












# Cvičení 1 - Energie

## Elektroenergetika 3

Petr Jílek

2024

### Obsah

<b>1</b>	 <b>Potenciální energie</b>		<b>2</b>
1.1	a	.....	2
1.2	b	  	2
<b>2</b>	 <b>Tepelná kapacita</b>		<b>6</b>
2.1	a	.....	6
2.2	b	.....	7
<b>3</b>	 <b>Průtokový ohříváč</b>		<b>8</b>
3.1	a	.....	8
3.2	b	.....	8
<b>4</b>	 <b>Monočlánek</b>		<b>9</b>
4.1	a	.....	9
4.2	b	.....	9

## 1 Potenciální energie

Do jaké výšky vynese energie jedné Fidorky (30 g  $\rightarrow$  162 kcal) 80 kg člověka?

- a) Gravitační zrychlení je konstantní s hodnotou  $9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .
- b) Počáteční výška je 0 m nad mořem a gravitační zrychlení je proměnné.  
Známe:

- gravitační konstanta:  $G = 6,67430 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ ,
- poloměr Země:  $R = 6\,371 \text{ km}$ ,
- hmotnost Země:  $M = 5,97219 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ .

### 1.1 a

Energie jedné Fidorky:

$$162 \text{ kcal} = 162 \text{ kcal} \cdot 4\,184 \frac{\text{J}}{\text{kcal}} = 677\,808 \text{ J}.$$

Ze vzorce pro potenciální energii vyjádříme výšku:

$$E_p = m \cdot g \cdot \Delta h \Rightarrow \Delta h = \frac{E_p}{m \cdot g} = \frac{677\,808}{80 \cdot 9,81} \approx 863,7 \text{ m}.$$

### 1.2 b

Nejdříve si odvodíme vzorec pro gravitační zrychlení z Newtonova gravitačního zákona:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}, \quad (\text{N}) \quad (1)$$

kde:

$F$  – gravitační síla (N),

$G$  – gravitační konstanta ( $\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ ),

$m_1$  – hmotnost prvního tělesa (kg),

$m_2$  – hmotnost druhého tělesa (kg),

$r$  – vzdálenost mezi tělesy (m).

Gravitační síla je definována jako:

$$F = m \cdot g, \quad (\text{N}) \quad (2)$$

kde:

$m$  – hmotnost (kg),

$g$  – gravitační zrychlení ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ ).

Dále budeme uvažovat, že hmotnost  $m_1$  je hmotnost Země  $M$  a hmotnost  $m_2$  je hmotnost člověka  $m$  a dosadíme do Newtonova gravitačního zákona:

$$m \cdot g = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}.$$

Poté gravitační zrychlení  $g$  je:

$$g = G \cdot \frac{M}{r^2}.$$

Takto můžeme dosadit do vzorce pro potenciální energii:

$$E_p = m \cdot g \cdot h = m \cdot G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot h.$$

Nyní je třeba si uvědomit, že gravitační zrychlení  $g$  je proměnné a závisí na výšce  $h$ . Je možné analyzovat kolik potřebujeme energie  $\Delta E_p$  pro zvýšení výšky  $h$  o  $\Delta h$ :

$$\Delta E_p = m \cdot G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \Delta h$$

Zde se dopouštíme jisté nepřesnosti, jelikož pokud například  $\Delta h$  bude 2 m, tak poloměr od středu země se změní taky, čímž se změní gravitační zrychlení. Pro získání přesného výsledku je třeba nahradit  $\Delta h$  infinitesimálně malým  $dh$  a  $\Delta E_p$  bude infinitesimálně malé  $dE_p$ :

$$dE_p = m \cdot G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot dh.$$

Toto očividně vede na diferenciální rovnici, která lze snadno řešit separací proměnných, ale pozor. Nyní bychom brali poloměr  $r$  jako konstantu. To je chyba, jelikož poloměr  $r$  se mění s výškou  $h$ . Jeden z přístupů je nahradit výšku  $h$  poloměrem  $r$  a místo posouvání se o výšku  $dh$  se posuneme o poloměr  $dr$ . Ale musíme si poté zapamatovat, že počáteční mezí je poloměr země  $R$  a konečná mez bude tedy  $R + h$ . Poté je možné řešit rovnici:

$$E_p = \int_R^{R+h} m \cdot G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot dr.$$

