Cvičení 2 - Sdílení tepla
Elektroenergetika 3

Petr Jílek

2024

Obsah

1 🧱 Zeď 🌶️🌶️

1.1 Fourierova-Kirchhoffova rovnice 🌶️🌶️🌶️

Pro zeď o tloušťce d budeme uvažovat následující zjednodušující předpoklady:

- $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$,
- $\vec{v} = 0$,
- $\dot{Q}_V = 0$,
- $\lambda =$ konstanta,
- $T = T(x)$ - teplota závislá pouze na x.

Poté Fourierova-Kirchhoffova rovnice bude mít tvar:

$$0 = \nabla \cdot \left(\lambda \cdot \vec{\nabla} T\right) = \lambda \cdot \frac{d^2T}{dx^2}.$$

Rovnici můžeme vydělit λ ($\lambda > 0$, záporné tepelné vodivosti nemají fyzikální smysl) a získáme:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0.$$

Tuto rovnici můžeme řešit dvojí integrací. První integrace bude vypadat následovně:

$$\frac{dT}{dx} = \int 0 \cdot dx = 0 + c_1 = c_1.$$

Druhá integrace bude vypadat následovně:

$$T(x) = \int c_1 \cdot dx = c_1 \cdot x + c_2.$$

Obecné řešení bude tedy:

$$T(x) = c_1 \cdot x + c_2.$$

Pro úplné řešení je třeba definovat okrajové podmínky. Pro zeď o tloušťce d budeme uvažovat následující okrajové podmínky:

- Teplota na začátku zdi $T(0) = T_1$:

$$T_1 = T(0) = c_1 \cdot 0 + c_2 = c_2 \Rightarrow c_2 = T_1.$$

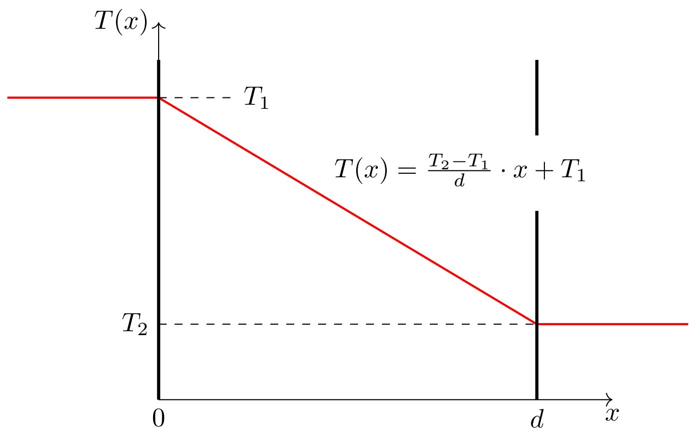
- Teplota na konci zdi $T(d) = T_2$:

$$T_2 = T(d) = c_1 \cdot d + c_2 \Rightarrow c_1 = \frac{T_2 - c_2}{d} = \frac{T_2 - T_1}{d}.$$

Úplné řešení bude tedy:

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{d} \cdot x + T_1.$$

Tuto situaci můžeme znázornit následujícím obrázkem:



1.2 Fourieruv zákon 🌶️🌶️🌶️

Nyní dosadíme řešení z předchozího příkladu do Fourierova zákona, kde za gradient teploty dosadíme derivaci teploty podle osy x, čímž získáme měrný tepelný tok q:

$$\dot{q} = -\lambda \cdot \frac{dT(x)}{dx} = -\lambda \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{T_2 - T_1}{d} \cdot x + T_1\right) =$$

$$= -\lambda \cdot \frac{T_2 - T_1}{d} = \lambda \cdot \frac{T_1 - T_2}{d} = \frac{\Delta T}{\frac{d}{\lambda}}.$$

1.3 Tepelný odpor

Dolní výraz z předchozí sekce $\frac{d}{\lambda}$ je tepelný odpor:

$$R_\vartheta = \frac{d}{\lambda}. \qquad (\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K} \cdot \mathrm{W}^{-1}) \quad (1)$$

Měrný tepelný tok q můžeme tedy zapsat jako:

$$\dot{q} = \frac{\Delta T}{R_\vartheta}. \qquad (\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2}) \quad (2)$$

Tepelný tok $\dot{Q}$ dostaneme vynásobením měrného tepelného toku plochou průřezu S:

$$\dot{Q} = \dot{q} \cdot S. \qquad (\mathrm{W}) \quad (3)$$

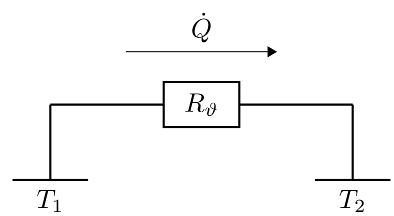
Tepelný tok $\dot{Q}$ můžeme dále rozepsat:

$$\dot{Q} = \dot{q} \cdot S = \lambda \cdot \frac{T_1 - T_2}{d} \cdot S = \lambda \cdot \frac{\Delta T}{d} \cdot S = \frac{\Delta T}{\frac{d}{\lambda \cdot S}}.$$

