












# Cvičení 1 - Energie

## Elektroenergetika 3

Petr Jílek

2024

### Obsah

|          |                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                       |          |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>1</b> |  <b>Potenciální energie</b> |                                                                                                                                                                      | <b>2</b> |
| 1.1      | a                                                                                                            | .....                                                                                                                                                                                                                                                 | 2        |
| 1.2      | b                                                                                                            |    | 2        |
| <b>2</b> |  <b>Tepelná kapacita</b>    |                                                                                                                                                                      | <b>6</b> |
| 2.1      | a                                                                                                            | .....                                                                                                                                                                                                                                                 | 6        |
| 2.2      | b                                                                                                            | .....                                                                                                                                                                                                                                                 | 7        |
| <b>3</b> |  <b>Průtokový ohříváč</b> |                                                                                                                                                                    | <b>8</b> |
| 3.1      | a                                                                                                            | .....                                                                                                                                                                                                                                                 | 8        |
| 3.2      | b                                                                                                            | .....                                                                                                                                                                                                                                                 | 8        |
| <b>4</b> |  <b>Monočlánek</b>        |                                                                                                                                                                    | <b>9</b> |
| 4.1      | a                                                                                                            | .....                                                                                                                                                                                                                                                 | 9        |
| 4.2      | b                                                                                                            | .....                                                                                                                                                                                                                                                 | 9        |

# 1 Potenciální energie

Do jaké výšky vynese energie jedné Fidorky (30 g  $\rightarrow$  162 kcal) 80 kg člověka?

- a) Gravitační zrychlení je konstantní s hodnotou  $9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .
- b) Počáteční výška je 0 m nad mořem a gravitační zrychlení je proměnné.  
Známe:

- gravitační konstanta:  $G = 6,67430 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ ,
- poloměr Země:  $R = 6\,371 \text{ km}$ ,
- hmotnost Země:  $M = 5,97219 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ .

## 1.1 a

Energie jedné Fidorky:

$$162 \text{ kcal} = 162 \text{ kcal} \cdot 4\,184 \frac{\text{J}}{\text{kcal}} = 677\,808 \text{ J}.$$

Ze vzorce pro potenciální energii vyjádříme výšku:

$$E_p = m \cdot g \cdot \Delta h \Rightarrow \Delta h = \frac{E_p}{m \cdot g} = \frac{677\,808}{80 \cdot 9,81} \approx 863,7 \text{ m}.$$

## 1.2 b

Nejdříve si odvodíme vzorec pro gravitační zrychlení z Newtonova gravitačního zákona:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}, \quad (\text{N}) \quad (1)$$

kde:

$F$  – gravitační síla (N),

$G$  – gravitační konstanta ( $\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ ),

$m_1$  – hmotnost prvního tělesa (kg),

$m_2$  – hmotnost druhého tělesa (kg),

$r$  – vzdálenost mezi tělesy (m).

Gravitační síla je definována jako:

$$F = m \cdot g, \quad (\text{N}) \quad (2)$$

kde:

$m$  – hmotnost (kg),

$g$  – gravitační zrychlení ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ ).

Dále budeme uvažovat, že hmotnost  $m_1$  je hmotnost Země  $M$  a hmotnost  $m_2$  je hmotnost člověka  $m$  a dosadíme do Newtonova gravitačního zákona:

$$m \cdot g = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}.$$

Poté gravitační zrychlení  $g$  je:

$$g = G \cdot \frac{M}{r^2}.$$

Takto můžeme dosadit do vzorce pro potenciální energii:

$$E_p = m \cdot g \cdot h = m \cdot G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot h.$$

Nyní je třeba si uvědomit, že gravitační zrychlení  $g$  je proměnné a závisí na výšce  $h$ . Je možné analyzovat kolik potřebujeme energie  $\Delta E_p$  pro zvýšení výšky  $h$  o  $\Delta h$ :

$$\Delta E_p = m \cdot G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \Delta h$$

Zde se dopouštíme jisté nepřesnosti, jelikož pokud například  $\Delta h$  bude 2 m, tak poloměr od středu země se změní taky, čímž se změní gravitační zrychlení. Pro získání přesného výsledku je třeba nahradit  $\Delta h$  infinitesimálně malým  $dh$  a  $\Delta E_p$  bude infinitesimálně malé  $dE_p$ :

$$dE_p = m \cdot G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot dh.$$

Toto očividně vede na diferenciální rovnici, která lze snadno řešit separací proměnných, ale pozor. Nyní bychom brali poloměr  $r$  jako konstantu. To je chyba, jelikož poloměr  $r$  se mění s výškou  $h$ . Jeden z přístupů je nahradit výšku  $h$  poloměrem  $r$  a místo posouvání se o výšku  $dh$  se posuneme o poloměr  $dr$ . Ale musíme si poté zapamatovat, že počáteční mezí je poloměr země  $R$  a konečná mez bude tedy  $R + h$ . Poté je možné řešit rovnici:

$$E_p = \int_R^{R+h} m \cdot G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot dr.$$

Hmotnost  $m$  a  $M$  a gravitační konstanta  $G$  je konstantní, takže je můžeme vytknout před integrál:

$$E_p = m \cdot G \cdot M \int_R^{R+h} \frac{1}{r^2} \cdot dr = m \cdot G \cdot M \cdot \left[ -\frac{1}{r} \right]_R^{R+h} = m \cdot G \cdot M \cdot \left( -\frac{1}{R+h} + \frac{1}{R} \right).$$

Po úpravě dostaneme:

$$E_p = m \cdot G \cdot M \cdot \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right).$$

Nyní je třeba osamostatnit  $h$ :

$$E_p = m \cdot G \cdot M \cdot \left( \frac{R + h - R}{R \cdot (R + h)} \right) = m \cdot G \cdot M \cdot \left( \frac{h}{R \cdot (R + h)} \right)$$

$$E_p \cdot R \cdot (R + h) = m \cdot G \cdot M \cdot h$$

$$E_p \cdot R^2 + E_p \cdot R \cdot h = m \cdot G \cdot M \cdot h$$

$$E_p \cdot R \cdot h - m \cdot G \cdot M \cdot h = -E_p \cdot R^2$$

$$h \cdot (E_p \cdot R - m \cdot G \cdot M) = -E_p \cdot R^2$$

$$h = \frac{-E_p \cdot R^2}{E_p \cdot R - m \cdot G \cdot M}$$

$$h = \frac{E_p \cdot R^2}{m \cdot G \cdot M - E_p \cdot R}.$$

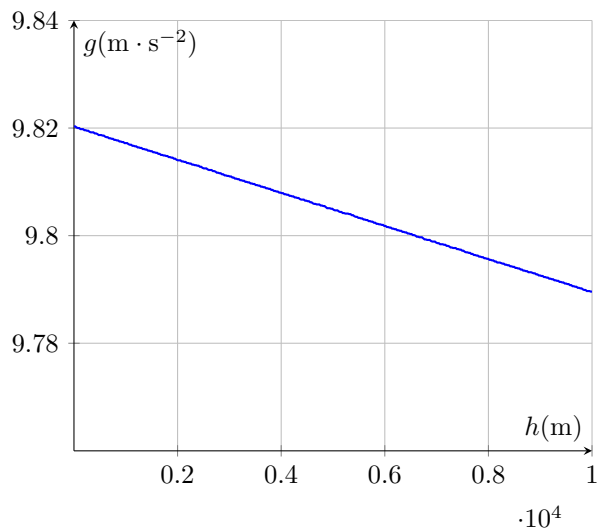
Poté dosadíme hodnoty:

$$h = \frac{677\,808 \cdot 6\,371\,000^2}{80 \cdot 6,67430 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97219 \cdot 10^{24} - 677\,808 \cdot 6\,371\,000} \approx$$

$$\approx 862,8 \text{ m}.$$

Jako dodatek je možné si vytvořit graf závislosti gravitačního zrychlení na výšce  $h$  nad mořem:

Závislost gravitačního zrychlení na výšce  $h$  nad mořem.



### Poznámka

Gravitační zrychlení v grafu pro 0 metrů nad mořem je cca  $9,82 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  místo  $9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Vzorec pro Newtonův gravitační zákon uvažuje sféricky symetrické rozložení hmoty země. V realitě hmota země sféricky symetricky rozložena není. V jádru země je běžně látka s vyšší hustotou než na povrchu země. Tento faktor způsobuje, že reálné gravitační zrychlení na povrchu země je o něco nižší než spočítaná hodnota ze vzorce. Hodnota  $9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  je hodnot změřená.

Kvůli této nepřesnosti je i výsledná výška při počítání s proměnným gravitačním zrychlením o něco nižší, než výška při počítání s konstantním gravitačním zrychlením  $9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

## 2 Tepelná kapacita

Na jakou teplotu by energie potřebná k ohřátí vody z 10 °C na 100 °C ohřála ocel a zlato o stejné:

- a) hmotnosti,
- b) objemu.

| Materiál                | $\rho$ (kg · m <sup>-3</sup> ) | $c$ (J · kg <sup>-1</sup> · K <sup>-1</sup> ) |
|-------------------------|--------------------------------|-----------------------------------------------|
| Voda (H <sub>2</sub> O) | 1 000                          | 4 186                                         |
| Ocel                    | 7 750                          | 450                                           |
| Zlato                   | 19 320                         | 129                                           |

Tabulka 1: Hustota a měrná tepelná kapacita materiálů.

### 2.1 a

Rozdíl teplot pro vodu je:

$$\Delta T_{H_2O} = 100\text{ °C} - 10\text{ °C} = 90\text{ K}.$$

Podle rovnice pro měrnou tepelnou kapacitu můžeme napsat:

$$m_{H_2O} \cdot c_{H_2O} \cdot \Delta T_{H_2O} = m_{ocel} \cdot c_{ocel} \cdot \Delta T_{ocel} = m_{zlato} \cdot c_{zlato} \cdot \Delta T_{zlato}.$$

A zároveň pro tento příklad hmotnosti jsou stejné:

$$m_{H_2O} = m_{ocel} = m_{zlato} = m.$$

Tedy:

$$m \cdot c_{H_2O} \cdot \Delta T_{H_2O} = m \cdot c_{ocel} \cdot \Delta T_{ocel} = m \cdot c_{zlato} \cdot \Delta T_{zlato}.$$

Rovnici lze vydělit hmotností  $m$  ( $m > 0$ ) a dostaneme:

$$c_{H_2O} \cdot \Delta T_{H_2O} = c_{ocel} \cdot \Delta T_{ocel} = c_{zlato} \cdot \Delta T_{zlato}.$$

Pro ocel platí:

$$\Delta T_{ocel} = \Delta T_{H_2O} \cdot \frac{c_{H_2O}}{c_{ocel}} = 90 \cdot \frac{4\,186}{450} \approx 837,2\text{ K}.$$

Pro zlato platí:

$$\Delta T_{zlato} = \Delta T_{H_2O} \cdot \frac{c_{H_2O}}{c_{zlato}} = 90 \cdot \frac{4\,186}{129} \approx 2\,920,5\text{ K}.$$

### Poznámka

Pokud bychom například takto ohřívali zlato z teploty  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , tak by se zlato mělo ohřát na teplotu  $2\,920,5\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Tato teplota je vyšší než teplota tání zlata, která je  $1\,064\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Zlato by se při této teplotě roztavilo a část energie by byla spotřebována na změnu skupenství. Tudíž výsledná teplota by byla nižší.

## 2.2 b

Podle rovnice pro měrnou tepelnou kapacitu můžeme napsat:

$$\begin{aligned} V_{H_2O} \cdot \rho_{H_2O} \cdot c_{H_2O} \cdot \Delta T_{H_2O} &= V_{ocel} \cdot \rho_{ocel} \cdot c_{ocel} \cdot \Delta T_{ocel} = \\ &= V_{zlato} \cdot \rho_{zlato} \cdot c_{zlato} \cdot \Delta T_{zlato} \end{aligned}$$

A zároveň pro tento příklad objemy jsou stejné:

$$V_{H_2O} = V_{ocel} = V_{zlato} = V.$$

Tedy:

$$\begin{aligned} V \cdot \rho_{H_2O} \cdot c_{H_2O} \cdot \Delta T_{H_2O} &= V \cdot \rho_{ocel} \cdot c_{ocel} \cdot \Delta T_{ocel} = \\ &= V \cdot \rho_{zlato} \cdot c_{zlato} \cdot \Delta T_{zlato}. \end{aligned}$$

Rovnici lze vydělit objemem  $V$  ( $V > 0$ ) a dostaneme:

$$\rho_{H_2O} \cdot c_{H_2O} \cdot \Delta T_{H_2O} = \rho_{ocel} \cdot c_{ocel} \cdot \Delta T_{ocel} = \rho_{zlato} \cdot c_{zlato} \cdot \Delta T_{zlato}.$$

Pro ocel platí:

$$\Delta T_{ocel} = \Delta T_{H_2O} \cdot \frac{\rho_{H_2O} \cdot c_{H_2O}}{\rho_{ocel} \cdot c_{ocel}} = 90 \cdot \frac{1\,000 \cdot 4\,186}{7\,750 \cdot 450} \approx 108,0\text{ K}.$$

Pro zlato platí:

$$\Delta T_{zlato} = \Delta T_{H_2O} \cdot \frac{\rho_{H_2O} \cdot c_{H_2O}}{\rho_{zlato} \cdot c_{zlato}} = 90 \cdot \frac{1\,000 \cdot 4\,186}{19\,320 \cdot 129} \approx 151,1\text{ K}.$$

### 3 Průtokový ohřívač

Mějme průtokový ohřívač vody, který ohřívá studenou vodu o teplotě 10 °C na teplotu 40 °C. Při sprchování je spotřeba vody 10 l za minutu.

