot \mathrm{m}^{-1})$,
S – průřez vodiče (m^2).

Analogie jsou:

- $R_{\vartheta A}$ – absolutní tepelný odpor $(\mathrm{K} \cdot \mathrm{W}^{-1})$
  $\rightarrow R_e$ – elektrický odpor (Ω),
- d – tloušťka stěny (m)
  $\rightarrow l$ – délka vodiče (m),
- λ – tepelná vodivost $(\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1})$
  $\rightarrow \sigma_e$ – měrná elektrická vodivost $(\mathrm{S} \cdot \mathrm{m}^{-1})$,
- S – plocha průřezu (m^2)
  $\rightarrow S$ – průřez vodiče (m^2).

Poznámka

Výpočet tepelného toku je analogický s Ohmovým zákonem pro elektrický proud, kde elektrický proud I_e vypočteme jako:

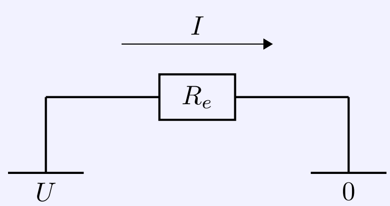
$$I_e = \frac{U_e}{R_e}, \qquad \text{(A)} \qquad (6)$$

kde:
I_e – elektrický proud (A),
U_e – elektrické napětí (V),
R_e – elektrický odpor (Ω).

Analogie jsou:

- $\dot{Q}$ – tepelný tok (W)
  → I_e – elektrický proud (A),
- ΔT – rozdíl teplot (K)
  → U_e – elektrické napětí (V),
- $R_{\vartheta A}$ – absolutní tepelný odpor $(\mathrm{K \cdot W^{-1}})$
  → R_e – elektrický odpor (Ω).

Elektrické schéma můžeme znázornit následujícím obrázkem:



1.4 Součinitel prostupu tepla

Součinitel prostupu tepla U_ϑ je inverzní hodnota tepelného odporu:

$$U_\vartheta = \frac{1}{R_\vartheta} = \frac{\lambda}{d}. \qquad (\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}) \qquad (7)$$

Měrný tepelný tok q se poté může zapsat jako:

$$\dot{q} = U_\vartheta \cdot \Delta T. \qquad (\mathrm{W \cdot m^{-2}}) \qquad (8)$$

Prostup tepla $U_{\vartheta A}$ je inverzní hodnota absolutního tepelného odporu:

$$U_{\vartheta A} = \frac{1}{R_{\vartheta A}} = \frac{\lambda \cdot S}{d} = U_\vartheta \cdot S. \qquad (\mathrm{W \cdot K^{-1}}) \qquad (9)$$

Tepelný tok $\dot{Q}$ se poté může zapsat jako:

$$\dot{Q} = U_{\vartheta A} \cdot \Delta T. \qquad \text{(W)} \quad (10)$$

1.5 Číselný příklad

Teplota na začátku zdi je $T_1 = 20$ °C, teplota na konci zdi je $T_2 = -10$ °C. Zeď je tvořená obyčejnou cihlou s tepelná vodivostí $\lambda_{cihla} = 0,8\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$ a má tloušťku $d_{cihla} = 45$ cm. Plocha průřezu zdi je $S = 20\ \mathrm{m^2}$.

a) Vypočítejte R_ϑ, $R_{\vartheta A}$, U_ϑ, $U_{\vartheta A}$, $\dot{q}$ a $\dot{Q}$.

b) Uvažujte polystyrénovou izolaci s tepelnou vodivostí $\lambda_{izol} = 0,04\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$. Vypočítejte tloušťku izolace d_{izol}, která zajistí stejný měrný tepelný odpor jako cihlová zeď (tím také zajistí stejný měrný tepelný tok pro stejný rozdíl teplot).

1.5.1 a

Tloušťka zdi v metrech je:

$$d_{cihla} = 45\ \mathrm{cm} = 0,45\ \mathrm{m}.$$

Tepelný odpor R_ϑ vypočteme jako:

$$R_\vartheta = \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}} = \frac{0,45}{0,8} = 0,5625\ \mathrm{m^2 \cdot K \cdot W^{-1}}.$$

Absolutní tepelný odpor $R_{\vartheta A}$ vypočteme jako:

$$R_{\vartheta A} = \frac{R_\vartheta}{S} = \frac{0,5625}{20} \approx 0,028\ \mathrm{K \cdot W^{-1}}.$$

Součinitel prostupu tepla U_ϑ vypočteme jako:

$$U_\vartheta = \frac{1}{R_\vartheta} = \frac{1}{0,5625} \approx 1,778\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}.$$

Prostup tepla $U_{\vartheta A}$ vypočteme jako:

$$U_{\vartheta A} = \frac{1}{R_{\vartheta A}} = \frac{1}{0,028} \approx 35,714\ \mathrm{K \cdot W^{-1}}.$$

Měrný tepelný tok $\dot{q}$ vypočteme jako:

$$\dot{q} = \frac{\Delta T}{R_\vartheta} = \frac{T_1 - T_2}{R_\vartheta} = \frac{20 - (-10)}{0,5625} = \frac{30}{0,5625} \approx 53,333\ \mathrm{W \cdot m^{-2}}.$$

Tepelný tok $\dot{Q}$ vypočteme jako:

$$\dot{Q} = \dot{q} \cdot S = 53,333 \cdot 20 = 1066,66\ \mathrm{W} \approx 1\ \mathrm{kW}.$$

1.5.2 b

Aby se měrné tepelné odpory rovnaly, musí platit:

$$R_{\vartheta,cihla} = R_{\vartheta,izol}$$

$$\frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}} = \frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}}.$$

Tloušťku izolace d_{izol} vypočteme jako:

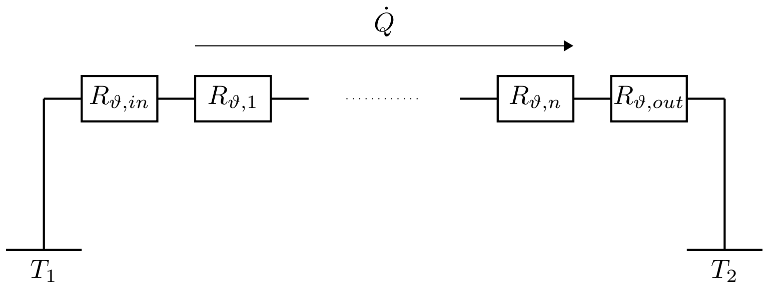
$$d_{izol} = \frac{d_{cihla} \cdot \lambda_{izol}}{\lambda_{cihla}} = \frac{0,45 \cdot 0,04}{0,8} = 0,0225 \text{ m} = 2,25 \text{ cm}.$$

2 🏗️ Skládaná zeď 🌶️🌶️

2.1 Tepelné schéma

U skládané zdi máme několik vrstev zdi s různou tepelnou vodivostí a tloušťkou. Navíc počítáme se součiniteli přestupu tepla na začátku (z vnitřka do zdi) a na konci (ze zdi ven).

Mějme tedy n vrstev zdi, kde i-tá vrstva má tepelnou vodivost λ_i a tloušťku d_i. Mějme součinitel přestupu tepla na začátku $\alpha_{\vartheta,in}$ a na konci $\alpha_{\vartheta,out}$. Potom můžeme pro tuto situaci nakreslit následující tepelné schéma:



Tepelný odpor $R_{\vartheta,in}$ vypočteme jako:

$$R_{\vartheta,in} = \frac{1}{\alpha_{\vartheta,in}}.$$

Tepelný odpor $R_{\vartheta,out}$ vypočteme jako:

$$R_{\vartheta,out} = \frac{1}{\alpha_{\vartheta,out}}.$$

Tepelný odpor $R_{\vartheta,i}$ vypočteme jako:

$$R_{\vartheta,i} = \frac{d_i}{\lambda_i}.$$

Celkový tepelný odpor $R_{\vartheta,\Sigma}$ zdi s přechody vypočteme jako:

$$R_{\vartheta,\Sigma} = R_{\vartheta,in} + \sum_{i=1}^{n} R_{\vartheta,i} + R_{\vartheta,out}.$$

Celkový absolutní tepelný odpor $R_{\vartheta A,\Sigma}$ zdi s přechody vypočteme jako:

$$R_{\vartheta A,\Sigma} = \frac{R_{\vartheta,\Sigma}}{S}.$$

Součinitel prostupu tepla $U_{\vartheta,\Sigma}$ zdi s přechody vypočteme jako:

$$U_{\vartheta,\Sigma} = \frac{1}{R_{\vartheta,\Sigma}} = \frac{1}{R_{\vartheta,in} + \sum_{i=1}^{n} R_{\vartheta,i} + R_{\vartheta,out}} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{\vartheta,in}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_{\vartheta,out}}} =$$

$$= \left(\frac{1}{\alpha_{\vartheta,in}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_{\vartheta,out}} \right)^{-1}$$

Prostup tepla $U_{\vartheta A,\Sigma}$ zdi s přechody vypočteme jako:

$$U_{\vartheta A,\Sigma} = U_{\vartheta,\Sigma} \cdot S.$$

Měrný tepelný tok $\dot{q}$ zdi s přechody vypočteme pomocí měrných odporů jako:

$$\dot{q} = \frac{\Delta T}{R_{\vartheta,\Sigma}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\vartheta,\Sigma}}.$$

Pomocí součinitele prostupu tepla $U_{\vartheta,\Sigma}$ můžeme vypočítat měrný tepelný tok $\dot{q}$ jako:

$$\dot{q} = U_{\vartheta,\Sigma} \cdot \Delta T = U_{\vartheta,\Sigma} \cdot (T_1 - T_2).$$

Celkový tepelný tok $\dot{Q}$ zdi s přechody vypočteme jako:

$$\dot{Q} = \dot{q} \cdot S.$$

2.2 Číselný příklad

Teplota na začátku zdi je $T_1 = 20$ °C, teplota na konci zdi je $T_2 = -10$ °C. Plocha průřezu zdi je $S = 20$ m^2. Uvažujme dvouvrstvou zeď složenou z cihly a izolace. Parametry cihly jsou:

- $\lambda_{cihla} = 0,8 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$,
- $d_{cihla} = 45$ cm.

Parametry izolace jsou:

- $\lambda_{izol} = 0,04 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$,
- $d_{izol} = 5$ cm.

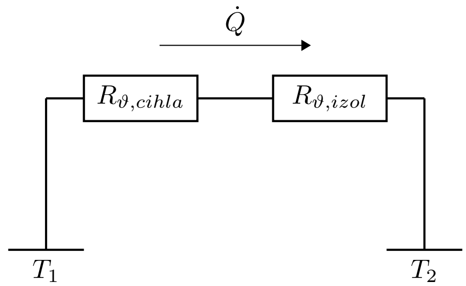
Uvažujte, že izolace je na konci zdi (z venčí). Zanedbejte součinitele přestupu tepla na začátku a na konci zdi.

a) Nakreslete tepelné schéma a vypočítejte $R_{\vartheta,\Sigma}$, $R_{\vartheta A,\Sigma}$, $U_{\vartheta,\Sigma}$, $U_{\vartheta A,\Sigma}$, $\dot{q}$ a $\dot{Q}$.

b) Vypočítejte teplotní spády v cihle T_{cihla} a v izolaci T_{izol} a nakreslete graf závislosti teploty na ose x pro případ izolace z venčí a pro případ izolace zevnitř.

