Cvičení 1 - Energie

Elektroenergetika 3

Petr Jílek

2024

Obsah

1 🏔️ Potenciální energie 🌶️

Do jaké výšky vynese energie jedné Fidorky (30 g → 162 kcal) 80 kg člověka?

a) Gravitační zrychlení je konstantní s hodnotou 9,81 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

b) Počáteční výška je 0 m nad mořem a gravitační zrychlení je proměnné. Známe:

- gravitační konstanta: $G = 6,67430 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$,
- poloměr Země: $R = 6\ 371$ km,
- hmotnost Země: $M = 5,97219 \cdot 10^{24}$ kg.

1.1 a

Energie jedné Fidorky:

$$162\ \mathrm{kcal} = 162\ \mathrm{kcal} \cdot 4\ 184\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kcal}} = 677\ 808\ \mathrm{J}.$$

Ze vzorce pro potenciální energii vyjádříme výšku:

$$E_p = m \cdot g \cdot \Delta h \Rightarrow \Delta h = \frac{E_p}{m \cdot g} = \frac{677\ 808}{80 \cdot 9,81} \approx 863,7\ m.$$

1.2 b 🌶️🌶️🌶️

Nejdříve si odvodíme vzorec pro gravitační zrychlení z Newtonova gravitačního zákona:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}, \qquad (\mathrm{N}) \tag{1}$$

kde:
F – gravitační síla (N),
G – gravitační konstanta ($\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$),
m_1 – hmotnost prvního tělesa (kg),
m_2 – hmotnost druhého tělesa (kg),
r – vzdálenost mezi tělesy (m).

Gravitační síla je definována jako:

$$F = m \cdot g, \qquad (\mathrm{N}) \tag{2}$$

kde:
m – hmotnost (kg),
g – gravitační zrychlení ($\mathrm{m \cdot s^{-2}}$).

Dále budeme uvažovat, že hmotnost m_1 je hmotnost Země M a hmotnost m_2 je hmotnost člověka m a dosadíme do Newtonova gravitačního zákona:

$$m \cdot g = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}.$$

Poté gravitační zrychlení g je:

$$g = G \cdot \frac{M}{r^2}.$$

Takto můžeme dosadit do vzorce pro potenciální energii:

$$E_p = m \cdot g \cdot h = m \cdot G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot h.$$

Nyní je třeba si uvědomit, že gravitační zrychlení g je proměnné a závisí na výšce h. Je možné analyzovat kolik potřebujeme energie ΔE_p pro zvýšení výšky h o Δh:

$$\Delta E_p = m \cdot G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \Delta h$$

Zde se dopouštíme jisté nepřesnosti, jelikož pokud například Δh bude 2 m, tak poloměr od středu země se změní taky, čímž se změní gravitační zrychlení. Pro získání přesného výsledku je třeba nahradit Δh infinitesimálně malým dh a ΔE_p bude infinitesimálně malé dE_p:

$$dE_p = m \cdot G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot dh.$$

Toto očividně vede na diferenciální rovnici, která lze snadno řešit separací proměnných, ale pozor. Nyní bychom brali poloměr r jako konstantu. To je chyba, jelikož poloměr r se mění s výškou h. Jeden z přístupů je nahradit výšku h poloměrem r a místo posouvání se o výšku dh se posuneme o poloměr dr. Ale musíme si poté zapamatovat, že počáteční mezí je poloměr země R a konečná mez bude tedy $R + h$. Poté je možné řešit rovnici:

$$E_p = \int_R^{R+h} m \cdot G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot dr.$$

Hmotnost m a M a gravitační konstanta G je konstantní, takže je můžeme vytknout před integrál:

$$E_p = m \cdot G \cdot M \int_R^{R+h} \frac{1}{r^2} \cdot dr = m \cdot G \cdot M \cdot \left[-\frac{1}{r}\right]_R^{R+h} = m \cdot G \cdot M \cdot \left(-\frac{1}{R+h} + \frac{1}{R}\right).$$

