Cvičení 2 - Sdílení tepla

Elektroenergetika 3

Petr Jílek

2024

Obsah

1 🧱 Zeď 🌶️🌶️

1.1 Fourierova-Kirchhoffova rovnice 🌶️🌶️🌶️

Pro zeď o tloušťce d budeme uvažovat následující zjednodušející předpoklady:

- $\lambda =$ konstanta,
- $\vec{v} = 0$,
- $Q_v = 0$,
- $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$,
- T = T(x) - teplota závislá pouze na ose x.

Poté Fourierova-Kirchhoffova rovnice bude mít tvar:

$$0 = \nabla \cdot \left(\lambda \cdot \vec{\nabla} T \right) = \lambda \cdot \frac{d^2T}{dx^2}.$$

Rovnici můžeme vydělit λ ($\lambda > 0$) a získáme:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0.$$

Tuto rovnici můžeme řešit dvojí integrací. První integrace bude vypadat následovně:

$$\frac{dT}{dx} = \int 0 \cdot dx = 0 + c_1 = c_1.$$

Druhá integrace bude vypadat následovně:

$$T(x) = \int c_1 \cdot dx = c_1 \cdot x + c_2.$$

Obecné řešení bude tedy:

$$T(x) = c_1 \cdot x + c_2.$$

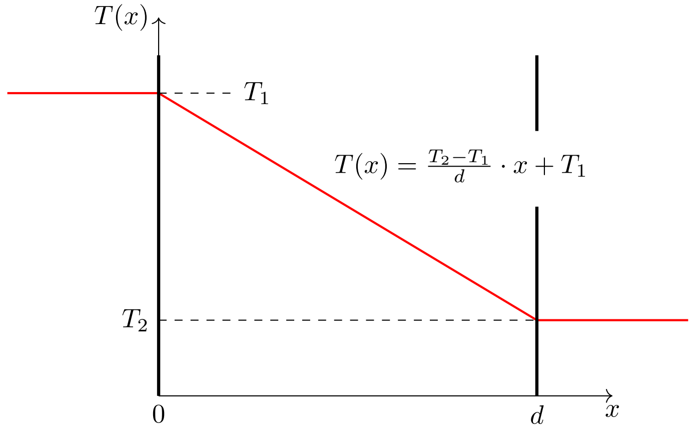
S okrajovými podmínkami:

- $T(0) = T_1$:
$$T_1 = T(0) = c_1 \cdot 0 + c_2 = c_2 \Rightarrow c_2 = T_1.$$
- $T(d) = T_2$:
$$T_2 = T(d) = c_1 \cdot d + c_2 \Rightarrow c_1 = \frac{T_2 - c_2}{d} = \frac{T_2 - T_1}{d}.$$

Řešení je tedy:

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{d} \cdot x + T_1.$$

Tuto situaci můžeme znázornit následujícím obrázkem:



1.2 Fourieruv zákon 🌶️🌶️🌶️

Nyní dosadíme řešení z předchozího příkladu do Fourierova zákona, kde za gradient teploty dosadíme derivaci teploty podle osy x, čímž získáme měrný tepelný tok q_x:

$$\dot{q}_x = -\lambda \frac{dT(x)}{dx} = -\lambda \frac{d}{dx} \left(\frac{T_2 - T_1}{d} \cdot x + T_1 \right) = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{d} = \lambda \frac{T_1 - T_2}{d} = \frac{\Delta T}{\frac{d}{\lambda}}.$$

1.3 Tepelný odpor

Dolní výraz z předchozí sekce $\frac{d}{\lambda}$ je tepelný odpor R_ϑ s jednotkou m^2 K W^{-1}. Je tedy definován jako:

$$R_\vartheta = \frac{d}{\lambda}.$$

Měrný tepelný tok q_x má jednotku W m^{-2}. Tepelný tok $\dot{Q}_x$ s jednotkou W dostaneme vynásobením měrného tepelného toku plochou průřezu S:

$$\dot{Q}_x = \dot{q}_x \cdot S = \lambda \frac{T_1 - T_2}{d} \cdot S = \lambda \frac{\Delta T}{d} \cdot S = \frac{\Delta T}{\frac{d}{\lambda \cdot S}}.$$

Dolní výraz $\frac{d}{\lambda \cdot S}$ je absolutní tepelný odpor $R_{\vartheta A}$ s jednotkou K W^{-1}. Je tedy definován jako:

$$R_{\vartheta A} = \frac{d}{\lambda \cdot S} = \frac{R_\vartheta}{S}.$$

Poznámka

Výpočet tepelného odporu je analogický jako výpočet elektrického odporu. Elektrický odpor R_e má jednotku Ω a je definován jako:

$$R_e = \frac{d}{\gamma \cdot S},$$

kde:
d – délka vodiče (m),
γ – měrná elektrická vodivost ($m^{-1}\ \Omega^{-1}$),
S – průřez vodiče (m^2).