2.2.1 a

Tepelné schéma bude vypadat následovně:



Tloušťka cihly v metrech je:

$$d_{cihla} = 45 \text{ cm} = 0,45 \text{ m}.$$

Tloušťka izolace v metrech je:

$$d_{izol} = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}.$$

Tepelný odpor cihly $R_{\vartheta,cihla}$ vypočteme jako:

$$R_{\vartheta,cihla} = \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}} = \frac{0,45}{0,8} = 0,5625 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Tepelný odpor izolace $R_{\vartheta,izol}$ vypočteme jako:

$$R_{\vartheta,izol} = \frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} = \frac{0,05}{0,04} = 1,25 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Celkový tepelný odpor $R_{\vartheta,\Sigma}$ vypočteme jako:

$$R_{\vartheta,\Sigma} = R_{\vartheta,cihla} + R_{\vartheta,izol} = 0,5625 + 1,25 = 1,8125 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Celkový absolutní tepelný odpor $R_{\vartheta A,\Sigma}$ vypočteme jako:

$$R_{\vartheta A,\Sigma} = \frac{R_{\vartheta,\Sigma}}{S} = \frac{1,8125}{20} \approx 0,091 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Součinitel prostupu tepla $U_{\vartheta,\Sigma}$ vypočteme jako:

$$U_{\vartheta,\Sigma} = \frac{1}{R_{\vartheta,\Sigma}} = \frac{1}{1,8125} \approx 0,552 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Prostup tepla $U_{\vartheta A,\Sigma}$ vypočteme jako:

$$U_{\vartheta A,\Sigma} = U_{\vartheta,\Sigma} \cdot S \approx 0,552 \cdot 20 = 11,04 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Měrný tepelný tok $\dot{q}$ vypočteme jako:

$$\dot{q} = \frac{\Delta T}{R_{\vartheta,\Sigma}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\vartheta,\Sigma}} = \frac{20 - (-10)}{1,8125} = \frac{30}{1,8125} \approx 16,55 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Tepelný tok $\dot{Q}$ vypočteme jako:

$$\dot{Q} = \dot{q} \cdot S \approx 16,55 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot 20 \text{ m}^2 = 331 \text{ W} = 0,331 \text{ kW}.$$

2.2.2 b

Změnu teploty v cihle vypočteme jako:

$$\Delta T_{cihla} = \dot{q} \cdot R_{\vartheta,cihla} \approx 16,55 \cdot 0,5625 = 9,31 \text{ K}.$$

Změnu teploty v izolaci vypočteme jako:

$$\Delta T_{izol} = \dot{q} \cdot R_{\vartheta,izol} \approx 16,55 \cdot 1,25 = 20,69 \text{ K}.$$

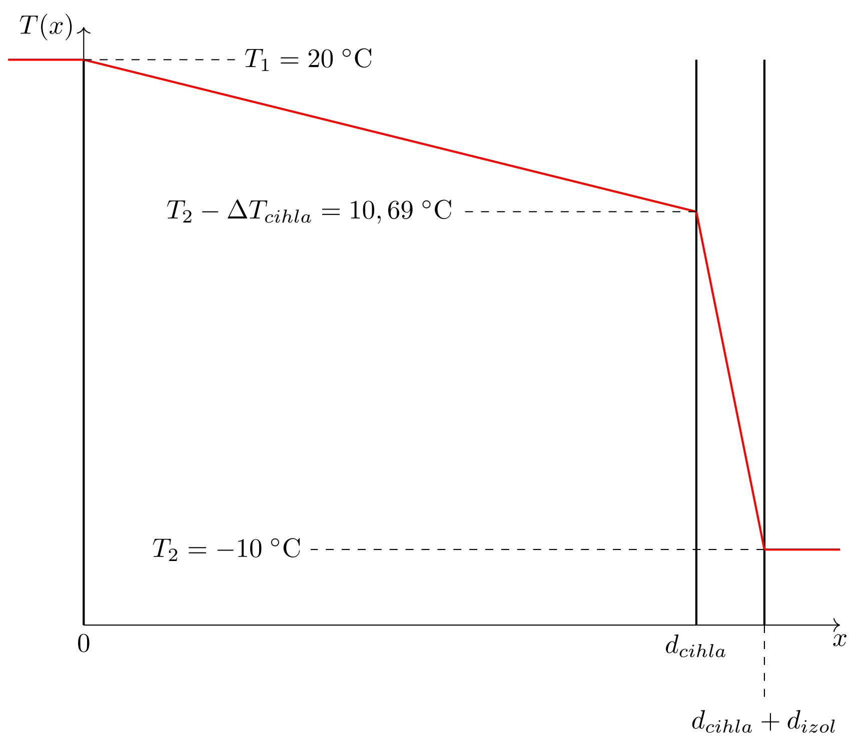
Poznámka

Součet změn teplot v cihle a izolaci musí být roven rozdílu teplot na začátku a na konci zdi:

$$\Delta T_{cihla} + \Delta T_{izol} = \Delta T = T_1 - T_2 = 20 - (-10) = 30.$$

$$9,31 + 20,69 = 30.$$

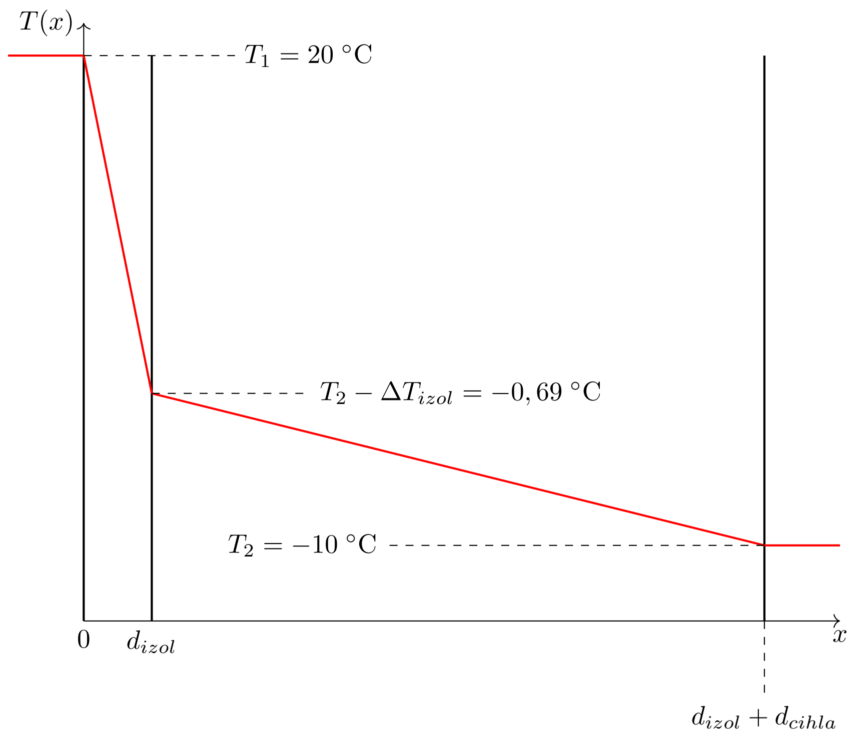
Obrázek pro případ izolace z venčí bude vypadat následovně:



Poznámka

Výhody toho položení je, že pokud je zeď zevnitř, tak funguje jako akumulátor tepla. Je to vhodné pro dlouhodobé vytápění. Nevýhodou je, že pokud se například jedná o chalupu, kam se jezdí pouze na víkend, tak nějakou dobu trvá, než se teplo naakumuluje a v místnosti bude teplo. Tento typ izolace se používá častěji.

Obrázek pro případ izolace zevnitř bude vypadat následovně:



Poznámka

Toto položení se rychleji vytopí, ale také se rychleji ochladí, jelikož izolace nefunguje jako dobrý akumulátor tepla. Pokud například zasvítí slunce, tak se místnost rychleji zahřeje. Je zde riziko kondenzace a tvoření vlhkosti a plísní.

3 📜 PENB 🌶️🌶️

Mějme dům s plochou střechou o parametrech:

- plocha střechy $S_{str} = 100$ m^2,
- součinitel prostupu tepla střechy $U_{\vartheta,str} = 0,3$ W $\cdot$ m$^{-2} \cdot$ K^{-1},
- plocha podlahy $S_{pod} = 100$ m^2,
- měrný součinitel prostupu tepla podlahy $U_{\vartheta,pod} = 0,8$ W $\cdot$ m$^{-2} \cdot$ K^{-1},
- plocha obvodových stěn $S_{zed} = 4 \cdot 10 \cdot 3$ m^2 (4 stěny o délce 10 metrů a výšce 3 metry),
- obvodová stěna je tvořena cihlou s tepelnou vodivostí $\lambda_{cihla} = 0,8$ W $\cdot$ m$^{-1} \cdot$ K^{-1} a má tloušťkou $d_{cihla} = 45$ cm.

Zanedbejte součinitele přestupu tepla, ztráty tepla na oknech a dveřích. Berte v úvahu, že venkovní teplota je okolo celého domu včetně podlahy stejná.

a) Vypočítejte průměrný součinitel prostupu tepla $U_{\vartheta,avg}$ pro celý dům.

b) Vypočítejte jak silnou izolaci d_{izol} s tepelnou vodivostí $\lambda_{izol} = 0,04$ W $\cdot$ m$^{-1} \cdot$ K^{-1} musíte použít, aby průměrný součinitel prostupu tepla $U^*_{\vartheta,avg}$ byl $0,5$ W $\cdot$ m$^{-2} \cdot$ K^{-1}. Izolace se přidává pouze na stěny objektu, ne na střechu a podlahu.

3.1 a

Plochu obvodových stěn S_{zed} vypočteme jako:

$$S_{zed} = 4 \cdot 10 \cdot 3 = 120 \text{ m}^2.$$

Celkovou plochu S_Σ vypočteme jako:

$$S_\Sigma = S_{str} + S_{pod} + S_{zed} = 100 + 100 + 120 = 320 \text{ m}^2.$$

Součinitel prostupu tepla zdi $U_{\vartheta,cihla}$ vypočteme jako:

$$U_{\vartheta,cihla} = \frac{\lambda_{cihla}}{d_{cihla}} = \frac{0,8}{0,45} = 1,778 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Průměrný součinitel prostupu tepla $U_{\vartheta,avg}$ vypočteme jako:

$$U_{\vartheta,avg} = \frac{1}{S_\Sigma} \cdot (U_{\vartheta,str} \cdot S_{str} + U_{\vartheta,pod} \cdot S_{pod} + U_{\vartheta,cihla} \cdot S_{zed}) =$$

$$= \frac{1}{320} \cdot (0,3 \cdot 100 + 0,8 \cdot 100 + 1,778 \cdot 120) = \frac{1}{320} \cdot (30 + 80 + 213,36) =$$

$$\frac{323,36}{320} \approx 1,01 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}.$$

3.2 b

Součinitel prostupu tepla zdi s izolací $U_{\vartheta,zed}$ vypočteme jako:

$$U_{\vartheta,zed} = \left(\frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} + \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}}\right)^{-1}$$

Průměrný součinitel prostupu tepla $U^*_{\vartheta,avg}$ vypočteme jako:

$$U^*_{\vartheta,avg} = \frac{1}{S_\Sigma} \cdot (U_{\vartheta,str} \cdot S_{str} + U_{\vartheta,pod} \cdot S_{pod} + U_{\vartheta,zed} \cdot S_{zed}) =$$

$$= \frac{1}{S_\Sigma} \cdot (U_{\vartheta,str} \cdot S_{str} + U_{\vartheta,pod} \cdot S_{pod} + \left(\frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} + \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}}\right)^{-1} \cdot S_{zed})$$

Nyní je třeba vyřešit rovnici pro d_{izol}:

$$U^*_{\vartheta,avg} = \frac{1}{S_\Sigma} \cdot (U_{\vartheta,str} \cdot S_{str} + U_{\vartheta,pod} \cdot S_{pod} + \left(\frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} + \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}}\right)^{-1} \cdot S_{zed})$$

$$U^*_{\vartheta,avg} \cdot S_\Sigma = (U_{\vartheta,str} \cdot S_{str} + U_{\vartheta,pod} \cdot S_{pod} + \left(\frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} + \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}}\right)^{-1} \cdot S_{zed})$$

$$U^*_{\vartheta,avg} \cdot S_\Sigma - U_{\vartheta,str} \cdot S_{str} - U_{\vartheta,pod} \cdot S_{pod} = \left(\frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} + \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}}\right)^{-1} \cdot S_{zed}$$

$$\left(\frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} + \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}}\right)^{-1} = \frac{U^*_{\vartheta,avg} \cdot S_\Sigma - U_{\vartheta,str} \cdot S_{str} - u_{pod} \cdot S_{pod}}{S_{zed}}$$

$$\frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} + \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}} = \left(\frac{U^*_{\vartheta,avg} \cdot S_\Sigma - U_{\vartheta,str} \cdot S_{str} - U_{\vartheta,pod} \cdot S_{pod}}{S_{zed}}\right)^{-1}$$

$$\frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} = \left(\frac{U^*_{\vartheta,avg} \cdot S_\Sigma - U_{\vartheta,str} \cdot S_{str} - U_{\vartheta,pod} \cdot S_{pod}}{S_{zed}}\right)^{-1} - \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}}$$

$$d_{izol} = \lambda_{izol} \cdot \left(\left(\frac{U^*_{\vartheta,avg} \cdot S_\Sigma - U_{\vartheta,str} \cdot S_{str} - U_{\vartheta,pod} \cdot S_{pod}}{S_{zed}}\right)^{-1} - \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}}\right)$$

$$d_{izol} = \lambda_{izol} \cdot \left(\frac{S_{zed}}{U^*_{\vartheta,avg} \cdot S_\Sigma - U_{\vartheta,str} \cdot S_{str} - U_{\vartheta,pod} \cdot S_{pod}} - \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}}\right)$$

Nyní můžeme dosadit a vypočítat:

$$d_{izol} = 0,04 \cdot \left(\frac{120}{0,5 \cdot 320 - 0,3 \cdot 100 - 0,8 \cdot 100} - \frac{0,45}{0,8}\right) =$$

$$= 0,04 \cdot \left(\frac{120}{160 - 30 - 80} - \frac{0,45}{0,8}\right) = 0,04 \cdot \left(\frac{120}{50} - \frac{0,45}{0,8}\right) =$$

$$0,04 \cdot (2,4 - 0,5625) = 0,04 \cdot 1,8375 = 0,0735 \text{ m} = 7,35 \text{ cm}.$$

4 ☀️ Sálavá clona 🌶️🌶️

Mějme dvě desky. První deska má teplotu T_1 a druhá deska má teplotu T_2. Obě desky mají stejnou plochu S a stejnou emisivitu ε.

a) Jaký je sálavý výkon $P_{1\to 2,a}$ (W) sálání první desky na druhou desku?

b) Dejme mezi desky sálavou clonu o stejné ploše S a stejné emisivitě ε. Jaký je sálavý výkon $P_{1\to 2,b}$ (W) sálání první desky na druhou desku přes clonu a jaký je poměr tohoto výkonu k výkonu z bodu a)?