- a) Jaký je výkon ohřívače?
- b) Uvažujme, že ohřívač je na jednu fázi 230 V. Bude nám stačit jistič na 16 A?

#### 3.1 a

Objem protečené vody za 1 hodinu je:

$$V = 10 \frac{\text{l}}{\text{min}} = 10 \frac{\frac{\text{m}^3}{1000}}{\frac{\text{h}}{60}} = 10 \frac{\text{m}^3}{1000} \cdot \frac{60}{\text{h}} = 0,6 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}.$$

Hmotnost protečené vody za 1 hodinu je:

$$m = V \cdot \rho = 0,6 \text{ m}^3 \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 600 \text{ kg}.$$

Množství energie za 1 hodinu potřebné k ohřátí vody je:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta T.$$

$$Q = 600 \cdot 4\,186 \cdot 30 = 75\,348\,000 \text{ J}$$

Výkon ohřívače je:

$$P = \frac{Q}{t} = \frac{75\,348\,000 \text{ J}}{1 \text{ h}} = \frac{75\,348\,000 \text{ Ws}}{3\,600 \text{ s}} = 20\,930 \text{ W} = 20,93 \text{ kW}.$$

#### 3.2 b

Výkon ohřívače je:

$$P = U_e \cdot I_e,$$

kde:

$P$  – výkon (W),

$U$  – elektrické napětí (V),

$I$  – elektrický proud (A).

Z rovnice pro výkon ohřívače můžeme vyjádřit proud:

$$I = \frac{P}{U} = \frac{20,93 \text{ kW}}{230 \text{ V}} = \frac{20\,930 \text{ W}}{230 \text{ V}} = 91 \text{ A}.$$

Jistič na 16 A tedy nestačí, jelikož proud je 91 A.



## 4 Monočlánek

Mějme monočlánek s kapacitou 2 500 mAh a napětím 1,2 V.

- a) Kolik litrů vody ohřeje z 10 °C na 100 °C?
- b) Jak vysoko vynese 80 kg člověka?

### 4.1 a

Energie monočlánu je:

$$E = 1,2 \text{ V} \cdot 2\,500 \text{ mAh} = 1,2 \text{ V} \cdot 2,5 \text{ Ah} = 3 \text{ Wh} = 3 \cdot 3\,600 \text{ J} = 10\,800 \text{ J}.$$

Množství energie potřebné k ohřátí vody je:

$$Q = V \cdot \rho \cdot c \cdot \Delta T.$$

Z rovnice pro měrnou tepelnou kapacitu můžeme vyjádřit objem:

$$\begin{aligned} m &= \frac{Q}{\rho \cdot c \cdot \Delta T} = \frac{10\,800}{1000 \cdot 4\,186 \cdot 90} = \\ &= 2,87 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 = 2,87 \cdot 10^{-2} \text{ l} = 28,7 \text{ ml}. \end{aligned}$$

### 4.2 b

Ze vzorce pro potenciální energii vyjádříme výšku:

$$E_p = m \cdot g \cdot \Delta h \Rightarrow \Delta h = \frac{E_p}{m \cdot g} = \frac{10\,800}{80 \cdot 9,81} \approx 13,76 \text{ m}.$$












# Cvičení 2 - Sdílení tepla

## Elektroenergetika 3

Petr Jílek

2024

### Obsah

|          |                                                                                                                                                                                                     |           |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b> Zed' </b>                     | <b>2</b>  |
| 1.1      | Fourierova-Kirchhoffova rovnice   | 2         |
| 1.2      | Fourieruv zákon                   | 3         |
| 1.3      | Tepelný odpor . . . . .                                                                                                                                                                             | 3         |
| 1.4      | Součinitel prostupu tepla . . . . .                                                                                                                                                                 | 5         |
| 1.5      | Číselný příklad . . . . .                                                                                                                                                                           | 6         |
| 1.5.1    | a . . . . .                                                                                                                                                                                         | 6         |
| 1.5.2    | b . . . . .                                                                                                                                                                                         | 7         |
| <b>2</b> | <b> Skládaná zed' </b>        | <b>8</b>  |
| 2.1      | Tepelné schéma . . . . .                                                                                                                                                                            | 8         |
| 2.2      | Číselný příklad . . . . .                                                                                                                                                                           | 9         |
| 2.2.1    | a . . . . .                                                                                                                                                                                         | 10        |
| 2.2.2    | b . . . . .                                                                                                                                                                                         | 11        |
| <b>3</b> | <b> PENB </b>                 | <b>13</b> |
| 3.1      | a . . . . .                                                                                                                                                                                         | 13        |
| 3.2      | b . . . . .                                                                                                                                                                                         | 14        |
| <b>4</b> | <b> Sálavá clona </b>         | <b>15</b> |
| 4.1      | a . . . . .                                                                                                                                                                                         | 15        |
| 4.2      | b . . . . .                                                                                                                                                                                         | 15        |
| <b>5</b> | <b> Destička ve vesmíru </b>  | <b>17</b> |
| 5.1      | Řešení . . . . .                                                                                                                                                                                    | 17        |

# 1 🧱 Zed' 🌶️🌶️

## 1.1 Fourierova-Kirchhoffova rovnice 🌶️🌶️🌶️

Pro zed' o tloušťce  $d$  budeme uvažovat následující zjednodušující předpoklady:

- $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ ,
- $\vec{v} = 0$ ,
- $\dot{Q}_V = 0$ ,
- $\lambda = \text{konstanta}$ ,
- $T = T(x)$  - teplota závislá pouze na  $x$ .

Poté Fourierova-Kirchhoffova rovnice bude mít tvar:

$$0 = \nabla \cdot (\lambda \cdot \vec{\nabla} T) = \lambda \cdot \frac{d^2 T}{dx^2}.$$

Rovnici můžeme vydělit  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ , záporné tepelné vodivosti nemají fyzikální smysl) a získáme:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0.$$

Tuto rovnici můžeme řešit dvojí integrací. První integrace bude vypadat následovně:

$$\frac{dT}{dx} = \int 0 \cdot dx = 0 + c_1 = c_1.$$

Druhá integrace bude vypadat následovně:

$$T(x) = \int c_1 \cdot dx = c_1 \cdot x + c_2.$$

Obecné řešení bude tedy:

$$T(x) = c_1 \cdot x + c_2.$$

Pro úplné řešení je třeba definovat okrajové podmínky. Pro zed' o tloušťce  $d$  budeme uvažovat následující okrajové podmínky:

- Teplota na začátku zdi  $T(0) = T_1$ :

$$T_1 = T(0) = c_1 \cdot 0 + c_2 = c_2 \Rightarrow c_2 = T_1.$$

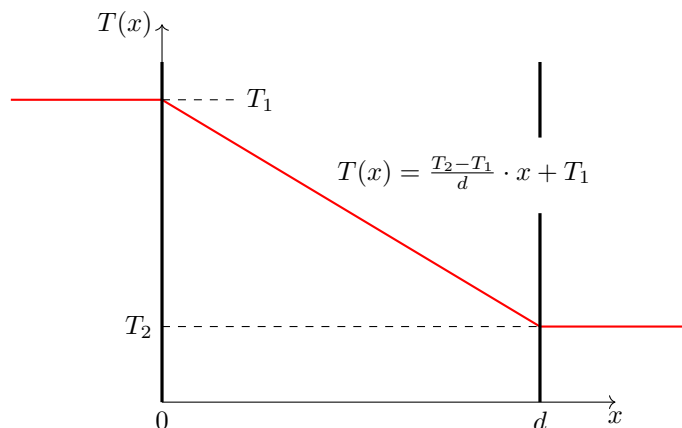
- Teplota na konci zdi  $T(d) = T_2$ :

$$T_2 = T(d) = c_1 \cdot d + c_2 \Rightarrow c_1 = \frac{T_2 - c_2}{d} = \frac{T_2 - T_1}{d}.$$

Úplné řešení bude tedy:

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{d} \cdot x + T_1.$$

Tuto situaci můžeme znázornit následujícím obrázkem:



## 1.2 Fourieruv zákon 🌶🌶🌶

Nyní dosadíme řešení z předchozího příkladu do Fourierova zákona, kde za gradient teploty dosadíme derivaci teploty podle osy  $x$ , čímž získáme měrný tepelný tok  $q$ :

$$\begin{aligned} \dot{q} &= -\lambda \cdot \frac{dT(x)}{dx} = -\lambda \cdot \frac{d}{dx} \left( \frac{T_2 - T_1}{d} \cdot x + T_1 \right) = \\ &= -\lambda \cdot \frac{T_2 - T_1}{d} = \lambda \cdot \frac{T_1 - T_2}{d} = \frac{\Delta T}{\frac{d}{\lambda}}. \end{aligned}$$

## 1.3 Tepelný odpor

Dolní výraz z předchozí sekce  $\frac{d}{\lambda}$  je tepelný odpor:

$$R_{\vartheta} = \frac{d}{\lambda}. \quad (\text{m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}) \quad (1)$$

Měrný tepelný tok  $q$  můžeme tedy zapsat jako:

$$\dot{q} = \frac{\Delta T}{R_{\vartheta}}. \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-2}) \quad (2)$$

Tepelný tok  $\dot{Q}$  dostaneme vynásobením měrného tepelného toku plochou průřezu  $S$ :

$$\dot{Q} = \dot{q} \cdot S. \quad (\text{W}) \quad (3)$$

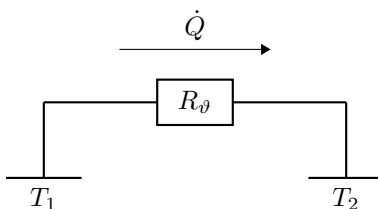
Tepelný tok  $\dot{Q}$  můžeme dále rozepsat:

$$\dot{Q} = \dot{q} \cdot S = \lambda \cdot \frac{T_1 - T_2}{d} \cdot S = \lambda \cdot \frac{\Delta T}{d} \cdot S = \frac{\Delta T}{\frac{d}{\lambda \cdot S}}.$$

Dolní výraz  $\frac{d}{\lambda \cdot S}$  je absolutní tepelný odpor:

$$R_{\vartheta A} = \frac{d}{\lambda \cdot S} = \frac{R_{\vartheta}}{S}. \quad (\text{K} \cdot \text{W}^{-1}) \quad (4)$$

Tento případ lze reprezentovat tepelným obvodem následovně:



#### Poznámka

Výpočet tepelného odporu je analogický jako výpočet elektrického odporu. Elektrický odpor  $R_e$  vypočteme jako:

$$R_e = \frac{l}{\sigma_e \cdot S}, \quad (\Omega) \quad (5)$$

kde:

$l$  – délka vodiče (m),  
 $\sigma_e$  – měrná elektrická vodivost ( $\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$ ),  
 $S$  – průřez vodiče ( $\text{m}^2$ ).

Analogie jsou:

- $R_{\vartheta A}$  – absolutní tepelný odpor ( $\text{K} \cdot \text{W}^{-1}$ )  
 $\rightarrow R_e$  – elektrický odpor ( $\Omega$ ),
- $d$  – tloušťka stěny (m)  
 $\rightarrow l$  – délka vodiče (m),
- $\lambda$  – tepelná vodivost ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ )  
 $\rightarrow \sigma_e$  – měrná elektrická vodivost ( $\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$ ),
- $S$  – plocha průřezu ( $\text{m}^2$ )  
 $\rightarrow S$  – průřez vodiče ( $\text{m}^2$ ).

### Poznámka

Výpočet tepelného toku je analogický s Ohmovým zákonem pro elektrický proud, kde elektrický proud  $I_e$  vypočteme jako:

$$I_e = \frac{U_e}{R_e}, \quad (\text{A}) \quad (6)$$

kde:

$I_e$  – elektrický proud (A),

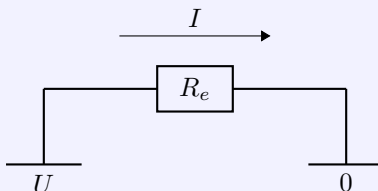
$U_e$  – elektrické napětí (V),

$R_e$  – elektrický odpor ( $\Omega$ ).

Analogie jsou:

- $\dot{Q}$  – tepelný tok (W)  
→  $I_e$  – elektrický proud (A),
- $\Delta T$  – rozdíl teplot (K)  
→  $U_e$  – elektrické napětí (V),
- $R_{\vartheta A}$  – absolutní tepelný odpor ( $\text{K} \cdot \text{W}^{-1}$ )  
→  $R_e$  – elektrický odpor ( $\Omega$ ).

