

Cvičení 2 - Sdílení tepla

Elektroenergetika 3

Petr Jílek

2024

Obsah

1	 Zed' 	2
1.1	Fourierova-Kirchhoffova rovnice  	2
1.2	Fourieruv zákon  	3
1.3	Tepelný odpor	3
1.4	Součinitel prostupu tepla	5
1.5	Číselný příklad	5
1.5.1	a	5
1.5.2	b	6
2	 Skládaná zed' 	7
2.1	Tepelné schéma	7
2.2	Číselný příklad	8
2.2.1	a	9
2.2.2	b	10
3	 PENB 	12
3.0.1	a	12
3.0.2	b	13
4	 Topná sezóna  	14
4.1	Řešení	14
5	 Cihlová pec   	15
6	 Sálavá clona  	17
6.1	a	17
6.2	b	17
7	 Destička ve vesmíru  	19
7.0.1	Řešení	19

1 🧱 Zed' 🌶️🌶️

1.1 Fourierova-Kirchhoffova rovnice 🌶️🌶️🌶️

Pro zed' o tloušťce d budeme uvažovat následující zjednodušující předpoklady:

- $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$,
- $\vec{v} = 0$,
- $Q_v = 0$,
- $\lambda = \text{konstanta}$,
- $T = T(x)$ - teplota závislá pouze na x .

Poté Fourierova-Kirchhoffova rovnice bude mít tvar:

$$0 = \nabla \cdot (\lambda \cdot \vec{\nabla} T) = \lambda \cdot \frac{d^2 T}{dx^2}.$$

Rovnici můžeme vydělit λ ($\lambda > 0$) a získáme:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0.$$

Tuto rovnici můžeme řešit dvojí integrací. První integrace bude vypadat následovně:

$$\frac{dT}{dx} = \int 0 \cdot dx = 0 + c_1 = c_1.$$

Druhá integrace bude vypadat následovně:

$$T(x) = \int c_1 \cdot dx = c_1 \cdot x + c_2.$$

Obecné řešení bude tedy:

$$T(x) = c_1 \cdot x + c_2.$$

S okrajovými podmínkami:

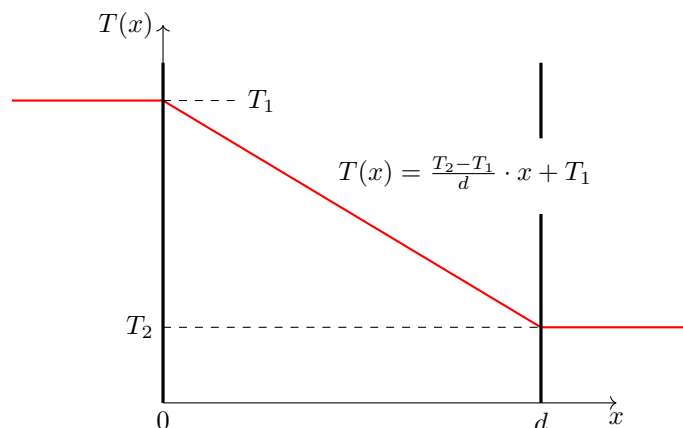
- $T(0) = T_1$:
 $T_1 = T(0) = c_1 \cdot 0 + c_2 = c_2 \Rightarrow c_2 = T_1.$

- $T(d) = T_2$:
 $T_2 = T(d) = c_1 \cdot d + c_2 \Rightarrow c_1 = \frac{T_2 - c_2}{d} = \frac{T_2 - T_1}{d}.$

Řešení je tedy:

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{d} \cdot x + T_1.$$

Tuto situaci můžeme znázornit následujícím obrázkem:



1.2 Fourieruv zákon 🌶️🌶️🌶️

Nyní dosadíme řešení z předchozího příkladu do Fourierova zákona, kde za gradient teploty dosadíme derivaci teploty podle osy x , čímž získáme měrný tepelný tok q_x :

$$\dot{q}_x = -\lambda \cdot \frac{dT(x)}{dx} = -\lambda \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{T_2 - T_1}{d} \cdot x + T_1 \right) = -\lambda \cdot \frac{T_2 - T_1}{d} = \lambda \cdot \frac{T_1 - T_2}{d} = \frac{\Delta T}{\frac{d}{\lambda}}.$$

1.3 Tepelný odpor

Dolní výraz z předchozí sekce $\frac{d}{\lambda}$ je tepelný odpor:

$$R_{\vartheta} = \frac{d}{\lambda}. \quad (\text{m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}) \quad (1)$$

Měrný tepelný tok q_x můžeme tedy zapsat jako:

$$\dot{q}_x = \frac{\Delta T}{R_{\vartheta}}. \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-2}) \quad (2)$$

Tepelný tok \dot{Q}_x dostaneme vynásobením měrného tepelného toku plochou průřezu S :

$$\dot{Q}_x = \dot{q}_x \cdot S. \quad (\text{W}) \quad (3)$$

Tepelný tok \dot{Q}_x můžeme dále rozepsat:

$$\dot{Q}_x = \dot{q}_x \cdot S = \lambda \frac{T_1 - T_2}{d} \cdot S = \lambda \frac{\Delta T}{d} \cdot S = \frac{\Delta T}{\frac{d}{\lambda \cdot S}}.$$

Dolní výraz $\frac{d}{\lambda \cdot S}$ je absolutní tepelný odpor:

$$R_{\vartheta A} = \frac{d}{\lambda \cdot S} = \frac{R_{\vartheta}}{S}. \quad (\text{K} \cdot \text{W}^{-1}) \quad (4)$$

Poznámka

Výpočet tepelného odporu je analogický jako výpočet elektrického odporu. Elektrický odpor R_e vypočteme jako:

$$R_e = \frac{l}{\sigma_e \cdot S}, \quad (\Omega) \quad (5)$$

kde:

l – délka vodiče (m),

σ_e – měrná elektrická vodivost ($\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$),

S – průřez vodiče (m^2).