4.1 a

Sálavý výkon $P_{1\to 2,a}$ můžeme vypočítat pomocí:

$$P_{1\to 2,a} = \frac{S \cdot \sigma \left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1},$$

kde:
S – plocha desek (m^2),
σ – Stefanova-Boltzmannova konstanta ($5,67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{K}^{-1}$),
T_1 – teplota první desky (K),
T_2 – teplota druhé desky (K),
ε_1 – emisivita první desky,
ε_2 – emisivita druhé desky.

Emisivity ε_1 a ε_2 jsou stejné, tudíž:

$$P_{1\to 2} = \frac{S \cdot \sigma \left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} - 1} = \frac{S \cdot \sigma \left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\frac{2}{\varepsilon} - 1} = k \cdot \left(T_1^4 - T_2^4\right).$$

4.2 b

Sálavý výkon z destičky 1 na clonu:

$$P_{1\to clona} = k \cdot \left(T_1^4 - T_{clona}^4\right).$$

Sálavý výkon z clony na destičku 2:

$$P_{clona\to 2} = k \cdot \left(T_{clona}^4 - T_2^4\right).$$

V rovnovážném stavu se tyto výkony musejí rovnat (pokud by nebyly rovny, tak by se teplota clony měnila):

$$P_{1\to clona} = P_{clona\to 2}$$

$$k \cdot \left(T_1^4 - T_{clona}^4\right) = k \cdot \left(T_{clona}^4 - T_2^4\right)$$

Nyní můžeme vyjádřit teplotu clony T_{clona}:

$$T_1^4 - T_{clona}^4 = T_{clona}^4 - T_2^4$$

$$2 \cdot T_{clona}^4 = T_1^4 + T_2^4$$

$$T_{clona}^4 = \frac{T_1^4 + T_2^4}{2}$$

$$T_{clona} = \sqrt[4]{\frac{T_1^4 + T_2^4}{2}}.$$

Sálavý výkon z destičky 1 na destičku 2 přes clonu je poté roven sálavému výkonu ze clony na destičku 2, který je zároveň roven sálavému výkonu z destičky 1 na clonu:

$$P_{1\to 2,b} = P_{1\to clona} = P_{clona\to 2}.$$

Ověřme výpočet pro obě možnosti. Sálavý výkon z destičky 1 na clonu:

$$P_{1\to clona} = k \cdot \left(T_1^4 - T_{clona}^4\right) = k \cdot \left(T_1^4 - \frac{T_1^4 + T_2^4}{2}\right) =$$

$$= k \cdot \frac{2 \cdot T_1^4 - T_1^4 - T_2^4}{2} = k \cdot \frac{T_1^4 - T_2^4}{2} = \frac{k}{2} \cdot \left(T_1^4 - T_2^4\right).$$

Sálavý výkon z clony na destičku 2:

$$P_{clona\to 2} = k \cdot \left(T_{clona}^4 - T_2^4\right) = k \cdot \left(\frac{T_1^4 + T_2^4}{2} - T_2^4\right) =$$

$$= k \cdot \frac{T_1^4 + T_2^4 - 2 \cdot T_2^4}{2} = k \cdot \frac{T_1^4 - T_2^4}{2} = \frac{k}{2} \cdot \left(T_1^4 - T_2^4\right).$$

Výkony jsou si rovny, tudíž sálavý výkon z destičky 1 na destičku 2 přes clonu je roven:

$$P_{1\to 2,b} = \frac{k}{2} \cdot \left(T_1^4 - T_2^4\right).$$

Poměr tohoto výkonu k výkonu z bodu a):

$$\frac{P_{1\to 2,b}}{P_{1\to 2,a}} = \frac{\frac{k}{2} \cdot \left(T_1^4 - T_2^4\right)}{k \cdot \left(T_1^4 - T_2^4\right)} = \frac{1}{2}.$$

Poznámka

Pokud by takto za sebou bylo n sálavých clon, tak poměr výkonů by byl roven:

$$\frac{P_{1\to 2,n}}{P_{1\to 2,a}} = \frac{1}{2^n}.$$

5 Destička ve vesmíru

Mějme destičku ve vesmíru, na kterou dopadá sluneční záření s následujícími parametry:

- plocha $S = 1\ \mathrm{m}^2$,
- emisivita destičky ε,
- pohltivost destičky A,
- destička má stejnou teplotu na obou stranách (je nekonečně tenká).

Obecné parametry:

- sluneční záření má intenzitu $\dot{q} = 1348\ \mathrm{W \cdot m^{-2}}$,
- Stefanova-Boltzmannova konstanta je $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$,
- teplota vesmíru je $T_{space} = 3\ \mathrm{K}$.

Odvoďte vzorec pro rovnovážnou teplotu destičky T v závislosti na úhlu natočení vůči slunci α a vypočítejte teplotu pro hodnoty α: 0°, 45°a 90°.

Pokud úhel α je 0°, tak destička je kolmo na sluneční záření, tudíž na destičku dopadá nejvíce slunečního záření. Pokud je úhel α 90°, tak destička je rovnoběžná se slunečním zářením, tudíž na destičku dopadá nejméně slunečního záření (žádné).

5.1 Řešení

Tepelný to $\dot{Q}_{dop}$ (W), který na destičku dopadne:

$$\dot{Q}_{dop} = \dot{q} \cdot S \cdot \cos\alpha$$

Tepelný tok, který destička příjme:

$$\dot{Q}_{in} = A \cdot \dot{Q}_{dop} = A \cdot \dot{q} \cdot S \cdot \cos\alpha$$

Tepelný tok, který destička vyzařuje (z obou stran):

$$\dot{Q}_{out} = 2 \cdot S \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot \left(T^4 - T_{space}^4\right)$$

V rovnovážném stavu platí, že tepelný tok, který destička příjme, je roven tepelnému toku, který vyzařuje:

$$\dot{Q}_{in} = \dot{Q}_{out}$$

$$A \cdot \dot{q} \cdot S \cdot \cos\alpha = 2 \cdot S \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot \left(T^4 - T_{space}^4\right)$$

Dále při tepelné rovnováze platí:

$$A = \varepsilon$$

Můžeme tedy zkrátit emisivitu A a plochy S, čímž dostaneme:

$$\dot{q} \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \sigma \cdot \left(T^4 - T_{space}^4\right)$$

Nyní je třeba vyřešit rovnici pro teplotu T:

$$\frac{\dot{q} \cdot \cos\alpha}{2 \cdot \sigma} = T^4 - T_{space}^4$$

$$T^4 = \frac{\dot{q} \cdot \cos\alpha}{2 \cdot \sigma} + T_{space}^4$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{\dot{q} \cdot \cos\alpha}{2 \cdot \sigma} + T_{space}^4}$$

Nyní můžeme dosadit do vzorce a získat vzorec pro teplotu T v závislosti na úhlu natočení α:

$$T = \sqrt[4]{\frac{1348 \cdot \cos\alpha}{2 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8}} + 3^4} = \sqrt[4]{1,189 \cdot 10^{10} \cdot \cos\alpha + 81}.$$

Pro $\alpha = 0$:

$$T = \sqrt[4]{1,189 \cdot 10^{10} \cdot \cos 0^\circ + 81} = \sqrt[4]{1,189 \cdot 10^{10} + 81} = 330,21\ \text{K}.$$

Pro $\alpha = 45$:

$$T = \sqrt[4]{1,189 \cdot 10^{10} \cdot \cos 45^\circ + 81} = \sqrt[4]{1,189 \cdot 10^{10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 81} = 302,81\ \text{K}.$$

Pro $\alpha = 90$:

$$T = \sqrt[4]{1,189 \cdot 10^{10} \cdot \cos 90^\circ + 81} = \sqrt[4]{1,189 \cdot 10^{10} \cdot 0 + 81} = \sqrt[4]{81} = 3\ \text{K}.$$

Cvičení 3 - Sdílení tepla - Válec a koule

Elektroenergetika 3

Petr Jílek

2024

Obsah

Úprava značení

- Absolutní tepelný odpor: $R_{\vartheta A} \rightarrow R$ $(\mathrm{K} \cdot \mathrm{W}^{-1})$
- Součinitel přestupu tepla: $\alpha_{\vartheta} \rightarrow \alpha$ $(\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{K}^{-1})$

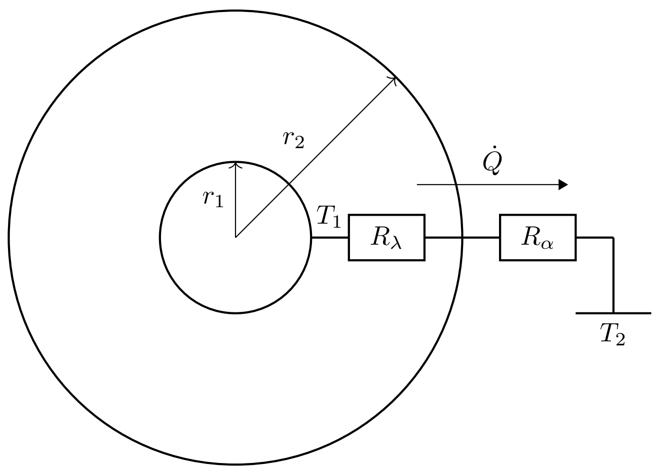
1 💿 Válec 🌶️🌶️🌶️

1.1 Odvození tepelného odporu

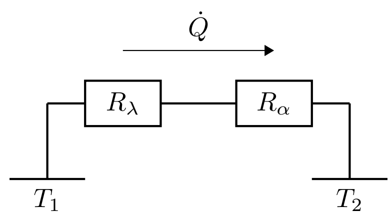
Tepelný odpor válce se skládá ze dvou částí:

- tepelný odpor vedení tepla v materiálu válce R_λ,
- tepelný odpor přestupu tepla z povrchu válce do okolí R_α.

Ilustrace válce bude vypadat následovně:



Tepelné schéma válce bude vypadat následovně:



Pro odvození tepelného odporu R_λ využijeme vztah pro absolutní tepelný odpor R:

$$R = \frac{d}{\lambda \cdot S}, \qquad (\mathrm{K \cdot W^{-1}}) \tag{1}$$

kde:
d – tloušťka materiálu (m),
λ – tepelná vodivost materiálu $(\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}})$,
S – plocha přenosu tepla $(\mathrm{m^2})$.

Zde d nahradíme nekonečně malou částí poloměru válce:

$$d \to dr.$$

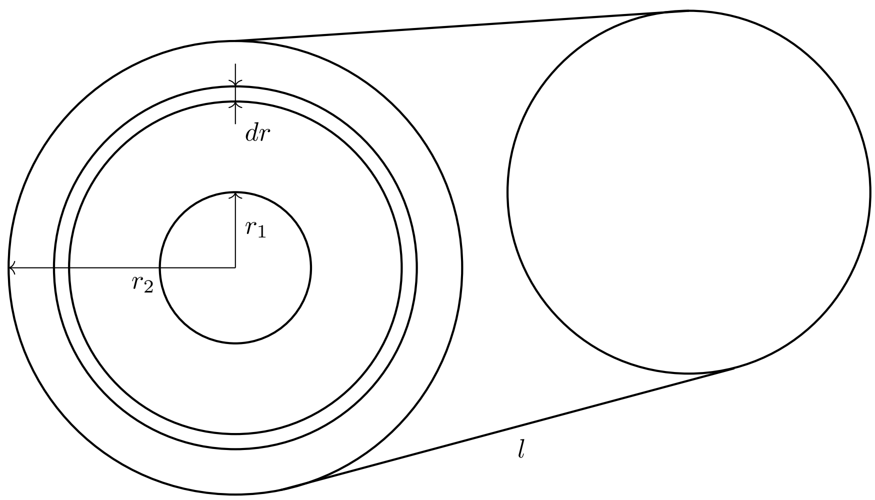
Dále S nahradíme plochou válce:

$$S \to 2\pi r \cdot l \cdot dr,$$

kde:
r – poloměr válce (m),
l – délka válce (m).