Elektrické schéma můžeme znázornit následujícím obrázkem:



## 1.4 Součinitel prostupu tepla

Součinitel prostupu tepla  $U_{\vartheta}$  je inverzní hodnota tepelného odporu:

$$U_{\vartheta} = \frac{1}{R_{\vartheta}} = \frac{\lambda}{d}. \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}) \quad (7)$$

Měrný tepelný tok  $q$  se poté může zapsat jako:

$$\dot{q} = U_{\vartheta} \cdot \Delta T. \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-2}) \quad (8)$$

Prostup tepla  $U_{\vartheta A}$  je inverzní hodnota absolutního tepelného odporu:

$$U_{\vartheta A} = \frac{1}{R_{\vartheta A}} = \frac{\lambda \cdot S}{d} = U_{\vartheta} \cdot S. \quad (\text{W} \cdot \text{K}^{-1}) \quad (9)$$

Tepelný tok  $\dot{Q}$  se poté může zapsat jako:

$$\dot{Q} = U_{\vartheta A} \cdot \Delta T. \quad (\text{W}) \quad (10)$$

## 1.5 Číselný příklad

Teplota na začátku zdi je  $T_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ , teplota na konci zdi je  $T_2 = -10 \text{ }^\circ\text{C}$ . Zed' je tvořená obyčejnou cihlou s tepelná vodivostí  $\lambda_{cihla} = 0,8 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  a má tloušťku  $d_{cihla} = 45 \text{ cm}$ . Plocha průřezu zdi je  $S = 20 \text{ m}^2$ .

- Vypočítejte  $R_{\vartheta}$ ,  $R_{\vartheta A}$ ,  $U_{\vartheta}$ ,  $U_{\vartheta A}$ ,  $\dot{q}$  a  $\dot{Q}$ .
- Uvažujte polystyrénovou izolaci s tepelnou vodivostí  $\lambda_{izol} = 0,04 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . Vypočítejte tloušťku izolace  $d_{izol}$ , která zajistí stejný měrný tepelný odpor jako cihlová zed' (tím také zajistí stejný měrný tepelný tok pro stejný rozdíl teplot).

### 1.5.1 a

Tloušťka zdi v metrech je:

$$d_{cihla} = 45 \text{ cm} = 0,45 \text{ m}.$$

Tepelný odpor  $R_{\vartheta}$  vypočteme jako:

$$R_{\vartheta} = \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}} = \frac{0,45}{0,8} = 0,5625 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Absolutní tepelný odpor  $R_{\vartheta A}$  vypočteme jako:

$$R_{\vartheta A} = \frac{R_{\vartheta}}{S} = \frac{0,5625}{20} \approx 0,028 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Součinitel prostupu tepla  $U_{\vartheta}$  vypočteme jako:

$$U_{\vartheta} = \frac{1}{R_{\vartheta}} = \frac{1}{0,5625} \approx 1,778 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Prostup tepla  $U_{\vartheta A}$  vypočteme jako:

$$U_{\vartheta A} = \frac{1}{R_{\vartheta A}} = \frac{1}{0,028} \approx 35,714 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Měrný tepelný tok  $\dot{q}$  vypočteme jako:

$$\dot{q} = \frac{\Delta T}{R_{\vartheta}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\vartheta}} = \frac{20 - (-10)}{0,5625} = \frac{30}{0,5625} \approx 53,333 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Tepelný tok  $\dot{Q}$  vypočteme jako:

$$\dot{Q} = \dot{q} \cdot S = 53,333 \cdot 20 = 1066,66 \text{ W} \approx 1 \text{ kW}.$$

### 1.5.2 b

Aby se měrné tepelné odpory rovnaly, musí platit:

$$R_{\vartheta, cihla} = R_{\vartheta, izol}$$

$$\frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}} = \frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}}.$$

Tloušťku izolace  $d_{izol}$  vypočteme jako:

$$d_{izol} = \frac{d_{cihla} \cdot \lambda_{izol}}{\lambda_{cihla}} = \frac{0,45 \cdot 0,04}{0,8} = 0,0225 \text{ m} = 2,25 \text{ cm}.$$

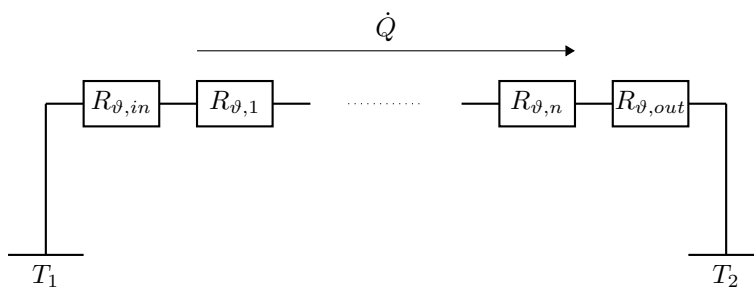


## 2 🏗️ Skládání zedí 🌶️🌶️

### 2.1 Tepelné schéma

U skládané zdi máme několik vrstev zdi s různou tepelnou vodivostí a tloušťkou. Navíc počítáme se součiniteli přestupu tepla na začátku (z vnitřka do zdi) a na konci (ze zdi ven).

Mějme tedy  $n$  vrstev zdi, kde  $i$ -tá vrstva má tepelnou vodivost  $\lambda_i$  a tloušťku  $d_i$ . Mějme součinitel přestupu tepla na začátku  $\alpha_{\vartheta,in}$  a na konci  $\alpha_{\vartheta,out}$ . Potom můžeme pro tuto situaci nakreslit následující tepelné schéma:



Tepelný odpor  $R_{\vartheta,in}$  vypočteme jako:

$$R_{\vartheta,in} = \frac{1}{\alpha_{\vartheta,in}}.$$

Tepelný odpor  $R_{\vartheta,out}$  vypočteme jako:

$$R_{\vartheta,out} = \frac{1}{\alpha_{\vartheta,out}}.$$

Tepelný odpor  $R_{\vartheta,i}$  vypočteme jako:

$$R_{\vartheta,i} = \frac{d_i}{\lambda_i}.$$

Celkový tepelný odpor  $R_{\vartheta,\Sigma}$  zdi s přechody vypočteme jako:

$$R_{\vartheta,\Sigma} = R_{\vartheta,in} + \sum_{i=1}^n R_{\vartheta,i} + R_{\vartheta,out}.$$

Celkový absolutní tepelný odpor  $R_{\vartheta A,\Sigma}$  zdi s přechody vypočteme jako:

$$R_{\vartheta A,\Sigma} = \frac{R_{\vartheta,\Sigma}}{S}.$$

Součinitel prostupu tepla  $U_{\vartheta,\Sigma}$  zdi s přechody vypočteme jako:

$$U_{\vartheta,\Sigma} = \frac{1}{R_{\vartheta,\Sigma}} = \frac{1}{R_{\vartheta,in} + \sum_{i=1}^n R_{\vartheta,i} + R_{\vartheta,out}} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{\vartheta,in}} + \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_{\vartheta,out}}} =$$

$$= \left( \frac{1}{\alpha_{\vartheta, in}} + \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_{\vartheta, out}} \right)^{-1}$$

Prostup tepla  $U_{\vartheta A, \Sigma}$  zdi s přechody vypočteme jako:

$$U_{\vartheta A, \Sigma} = U_{\vartheta, \Sigma} \cdot S.$$

Měrný tepelný tok  $\dot{q}$  zdi s přechody vypočteme pomocí měrných odporů jako:

$$\dot{q} = \frac{\Delta T}{R_{\vartheta, \Sigma}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\vartheta, \Sigma}}.$$

Pomocí součinitele prostupu tepla  $U_{\vartheta, \Sigma}$  můžeme vypočítat měrný tepelný tok  $\dot{q}$  jako:

$$\dot{q} = U_{\vartheta, \Sigma} \cdot \Delta T = U_{\vartheta, \Sigma} \cdot (T_1 - T_2).$$

Celkový tepelný tok  $\dot{Q}$  zdi s přechody vypočteme jako:

$$\dot{Q} = \dot{q} \cdot S.$$

## 2.2 Číselný příklad

Teplota na začátku zdi je  $T_1 = 20^\circ \text{C}$ , teplota na konci zdi je  $T_2 = -10^\circ \text{C}$ . Plocha průřezu zdi je  $S = 20 \text{ m}^2$ . Uvažujme dvouvrstvou zeď složenou z cihly a izolace. Parametry cihly jsou:

- $\lambda_{cihla} = 0,8 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,
- $d_{cihla} = 45 \text{ cm}$ .

Parametry izolace jsou:

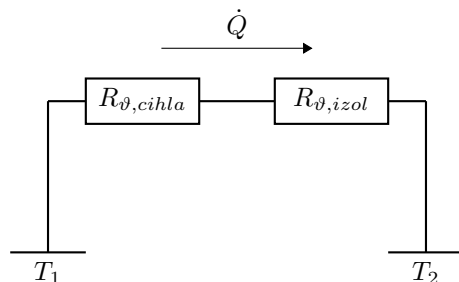
- $\lambda_{izol} = 0,04 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,
- $d_{izol} = 5 \text{ cm}$ .

Uvažujte, že izolace je na konci zdi (z venčí). Zanedbejte součinitele přestupu tepla na začátku a na konci zdi.

- a) Nakreslete tepelné schéma a vypočítejte  $R_{\vartheta, \Sigma}$ ,  $R_{\vartheta A, \Sigma}$ ,  $U_{\vartheta, \Sigma}$ ,  $U_{\vartheta A, \Sigma}$ ,  $\dot{q}$  a  $\dot{Q}$ .
- b) Vypočítejte teplotní spády v cihle  $T_{cihla}$  a v izolaci  $T_{izol}$  a nakreslete graf závislosti teploty na ose x pro případ izolace z venčí a pro případ izolace zevnitř.

### 2.2.1 a

Tepelné schéma bude vypadat následovně:



Tloušťka cihly v metrech je:

$$d_{cihla} = 45 \text{ cm} = 0,45 \text{ m}.$$

Tloušťka izolace v metrech je:

$$d_{izol} = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}.$$

Tepelný odpor cihly  $R_{\vartheta, cihla}$  vypočteme jako:

$$R_{\vartheta, cihla} = \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}} = \frac{0,45}{0,8} = 0,5625 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Tepelný odpor izolace  $R_{\vartheta, izol}$  vypočteme jako:

$$R_{\vartheta, izol} = \frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} = \frac{0,05}{0,04} = 1,25 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Celkový tepelný odpor  $R_{\vartheta, \Sigma}$  vypočteme jako:

$$R_{\vartheta, \Sigma} = R_{\vartheta, cihla} + R_{\vartheta, izol} = 0,5625 + 1,25 = 1,8125 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Celkový absolutní tepelný odpor  $R_{\vartheta A, \Sigma}$  vypočteme jako:

$$R_{\vartheta A, \Sigma} = \frac{R_{\vartheta, \Sigma}}{S} = \frac{1,8125}{20} \approx 0,091 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Součinitel prostupu tepla  $U_{\vartheta, \Sigma}$  vypočteme jako:

$$U_{\vartheta, \Sigma} = \frac{1}{R_{\vartheta, \Sigma}} = \frac{1}{1,8125} \approx 0,552 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Prostup tepla  $U_{\vartheta A, \Sigma}$  vypočteme jako:

$$U_{\vartheta A, \Sigma} = U_{\vartheta, \Sigma} \cdot S \approx 0,552 \cdot 20 = 11,04 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Měrný tepelný tok  $\dot{q}$  vypočteme jako:

$$\dot{q} = \frac{\Delta T}{R_{\vartheta, \Sigma}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\vartheta, \Sigma}} = \frac{20 - (-10)}{1,8125} = \frac{30}{1,8125} \approx 16,55 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Tepelný tok  $\dot{Q}$  vypočteme jako:

$$\dot{Q} = \dot{q} \cdot S \approx 16,55 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot 20 \text{ m}^2 = 331 \text{ W} = 0,331 \text{ kW}.$$

### 2.2.2 b

Změnu teploty v cihle vypočteme jako:

$$\Delta T_{cihla} = \dot{q} \cdot R_{\vartheta, cihla} \approx 16,55 \cdot 0,5625 = 9,31 \text{ K.}$$

Změnu teploty v izolaci vypočteme jako:

$$\Delta T_{izol} = \dot{q} \cdot R_{\vartheta, izol} \approx 16,55 \cdot 1,25 = 20,69 \text{ K.}$$

