Cvičení 3 - Sdílení tepla - Válec a koule

Elektroenergetika 3

Petr Jílek

2024

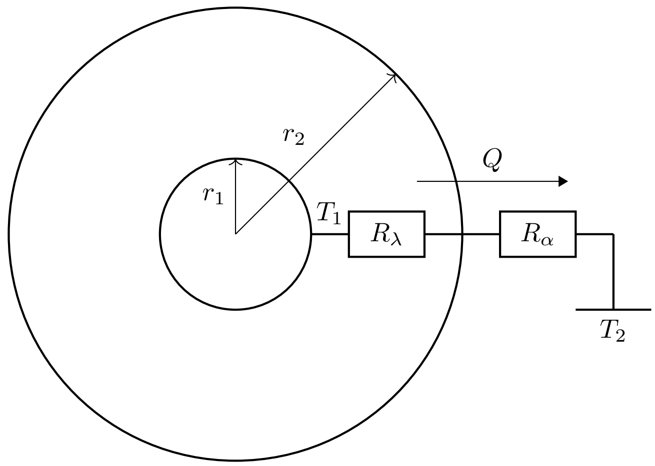
Obsah

Úprava značení

- Absolutní tepelný odpor: $R_{\vartheta A} \to R$ $(\mathrm{K \cdot W^{-1}})$
- Součinitel přestupu tepla: $\alpha_{\vartheta} \to \alpha$ $(\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}})$

1 💿 Válec 🌶️🌶️🌶️

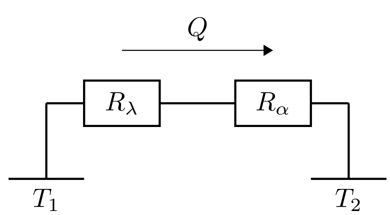
1.1 Odvození tepelného odporu



Tepelný odpor válce se skládá ze dvou částí:

- tepelný odpor vedení tepla v materiálu válce R_λ,
- tepelný odpor přestupu tepla z povrchu válce do okolí R_α.

Tepelné schéma válce bude vypadat následovně:



Pro odvození tepelného odporu R_λ využijeme vztah pro absolutní tepelný odpor R:

$$R = \frac{d}{\lambda \cdot S}, \qquad (\mathrm{K} \cdot \mathrm{W}^{-1}) \quad (1)$$

kde:
d - tloušťka materiálu (m),
λ - tepelná vodivost materiálu $(\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1})$,
S - plocha přenosu tepla (m^2).

Zde d nahradíme nekonečně malou částí poloměru válce:

$$d \to dr.$$

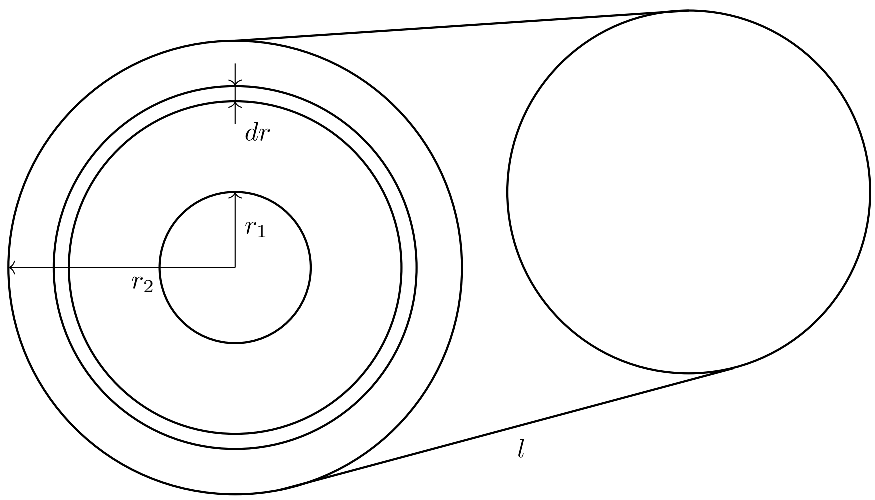
Dále S nahradíme plochou válce:

$$S \to 2\pi r \cdot l \cdot dr,$$

kde:
r - poloměr válce (m),
l - délka válce (m).

