

Cvičení 3 - Sdílení tepla - Válec a koule

Elektroenergetika 3

Petr Jílek

2024

Obsah

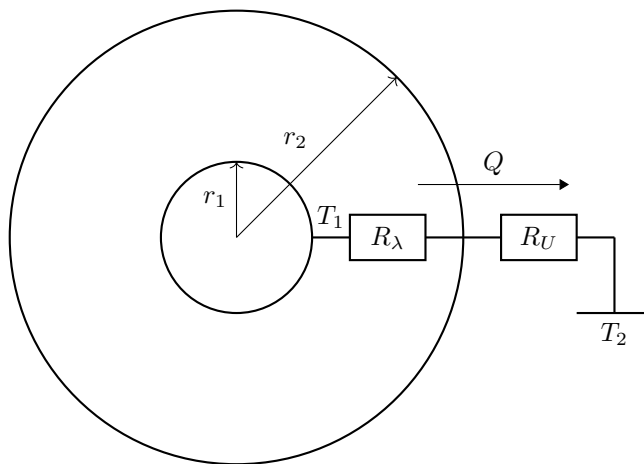
1	Válec 🌶️🌶️	2
1.1	Odvození tepelného odporu	2
1.2	Minimum tepelného odporu	4
1.3	Ekonomie	6
1.4	Číselný příklad 1 🌶️🌶️	7
1.4.1	Řešení	7
1.5	Číselný příklad 2 🌶️🌶️	7
1.5.1	Řešení	7
2	Koule 🌶️🌶️🌶️	8
2.1	Odvození tepelného odporu	8
2.2	Minimum tepelného odporu	10
2.3	Ekonomie	11
2.4	Číselný příklad	11
2.4.1	Řešení	11

Úprava značení

- Absolutní tepelný odpor: $R_{\vartheta A} \rightarrow R$ (K W^{-1})
- Součinitel prostupu tepla: $U_{\vartheta} \rightarrow U$ ($\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$)

1 Válec 🌶️🌶️🌶️

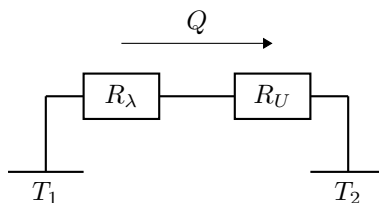
1.1 Odvození tepelného odporu



Tepelný odpor válce se skládá ze dvou částí:

- tepelný odpor vedení tepla v materiálu válce R_λ ,
- tepelný odpor přenosu tepla z povrchu válce do okolí R_U .

Tepelné schéma válce bude vypadat následovně:



Pro odvození tepelného odporu R_λ využijeme vztah pro absolutní tepelný odpor R :

$$R = \frac{d}{\lambda \cdot S},$$

kde:

d - tloušťka materiálu (m),

λ - tepelná vodivost materiálu ($\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$),

S - plocha přenosu tepla (m^2).

Zde d nahradíme nekonečně malou částí poloměru válce:

$$d \rightarrow dr.$$

Dále S nahradíme plochou válce:

$$S \rightarrow 2\pi r \cdot l \cdot dr,$$

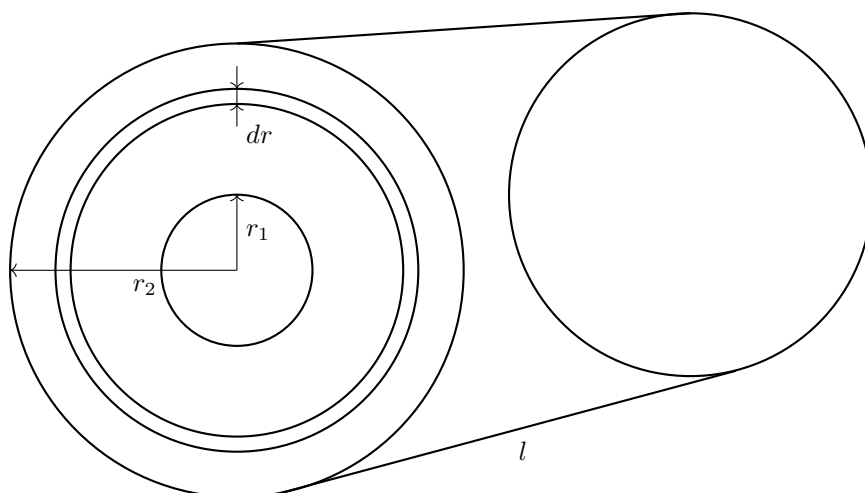
kde:

r - poloměr válce (m),

l - délka válce (m).

Tepelný odpor dR_λ válce bude tedy:

$$dR_\lambda = \frac{dr}{\lambda \cdot 2\pi r \cdot l \cdot dr}.$$



Pro získání celkového odporu R_λ je třeba provést integraci od vnitřního poloměru izolace r_1 po vnější poloměr válce r_2 :

$$R_\lambda = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\lambda \cdot 2\pi r \cdot l} dr = \frac{1}{\lambda \cdot 2\pi \cdot l} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = \frac{1}{\lambda \cdot 2\pi \cdot l} [\ln |r|]_{r_1}^{r_2}$$

Jelikož poloměry r_1 a r_2 jsou kladné (záporné poloměry nedávají fyzikální smysl), můžeme absolutní hodnotu u logaritmu zanedbat:

$$R_\lambda = \frac{1}{\lambda \cdot 2\pi \cdot l} [\ln r]_{r_1}^{r_2} = \frac{1}{\lambda \cdot 2\pi \cdot l} (\ln r_2 - \ln r_1) = \frac{1}{\lambda \cdot 2\pi \cdot l} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{2\pi l \lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Pro odpor přenosu tepla z povrchu válce do okolí R_U využijeme vztah pro odpor přenosu tepla R_U :

$$R_U = \frac{1}{U \cdot S},$$

kde:

U - součinitel prostupu tepla ($\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$).

Plochu S nahradíme plochou válce:

$$S \rightarrow 2\pi r_2 \cdot l.$$

Odpor přenosu tepla z povrchu válce do okolí R_U bude tedy:

$$R_U = \frac{1}{U \cdot 2\pi r_2 \cdot l} = \frac{1}{2\pi l U r_2}.$$

Celkový tepelný odpor válce $R_{\vartheta, \Sigma}$ bude součtem obou odporů:

$$R_{\Sigma} = R_{\lambda} + R_U = \frac{1}{2\pi l \lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\pi l U r_2}$$

1.2 Minimum tepelného odporu

Pro nalezení extrému tepelného odporu R_{Σ} podle poloměru válce r_2 je třeba zjistit, kdy bude derivace R_{Σ} podle r_2 rovna nule:

$$\frac{dR_{\Sigma}}{dr_2} = 0.$$

Derivace R_{Σ} podle r_2 bude:

$$\frac{dR_{\Sigma}}{dr_2} = \frac{dR_{\lambda}}{dr_2} + \frac{dR_U}{dr_2}.$$

Derivace R_{λ} podle r_2 bude:

$$\begin{aligned} \frac{dR_{\lambda}}{dr_2} &= \frac{d}{dr_2} \left(\frac{1}{2\pi l \lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} \right) = \frac{d}{dr_2} \left(\frac{1}{2\pi l \lambda} (\ln r_2 - \ln r_1) \right) = \\ &= \frac{d}{dr_2} \left(\frac{1}{2\pi l \lambda} \ln r_2 \right) = \frac{1}{2\pi l \lambda r_2}. \end{aligned}$$

Derivace R_U podle r_2 bude:

$$\frac{dR_U}{dr_2} = \frac{d}{dr_2} \left(\frac{1}{2\pi l U r_2} \right) = -\frac{1}{2\pi l U r_2^2}.$$

Derivace R_{Σ} podle r_2 bude tedy:

$$\frac{dR_{\Sigma}}{dr_2} = \frac{1}{2\pi l \lambda r_2} - \frac{1}{2\pi l U r_2^2}.$$