Tepelný odpor dR_λ válce bude tedy:

$$dR_\lambda = \frac{dr}{\lambda \cdot 2\pi r \cdot l \cdot dr}.$$



Pro získání celkového tepelného odporu R_λ je třeba provést integraci od vnitřního poloměru izolace r_1 po vnější poloměr válce r_2:

$$R_\lambda = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\lambda \cdot 2\pi r \cdot l} dr = \frac{1}{\lambda \cdot 2\pi \cdot l} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = \frac{1}{\lambda \cdot 2\pi \cdot l} \cdot [\ln |r|]_{r_1}^{r_2}.$$

Jelikož poloměry r_1 a r_2 jsou kladné (záporné poloměry nedávají fyzikální smysl), můžeme absolutní hodnotu u logaritmu zanedbat:

$$R_\lambda = \frac{1}{\lambda \cdot 2\pi \cdot l} \cdot [\ln r]_{r_1}^{r_2} = \frac{1}{\lambda \cdot 2\pi \cdot l} \cdot (\ln r_2 - \ln r_1) = \frac{1}{\lambda \cdot 2\pi \cdot l} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{2\pi l \lambda} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Pro odpor přestupu tepla z povrchu válce do okolí R_α využijeme vztah pro odpor přestupu tepla R_α:

$$R_\alpha = \frac{1}{\alpha \cdot S}, \qquad (\mathrm{K} \cdot \mathrm{W}^{-1}) \quad (2)$$

kde:
α – součinitel přestupu tepla ($\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{K}^{-1}$).

Plochu S nahradíme plochou válce:

$$S \to 2\pi r_2 \cdot l.$$

Odpor přenosu tepla z povrchu válce do okolí R_α bude tedy:

$$R_\alpha = \frac{1}{\alpha \cdot 2\pi r_2 \cdot l} = \frac{1}{2\pi l \alpha r_2}.$$

Celkový tepelný odpor válce $R_{\vartheta,\Sigma}$ bude součtem obou odporů:

$$R_\Sigma = R_\lambda + R_\alpha = \frac{1}{2\pi l \lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\pi l \alpha r_2}.$$

1.2 Minimum tepelného odporu

Pro nalezení extrému tepelného odporu R_Σ podle poloměru válce r_2 je třeba zjistit, kdy bude derivace R_Σ podle r_2 rovna nule:

$$\frac{dR_\Sigma}{dr_2} = 0.$$

Derivace R_Σ podle r_2 bude:

$$\frac{dR_\Sigma}{dr_2} = \frac{dR_\lambda}{dr_2} + \frac{dR_\alpha}{dr_2}.$$

Derivace R_λ podle r_2 bude:

$$\frac{dR_\lambda}{dr_2} = \frac{d}{dr_2}\left(\frac{1}{2\pi l \lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}\right) = \frac{d}{dr_2}\left(\frac{1}{2\pi l \lambda} (\ln r_2 - \ln r_1)\right) =$$

$$= \frac{d}{dr_2}\left(\frac{1}{2\pi l \lambda} \ln r_2\right) = \frac{1}{2\pi l \lambda r_2}.$$

Derivace R_α podle r_2 bude:

$$\frac{dR_\alpha}{dr_2} = \frac{d}{dr_2}\left(\frac{1}{2\pi l \alpha r_2}\right) = -\frac{1}{2\pi l \alpha r_2^2}.$$

Derivace R_Σ podle r_2 bude tedy:

$$\frac{dR_\Sigma}{dr_2} = \frac{1}{2\pi l \lambda r_2} - \frac{1}{2\pi l \alpha r_2^2}.$$

Nyní můžeme zjistit, kdy bude derivace R_Σ podle r_2 rovna nule:

$$\frac{1}{2\pi l \lambda r_2} - \frac{1}{2\pi l \alpha r_2^2} = 0$$

$$\frac{1}{\lambda r_2} - \frac{1}{\alpha r_2^2} = 0$$

$$\frac{1}{\lambda r_2} = \frac{1}{\alpha r_2^2}$$

$$\frac{r_2}{\lambda} = \frac{1}{\alpha}$$

$$r_2 = \frac{\lambda}{\alpha}.$$

V další části budeme zkoumat, zda se jedná o minimum nebo maximum. K tomu využijeme druhou derivaci R_Σ podle r_2:

$$\frac{d^2 R_\Sigma}{dr_2^2} = \frac{d}{dr_2}\left(\frac{1}{2\pi l \lambda r_2} - \frac{1}{2\pi l \alpha r_2^2}\right) = -\frac{1}{2\pi l \lambda r_2^2} + \frac{1}{\pi l \alpha r_2^3}.$$

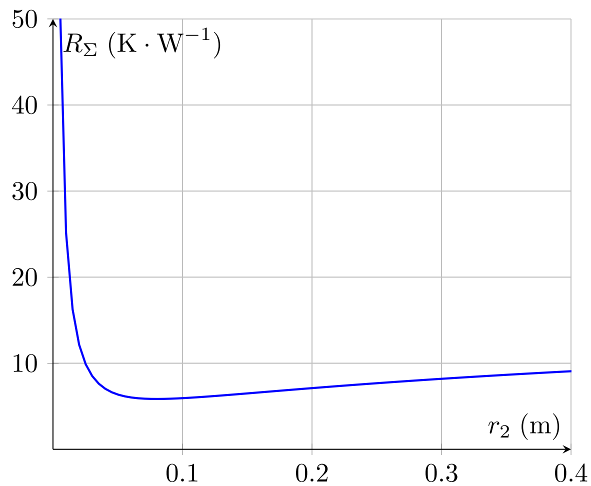
Nyní dosadíme $r_2 = \frac{\lambda}{\alpha}$:

$$-\frac{1}{2\pi l \lambda \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^2} + \frac{1}{\pi l \alpha \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^3} = -\frac{1}{2\pi l \lambda \frac{\lambda^2}{\alpha^2}} + \frac{1}{\pi l \alpha \frac{\lambda^3}{\alpha^3}} =$$

$$= -\frac{\alpha^2}{2\pi l \lambda^3} + \frac{\alpha^2}{\pi l \lambda^3} = \frac{-\alpha^2 + 2\alpha^2}{2\pi l \lambda^3} = \frac{\alpha^2}{2\pi l \lambda^3}.$$

Hodnoty α a λ jsou kladné, tudíž druhá derivace je kladná. To znamená, že se jedná o minimum.

Závislost tepelného odporu R_Σ na poloměru válce r_2



1.3 Ekonomie

Nyní můžeme porovnat rozdíl v rychlosti růstu tepelného odporu R_Σ a objemu izolace v závislosti na poloměru válce r_2. Řešíme objem izolace, jelikož při konstrukci se platí za objem materiálu. Pro objem izolace platí:

$$V = \pi(r_2^2 - r_1^2) \cdot l = \pi r_2^2 \cdot l - \pi r_1^2 \cdot l.$$

Nyní provedeme zjednodušení vzorce podobně jako se provádí u časové složitosti algoritmů. Zkoumáme rychlost růstu objemu izolace v závislosti na poloměru válce r_2, tudíž vyřadíme konstantní členy, čímž dostaneme:

$$V \sim \pi r_2^2 \cdot l.$$

Dále vyřadíme všechny násobící konstanty, čímž dostaneme:

$$V \sim r_2^2.$$

Zde dostáváme, že objem roste s druhou mocninou poloměru válce r_2. Pro odpor R_Σ platí:

$$R_\Sigma = \frac{1}{2\pi l\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\pi l\alpha r_2}.$$

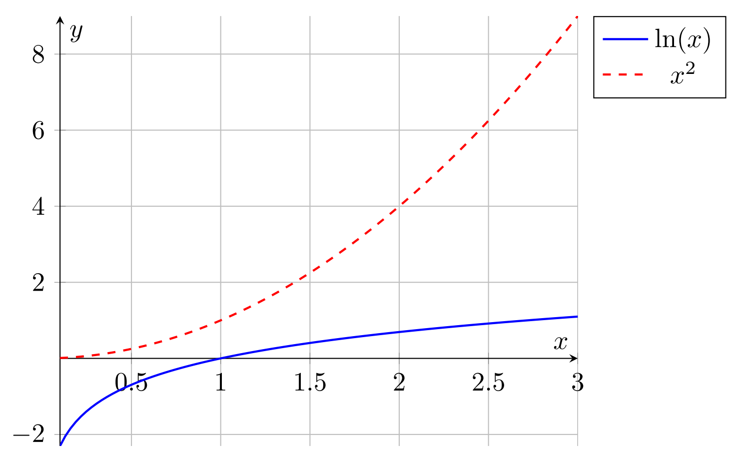
Zde druhý člen jde do nuly, když r_2 jde do nekonečna, tudíž ho můžeme vyřadit. Zbyde nám:

$$R_\Sigma \sim \frac{1}{2\pi l\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Dále můžeme vyřadit konstantní členy a dostaneme:

$$R_\Sigma \sim \ln r_2.$$

Na následujícím grafu je porovnání závislosti logaritmické funkce a kvadratické funkci:



Poznámka

Vidíme, že odpor roste logaritmicky s poloměrem válce r_2. Pokud porovnáme rychlost růstu objemu izolace a rychlost růstu odporu R_Σ, zjistíme, že objem izolace roste rychleji než odpor R_Σ. To znamená, že při dimenzování izolace je třeba brát v potaz i ekonomické hledisko, jelikož při velkém přidání izolace nám dramaticky může narůst cena, ale odpor R_Σ se nám příliš nezmění.

1.4 Číselný příklad 1

Mějme izolovaný vodič v rozvaděči, kde tepelná vodivost izolace je $\lambda = 0,159\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$, součinitel přestupu tepla do okolí je $\alpha = 10\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$ Vypočítejte vnější poloměr izolovaného vodiče r_2, kdy bude tepelný odpor R_Σ minimální.

1.4.1 Řešení

Dosadíme do vzorce pro minimum tepelného odporu R_Σ:

$$r_2 = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{0,159}{10} = 0,0159\ \mathrm{m} = 1,59\ \mathrm{cm}.$$

Z výsledku můžeme říct, že pokud máme vodič o poloměru r_1, který je menší, než $1,59$ cm, pak pokud přidáme izolaci tak, aby vnější poloměr byl $1,59$ cm, tak bude izolovaný vodič nejlépe odvádět teplo do okolí.

1.5 Číselný příklad 2

Izolace horkovodního potrubí má tepelnou vodivost $\lambda = 0,02\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$ a součinitel přestupu tepla do okolí je $\alpha = 5\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$. Vypočítejte vnější poloměr válce r_2, kdy bude tepelný odpor R_Σ minimální.

1.5.1 Řešení

Dosadíme do vzorce pro minimum tepelného odporu R_Σ:

$$r_2 = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{0,02}{5} = 0,004\ \mathrm{m} = 0,4\ \mathrm{cm}.$$

Z výsledku můžeme říct, že by vnitřní poloměr potrubí r_1 měl být menší než $0,4$ cm, aby bylo výhodné přidat izolaci. Nicméně takto malý poloměr potrubí se v praxi nevyskytuje.

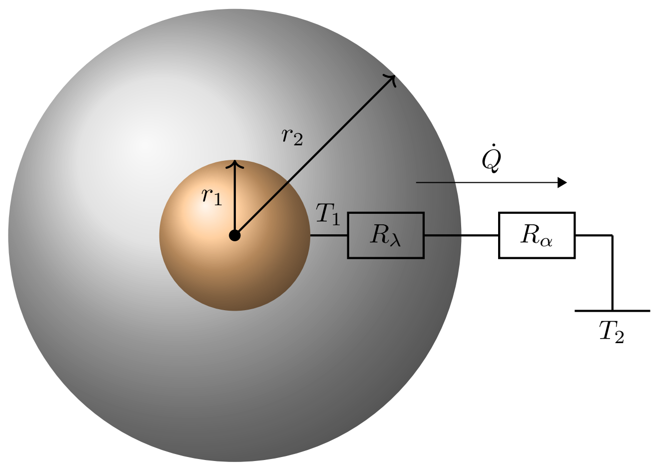
2 ⚽ Koule 🌶🌶🌶

2.1 Odvození tepelného odporu

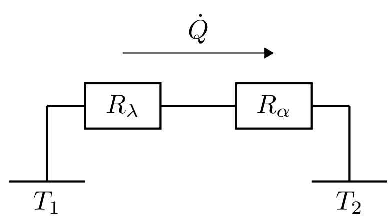
Tepelný odpor koule se skládá ze dvou částí:

- odpor vedení tepla v materiálu koule R_λ,
- odpor přenosu tepla z povrchu koule do okolí R_α.

Ilustrace koule bude vypadat následovně:



Tepelné schéma koule bude vypadat následovně:



Pro odvození tepelného odporu R_λ využijeme vztah pro absolutní tepelný odpor R:

$$R = \frac{d}{\lambda \cdot S},$$

kde:
d - tloušťka materiálu (m),
λ - tepelná vodivost materiálu $(\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1})$,
S - plocha přenosu tepla (m^2).