Tepelný odpor dR_λ válce bude tedy:

$$dR_\lambda = \frac{dr}{\lambda \cdot 2\pi r \cdot l \cdot dr}.$$



Pro získání celkového odporu R_λ je třeba provést integraci od vnitřního poloměru izolace r_1 po vnější poloměr válce r_2:

$$R_\lambda = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\lambda \cdot 2\pi r \cdot l} dr = \frac{1}{\lambda \cdot 2\pi \cdot l} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = \frac{1}{\lambda \cdot 2\pi \cdot l} \left[\ln |r|\right]_{r_1}^{r_2}$$

Jelikož poloměry r_1 a r_2 jsou kladné (záporné poloměry nedávají fyzikální smysl), můžeme absolutní hodnotu u logaritmu zanedbat:

$$R_\lambda = \frac{1}{\lambda \cdot 2\pi \cdot l} \left[\ln r\right]_{r_1}^{r_2} = \frac{1}{\lambda \cdot 2\pi \cdot l} \left(\ln r_2 - \ln r_1\right) = \frac{1}{\lambda \cdot 2\pi \cdot l} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{2\pi l \lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Pro odpor přenosu tepla z povrchu válce do okolí R_α využijeme vztah pro odpor přenosu tepla R_α:

$$R_\alpha = \frac{1}{\alpha \cdot S}, \qquad (\mathrm{K} \cdot \mathrm{W}^{-1}) \quad (2)$$

kde:
α - součinitel přestupu tepla $(\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{K}^{-1})$.

Plochu S nahradíme plochou válce:

$$S \to 2\pi r_2 \cdot l.$$

Odpor přenosu tepla z povrchu válce do okolí R_α bude tedy:

$$R_\alpha = \frac{1}{\alpha \cdot 2\pi r_2 \cdot l} = \frac{1}{2\pi l \alpha r_2}.$$

Celkový tepelný odpor válce $R_{\vartheta,\Sigma}$ bude součtem obou odporů:

$$R_\Sigma = R_\lambda + R_\alpha = \frac{1}{2\pi l \lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\pi l \alpha r_2}$$

1.2 Minimum tepelného odporu

Pro nalezení extrému tepelného odporu R_Σ podle poloměru válce r_2 je třeba zjistit, kdy bude derivace R_Σ podle r_2 rovna nule:

$$\frac{dR_\Sigma}{dr_2} = 0.$$

Derivace R_Σ podle r_2 bude:

$$\frac{dR_\Sigma}{dr_2} = \frac{dR_\lambda}{dr_2} + \frac{dR_\alpha}{dr_2}.$$

Derivace R_λ podle r_2 bude:

$$\frac{dR_\lambda}{dr_2} = \frac{d}{dr_2}\left(\frac{1}{2\pi l \lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}\right) = \frac{d}{dr_2}\left(\frac{1}{2\pi l \lambda} (\ln r_2 - \ln r_1)\right) =$$

$$= \frac{d}{dr_2}\left(\frac{1}{2\pi l \lambda} \ln r_2\right) = \frac{1}{2\pi l \lambda r_2}.$$

Derivace R_α podle r_2 bude:

$$\frac{dR_\alpha}{dr_2} = \frac{d}{dr_2}\left(\frac{1}{2\pi l \alpha r_2}\right) = -\frac{1}{2\pi l \alpha r_2^2}.$$

Derivace R_Σ podle r_2 bude tedy:

$$\frac{dR_\Sigma}{dr_2} = \frac{1}{2\pi l \lambda r_2} - \frac{1}{2\pi l \alpha r_2^2}.$$

Nyní můžeme zjistit, kdy bude derivace R_Σ podle r_2 rovna nule:

$$\frac{1}{2\pi l \lambda r_2} - \frac{1}{2\pi l \alpha r_2^2} = 0$$

$$\frac{1}{\lambda r_2} - \frac{1}{\alpha r_2^2} = 0$$

$$\frac{1}{\lambda r_2} = \frac{1}{\alpha r_2^2}$$

$$\frac{r_2}{\lambda} = \frac{1}{\alpha}$$

$$r_2 = \frac{\lambda}{\alpha}.$$

V další části budeme zkoumat, zda se jedná o minimum nebo maximum. K tomu využijeme druhou derivaci R_Σ podle r_2:

$$\frac{d^2 R_\Sigma}{dr_2^2} = \frac{d}{dr_2}\left(\frac{1}{2\pi l \lambda r_2} - \frac{1}{2\pi l \alpha r_2^2}\right) = -\frac{1}{2\pi l \lambda r_2^2} + \frac{1}{\pi l \alpha r_2^3}.$$