Analogie jsou:

- $R_{\vartheta A}$ – absolutní tepelný odpor ($\text{K} \cdot \text{W}^{-1}$) $\rightarrow R_e$ – elektrický odpor (Ω),
- d – tloušťka stěny (m) $\rightarrow l$ – délka vodiče (m),
- λ – tepelná vodivost ($\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) $\rightarrow \sigma_e$ – měrná elektrická vodivost ($\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$),
- S – plocha průřezu (m^2) $\rightarrow S$ – průřez vodiče (m^2).

Výpočet tepelného toku je analogický s Ohmovým zákonem:

$$I = \frac{U}{R_e}, \quad (\text{A}) \quad (6)$$

kde:

I – proud (A),

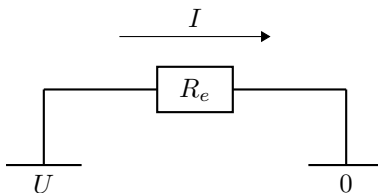
U – napětí (V),

R_e – elektrický odpor (Ω).

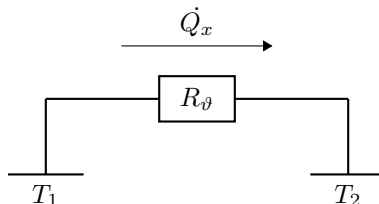
Analogie jsou:

- \dot{Q}_x – tepelný tok (W) $\rightarrow I$ – proud (A),
- ΔT – rozdíl teplot (K) $\rightarrow U$ – napětí (V),
- $R_{\vartheta A}$ – absolutní tepelný odpor ($\text{K} \cdot \text{W}^{-1}$) $\rightarrow R_e$ – elektrický odpor (Ω).

Elektrické schéma můžeme znázornit následujícím obrázkem:



Analogicky můžeme vytvořit tepelné schéma:



1.4 Součinitel prostupu tepla

Součinitel prostupu tepla U_ϑ je inverzní hodnota tepelného odporu:

$$U_\vartheta = \frac{1}{R_\vartheta} = \frac{\lambda}{d}. \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}) \quad (7)$$

Měrný tepelný tok q_x se poté může zapsat jako:

$$\dot{q}_x = U_\vartheta \cdot \Delta T. \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-2}) \quad (8)$$

Prostup tepla $U_{\vartheta A}$ je inverzní hodnota absolutního tepelného odporu:

$$U_{\vartheta A} = \frac{1}{R_{\vartheta A}} = \frac{\lambda \cdot S}{d} = U_\vartheta \cdot S. \quad (\text{W} \cdot \text{K}^{-1}) \quad (9)$$

Tepelný tok \dot{Q}_x se poté může zapsat jako:

$$\dot{Q}_x = U_{\vartheta A} \cdot \Delta T. \quad (\text{W}) \quad (10)$$

1.5 Číselný příklad

Teplota na začátku zdi je $T_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, teplota na konci zdi je $T_2 = -10 \text{ }^\circ\text{C}$. Zed' má tloušťku $d_{cihla} = 45 \text{ cm}$ a je tvořená obyčejnou cihlou s tepelná vodivostí $\lambda_{cihla} = 0,8 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Plocha průřezu zdi je $S = 20 \text{ m}^2$.

- Vypočítejte R_ϑ , $R_{\vartheta A}$, U_ϑ , $U_{\vartheta A}$, \dot{q}_x a \dot{Q}_x .
- Uvažujte polystyrénovou izolaci s tepelnou vodivostí $\lambda_{izol} = 0,04 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Vypočítejte tloušťku izolace d_{izol} , která zajistí stejný měrný tepelný odpor (tím také zajistí stejný měrný tepelný tok).

1.5.1 a

Tepelný odpor R_ϑ vypočteme jako:

$$R_\vartheta = \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}} = \frac{0,45 \text{ m}}{0,8 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}} = 0,5625 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Absolutní tepelný odpor $R_{\vartheta A}$ vypočteme jako:

$$R_{\vartheta A} = \frac{R_{\vartheta}}{S} = \frac{0,5625}{20} \approx 0,028 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Součinitel prostupu tepla U_{ϑ} vypočteme jako:

$$U_{\vartheta} = \frac{1}{R_{\vartheta}} = \frac{1}{0,5625} \approx 1,778 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Prostup tepla $U_{\vartheta A}$ vypočteme jako:

$$U_{\vartheta A} = \frac{1}{R_{\vartheta A}} = \frac{1}{0,028} \approx 35,714 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Měrný tepelný tok \dot{q}_x vypočteme jako:

$$\dot{q}_x = \frac{\Delta T}{R_{\vartheta}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\vartheta}} = \frac{20 - (-10)}{0,5625} = \frac{30}{0,5625} \approx 53,33 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Tepelný tok \dot{Q}_x vypočteme jako:

$$\dot{Q}_x = \dot{q}_x \cdot S = 53,33 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot 20 \text{ m}^2 = 1066,6 \text{ W} \approx 1 \text{ kW}.$$

1.5.2 b

Aby se měrné tepelné odpory rovnaly, musí platit:

$$R_{\vartheta, cihla} = R_{\vartheta, izol}.$$

$$\frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}} = \frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}}.$$

Tloušťku izolace d_{izol} vypočteme jako:

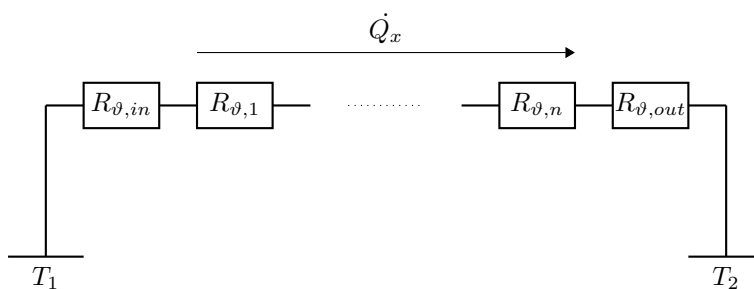
$$d_{izol} = \frac{d_{cihla} \cdot \lambda_{izol}}{\lambda_{cihla}} = \frac{0,45 \text{ m} \cdot 0,04 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}{0,8 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}} = 0,0225 \text{ m} = 2,25 \text{ cm}.$$

2 🏗️ Skládání zedí 🌶️🌶️

2.1 Tepelné schéma

U skládané zdi máme několik vrstev zdi s různou tepelnou vodivostí a tloušťkou. Navíc počítáme se součiniteli přestupu tepla na začátku (ze vnitř do zdi) a na konci (ze zdi ven).

Mějme tedy n vrstev zdi, kde i -tá vrstva má tepelnou vodivost λ_i a tloušťku d_i . Mějme součinitel přestupu tepla na začátku $\alpha_{\vartheta,in}$ a na konci $\alpha_{\vartheta,out}$. Potom můžeme pro tuto situaci nakreslit následující tepelné schéma:



Tepelný odpor $R_{\vartheta,in}$ vypočteme jako:

$$R_{\vartheta,in} = \frac{1}{\alpha_{\vartheta,in}}.$$

Tepelný odpor $R_{\vartheta,out}$ vypočteme jako:

$$R_{\vartheta,out} = \frac{1}{\alpha_{\vartheta,out}}.$$

Tepelný odpor $R_{\vartheta,i}$ vypočteme jako:

$$R_{\vartheta,i} = \frac{d_i}{\lambda_i}.$$

Celkový tepelný odpor $R_{\vartheta,\Sigma}$ zdi s přechody vypočteme jako:

$$R_{\vartheta,\Sigma} = R_{\vartheta,in} + \sum_{i=1}^n R_{\vartheta,i} + R_{\vartheta,out}.$$

Celkový absolutní tepelný odpor $R_{\vartheta A,\Sigma}$ zdi s přechody vypočteme jako:

$$R_{\vartheta A,\Sigma} = \frac{R_{\vartheta,\Sigma}}{S}.$$

Součinitel prostupu tepla $U_{\vartheta,\Sigma}$ zdi s přechody vypočteme jako:

$$U_{\vartheta,\Sigma} = \frac{1}{R_{\vartheta,\Sigma}} = \frac{1}{R_{\vartheta,in} + \sum_{i=1}^n R_{\vartheta,i} + R_{\vartheta,out}} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{\vartheta,in}} + \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_{\vartheta,out}}} =$$

$$= \left(\frac{1}{\alpha_{\vartheta, in}} + \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_{\vartheta, out}} \right)^{-1}$$

Prostup tepla $U_{\vartheta A, \Sigma}$ zdi s přechody vypočteme jako:

$$U_{\vartheta A, \Sigma} = U_{\vartheta, \Sigma} \cdot S.$$

Měrný tepelný tok \dot{q}_x zdi s přechody vypočteme pomocí měrných odporů jako:

$$\dot{q}_x = \frac{\Delta T}{R_{\vartheta, \Sigma}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\vartheta, \Sigma}}.$$

Pomocí součinitele prostupu tepla $U_{\vartheta, \Sigma}$ můžeme vypočítat měrný tepelný tok \dot{q}_x jako:

$$\dot{q}_x = U_{\vartheta, \Sigma} \cdot \Delta T = U_{\vartheta, \Sigma} \cdot (T_1 - T_2).$$

Celkový tepelný tok \dot{Q}_x zdi s přechody vypočteme jako:

$$\dot{Q}_x = \dot{q}_x \cdot S.$$

2.2 Číselný příklad

Teplota na začátku zdi je $T_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, teplota na konci zdi je $T_2 = -10 \text{ }^\circ\text{C}$. Plocha průřezu zdi je $S = 20 \text{ m}^2$. Uvažujme dvouvrstvou zeď složenou z cihly a polystyrénu. Parametry cihly jsou:

- $\lambda_{cihla} = 0,8 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$,
- $d_{cihla} = 45 \text{ cm}$.

Parametry polystyrénu jsou:

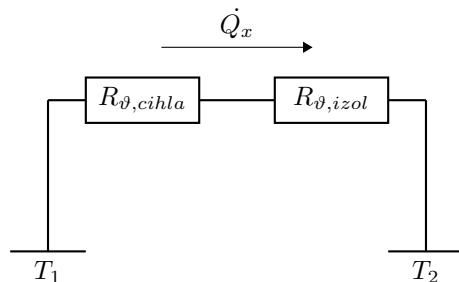
- $\lambda_{izol} = 0,04 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$,
- $d_{izol} = 5 \text{ cm}$.

Uvažujte, že izolace je na konci zdi (z venčí). Zanedbejte součinitele přestupu tepla na začátku a na konci zdi.

- a) Nakreslete tepelné schéma a vypočítejte celkový tepelný odpor $R_{\vartheta, \Sigma}$, celkový absolutní tepelný odpor $R_{\vartheta A, \Sigma}$, součinitel prostupu tepla $U_{\vartheta, \Sigma}$, absolutní součinitel prostupu tepla $U_{\vartheta A, \Sigma}$, měrný tepelný tok \dot{q}_x a tepelný tok \dot{Q}_x .
- b) Nakreslete graf závislosti teploty na ose x pro případ izolace z venčí a pro případ izolace zevnitř. Diskutujte výhody a nevýhody obou případů.