Dolní výraz $\frac{d}{\lambda \cdot S}$ je absolutní tepelný odpor:

$$R_{\vartheta A} = \frac{d}{\lambda \cdot S} = \frac{R_\vartheta}{S}. \qquad (\mathrm{K} \cdot \mathrm{W}^{-1}) \quad (4)$$

Tento případ lze reprezentovat tepelným obvodem následovně:



Poznámka

Výpočet tepelného odporu je analogický jako výpočet elektrického odporu. Elektrický odpor R_e vypočteme jako:

$$R_e = \frac{l}{\sigma_e \cdot S}, \qquad (\Omega) \quad (5)$$

kde:
l – délka vodiče (m),
σ_e – měrná elektrická vodivost $(\mathrm{S} \cdot \mathrm{m}^{-1})$,
S – průřez vodiče (m^2).

Analogie jsou:

- $R_{\vartheta A}$ – absolutní tepelný odpor $(\mathrm{K} \cdot \mathrm{W}^{-1})$
  $\rightarrow R_e$ – elektrický odpor (Ω),
- d – tloušťka stěny (m)
  $\rightarrow l$ – délka vodiče (m),
- λ – tepelná vodivost $(\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1})$
  $\rightarrow \sigma_e$ – měrná elektrická vodivost $(\mathrm{S} \cdot \mathrm{m}^{-1})$,
- S – plocha průřezu (m^2)
  $\rightarrow S$ – průřez vodiče (m^2).

Poznámka

Výpočet tepelného toku je analogický s Ohmovým zákonem pro elektrický proud, kde elektrický proud I_e vypočteme jako:

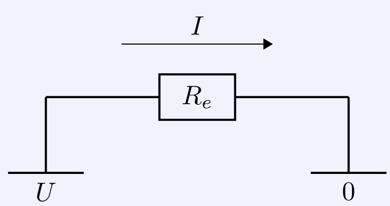
$$I_e = \frac{U_e}{R_e}, \qquad \text{(A)} \quad (6)$$

kde:
I_e – elektrický proud (A),
U_e – elektrické napětí (V),
R_e – elektrický odpor (Ω).

Analogie jsou:

- $\dot{Q}$ – tepelný tok (W)
  $\rightarrow I_e$ – elektrický proud (A),
- ΔT – rozdíl teplot (K)
  $\rightarrow U_e$ – elektrické napětí (V),
- $R_{\vartheta A}$ – absolutní tepelný odpor ($\mathrm{K \cdot W^{-1}}$)
  $\rightarrow R_e$ – elektrický odpor (Ω).

Elektrické schéma můžeme znázornit následujícím obrázkem:



1.4 Součinitel prostupu tepla

Součinitel prostupu tepla U_ϑ je inverzní hodnota tepelného odporu:

$$U_\vartheta = \frac{1}{R_\vartheta} = \frac{\lambda}{d}. \qquad (\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}) \quad (7)$$

Měrný tepelný tok q se poté může zapsat jako:

$$\dot{q} = U_\vartheta \cdot \Delta T. \qquad (\mathrm{W \cdot m^{-2}}) \quad (8)$$

Prostup tepla $U_{\vartheta A}$ je inverzní hodnota absolutního tepelného odporu:

$$U_{\vartheta A} = \frac{1}{R_{\vartheta A}} = \frac{\lambda \cdot S}{d} = U_\vartheta \cdot S. \qquad (\mathrm{W \cdot K^{-1}}) \quad (9)$$

Tepelný tok $\dot{Q}$ se poté může zapsat jako:

$$\dot{Q} = U_{\vartheta A} \cdot \Delta T. \qquad \text{(W)} \quad (10)$$

1.5 Číselný příklad

Teplota na začátku zdi je $T_1 = 20$ °C, teplota na konci zdi je $T_2 = -10$ °C. Zeď je tvořená obyčejnou cihlou s tepelná vodivostí $\lambda_{cihla} = 0,8 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ a má tloušťku $d_{cihla} = 45$ cm. Plocha průřezu zdi je $S = 20 \text{ m}^2$.

a) Vypočítejte R_ϑ, $R_{\vartheta A}$, U_ϑ, $U_{\vartheta A}$, $\dot{q}$ a $\dot{Q}$.

b) Uvažujte polystyrénovou izolaci s tepelnou vodivostí $\lambda_{izol} = 0,04 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Vypočítejte tloušťku izolace d_{izol}, která zajistí stejný měrný tepelný odpor jako cihlová zeď (tím také zajistí stejný měrný tepelný tok pro stejný rozdíl teplot).