Analogie jsou:

- $R_{\vartheta A}$ – absolutní tepelný odpor ($K\ W^{-1}$) $\rightarrow$ R_e – elektrický odpor (Ω),
- d – tloušťka stěny (m) $\rightarrow$ d – délka vodiče (m),
- λ – tepelná vodivost ($W\ m^{-1}\ K^{-1}$) $\rightarrow$ γ – měrná elektrická vodivost ($m^{-1}\ \Omega^{-1}$),
- S – plocha průřezu (m^2) $\rightarrow$ S – průřez vodiče (m2).

Výpočet tepelného toku je analogický s Ohmovým zákonem:

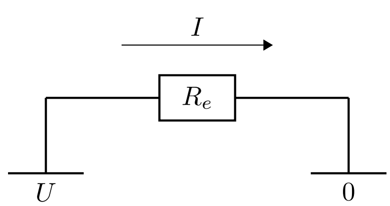
$$I = \frac{U}{R_e},$$

kde:
I – proud (A),
U – napětí (V),
R_e – elektrický odpor (Ω).

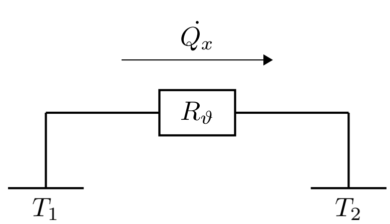
Analogie jsou:

- $\dot{Q}_x$ – tepelný tok (W) $\rightarrow$ I – proud (A),
- ΔT – rozdíl teplot (K) $\rightarrow$ U – napětí (V),
- $R_{\vartheta A}$ – absolutní tepelný odpor ($K\ W^{-1}$) $\rightarrow$ R_e – elektrický odpor (Ω).

Elektrické schéma můžeme znázornit následujícím obrázkem:



Analogicky můžeme vytvořit tepelné schéma:



1.4 Součinitel prostupu tepla

Součinitel prostupu tepla U_ϑ má jednotku W m^{-2} K^{-1}. Je definován jako inverzní hodnota tepelného odporu:

$$U_\vartheta = \frac{1}{R_\vartheta} = \frac{\lambda}{d}.$$

Měrný tepelný tok q_x se poté může zapsat jako:

$$\dot{q_x} = U_\vartheta \cdot \Delta T.$$

Absolutní součinitel prostupu tepla $U_{\vartheta A}$ má jednotku K W^{-1}. Je definován jako inverzní hodnota absolutního tepelného odporu:

$$U_{\vartheta A} = \frac{1}{R_{\vartheta A}} = \frac{\lambda \cdot S}{d} = U_\vartheta \cdot S.$$

Tepelný tok $\dot{Q}_x$ se poté může zapsat jako:

$$\dot{Q}_x = U_\vartheta \cdot \Delta T.$$

1.5 Číselný příklad

Teplota na začátku zdi je $T_1 = 20$ °C, teplota na konci zdi je $T_2 = -10$ °C. Zeď má tloušťku $d_{cihla} = 45$ cm a je tvořená obyčejnou cihlou s tepelná vodivostí $\lambda_{cihla} = 0,8$ W m^{-1} K^{-1}. Plocha průřezu zdi je $S = 20$ m^2.

a) Vypočítejte tepelný odpor R_ϑ, absolutní tepelný odpor $R_{\vartheta A}$, součinitel prostupu tepla U_ϑ, absolutní součinitel prostupu tepla $U_{\vartheta A}$, měrný tepelný tok $\dot{q_x}$ a tepelný tok $\dot{Q}_x$.

b) Uvažujte polystyrénovou izolaci s tepelnou vodivostí $\lambda_{izol} = 0,04$ W m^{-1} K^{-1}. Vypočítejte tloušťku izolace d_{izol}, která zajistí stejný měrný tepelný odpor (tím také zajistí stejný měrný tepelný tok).

1.5.1 a

Tepelný odpor R_ϑ vypočteme jako:

$$R_\vartheta = \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}} = \frac{0,45 \text{ m}}{0,8 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}} = 0,5625 \text{ m}^2 \text{ K W}^{-1}.$$

Absolutní tepelný odpor $R_{\vartheta A}$ vypočteme jako:

$$R_{\vartheta A} = \frac{R_\vartheta}{S} = \frac{0,5625}{20} \approx 0,028 \text{ K W}^{-1}.$$

Součinitel prostupu tepla U_ϑ vypočteme jako:

$$U_\vartheta = \frac{1}{R_\vartheta} = \frac{1}{0,5625} \approx 1,778 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}.$$

Absolutní součinitel prostupu tepla $U_{\vartheta A}$ vypočteme jako:

$$U_{\vartheta A} = \frac{1}{R_{\vartheta A}} = \frac{1}{0,028} \approx 35,714 \text{ K W}^{-1}.$$