2.2.1 a

Tepelné schéma bude vypadat následovně:



Tepelný odpor cihly $R_{\vartheta, cihla}$ vypočteme jako:

$$R_{\vartheta, cihla} = \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}} = \frac{0,45 \text{ m}}{0,8 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}} = 0,5625 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Tepelný odpor izolace $R_{\vartheta, izol}$ vypočteme jako:

$$R_{\vartheta, izol} = \frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} = \frac{0,05 \text{ m}}{0,04 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}} = 1,25 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Absolutní tepelný odpor cihly $R_{\vartheta A, cihla}$ vypočteme jako:

$$R_{\vartheta A, cihla} = \frac{R_{\vartheta, cihla}}{S} = \frac{0,5625}{20} \approx 0,028 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Absolutní tepelný odpor izolace $R_{\vartheta A, izol}$ vypočteme jako:

$$R_{\vartheta A, izol} = \frac{R_{\vartheta, izol}}{S} = \frac{1,25}{20} = 0,063 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Celkový tepelný odpor $R_{\vartheta, \Sigma}$ vypočteme jako:

$$R_{\vartheta, \Sigma} = R_{\vartheta, cihla} + R_{\vartheta, izol} = 0,5625 + 1,25 = 1,8125 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Celkový absolutní tepelný odpor $R_{\vartheta A, \Sigma}$ vypočteme jako:

$$R_{\vartheta A, \Sigma} = R_{\vartheta A, cihla} + R_{\vartheta A, izol} = 0,028 + 0,063 = 0,091 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Součinitel prostupu tepla $U_{\vartheta, \Sigma}$ vypočteme jako:

$$U_{\vartheta, \Sigma} = \frac{1}{R_{\vartheta, \Sigma}} = \frac{1}{1,8125} \approx 0,5517 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Absolutní součinitel prostupu tepla $U_{\vartheta A, \Sigma}$ vypočteme jako:

$$U_{\vartheta A, \Sigma} = U_{\vartheta, \Sigma} \cdot S = 0,5517 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1} \cdot 20 \text{ m}^2 = 11,034 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Měrný tepelný tok \dot{q}_x vypočteme jako:

$$\dot{q}_x = \frac{\Delta T}{R_{\vartheta, \Sigma}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\vartheta, \Sigma}} = \frac{20 - (-10)}{1,8125} = \frac{30}{1,8125} \approx 16,55 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Tepelný tok \dot{Q}_x vypočteme jako:

$$\dot{Q}_x = \dot{q}_x \cdot S = 16,55 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot 20 \text{ m}^2 = 331 \text{ W} = 0,331 \text{ kW}.$$

2.2.2 b

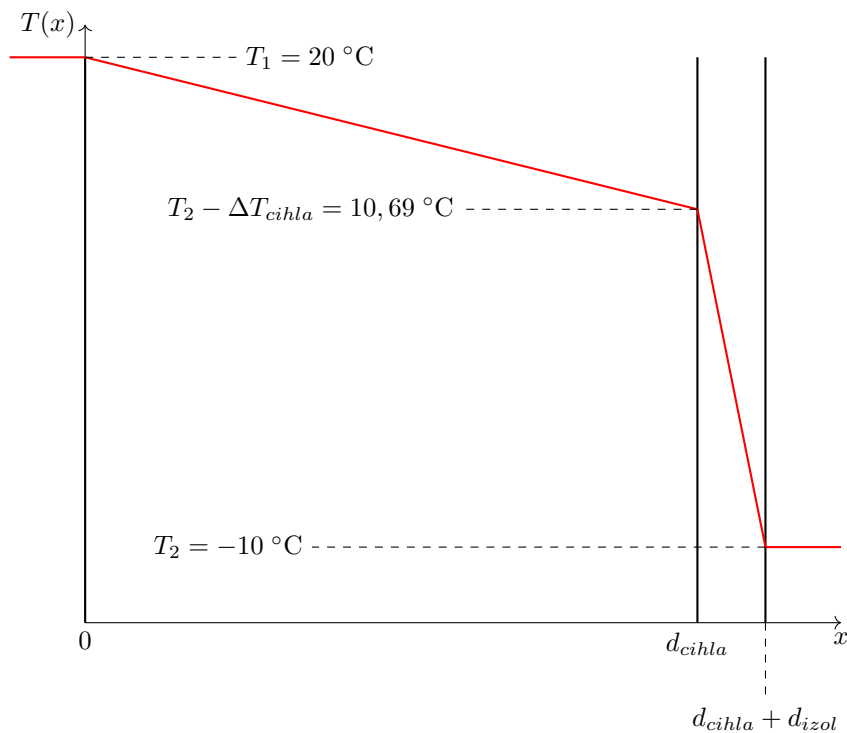
Změnu teploty v cihle vypočteme jako:

$$\Delta T_{cihla} = \dot{q}_x \cdot R_{\vartheta, cihla} = 16,55 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot 0,5625 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1} = 9,31 \text{ K}.$$

Změnu teploty v izolaci vypočteme jako:

$$\Delta T_{izol} = \dot{q}_x \cdot R_{\vartheta, izol} = 16,55 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot 1,25 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1} = 20,69 \text{ K}.$$