Zde d nahradíme nekonečně malou částí poloměru koule:

$$d \to dr.$$

Dále S nahradíme plochou koule:

$$S \to 4\pi r^2.$$

Tepelný odpor dR_ϑ koule bude tedy:

$$dR_\lambda = \frac{dr}{\lambda \cdot 4\pi r^2}.$$

Pro získání celkového odporu R_λ je třeba provést integraci od vnitřního poloměru r_1 po vnější poloměr koule r_2:

$$R_\lambda = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\lambda \cdot 4\pi r^2} dr = \frac{1}{\lambda \cdot 4\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{1}{\lambda \cdot 4\pi} \cdot \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2}.$$

Po dosazení mezí integrace dostaneme:

$$R_\lambda = \frac{1}{\lambda \cdot 4\pi} \cdot \left(-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right) = \frac{1}{\lambda \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{1}{4\pi\lambda} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Pro odpor přenosu tepla z povrchu koule do okolí R_α využijeme vztah pro odpor přenosu tepla R_α:

$$R_\alpha = \frac{1}{\alpha \cdot S},$$

kde:
α - součinitel přestupu tepla (W/m^2·K).

Plochu S nahradíme plochou koule:

$$S \to 4\pi r_2^2.$$

Odpor přenosu tepla z povrchu koule do okolí R_α bude tedy:

$$R_\alpha = \frac{1}{\alpha \cdot 4\pi r_2^2} = \frac{1}{4\pi\alpha r_2^2}.$$

Celkový tepelný odpor koule R_Σ bude součtem obou odporů:

$$R_\Sigma = R_\lambda + R_\alpha = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{4\pi\alpha r_2^2}$$

Nyní pojďme vyšetřit limitu odporu pro r_2 jdoucí do nekonečna:

$$\lim_{r_2 \to \infty} R_\Sigma = \lim_{r_2 \to \infty} \left(\frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{4\pi\alpha r_2^2} \right)$$

Členy, kde se vyskytuje r_2 ve jmenovateli, jdou do nuly, čímž dostaneme:

$$\lim_{r_2 \to \infty} R_\Sigma = \frac{1}{4\pi\lambda r_1}.$$

Poznámka

Limita odporu koule pro r_2 jdoucí do nekonečna je:

$$\lim_{r_2 \to \infty} R_\Sigma = \frac{1}{4\pi\lambda r_1}.$$

Toto znamená, že koule bude mít vždy nějaký konečný tepelný odpor, který nelze překonat přidáním izolace. Koule tedy nelze úplně tepelné izolovat.

2.2 Minimum tepelného odporu

Pro nalezení extrému tepelného odporu R_Σ podle poloměru koule r_2 je třeba zjistit, kdy bude derivace R_Σ podle r_2 rovna nule:

$$\frac{dR_\Sigma}{dr_2} = 0.$$

Derivace R_Σ podle r_2 bude:

$$\frac{dR_\Sigma}{dr_2} = \frac{dR_\lambda}{dr_2} + \frac{dR_\alpha}{dr_2}.$$

Derivace R_λ podle r_2 bude:

$$\frac{dR_\lambda}{dr_2} = \frac{d}{dr_2}\left(\frac{1}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\right) = \frac{1}{4\pi\lambda r_2^2}$$

Derivace R_α podle r_2 bude:

$$\frac{dR_\alpha}{dr_2} = \frac{d}{dr_2}\left(\frac{1}{4\pi\alpha r_2^2}\right) = -\frac{2}{4\pi\alpha r_2^3} = -\frac{1}{2\pi\alpha r_2^3}.$$

Derivace R_Σ podle r_2 bude tedy:

$$\frac{dR_\Sigma}{dr_2} = \frac{1}{4\pi\lambda r_2^2} - \frac{1}{2\pi\alpha r_2^3}.$$

Nyní můžeme zjistit, kdy bude derivace R_Σ podle r_2 rovna nule:

$$\frac{1}{4\pi\lambda r_2^2} - \frac{1}{2\pi\alpha r_2^3} = 0$$

$$\frac{1}{4\lambda r_2^2} - \frac{1}{2\alpha r_2^3} = 0$$

$$\frac{1}{4\lambda r_2^2} = \frac{1}{2\alpha r_2^3}$$

$$\frac{1}{\lambda r_2^2} = \frac{2}{\alpha r_2^3}$$

$$\frac{r_2}{\lambda} = \frac{2}{\alpha}$$

$$r_2 = \frac{2\lambda}{\alpha}.$$

V další části budeme zkoumat, zda se jedná o minimum nebo maximum. K tomu využijeme druhou derivaci R_Σ podle r_2:

$$\frac{d^2 R_\Sigma}{dr_2^2} = \frac{d}{dr_2}\left(\frac{1}{4\pi\lambda r_2^2} - \frac{1}{2\pi\alpha r_2^3}\right) = -\frac{2}{4\pi\lambda r_2^3} + \frac{3}{2\pi\alpha r_2^4} = -\frac{1}{2\pi\lambda r_2^3} + \frac{3}{2\pi\alpha r_2^4}.$$

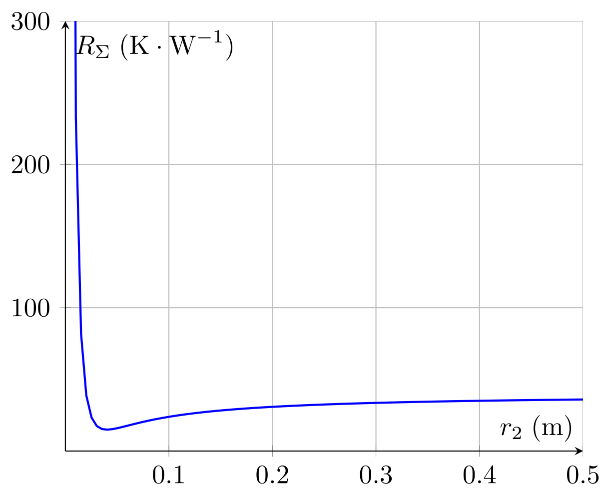
Nyní dosadíme $r_2 = \frac{2\lambda}{\alpha}$:

$$-\frac{1}{2\pi\lambda\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)^3} + \frac{3}{2\pi\alpha\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)^4} = -\frac{1}{2\pi\lambda\frac{8\lambda^3}{\alpha^3}} + \frac{3}{2\pi\alpha\frac{16\lambda^4}{\alpha^4}} =$$

$$= -\frac{\alpha^3}{16\pi\lambda^4} + \frac{3\alpha^3}{32\pi\lambda^4} = \frac{-2\alpha^3 + 3\alpha^3}{32\pi\lambda^4} = \frac{\alpha^3}{32\pi\lambda^4}.$$

Hodnoty α a λ jsou kladné, tudíž druhá derivace je kladná. To znamená, že se jedná o minimum.

Závislost tepelného odporu R_Σ na poloměru koule r_2



2.3 Ekonomie

Nyní můžeme porovnat rozdíl v rychlosti růstu tepelného odporu R_Σ a objemu izolace v závislosti na poloměru koule r_2.

$$V = \frac{4}{3}\pi(r_2^3 - r_1^3).$$

Po zjednodušení dostaneme:

$$V \sim r_2^3.$$

Rychlost růstu objemu izolace je kubická a jde do někonečna, zatímco tepelný odpor dosáhne limitní hodnoty.

2.4 Číselný příklad

Mějme izolovanou kouli, kde tepelná vodivost izolace je $\lambda = 0,159\ \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1}$, součinitel přestupu tepla do okolí je $\alpha = 10\ \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{K}^{-1}$ Vypočítejte vnější poloměr koule r_2, kdy bude tepelný odpor R_Σ minimální.

2.4.1 Řešení

Dosadíme do vzorce pro minimum tepelného odporu R_Σ:

$$r_2 = \frac{2\lambda}{\alpha} = \frac{2 \cdot 0,159}{10} = 0,0318\ \mathrm{m} = 3,18\ \mathrm{cm}.$$

Cvičení 4 - Symetrizace

Elektroenergetika 3

Petr Jílek

2024

Obsah

Úprava značení

- Elektrické napětí: $U_e \to U$ (V – volt)
- Elektrický proud: $I_e \to I$ (A – ampér)
- Elektrický odpor: $R_e \to R$ (Ω – ohm)
- Elektrická vodivost: $G_e \to G$ (S – siemens)
- Impedance: $\hat{Z}_e \to Z$ (Ω – ohm)
- Admitance: $\hat{Y}_e \to Y$ (S – siemens)
- Elektrická susceptance: $B_e \to B$ (S – siemens)
- Elektrická indukčnost: $L_e \to L$ (H – henry)
- Elektrická kapacita: $C_e \to C$ (F – farad)

Úpozornění - Fázory

V tomto cvičení budeme pracovat s fázory. Fázory jsou komplexní čísla, která v sobě obsahují informaci o amplitudě a fázi příslušného harmonického signálu. Fázory budeme značit velkým písmenem se stříškou nad ním, například:

$$\hat{U} \in \mathbb{C}.$$

Pokud proměnná neobsahuje stříšku, jedná se o reálnou hodnotu, například:

$$U \in \mathbb{R}.$$

Úpozornění - Sled fází

Sled fází v 3 fázové soustavě tomto cvičení jde po směru hodinových ručiček.

1 🔌 Symetrizace 🌶️🌶️

1.1 1 fázová reálná zátěž

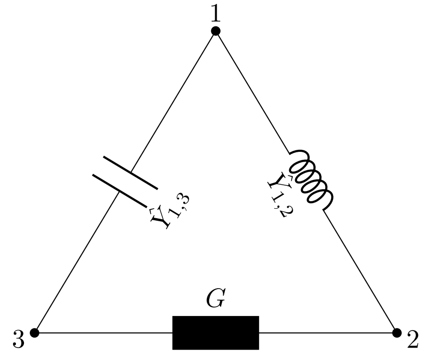
Mějme 1 fázovou reálnou zátěž zdanou reálnou admitancí G:

$$G = \frac{1}{R},$$

kde:
G - vodivost zátěže (S),
R - odpor zátěže (Ω).

Zátěž lze jednoduše nakreslit následovně:

Pokud bychom tuto zátěž připojily k 3 fázovému systému, tak by byla nesymetrická. Našim cílem je tuto zátěž symetrizovat. Z této zátěže vytvoříme 3 fázovou symetrickou zátěž následovně:



Vzorce pro výpočet admitancí jsou poté následující:

$$\hat{Y}_{1,2} = -j\frac{G}{\sqrt{3}}, \quad \text{(S)} \qquad (1)$$

$$\hat{Y}_{1,3} = j\frac{G}{\sqrt{3}}. \quad \text{(S)} \qquad (2)$$

1.1.1 Indučnost a kapacita

Vyjádření indukčnosti:

$$\hat{Z}_{1,2} = j\omega L \Rightarrow \hat{Y}_{1,2} = \frac{1}{\hat{Z}_{1,2}} = \frac{1}{j\omega L} = -j\frac{G}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{j\omega L} = -j\frac{G}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\omega L} = \frac{G}{\sqrt{3}}$$

$$\omega L = \frac{\sqrt{3}}{G}.$$

Výsledný vztah pro indukčnost:

$$L = \frac{\sqrt{3}}{\omega G}. \qquad \text{(H)} \tag{3}$$

Vyjádření kapacity:

$$\hat{Z}_{1,3} = \frac{1}{j\omega C} \Rightarrow \hat{Y}_{1,3} = \frac{1}{\hat{Z}_{1,3}} = j\omega C = j\frac{G}{\sqrt{3}}$$

$$j\omega C = j\frac{G}{\sqrt{3}}$$

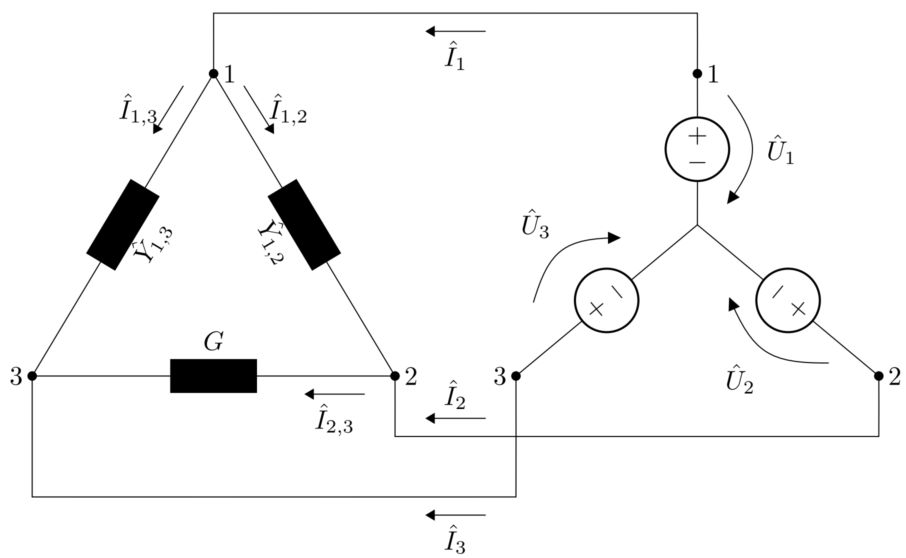
$$\omega C = \frac{G}{\sqrt{3}}.$$

Výsledný vztah pro kapacitu:

$$C = \frac{G}{\omega\sqrt{3}}. \qquad \text{(F)} \tag{4}$$

1.1.2 Odvození 🌶️🌶️🌶️

Uvažujme následující zapojení prvku v 3 fázovém systému:



Mezi uzly 2 a 3 je zapojena reálná zátěž, kterou chceme symetrizovat o vodivosti G. Požadujeme, aby po připojení admitancí $\hat{Y}_{1,2}$ a $\hat{Y}_{1,3}$ byla zátěž reálná a symetrická. Dalším požadavkem je, aby činný výkon odebíraný zátěží zůstal nezměněn. Matematicky to znamená:

- zachování činného výkonu: $\hat{Y}_{1,2}$ a $\hat{Y}_{1,3}$ jsou ryze imaginární,
- výsledné zapojení neodebírá jalový výkon: $\hat{Y}_{1,2} = -\hat{Y}_{1,3}$,
- symetrie odebíraných proudů: $\hat{I}_1 = k \cdot \hat{U}_1$, $\hat{I}_2 = k \cdot \hat{U}_2$, $\hat{I}_3 = k \cdot \hat{U}_3$.