1.5.1 a

Tloušťka zdi v metrech je:

$$d_{cihla} = 45 \text{ cm} = 0,45 \text{ m}.$$

Tepelný odpor R_ϑ vypočteme jako:

$$R_\vartheta = \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}} = \frac{0,45}{0,8} = 0,5625 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Absolutní tepelný odpor $R_{\vartheta A}$ vypočteme jako:

$$R_{\vartheta A} = \frac{R_\vartheta}{S} = \frac{0,5625}{20} \approx 0,028 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Součinitel prostupu tepla U_ϑ vypočteme jako:

$$U_\vartheta = \frac{1}{R_\vartheta} = \frac{1}{0,5625} \approx 1,778 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Prostup tepla $U_{\vartheta A}$ vypočteme jako:

$$U_{\vartheta A} = \frac{1}{R_{\vartheta A}} = \frac{1}{0,028} \approx 35,714 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Měrný tepelný tok $\dot{q}$ vypočteme jako:

$$\dot{q} = \frac{\Delta T}{R_\vartheta} = \frac{T_1 - T_2}{R_\vartheta} = \frac{20 - (-10)}{0,5625} = \frac{30}{0,5625} \approx 53,333 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Tepelný tok $\dot{Q}$ vypočteme jako:

$$\dot{Q} = \dot{q} \cdot S = 53,333 \cdot 20 = 1066,66 \text{ W} \approx 1 \text{ kW}.$$

1.5.2 b

Aby se měrné tepelné odpory rovnaly, musí platit:

$$R_{\vartheta,cihla} = R_{\vartheta,izol}$$

$$\frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}} = \frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}}.$$

Tloušťku izolace d_{izol} vypočteme jako:

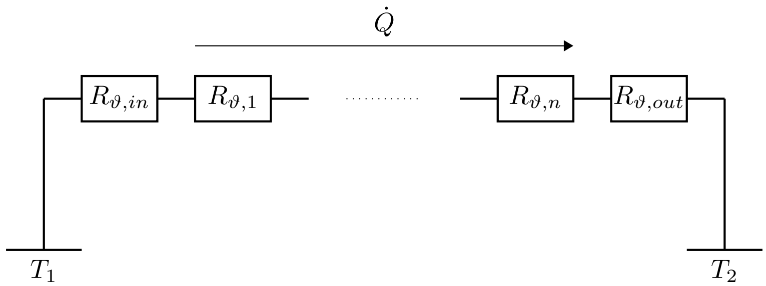
$$d_{izol} = \frac{d_{cihla} \cdot \lambda_{izol}}{\lambda_{cihla}} = \frac{0,45 \cdot 0,04}{0,8} = 0,0225 \text{ m} = 2,25 \text{ cm}.$$

2 🏗️ Skládaná zeď 🌶️🌶️

2.1 Tepelné schéma

U skládané zdi máme několik vrstev zdi s různou tepelnou vodivostí a tloušťkou. Navíc počítáme se součiniteli přestupu tepla na začátku (z vnitřka do zdi) a na konci (ze zdi ven).

Mějme tedy n vrstev zdi, kde i-tá vrstva má tepelnou vodivost λ_i a tloušťku d_i. Mějme součinitel přestupu tepla na začátku $\alpha_{\vartheta,in}$ a na konci $\alpha_{\vartheta,out}$. Potom můžeme pro tuto situaci nakreslit následující tepelné schéma:



Tepelný odpor $R_{\vartheta,in}$ vypočteme jako:

$$R_{\vartheta,in} = \frac{1}{\alpha_{\vartheta,in}}.$$

Tepelný odpor $R_{\vartheta,out}$ vypočteme jako:

$$R_{\vartheta,out} = \frac{1}{\alpha_{\vartheta,out}}.$$

Tepelný odpor $R_{\vartheta,i}$ vypočteme jako:

$$R_{\vartheta,i} = \frac{d_i}{\lambda_i}.$$

Celkový tepelný odpor $R_{\vartheta,\Sigma}$ zdi s přechody vypočteme jako:

$$R_{\vartheta,\Sigma} = R_{\vartheta,in} + \sum_{i=1}^{n} R_{\vartheta,i} + R_{\vartheta,out}.$$

Celkový absolutní tepelný odpor $R_{\vartheta A,\Sigma}$ zdi s přechody vypočteme jako:

$$R_{\vartheta A,\Sigma} = \frac{R_{\vartheta,\Sigma}}{S}.$$

Součinitel prostupu tepla $U_{\vartheta,\Sigma}$ zdi s přechody vypočteme jako:

$$U_{\vartheta,\Sigma} = \frac{1}{R_{\vartheta,\Sigma}} = \frac{1}{R_{\vartheta,in} + \sum_{i=1}^{n} R_{\vartheta,i} + R_{\vartheta,out}} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{\vartheta,in}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_{\vartheta,out}}} =$$

$$= \left(\frac{1}{\alpha_{\vartheta,in}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_{\vartheta,out}} \right)^{-1}$$

Prostup tepla $U_{\vartheta A,\Sigma}$ zdi s přechody vypočteme jako:

$$U_{\vartheta A,\Sigma} = U_{\vartheta,\Sigma} \cdot S.$$

Měrný tepelný tok $\dot{q}$ zdi s přechody vypočteme pomocí měrných odporů jako:

$$\dot{q} = \frac{\Delta T}{R_{\vartheta,\Sigma}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\vartheta,\Sigma}}.$$