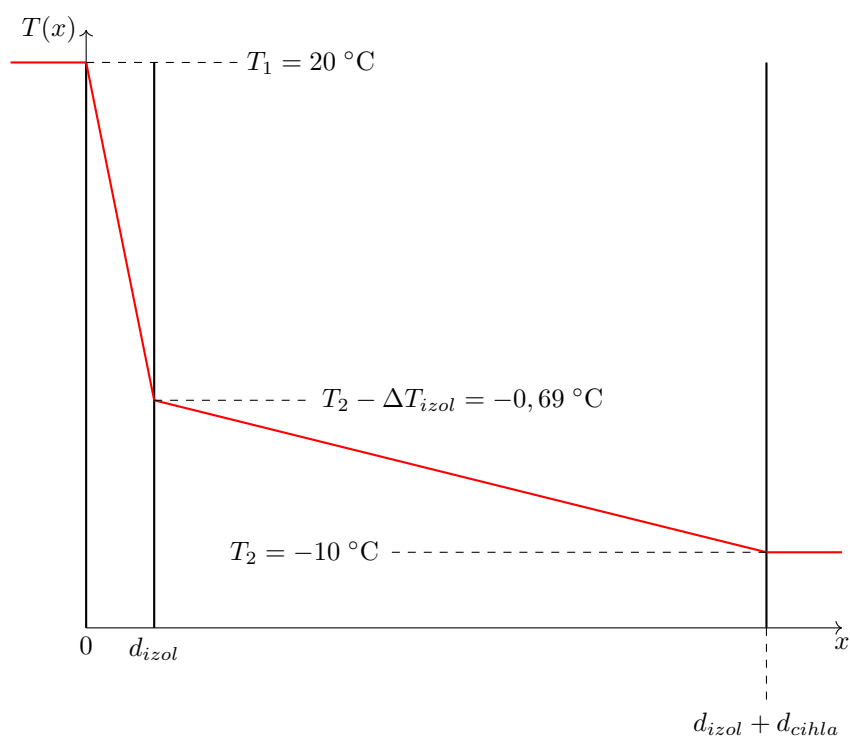
Obrázek pro případ izolace z venčí bude vypadat následovně:



Výhody toho položení je, že pokud je zeď zevnitř, tak funguje jako akumulátor tepla. Je to vhodné pro dlouhodobé vytápění. Nevýhodou je, že pokud se například

jedná o chalupu, kam se jezdí pouze na víkend, tak nějakou dobu trvá, než se teplo naakumuluje a v místnosti bude teplo. Tento typ izolace se používá častěji.

Obrázek pro případ izolace zevnitř bude vypadat následovně:



Toto položení se rychleji vytopí, ale také se rychleji ochladí, jelikož izolace nefunguje jako dobrý akumulátor tepla. Pokud například zasvítlí slunce, tak se místnost rychleji zahřeje. Je zde riziko kondenzace a tvoření vlhkosti a plísní.

3 PENB

Mějme dům s plochou střechou o parametrech:

- plocha střechy $S_{střecha} = 100 \text{ m}^2$,
- součinitel prostupu tepla střechy $U_{\vartheta, střecha} = 0,3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$,
- plocha podlahy $S_{podlaha} = 100 \text{ m}^2$,
- měrný součinitel prostupu tepla podlahy $U_{\vartheta, podlaha} = 0,8 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$,
- plocha obvodových stěn $S_{zed} = 4 \cdot 10 \cdot 3 \text{ m}^2$ (4 stěny o výšce 2 metry a délce 10 metrů),
- obvodová stěna je tvořena cihlou s tepelnou vodivostí $\lambda_{cihla} = 0,8 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ a tloušťkou $d_{cihla} = 45 \text{ cm}$.

Zanedbejte součinitele přestupu tepla, ztráty tepla na oknech a dveřích. Berte v úvahu, že venkovní teplota je okolo celého domu včetně podlahy stejná.

- Vypočítejte průměrný měrný součinitel prostupu tepla $U_{\vartheta, avg}$ pro celý dům.
- Vypočítejte jak silnou izolaci d_{izol} s tepelnou vodivostí $\lambda_{izol} = 0,04 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ musíte použít, aby průměrný součinitel prostupu tepla $U_{\vartheta, avg}^*$ byl $0,5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.

3.0.1 a

Plochu obvodových stěn S_{zed} vypočteme jako:

$$S_{zed} = 4 \cdot 10 \cdot 3 = 120 \text{ m}^2.$$

Celkovou plochu S_{Σ} vypočteme jako:

$$S_{\Sigma} = S_{střecha} + S_{podlaha} + S_{zed} = 100 + 100 + 120 = 320 \text{ m}^2.$$

Součinitel prostupu tepla zdi $U_{\vartheta, cihla}$ vypočteme jako:

$$U_{\vartheta, cihla} = \frac{\lambda_{cihla}}{d_{cihla}} = \frac{0,8 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}{0,45 \text{ m}} = 1,778 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Průměrný součinitel prostupu tepla $U_{\vartheta, avg}$ vypočteme jako:

$$\begin{aligned} U_{\vartheta, avg} &= \frac{1}{S_{\Sigma}} \cdot (U_{\vartheta, střecha} \cdot S_{střecha} + U_{\vartheta, podlaha} \cdot S_{podlaha} + U_{\vartheta, cihla} \cdot S_{zed}) = \\ &= \frac{1}{320} \cdot (0,3 \cdot 100 + 0,8 \cdot 100 + 1,778 \cdot 120) = \frac{1}{320} \cdot (30 + 80 + 213,36) = \\ &= \frac{323,36}{320} \approx 1,01 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}. \end{aligned}$$

3.0.2 b

Součinitel prostupu tepla zdi s izolací $U_{\vartheta,zed}$ vypočteme jako:

$$U_{\vartheta,zed} = \left(\frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} + \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}} \right)^{-1}$$

