Cvičení 5 - Aplikace

Elektroenergetika 3

Petr Jílek

2024

Obsah

Úprava značení

- Elektrické napětí: $U_e \rightarrow U$ (V – volt)
- Elektrická proudová hustota: $J_e \rightarrow J$ ($\mathrm{A \cdot m^{-2}}$ – ampér na metr čtvereční)
- Intenzita elektrického pole: $E_e \rightarrow E$ ($\mathrm{V \cdot m^{-1}}$ – volt na metr)

1 ❄️ Topná sezóna 🌶️🌶️🌶️

Průměrná venkonví teplota v topné sezóně je $\overline{T}_{out} = 5$ °C. Vnitřní teplota je $T_{in} = 20$ °C. Doba topné sezóny je 200 dní. Celková plocha je $S = 300$ m^2. Součinitel prostupu tepla je $U_\vartheta = 0,5$ W$\cdot$m$^{-2}\cdot$K^{-1}. Jaký množství tepla projde stěnami za celou topnou sezónu?

1.1 Řešení

Celkové množství tepla, které projde stěnami za celou topnou sezónu Q vypočteme jako:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} \dot{Q} \cdot dt,$$

kde:
$\dot{Q}$ je tepelný tok (W),
t_1 je začátek topné sezóny (h),
t_2 je konec topné sezóny (h).

Integrál můžeme rozepsat jako:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} U_\vartheta \cdot S \cdot (T_{in} - T_{out}(t)) \cdot dt = U_\vartheta \cdot S \cdot \int_{t_1}^{t_2} (T_{in} - T_{out}(t)) \cdot dt =$$

$$= U_\vartheta \cdot S \cdot T_{in} \cdot \int_{t_1}^{t_2} dt - U_\vartheta \cdot S \cdot \int_{t_1}^{t_2} T_{out}(t) \cdot dt =$$

$$= U_\vartheta \cdot S \cdot T_{in} \cdot (t_2 - t_1) - U_\vartheta \cdot S \cdot \int_{t_1}^{t_2} T_{out}(t) \cdot dt.$$

Nyní uděláme odbočku, kde vyjádříme průměrnou venkovní teplotu $\overline{T}_{out}$ jako:

$$\overline{T}_{out} = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} T_{out}(t) \cdot dt.$$

Vyjádříme daný integrál:

$$\int_{t_1}^{t_2} T_{out}(t) \cdot dt = \overline{T}_{out} \cdot (t_2 - t_1).$$

Dosadíme zpět do původní rovnice:

$$Q = U_\vartheta \cdot S \cdot T_{in} \cdot (t_2 - t_1) - U_\vartheta \cdot S \cdot \overline{T}_{out} \cdot (t_2 - t_1) =$$

$$= U_\vartheta \cdot S \cdot (T_{in} - \overline{T}_{out}) \cdot (t_2 - t_1).$$

Nyní můžeme dosadit a vypočítat:

$$Q = 0,5 \cdot 300 \cdot (20 - 5) \cdot (200 \cdot 24 \cdot 3\,600 - 0) =$$

$$= 0,5 \cdot 300 \cdot 15 \cdot 200 \cdot 24 \cdot 3\,600 = 38,9 \text{ GJ}.$$

2 🏭 Cihlová pec 🌶️🌶️🌶️

U cihlové pece je vysoký rozdíl teplot, tudíž tepelnou vodivost je třeba uvažovat jako proměnnou. Tepelnou vodivost λ můžeme zapsat jako:

$$\lambda(x) = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot T,$$

Pro zeď o tloušťce d budeme uvažovat následující zjednodušející předpoklady:

- $\frac{\partial T}{\partial t} = 0,$
- $\vec{v} = 0,$
- $\dot{Q}_V = 0,$
- $\lambda(x) = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot T,$
- $T = T(x)$ - teplota závislá pouze na ose x.

Poté Fourierova-Kirchhoffova rovnice bude mít tvar:

$$0 = \frac{d}{dx}\left(\lambda(T) \cdot \frac{dT}{dx}\right).$$

Fourieruv zákon pro tepelný tok bude mít tvar:

$$\dot{q} = -\lambda(T) \cdot \frac{dT}{dx}.$$

Vynásobme rovnici mínus jedna:

$$-\dot{q} = \lambda(T) \cdot \frac{dT}{dx}.$$

Pokud dosadíme do Fourierova-Kirchhoffovy rovnice, dostaneme:

$$0 = \frac{d}{dx}\left(-\dot{q}\right).$$

Z toho vidíme, že měrný tepelný tok $\dot{q}$ je konstantní a nezávisí na poloze x. Můžeme tedy rozepsat Fourierův zákon jako:

$$-\dot{q} = (\lambda_0 + \lambda_1 \cdot T) \cdot \frac{dT}{dx}.$$

Můžeme řešit tuto diferenciální rovnici separací proměnných:

$$-\dot{q} \cdot dx = (\lambda_0 + \lambda_1 \cdot T) \cdot dT.$$

Nyní meze budou jak pro x, tak pro T:

- $x = 0 \Rightarrow T = T_1,$

- $x = d \Rightarrow T = T_2$.