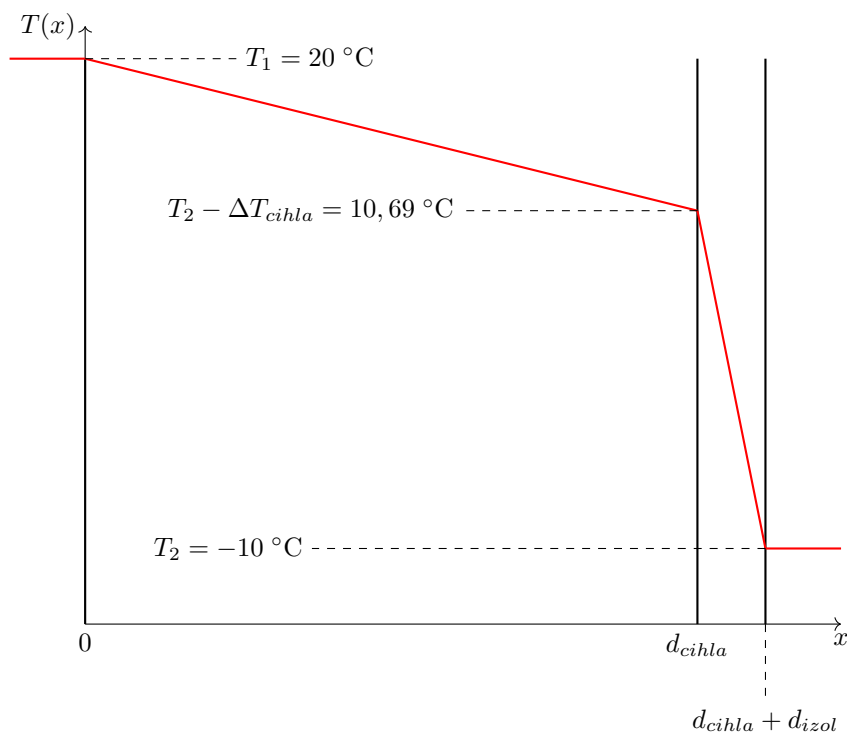
#### Poznámka

Součet změn teplot v cihle a izolaci musí být roven rozdílu teplot na začátku a na konci zdi:

$$\Delta T_{cihla} + \Delta T_{izol} = \Delta T = T_1 - T_2 = 20 - (-10) = 30.$$

$$9,31 + 20,69 = 30.$$

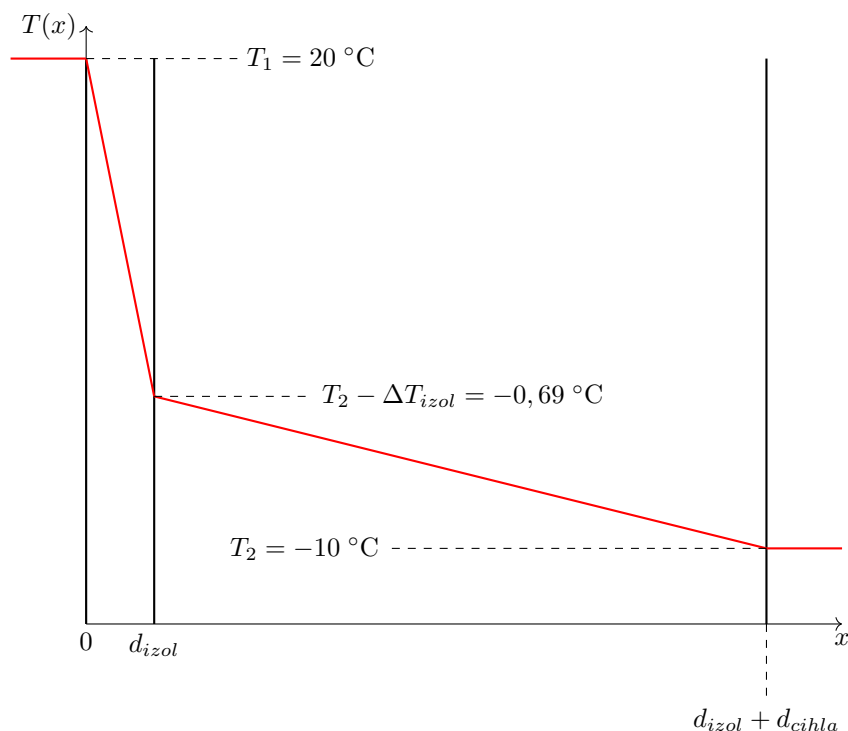
Obrázek pro případ izolace z venčí bude vypadat následovně:



### Poznámka

Výhody toho položení je, že pokud je zeď zevnitř, tak funguje jako akumulátor tepla. Je to vhodné pro dlouhodobé vytápění. Nevýhodou je, že pokud se například jedná o chalupu, kam se jezdí pouze na víkend, tak nějakou dobu trvá, než se teplo naakumuluje a v místnosti bude teplo. Tento typ izolace se používá častěji.

Obrázek pro případ izolace zevnitř bude vypadat následovně:



### Poznámka

Toto položení se rychleji vytopí, ale také se rychleji ochladí, jelikož izolace nefunguje jako dobrý akumulátor tepla. Pokud například zasvítí slunce, tak se místnost rychleji zahřeje. Je zde riziko kondenzace a tvoření vlhkosti a plísní.

### 3 PENB

Mějme dům s plochou střechou o parametrech:

- plocha střechy  $S_{str} = 100 \text{ m}^2$ ,
- součinitel prostupu tepla střechy  $U_{\vartheta, str} = 0,3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ ,
- plocha podlahy  $S_{pod} = 100 \text{ m}^2$ ,
- měrný součinitel prostupu tepla podlahy  $U_{\vartheta, pod} = 0,8 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ ,
- plocha obvodových stěn  $S_{zed} = 4 \cdot 10 \cdot 3 \text{ m}^2$  (4 stěny o délce 10 metrů a výšce 3 metry),
- obvodová stěna je tvořena cihlou s tepelnou vodivostí  $\lambda_{cihla} = 0,8 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  a má tloušťkou  $d_{cihla} = 45 \text{ cm}$ .

Zanedbejte součinitele přestupu tepla, ztráty tepla na oknech a dveřích. Berte v úvahu, že venkovní teplota je okolo celého domu včetně podlahy stejná.

- Vypočítejte průměrný součinitel prostupu tepla  $U_{\vartheta, avg}$  pro celý dům.
- Vypočítejte jak silnou izolaci  $d_{izol}$  s tepelnou vodivostí  $\lambda_{izol} = 0,04 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  musíte použít, aby průměrný součinitel prostupu tepla  $U_{\vartheta, avg}^*$  byl  $0,5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ . Izolace se přidává pouze na stěny objektu, ne na střechu a podlahu.

#### 3.1 a

Plochu obvodových stěn  $S_{zed}$  vypočteme jako:

$$S_{zed} = 4 \cdot 10 \cdot 3 = 120 \text{ m}^2.$$

Celkovou plochu  $S_{\Sigma}$  vypočteme jako:

$$S_{\Sigma} = S_{str} + S_{pod} + S_{zed} = 100 + 100 + 120 = 320 \text{ m}^2.$$

Součinitel prostupu tepla zdi  $U_{\vartheta, cihla}$  vypočteme jako:

$$U_{\vartheta, cihla} = \frac{\lambda_{cihla}}{d_{cihla}} = \frac{0,8}{0,45} = 1,778 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Průměrný součinitel prostupu tepla  $U_{\vartheta, avg}$  vypočteme jako:

$$\begin{aligned} U_{\vartheta, avg} &= \frac{1}{S_{\Sigma}} \cdot (U_{\vartheta, str} \cdot S_{str} + U_{\vartheta, pod} \cdot S_{pod} + U_{\vartheta, cihla} \cdot S_{zed}) = \\ &= \frac{1}{320} \cdot (0,3 \cdot 100 + 0,8 \cdot 100 + 1,778 \cdot 120) = \frac{1}{320} \cdot (30 + 80 + 213,36) = \\ &= \frac{323,36}{320} \approx 1,01 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}. \end{aligned}$$

### 3.2 b

Součinitel prostupu tepla zdi s izolací  $U_{\vartheta,zed}$  vypočteme jako:

$$U_{\vartheta,zed} = \left( \frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} + \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}} \right)^{-1}$$

Průměrný součinitel prostupu tepla  $U_{\vartheta,avg}^*$  vypočteme jako:

$$\begin{aligned} U_{\vartheta,avg}^* &= \frac{1}{S_{\Sigma}} \cdot (U_{\vartheta,str} \cdot S_{str} + U_{\vartheta,pod} \cdot S_{pod} + U_{\vartheta,zed} \cdot S_{zed}) = \\ &= \frac{1}{S_{\Sigma}} \cdot (U_{\vartheta,str} \cdot S_{str} + U_{\vartheta,pod} \cdot S_{pod} + \left( \frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} + \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}} \right)^{-1} \cdot S_{zed}) \end{aligned}$$

Nyní je třeba vyřešit rovnici pro  $d_{izol}$ :

$$U_{\vartheta,avg}^* = \frac{1}{S_{\Sigma}} \cdot (U_{\vartheta,str} \cdot S_{str} + U_{\vartheta,pod} \cdot S_{pod} + \left( \frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} + \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}} \right)^{-1} \cdot S_{zed})$$

$$U_{\vartheta,avg}^* \cdot S_{\Sigma} = (U_{\vartheta,str} \cdot S_{str} + U_{\vartheta,pod} \cdot S_{pod} + \left( \frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} + \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}} \right)^{-1} \cdot S_{zed})$$

$$U_{\vartheta,avg}^* \cdot S_{\Sigma} - U_{\vartheta,str} \cdot S_{str} - U_{\vartheta,pod} \cdot S_{pod} = \left( \frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} + \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}} \right)^{-1} \cdot S_{zed}$$

$$\left( \frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} + \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}} \right)^{-1} = \frac{U_{\vartheta,avg}^* \cdot S_{\Sigma} - U_{\vartheta,str} \cdot S_{str} - U_{\vartheta,pod} \cdot S_{pod}}{S_{zed}}$$

$$\frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} + \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}} = \left( \frac{U_{\vartheta,avg}^* \cdot S_{\Sigma} - U_{\vartheta,str} \cdot S_{str} - U_{\vartheta,pod} \cdot S_{pod}}{S_{zed}} \right)^{-1}$$

$$\frac{d_{izol}}{\lambda_{izol}} = \left( \frac{U_{\vartheta,avg}^* \cdot S_{\Sigma} - U_{\vartheta,str} \cdot S_{str} - U_{\vartheta,pod} \cdot S_{pod}}{S_{zed}} \right)^{-1} - \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}}$$

$$d_{izol} = \lambda_{izol} \cdot \left( \left( \frac{U_{\vartheta,avg}^* \cdot S_{\Sigma} - U_{\vartheta,str} \cdot S_{str} - U_{\vartheta,pod} \cdot S_{pod}}{S_{zed}} \right)^{-1} - \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}} \right)$$

$$d_{izol} = \lambda_{izol} \cdot \left( \frac{S_{zed}}{U_{\vartheta,avg}^* \cdot S_{\Sigma} - U_{\vartheta,str} \cdot S_{str} - U_{\vartheta,pod} \cdot S_{pod}} - \frac{d_{cihla}}{\lambda_{cihla}} \right)$$

Nyní můžeme dosadit a vypočítat:

$$\begin{aligned} d_{izol} &= 0,04 \cdot \left( \frac{120}{0,5 \cdot 320 - 0,3 \cdot 100 - 0,8 \cdot 100} - \frac{0,45}{0,8} \right) = \\ &= 0,04 \cdot \left( \frac{120}{160 - 30 - 80} - \frac{0,45}{0,8} \right) = 0,04 \cdot \left( \frac{120}{50} - \frac{0,45}{0,8} \right) = \\ &0,04 \cdot (2,4 - 0,5625) = 0,04 \cdot 1,8375 = 0,0735 \text{ m} = 7,35 \text{ cm}. \end{aligned}$$

## 4 ☀️ Sálavá clona 🌶️🌶️

Mějme dvě desky. První deska má teplotu  $T_1$  a druhá deska má teplotu  $T_2$ . Obě desky mají stejnou plochu  $S$  a stejnou emisivitu  $\varepsilon$ .

- Jaký je sálavý výkon  $P_{1 \rightarrow 2, a}$  (W) sálání první desky na druhou desku?
- Dejme mezi desky sálavou clonu o stejné ploše  $S$  a stejné emisivitě  $\varepsilon$ . Jaký je sálavý výkon  $P_{1 \rightarrow 2, b}$  (W) sálání první desky na druhou desku přes clonu a jaký je poměr tohoto výkonu k výkonu z bodu a)?

### 4.1 a

Sálavý výkon  $P_{1 \rightarrow 2, a}$  můžeme vypočítat pomocí:

$$P_{1 \rightarrow 2, a} = \frac{S \cdot \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1},$$

kde:

$S$  – plocha desek ( $\text{m}^2$ ),

$\sigma$  – Stefanova-Boltzmannova konstanta ( $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ ),

$T_1$  – teplota první desky (K),

$T_2$  – teplota druhé desky (K),

$\varepsilon_1$  – emisivita první desky,

$\varepsilon_2$  – emisivita druhé desky.