Pomocí součinitele prostupu tepla $U_{\vartheta,\Sigma}$ můžeme vypočítat měrný tepelný tok $\dot{q}$ jako:

$$\dot{q} = U_{\vartheta,\Sigma} \cdot \Delta T = U_{\vartheta,\Sigma} \cdot (T_1 - T_2).$$

Celkový tepelný tok $\dot{Q}$ zdi s přechody vypočteme jako:

$$\dot{Q} = \dot{q} \cdot S.$$

2.2 Číselný příklad

Teplota na začátku zdi je $T_1 = 20\ °\mathrm{C}$, teplota na konci zdi je $T_2 = -10\ °\mathrm{C}$. Plocha průřezu zdi je $S = 20\ \mathrm{m}^2$. Uvažujme dvouvrstvou zeď složenou z cihly a izolace. Parametry cihly jsou:

- $\lambda_{cihla} = 0,8\ \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1}$,
- $d_{cihla} = 45\ \mathrm{cm}$.

Parametry izolace jsou:

- $\lambda_{izol} = 0,04\ \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1}$,
- $d_{izol} = 5\ \mathrm{cm}$.

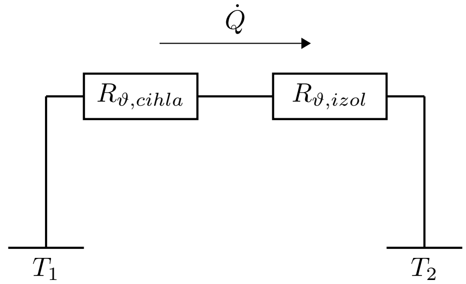
Uvažujte, že izolace je na konci zdi (z venčí). Zanedbejte součinitele přestupu tepla na začátku a na konci zdi.

a) Nakreslete tepelné schéma a vypočítejte $R_{\vartheta,\Sigma}$, $R_{\vartheta A,\Sigma}$, $U_{\vartheta,\Sigma}$, $U_{\vartheta A,\Sigma}$, $\dot{q}$ a $\dot{Q}$.

b) Vypočítejte teplotní spády v cihle T_{cihla} a v izolaci T_{izol} a nakreslete graf závislosti teploty na ose x pro případ izolace z venčí a pro případ izolace zevnitř.

2.2.1 a

Tepelné schéma bude vypadat následovně:



Tloušťka cihly v metrech je:

$$d_{cihla} = 45 \text{ cm} = 0,45 \text{ m}.$$

Tloušťka izolace v metrech je:

$$d_{izol} = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}.$$

Tepelný odpor cihly $R_{\vartheta,cihla}$ vypočteme jako:

$$R_{\vartheta,cihla} = \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}} = \frac{0,45}{0,8} = 0,5625 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Tepelný odpor izolace $R_{\vartheta,izol}$ vypočteme jako:

$$R_{\vartheta,izol} = \frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} = \frac{0,05}{0,04} = 1,25 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Celkový tepelný odpor $R_{\vartheta,\Sigma}$ vypočteme jako:

$$R_{\vartheta,\Sigma} = R_{\vartheta,cihla} + R_{\vartheta,izol} = 0,5625 + 1,25 = 1,8125 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Celkový absolutní tepelný odpor $R_{\vartheta A,\Sigma}$ vypočteme jako:

$$R_{\vartheta A,\Sigma} = \frac{R_{\vartheta,\Sigma}}{S} = \frac{1,8125}{20} \approx 0,091 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Součinitel prostupu tepla $U_{\vartheta,\Sigma}$ vypočteme jako:

$$U_{\vartheta,\Sigma} = \frac{1}{R_{\vartheta,\Sigma}} = \frac{1}{1,8125} \approx 0,552 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Prostup tepla $U_{\vartheta A,\Sigma}$ vypočteme jako:

$$U_{\vartheta A,\Sigma} = U_{\vartheta,\Sigma} \cdot S \approx 0,552 \cdot 20 = 11,04 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Měrný tepelný tok $\dot{q}$ vypočteme jako:

$$\dot{q} = \frac{\Delta T}{R_{\vartheta,\Sigma}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\vartheta,\Sigma}} = \frac{20 - (-10)}{1,8125} = \frac{30}{1,8125} \approx 16,55 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Tepelný tok $\dot{Q}$ vypočteme jako:

$$\dot{Q} = \dot{q} \cdot S \approx 16,55 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot 20 \text{ m}^2 = 331 \text{ W} = 0,331 \text{ kW}.$$

2.2.2 b

Změnu teploty v cihle vypočteme jako:

$$\Delta T_{cihla} = \dot{q} \cdot R_{\vartheta,cihla} \approx 16,55 \cdot 0,5625 = 9,31 \text{ K}.$$

Změnu teploty v izolaci vypočteme jako:

$$\Delta T_{izol} = \dot{q} \cdot R_{\vartheta,izol} \approx 16,55 \cdot 1,25 = 20,69 \text{ K}.$$

