Cvičení 5 - Aplikace

Elektroenergetika 3

Petr Jílek

2024

Obsah

1 🚿 Průtokový ohřívač 🌶️🌶️🌶️🌶️

Máme průtokový ohřívač tvořený dvěma obdelníkovými elektrodovými deskami o délce l (m) a šířce b (m). Vzdálenost mezi deskami je d (m). Mezi deskami je voda produdící o rychlostí v pouze ve směru x. Voda má měrnou tepelnou kapacitu c ($\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$) a hustotu ρ ($\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$). Elektrické napětí mezi deskami je U (V). Odvoďte změnu teploty vody T_2 (K) na výstupu průtokového ohřívače, pokud na vstupu je voda o teplotě T_1 (K).

Budou platit následující předpoklady:

- $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$,
- $\nabla \cdot (\lambda \cdot \vec{\nabla} T) = 0$.

1.1 Řešení

Foruier-Kirchhoffova rovnice:

$$\rho \cdot c \cdot \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \dot{Q}_v, \qquad (\mathrm{W \cdot m^{-3}}) \tag{1}$$

kde:
ρ – hustota ($\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$),
c – měrná tepelná kapacita ($\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$),
$\vec{v}$ – rychlost ($\mathrm{m \cdot s^{-1}}$),
$\vec{\nabla} T$ – gradient teploty ($\mathrm{K \cdot m^{-1}}$),
$\dot{Q}_v$ – objemový zdroj tepla ($\mathrm{W \cdot m^{-3}}$).

Vektor rychlosti $\vec{v}$ je:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vektor rychlosti $\vec{v}$ má pouze složku v, protože voda teče pouze ve směru osy x. Můžeme tedy rovnici zjednodušit na:

$$\rho \cdot c \cdot v \cdot \frac{dT}{dx} = Q_v.$$

Dále je třeba vyjádřit rychlost v a objemový zdroj tepla Q_v. Rychlost v je:

$$v = \frac{\dot{V}}{S} = \frac{\dot{V}}{d \cdot b},$$

kde:
$\dot{V}$ – objemový průtok ($\mathrm{m^3 \cdot s^{-1}}$).

Objemový zdroj tepla Q_v můžeme vyjádřit pomocí intenzity elektrického pole E a proudové hustoty J:

$$Q_v = E \cdot J,$$

kde:
E – intenzita elektrického pole $(\mathrm{V} \cdot \mathrm{m}^{-1})$,
J – proudová hustota $(\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^{-2})$.

Proudovou hustotu J můžeme vyjádřit pomocí Ohmova zákona v diferenciálním tvaru:

$$J = \sigma_e \cdot E,$$

kde:
σ_e – měrná elektrická vodivost $(\Omega \cdot \mathrm{m}^{-1})$.

Dostaneme tedy:

$$Q_v = E \cdot \sigma_e \cdot E = \sigma_e \cdot E^2.$$

Intenzitu elektrického pole E můžeme vyjádřit pomocí napětí U a vzdálenosti mezi deskami d:

$$E = \frac{U}{d}.$$

Dostaneme tedy:

$$Q_v = \sigma_e \cdot \left(\frac{U}{d}\right)^2.$$

Zde je třeba uvažovat měrnou elektrickou vodivost σ_e jako proměrnou závislou na teplotě. U kovů se vzrůstající teplotou se měrná elektrická vodivost snižuje, jelikož volné nostiče náboje mají problém se v rozpohybované krystalové mřížce kvůli teplotě pohybovat. Naopak u iontových roztoku jako třeba u vody se měrná elektrická vodivost zvyšuje s teplotou. Nahradíme tedy σ_e lineární funkcí teploty $\sigma_e(T)$:

$$\sigma_e = \sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T.$$

Nyní můžeme dosadit vše do rovnice:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\dot{V}}{d \cdot b} \cdot \frac{dT}{dx} = (\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T) \cdot \left(\frac{U}{d}\right)^2.$$

Dostáváme diferenciální rovnici, kterou můžeme řešit separací proměnných:

$$\frac{dT}{\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T} = \frac{U^2 \cdot b}{d \cdot \rho \cdot c \cdot \dot{V}} \cdot dx.$$

Pravou staranu můžeme pro lepší čitelnost narhadit:

$$\xi = \frac{U^2 \cdot b}{d \cdot \rho \cdot c \cdot \dot{V}}.$$

Dostáváme:

$$\frac{dT}{\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T} = \xi \cdot dx.$$

Integrujeme obě strany:

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T} = \int_0^l \xi \cdot dx,$$

kde:
T_1 – počáteční teplota (K),
T_2 – konečná teplota (K),
l – délka průtokového ohřívače (m).

Dostáváme:

$$\left[\frac{1}{\sigma_{e,1}} \cdot \ln \left(\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T \right) \right]_{T_1}^{T_2} = \left[\xi \cdot x \right]_0^l$$

$$\frac{1}{\sigma_{e,1}} \cdot \ln \left(\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_2 \right) - \frac{1}{\sigma_{e,1}} \cdot \ln \left(\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_1 \right) = \xi \cdot l$$

$$\ln \left(\frac{\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_2}{\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_1} \right) = \sigma_{e,1} \cdot \xi \cdot l$$

$$\frac{\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_2}{\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_1} = e^{\sigma_{e,1} \cdot \xi \cdot l}$$

$$\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_2 = \left(\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_1 \right) \cdot e^{\sigma_{e,1} \cdot \xi \cdot l}$$

$$T_2 = \frac{\left(\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_1 \right) \cdot e^{\sigma_{e,1} \cdot \xi \cdot l} - \sigma_{e,0}}{\sigma_{e,1}} = \frac{\sigma_{e,0} \cdot e^{\sigma_{e,1} \cdot \xi \cdot l} - \sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_1 \cdot e^{\sigma_{e,1} \cdot \xi \cdot l}}{\sigma_{e,1}} =$$

$$= \frac{\sigma_{e,0} \cdot e^{\sigma_{e,1} \cdot \xi \cdot l} - \sigma_{e,0}}{\sigma_{e,1}} + T_1 \cdot e^{\sigma_{e,1} \cdot \xi \cdot l}.$$

Pokud za ξ dosadíme původní výraz, dostaneme:

$$T_2 = \frac{\sigma_{e,0} \cdot e^{\sigma_{e,1} \cdot \frac{U^2 \cdot b}{d \cdot \rho \cdot c \cdot \dot{V}} \cdot l} - \sigma_{e,0}}{\sigma_{e,1}} + T_1 \cdot e^{\sigma_{e,1} \cdot \frac{U^2 \cdot b}{d \cdot \rho \cdot c \cdot \dot{V}} \cdot l}.$$