Měrný tepelný tok $\dot{q_x}$ vypočteme jako:

$$\dot{q_x} = \frac{\Delta T}{R_\vartheta} = \frac{T_1 - T_2}{R_\vartheta} = \frac{20 - (-10)}{0,5625} = \frac{30}{0,5625} \approx 53,33 \text{ W m}^{-2}.$$

Tepelný tok $\dot{Q}_x$ vypočteme jako:

$$\dot{Q}_x = \dot{q_x} \cdot S = 53,33\text{W m}^{-2} \cdot 20 \text{ m}^2 = 1066,6 \text{ W} \approx 1 \text{ kW}.$$

1.5.2 b

Aby se měrné tepelné odpory rovnaly, musí platit:

$$R_{\vartheta,cihla} = R_{\vartheta,izol}.$$

$$\frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}} = \frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}}.$$

Tloušťku izolace d_{izol} vypočteme jako:

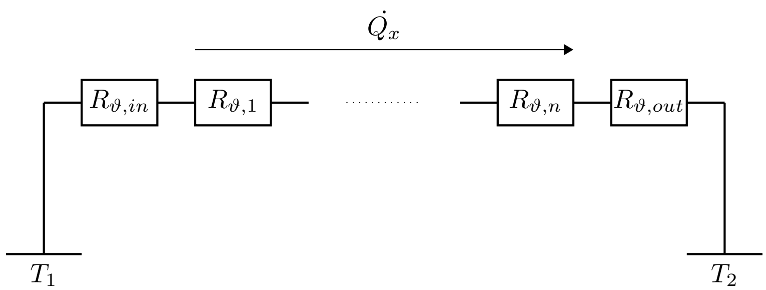
$$d_{izol} = \frac{d_{cihla} \cdot \lambda_{izol}}{\lambda_{cihla}} = \frac{0,45 \text{ m} \cdot 0,04 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}}{0,8 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}} = 0,0225 \text{ m} = 2,25 \text{ cm}.$$

2 🏗️ Skládaná zeď 🌶️🌶️

2.1 Tepelné schéma

U skládané zdi máme několik vrstev zdi s různou tepelnou vodivostí a tloušťkou. Navíc počítáme se součinitely prostupu tepla na začátku (ze vnitř do zdi) a na konci (ze zdi ven).

Mějme tedy n vrstev zdi, kde i-tá vrstva má tepelnou vodivost λ_i a tloušťku d_i. Mějme součinitel prostupu tepla na začátku $U_{\vartheta,in}$ a na konci $U_{\vartheta,out}$. Potom můžeme pro tuto situaci nakreslit následující tepelné schéma:



Tepelný odpor $R_{\vartheta,in}$ vypočteme jako:

$$R_{\vartheta,in} = \frac{1}{U_{\vartheta,in}}.$$

Tepelný odpor $R_{\vartheta,out}$ vypočteme jako:

$$R_{\vartheta,out} = \frac{1}{U_{\vartheta,out}}.$$

Tepelný odpor $R_{\vartheta,i}$ vypočteme jako:

$$R_{\vartheta,i} = \frac{d_i}{\lambda_i}.$$

Celkový tepelný odpor $R_{\vartheta,\Sigma}$ zdi s přechody vypočteme jako:

$$R_{\vartheta,\Sigma} = R_{\vartheta,in} + \sum_{i=1}^{n} R_{\vartheta,i} + R_{\vartheta,out}.$$

Celkový absolutní tepelný odpor $R_{\vartheta A,\Sigma}$ zdi s přechody vypočteme jako:

$$R_{\vartheta A,\Sigma} = \frac{R_{\vartheta,\Sigma}}{S}.$$

Součinitel prostupu tepla $U_{\vartheta,\Sigma}$ zdi s přechody vypočteme jako:

$$U_{\vartheta,\Sigma} = \frac{1}{R_{\vartheta,\Sigma}} = \frac{1}{R_{\vartheta,in} + \sum_{i=1}^{n} R_{\vartheta,i} + R_{\vartheta,out}} = \frac{1}{\frac{1}{U_{\vartheta,in}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{U_{\vartheta,out}}} =$$

$$= \left(\frac{1}{U_{\vartheta,in}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{U_{\vartheta,out}} \right)^{-1}$$

Absolutní součinitel prostupu tepla $U_{\vartheta A,\Sigma}$ zdi s přechody vypočteme jako:

$$U_{\vartheta A,\Sigma} = U_{\vartheta,\Sigma} \cdot S.$$

Měrný tepelný tok $\dot{q_x}$ zdi s přechody vypočteme pomocí měrných odporů jako:

$$\dot{q_x} = \frac{\Delta T}{R_{\vartheta,\Sigma}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\vartheta,\Sigma}}.$$

Pomocí součinitele prostupu tepla $U_{\vartheta,\Sigma}$ můžeme vypočítat měrný tepelný tok $\dot{q_x}$ jako:

$$\dot{q_x} = U_{\vartheta,\Sigma} \cdot \Delta T = U_{\vartheta,\Sigma} \cdot (T_1 - T_2).$$

Celkový tepelný tok $\dot{Q}_x$ zdi s přechody vypočteme jako:

$$\dot{Q}_x = \dot{q_x} \cdot S.$$

2.2 Číselný příklad

Teplota na začátku zdi je $T_1 = 20$ °C, teplota na konci zdi je $T_2 = -10$ °C. Plocha průřezu zdi je $S = 20$ m^2. Uvažujme dvouvrstvou zeď složenou z cihly a polystyrénu. Parametry cihly jsou:

- $\lambda_{cihla} = 0,8$ W m^{-1} K^{-1},
- $d_{cihla} = 45$ cm.