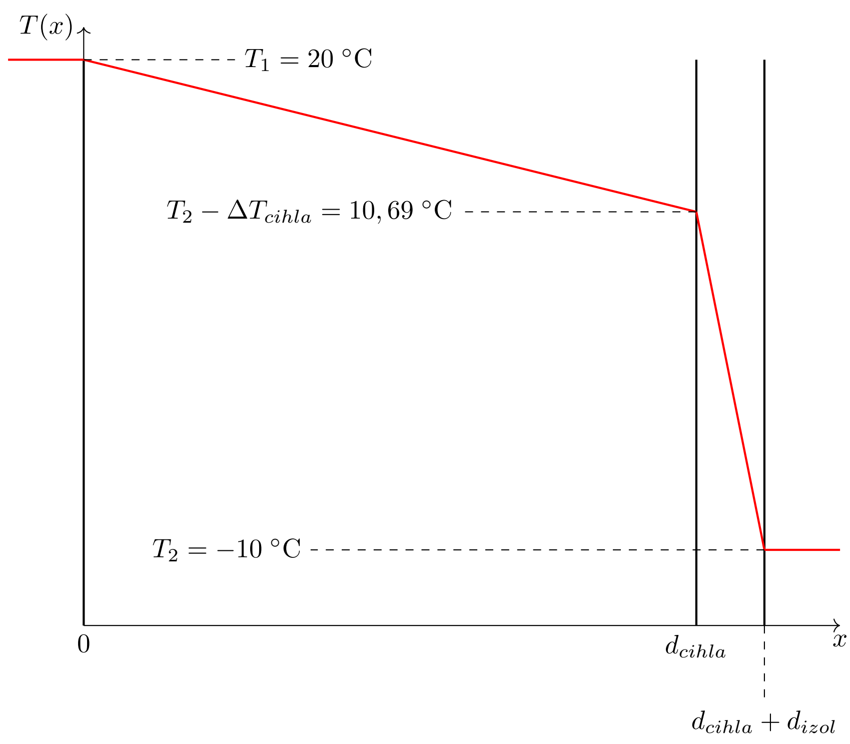
Poznámka

Součet změn teplot v cihle a izolaci musí být roven rozdílu teplot na začátku a na konci zdi:

$$\Delta T_{cihla} + \Delta T_{izol} = \Delta T = T_1 - T_2 = 20 - (-10) = 30.$$

$$9,31 + 20,69 = 30.$$

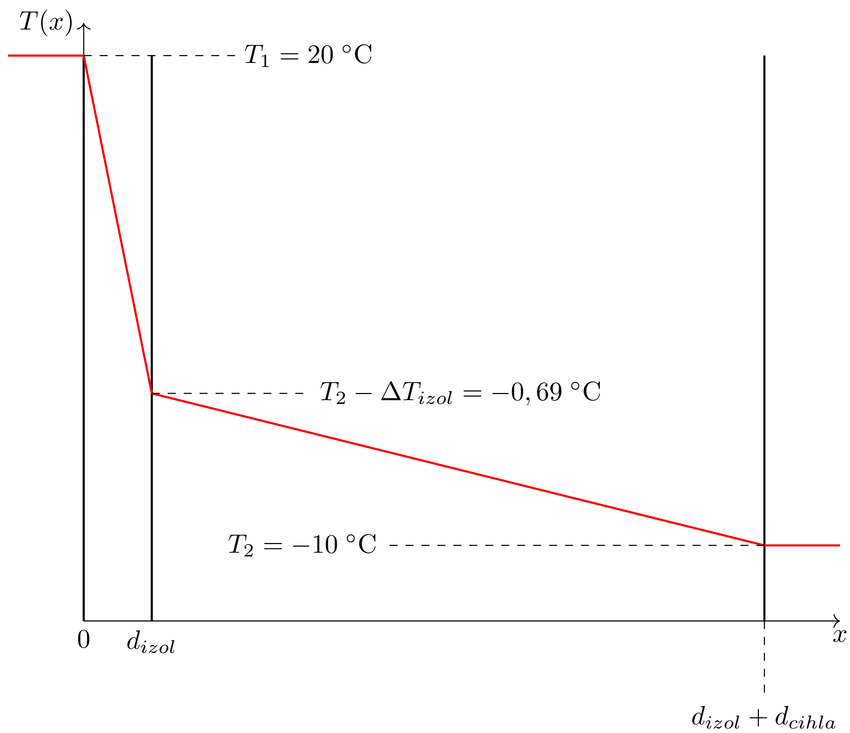
Obrázek pro případ izolace z venčí bude vypadat následovně:



Poznámka

Výhody toho položení je, že pokud je zeď zevnitř, tak funguje jako akumulátor tepla. Je to vhodné pro dlouhodobé vytápění. Nevýhodou je, že pokud se například jedná o chalupu, kam se jezdí pouze na víkend, tak nějakou dobu trvá, než se teplo naakumuluje a v místnosti bude teplo. Tento typ izolace se používá častěji.

Obrázek pro případ izolace zevnitř bude vypadat následovně:



Poznámka

Toto položení se rychleji vytopí, ale také se rychleji ochladí, jelikož izolace nefunguje jako dobrý akumulátor tepla. Pokud například zasvítí slunce, tak se místnost rychleji zahřeje. Je zde riziko kondenzace a tvoření vlhkosti a plísní.