Hmotnost  $m$  a  $M$  a gravitační konstanta  $G$  je konstantní, takže je můžeme vytknout před integrál:

$$E_p = m \cdot G \cdot M \int_R^{R+h} \frac{1}{r^2} \cdot dr = m \cdot G \cdot M \cdot \left[ -\frac{1}{r} \right]_R^{R+h} = m \cdot G \cdot M \cdot \left( -\frac{1}{R+h} + \frac{1}{R} \right).$$

Po úpravě dostaneme:

$$E_p = m \cdot G \cdot M \cdot \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right).$$

Nyní je třeba osamostatnit  $h$ :

$$E_p = m \cdot G \cdot M \cdot \left( \frac{R + h - R}{R \cdot (R + h)} \right) = m \cdot G \cdot M \cdot \left( \frac{h}{R \cdot (R + h)} \right)$$

$$E_p \cdot R \cdot (R + h) = m \cdot G \cdot M \cdot h$$

$$E_p \cdot R^2 + E_p \cdot R \cdot h = m \cdot G \cdot M \cdot h$$

$$E_p \cdot R \cdot h - m \cdot G \cdot M \cdot h = -E_p \cdot R^2$$

$$h \cdot (E_p \cdot R - m \cdot G \cdot M) = -E_p \cdot R^2$$

$$h = \frac{-E_p \cdot R^2}{E_p \cdot R - m \cdot G \cdot M}$$

$$h = \frac{E_p \cdot R^2}{m \cdot G \cdot M - E_p \cdot R}.$$

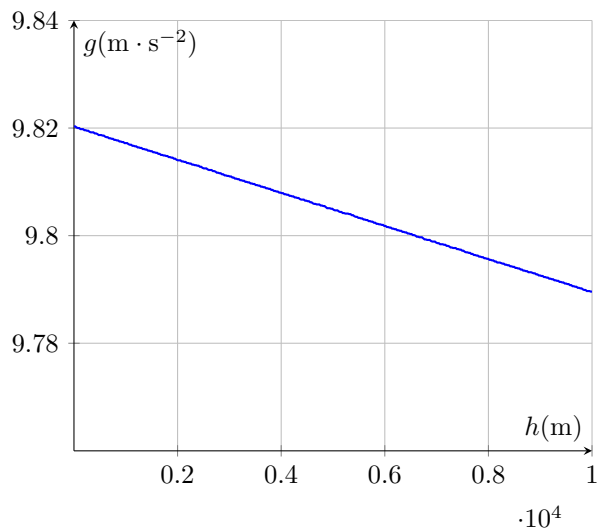
Poté dosadíme hodnoty:

$$h = \frac{677\,808 \cdot 6\,371\,000^2}{80 \cdot 6,67430 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97219 \cdot 10^{24} - 677\,808 \cdot 6\,371\,000} \approx$$

$$\approx 862,8 \text{ m}.$$

Jako dodatek je možné si vytvořit graf závislosti gravitačního zrychlení na výšce  $h$  nad mořem:

Závislost gravitačního zrychlení na výšce  $h$  nad mořem.



### Poznámka

Gravitační zrychlení v grafu pro 0 metrů nad mořem je cca  $9,82 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  místo  $9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Vzorec pro Newtonův gravitační zákon uvažuje sféricky symetrické rozložení hmoty země. V realitě hmota země sféricky symetricky rozložena není. V jádru země je běžně látka s vyšší hustotou než na povrchu země. Tento faktor způsobuje, že reálné gravitační zrychlení na povrchu země je o něco nižší než spočítaná hodnota ze vzorce. Hodnota  $9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  je hodnotou změřená.

Kvůli této nepřesnosti je i výsledná výška při počítání s proměnným gravitačním zrychlením o něco nižší, než výška při počítání s konstantním gravitačním zrychlením  $9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

## 2 Tepelná kapacita

Na jakou teplotu by energie potřebná k ohřátí vody z 10 °C na 100 °C ohřála ocel a zlato o stejné:

- a) hmotnosti,
- b) objemu.