Parametry polystyrénu jsou:

- $\lambda_{izol} = 0,04$ W m^{-1} K^{-1},
- $d_{izol} = 5$ cm.

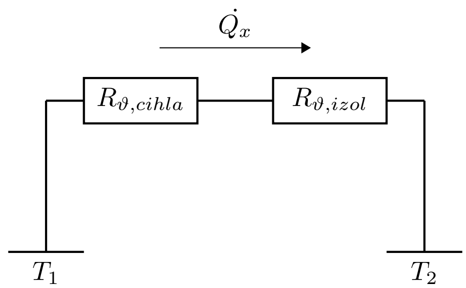
Uvažujte, že izolace je na konci zdi (z venčí). Zanedbejte měrné součinitele prostupu tepla na začátku a na konci zdi.

a) Nakreslete tepelné schéma a vypočítejte celkový tepelný odpor $R_{\vartheta,\Sigma}$, celkový absolutní tepelný odpor $R_{\vartheta A,\Sigma}$, součinitel prostupu tepla $U_{\vartheta,\Sigma}$, absolutní součinitel prostupu tepla $U_{\vartheta A,\Sigma}$, měrný tepelný tok $\dot{q_x}$ a tepelný tok $\dot{Q}_x$.

b) Nakreslete graf závislosti teploty na ose x pro případ izolace z venčí a pro případ izolace zevnitř. Diskutujte výhody a nevýhody obou případů.

2.2.1 a

Tepelné schéma bude vypadat následovně:



Tepelný odpor cihly $R_{\vartheta,cihla}$ vypočteme jako:

$$R_{\vartheta,cihla} = \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}} = \frac{0,45 \text{ m}}{0,8 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}} = 0,5625 \text{ m}^2 \text{ K W}^{-1}.$$

Tepelný odpor izolace $R_{\vartheta,izol}$ vypočteme jako:

$$R_{\vartheta,izol} = \frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} = \frac{0,05 \text{ m}}{0,04 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}} = 1,25 \text{ m}^2 \text{ K W}^{-1}.$$

Absolutní tepelný odpor cihly $R_{\vartheta A,cihla}$ vypočteme jako:

$$R_{\vartheta A,cihla} = \frac{R_{\vartheta,cihla}}{S} = \frac{0,5625}{20} \approx 0,028 \text{ K W}^{-1}.$$

Absolutní tepelný odpor izolace $R_{\vartheta A,izol}$ vypočteme jako:

$$R_{\vartheta A,izol} = \frac{R_{\vartheta,izol}}{S} = \frac{1,25}{20} = 0,063 \text{ K W}^{-1}.$$

Celkový tepelný odpor $R_{\vartheta,\Sigma}$ vypočteme jako:

$$R_{\vartheta,\Sigma} = R_{\vartheta,cihla} + R_{\vartheta,izol} = 0,5625 + 1,25 = 1,8125 \text{ m}^2 \text{ K W}^{-1}.$$

Celkový absolutní tepelný odpor $R_{\vartheta A,\Sigma}$ vypočteme jako:

$$R_{\vartheta A,\Sigma} = R_{\vartheta A,cihla} + R_{\vartheta A,izol} = 0,028 + 0,063 = 0,091 \text{ K W}^{-1}.$$

Součinitel prostupu tepla $U_{\vartheta,\Sigma}$ vypočteme jako:

$$U_{\vartheta,\Sigma} = \frac{1}{R_{\vartheta,\Sigma}} = \frac{1}{1,8125} \approx 0,5517 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}.$$

Absolutní součinitel prostupu tepla $U_{\vartheta A,\Sigma}$ vypočteme jako:

$$U_{\vartheta A,\Sigma} = U_{\vartheta,\Sigma} \cdot S = 0,5517 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1} \cdot 20 \text{ m}^2 = 11,034 \text{ K W}^{-1}.$$

Měrný tepelný tok $\dot{q_x}$ vypočteme jako:

$$\dot{q_x} = \frac{\Delta T}{R_{\vartheta,\Sigma}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\vartheta,\Sigma}} = \frac{20-(-10)}{1,8125} = \frac{30}{1,8125} \approx 16,55 \text{ W m}^{-2}.$$