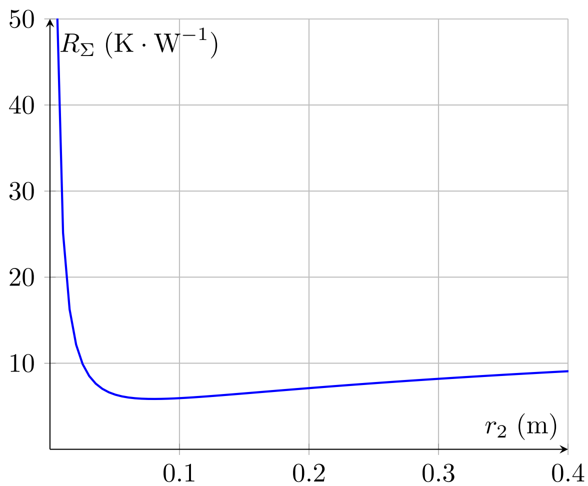
Nyní dosadíme $r_2 = \frac{\lambda}{\alpha}$:

$$-\frac{1}{2\pi l \lambda \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^2} + \frac{1}{\pi l \alpha \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^3} = -\frac{1}{2\pi l \lambda \frac{\lambda^2}{\alpha^2}} + \frac{1}{\pi l \alpha \frac{\lambda^3}{\alpha^3}} =$$

$$= -\frac{\alpha^2}{2\pi l \lambda^3} + \frac{\alpha^2}{\pi l \lambda^3} = \frac{-\alpha^2 + 2\alpha^2}{2\pi l \lambda^3} = \frac{\alpha^2}{2\pi l \lambda^3}.$$

Hodnoty α a λ jsou kladné, tudíž druhá derivace je kladná. To znamená, že se jedná o minimum.

Závislost tepelného odporu R_Σ na poloměru válce r_2



1.3 Ekonomie

Nyní můžeme porovnat rozdíl v rychlosti růstu tepelného odporu R_Σ a objemu izolace v závislosti na poloměru válce r_2. Řešíme objem izolace, jelikož při konstrukci se platí za objem materiálu. Pro objem izolace platí:

$$V = \pi(r_2^2 - r_1^2) \cdot l = \pi r_2^2 \cdot l - \pi r_1^2 \cdot l.$$

Nyní provedeme zjednodušení vzorce podobně jako se provádí u časové složitosti algoritmů. Zkoumáme rychlost růstu objemu izolace v závislosti na poloměru válce r_2, tudíž vyřadíme konstantní členy, čímž dostaneme:

$$V \sim \pi r_2^2 \cdot l.$$

Dále vyřadíme všechny násobící konstanty, čímž dostaneme:

$$V \sim r_2^2.$$

Zde dostáváme, že objem roste s druhou mocninou poloměru válce r_2. Pro odpor R_Σ platí:

$$R_\Sigma = \frac{1}{2\pi l\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\pi l\alpha r_2}.$$

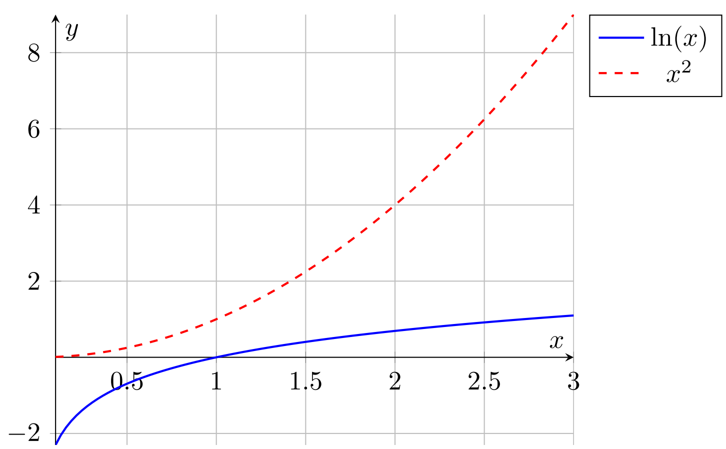
Zde druhý člen jde do nuly, když r_2 jde do nekonečna, tudíž ho můžeme vyřadit. Zbyde nám:

$$R_\Sigma \sim \frac{1}{2\pi l\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Dále můžeme vyřadit konstantní členy a dostaneme:

$$R_\Sigma \sim \ln r_2.$$

Zde vidíme, že odpor roste logaritmicky s poloměrem válce r_2. Pokud porovnáme rychlost růstu objemu izolace a rychlost růstu odporu R_Σ, zjistíme, že objem izolace roste rychleji než odpor R_Σ. To znamená, že při dimenzování izolace je třeba brát v potaz i ekonomické hledisko, jelikož při velkém přidání izolace nám dramaticky může narůst cena, ale odpor R_Σ se nám příliš nezmění.



1.4 Číselný příklad 1

Mějme izolovaný vodič v rozvaděči, kde tepelná vodivost izolace je $\lambda = 0.159\ \mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$, součinitel přestupu tepla do okolí je $\alpha = 10\ \mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}\cdot\mathrm{K}^{-1}$ Vypočítejte vnější poloměr válce r_2, kdy bude tepelný odpor R_Σ minimální.

1.4.1 Řešení

Dosadíme do vzorce pro minimum tepelného odporu R_Σ:

$$r_2 = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{0.159}{10} = 0.0159\ \mathrm{m} = 1,59\ \mathrm{cm}.$$

Z výsledku můžeme říct, že pokud máme vodič o poloměru r_1, který je menší, než $1,59$ cm, pak pokud přidáme izolaci tak, aby vnější poloměr byl $1,59$ cm, tak bude izolovaný vodič lépe odvádět teplo do okolí.

1.5 Číselný příklad 2

Izolace horkovodního potrubí má tepelnou vodivost $\lambda = 0.02\ \mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$ a součinitel přestupu tepla do okolí je $\alpha = 5\ \mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}\cdot\mathrm{K}^{-1}$. Vypočítejte vnější poloměr válce r_2, kdy bude tepelný odpor R_Σ minimální.

1.5.1 Řešení

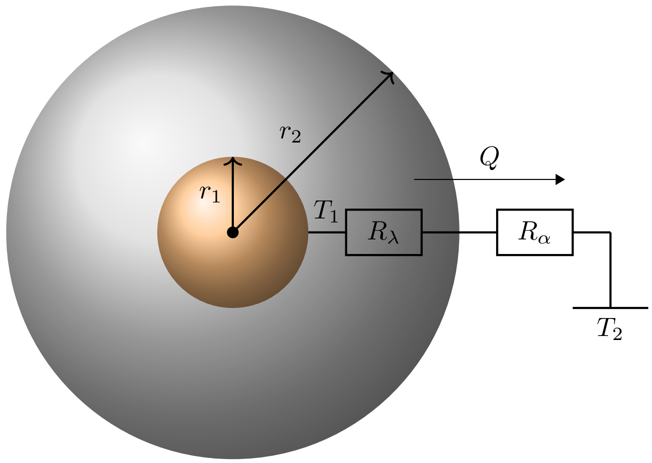
Dosadíme do vzorce pro minimum tepelného odporu R_Σ:

$$r_2 = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{0.02}{5} = 0.004\ \mathrm{m} = 0.4\ \mathrm{cm}.$$

Z výsledku můžeme říct, že by vnitřní poloměr potrubí r_1 měl být menší než 0.4 cm, aby bylo výhodné přidat izolaci. Nicméně takto malý poloměr potrubí se v praxi nevyskytuje.

2 ⚽ Koule 🌶🌶🌶

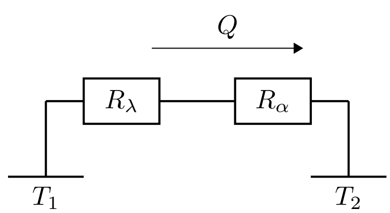
2.1 Odvození tepelného odporu



Tepelný odpor koule se skládá ze dvou částí:

- odpor vedení tepla v materiálu koule R_λ,
- odpor přenosu tepla z povrchu koule do okolí R_α.