Na základě prvních dvou podmínek položme:

$$\hat{Y}_{1,2} = j \cdot Y,$$

$$\hat{Y}_{1,3} = -j \cdot Y,$$

$$Y \in \mathbb{R}.$$

Použijeme operátor pootočení o 120° proti směru hodinových ručiček v komplexní rovině:

$$\hat{a} = e^{\frac{2\pi j}{3}} = \cos(\frac{2\pi}{3}) + j \cdot \sin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\hat{a}^2 = e^{\frac{4\pi j}{3}} = \cos(\frac{4\pi}{3}) + j \cdot \sin(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\hat{a}^3 = e^{\frac{6\pi j}{3}} = e^{2\pi j} = 1$$

$$\hat{a}^4 = e^{\frac{8\pi j}{3}} = e^{\frac{2\pi j}{3}} \cdot e^{\frac{6\pi j}{3}} = e^{\frac{2\pi j}{3}} = \hat{a}.$$

Poté fázory napětí můžeme vyjádřit jako:

$$\hat{U}_1 = \hat{U} \cdot \hat{a}$$

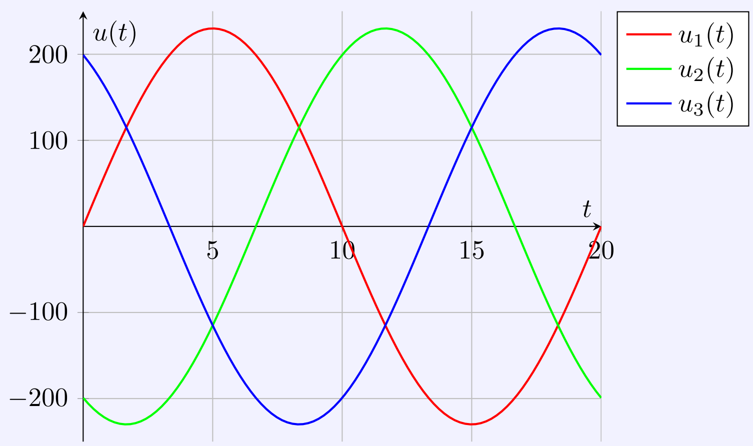
$$\hat{U}_2 = \hat{U} \cdot \hat{a}^2$$

$$\hat{U}_3 = \hat{U} \cdot \hat{a}.$$

Poznámka

Jedná se o pravotočivý trojfázový systém. Tudíž fáze napětí se posouvají o 120° po směru hodinových ručiček. Nicméně násobení operátorem $\hat{a}$ způsobí posun o 120° proti směru hodinových ručiček. Tudíž pokud například chceme získat fázor napětí 2, tak musíme vynásobit fázor napětí 1 operátorem dvakrát, tedy $\hat{a}^2$. Časový průběh napětí je znázorněn na následujícím grafu:

Závislot napětí v čase



Dálě napíšeme rovnice pro proudy:

$$\hat{I}_1 = \hat{I}_{1,2} + \hat{I}_{1,3} = \hat{Y}_{1,2} \cdot \left(\hat{U}_1 - \hat{U}_2\right) + \hat{Y}_{1,3} \cdot \left(\hat{U}_1 - \hat{U}_3\right) =$$

$$= j \cdot Y \cdot U \cdot \left(1 - \hat{a}^2\right) - j \cdot Y \cdot U \cdot (1 - \hat{a}) = k \cdot U$$

$$\hat{I}_2 = \hat{I}_{2,3} - \hat{I}_{1,2} = G \cdot \left(\hat{U}_2 - \hat{U}_3\right) - \hat{Y}_{1,2} \cdot \left(\hat{U}_1 - \hat{U}_2\right) =$$

$$= G \cdot U \cdot \left(\hat{a}^2 - \hat{a}\right) - j \cdot Y \cdot U \cdot \left(1 - \hat{a}^2\right) = k \cdot U \cdot \hat{a}^2$$

$$\hat{I}_3 = -\hat{I}_{1,3} - \hat{I}_{2,3} = -\hat{Y}_{1,3} \cdot \left(\hat{U}_1 - \hat{U}_3\right) - G \cdot \left(\hat{U}_2 - \hat{U}_3\right) =$$

$$= j \cdot Y \cdot U \cdot (1 - \hat{a}) - G \cdot U \cdot \left(\hat{a}^2 - \hat{a}\right) = k \cdot U \cdot \hat{a}.$$

Vezmeme konce rovnic, čímž dostaneme:

$$j \cdot Y \cdot U \cdot \left(1 - \hat{a}^2\right) - j \cdot Y \cdot U \cdot (1 - \hat{a}) = k \cdot U$$

$$G \cdot U \cdot \left(\hat{a}^2 - \hat{a}\right) - j \cdot Y \cdot U \cdot \left(1 - \hat{a}^2\right) = k \cdot U \cdot \hat{a}^2$$

$$j \cdot Y \cdot U \cdot (1 - \hat{a}) - G \cdot U \cdot \left(\hat{a}^2 - \hat{a}\right) = k \cdot U \cdot \hat{a}.$$

Rovnice jsou lineárně závislé, jelikož součet pravých stran je roven nule:

$$k \cdot U + k \cdot U \cdot \hat{a} + k \cdot U \cdot \hat{a}^2 = k \cdot U \cdot \left(1 + \hat{a} + \hat{a}^2\right) = k \cdot U \cdot 0 = 0.$$

Díky lineární závislosti nám stačí vzít pouze dvě rovnice. Vezmeme první a druhou:

$$j \cdot Y \cdot U \cdot (1 - \hat{a}^2) - j \cdot Y \cdot U \cdot (1 - \hat{a}) = k \cdot U$$
$$G \cdot U \cdot (\hat{a}^2 - \hat{a}) - j \cdot Y \cdot U \cdot (1 - \hat{a}^2) = k \cdot U \cdot \hat{a}^2.$$

Můžeme pokrátit U:

$$j \cdot Y \cdot (1 - \hat{a}^2) - j \cdot Y \cdot (1 - \hat{a}) = k$$

$$G \cdot (\hat{a}^2 - \hat{a}) - j \cdot Y \cdot (1 - \hat{a}^2) = k \cdot \hat{a}^2.$$

Připravíme rovnice na maticový tvar:

$$-k + \left(j \cdot (1 - \hat{a}^2) - j \cdot (1 - \hat{a})\right) \cdot Y = 0$$

$$-k \cdot \hat{a}^2 - j \cdot (1 - \hat{a}^2) \cdot Y = -G \cdot (\hat{a}^2 - \hat{a}).$$

Přepíšeme do maticového tvaru:

$$\begin{pmatrix} -1 & j(1-\hat{a}^2) - j(1-\hat{a}) \\ -\hat{a}^2 & -j(1-\hat{a}^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -G(\hat{a}^2 - \hat{a}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & j - j\hat{a}^2 - j + j\hat{a} \\ -\hat{a}^2 & -j + j\hat{a}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -G(\hat{a}^2 - \hat{a}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -j\hat{a}^2 + j\hat{a} \\ -\hat{a}^2 & j\hat{a}^2 - j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -G(\hat{a}^2 - \hat{a}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\hat{a}^2 & -j\hat{a}^4 + j\hat{a}^3 \\ -\hat{a}^2 & j\hat{a}^2 - j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -G(\hat{a}^2 - \hat{a}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\hat{a}^2 & -j\hat{a} + j \\ -\hat{a}^2 & j\hat{a}^2 - j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -G(\hat{a}^2 - \hat{a}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\hat{a}^2 & -j\hat{a} + j \\ 0 & j\hat{a}^2 - j + j\hat{a} - j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -G(\hat{a}^2 - \hat{a}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\hat{a}^2 & -j\hat{a} + j \\ 0 & j\hat{a}^2 + j\hat{a} - 2j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -G(\hat{a}^2 - \hat{a}) \end{pmatrix}.$$

Vyřešíme rovnici pro Y:

$$Y = \frac{-G(\hat{a}^2 - \hat{a})}{j\hat{a}^2 + j\hat{a} - 2j} = \frac{-G\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)}{j\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + j\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2j} =$$

$$= \frac{-G\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{-j\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - 2j} = \frac{-G\left(-j\sqrt{3}\right)}{-3j} = \frac{-G\sqrt{3}}{3} = -\frac{G}{\sqrt{3}}.$$

Vyřešíme rovnici pro k:

$$-\hat{a}^2 k + (-j\hat{a} + j)Y = 0,$$

$$k = \frac{-(-j\hat{a}+j)Y}{-\hat{a}^2} = \frac{(-j\hat{a}+j)Y}{\hat{a}^2} = \frac{(-j\hat{a}+j)\left(-\frac{G}{\sqrt{3}}\right)}{\hat{a}^2} =$$

$$= \frac{\left(-j\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+j\right)\left(-\frac{G}{\sqrt{3}}\right)}{-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\left(j\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+j\right)\left(-\frac{G}{\sqrt{3}}\right)}{-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{\left(j\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{G}{\sqrt{3}}\right)}{-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\left(-j\frac{3}{2\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)G}{-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)G}{-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}} = G.$$

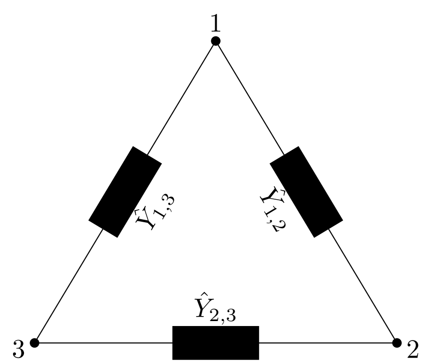
Dostáváme tedy:

$$k = G,$$

$$Y = -\frac{G}{\sqrt{3}}.$$

1.2 Obecná 3f nesymetrická zátěž

Mějme obecnou 3 fázovou nesymetrickou zátěž zadanou admitancemi podle obrázku:



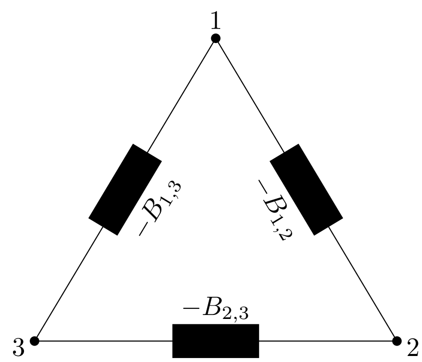
Admitance můžeme zapsat jako:

$$\hat{Y}_{1,2} = G_{1,2} + j \cdot B_{1,2},$$

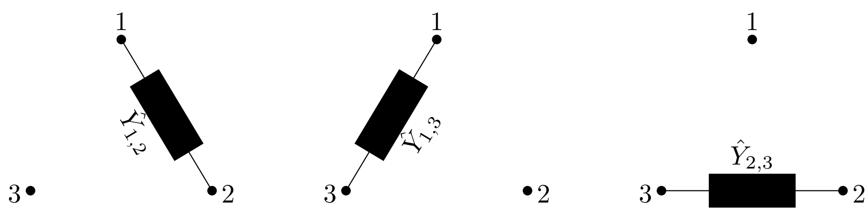
$$\hat{Y}_{1,3} = G_{1,3} + j \cdot B_{1,3},$$

$$\hat{Y}_{2,3} = G_{2,3} + j \cdot B_{2,3}.$$

První krok je provést kompenzaci jalových částí. Stačí pouze vzít zápornou hodnotu jalové části zátěže:



Dále je třeba provést symetrizaci pro každou část zvlášť. Nejprve pro větev 1–2, poté pro větev 1–3 a nakonec pro větev 2–3. Tento krok je znázorněn na obrázku:



Výsledná tabulka symetrizace bude vypadat následovně:

Větev	1–2	1–3	2–3
Kompenzace jalového výkonu	$-jB_{1,2}$	$-jB_{1,3}$	$-jB_{2,3}$
Symetrizace 1–2	0	$-j\frac{G_{1,2}}{\sqrt{3}}$	$j\frac{G_{1,2}}{\sqrt{3}}$
Symetrizace 1–3	$j\frac{G_{1,3}}{\sqrt{3}}$	0	$-j\frac{G_{1,3}}{\sqrt{3}}$
Symetrizace 2–3	$-j\frac{G_{2,3}}{\sqrt{3}}$	$j\frac{G_{2,3}}{\sqrt{3}}$	0

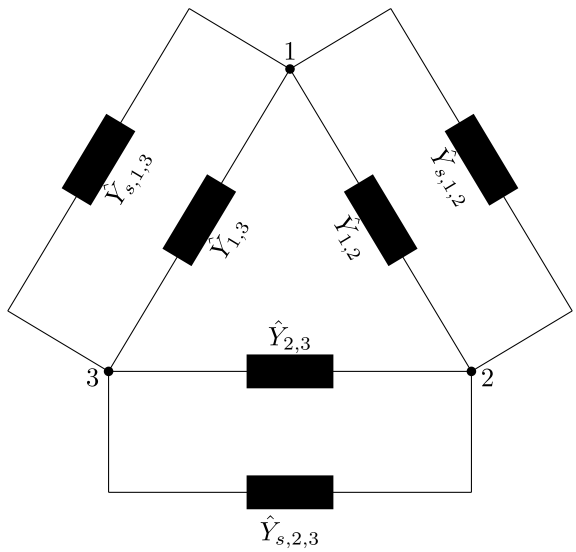
Symetrizační admitanci pro danou větev dostaneme jako součet všech symetrizačních admitancí (suma ve sloupci):

$$\hat{Y}_{s,1,2} = -jB_{1,2} + j\frac{G_{1,3}}{\sqrt{3}} - j\frac{G_{2,3}}{\sqrt{3}},$$

$$\hat{Y}_{s,1,3} = -jB_{1,3} - j\frac{G_{1,2}}{\sqrt{3}} + j\frac{G_{2,3}}{\sqrt{3}},$$

$$\hat{Y}_{s,2,3} = -jB_{2,3} + j\frac{G_{1,2}}{\sqrt{3}} - j\frac{G_{1,3}}{\sqrt{3}}.$$

Tyto admitance následně připojíme parallelně k odpovídajícím větvím. Výsledný obvod bude vypadat následovně:



1.2.1 Indučnost a kapacita

Pokud je symetrizační admitance záporná, tak se bude jednat o indukčnost. Jelikož symetrizační admitance má pouze imaginární složku (která je záporná), tak lze ji zadat jako:

$$\hat{Y}_s = -jY_s.$$

Poté můžeme vypočítat indukčnost:

$$\hat{Y}_s = \frac{1}{\hat{Z}_s} = \frac{1}{j\omega L} = -jY_s$$

$$\frac{1}{j\omega L} = -jY_s$$

$$j\omega L = \frac{1}{-jY_s}$$

$$L = \frac{1}{-jj\omega Y_s} = \frac{1}{\omega Y_s}.$$

Vzorec pro dopočítání symetrizační indukčnosti je tedy:

$$L = \frac{1}{2\pi f Y_s}, \qquad \text{(H)} \quad (5)$$

kde:
L - indukčnost (H),
f - frekvence (Hz),
Y_s - symetrizační admitance (s).

Pokud je symetrizační admitance kladná, tak se bude jednat o kapacitu. Jelikož symetrizační admitance má pouze imaginární složku (která je kladná), tak lze ji zadat jako:

$$\hat{Y}_s = jY_s.$$

Poté můžeme vypočítat kapacitu:

$$\hat{Y}_s = \frac{1}{\hat{Z}_s} = \frac{1}{\frac{1}{j\omega C}} = jY_s$$

$$\frac{1}{\frac{1}{j\omega C}} = jY_s$$

$$j\omega C = jY_s$$

$$C = \frac{Y_s}{\omega}.$$

Vzorec pro dopočítání symetrizační kapacity je tedy:

$$C = \frac{Y_s}{2\pi f}, \qquad \text{(F)} \quad (6)$$

kde:
C - kapacita (F),
f - frekvence (Hz),
Y_s - symetrizační admitance (s).

1.3 Přepočet výkonů na admitance

Zátěže jsou často zadány pomocí: činného výkonu, úhlu $\cos(\varphi)$ a informací, zda je zátěž induktivní nebo kapacitní. Tyto informace můžeme převést na admitanci následovně:

$$\hat{Y} = \frac{P}{U^2} \cdot (1 - j \cdot \mathrm{tg}(\pm\varphi)) = \frac{P}{U^2} \cdot (1 \mp j \cdot \mathrm{tg}(\varphi)), \qquad \text{(S)} \quad (7)$$

kde:
$\hat{Y}$ - admitance (s),
P - činný výkon (W),
U - efektivní hodnota napětí (V),
j - imaginární jednotka,
φ - úhel $\cos(\varphi)$.

Poznámka

Znaménko $\pm/\mp$ závisí na tom, zda je zátěž induktivní nebo kapacitní. Pro induktivní zátěž je znaménko v členu $\mathrm{tg}(\pm\varphi)$ kladné ($\mathrm{tg}(\varphi)$), pro kapacitní zátěž je znaménko záporné ($\mathrm{tg}(-\varphi)$). Funkce $\mathrm{tg}(\varphi)$ je lichá, tudíž $\mathrm{tg}(-\varphi) = -\mathrm{tg}(\varphi)$.

Pro induktivní zátěž:

$$\hat{Y} = \frac{P}{U^2} \cdot (1 - j \cdot \mathrm{tg}(\varphi)).$$

Pro kapacitní zátěž:

$$\hat{Y} = \frac{P}{U^2} \cdot (1 + j \cdot \mathrm{tg}(\varphi)).$$

1.3.1 Odvození 🌶️🌶️🌶️

Ze vztahu pro napětí vyjádříme produ v závislosti na admitanci:

$$\hat{U} = \hat{I} \cdot \hat{Z} = \frac{\hat{I}}{\hat{Y}} \Rightarrow \hat{I} = \hat{U} \cdot \hat{Y}.$$

Dále použijeme vztah pro zdánlivý výkon:

$$\hat{S} = \hat{U} \cdot \hat{I}^* = \hat{U} \cdot \left(\hat{U} \cdot \hat{Y}\right)^* = \hat{U} \cdot \hat{U}^* \cdot \hat{Y}^* = U^2 \cdot \hat{Y}^*,$$

$$\Rightarrow \hat{Y}^* = \frac{\hat{S}}{U^2} \Rightarrow \hat{Y} = \frac{\hat{S}^*}{U^2}$$

$$\hat{Y} = \frac{(P + j \cdot Q)^*}{U^2} = \frac{P - j \cdot Q}{U^2} = \frac{P - j \cdot P \cdot \mathrm{tg}(\varphi)}{U^2}.$$

Úhel φ je kladný pro induktivní zátěž a záporný pro kapacitní zátěž. Funkce $\mathrm{tg}(\varphi)$ lichá:

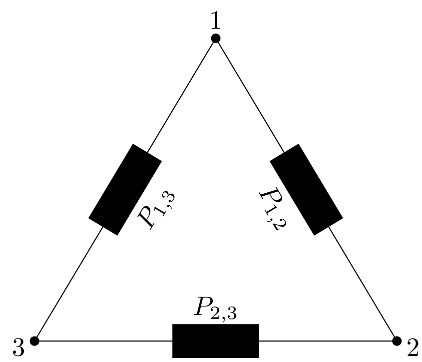
$$\mathrm{tg}(-\varphi) = \frac{\sin(-\varphi)}{\cos(-\varphi)} = \frac{-\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = -\frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = -\mathrm{tg}(\varphi).$$

Tudíž můžeme výsledný vztah zapsat jako:

$$\hat{Y} = \frac{P}{U^2} \cdot (1 \mp j \cdot \mathrm{tg}(\varphi)).$$

1.4 Číselný příklad

Mějme 3 fázovou nesymetrickou zátěž nazančenou na obrázku:



Parametry:

- $U = 400$V,
- $\cos(\varphi) = 0,8$,
- $P_{1,2} = 63$ kW, induktivní,
- $P_{1,3} = 28$ kW, induktivní,
- $P_{2,3} = 26$ kW, kapacitní.

Proveďte symetrizaci zátěže.

1.4.1 Řešení

Nejprve získáme úhel φ:

$$\varphi = \arccos(0,8) \approx 0,644 \text{ rad}.$$

Dále vypočítáme $\mathrm{tg}(\varphi)$:

$$\mathrm{tg}(\varphi) = \mathrm{tg}(0,644) \approx 0,751.$$

Následně získáme admitance:

$$Y_{1,2} = \frac{P_{1,2}}{U^2} \cdot (1 - j \cdot \mathrm{tg}(\varphi)) = \frac{63\ 000}{400^2} \cdot (1 - j \cdot 0,751) = (0,394 - j \cdot 0,296) \text{ S},$$

$$Y_{1,3} = \frac{P_{1,3}}{U^2} \cdot (1 - j \cdot \mathrm{tg}(\varphi)) = \frac{28\ 000}{400^2} \cdot (1 - j \cdot 0,751) = (0,175 - j \cdot 0,131) \text{ S},$$

$$Y_{2,3} = \frac{P_{2,3}}{U^2} \cdot (1 + j \cdot \mathrm{tg}(\varphi)) = \frac{26\ 000}{400^2} \cdot (1 + j \cdot 0,751) = (0,163 + j \cdot 0,122) \text{ S}.$$

Dále vytvoříme tabulku symetrizace:

Větev	1–2	1–3	2–3
Kompenzace jalového výkonu	$j0,296$	$j0,131$	$-j0,122$
Symetrizace 1–2	0	$-j\frac{0,394}{\sqrt{3}}$	$j\frac{0,394}{\sqrt{3}}$
Symetrizace 1–3	$j\frac{0,175}{\sqrt{3}}$	0	$-j\frac{0,175}{\sqrt{3}}$
Symetrizace 2–3	$-j\frac{0,163}{\sqrt{3}}$	$j\frac{0,163}{\sqrt{3}}$	0

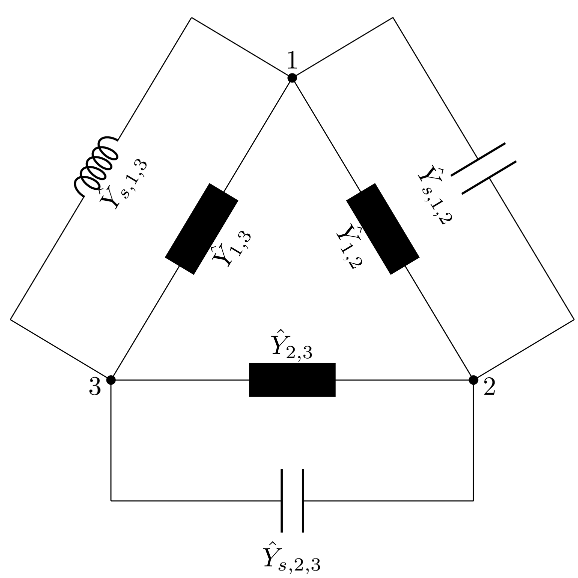
Symetrizační admitance:

$$Y_{s,1,2} = j0,296 + j\frac{0,175}{\sqrt{3}} - j\frac{0,163}{\sqrt{3}} = j0,296 + j0,101 - j0,094 = j0,303 \text{ S},$$

$$Y_{s,1,3} = j0,131 - j\frac{0,394}{\sqrt{3}} + j\frac{0,163}{\sqrt{3}} = j0,131 - j0,227 + j0,094 = -j0,002 \text{ S},$$

$$Y_{s,2,3} = -j0,122 + j\frac{0,394}{\sqrt{3}} - j\frac{0,175}{\sqrt{3}} = -j0,122 + j0,227 - j0,101 = j0,004 \text{ S}.$$

Výsledné zapojení bude vypadat následovně:



Cvičení 5 - Aplikace

Elektroenergetika 3

Petr Jílek

2024

Obsah

Úprava značení

- Elektrické napětí: $U_e \rightarrow U$ (V – volt)
- Elektrická proudová hustota: $J_e \rightarrow J$ ($\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^{-2}$ – ampér na metr čtvereční)
- Intenzita elektrického pole: $E_e \rightarrow E$ ($\mathrm{V} \cdot \mathrm{m}^{-1}$ – volt na metr)

1 ❄️ Topná sezóna 🌶️🌶️🌶️

Průměrná venkovní teplota v topné sezóně je $\overline{T}_{out} = 5$ °C. Vnitřní teplota je $T_{in} = 20$ °C. Doba topné sezóny je 200 dní. Celková plocha je $S = 300$ m^2. Součinitel prostupu tepla je $U_\vartheta = 0,5$ W$\cdot$m$^{-2}\cdot$K^{-1}. Jaký množství tepla projde stěnami za celou topnou sezónu?