Tepelný tok $\dot{Q}_x$ vypočteme jako:

$$\dot{Q}_x = \dot{q_x} \cdot S = 16,55\text{W m}^{-2} \cdot 20 \text{ m}^2 = 331 \text{ W} = 0,331 \text{ kW}.$$

2.2.2 b

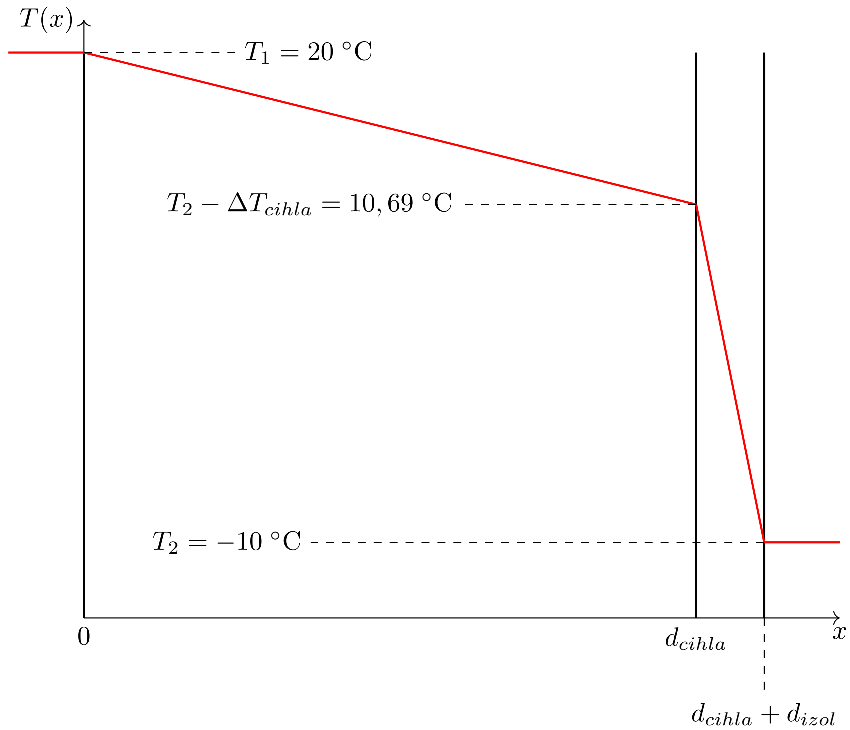
Změnu teploty v cihle vypočteme jako:

$$\Delta T_{cihla} = \dot{q_x} \cdot R_{\vartheta,cihla} = 16,55 \text{ W m}^{-2} \cdot 0,5625 \text{ m}^2 \text{ K W}^{-1} = 9,31 \text{ K}.$$

Změnu teploty v izolaci vypočteme jako:

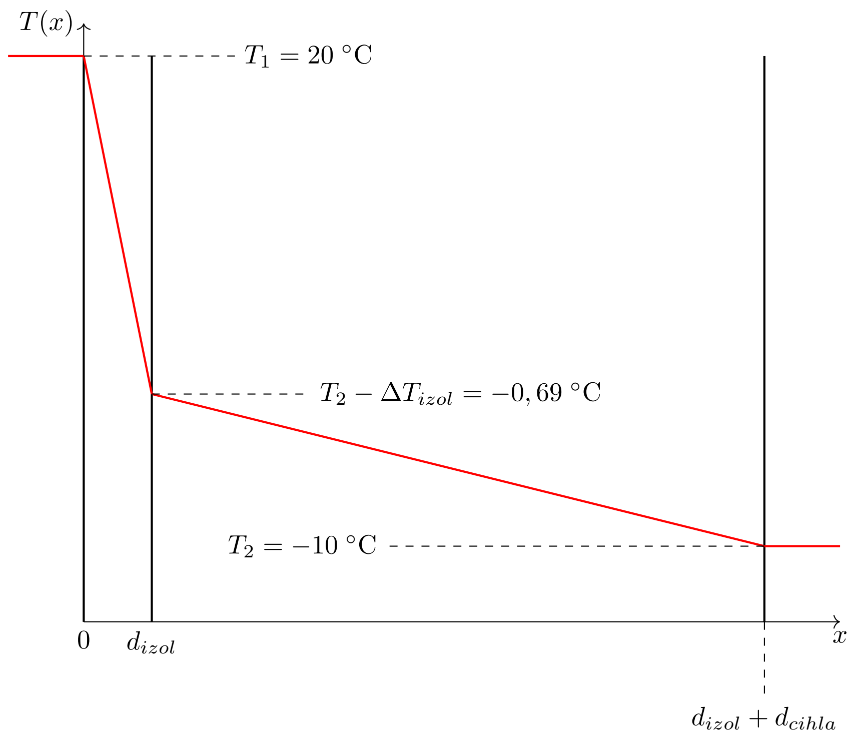
$$\Delta T_{izol} = \dot{q_x} \cdot R_{\vartheta,izol} = 16,55 \text{ W m}^{-2} \cdot 1,25 \text{ m}^2 \text{ K W}^{-1} = 20,69 \text{ K}.$$

Obrázek pro případ izolace z venčí bude vypadat následovně:



Výhody toho položení je, že pokud je zeď zevnitř, tak funguje jako akumulátor tepla. Je to vhodné pro dlouhodobé vytápění. Nevýhodou je, že pokud se například jedná o chalupu, kam se jezdí pouze na víkend, tak nějákou dobu trvá, než se teplo naakumuluje a v místnoti bude teplo. Tento typ izolace se používá časteji.