Průměrný součinitel prostupu tepla $U_{\vartheta,avg}^*$ vypočteme jako:

$$\begin{aligned} U_{\vartheta,avg}^* &= \frac{1}{S_{\Sigma}} \cdot (U_{\vartheta,strecha} \cdot S_{strecha} + U_{\vartheta,podlaha} \cdot S_{podlaha} + U_{\vartheta,zed} \cdot S_{zed}) = \\ &= \frac{1}{S_{\Sigma}} \cdot (U_{\vartheta,strecha} \cdot S_{strecha} + U_{\vartheta,podlaha} \cdot S_{podlaha} + \left(\frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} + \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}} \right)^{-1} \cdot S_{zed}) \end{aligned}$$

Nyní je třeba vyřešit rovnici pro d_{izol} :

$$\begin{aligned} U_{\vartheta,avg}^* &= \frac{1}{S_{\Sigma}} \cdot (U_{\vartheta,strecha} \cdot S_{strecha} + U_{\vartheta,podlaha} \cdot S_{podlaha} + \left(\frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} + \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}} \right)^{-1} \cdot S_{zed}) \\ U_{\vartheta,avg}^* \cdot S_{\Sigma} &= (U_{\vartheta,strecha} \cdot S_{strecha} + U_{\vartheta,podlaha} \cdot S_{podlaha} + \left(\frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} + \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}} \right)^{-1} \cdot S_{zed}) \\ U_{\vartheta,avg}^* \cdot S_{\Sigma} - U_{\vartheta,strecha} \cdot S_{strecha} - U_{\vartheta,podlaha} \cdot S_{podlaha} &= \left(\frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} + \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}} \right)^{-1} \cdot S_{zed} \\ \left(\frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} + \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}} \right)^{-1} &= \frac{U_{\vartheta,avg}^* \cdot S_{\Sigma} - U_{\vartheta,strecha} \cdot S_{strecha} - U_{\vartheta,podlaha} \cdot S_{podlaha}}{S_{zed}} \\ \frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} + \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}} &= \left(\frac{U_{\vartheta,avg}^* \cdot S_{\Sigma} - U_{\vartheta,strecha} \cdot S_{strecha} - U_{\vartheta,podlaha} \cdot S_{podlaha}}{S_{zed}} \right)^{-1} \\ \frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} &= \left(\frac{U_{\vartheta,avg}^* \cdot S_{\Sigma} - U_{\vartheta,strecha} \cdot S_{strecha} - U_{\vartheta,podlaha} \cdot S_{podlaha}}{S_{zed}} \right)^{-1} - \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}} \\ d_{izol} &= \lambda_{izol} \cdot \left(\left(\frac{U_{\vartheta,avg}^* \cdot S_{\Sigma} - U_{\vartheta,strecha} \cdot S_{strecha} - U_{\vartheta,podlaha} \cdot S_{podlaha}}{S_{zed}} \right)^{-1} - \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}} \right) \end{aligned}$$

Nyní můžeme dosadit a vypočítat:

$$\begin{aligned} d_{izol} &= 0,04 \cdot \left(\left(\frac{0,5 \cdot 320 - 0,3 \cdot 100 - 0,8 \cdot 100}{120} \right)^{-1} - \frac{0,45}{0,8} \right) = \\ &= 0,04 \cdot \left(\left(\frac{160 - 30 - 80}{120} \right)^{-1} - \frac{0,45}{0,8} \right) = \\ &= 0,04 \cdot \left(\left(\frac{50}{120} \right)^{-1} - \frac{0,45}{0,8} \right) = 0,04 \cdot (2,4 - 0,5625) = \\ &= 0,04 \cdot 1,8375 = 0,0735 \text{ m} = 7,35 \text{ cm}. \end{aligned}$$

4 ❄️ Topná sezóna 🌶️🌶️🌶️

Průměrná venkovní teplota v topné sezóně je $\bar{T}_{out} = 5\text{ °C}$. Vnitřní teplota je $T_{in} = 20\text{ °C}$. Doba topné sezóny je 200 dní. Celková plocha je $S = 300\text{ m}^2$. Součinitel prostupu tepla je $U_{\vartheta} = 0,5\text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$. Jaký množství tepla projde stěnami za celou topnou sezónu?

4.1 Řešení

Celkové množství tepla, které projde stěnami za celou topnou sezónu Q vypočteme jako:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} \dot{Q} \cdot dt,$$

kde:

\dot{Q} je tepelný tok (W),

t_1 je začátek topné sezóny (h),

t_2 je konec topné sezóny (h).

Integrál můžeme rozepsat jako:

$$\begin{aligned} Q &= \int_{t_1}^{t_2} U_{\vartheta} \cdot S \cdot (T_{in} - T_{out}(t)) \cdot dt = U_{\vartheta} \cdot S \cdot \int_{t_1}^{t_2} (T_{in} - T_{out}(t)) \cdot dt = \\ &= U_{\vartheta} \cdot S \cdot T_{in} \cdot \int_{t_1}^{t_2} dt - U_{\vartheta} \cdot S \cdot \int_{t_1}^{t_2} T_{out}(t) \cdot dt = \\ &= U_{\vartheta} \cdot S \cdot T_{in} \cdot (t_2 - t_1) - U_{\vartheta} \cdot S \cdot \int_{t_1}^{t_2} T_{out}(t) \cdot dt. \end{aligned}$$

Nyní uděláme odbočku, kde vyjádříme průměrnou venkovní teplotu \bar{T}_{out} jako:

$$\bar{T}_{out} = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} T_{out}(t) \cdot dt.$$

Vyjádříme daný integrál:

$$\int_{t_1}^{t_2} T_{out}(t) \cdot dt = \bar{T}_{out} \cdot (t_2 - t_1).$$

Dosadíme zpět do původní rovnice:

$$\begin{aligned} Q &= U_{\vartheta} \cdot S \cdot T_{in} \cdot (t_2 - t_1) - U_{\vartheta} \cdot S \cdot \bar{T}_{out} \cdot (t_2 - t_1) = \\ &= U_{\vartheta} \cdot S \cdot (T_{in} - \bar{T}_{out}) \cdot (t_2 - t_1). \end{aligned}$$