Emisivity  $\varepsilon_1$  a  $\varepsilon_2$  jsou stejné, tudíž:

$$P_{1 \rightarrow 2} = \frac{S \cdot \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} - 1} = \frac{S \cdot \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{2}{\varepsilon} - 1} = k \cdot (T_1^4 - T_2^4).$$

### 4.2 b

Sálavý výkon z destičky 1 na clonu:

$$P_{1 \rightarrow clona} = k \cdot (T_1^4 - T_{clona}^4).$$

Sálavý výkon z clony na destičku 2:

$$P_{clona \rightarrow 2} = k \cdot (T_{clona}^4 - T_2^4).$$

V rovnovážném stavu se tyto výkony musejí rovnat (pokud by nebyly rovny, tak by se teplota clony měnila):

$$\begin{aligned} P_{1 \rightarrow clona} &= P_{clona \rightarrow 2} \\ k \cdot (T_1^4 - T_{clona}^4) &= k \cdot (T_{clona}^4 - T_2^4) \end{aligned}$$



Nyní můžeme vyjádřit teplotu clony  $T_{clona}$ :

$$\begin{aligned} T_1^4 - T_{clona}^4 &= T_{clona}^4 - T_2^4 \\ 2 \cdot T_{clona}^4 &= T_1^4 + T_2^4 \\ T_{clona}^4 &= \frac{T_1^4 + T_2^4}{2} \\ T_{clona} &= \sqrt[4]{\frac{T_1^4 + T_2^4}{2}}. \end{aligned}$$

Sálavý výkon z destičky 1 na destičku 2 přes clonu je poté roven sálavému výkonu ze clony na destičku 2, který je zároveň roven sálavému výkonu z destičky 1 na clonu:

$$P_{1 \rightarrow 2, b} = P_{1 \rightarrow clona} = P_{clona \rightarrow 2}.$$

Ověřme výpočet pro obě možnosti. Sálavý výkon z destičky 1 na clonu:

$$\begin{aligned} P_{1 \rightarrow clona} &= k \cdot (T_1^4 - T_{clona}^4) = k \cdot \left( T_1^4 - \frac{T_1^4 + T_2^4}{2} \right) = \\ &= k \cdot \frac{2 \cdot T_1^4 - T_1^4 - T_2^4}{2} = k \cdot \frac{T_1^4 - T_2^4}{2} = \frac{k}{2} \cdot (T_1^4 - T_2^4). \end{aligned}$$

Sálavý výkon z clony na destičku 2:

$$\begin{aligned} P_{clona \rightarrow 2} &= k \cdot (T_{clona}^4 - T_2^4) = k \cdot \left( \frac{T_1^4 + T_2^4}{2} - T_2^4 \right) = \\ &= k \cdot \frac{T_1^4 + T_2^4 - 2 \cdot T_2^4}{2} = k \cdot \frac{T_1^4 - T_2^4}{2} = \frac{k}{2} \cdot (T_1^4 - T_2^4). \end{aligned}$$

Výkony jsou si rovny, tudíž sálavý výkon z destičky 1 na destičku 2 přes clonu je roven:

$$P_{1 \rightarrow 2, b} = \frac{k}{2} \cdot (T_1^4 - T_2^4).$$

Poměr tohoto výkonu k výkonu z bodu a):

$$\frac{P_{1 \rightarrow 2, b}}{P_{1 \rightarrow 2, a}} = \frac{\frac{k}{2} \cdot (T_1^4 - T_2^4)}{k \cdot (T_1^4 - T_2^4)} = \frac{1}{2}.$$

#### Poznámka

Pokud by takto za sebou bylo  $n$  sálavých clon, tak poměr výkonů by byl roven:

$$\frac{P_{1 \rightarrow 2, n}}{P_{1 \rightarrow 2, a}} = \frac{1}{2^n}.$$

## 5 Destička ve vesmíru

Mějme destičku ve vesmíru, na kterou dopadá sluneční záření s následujícími parametry:

- plocha  $S = 1 \text{ m}^2$ ,
- emisivita destičky  $\varepsilon$ ,
- pohltivost destičky  $A$ ,
- destička má stejnou teplotu na obou stranách (je nekonečně tenká).

Obecné parametry:

- sluneční záření má intenzitu  $\dot{q} = 1348 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ ,
- Stefanova-Boltzmannova konstanta je  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ ,
- teplota vesmíru je  $T_{space} = 3 \text{ K}$ .

Odvoďte vzorec pro rovnovážnou teplotu destičky  $T$  v závislosti na úhlu natočení vůči slunci  $\alpha$  a vypočítejte teplotu pro hodnoty  $\alpha$ :  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  a  $90^\circ$ .

Pokud úhel  $\alpha$  je  $0^\circ$ , tak destička je kolmo na sluneční záření, tudíž na destičku dopadá nejvíce slunečního záření. Pokud je úhel  $\alpha$   $90^\circ$ , tak destička je rovnoběžná se slunečním zářením, tudíž na destičku dopadá nejméně slunečního záření (žádné).

### 5.1 Řešení

Tepelný tok  $\dot{Q}_{dop}$  (W), který na destičku dopadne:

$$\dot{Q}_{dop} = \dot{q} \cdot S \cdot \cos \alpha$$

Tepelný tok, který destička přijme:

$$\dot{Q}_{in} = A \cdot \dot{Q}_{dop} = A \cdot \dot{q} \cdot S \cdot \cos \alpha$$

Tepelný tok, který destička vyzařuje (z obou stran):

$$\dot{Q}_{out} = 2 \cdot S \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot (T^4 - T_{space}^4)$$

V rovnovážném stavu platí, že tepelný tok, který destička přijme, je roven tepelnému toku, který vyzařuje:

$$\dot{Q}_{in} = \dot{Q}_{out}$$

$$A \cdot \dot{q} \cdot S \cdot \cos \alpha = 2 \cdot S \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot (T^4 - T_{space}^4)$$

Dále při tepelné rovnováze platí:

$$A = \varepsilon$$

Můžeme tedy zkrátit emisivitu  $A$  a plochy  $S$ , čímž dostaneme:

$$\dot{q} \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \sigma \cdot (T^4 - T_{space}^4)$$

Nyní je třeba vyřešit rovnici pro teplotu  $T$ :

$$\frac{\dot{q} \cdot \cos \alpha}{2 \cdot \sigma} = T^4 - T_{space}^4$$

$$T^4 = \frac{\dot{q} \cdot \cos \alpha}{2 \cdot \sigma} + T_{space}^4$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{\dot{q} \cdot \cos \alpha}{2 \cdot \sigma} + T_{space}^4}$$

Nyní můžeme dosadit do vzorce a získat vzorec pro teplotu  $T$  v závislosti na úhlu natočení  $\alpha$ :

$$T = \sqrt[4]{\frac{1348 \cdot \cos \alpha}{2 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8}} + 3^4} = \sqrt[4]{1,189 \cdot 10^{10} \cdot \cos \alpha + 81}.$$

Pro  $\alpha = 0$ :

$$T = \sqrt[4]{1,189 \cdot 10^{10} \cdot \cos 0^\circ + 81} = \sqrt[4]{1,189 \cdot 10^{10} + 81} = 330,21 \text{ K.}$$

Pro  $\alpha = 45$ :

$$T = \sqrt[4]{1,189 \cdot 10^{10} \cdot \cos 45^\circ + 81} = \sqrt[4]{1,189 \cdot 10^{10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 81} = 302,81 \text{ K.}$$

Pro  $\alpha = 90$ :

$$T = \sqrt[4]{1,189 \cdot 10^{10} \cdot \cos 90^\circ + 81} = \sqrt[4]{1,189 \cdot 10^{10} \cdot 0 + 81} = \sqrt[4]{81} = 3 \text{ K.}$$




# Cvičení 3 - Sdílení tepla - Válec a koule

## Elektroenergetika 3

Petr Jílek

2024

### Obsah

|          |                                                                                                                                                                                      |          |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b> Válec </b>     | <b>2</b> |
| 1.1      | Odvození tepelného odporu . . . . .                                                                                                                                                  | 2        |
| 1.2      | Minimum tepelného odporu . . . . .                                                                                                                                                   | 4        |
| 1.3      | Ekonomie . . . . .                                                                                                                                                                   | 6        |
| 1.4      | Číselný příklad 1 . . . . .                                                                                                                                                          | 7        |
| 1.4.1    | Řešení . . . . .                                                                                                                                                                     | 7        |
| 1.5      | Číselný příklad 2 . . . . .                                                                                                                                                          | 7        |
| 1.5.1    | Řešení . . . . .                                                                                                                                                                     | 7        |
| <b>2</b> | <b> Koule </b> | <b>8</b> |
| 2.1      | Odvození tepelného odporu . . . . .                                                                                                                                                  | 8        |
| 2.2      | Minimum tepelného odporu . . . . .                                                                                                                                                   | 10       |
| 2.3      | Ekonomie . . . . .                                                                                                                                                                   | 11       |
| 2.4      | Číselný příklad . . . . .                                                                                                                                                            | 12       |
| 2.4.1    | Řešení . . . . .                                                                                                                                                                     | 12       |

#### Úprava značení

- Absolutní tepelný odpor:  $R_{\vartheta A} \rightarrow R \text{ (K} \cdot \text{W}^{-1}\text{)}$
- Součinitel přestupu tepla:  $\alpha_{\vartheta} \rightarrow \alpha \text{ (W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}\text{)}$

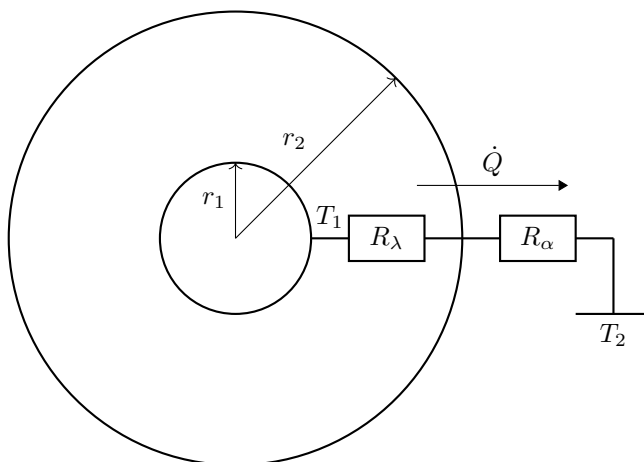
# 1 🎯 Válec 🌶️🌶️🌶️

## 1.1 Odvození tepelného odporu

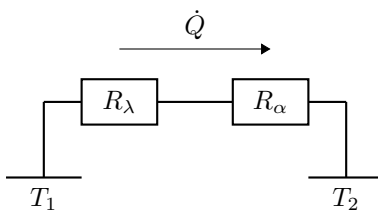
Tepelný odpor válce se skládá ze dvou částí:

- tepelný odpor vedení tepla v materiálu válce  $R_\lambda$ ,
- tepelný odpor přestupu tepla z povrchu válce do okolí  $R_\alpha$ .

Ilustrace válce bude vypadat následovně:



Tepelné schéma válce bude vypadat následovně:



Pro odvození tepelného odporu  $R_\lambda$  využijeme vztah pro absolutní tepelný odpor  $R$ :

$$R = \frac{d}{\lambda \cdot S}, \quad (\text{K} \cdot \text{W}^{-1}) \quad (1)$$

kde:

$d$  – tloušťka materiálu (m),

$\lambda$  – tepelná vodivost materiálu ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ),

$S$  – plocha přenosu tepla ( $\text{m}^2$ ).

Zde  $d$  nahradíme nekonečně malou částí poloměru válce:

$$d \rightarrow dr.$$

Dále  $S$  nahradíme plochou válce:

$$S \rightarrow 2\pi r \cdot l \cdot dr,$$

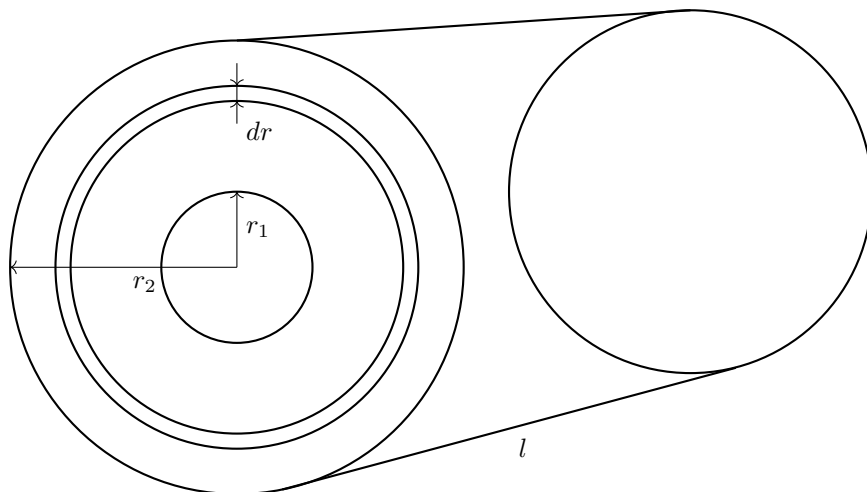
kde:

$r$  – poloměr válce (m),

$l$  – délka válce (m).