3 📜 PENB 🌶️🌶️

Mějme dům s plochou střechou o parametrech:

- plocha střechy $S_{str} = 100\ \mathrm{m}^2$,
- součinitel prostupu tepla střechy $U_{\vartheta,str} = 0,3\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$,
- plocha podlahy $S_{pod} = 100\ \mathrm{m}^2$,
- měrný součinitel prostupu tepla podlahy $U_{\vartheta,pod} = 0,8\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$,
- plocha obvodových stěn $S_{zed} = 4 \cdot 10 \cdot 3\ \mathrm{m}^2$ (4 stěny o délce 10 metrů a výšce 3 metry),
- obvodová stěna je tvořena cihlou s tepelnou vodivostí $\lambda_{cihla} = 0,8\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$ a má tloušťkou $d_{cihla} = 45$ cm.

Zanedbejte součinitele přestupu tepla, ztráty tepla na oknech a dveřích. Berte v úvahu, že venkovní teplota je okolo celého domu včetně podlahy stejná.

a) Vypočítejte průměrný součinitel prostupu tepla $U_{\vartheta,avg}$ pro celý dům.

b) Vypočítejte jak silnou izolaci d_{izol} s tepelnou vodivostí $\lambda_{izol} = 0,04\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$ musíte použít, aby průměrný součinitel prostupu tepla $U^*_{\vartheta,avg}$ byl $0,5\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$. Izolace se přidává pouze na stěny objektu, ne na střechu a podlahu.

3.1 a

Plochu obvodových stěn S_{zed} vypočteme jako:

$$S_{zed} = 4 \cdot 10 \cdot 3 = 120\ \mathrm{m}^2.$$

Celkovou plochu S_Σ vypočteme jako:

$$S_\Sigma = S_{str} + S_{pod} + S_{zed} = 100 + 100 + 120 = 320\ \mathrm{m}^2.$$

Součinitel prostupu tepla zdi $U_{\vartheta,cihla}$ vypočteme jako:

$$U_{\vartheta,cihla} = \frac{\lambda_{cihla}}{d_{cihla}} = \frac{0,8}{0,45} = 1,778\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}.$$

Průměrný součinitel prostupu tepla $U_{\vartheta,avg}$ vypočteme jako:

$$U_{\vartheta,avg} = \frac{1}{S_\Sigma} \cdot (U_{\vartheta,str} \cdot S_{str} + U_{\vartheta,pod} \cdot S_{pod} + U_{\vartheta,cihla} \cdot S_{zed}) =$$

$$= \frac{1}{320} \cdot (0,3 \cdot 100 + 0,8 \cdot 100 + 1,778 \cdot 120) = \frac{1}{320} \cdot (30 + 80 + 213,36) =$$

$$\frac{323,36}{320} \approx 1,01\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}.$$

3.2 b

Součinitel prostupu tepla zdi s izolací $U_{\vartheta,zed}$ vypočteme jako:

$$U_{\vartheta,zed} = \left(\frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} + \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}}\right)^{-1}$$

Průměrný součinitel prostupu tepla $U^*_{\vartheta,avg}$ vypočteme jako:

$$U^*_{\vartheta,avg} = \frac{1}{S_\Sigma} \cdot (U_{\vartheta,str} \cdot S_{str} + U_{\vartheta,pod} \cdot S_{pod} + U_{\vartheta,zed} \cdot S_{zed}) =$$

$$= \frac{1}{S_\Sigma} \cdot (U_{\vartheta,str} \cdot S_{str} + U_{\vartheta,pod} \cdot S_{pod} + \left(\frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} + \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}}\right)^{-1} \cdot S_{zed})$$

Nyní je třeba vyřešit rovnici pro d_{izol}:

$$U^*_{\vartheta,avg} = \frac{1}{S_\Sigma} \cdot (U_{\vartheta,str} \cdot S_{str} + U_{\vartheta,pod} \cdot S_{pod} + \left(\frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} + \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}}\right)^{-1} \cdot S_{zed})$$

$$U^*_{\vartheta,avg} \cdot S_\Sigma = (U_{\vartheta,str} \cdot S_{str} + U_{\vartheta,pod} \cdot S_{pod} + \left(\frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} + \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}}\right)^{-1} \cdot S_{zed})$$

$$U^*_{\vartheta,avg} \cdot S_\Sigma - U_{\vartheta,str} \cdot S_{str} - U_{\vartheta,pod} \cdot S_{pod} = \left(\frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} + \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}}\right)^{-1} \cdot S_{zed}$$

$$\left(\frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} + \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}}\right)^{-1} = \frac{U^*_{\vartheta,avg} \cdot S_\Sigma - U_{\vartheta,str} \cdot S_{str} - u_{pod} \cdot S_{pod}}{S_{zed}}$$

$$\frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} + \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}} = \left(\frac{U^*_{\vartheta,avg} \cdot S_\Sigma - U_{\vartheta,str} \cdot S_{str} - U_{\vartheta,pod} \cdot S_{pod}}{S_{zed}}\right)^{-1}$$