Nyní můžeme dosadit a vypočítat:

$$\begin{aligned} Q &= 0,5 \cdot 300 \cdot (20 - 5) \cdot (200 \cdot 24 \cdot 3\,600 - 0) = 0,5 \cdot 300 \cdot 15 \cdot 200 \cdot 24 \cdot 3\,600 = \\ &= 38,9\text{ GJ}. \end{aligned}$$

5 Cihlová pec

U cihlové pece je vysoký rozdíl teplot, tudíž tepelnou vodivost je třeba uvažovat jako proměnnou. Tepelnou vodivost λ můžeme zapsat jako:

$$\lambda(x) = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot T,$$

Pro zeď o tloušťce d budeme uvažovat následující zjednodušující předpoklady:

- $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$,
- $\vec{v} = 0$,
- $Q_v = 0$,
- $\lambda(x) = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot T$,
- $T = T(x)$ - teplota závislá pouze na ose x .

Poté Fourierova-Kirchhoffova rovnice bude mít tvar:

$$0 = \frac{d}{dx} \left(\lambda(T) \cdot \frac{dT}{dx} \right).$$

Fourierův zákon pro tepelný tok bude mít tvar:

$$\dot{q}_x = -\lambda(T) \cdot \frac{dT}{dx}.$$

Vynásobíme rovnici mínus jedna:

$$-\dot{q}_x = \lambda(T) \cdot \frac{dT}{dx}.$$

Pokud dosadíme do Fourierova-Kirchhoffovy rovnice, dostaneme:

$$0 = \frac{d}{dx} (-\dot{q}_x).$$

Z toho vidíme, že měrný tepelný tok \dot{q}_x je konstantní a nezávisí na poloze x . Můžeme tedy rozepsat Fourierův zákon jako:

$$-\dot{q}_x = (\lambda_0 + \lambda_1 \cdot T) \cdot \frac{dT}{dx}.$$

Můžeme řešit tuto diferenciální rovnici separací proměnných:

$$-\dot{q}_x \cdot dx = (\lambda_0 + \lambda_1 \cdot T) \cdot dT.$$

Nyní meze budou jak pro x , tak pro T :

- $x = 0 \Rightarrow T = T_1$,

- $x = d \Rightarrow T = T_2$.

Rovnici můžeme integrovat:

$$\begin{aligned}
-\int_0^d \dot{q}_x \cdot dx &= \int_{T_1}^{T_2} (\lambda_0 + \lambda_1 \cdot T) \cdot dT \\
-\dot{q}_x [x]_0^d &= \lambda_0 [T]_{T_1}^{T_2} + \frac{\lambda_1}{2} [T^2]_{T_1}^{T_2} \\
-\dot{q}_x \cdot d &= \lambda_0 \cdot (T_2 - T_1) + \frac{\lambda_1}{2} \cdot (T_2^2 - T_1^2) \\
-\dot{q}_x \cdot d &= \lambda_0 \cdot (T_2 - T_1) + \frac{\lambda_1}{2} \cdot (T_2 - T_1) \cdot (T_2 + T_1) \\
-\dot{q}_x \cdot d &= (T_2 - T_1) \cdot \left(\lambda_0 + \frac{\lambda_1}{2} \cdot (T_2 + T_1) \right).
\end{aligned}$$

Nyní odvodíme střední hodnotu tepelné vodivosti $\bar{\lambda}$:

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda} &= \frac{1}{T_2 - T_1} \cdot \int_{T_1}^{T_2} \lambda(T) \cdot dT = \frac{1}{T_2 - T_1} \cdot \int_{T_1}^{T_2} (\lambda_0 + \lambda_1 \cdot T) \cdot dT \\
&= \frac{1}{T_2 - T_1} \cdot \left[\lambda_0 \cdot T + \frac{\lambda_1}{2} \cdot T^2 \right]_{T_1}^{T_2} = \frac{1}{T_2 - T_1} \cdot \left(\lambda_0 \cdot (T_2 - T_1) + \frac{\lambda_1}{2} \cdot (T_2^2 - T_1^2) \right) = \\
&= \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{2} \cdot (T_2 + T_1).
\end{aligned}$$

Nyní můžeme videt, že člen v závorce u vyřešené diferenciální rovnice je roven střední hodnotě tepelné vodivosti $\bar{\lambda}$:

$$-\dot{q}_x \cdot d = (T_2 - T_1) \cdot \bar{\lambda}.$$

Nyní můžeme odvodit vztah pro měrný tepelný tok \dot{q}_x :

$$\dot{q}_x = \frac{T_1 - T_2}{d} \cdot \bar{\lambda}.$$

6 ☀️ Sálavá clona 🌶️🌶️

Mějme dvě desky. První deska má teplotu T_1 a druhá deska má teplotu T_2 . Obě desky mají stejnou plochu S a stejnou emisivitu ε .

- a) Jaký je sálavý výkon $P_{1 \rightarrow 2}$ (W) sálání první desky na druhou desku?
- b) Dejme mezi desky sálavou clonu o stejné ploše S a emisivitě ε . Jaký je sálavý výkon $P_{1 \rightarrow 2}$ (W) sálání první desky na druhou desku přes clonu a jaký je poměr tohoto výkonu k výkonu z bodu a)?

6.1 a

Sálavý výkon $P_{1 \rightarrow 2}$ můžeme vypočítat pomocí:

$$P_{1 \rightarrow 2} = \frac{S \cdot \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1},$$

kde:

S je plocha desek (m^2),

σ je Stefanova-Boltzmannova konstanta ($5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$),

T_1 je teplota první desky (K),

T_2 je teplota druhé desky (K),

ε_1 je emisivita první desky,

ε_2 je emisivita druhé desky.