Po úpravě dostaneme:

$$E_p = m \cdot G \cdot M \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right).$$

Nyní je třeba osamostatnit h:

$$E_p = m \cdot G \cdot M \cdot \left(\frac{R + h - R}{R \cdot (R + h)} \right) = m \cdot G \cdot M \cdot \left(\frac{h}{R \cdot (R + h)} \right)$$

$$E_p \cdot R \cdot (R + h) = m \cdot G \cdot M \cdot h$$

$$E_p \cdot R^2 + E_p \cdot R \cdot h = m \cdot G \cdot M \cdot h$$

$$E_p \cdot R \cdot h - m \cdot G \cdot M \cdot h = -E_p \cdot R^2$$

$$h \cdot (E_p \cdot R - m \cdot G \cdot M) = -E_p \cdot R^2$$

$$h = \frac{-E_p \cdot R^2}{E_p \cdot R - m \cdot G \cdot M}$$

$$h = \frac{E_p \cdot R^2}{m \cdot G \cdot M - E_p \cdot R}.$$

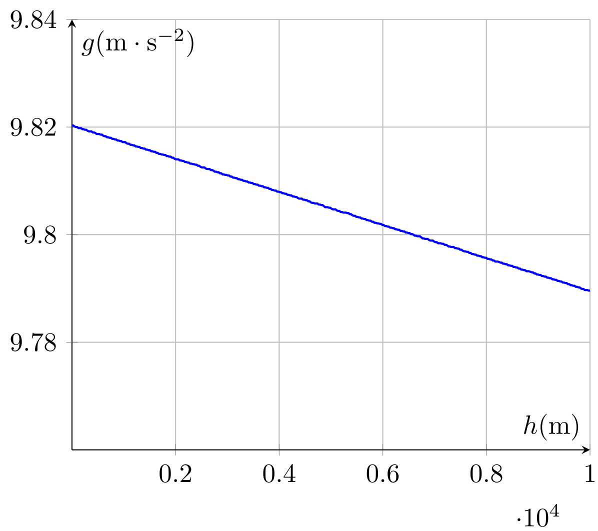
Poté dosadíme hodnoty:

$$h = \frac{677\ 808 \cdot 6\ 371\ 000^2}{80 \cdot 6,67430 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97219 \cdot 10^{24} - 677\ 808 \cdot 6\ 371\ 000} \approx$$

$$\approx 862,8\ m.$$

Jako dodatek je možné si vytvořit graf závislosti gravitačního zrychlení na výšce h nad mořem:

Závislost gravitačního zrychlení na výšce h nad mořem.



Poznámka

Gravitační zrychlení v grafu pro 0 metrů nad mořem je cca $9,82\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$ místo $9,81\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$. Vzorec pro Newtonův gravitační zákon uvažuje sféricky symetrické rozložení hmoty země. V realitě hmota země sféricky symetricky rozložena není. V jádru země je běžně látka s vyšší hustotou než na povrchu země. Tento faktor způsobuje, že reálné gravitační zrychlení na povrchu země je o něco nižší než spočítaná hodnota ze vzorce. Hodnota 9,81 $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$ je hodnot změřená.
Kvůli této nepřesnosti je i výsledná výška při počítání s proměnným gravitačním zrychlením o něco nižší, než výška při počítání s konstantním gravitačním zrychlením 9,81 $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$.

2 🔥 Tepelná kapacita 🌶️

Na jakou teplotu by energie potřebná k ohřátí vody z 10 °C na 100 °C ohřála ocel a zlato o stejné:

a) hmotnosti,

b) objemu.

Materiál	ρ (kg · m^{-3})	c (J · kg^{-1} · K^{-1})
Voda (H2O)	1 000	4 186
Ocel	7 750	450
Zlato	19 320	129

Tabulka 1: Hustota a měrná tepelná kapacita materiálů.