Materiál	$\rho$ (kg · m <sup>-3</sup> )	$c$ (J · kg <sup>-1</sup> · K <sup>-1</sup> )
Voda (H <sub>2</sub> O)	1 000	4 186
Ocel	7 750	450
Zlato	19 320	129

Tabulka 1: Hustota a měrná tepelná kapacita materiálů.

### 2.1 a

Rozdíl teplot pro vodu je:

$$\Delta T_{H_2O} = 100\text{ °C} - 10\text{ °C} = 90\text{ K}.$$

Podle rovnice pro měrnou tepelnou kapacitu můžeme napsat:

$$m_{H_2O} \cdot c_{H_2O} \cdot \Delta T_{H_2O} = m_{ocel} \cdot c_{ocel} \cdot \Delta T_{ocel} = m_{zlato} \cdot c_{zlato} \cdot \Delta T_{zlato}.$$

A zároveň pro tento příklad hmotnosti jsou stejné:

$$m_{H_2O} = m_{ocel} = m_{zlato} = m.$$

Tedy:

$$m \cdot c_{H_2O} \cdot \Delta T_{H_2O} = m \cdot c_{ocel} \cdot \Delta T_{ocel} = m \cdot c_{zlato} \cdot \Delta T_{zlato}.$$

Rovnici lze vydělit hmotností  $m$  ( $m > 0$ ) a dostaneme:

$$c_{H_2O} \cdot \Delta T_{H_2O} = c_{ocel} \cdot \Delta T_{ocel} = c_{zlato} \cdot \Delta T_{zlato}.$$

Pro ocel platí:

$$\Delta T_{ocel} = \Delta T_{H_2O} \cdot \frac{c_{H_2O}}{c_{ocel}} = 90 \cdot \frac{4\,186}{450} \approx 837,2\text{ K}.$$

Pro zlato platí:

$$\Delta T_{zlato} = \Delta T_{H_2O} \cdot \frac{c_{H_2O}}{c_{zlato}} = 90 \cdot \frac{4\,186}{129} \approx 2\,920,5\text{ K}.$$

### Poznámka

Pokud bychom například takto ohřívali zlato z teploty  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , tak by se zlato mělo ohřát na teplotu  $2\,920,5\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Tato teplota je vyšší než teplota tání zlata, která je  $1\,064\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Zlato by se při této teplotě roztavilo a část energie by byla spotřebována na změnu skupenství. Tudíž výsledná teplota by byla nižší.

## 2.2 b

Podle rovnice pro měrnou tepelnou kapacitu můžeme napsat:

$$\begin{aligned} V_{H_2O} \cdot \rho_{H_2O} \cdot c_{H_2O} \cdot \Delta T_{H_2O} &= V_{ocel} \cdot \rho_{ocel} \cdot c_{ocel} \cdot \Delta T_{ocel} = \\ &= V_{zlato} \cdot \rho_{zlato} \cdot c_{zlato} \cdot \Delta T_{zlato} \end{aligned}$$

A zároveň pro tento příklad objemy jsou stejné:

$$V_{H_2O} = V_{ocel} = V_{zlato} = V.$$

Tedy:

$$\begin{aligned} V \cdot \rho_{H_2O} \cdot c_{H_2O} \cdot \Delta T_{H_2O} &= V \cdot \rho_{ocel} \cdot c_{ocel} \cdot \Delta T_{ocel} = \\ &= V \cdot \rho_{zlato} \cdot c_{zlato} \cdot \Delta T_{zlato}. \end{aligned}$$

Rovnici lze vydělit objemem  $V$  ( $V > 0$ ) a dostaneme:

$$\rho_{H_2O} \cdot c_{H_2O} \cdot \Delta T_{H_2O} = \rho_{ocel} \cdot c_{ocel} \cdot \Delta T_{ocel} = \rho_{zlato} \cdot c_{zlato} \cdot \Delta T_{zlato}.$$