Nyní můžeme zjistit, kdy bude derivace R_{Σ} podle r_2 rovna nule:

$$\frac{1}{2\pi l \lambda r_2} - \frac{1}{2\pi l U r_2^2} = 0$$

$$\frac{1}{\lambda r_2} - \frac{1}{U r_2^2} = 0$$

$$\frac{1}{\lambda r_2} = \frac{1}{U r_2^2}$$

$$\frac{r_2}{\lambda} = \frac{1}{U}$$

$$r_2 = \frac{\lambda}{U}.$$

V další části budeme zkoumat, zda se jedná o minimum nebo maximum. K tomu využijeme druhou derivaci R_Σ podle r_2 :

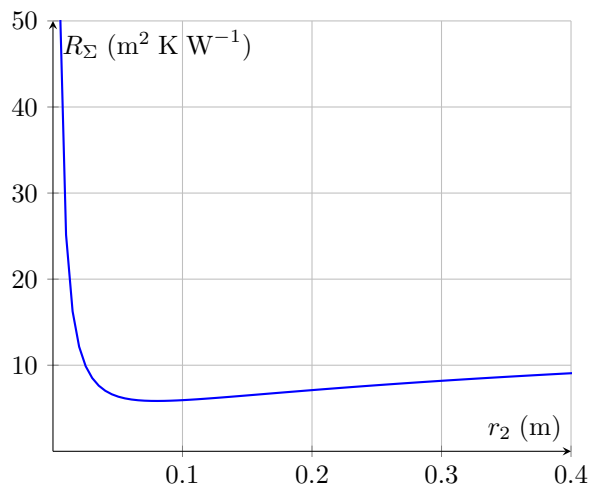
$$\frac{d^2 R_\Sigma}{dr_2^2} = \frac{d}{dr_2} \left(\frac{1}{2\pi l \lambda r_2} - \frac{1}{2\pi l U r_2^2} \right) = -\frac{1}{2\pi l \lambda r_2^2} + \frac{1}{\pi l U r_2^3}.$$

Nyní dosadíme $r_2 = \frac{\lambda}{U}$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi l \lambda \left(\frac{\lambda}{U}\right)^2} + \frac{1}{\pi l U \left(\frac{\lambda}{U}\right)^3} &= -\frac{1}{2\pi l \lambda \frac{\lambda^2}{U^2}} + \frac{1}{\pi l U \frac{\lambda^3}{U^3}} = \\ &= -\frac{U^2}{2\pi l \lambda^3} + \frac{U^2}{\pi l \lambda^3} = \frac{-U^2 + 2U^2}{2\pi l \lambda^3} = \frac{U^2}{2\pi l \lambda^3}. \end{aligned}$$

Hodnoty U a λ jsou kladné, tudíž druhá derivace je kladná. To znamená, že se jedná o minimum.

Závislost tepelného odporu R_Σ na poloměru válce r_2



1.3 Ekonomie

Nyní můžeme porovnat rozdíl v rychlosti růstu tepelného odporu R_Σ a objemu izolace v závislosti na poloměru válce r_2 . Řešíme objem izolace, jelikož při konstrukci se platí za objem materiálu. Pro objem izolace platí:

$$V = \pi(r_2^2 - r_1^2) \cdot l = \pi r_2^2 \cdot l - \pi r_1^2 \cdot l.$$

Nyní provedeme zjednodušení vzorce podobně jako se provádí u časové složitosti algoritmů. Zkoumáme rychlost růstu objemu izolace v závislosti na poloměru válce r_2 , tudíž vyřadíme konstantní členy, čímž dostaneme:

$$V \sim \pi r_2^2 \cdot l.$$

Dále vyřadíme všechny násobící konstanty, čímž dostaneme:

$$V \sim r_2^2.$$

Zde dostáváme, že objem roste s druhou mocninou poloměru válce r_2 . Pro odpor R_Σ platí:

$$R_\Sigma = \frac{1}{2\pi l \lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\pi l U r_2}.$$