Rovnici můžeme integrovat:

$$-\int_0^d \dot{q} \cdot dx = \int_{T_1}^{T_2} (\lambda_0 + \lambda_1 \cdot T) \cdot dT$$

$$-\dot{q} \cdot [x]_0^d = \lambda_0 \cdot [T]_{T_1}^{T_2} + \frac{\lambda_1}{2} \cdot \left[T^2\right]_{T_1}^{T_2}$$

$$-\dot{q} \cdot d = \lambda_0 \cdot (T_2 - T_1) + \frac{\lambda_1}{2} \cdot (T_2^2 - T_1^2)$$

$$-\dot{q} \cdot d = \lambda_0 \cdot (T_2 - T_1) + \frac{\lambda_1}{2} \cdot (T_2 - T_1) \cdot (T_2 + T_1)$$

$$-\dot{q} \cdot d = (T_2 - T_1) \cdot \left(\lambda_0 + \frac{\lambda_1}{2} \cdot (T_2 + T_1)\right).$$

Nyní odvoďme střední hodnotu tepelné vodivosti $\overline{\lambda}$:

$$\overline{\lambda} = \frac{1}{T_2 - T_1} \cdot \int_{T_1}^{T_2} \lambda(T) \cdot dT = \frac{1}{T_2 - T_1} \cdot \int_{T_1}^{T_2} (\lambda_0 + \lambda_1 \cdot T) \cdot dT$$

$$= \frac{1}{T_2 - T_1} \cdot \left[\lambda_0 \cdot T + \frac{\lambda_1}{2} \cdot T^2\right]_{T_1}^{T_2} = \frac{1}{T_2 - T_1} \cdot \left(\lambda_0 \cdot (T_2 - T_1) + \frac{\lambda_1}{2} \cdot (T_2^2 - T_1^2)\right) =$$

$$= \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{2} \cdot (T_2 + T_1).$$

Nyní můžeme videt, že člen v závorce u vyřešené diferenciální rovnice je roven střední hodnotě tepelné vodivosti $\overline{\lambda}$:

$$-\dot{q} \cdot d = (T_2 - T_1) \cdot \overline{\lambda}.$$

Nyní můžeme odvodit vztah pro měrný tepelný tok $\dot{q}$:

$$\dot{q} = \frac{T_1 - T_2}{d} \cdot \overline{\lambda}.$$

3 🚿 Průtokový ohřívač 🌶️🌶️🌶️🌶️

Máme průtokový ohřívač tvořený dvěma obdelníkovými elektrodovými deskami o délce l (m) a šířce b (m). Vzdálenost mezi deskami je d (m). Mezi deskami je voda produdící o rychlostí v pouze ve směru x. Voda má měrnou tepelnou kapacitu c ($\mathrm{J} \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1}$) a hustotu ρ ($\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$). Elektrické napětí mezi deskami je U (V). Odvoďte změnu teploty vody T_2 (K) na výstupu průtokového ohřívače, pokud na vstupu je voda o teplotě T_1 (K).

Budou platit následující předpoklady:

- $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$,
- $\nabla \cdot (\lambda \cdot \vec{\nabla} T) = 0$.

3.1 Řešení

Fourier-Kirchhoffova rovnice:

$$\rho \cdot c \cdot \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \dot{Q}_V, \qquad (\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-3}) \qquad (1)$$

kde:
ρ – hustota ($\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$),
c – měrná tepelná kapacita ($\mathrm{J} \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1}$),
$\vec{v}$ – rychlost ($\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$),
$\vec{\nabla} T$ – gradient teploty ($\mathrm{K} \cdot \mathrm{m}^{-1}$),
$\dot{Q}_V$ – objemový zdroj tepla ($\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-3}$).

Vektor rychlosti $\vec{v}$ je:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vektor rychlosti $\vec{v}$ má pouze složku v, protože voda teče pouze ve směru osy x. Můžeme tedy rovnici zjednodušit na:

$$\rho \cdot c \cdot v \cdot \frac{dT}{dx} = \dot{Q}_V.$$

Dále je třeba vyjádřit rychlost v a objemový zdroj tepla $\dot{Q}_V$. Rychlost v je:

$$v = \frac{\dot{V}}{S} = \frac{\dot{V}}{d \cdot b},$$

kde:
$\dot{V}$ – objemový průtok ($\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-1}$).