$$\frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} = \left(\frac{U^*_{\vartheta,avg} \cdot S_\Sigma - U_{\vartheta,str} \cdot S_{str} - U_{\vartheta,pod} \cdot S_{pod}}{S_{zed}}\right)^{-1} - \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}}$$

$$d_{izol} = \lambda_{izol} \cdot \left(\left(\frac{U^*_{\vartheta,avg} \cdot S_\Sigma - U_{\vartheta,str} \cdot S_{str} - U_{\vartheta,pod} \cdot S_{pod}}{S_{zed}}\right)^{-1} - \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}}\right)$$

$$d_{izol} = \lambda_{izol} \cdot \left(\frac{S_{zed}}{U^*_{\vartheta,avg} \cdot S_\Sigma - U_{\vartheta,str} \cdot S_{str} - U_{\vartheta,pod} \cdot S_{pod}} - \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}}\right)$$

Nyní můžeme dosadit a vypočítat:

$$d_{izol} = 0,04 \cdot \left(\frac{120}{0,5 \cdot 320 - 0,3 \cdot 100 - 0,8 \cdot 100} - \frac{0,45}{0,8}\right) =$$

$$= 0,04 \cdot \left(\frac{120}{160 - 30 - 80} - \frac{0,45}{0,8}\right) = 0,04 \cdot \left(\frac{120}{50} - \frac{0,45}{0,8}\right) =$$

$$0,04 \cdot (2,4 - 0,5625) = 0,04 \cdot 1,8375 = 0,0735 \text{ m} = 7,35 \text{ cm}.$$

4 ☀️ Sálavá clona 🌶️🌶️

Mějme dvě desky. První deska má teplotu T_1 a druhá deska má teplotu T_2. Obě desky mají stejnou plochu S a stejnou emisivitu ε.

a) Jaký je sálavý výkon $P_{1\to 2,a}$ (W) sálání první desky na druhou desku?

b) Dejme mezi desky sálavou clonu o stejné ploše S a stejné emisivitě ε. Jaký je sálavý výkon $P_{1\to 2,b}$ (W) sálání první desky na druhou desku přes clonu a jaký je poměr tohoto výkonu k výkonu z bodu a)?

4.1 a

Sálavý výkon $P_{1\to 2,a}$ můžeme vypočítat pomocí:

$$P_{1\to 2,a} = \frac{S \cdot \sigma \left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1},$$

kde:
S – plocha desek (m^2),
σ – Stefanova-Boltzmannova konstanta ($5,67 \cdot 10^{-8}$ W $\cdot$ m$^{-2} \cdot$ K^{-1}),
T_1 – teplota první desky (K),
T_2 – teplota druhé desky (K),
ε_1 – emisivita první desky,
ε_2 – emisivita druhé desky.

Emisivity ε_1 a ε_2 jsou stejné, tudíž:

$$P_{1\to 2} = \frac{S \cdot \sigma \left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} - 1} = \frac{S \cdot \sigma \left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\frac{2}{\varepsilon} - 1} = k \cdot \left(T_1^4 - T_2^4\right).$$

4.2 b

Sálavý výkon z destičky 1 na clonu:

$$P_{1\to clona} = k \cdot \left(T_1^4 - T_{clona}^4\right).$$

Sálavý výkon z clony na destičku 2:

$$P_{clona\to 2} = k \cdot \left(T_{clona}^4 - T_2^4\right).$$

V rovnovážném stavu se tyto výkony musejí rovnat (pokud by nebyly rovny, tak by se teplota clony měnila):

$$P_{1\to clona} = P_{clona\to 2}$$

$$k \cdot \left(T_1^4 - T_{clona}^4\right) = k \cdot \left(T_{clona}^4 - T_2^4\right)$$

Nyní můžeme vyjádřit teplotu clony T_{clona}:

$$T_1^4 - T_{clona}^4 = T_{clona}^4 - T_2^4$$
$$2 \cdot T_{clona}^4 = T_1^4 + T_2^4$$
$$T_{clona}^4 = \frac{T_1^4 + T_2^4}{2}$$
$$T_{clona} = \sqrt[4]{\frac{T_1^4 + T_2^4}{2}}.$$

Sálavý výkon z destičky 1 na destičku 2 přes clonu je poté roven sálavému výkonu ze clony na destičku 2, který je zároveň roven sálavému výkonu z destičky 1 na clonu:

$$P_{1\to 2,b} = P_{1\to clona} = P_{clona\to 2}.$$

Ověřme výpočet pro obě možnosti. Sálavý výkon z destičky 1 na clonu:

$$P_{1\to clona} = k \cdot \left(T_1^4 - T_{clona}^4\right) = k \cdot \left(T_1^4 - \frac{T_1^4 + T_2^4}{2}\right) =$$

$$= k \cdot \frac{2 \cdot T_1^4 - T_1^4 - T_2^4}{2} = k \cdot \frac{T_1^4 - T_2^4}{2} = \frac{k}{2} \cdot \left(T_1^4 - T_2^4\right).$$