Tepelný odpor  $dR_\lambda$  válce bude tedy:

$$dR_\lambda = \frac{dr}{\lambda \cdot 2\pi r \cdot l \cdot dr}.$$



Pro získání celkového tepelného odporu  $R_\lambda$  je třeba provést integraci od vnitřního poloměru izolace  $r_1$  po vnější poloměr válce  $r_2$ :

$$R_\lambda = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\lambda \cdot 2\pi r \cdot l} dr = \frac{1}{\lambda \cdot 2\pi \cdot l} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = \frac{1}{\lambda \cdot 2\pi \cdot l} \cdot [\ln |r|]_{r_1}^{r_2}.$$

Jelikož poloměry  $r_1$  a  $r_2$  jsou kladné (záporné poloměry nedávají fyzikální smysl), můžeme absolutní hodnotu u logaritmu zanedbat:

$$R_\lambda = \frac{1}{\lambda \cdot 2\pi \cdot l} \cdot [\ln r]_{r_1}^{r_2} = \frac{1}{\lambda \cdot 2\pi \cdot l} \cdot (\ln r_2 - \ln r_1) = \frac{1}{\lambda \cdot 2\pi \cdot l} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{2\pi l \lambda} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Pro odpor přestupu tepla z povrchu válce do okolí  $R_\alpha$  využijeme vztah pro odpor přestupu tepla  $R_\alpha$ :

$$R_\alpha = \frac{1}{\alpha \cdot S}, \quad (\text{K} \cdot \text{W}^{-1}) \quad (2)$$

kde:

$\alpha$  – součinitel přestupu tepla ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ ).

Plochu  $S$  nahradíme plochou válce:

$$S \rightarrow 2\pi r_2 \cdot l.$$

Odpor přenosu tepla z povrchu válce do okolí  $R_\alpha$  bude tedy:

$$R_\alpha = \frac{1}{\alpha \cdot 2\pi r_2 \cdot l} = \frac{1}{2\pi l \alpha r_2}.$$

Celkový tepelný odpor válce  $R_{\vartheta, \Sigma}$  bude součtem obou odporů:

$$R_\Sigma = R_\lambda + R_\alpha = \frac{1}{2\pi l \lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\pi l \alpha r_2}.$$

## 1.2 Minimum tepelného odporu

Pro nalezení extrému tepelného odporu  $R_\Sigma$  podle poloměru válce  $r_2$  je třeba zjistit, kdy bude derivace  $R_\Sigma$  podle  $r_2$  rovna nule:

$$\frac{dR_\Sigma}{dr_2} = 0.$$

Derivace  $R_\Sigma$  podle  $r_2$  bude:

$$\frac{dR_\Sigma}{dr_2} = \frac{dR_\lambda}{dr_2} + \frac{dR_\alpha}{dr_2}.$$

Derivace  $R_\lambda$  podle  $r_2$  bude:

$$\begin{aligned} \frac{dR_\lambda}{dr_2} &= \frac{d}{dr_2} \left( \frac{1}{2\pi l \lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} \right) = \frac{d}{dr_2} \left( \frac{1}{2\pi l \lambda} (\ln r_2 - \ln r_1) \right) = \\ &= \frac{d}{dr_2} \left( \frac{1}{2\pi l \lambda} \ln r_2 \right) = \frac{1}{2\pi l \lambda r_2}. \end{aligned}$$

Derivace  $R_\alpha$  podle  $r_2$  bude:

$$\frac{dR_\alpha}{dr_2} = \frac{d}{dr_2} \left( \frac{1}{2\pi l \alpha r_2} \right) = -\frac{1}{2\pi l \alpha r_2^2}.$$

Derivace  $R_\Sigma$  podle  $r_2$  bude tedy:

$$\frac{dR_\Sigma}{dr_2} = \frac{1}{2\pi l \lambda r_2} - \frac{1}{2\pi l \alpha r_2^2}.$$

Nyní můžeme zjistit, kdy bude derivace  $R_\Sigma$  podle  $r_2$  rovna nule:

$$\frac{1}{2\pi l \lambda r_2} - \frac{1}{2\pi l \alpha r_2^2} = 0$$

$$\frac{1}{\lambda r_2} - \frac{1}{\alpha r_2^2} = 0$$

$$\frac{1}{\lambda r_2} = \frac{1}{\alpha r_2^2}$$

$$\frac{r_2}{\lambda} = \frac{1}{\alpha}$$

$$r_2 = \frac{\lambda}{\alpha}.$$

V další části budeme zkoumat, zda se jedná o minimum nebo maximum. K tomu využijeme druhou derivaci  $R_\Sigma$  podle  $r_2$ :

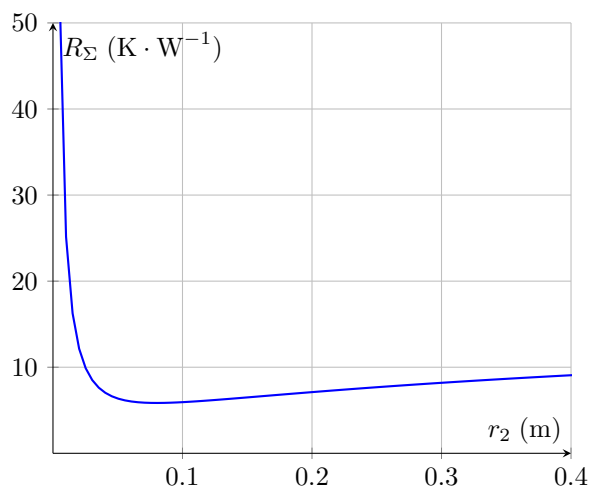
$$\frac{d^2 R_\Sigma}{dr_2^2} = \frac{d}{dr_2} \left( \frac{1}{2\pi l \lambda r_2} - \frac{1}{2\pi l \alpha r_2^2} \right) = -\frac{1}{2\pi l \lambda r_2^2} + \frac{1}{\pi l \alpha r_2^3}.$$

Nyní dosadíme  $r_2 = \frac{\lambda}{\alpha}$ :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi l \lambda \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^2} + \frac{1}{\pi l \alpha \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^3} &= -\frac{1}{2\pi l \lambda \frac{\lambda^2}{\alpha^2}} + \frac{1}{\pi l \alpha \frac{\lambda^3}{\alpha^3}} = \\ &= -\frac{\alpha^2}{2\pi l \lambda^3} + \frac{\alpha^2}{\pi l \lambda^3} = \frac{-\alpha^2 + 2\alpha^2}{2\pi l \lambda^3} = \frac{\alpha^2}{2\pi l \lambda^3}. \end{aligned}$$

Hodnoty  $\alpha$  a  $\lambda$  jsou kladné, tudíž druhá derivace je kladná. To znamená, že se jedná o minimum.

Závislost tepelného odporu  $R_\Sigma$  na poloměru válce  $r_2$





### 1.3 Ekonomie

Nyní můžeme porovnat rozdíl v rychlosti růstu tepelného odporu  $R_\Sigma$  a objemu izolace v závislosti na poloměru válce  $r_2$ . Řešíme objem izolace, jelikož při konstrukci se platí za objem materiálu. Pro objem izolace platí:

$$V = \pi(r_2^2 - r_1^2) \cdot l = \pi r_2^2 \cdot l - \pi r_1^2 \cdot l.$$

Nyní provedeme zjednodušení vzorce podobně jako se provádí u časové složitosti algoritmů. Zkoumáme rychlost růstu objemu izolace v závislosti na poloměru válce  $r_2$ , tudíž vyřadíme konstantní členy, čímž dostaneme:

$$V \sim \pi r_2^2 \cdot l.$$

Dále vyřadíme všechny násobící konstanty, čímž dostaneme:

$$V \sim r_2^2.$$

Zde dostáváme, že objem roste s druhou mocninou poloměru válce  $r_2$ . Pro odpor  $R_\Sigma$  platí:

$$R_\Sigma = \frac{1}{2\pi l \lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\pi l \alpha r_2}.$$

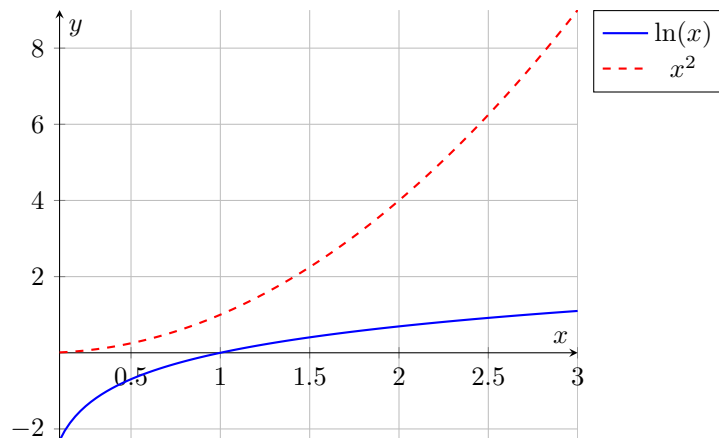
Zde druhý člen jde do nuly, když  $r_2$  jde do nekonečna, tudíž ho můžeme vyřadit. Zbyde nám:

$$R_\Sigma \sim \frac{1}{2\pi l \lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Dále můžeme vyřadit konstantní členy a dostaneme:

$$R_\Sigma \sim \ln r_2.$$

Na následujícím grafu je porovnání závislosti logaritmické funkce a kvadratické funkci:



### Poznámka

Vidíme, že odpor roste logaritmicky s poloměrem válce  $r_2$ . Pokud porovnáme rychlost růstu objemu izolace a rychlost růstu odporu  $R_\Sigma$ , zjistíme, že objem izolace roste rychleji než odpor  $R_\Sigma$ . To znamená, že při dimenzování izolace je třeba brát v potaz i ekonomické hledisko, jelikož při velkém přidání izolace nám dramaticky může narůst cena, ale odpor  $R_\Sigma$  se nám příliš nezmění.

## 1.4 Číselný příklad 1

Mějme izolovaný vodič v rozvaděči, kde tepelná vodivost izolace je  $\lambda = 0,159 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ , součinitel přestupu tepla do okolí je  $\alpha = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ . Vypočítejte vnější poloměr izolovaného vodiče  $r_2$ , kdy bude tepelný odpor  $R_\Sigma$  minimální.

### 1.4.1 Řešení

Dosadíme do vzorce pro minimum tepelného odporu  $R_\Sigma$ :

$$r_2 = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{0,159}{10} = 0,0159 \text{ m} = 1,59 \text{ cm}.$$

Z výsledku můžeme říct, že pokud máme vodič o poloměru  $r_1$ , který je menší, než 1,59 cm, pak pokud přidáme izolaci tak, aby vnější poloměr byl 1,59 cm, tak bude izolovaný vodič nejlépe odvádět teplo do okolí.

## 1.5 Číselný příklad 2

Izolace horkovodního potrubí má tepelnou vodivost  $\lambda = 0,02 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  a součinitel přestupu tepla do okolí je  $\alpha = 5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ . Vypočítejte vnější poloměr válce  $r_2$ , kdy bude tepelný odpor  $R_\Sigma$  minimální.

### 1.5.1 Řešení

Dosadíme do vzorce pro minimum tepelného odporu  $R_\Sigma$ :

$$r_2 = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{0,02}{5} = 0,004 \text{ m} = 0,4 \text{ cm}.$$

Z výsledku můžeme říct, že by vnitřní poloměr potrubí  $r_1$  měl být menší než 0,4 cm, aby bylo výhodné přidat izolaci. Nicméně takto malý poloměr potrubí se v praxi nevyskytuje.

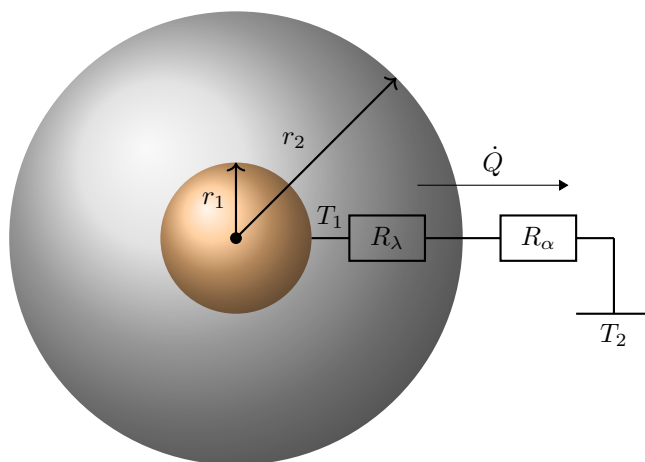
## 2 🏐 Koule 🌶️🌶️🌶️

### 2.1 Odvození tepelného odporu

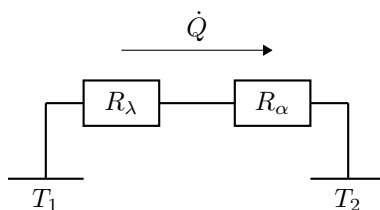
Tepelný odpor koule se skládá ze dvou částí:

- odpor vedení tepla v materiálu koule  $R_\lambda$ ,
- odpor přenosu tepla z povrchu koule do okolí  $R_\alpha$ .

Ilustrace koule bude vypadat následovně:



Tepelné schéma koule bude vypadat následovně:



Pro odvození tepelného odporu  $R_\lambda$  využijeme vztah pro absolutní tepelný odpor  $R$ :

$$R = \frac{d}{\lambda \cdot S},$$

kde:

$d$  - tloušťka materiálu (m),

$\lambda$  - tepelná vodivost materiálu ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ),

$S$  - plocha přenosu tepla ( $\text{m}^2$ ).