1.1 Řešení

Celkové množství tepla, které projde stěnami za celou topnou sezónu Q vypočteme jako:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} \dot{Q} \cdot dt,$$

kde:
$\dot{Q}$ je tepelný tok (W),
t_1 je začátek topné sezóny (h),
t_2 je konec topné sezóny (h).

Integrál můžeme rozepsat jako:

$$\begin{aligned} Q = \int_{t_1}^{t_2} U_\vartheta \cdot S \cdot (T_{in} - T_{out}(t)) \cdot dt = U_\vartheta \cdot S \cdot \int_{t_1}^{t_2} (T_{in} - T_{out}(t)) \cdot dt = \\ = U_\vartheta \cdot S \cdot T_{in} \cdot \int_{t_1}^{t_2} dt - U_\vartheta \cdot S \cdot \int_{t_1}^{t_2} T_{out}(t) \cdot dt = \\ = U_\vartheta \cdot S \cdot T_{in} \cdot (t_2 - t_1) - U_\vartheta \cdot S \cdot \int_{t_1}^{t_2} T_{out}(t) \cdot dt. \end{aligned}$$

Nyní uděláme odbočku, kde vyjádříme průměrnou venkovní teplotu $\overline{T}_{out}$ jako:

$$\overline{T}_{out} = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} T_{out}(t) \cdot dt.$$

Vyjádříme daný integrál:

$$\int_{t_1}^{t_2} T_{out}(t) \cdot dt = \overline{T}_{out} \cdot (t_2 - t_1).$$

Dosadíme zpět do původní rovnice:

$$\begin{aligned} Q = U_\vartheta \cdot S \cdot T_{in} \cdot (t_2 - t_1) - U_\vartheta \cdot S \cdot \overline{T}_{out} \cdot (t_2 - t_1) = \\ = U_\vartheta \cdot S \cdot (T_{in} - \overline{T}_{out}) \cdot (t_2 - t_1). \end{aligned}$$

Nyní můžeme dosadit a vypočítat:

$$\begin{aligned} Q = 0,5 \cdot 300 \cdot (20 - 5) \cdot (200 \cdot 24 \cdot 3\,600 - 0) = \\ = 0,5 \cdot 300 \cdot 15 \cdot 200 \cdot 24 \cdot 3\,600 = 38,9 \text{ GJ}. \end{aligned}$$

2 🏭 Cihlová pec 🌶️🌶️🌶️

U cihlové pece je vysoký rozdíl teplot, tudíž tepelnou vodivost je třeba uvažovat jako proměnnou. Tepelnou vodivost λ můžeme zapsat jako:

$$\lambda(x) = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot T,$$

Pro zeď o tloušťce d budeme uvažovat následující zjednodušející předpoklady:

- $\frac{\partial T}{\partial t} = 0,$
- $\vec{v} = 0,$
- $\dot{Q}_V = 0,$
- $\lambda(x) = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot T,$
- $T = T(x)$ - teplota závislá pouze na ose x.

Poté Fourierova-Kirchhoffova rovnice bude mít tvar:

$$0 = \frac{d}{dx}\left(\lambda(T) \cdot \frac{dT}{dx}\right).$$

Fourieruv zákon pro tepelný tok bude mít tvar:

$$\dot{q} = -\lambda(T) \cdot \frac{dT}{dx}.$$

Vynásobme rovnici mínus jedna:

$$-\dot{q} = \lambda(T) \cdot \frac{dT}{dx}.$$

Pokud dosadíme do Fourierova-Kirchhoffovy rovnice, dostaneme:

$$0 = \frac{d}{dx}\left(-\dot{q}\right).$$

Z toho vidíme, že měrný tepelný tok $\dot{q}$ je konstantní a nezávisí na poloze x. Můžeme tedy rozepsat Fourierův zákon jako:

$$-\dot{q} = (\lambda_0 + \lambda_1 \cdot T) \cdot \frac{dT}{dx}.$$

Můžeme řešit tuto diferenciální rovnici separací proměnných:

$$-\dot{q} \cdot dx = (\lambda_0 + \lambda_1 \cdot T) \cdot dT.$$

Nyní meze budou jak pro x, tak pro T:

- $x = 0 \Rightarrow T = T_1,$

- $x = d \Rightarrow T = T_2$.

Rovnici můžeme integrovat:

$$-\int_0^d \dot{q} \cdot dx = \int_{T_1}^{T_2} (\lambda_0 + \lambda_1 \cdot T) \cdot dT$$

$$-\dot{q} \cdot [x]_0^d = \lambda_0 \cdot [T]_{T_1}^{T_2} + \frac{\lambda_1}{2} \cdot \left[T^2\right]_{T_1}^{T_2}$$

$$-\dot{q} \cdot d = \lambda_0 \cdot (T_2 - T_1) + \frac{\lambda_1}{2} \cdot (T_2^2 - T_1^2)$$

$$-\dot{q} \cdot d = \lambda_0 \cdot (T_2 - T_1) + \frac{\lambda_1}{2} \cdot (T_2 - T_1) \cdot (T_2 + T_1)$$

$$-\dot{q} \cdot d = (T_2 - T_1) \cdot \left(\lambda_0 + \frac{\lambda_1}{2} \cdot (T_2 + T_1)\right).$$

Nyní odvoďme střední hodnotu tepelné vodivosti $\overline{\lambda}$:

$$\overline{\lambda} = \frac{1}{T_2 - T_1} \cdot \int_{T_1}^{T_2} \lambda(T) \cdot dT = \frac{1}{T_2 - T_1} \cdot \int_{T_1}^{T_2} (\lambda_0 + \lambda_1 \cdot T) \cdot dT$$

$$= \frac{1}{T_2 - T_1} \cdot \left[\lambda_0 \cdot T + \frac{\lambda_1}{2} \cdot T^2\right]_{T_1}^{T_2} = \frac{1}{T_2 - T_1} \cdot \left(\lambda_0 \cdot (T_2 - T_1) + \frac{\lambda_1}{2} \cdot (T_2^2 - T_1^2)\right) =$$

$$= \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{2} \cdot (T_2 + T_1).$$

Nyní můžeme videt, že člen v závorce u vyřešené diferenciální rovnice je roven střední hodnotě tepelné vodivosti $\overline{\lambda}$:

$$-\dot{q} \cdot d = (T_2 - T_1) \cdot \overline{\lambda}.$$

Nyní můžeme odvodit vztah pro měrný tepelný tok $\dot{q}$:

$$\dot{q} = \frac{T_1 - T_2}{d} \cdot \overline{\lambda}.$$

3 🚿 Průtokový ohřívač 🌶️🌶️🌶️🌶️

Máme průtokový ohřívač tvořený dvěma obdelníkovými elektrodovými deskami o délce l (m) a šířce b (m). Vzdálenost mezi deskami je d (m). Mezi deskami je voda produdící o rychlostí v pouze ve směru x. Voda má měrnou tepelnou kapacitu c ($\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$) a hustotu ρ ($\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$). Elektrické napětí mezi deskami je U (V). Odvoďte změnu teploty vody T_2 (K) na výstupu průtokového ohřívače, pokud na vstupu je voda o teplotě T_1 (K).

Budou platit následující předpoklady:

- $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$,
- $\nabla \cdot (\lambda \cdot \vec{\nabla} T) = 0$.

3.1 Řešení

Fourier-Kirchhoffova rovnice:

$$\rho \cdot c \cdot \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \dot{Q}_V, \qquad (\mathrm{W \cdot m^{-3}}) \tag{1}$$

kde:
ρ – hustota ($\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$),
c – měrná tepelná kapacita ($\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$),
$\vec{v}$ – rychlost ($\mathrm{m \cdot s^{-1}}$),
$\vec{\nabla} T$ – gradient teploty ($\mathrm{K \cdot m^{-1}}$),
$\dot{Q}_V$ – objemový zdroj tepla ($\mathrm{W \cdot m^{-3}}$).

Vektor rychlosti $\vec{v}$ je:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vektor rychlosti $\vec{v}$ má pouze složku v, protože voda teče pouze ve směru osy x. Můžeme tedy rovnici zjednodušit na:

$$\rho \cdot c \cdot v \cdot \frac{dT}{dx} = \dot{Q}_V.$$

Dále je třeba vyjádřit rychlost v a objemový zdroj tepla $\dot{Q}_V$. Rychlost v je:

$$v = \frac{\dot{V}}{S} = \frac{\dot{V}}{d \cdot b},$$

kde:
$\dot{V}$ – objemový průtok ($\mathrm{m^3 \cdot s^{-1}}$).

Objemový zdroj tepla $\dot{Q}_V$ můžeme vyjádřit pomocí intenzity elektrického pole E a proudové hustoty J:

$$\dot{Q}_V = E \cdot J,$$

kde:
E – intenzita elektrického pole $(\mathrm{V} \cdot \mathrm{m}^{-1})$,
J – proudová hustota $(\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^{-2})$.

Proudovou hustotu J můžeme vyjádřit pomocí Ohmova zákona v diferenciálním tvaru:

$$J = \sigma_e \cdot E,$$

kde:
σ_e – měrná elektrická vodivost $(\Omega \cdot \mathrm{m}^{-1})$.

Dostaneme tedy:

$$\dot{Q}_V = E \cdot \sigma_e \cdot E = \sigma_e \cdot E^2.$$

Intenzitu elektrického pole E můžeme vyjádřit pomocí napětí U a vzdálenosti mezi deskami d:

$$E = \frac{U}{d}.$$

Dostaneme tedy:

$$\dot{Q}_V = \sigma_e \cdot \left(\frac{U}{d}\right)^2.$$

Zde je třeba uvažovat měrnou elektrickou vodivost σ_e jako proměrnou závislou na teplotě. U kovů se vzrůstající teplotou se měrná elektrická vodivost snižuje, jelikož volné nostiče náboje mají problém se v rozpohybované krystalové mřížce kvůli teplotě pohybovat. Naopak u iontových roztoku jako třeba u vody se měrná elektrická vodivost zvyšuje s teplotou. Nahradíme tedy σ_e lineární funkcí teploty $\sigma_e(T)$:

$$\sigma_e = \sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T.$$

Nyní můžeme dosadit vše do rovnice:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\dot{V}}{d \cdot b} \cdot \frac{dT}{dx} = (\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T) \cdot \left(\frac{U}{d}\right)^2.$$

Dostáváme diferenciální rovnici, kterou můžeme řešit separací proměnných:

$$\frac{dT}{\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T} = \frac{U^2 \cdot b}{d \cdot \rho \cdot c \cdot \dot{V}} \cdot dx.$$

Pravou staranu můžeme pro lepší čitelnost narhadit:

$$\xi = \frac{U^2 \cdot b}{d \cdot \rho \cdot c \cdot \dot{V}}.$$

Dostáváme:

$$\frac{dT}{\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T} = \xi \cdot dx.$$

Integrujeme obě strany:

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T} = \int_0^l \xi \cdot dx,$$

kde:
T_1 – počáteční teplota (K),
T_2 – konečná teplota (K),
l – délka průtokového ohřívače (m).

Dostáváme:

$$\left[\frac{1}{\sigma_{e,1}} \cdot \ln\left(\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T\right)\right]_{T_1}^{T_2} = [\xi \cdot x]_0^l$$

$$\frac{1}{\sigma_{e,1}} \cdot \ln\left(\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_2\right) - \frac{1}{\sigma_{e,1}} \cdot \ln\left(\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_1\right) = \xi \cdot l$$

$$\ln\left(\frac{\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_2}{\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_1}\right) = \sigma_{e,1} \cdot \xi \cdot l$$

$$\frac{\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_2}{\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_1} = e^{\sigma_{e,1} \cdot \xi \cdot l}$$

$$\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_2 = \left(\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_1\right) \cdot e^{\sigma_{e,1} \cdot \xi \cdot l}$$

$$T_2 = \frac{\left(\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_1\right) \cdot e^{\sigma_{e,1} \cdot \xi \cdot l} - \sigma_{e,0}}{\sigma_{e,1}} = \frac{\sigma_{e,0} \cdot e^{\sigma_{e,1} \cdot \xi \cdot l} - \sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_1 \cdot e^{\sigma_{e,1} \cdot \xi \cdot l}}{\sigma_{e,1}} =$$

$$= \frac{\sigma_{e,0} \cdot e^{\sigma_{e,1} \cdot \xi \cdot l} - \sigma_{e,0}}{\sigma_{e,1}} + T_1 \cdot e^{\sigma_{e,1} \cdot \xi \cdot l}.$$

Pokud za ξ dosadíme původní výraz, dostaneme:

$$T_2 = \frac{\sigma_{e,0} \cdot e^{\sigma_{e,1} \cdot \frac{U^2 \cdot b}{d \cdot \rho \cdot c \cdot \dot{V}} \cdot l} - \sigma_{e,0}}{\sigma_{e,1}} + T_1 \cdot e^{\sigma_{e,1} \cdot \frac{U^2 \cdot b}{d \cdot \rho \cdot c \cdot \dot{V}} \cdot l}.$$