Sálavý výkon z clony na destičku 2:

$$P_{clona\to 2} = k \cdot \left(T_{clona}^4 - T_2^4\right) = k \cdot \left(\frac{T_1^4 + T_2^4}{2} - T_2^4\right) =$$

$$= k \cdot \frac{T_1^4 + T_2^4 - 2 \cdot T_2^4}{2} = k \cdot \frac{T_1^4 - T_2^4}{2} = \frac{k}{2} \cdot \left(T_1^4 - T_2^4\right).$$

Výkony jsou si rovny, tudíž sálavý výkon z destičky 1 na destičku 2 přes clonu je roven:

$$P_{1\to 2,b} = \frac{k}{2} \cdot \left(T_1^4 - T_2^4\right).$$

Poměr tohoto výkonu k výkonu z bodu a):

$$\frac{P_{1\to 2,b}}{P_{1\to 2,a}} = \frac{\frac{k}{2} \cdot \left(T_1^4 - T_2^4\right)}{k \cdot \left(T_1^4 - T_2^4\right)} = \frac{1}{2}.$$

Poznámka

Pokud by takto za sebou bylo n sálavých clon, tak poměr výkonů by byl roven:

$$\frac{P_{1\to 2,n}}{P_{1\to 2,a}} = \frac{1}{2^n}.$$

5 Destička ve vesmíru

Mějme destičku ve vesmíru, na kterou dopadá sluneční záření s následujícími parametry:

- plocha $S = 1\ \mathrm{m}^2$,
- emisivita destičky ε,
- pohltivost destičky A,
- destička má stejnou teplotu na obou stranách (je nekonečně tenká).

Obecné parametry:

- sluneční záření má intenzitu $\dot{q} = 1348\ \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2}$,
- Stefanova-Boltzmannova konstanta je $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{K}^{-4}$,
- teplota vesmíru je $T_{space} = 3\ \mathrm{K}$.

Odvoďte vzorec pro rovnovážnou teplotu destičky T v závislosti na úhlu natočení vůči slunci α a vypočítejte teplotu pro hodnoty α: 0°, 45°a 90°.

Pokud úhel α je 0°, tak destička je kolmo na sluneční záření, tudíž na destičku dopadá nejvíce slunečního záření. Pokud je úhel α 90°, tak destička je rovnoběžná se slunečním zářením, tudíž na destičku dopadá nejméně slunečního záření (žádné).

5.1 Řešení

Tepelný to $\dot{Q}_{dop}$ (W), který na destičku dopadne:

$$\dot{Q}_{dop} = \dot{q} \cdot S \cdot \cos\alpha$$

Tepelný tok, který destička příjme:

$$\dot{Q}_{in} = A \cdot \dot{Q}_{dop} = A \cdot \dot{q} \cdot S \cdot \cos\alpha$$

Tepelný tok, který destička vyzařuje (z obou stran):

$$\dot{Q}_{out} = 2 \cdot S \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot \left(T^4 - T_{space}^4\right)$$

V rovnovážném stavu platí, že tepelný tok, který destička příjme, je roven tepelnému toku, který vyzařuje:

$$\dot{Q}_{in} = \dot{Q}_{out}$$

$$A \cdot \dot{q} \cdot S \cdot \cos\alpha = 2 \cdot S \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot \left(T^4 - T_{space}^4\right)$$

Dále při tepelné rovnováze platí:

$$A = \varepsilon$$

Můžeme tedy zkrátit emisivitu A a plochy S, čímž dostaneme:

$$\dot{q} \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \sigma \cdot \left(T^4 - T_{space}^4\right)$$

Nyní je třeba vyřešit rovnici pro teplotu T:

$$\frac{\dot{q} \cdot \cos\alpha}{2 \cdot \sigma} = T^4 - T_{space}^4$$

$$T^4 = \frac{\dot{q} \cdot \cos\alpha}{2 \cdot \sigma} + T_{space}^4$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{\dot{q} \cdot \cos\alpha}{2 \cdot \sigma} + T_{space}^4}$$

Nyní můžeme dosadit do vzorce a získat vzorec pro teplotu T v závislosti na úhlu natočení α:

$$T = \sqrt[4]{\frac{1348 \cdot \cos\alpha}{2 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8}} + 3^4} = \sqrt[4]{1,189 \cdot 10^{10} \cdot \cos\alpha + 81}.$$

Pro $\alpha = 0$:

$$T = \sqrt[4]{1,189 \cdot 10^{10} \cdot \cos 0^\circ + 81} = \sqrt[4]{1,189 \cdot 10^{10} + 81} = 330,21 \text{ K}.$$

Pro $\alpha = 45$:

$$T = \sqrt[4]{1,189 \cdot 10^{10} \cdot \cos 45^\circ + 81} = \sqrt[4]{1,189 \cdot 10^{10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 81} = 302,81 \text{ K}.$$

Pro $\alpha = 90$:

$$T = \sqrt[4]{1,189 \cdot 10^{10} \cdot \cos 90^\circ + 81} = \sqrt[4]{1,189 \cdot 10^{10} \cdot 0 + 81} = \sqrt[4]{81} = 3 \text{ K}.$$