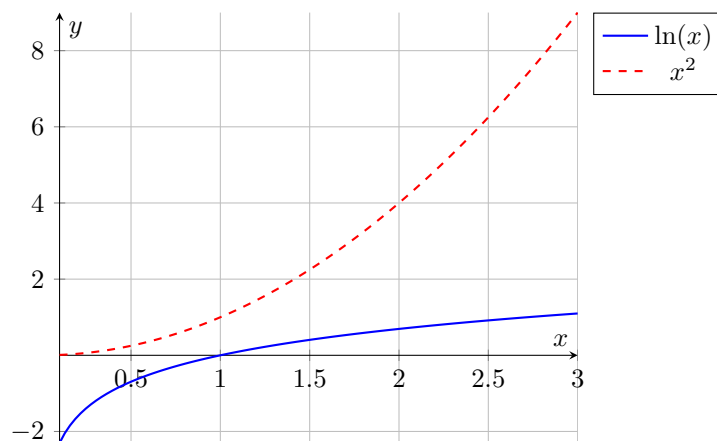
Zde druhý člen jde do nuly, když r_2 jde do nekonečna, tudíž ho můžeme vyřadit. Zbyde nám:

$$R_\Sigma \sim \frac{1}{2\pi l \lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Dále můžeme vyřadit konstantní členy a dostaneme:

$$R_\Sigma \sim \ln r_2.$$

Zde vidíme, že odpor roste logaritmicky s poloměrem válce r_2 . Pokud porovnáme rychlost růstu objemu izolace a rychlost růstu odporu R_Σ , zjistíme, že objem izolace roste rychleji než odpor R_Σ . To znamená, že při dimenzování izolace je třeba brát v potaz i ekonomické hledisko, jelikož při velkém přidání izolace nám dramaticky může narůst cena, ale odpor R_Σ se nám příliš nezmění.



1.4 Číselný příklad 1 🌶️🌶️

Mějme izolovaný vodič v rozvaděči, kde tepelná vodivost izolace je $\lambda = 0.159 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, součinitel prostupu tepla do okolí je $U = 10 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$. Vypočítejte vnější poloměr válce r_2 , kdy bude tepelný odpor R_Σ minimální.

1.4.1 Řešení

Dosadíme do vzorce pro minimum tepelného odporu R_Σ :

$$r_2 = \frac{\lambda}{U} = \frac{0.159}{10} = 0.0159 \text{ m} = 1,59 \text{ cm}.$$

Z výsledku můžeme říct, že pokud máme vodič o poloměru r_1 , který je menší, než 1,59 cm, pak pokud přidáme izolaci tak, aby vnější poloměr byl 1,59 cm, tak bude izolovaný vodič lépe odvádět teplo do okolí.

1.5 Číselný příklad 2 🌶️🌶️

Izolace horkovodního potrubí má tepelnou vodivost $\lambda = 0.02 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ a součinitel prostupu tepla do okolí je $U = 5 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$. Vypočítejte vnější poloměr válce r_2 , kdy bude tepelný odpor R_Σ minimální.

1.5.1 Řešení

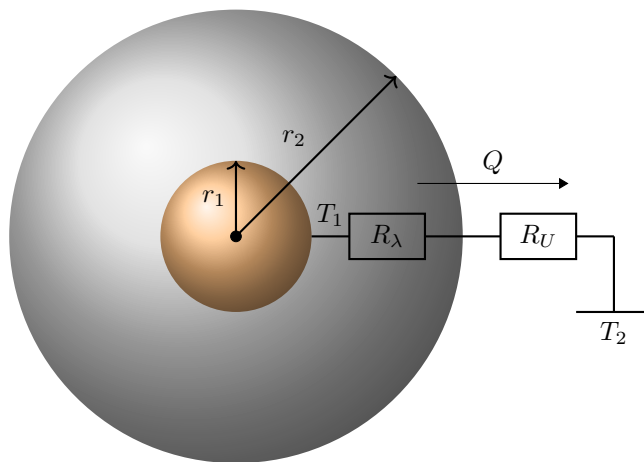
Dosadíme do vzorce pro minimum tepelného odporu R_Σ :