Objemový zdroj tepla $\dot{Q}_V$ můžeme vyjádřit pomocí intenzity elektrického pole E a proudové hustoty J:

$$\dot{Q}_V = E \cdot J,$$

kde:
E – intenzita elektrického pole $(\mathrm{V} \cdot \mathrm{m}^{-1})$,
J – proudová hustota $(\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^{-2})$.

Proudovou hustotu J můžeme vyjádřit pomocí Ohmova zákona v diferenciálním tvaru:

$$J = \sigma_e \cdot E,$$

kde:
σ_e – měrná elektrická vodivost $(\Omega \cdot \mathrm{m}^{-1})$.

Dostaneme tedy:

$$\dot{Q}_V = E \cdot \sigma_e \cdot E = \sigma_e \cdot E^2.$$

Intenzitu elektrického pole E můžeme vyjádřit pomocí napětí U a vzdálenosti mezi deskami d:

$$E = \frac{U}{d}.$$

Dostaneme tedy:

$$\dot{Q}_V = \sigma_e \cdot \left(\frac{U}{d}\right)^2.$$

Zde je třeba uvažovat měrnou elektrickou vodivost σ_e jako proměrnou závislou na teplotě. U kovů se vzrůstající teplotou se měrná elektrická vodivost snižuje, jelikož volné nostiče náboje mají problém se v rozpohybované krystalové mřížce kvůli teplotě pohybovat. Naopak u iontových roztoku jako třeba u vody se měrná elektrická vodivost zvyšuje s teplotou. Nahradíme tedy σ_e lineární funkcí teploty $\sigma_e(T)$:

$$\sigma_e = \sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T.$$

Nyní můžeme dosadit vše do rovnice:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\dot{V}}{d \cdot b} \cdot \frac{dT}{dx} = (\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T) \cdot \left(\frac{U}{d}\right)^2.$$

Dostáváme diferenciální rovnici, kterou můžeme řešit separací proměnných:

$$\frac{dT}{\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T} = \frac{U^2 \cdot b}{d \cdot \rho \cdot c \cdot \dot{V}} \cdot dx.$$

Pravou staranu můžeme pro lepší čitelnost narhadit:

$$\xi = \frac{U^2 \cdot b}{d \cdot \rho \cdot c \cdot \dot{V}}.$$

Dostáváme:

$$\frac{dT}{\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T} = \xi \cdot dx.$$

Integrujeme obě strany:

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T} = \int_0^l \xi \cdot dx,$$

kde:
T_1 – počáteční teplota (K),
T_2 – konečná teplota (K),
l – délka průtokového ohřívače (m).

Dostáváme:

$$\left[\frac{1}{\sigma_{e,1}} \cdot \ln\left(\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T\right)\right]_{T_1}^{T_2} = [\xi \cdot x]_0^l$$

$$\frac{1}{\sigma_{e,1}} \cdot \ln\left(\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_2\right) - \frac{1}{\sigma_{e,1}} \cdot \ln\left(\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_1\right) = \xi \cdot l$$

$$\ln\left(\frac{\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_2}{\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_1}\right) = \sigma_{e,1} \cdot \xi \cdot l$$

$$\frac{\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_2}{\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_1} = e^{\sigma_{e,1} \cdot \xi \cdot l}$$

$$\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_2 = \left(\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_1\right) \cdot e^{\sigma_{e,1} \cdot \xi \cdot l}$$

$$T_2 = \frac{\left(\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_1\right) \cdot e^{\sigma_{e,1} \cdot \xi \cdot l} - \sigma_{e,0}}{\sigma_{e,1}} = \frac{\sigma_{e,0} \cdot e^{\sigma_{e,1} \cdot \xi \cdot l} - \sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_1 \cdot e^{\sigma_{e,1} \cdot \xi \cdot l}}{\sigma_{e,1}} =$$

$$= \frac{\sigma_{e,0} \cdot e^{\sigma_{e,1} \cdot \xi \cdot l} - \sigma_{e,0}}{\sigma_{e,1}} + T_1 \cdot e^{\sigma_{e,1} \cdot \xi \cdot l}.$$

Pokud za ξ dosadíme původní výraz, dostaneme:

$$T_2 = \frac{\sigma_{e,0} \cdot e^{\sigma_{e,1} \cdot \frac{U^2 \cdot b}{d \cdot \rho \cdot c \cdot \dot{V}} \cdot l} - \sigma_{e,0}}{\sigma_{e,1}} + T_1 \cdot e^{\sigma_{e,1} \cdot \frac{U^2 \cdot b}{d \cdot \rho \cdot c \cdot \dot{V}} \cdot l}.$$