2.1 a

Rozdíl teplot pro vodu je:

$$\Delta T_{H2O} = 100\ °\text{C} - 10\ °\text{C} = 90\ \text{K}.$$

Podle rovnice pro měrnou tepelnou kapacitu můžeme napsat:

$$m_{H2O} \cdot c_{H2O} \cdot \Delta T_{H2O} = m_{ocel} \cdot c_{ocel} \cdot \Delta T_{ocel} = m_{zlato} \cdot c_{zlato} \cdot \Delta T_{zlato}.$$

A zároveň pro tento příklad hmotnosti jsou stejné:

$$m_{H2O} = m_{ocel} = m_{zlato} = m.$$

Tedy:

$$m \cdot c_{H2O} \cdot \Delta T_{H2O} = m \cdot c_{ocel} \cdot \Delta T_{ocel} = m \cdot c_{zlato} \cdot \Delta T_{zlato}.$$

Rovnici lze vydělit hmotností m ($m > 0$) a dostaneme:

$$c_{H2O} \cdot \Delta T_{H2O} = c_{ocel} \cdot \Delta T_{ocel} = c_{zlato} \cdot \Delta T_{zlato}.$$

Pro ocel platí:

$$\Delta T_{ocel} = \Delta T_{H2O} \cdot \frac{c_{H2O}}{c_{ocel}} = 90 \cdot \frac{4\ 186}{450} \approx 837{,}2\ \text{K}.$$

Pro zlato platí:

$$\Delta T_{zlato} = \Delta T_{H2O} \cdot \frac{c_{H2O}}{c_{zlato}} = 90 \cdot \frac{4\ 186}{129} \approx 2\ 920{,}5\ \text{K}.$$

Poznámka

Pokud bychom například takto ohřívali zlato z teploty 0 °C, tak by se zlato mělo ohřát na teplotu 2 920,5 °C. Tato teplota je vyšší než teplota tání zlata, která je 1 064 °C. Zlato by se při této teplotě roztavilo a část energie by byla spotřebována na změnu skupenství. Tudíž výsledná teplota by byla nižší.

2.2 b

Podle rovnice pro měrnou tepelnou kapacitu můžeme napsat:

$$V_{H2O} \cdot \rho_{H2O} \cdot c_{H2O} \cdot \Delta T_{H2O} = V_{ocel} \cdot \rho_{ocel} \cdot c_{ocel} \cdot \Delta T_{ocel} =$$

$$= V_{zlato} \cdot \rho_{zlato} \cdot c_{zlato} \cdot \Delta T_{zlato}$$

A zároveň pro tento příklad objemy jsou stejné:

$$V_{H2O} = V_{ocel} = V_{zlato} = V.$$

Tedy:

$$V \cdot \rho_{H2O} \cdot c_{H2O} \cdot \Delta T_{H2O} = V \cdot \rho_{ocel} \cdot c_{ocel} \cdot \Delta T_{ocel} =$$

$$= V \cdot \rho_{zlato} \cdot c_{zlato} \cdot \Delta T_{zlato}.$$

Rovnici lze vydělit objemem V $(V > 0)$ a dostaneme:

$$\rho_{H2O} \cdot c_{H2O} \cdot \Delta T_{H2O} = \rho_{ocel} \cdot c_{ocel} \cdot \Delta T_{ocel} = \rho_{zlato} \cdot c_{zlato} \cdot \Delta T_{zlato}.$$

Pro ocel platí:

$$\Delta T_{ocel} = \Delta T_{H2O} \cdot \frac{\rho_{H2O} \cdot c_{H2O}}{\rho_{ocel} \cdot c_{ocel}} = 90 \cdot \frac{1\ 000 \cdot 4\ 186}{7\ 750 \cdot 450} \approx 108,0 \text{ K}.$$