Pro ocel platí:

$$\Delta T_{ocel} = \Delta T_{H_2O} \cdot \frac{\rho_{H_2O} \cdot c_{H_2O}}{\rho_{ocel} \cdot c_{ocel}} = 90 \cdot \frac{1\,000 \cdot 4\,186}{7\,750 \cdot 450} \approx 108,0\text{ K}.$$

Pro zlato platí:

$$\Delta T_{zlato} = \Delta T_{H_2O} \cdot \frac{\rho_{H_2O} \cdot c_{H_2O}}{\rho_{zlato} \cdot c_{zlato}} = 90 \cdot \frac{1\,000 \cdot 4\,186}{19\,320 \cdot 129} \approx 151,1\text{ K}.$$

### 3 Průtokový ohřívač

Mějme průtokový ohřívač vody, který ohřívá studenou vodu o teplotě 10 °C na teplotu 40 °C. Při sprchování je spotřeba vody 10 l za minutu.

- a) Jaký je výkon ohřívače?
- b) Uvažujme, že ohřívač je na jednu fázi 230 V. Bude nám stačit jistič na 16 A?

#### 3.1 a

Objem protečené vody za 1 hodinu je:

$$V = 10 \frac{\text{l}}{\text{min}} = 10 \frac{\frac{\text{m}^3}{1000}}{\frac{\text{h}}{60}} = 10 \frac{\text{m}^3}{1000} \cdot \frac{60}{\text{h}} = 0,6 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}.$$

Hmotnost protečené vody za 1 hodinu je:

$$m = V \cdot \rho = 0,6 \text{ m}^3 \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 600 \text{ kg}.$$

Množství energie za 1 hodinu potřebné k ohřátí vody je:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta T.$$

$$Q = 600 \cdot 4\,186 \cdot 30 = 75\,348\,000 \text{ J}$$

Výkon ohřívače je:

$$P = \frac{Q}{t} = \frac{75\,348\,000 \text{ J}}{1 \text{ h}} = \frac{75\,348\,000 \text{ Ws}}{3\,600 \text{ s}} = 20\,930 \text{ W} = 20,93 \text{ kW}.$$

#### 3.2 b

Výkon ohřívače je:

$$P = U_e \cdot I_e,$$

kde:

$P$  – výkon (W),

$U$  – elektrické napětí (V),

$I$  – elektrický proud (A).

Z rovnice pro výkon ohřívače můžeme vyjádřit proud:

$$I = \frac{P}{U} = \frac{20,93 \text{ kW}}{230 \text{ V}} = \frac{20\,930 \text{ W}}{230 \text{ V}} = 91 \text{ A}.$$

Jistič na 16 A tedy nestačí, jelikož proud je 91 A.



## 4 Monočlánek

Mějme monočlánek s kapacitou 2 500 mAh a napětím 1,2 V.

- a) Kolik litrů vody ohřeje z 10 °C na 100 °C?
- b) Jak vysoko vynese 80 kg člověka?

### 4.1 a

Energie monočlánu je:

$$E = 1,2 \text{ V} \cdot 2\,500 \text{ mAh} = 1,2 \text{ V} \cdot 2,5 \text{ Ah} = 3 \text{ Wh} = 3 \cdot 3\,600 \text{ J} = 10\,800 \text{ J}.$$

Množství energie potřebné k ohřátí vody je:

$$Q = V \cdot \rho \cdot c \cdot \Delta T.$$

Z rovnice pro měrnou tepelnou kapacitu můžeme vyjádřit objem:

$$\begin{aligned} m &= \frac{Q}{\rho \cdot c \cdot \Delta T} = \frac{10\,800}{1000 \cdot 4\,186 \cdot 90} = \\ &= 2,87 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 = 2,87 \cdot 10^{-2} \text{ l} = 28,7 \text{ ml}. \end{aligned}$$

### 4.2 b

Ze vzorce pro potenciální energii vyjádříme výšku:

$$E_p = m \cdot g \cdot \Delta h \Rightarrow \Delta h = \frac{E_p}{m \cdot g} = \frac{10\,800}{80 \cdot 9,81} \approx 13,76 \text{ m}.$$