Obrázek pro případ izolace zevnitř bude vypadat následovně:



Toto položení se rychleji vytopí, ale také se rychleji ochladí, jelikož izolace nefunguje jako dobrý akumulátor tepla. Pokud například zasvítí slunce, tak se místnost rychleji zahřeje. Je zde riziko kondenzace a tvoření vlhkosti a plísní.

3 📜 PENB 🌶️🌶️

Mějme dům s plochou střechou o parametrech:

- plocha střechy $S_{strecha} = 100$ m^2,
- součinitel prostupu tepla střechy $U_{\vartheta,strecha} = 0,3$ W m^{-2} K^{-1},
- plocha podlahy $S_{podlaha} = 100$ m^2,
- měrný součinitel prostupu tepla podlahy $U_{\vartheta,podlaha} = 0,8$ W m^{-2} K^{-1},
- plocha obvodových stěn $S_{zed} = 4 \cdot 10 \cdot 3$ m^2 (4 stěny o výšce 2 metry a délce 10 metrů),
- obvodová stěna je tvořena cihlou s tepelnou vodivostí $\lambda_{cihla} = 0,8$ W m^{-1} K^{-1} a tloušťkou $d_{cihla} = 45$ cm.

Zanedbejte ztráty tepla na začátku a na konci zdi a ztráty tepla na oknech a dveřích.

a) Vypočítejte průměrný měrný součinitel prostupu tepla $U_{\vartheta,avg}$ pro celý dům.

b) Vypočítejte jak silnou izolaci d_{izol} s tepelnou vodivostí $\lambda_{izol} = 0,04$ W m^{-1} K^{-1} musíte použít, aby průměrný součinitel prostupu tepla $U^*_{\vartheta,avg}$ byl $0,5$ W m^{-2} K^{-1}.

3.0.1 a

Plochu obvodových stěn S_{zed} vypočteme jako:

$$S_{zed} = 4 \cdot 10 \cdot 3 = 120 \text{ m}^2.$$

Celkovou plochu S_Σ vypočteme jako:

$$S_\Sigma = S_{strecha} + S_{podlaha} + S_{zed} = 100 + 100 + 120 = 320 \text{ m}^2.$$

Součinitel prostupu tepla zdi $U_{\vartheta,cihla}$ vypočteme jako:

$$U_{\vartheta,cihla} = \frac{\lambda_{cihla}}{d_{cihla}} = \frac{0,8 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}}{0,45 \text{ m}} = 1,778 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}.$$

Průměrný součinitel prostupu tepla $U_{\vartheta,avg}$ vypočteme jako:

$$U_{\vartheta,avg} = \frac{1}{S_\Sigma} \cdot (U_{\vartheta,strecha} \cdot S_{strecha} + U_{\vartheta,podlaha} \cdot S_{podlaha} + U_{\vartheta,cihla} \cdot S_{zed}) =$$

$$= \frac{1}{320} \cdot (0,3 \cdot 100 + 0,8 \cdot 100 + 1,778 \cdot 120) = \frac{1}{320} \cdot (30 + 80 + 213,36) =$$

$$\frac{323,36}{320} \approx 1,01 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}.$$

3.0.2 b

Součinitel prostupu tepla zdi s izolací $U_{\vartheta,zed}$ vypočteme jako:

$$U_{\vartheta,zed} = \left(\frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} + \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}}\right)^{-1}$$

Průměrný součinitel prostupu tepla $U^*_{\vartheta,avg}$ vypočteme jako:

$$U^*_{\vartheta,avg} = \frac{1}{S_\Sigma} \cdot (U_{\vartheta,strecha} \cdot S_{strecha} + U_{\vartheta,podlaha} \cdot S_{podlaha} + U_{\vartheta,zed} \cdot S_{zed}) =$$

$$= \frac{1}{S_\Sigma} \cdot \left(U_{\vartheta,strecha} \cdot S_{strecha} + U_{\vartheta,podlaha} \cdot S_{podlaha} + \left(\frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} + \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}}\right)^{-1} \cdot S_{zed}\right)$$