$$r_2 = \frac{\lambda}{U} = \frac{0.02}{5} = 0.004 \text{ m} = 0.4 \text{ cm}.$$

Z výsledku můžeme říct, že by vnitřní poloměr potrubí r_1 měl být menší než 0.4 cm, aby bylo výhodné přidat izolaci. Nicméně takto malý poloměr potrubí se v praxi nevyskytuje.

2 Koule 🌶️🌶️🌶️

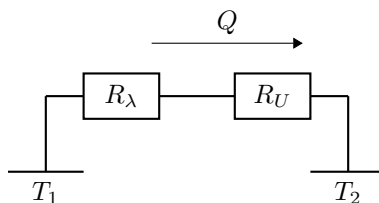
2.1 Odvození tepelného odporu



Tepelný odpor koule se skládá ze dvou částí:

- odpor vedení tepla v materiálu koule R_λ ,
- odpor přenosu tepla z povrchu koule do okolí R_U .

Tepelné schéma koule bude vypadat následovně:



Pro odvození tepelného odporu R_λ využijeme vztah pro tepelný odpor R :

$$R_\vartheta = \frac{d}{\lambda \cdot S},$$

kde:

d - tloušťka materiálu (m),

λ - tepelná vodivost materiálu ($\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$),

S - plocha přenosu tepla (m^2).

Zde d nahradíme nekonečně malou částí poloměru koule:

$$d \rightarrow dr.$$

Dále S nahradíme plochou koule:

$$S \rightarrow 4\pi r^2.$$

Tepelný odpor dR_ϑ koule bude tedy:

$$dR_\lambda = \frac{dr}{\lambda \cdot 4\pi r^2}.$$

Pro získání celkového odporu R_λ je třeba provést integraci od vnitřního poloměru izolace r_1 po vnější poloměr koule r_2 :

$$R_\lambda = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\lambda \cdot 4\pi r^2} dr = \frac{1}{\lambda \cdot 4\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{1}{\lambda \cdot 4\pi} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2}$$

Po dosažení mezí integrace dostaneme:

$$R_\lambda = \frac{1}{\lambda \cdot 4\pi} \left(-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right) = \frac{1}{\lambda \cdot 4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Pro odpor přenosu tepla z povrchu koule do okolí R_U využijeme vztah pro odpor přenosu tepla R_U :

$$R_U = \frac{1}{U \cdot S},$$

kde:

U - koeficient prostupu tepla ($\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}$).

Plochu S nahradíme plochou koule:

$$S \rightarrow 4\pi r_2^2.$$

Odpor přenosu tepla z povrchu koule do okolí R_U bude tedy:

$$R_U = \frac{1}{U \cdot 4\pi r_2^2} = \frac{1}{4\pi U r_2^2}.$$

Celkový tepelný odpor koule R_Σ bude součtem obou odporů:

$$R_\Sigma = R_\lambda + R_U = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{4\pi U r_2^2}$$

Nyní pojďme vyšetřit limitu odporu pro r_2 jdoucí do nekonečna:

$$\lim_{r_2 \rightarrow \infty} R_\Sigma = \lim_{r_2 \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{4\pi U r_2^2} \right)$$

Členy, kde se vyskytuje r_2 ve jmenovateli, jdou do nuly, čímž dostaneme:

$$\lim_{r_2 \rightarrow \infty} R_\Sigma = \frac{1}{4\pi\lambda r_1}.$$

Zde vidíme, že koule nelze úplně izolovat, jelikož při nekonečné izolaci bude mít koule stále nějaký odpor.