Tepelné schéma koule bude vypadat následovně:



Pro odvození tepelného odporu R_λ využijeme vztah pro tepelný odpor R:

$$R_\vartheta = \frac{d}{\lambda \cdot S},$$

kde:
d - tloušťka materiálu (m),
λ - tepelná vodivost materiálu ($\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$),
S - plocha přenosu tepla ($\mathrm{m^2}$).

Zde d nahradíme nekonečně malou částí poloměru koule:

$$d \to dr.$$

Dále S nahradíme plochou koule:

$$S \to 4\pi r^2.$$

Tepelný odpor dR_ϑ koule bude tedy:

$$dR_\lambda = \frac{dr}{\lambda \cdot 4\pi r^2}.$$

Pro získání celkového odporu R_λ je třeba provést integraci od vnitřního poloměru izolace r_1 po vnější poloměr koule r_2:

$$R_\lambda = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\lambda \cdot 4\pi r^2} dr = \frac{1}{\lambda \cdot 4\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{1}{\lambda \cdot 4\pi} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2}$$

Po dosazení mezí integrace dostaneme:

$$R_\lambda = \frac{1}{\lambda \cdot 4\pi} \left(-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right) = \frac{1}{\lambda \cdot 4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Pro odpor přenosu tepla z povrchu koule do okolí R_α využijeme vztah pro odpor přenosu tepla R_α:

$$R_\alpha = \frac{1}{\alpha \cdot S},$$

kde:
α - součinitel přestupu tepla (W/m^2·K).

Plochu S nahradíme plochou koule:

$$S \to 4\pi r_2^2.$$

Odpor přenosu tepla z povrchu koule do okolí R_α bude tedy:

$$R_\alpha = \frac{1}{\alpha \cdot 4\pi r_2^2} = \frac{1}{4\pi\alpha r_2^2}.$$

Celkový tepelný odpor koule R_Σ bude součtem obou odporů:

$$R_\Sigma = R_\lambda + R_\alpha = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{4\pi\alpha r_2^2}$$

Nyní pojďme vyšetřit limitu odporu pro r_2 jdoucí do nekonečna:

$$\lim_{r_2 \to \infty} R_\Sigma = \lim_{r_2 \to \infty} \left(\frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{4\pi\alpha r_2^2} \right)$$

Členy, kde se vyskytuje r_2 ve jmenovateli, jdou do nuly, čímž dostaneme:

$$\lim_{r_2 \to \infty} R_\Sigma = \frac{1}{4\pi\lambda r_1}.$$

Zde vidíme, že koule nelze úplně izolovat, jelikož při nekonečné izolaci bude mít koule stále nějaký odpor.

2.2 Minimum tepelného odporu

Pro nalezení extrému tepelného odporu R_Σ podle poloměru koule r_2 je třeba zjistit, kdy bude derivace R_Σ podle r_2 rovna nule:

$$\frac{dR_\Sigma}{dr_2} = 0.$$

Derivace R_Σ podle r_2 bude:

$$\frac{dR_\Sigma}{dr_2} = \frac{dR_\lambda}{dr_2} + \frac{dR_\alpha}{dr_2}.$$

Derivace R_λ podle r_2 bude:

$$\frac{dR_\lambda}{dr_2} = \frac{d}{dr_2}\left(\frac{1}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\right) = \frac{1}{4\pi\lambda r_2^2}$$

Derivace R_α podle r_2 bude:

$$\frac{dR_\alpha}{dr_2} = \frac{d}{dr_2}\left(\frac{1}{4\pi\alpha r_2^2}\right) = -\frac{2}{4\pi\alpha r_2^3} = -\frac{1}{2\pi\alpha r_2^3}.$$

Derivace R_Σ podle r_2 bude tedy:

$$\frac{dR_\Sigma}{dr_2} = \frac{1}{4\pi\lambda r_2^2} - \frac{1}{2\pi\alpha r_2^3}.$$