Zde  $d$  nahradíme nekonečně malou částí poloměru koule:

$$d \rightarrow dr.$$

Dále  $S$  nahradíme plochou koule:

$$S \rightarrow 4\pi r^2.$$

Tepelný odpor  $dR_\vartheta$  koule bude tedy:

$$dR_\lambda = \frac{dr}{\lambda \cdot 4\pi r^2}.$$

Pro získání celkového odporu  $R_\lambda$  je třeba provést integraci od vnitřního poloměru  $r_1$  po vnější poloměr koule  $r_2$ :

$$R_\lambda = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\lambda \cdot 4\pi r^2} dr = \frac{1}{\lambda \cdot 4\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{1}{\lambda \cdot 4\pi} \cdot \left[ -\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2}.$$

Po dosazení mezí integrace dostaneme:

$$R_\lambda = \frac{1}{\lambda \cdot 4\pi} \cdot \left( -\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right) = \frac{1}{\lambda \cdot 4\pi} \cdot \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{1}{4\pi\lambda} \cdot \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Pro odpor přenosu tepla z povrchu koule do okolí  $R_\alpha$  využijeme vztah pro odpor přenosu tepla  $R_\alpha$ :

$$R_\alpha = \frac{1}{\alpha \cdot S},$$

kde:

$\alpha$  - součinitel přestupu tepla ( $\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}$ ).

Plochu  $S$  nahradíme plochou koule:

$$S \rightarrow 4\pi r_2^2.$$

Odpor přenosu tepla z povrchu koule do okolí  $R_\alpha$  bude tedy:

$$R_\alpha = \frac{1}{\alpha \cdot 4\pi r_2^2} = \frac{1}{4\pi\alpha r_2^2}.$$

Celkový tepelný odpor koule  $R_\Sigma$  bude součtem obou odporů:

$$R_\Sigma = R_\lambda + R_\alpha = \frac{1}{4\pi\lambda} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{4\pi\alpha r_2^2}$$

Nyní pojďme vyšetřit limitu odporu pro  $r_2$  jdoucí do nekonečna:

$$\lim_{r_2 \rightarrow \infty} R_\Sigma = \lim_{r_2 \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{4\pi\lambda} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{4\pi\alpha r_2^2} \right)$$

Členy, kde se vyskytuje  $r_2$  ve jmenovateli, jdou do nuly, čímž dostaneme:

$$\lim_{r_2 \rightarrow \infty} R_\Sigma = \frac{1}{4\pi\lambda r_1}.$$

### Poznámka

Limita odporu koule pro  $r_2$  jdoucí do nekonečna je:

$$\lim_{r_2 \rightarrow \infty} R_{\Sigma} = \frac{1}{4\pi\lambda r_1}.$$

Toto znamená, že koule bude mít vždy nějaký konečný tepelný odpor, který nelze překonat přidáním izolace. Koule tedy nelze úplně tepelně izolovat.

## 2.2 Minimum tepelného odporu

Pro nalezení extrému tepelného odporu  $R_{\Sigma}$  podle poloměru koule  $r_2$  je třeba zjistit, kdy bude derivace  $R_{\Sigma}$  podle  $r_2$  rovna nule:

$$\frac{dR_{\Sigma}}{dr_2} = 0.$$

Derivace  $R_{\Sigma}$  podle  $r_2$  bude:

$$\frac{dR_{\Sigma}}{dr_2} = \frac{dR_{\lambda}}{dr_2} + \frac{dR_{\alpha}}{dr_2}.$$

Derivace  $R_{\lambda}$  podle  $r_2$  bude:

$$\frac{dR_{\lambda}}{dr_2} = \frac{d}{dr_2} \left( \frac{1}{4\pi\lambda} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \right) = \frac{1}{4\pi\lambda r_2^2}$$

Derivace  $R_{\alpha}$  podle  $r_2$  bude:

$$\frac{dR_{\alpha}}{dr_2} = \frac{d}{dr_2} \left( \frac{1}{4\pi\alpha r_2^2} \right) = -\frac{2}{4\pi\alpha r_2^3} = -\frac{1}{2\pi\alpha r_2^3}.$$

Derivace  $R_{\Sigma}$  podle  $r_2$  bude tedy:

$$\frac{dR_{\Sigma}}{dr_2} = \frac{1}{4\pi\lambda r_2^2} - \frac{1}{2\pi\alpha r_2^3}.$$

Nyní můžeme zjistit, kdy bude derivace  $R_{\Sigma}$  podle  $r_2$  rovna nule:

$$\frac{1}{4\pi\lambda r_2^2} - \frac{1}{2\pi\alpha r_2^3} = 0$$

$$\frac{1}{4\lambda r_2^2} - \frac{1}{2\alpha r_2^3} = 0$$

$$\frac{1}{4\lambda r_2^2} = \frac{1}{2\alpha r_2^3}$$

$$\frac{1}{\lambda r_2^2} = \frac{2}{\alpha r_2^3}$$

$$\frac{r_2}{\lambda} = \frac{2}{\alpha}$$

$$r_2 = \frac{2\lambda}{\alpha}.$$

V další části budeme zkoumat, zda se jedná o minimum nebo maximum. K tomu využijeme druhou derivaci  $R_\Sigma$  podle  $r_2$ :

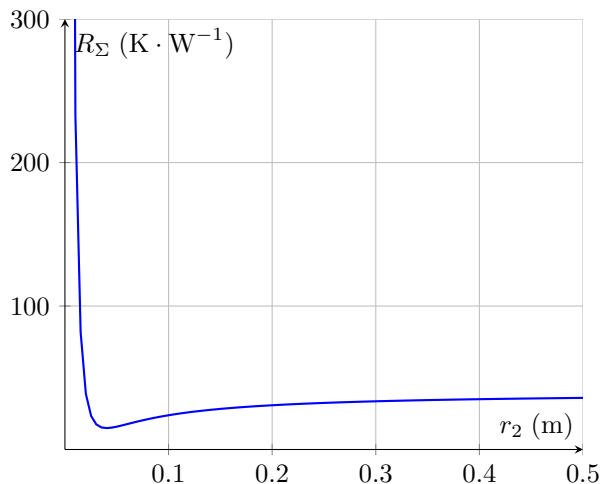
$$\frac{d^2 R_\Sigma}{dr_2^2} = \frac{d}{dr_2} \left( \frac{1}{4\pi\lambda r_2^2} - \frac{1}{2\pi\alpha r_2^3} \right) = -\frac{2}{4\pi\lambda r_2^3} + \frac{3}{2\pi\alpha r_2^4} = -\frac{1}{2\pi\lambda r_2^3} + \frac{3}{2\pi\alpha r_2^4}.$$

Nyní dosadíme  $r_2 = \frac{2\lambda}{\alpha}$ :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi\lambda \left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)^3} + \frac{3}{2\pi\alpha \left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)^4} &= -\frac{1}{2\pi\lambda \frac{8\lambda^3}{\alpha^3}} + \frac{3}{2\pi\alpha \frac{16\lambda^4}{\alpha^4}} = \\ &= -\frac{\alpha^3}{16\pi\lambda^4} + \frac{3\alpha^3}{32\pi\lambda^4} = \frac{-2\alpha^3 + 3\alpha^3}{32\pi\lambda^4} = \frac{\alpha^3}{32\pi\lambda^4}. \end{aligned}$$

Hodnoty  $\alpha$  a  $\lambda$  jsou kladné, tudíž druhá derivace je kladná. To znamená, že se jedná o minimum.

Závislost tepelného odporu  $R_\Sigma$  na poloměru koule  $r_2$



## 2.3 Ekonomie

Nyní můžeme porovnat rozdíl v rychlosti růstu tepelného odporu  $R_\Sigma$  a objemu izolace v závislosti na poloměru koule  $r_2$ .

$$V = \frac{4}{3}\pi(r_2^3 - r_1^3).$$

Po zjednodušení dostaneme:

$$V \sim r_2^3.$$

Rychlost růstu objemu izolace je kubická a jde do nekonečna, zatímco tepelný odpor dosáhne limitní hodnoty.

## 2.4 Číselný příklad

Mějme izolovanou kouli, kde tepelná vodivost izolace je  $\lambda = 0,159 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ , součinitel přestupu tepla do okolí je  $\alpha = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ . Vypočítejte vnější poloměr koule  $r_2$ , kdy bude tepelný odpor  $R_\Sigma$  minimální.

### 2.4.1 Řešení

Dosadíme do vzorce pro minimum tepelného odporu  $R_\Sigma$ :

$$r_2 = \frac{2\lambda}{\alpha} = \frac{2 \cdot 0,159}{10} = 0,0318 \text{ m} = 3,18 \text{ cm}.$$

# Cvičení 4 - Symetrizace

## Elektroenergetika 3

Petr Jílek

2024

### Obsah

|       |                                        |    |
|-------|----------------------------------------|----|
| 1     | 🔪 Symetrizace 🌶️🌶️                     | 3  |
| 1.1   | 1 fázová reálná zátěž . . . . .        | 3  |
| 1.1.1 | Indučnost a kapacita . . . . .         | 3  |
| 1.1.2 | Odvození 🌶️🌶️🌶️ . . . . .              | 4  |
| 1.2   | Obecná 3f nesymetrická zátěž . . . . . | 8  |
| 1.2.1 | Indučnost a kapacita . . . . .         | 10 |
| 1.3   | Přepočet výkonů na admitance . . . . . | 11 |
| 1.3.1 | Odvození 🌶️🌶️🌶️ . . . . .              | 12 |
| 1.4   | Číselný příklad . . . . .              | 12 |
| 1.4.1 | Řešení . . . . .                       | 13 |

#### Úprava značení

- Elektrické napětí:  $U_e \rightarrow U$  (V – volt)
- Elektrický proud:  $I_e \rightarrow I$  (A – ampér)
- Elektrický odpor:  $R_e \rightarrow R$  ( $\Omega$  – ohm)
- Elektrická vodivost:  $G_e \rightarrow G$  (S – siemens)
- Impedance:  $\hat{Z}_e \rightarrow Z$  ( $\Omega$  – ohm)
- Admitance:  $\hat{Y}_e \rightarrow Y$  (S – siemens)
- Elektrická susceptance:  $B_e \rightarrow B$  (S – siemens)
- Elektrická indukčnost:  $L_e \rightarrow L$  (H – henry)
- Elektrická kapacita:  $C_e \rightarrow C$  (F – farad)



### Úpozornění - Fázory

V tomto cvičení budeme pracovat s fázory. Fázory jsou komplexní čísla, která v sobě obsahují informaci o amplitudě a fázi příslušného harmonického signálu. Fázory budeme značit velkým písmenem se střížkou nad ním, například:

$$\hat{U} \in \mathbb{C}.$$

Pokud proměnná neobsahuje střížku, jedná se o reálnou hodnotu, například:

$$U \in \mathbb{R}.$$

### Úpozornění - Sled fází

Sled fází v 3 fázové soustavě tomto cvičení jde po směru hodinových ručiček.

# 1 Symetrizace

## 1.1 1 fázová reálná zátěž

Mějme 1 fázovou reálnou zátěž zdanou reálnou admitancí  $G$ :

$$G = \frac{1}{R},$$

kde:

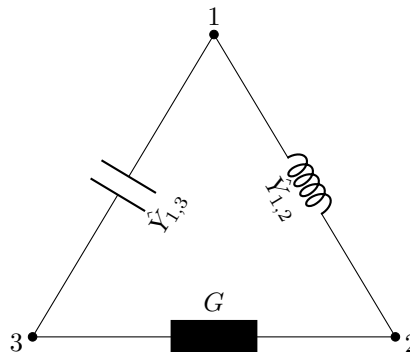
$G$  - vodivost zátěže (S),

$R$  - odpor zátěže ( $\Omega$ ).