2.2 Minimum tepelného odporu

Pro nalezení extrému tepelného odporu R_Σ podle poloměru koule r_2 je třeba zjistit, kdy bude derivace R_Σ podle r_2 rovna nule:

$$\frac{dR_\Sigma}{dr_2} = 0.$$

Derivace R_Σ podle r_2 bude:

$$\frac{dR_\Sigma}{dr_2} = \frac{dR_\lambda}{dr_2} + \frac{dR_U}{dr_2}.$$

Derivace R_λ podle r_2 bude:

$$\frac{dR_\lambda}{dr_2} = \frac{d}{dr_2} \left(\frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \right) = \frac{1}{4\pi\lambda r_2^2}$$

Derivace R_U podle r_2 bude:

$$\frac{dR_U}{dr_2} = \frac{d}{dr_2} \left(\frac{1}{4\pi U r_2^2} \right) = -\frac{2}{4\pi U r_2^3} = -\frac{1}{2\pi U r_2^3}.$$

Derivace R_Σ podle r_2 bude tedy:

$$\frac{dR_\Sigma}{dr_2} = \frac{1}{4\pi\lambda r_2^2} - \frac{1}{2\pi U r_2^3}.$$

Nyní můžeme zjistit, kdy bude derivace R_Σ podle r_2 rovna nule:

$$\frac{1}{4\pi\lambda r_2^2} - \frac{1}{2\pi U r_2^3} = 0$$

$$\frac{1}{4\lambda r_2^2} - \frac{1}{2U r_2^3} = 0$$

$$\frac{1}{4\lambda r_2^2} = \frac{1}{2U r_2^3}$$

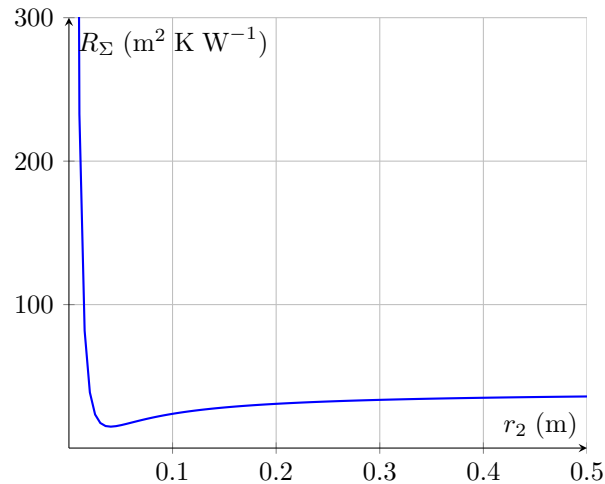
$$\frac{1}{\lambda r_2^2} = \frac{2}{U r_2^3}$$

$$\frac{r_2}{\lambda} = \frac{2}{U}$$

$$r_2 = \frac{2\lambda}{U}.$$

V další části budeme zkoumat, zda se jedná o minimum nebo maximum. K tomu využijeme druhou derivaci R_Σ podle r_2 :

Závislost tepelného odporu R_Σ na poloměru koule r_2



2.3 Ekonomie

Nyní můžeme porovnat rozdíl v rychlosti růstu tepelného odporu R_Σ a objemu izolace v závislosti na poloměru koule r_2 .

$$V = \frac{4}{3}\pi(r_2^3 - r_1^3).$$

Po zjednodušení dostaneme:

$$V \sim r_2^3.$$

Rychlost růstu objemu izolace je kubická a jde do nekonečna, zatímco tepelný odpor dosáhne limitní hodnoty.

2.4 Číselný příklad

Mějme izolovanou kouli, kde tepelná vodivost izolace je $\lambda = 0.159 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, součinitel prostupu tepla do okolí je $U = 10 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$. Vypočítejte vnější poloměr koule r_2 , kdy bude tepelný odpor R_Σ minimální.

2.4.1 Řešení

Dosadíme do vzorce pro minimum tepelného odporu R_Σ :

$$r_2 = \frac{2\lambda}{U} = \frac{2 \cdot 0.159}{10} = 0.0318 \text{ m} = 3.18 \text{ cm}.$$