Nyní můžeme zjistit, kdy bude derivace R_Σ podle r_2 rovna nule:

$$\frac{1}{4\pi\lambda r_2^2} - \frac{1}{2\pi\alpha r_2^3} = 0$$

$$\frac{1}{4\lambda r_2^2} - \frac{1}{2\alpha r_2^3} = 0$$

$$\frac{1}{4\lambda r_2^2} = \frac{1}{2\alpha r_2^3}$$

$$\frac{1}{\lambda r_2^2} = \frac{2}{\alpha r_2^3}$$

$$\frac{r_2}{\lambda} = \frac{2}{\alpha}$$

$$r_2 = \frac{2\lambda}{\alpha}.$$

V další části budeme zkoumat, zda se jedná o minimum nebo maximum. K tomu využijeme druhou derivaci R_Σ podle r_2:

$$\frac{d^2R_\Sigma}{dr_2^2} = \frac{d}{dr_2}\left(\frac{1}{4\pi\lambda r_2^2} - \frac{1}{2\pi\alpha r_2^3}\right) = -\frac{2}{4\pi\lambda r_2^3} + \frac{3}{2\pi\alpha r_2^4} = -\frac{1}{2\pi\lambda r_2^3} + \frac{3}{2\pi\alpha r_2^4}.$$

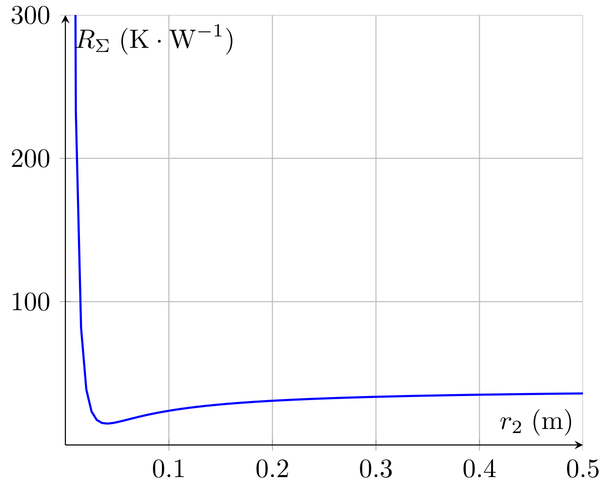
Nyní dosadíme $r_2 = \frac{2\lambda}{\alpha}$:

$$-\frac{1}{2\pi\lambda\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)^3} + \frac{3}{2\pi\alpha\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)^4} = -\frac{1}{2\pi\lambda\frac{8\lambda^3}{\alpha^3}} + \frac{3}{2\pi\alpha\frac{16\lambda^4}{\alpha^4}} =$$

$$= -\frac{\alpha^3}{16\pi\lambda^4} + \frac{3\alpha^3}{32\pi\lambda^4} = \frac{-2\alpha^3 + 3\alpha^3}{32\pi\lambda^4} = \frac{\alpha^3}{32\pi\lambda^4}.$$

Hodnoty α a λ jsou kladné, tudíž druhá derivace je kladná. To znamená, že se jedná o minimum.

Závislost tepelného odporu R_Σ na poloměru koule r_2



2.3 Ekonomie

Nyní můžeme porovnat rozdíl v rychlosti růstu tepelného odporu R_Σ a objemu izolace v závislosti na poloměru koule r_2.

$$V = \frac{4}{3}\pi(r_2^3 - r_1^3).$$

Po zjednodušení dostaneme:

$$V \sim r_2^3.$$

Rychlost růstu objemu izolace je kubická a jde do někonečna, zatímco tepelný odpor dosáhne limitní hodnoty.

2.4 Číselný příklad

Mějme izolovanou kouli, kde tepelná vodivost izolace je $\lambda = 0.159$ W · m^{-1} · K^{-1}, součinitel přestupu tepla do okolí je $\alpha = 10$ W · m^{-2} · K^{-1} Vypočítejte vnější poloměr koule r_2, kdy bude tepelný odpor R_Σ minimální.

2.4.1 Řešení

Dosadíme do vzorce pro minimum tepelného odporu R_Σ:

$$r_2 = \frac{2\lambda}{\alpha} = \frac{2 \cdot 0.159}{10} = 0.0318 \text{ m} = 3.18 \text{ cm}.$$