Nyní je třeba vyřešit rovnici pro d_{izol}:

$$U^*_{\vartheta,avg} = \frac{1}{S_\Sigma} \cdot \left(U_{\vartheta,strecha} \cdot S_{strecha} + U_{\vartheta,podlaha} \cdot S_{podlaha} + \left(\frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} + \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}}\right)^{-1} \cdot S_{zed}\right)$$

$$U^*_{\vartheta,avg} \cdot S_\Sigma = \left(U_{\vartheta,strecha} \cdot S_{strecha} + U_{\vartheta,podlaha} \cdot S_{podlaha} + \left(\frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} + \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}}\right)^{-1} \cdot S_{zed}\right)$$

$$U^*_{\vartheta,avg} \cdot S_\Sigma - U_{\vartheta,strecha} \cdot S_{strecha} - U_{\vartheta,podlaha} \cdot S_{podlaha} = \left(\frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} + \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}}\right)^{-1} \cdot S_{zed}$$

$$\left(\frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} + \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}}\right)^{-1} = \frac{U^*_{\vartheta,avg} \cdot S_\Sigma - U_{\vartheta,strecha} \cdot S_{strecha} - u_{podlaha} \cdot S_{podlaha}}{S_{zed}}$$

$$\frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} + \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}} = \left(\frac{U^*_{\vartheta,avg} \cdot S_\Sigma - U_{\vartheta,strecha} \cdot S_{strecha} - U_{\vartheta,podlaha} \cdot S_{podlaha}}{S_{zed}}\right)^{-1}$$

$$\frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} = \left(\frac{U^*_{\vartheta,avg} \cdot S_\Sigma - U_{\vartheta,strecha} \cdot S_{strecha} - U_{\vartheta,podlaha} \cdot S_{podlaha}}{S_{zed}}\right)^{-1} - \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}}$$

$$d_{izol} = \lambda_{izol} \cdot \left(\left(\frac{U^*_{\vartheta,avg} \cdot S_\Sigma - U_{\vartheta,strecha} \cdot S_{strecha} - U_{\vartheta,podlaha} \cdot S_{podlaha}}{S_{zed}}\right)^{-1} - \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}}\right)$$

Nyní můžeme dosadit a vypočítat:

$$d_{izol} = 0,04 \cdot \left(\left(\frac{0,5 \cdot 320 - 0,3 \cdot 100 - 0,8 \cdot 100}{120}\right)^{-1} - \frac{0,45}{0,8}\right) =$$

$$= 0,04 \cdot \left(\left(\frac{160 - 30 - 80}{120}\right)^{-1} - \frac{0,45}{0,8}\right) =$$

$$= 0,04 \cdot \left(\left(\frac{50}{120}\right)^{-1} - \frac{0,45}{0,8}\right) = 0,04 \cdot (2,4 - 0,5625) =$$

$$0,04 \cdot 1,8375 = 0,0735 \text{ m} = 7,35 \text{ cm}.$$

4 ❄️ Topná sezóna 🌶️🌶️🌶️

Průměrná venkonví teplota v topné sezóně je $\overline{T}_{out} = 5$ °C. Vnitřní teplota je $T_{in} = 20$ °C. Doba topné sezóny je 200 dní. Celková plocha je $S = 300$ m^2. Součinitel prostupu tepla je $U_\vartheta = 0,5$ W m^{-2} K^{-1}. Jaký množství tepla projde stěnami za celou topnou sezónu?

4.1 Řešení

Celkové množství tepla, které projde stěnami za celou topnou sezónu Q vypočteme jako:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} \dot{Q} \cdot dt,$$

kde:
$\dot{Q}$ je tepelný tok (W),
t_1 je začátek topné sezóny (h),
t_2 je konec topné sezóny (h).

Integrál můžeme rozepsat jako:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} U_\vartheta \cdot S \cdot (T_{in} - T_{out}(t)) \cdot dt = U_\vartheta \cdot S \cdot \int_{t_1}^{t_2} (T_{in} - T_{out}(t)) \cdot dt =$$

$$= U_\vartheta \cdot S \cdot T_{in} \cdot \int_{t_1}^{t_2} dt - U_\vartheta \cdot S \cdot \int_{t_1}^{t_2} T_{out}(t) \cdot dt =$$

$$= U_\vartheta \cdot S \cdot T_{in} \cdot (t_2 - t_1) - U_\vartheta \cdot S \cdot \int_{t_1}^{t_2} T_{out}(t) \cdot dt.$$

Nyní uděláme odbočku, kde vyjádříme průměrnou venkovní teplotu $\overline{T}_{out}$ jako:

$$\overline{T}_{out} = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} T_{out}(t) \cdot dt.$$