Pro zlato platí:

$$\Delta T_{zlato} = \Delta T_{H2O} \cdot \frac{\rho_{H2O} \cdot c_{H2O}}{\rho_{zlato} \cdot c_{zlato}} = 90 \cdot \frac{1\ 000 \cdot 4\ 186}{19\ 320 \cdot 129} \approx 151,1 \text{ K}.$$

3 🚿 Průtokový ohřívač 🌶️

Mějme průtokový ohřívač vody, který ohřívá studenou vodu o teplotě 10 °C na teplotu 40 °C. Při sprchování je spotřeba vody 10 l za minutu.

a) Jaký je výkon ohřívače?

b) Uvažujme, že ohřívač je na jednu fázi 230 V. Bude nám stačit jistič na 16 A?

3.1 a

Objem protečené vody za 1 hodinu je:

$$V = 10\ \frac{\mathrm{l}}{\mathrm{min}} = 10\ \frac{\frac{\mathrm{m}^3}{1000}}{\frac{\mathrm{h}}{60}} = 10\ \frac{\mathrm{m}^3}{1000} \cdot \frac{60}{\mathrm{h}} = 0,6\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}.$$

Hmotnost protečené vody za 1 hodinu je:

$$m = V \cdot \rho = 0,6\ \mathrm{m}^3 \cdot 1000\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 600\ \mathrm{kg}.$$

Množství energie za 1 hodinu potřebné k ohřátí vody je:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta T.$$

$$Q = 600 \cdot 4\ 186 \cdot 30\ = 75\ 348\ 000\ \mathrm{J}$$

Výkon ohřívače je:

$$P = \frac{Q}{t} = \frac{75\ 348\ 000\ \mathrm{J}}{1\ \mathrm{h}} = \frac{75\ 348\ 000\ \mathrm{Ws}}{3\ 600\ \mathrm{s}} = 20\ 930\ \mathrm{W} = 20,93\ \mathrm{kW}.$$

3.2 b

Výkon ohřívače je:

$$P = U_e \cdot I_e,$$

kde:
P – výkon (W),
U – elektrické napětí (V),
I – elektrický proud (A).

Z rovnice pro výkon ohřívače můžeme vyjádřit proud:

$$I = \frac{P}{U} = \frac{20,93\ \mathrm{kW}}{230\ \mathrm{V}} = \frac{20\ 930\ \mathrm{W}}{230\ \mathrm{V}} = 91\ \mathrm{A}.$$

Jistič na 16 A tedy nestačí, jelikož proud je 91 A.

4 🔋 Monočlánek 🌶️

Mějme monočlánek s kapacitou 2 500 mAh a napětím $1,2$ V.

a) Kolik litrů vody ohřeje z 10 °C na 100 °C?

b) Jak vysoko vynese 80 kg člověka?

4.1 a

Energie monočlánku je:

$$E = 1,2\ \text{V} \cdot 2\,500\ \text{mAh} = 1,2\ \text{V} \cdot 2,5\ \text{Ah} = 3\ \text{Wh} = 3 \cdot 3\,600\ \text{J} = 10\,800\ \text{J}.$$

Množství energie potřebné k ohřátí vody je:

$$Q = V \cdot \rho \cdot c \cdot \Delta T.$$

Z rovnice pro měrnou tepelnou kapacitu můžeme vyjádřit objem:

$$m = \frac{Q}{\rho \cdot c \cdot \Delta T} = \frac{10\,800}{1000 \cdot 4\,186 \cdot 90} =$$

$$= 2,87 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^3 = 2,87 \cdot 10^{-2}\ \text{l} = 28,7\ \text{ml}.$$

4.2 b

Ze vzorce pro potenciální energii vyjádříme výšku:

$$E_p = m \cdot g \cdot \Delta h \Rightarrow \Delta h = \frac{E_p}{m \cdot g} = \frac{10\,800}{80 \cdot 9,81} \approx 13,76\ \text{m}.$$