Emisivity ε_1 a ε_2 jsou stejné, tudíž:

$$P_{1 \rightarrow 2} = \frac{S \cdot \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} - 1} = \frac{S \cdot \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{2}{\varepsilon} - 1} = k \cdot (T_1^4 - T_2^4).$$

6.2 b

Sálavý výkon z destičky 1 na clonu:

$$P_{1 \rightarrow clona} = k \cdot (T_1^4 - T_{clona}^4).$$

Sálavý výkon z clony na destičku 2:

$$P_{clona \rightarrow 2} = k \cdot (T_{clona}^4 - T_2^4).$$

Tyto výkony se musí rovnat:

$$\begin{aligned} P_{1 \rightarrow clona} &= P_{clona \rightarrow 2} \\ k \cdot (T_1^4 - T_{clona}^4) &= k \cdot (T_{clona}^4 - T_2^4) \\ T_1^4 - T_{clona}^4 &= T_{clona}^4 - T_2^4 \end{aligned}$$

$$2 \cdot T_{clona}^4 = T_1^4 + T_2^4$$

$$T_{clona}^4 = \frac{T_1^4 + T_2^4}{2}$$

$$T_{clona} = \sqrt[4]{\frac{T_1^4 + T_2^4}{2}}.$$

Sálavý výkon z destičky 1 na destičku 2 přes clonu:

$$\begin{aligned} P_{1 \rightarrow 2} &= k \cdot (T_1^4 - T_{clona}^4) = k \cdot \left(T_1^4 - \frac{T_1^4 + T_2^4}{2} \right) = \\ &= k \cdot \frac{2 \cdot T_1^4 - T_1^4 - T_2^4}{2} = k \cdot \frac{T_1^4 - T_2^4}{2}. \end{aligned}$$

Poměr tohoto výkonu k výkonu z bodu a):

$$\frac{P_{1 \rightarrow 2, a}}{P_{1 \rightarrow 2, b}} = \frac{k \cdot \frac{T_1^4 - T_2^4}{2}}{k \cdot (T_1^4 - T_2^4)} = \frac{1}{2}.$$

7 Destička ve vesmíru

Mějme destičku ve vesmíru, na kterou dopadá sluneční záření s následujícími parametry:

- plocha $S = 1 \text{ m}^2$,
- intenzita slunečního záření $\dot{q} = 1348 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$,
- emisivita ε ,
- pohltivost A .

Destička má stejnou teplotu na obou stranách (je nekonečně tenká). Sluneční záření má intenzitu $\dot{q} = 1348 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. Stefanova-Boltzmannova konstanta je $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$. Teplota vesmíru je $T_{space} = 3 \text{ K}$.

Odvoďte vzorec pro rovnovážnou teplotu destičky T v závislosti na úhlu natočení vůči slunci α a vypočítejte teplotu pro hodnoty α : 0, 45 a 90 °.

7.0.1 Řešení

Tepelný tok \dot{Q}_{dop} (W), který na destičku dopadne:

$$\dot{Q}_{dop} = \dot{q} \cdot S \cdot \cos \alpha$$

Tepelný tok, který destička přijme:

$$\dot{Q}_{in} = A \cdot \dot{Q}_{dop} = A \cdot \dot{q} \cdot S \cdot \cos \alpha$$

Tepelný tok, který destička vyzařuje:

$$\dot{Q}_{out} = 2 \cdot S \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot (T^4 - T_{space}^4)$$

Budeme hledat teplotu T , při které bude tepelný tok \dot{Q}_{in} roven tepelnému toku \dot{Q}_{out} :

$$\dot{Q}_{in} = \dot{Q}_{out}$$

$$A \cdot \dot{q} \cdot S \cdot \cos \alpha = 2 \cdot S \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot (T^4 - T_{space}^4)$$

Při tepelné rovnováze platí:

$$A = \varepsilon.$$

Dostaneme:

$$\dot{q} \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \sigma \cdot (T^4 - T_{space}^4)$$

$$\frac{\dot{q} \cdot \cos \alpha}{2 \cdot \sigma} = T^4 - T_{space}^4$$

$$T^4 = \frac{\dot{q} \cdot \cos \alpha}{2 \cdot \sigma} + T_{space}^4$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{\dot{q} \cdot \cos \alpha}{2 \cdot \sigma}} + T_{space}^4$$

Nyní můžeme dosadit do vzorce a získat vzorec pro teplotu T v závislosti na úhlu natočení α :

$$T = \sqrt[4]{\frac{1348 \cdot \cos \alpha}{2 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8}}} + 3^4 = \sqrt[4]{1,189 \cdot 10^{10} \cdot \cos \alpha + 81}.$$

Nyní můžeme vypočítat teplotu pro hodnoty α : 0, 45 a 90 °. Pro $\alpha = 0$:

$$T = \sqrt[4]{1,189 \cdot 10^{10} \cdot \cos 0^\circ + 81} = \sqrt[4]{1,189 \cdot 10^{10} + 81} = 330,21 \text{ K}.$$

Pro $\alpha = 45$:

$$T = \sqrt[4]{1,189 \cdot 10^{10} \cdot \cos 45^\circ + 81} = \sqrt[4]{1,189 \cdot 10^{10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 81} = 302,79 \text{ K}.$$

Pro $\alpha = 90$:

$$T = \sqrt[4]{1,189 \cdot 10^{10} \cdot \cos 90^\circ + 81} = \sqrt[4]{1,189 \cdot 10^{10} \cdot 0 + 81} = \sqrt[4]{81} = 3 \text{ K}.$$