Vyjádříme daný integrál:

$$\int_{t_1}^{t_2} T_{out}(t) \cdot dt = \overline{T}_{out} \cdot (t_2 - t_1).$$

Dosadíme zpět do původní rovnice:

$$Q = U_\vartheta \cdot S \cdot T_{in} \cdot (t_2 - t_1) - U_\vartheta \cdot S \cdot \overline{T}_{out} \cdot (t_2 - t_1) =$$

$$= U_\vartheta \cdot S \cdot (T_{in} - \overline{T}_{out}) \cdot (t_2 - t_1).$$

Nyní můžeme dosadit a vypočítat:

$$Q = 0,5 \cdot 300 \cdot (20 - 5) \cdot (200 \cdot 24 \cdot 3\,600 - 0) = 0,5 \cdot 300 \cdot 15 \cdot 200 \cdot 24 \cdot 3\,600 =$$

$$= 38,9 \text{ GJ}.$$

5 🏭 Cihlová pec 🌶️🌶️🌶️🌶️

U cihlové pece je vysoký rozdíl teplot, tudíž tepelnou vodivost je třeba uvažovat jako proměnnou. Tepelnou vodivost λ můžeme zapsat jako:

$$\lambda(x) = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot T,$$

Pro zeď o tloušťce d budeme uvažovat následující zjednodušející předpoklady:

- $\lambda(x) = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot T$,
- $\vec{v} = 0$,
- $Q_v = 0$,
- $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$,
- T = T(x) - teplota závislá pouze na ose x.

Poté Fourierova-Kirchhoffova rovnice bude mít tvar:

$$0 = \frac{d}{dx}\left(\lambda(T) \cdot \frac{dT}{dx}\right).$$

Fourieruv zákon pro tepelný tok bude mít tvar:

$$\dot{q}_x = -\lambda(T) \cdot \frac{dT}{dx}.$$

Vynásobme rovnici mínus jedna:

$$-\dot{q}_x = \lambda(T) \cdot \frac{dT}{dx}.$$

Pokud dosadíme do Fourierova-Kirchhoffovy rovnice, dostaneme:

$$0 = \frac{d}{dx}\left(-\dot{q}_x\right).$$

Z toho vidíme, že měrný tepelný tok $\dot{q}_x$ je konstantní a nezávisí na poloze x. Můžeme tedy rozepsat Fourierův zákon jako:

$$-\dot{q}_x = (\lambda_0 + \lambda_1 \cdot T) \cdot \frac{dT}{dx}.$$

Můžeme řešit tuto diferenciální rovnici separací proměnných:

$$-\dot{q}_x \cdot dx = (\lambda_0 + \lambda_1 \cdot T) \cdot dT.$$

Nyní meze budou jak pro x, tak pro T:

- $x = 0 \Rightarrow T = T_1$,

- $x = d \Rightarrow T = T_2$.

Rovnici můžeme integrovat:

$$-\int_0^d \dot{q_x} \cdot dx = \int_{T_1}^{T_2} (\lambda_0 + \lambda_1 \cdot T) \cdot dT$$

$$-\dot{q_x}\, [x]_0^d = \lambda_0\, [T]_{T_1}^{T_2} + \frac{\lambda_1}{2}\, \left[T^2\right]_{T_1}^{T_2}$$

$$-\dot{q_x} \cdot d = \lambda_0 \cdot (T_2 - T_1) + \frac{\lambda_1}{2} \cdot (T_2^2 - T_1^2)$$

$$-\dot{q_x} \cdot d = \lambda_0 \cdot (T_2 - T_1) + \frac{\lambda_1}{2} \cdot (T_2 - T_1) \cdot (T_2 + T_1)$$

$$-\dot{q_x} \cdot d = (T_2 - T_1) \cdot \left(\lambda_0 + \frac{\lambda_1}{2} \cdot (T_2 + T_1)\right).$$

Nyní odvoďme střední hodnotu tepelné vodivosti $\overline{\lambda}$:

$$\overline{\lambda} = \frac{1}{T_2 - T_1} \cdot \int_{T_1}^{T_2} \lambda(T) \cdot dT = \frac{1}{T_2 - T_1} \cdot \int_{T_1}^{T_2} (\lambda_0 + \lambda_1 \cdot T) \cdot dT$$

$$= \frac{1}{T_2 - T_1} \cdot \left[\lambda_0 \cdot T + \frac{\lambda_1}{2} \cdot T^2\right]_{T_1}^{T_2} = \frac{1}{T_2 - T_1} \cdot \left(\lambda_0 \cdot (T_2 - T_1) + \frac{\lambda_1}{2} \cdot (T_2^2 - T_1^2)\right) =$$

$$= \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{2} \cdot (T_2 + T_1).$$

Nyní můžeme videt, že člen v závorce u vyřešené diferenciální rovnice je roven střední hodnotě tepelné vodivosti $\overline{\lambda}$:

$$-\dot{q_x} \cdot d = (T_2 - T_1) \cdot \overline{\lambda}.$$

Nyní můžeme odvodit vztah pro měrný tepelný tok $\dot{q_x}$:

$$\dot{q_x} = \frac{T_1 - T_2}{d} \cdot \overline{\lambda}.$$

6 ☀️ Sálání (radiace) 🌶️🌶️

6.1 Sálavá clona

6.2 Destička ve vesmíru