Zátěž lze jednoduše nakreslit následovně:



Pokud bychom tuto zátěž připojily k 3 fázovému systému, tak by byla nesymetrická. Naším cílem je tuto zátěž symetrizovat. Z této zátěže vytvoříme 3 fázovou symetrickou zátěž následovně:



Vzorce pro výpočet admitancí jsou poté následující:

$$\hat{Y}_{1,2} = -j \frac{G}{\sqrt{3}}, \quad (\text{S}) \quad (1)$$

$$\hat{Y}_{1,3} = j \frac{G}{\sqrt{3}}. \quad (\text{S}) \quad (2)$$

### 1.1.1 Indučnost a kapacita

Vyjádření indukčnosti:

$$\hat{Z}_{1,2} = j\omega L \Rightarrow \hat{Y}_{1,2} = \frac{1}{\hat{Z}_{1,2}} = \frac{1}{j\omega L} = -j \frac{G}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{j\omega L} = -j \frac{G}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\omega L} = \frac{G}{\sqrt{3}}$$

$$\omega L = \frac{\sqrt{3}}{G}.$$

Výsledný vztah pro indukčnost:

$$L = \frac{\sqrt{3}}{\omega G}. \quad (\text{H}) \quad (3)$$

Vyjádření kapacity:

$$\hat{Z}_{1,3} = \frac{1}{j\omega C} \Rightarrow \hat{Y}_{1,3} = \frac{1}{\hat{Z}_{1,3}} = j\omega C = j \frac{G}{\sqrt{3}}$$

$$j\omega C = j \frac{G}{\sqrt{3}}$$

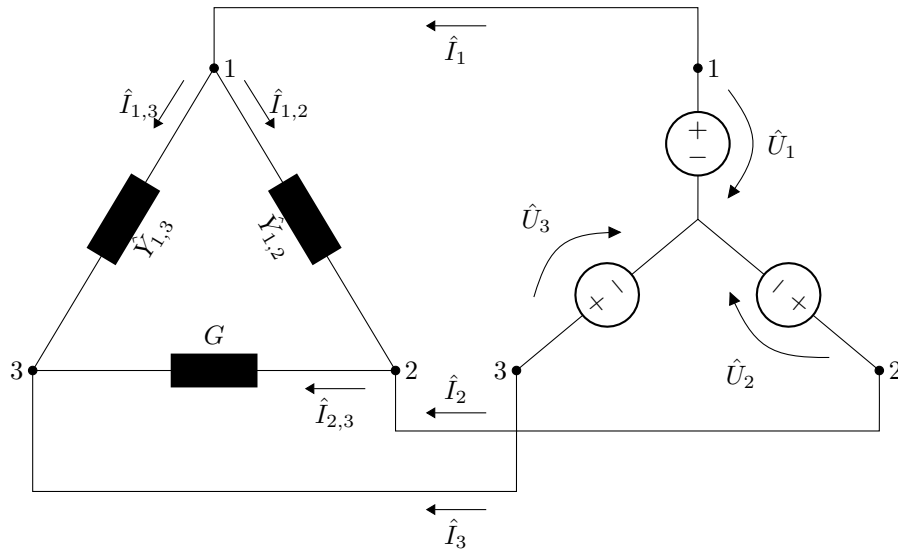
$$\omega C = \frac{G}{\sqrt{3}}.$$

Výsledný vztah pro kapacitu:

$$C = \frac{G}{\omega\sqrt{3}}. \quad (\text{F}) \quad (4)$$

### 1.1.2 Odvození 🌶🌶🌶

Uvažujme následující zapojení prvku v 3 fázovém systému:



Mezi uzly 2 a 3 je zapojena reálná zátěž, kterou chceme symetrizovat o vodivosti  $G$ . Požadujeme, aby po připojení admitancí  $\hat{Y}_{1,2}$  a  $\hat{Y}_{1,3}$  byla zátěž reálná a symetrická. Dalším požadavkem je, aby činný výkon odebíraný zátěží zůstal nezměněn. Matematicky to znamená:

- zachování činného výkonu:  $\hat{Y}_{1,2}$  a  $\hat{Y}_{1,3}$  jsou ryze imaginární,
- výsledné zapojení neodebírá jalový výkon:  $\hat{Y}_{1,2} = -\hat{Y}_{1,3}$ ,
- symetrie odebíraných proudů:  $\hat{I}_1 = k \cdot \hat{U}_1$ ,  $\hat{I}_2 = k \cdot \hat{U}_2$ ,  $\hat{I}_3 = k \cdot \hat{U}_3$ .

Na základě prvních dvou podmínek položíme:

$$\hat{Y}_{1,2} = j \cdot Y,$$

$$\hat{Y}_{1,3} = -j \cdot Y,$$

$$Y \in \mathbb{R}.$$

Použijeme operátor pootočení o  $120^\circ$  proti směru hodinových ručiček v komplexní rovině:

$$\hat{a} = e^{\frac{2\pi j}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\hat{a}^2 = e^{\frac{4\pi j}{3}} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\hat{a}^3 = e^{\frac{6\pi j}{3}} = e^{2\pi j} = 1$$

$$\hat{a}^4 = e^{\frac{8\pi j}{3}} = e^{\frac{2\pi j}{3}} \cdot e^{\frac{6\pi j}{3}} = e^{\frac{2\pi j}{3}} = \hat{a}.$$

Poté fázory napětí můžeme vyjádřit jako:

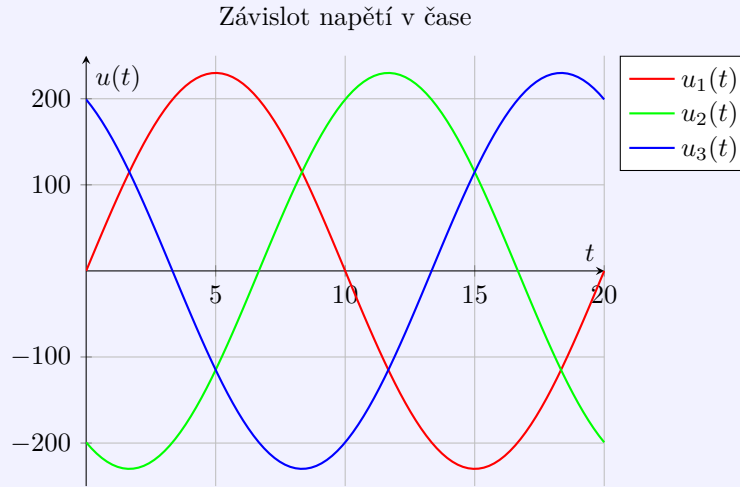
$$\hat{U}_1 = \hat{U} \cdot \hat{a}$$

$$\hat{U}_2 = \hat{U} \cdot \hat{a}^2$$

$$\hat{U}_3 = \hat{U} \cdot \hat{a}.$$

### Poznámka

Jedná se o pravotočivý trojfázový systém. Tudíž fáze napětí se posouvají o  $120^\circ$  po směru hodinových ručiček. Nicméně násobení operátorem  $\hat{a}$  způsobí posun o  $120^\circ$  proti směru hodinových ručiček. Tudíž pokud například chceme získat fázor napětí 2, tak musíme vynásobit fázor napětí 1 operátorem dvakrát, tedy  $\hat{a}^2$ . Časový průběh napětí je znázorněn na následujícím grafu:



Dále napíšeme rovnice pro proudy:

$$\begin{aligned}\hat{I}_1 &= \hat{I}_{1,2} + \hat{I}_{1,3} = \hat{Y}_{1,2} \cdot (\hat{U}_1 - \hat{U}_2) + \hat{Y}_{1,3} \cdot (\hat{U}_1 - \hat{U}_3) = \\ &= j \cdot Y \cdot U \cdot (1 - \hat{a}^2) - j \cdot Y \cdot U \cdot (1 - \hat{a}) = k \cdot U\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{I}_2 &= \hat{I}_{2,3} - \hat{I}_{1,2} = G \cdot (\hat{U}_2 - \hat{U}_3) - \hat{Y}_{1,2} \cdot (\hat{U}_1 - \hat{U}_2) = \\ &= G \cdot U \cdot (\hat{a}^2 - \hat{a}) - j \cdot Y \cdot U \cdot (1 - \hat{a}^2) = k \cdot U \cdot \hat{a}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{I}_3 &= -\hat{I}_{1,3} - \hat{I}_{2,3} = -\hat{Y}_{1,3} \cdot (\hat{U}_1 - \hat{U}_3) - G \cdot (\hat{U}_2 - \hat{U}_3) = \\ &= j \cdot Y \cdot U \cdot (1 - \hat{a}) - G \cdot U \cdot (\hat{a}^2 - \hat{a}) = k \cdot U \cdot \hat{a}.\end{aligned}$$

Vezmeme konce rovnic, čímž dostaneme:

$$j \cdot Y \cdot U \cdot (1 - \hat{a}^2) - j \cdot Y \cdot U \cdot (1 - \hat{a}) = k \cdot U$$

$$G \cdot U \cdot (\hat{a}^2 - \hat{a}) - j \cdot Y \cdot U \cdot (1 - \hat{a}^2) = k \cdot U \cdot \hat{a}^2$$

$$j \cdot Y \cdot U \cdot (1 - \hat{a}) - G \cdot U \cdot (\hat{a}^2 - \hat{a}) = k \cdot U \cdot \hat{a}.$$

Rovnice jsou lineárně závislé, jelikož součet pravých stran je roven nule:

$$k \cdot U + k \cdot U \cdot \hat{a} + k \cdot U \cdot \hat{a}^2 = k \cdot U \cdot (1 + \hat{a} + \hat{a}^2) = k \cdot U \cdot 0 = 0.$$

Díky lineární závislosti nám stačí vzít pouze dvě rovnice. Vezmeme první a druhou:

$$\begin{aligned} j \cdot Y \cdot U \cdot (1 - \hat{a}^2) - j \cdot Y \cdot U \cdot (1 - \hat{a}) &= k \cdot U \\ G \cdot U \cdot (\hat{a}^2 - \hat{a}) - j \cdot Y \cdot U \cdot (1 - \hat{a}^2) &= k \cdot U \cdot \hat{a}^2. \end{aligned}$$

Můžeme pokrátit  $U$ :

$$\begin{aligned} j \cdot Y \cdot (1 - \hat{a}^2) - j \cdot Y \cdot (1 - \hat{a}) &= k \\ G \cdot (\hat{a}^2 - \hat{a}) - j \cdot Y \cdot (1 - \hat{a}^2) &= k \cdot \hat{a}^2. \end{aligned}$$

Připravíme rovnice na maticový tvar:

$$\begin{aligned} -k + (j \cdot (1 - \hat{a}^2) - j \cdot (1 - \hat{a})) \cdot Y &= 0 \\ -k \cdot \hat{a}^2 - j \cdot (1 - \hat{a}^2) \cdot Y &= -G \cdot (\hat{a}^2 - \hat{a}). \end{aligned}$$

Přepíšeme do maticového tvaru:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & j(1 - \hat{a}^2) - j(1 - \hat{a}) \\ -\hat{a}^2 & -j(1 - \hat{a}^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ Y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -G(\hat{a}^2 - \hat{a}) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & j - j\hat{a}^2 - j + j\hat{a} \\ -\hat{a}^2 & -j + j\hat{a}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ Y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -G(\hat{a}^2 - \hat{a}) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & -j\hat{a}^2 + j\hat{a} \\ -\hat{a}^2 & j\hat{a}^2 - j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ Y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -G(\hat{a}^2 - \hat{a}) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\hat{a}^2 & -j\hat{a}^4 + j\hat{a}^3 \\ -\hat{a}^2 & j\hat{a}^2 - j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ Y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -G(\hat{a}^2 - \hat{a}) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\hat{a}^2 & -j\hat{a} + j \\ -\hat{a}^2 & j\hat{a}^2 - j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ Y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -G(\hat{a}^2 - \hat{a}) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\hat{a}^2 & -j\hat{a} + j \\ 0 & j\hat{a}^2 - j + j\hat{a} - j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ Y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -G(\hat{a}^2 - \hat{a}) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\hat{a}^2 & -j\hat{a} + j \\ 0 & j\hat{a}^2 + j\hat{a} - 2j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ Y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -G(\hat{a}^2 - \hat{a}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vyřešíme rovnici pro  $Y$ :

$$\begin{aligned} Y &= \frac{-G(\hat{a}^2 - \hat{a})}{j\hat{a}^2 + j\hat{a} - 2j} = \frac{-G\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)}{j\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + j\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2j} = \\ &= \frac{-G\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{-j\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - 2j} = \frac{-G(-j\sqrt{3})}{-3j} = \frac{-G\sqrt{3}}{3} = -\frac{G}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Vyřešíme rovnici pro  $k$ :

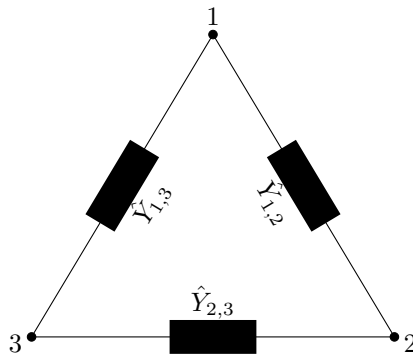
$$\begin{aligned}
 -\hat{a}^2 k + (-j\hat{a} + j)Y &= 0, \\
 k &= \frac{-(-j\hat{a} + j)Y}{-\hat{a}^2} = \frac{(-j\hat{a} + j)Y}{\hat{a}^2} = \frac{(-j\hat{a} + j) \left(-\frac{G}{\sqrt{3}}\right)}{\hat{a}^2} = \\
 &= \frac{\left(-j \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + j\right) \left(-\frac{G}{\sqrt{3}}\right)}{-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\left(j\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + j\right) \left(-\frac{G}{\sqrt{3}}\right)}{-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}} = \\
 &= \frac{\left(j\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(-\frac{G}{\sqrt{3}}\right)}{-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\left(-j\frac{3}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right) G}{-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}} = \\
 &= \frac{\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) G}{-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}} = G.
 \end{aligned}$$

Dostáváme tedy:

$$\begin{aligned}
 k &= G, \\
 Y &= -\frac{G}{\sqrt{3}}.
 \end{aligned}$$

## 1.2 Obecná 3f nesymetrická zátěž

Mějme obecnou 3 fázovou nesymetrickou zátěž zadanou admitancemi podle obrázku:



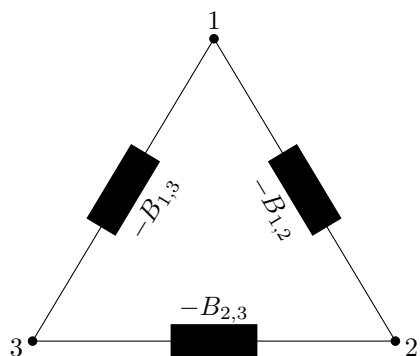
Admitance můžeme zapsat jako:

$$\hat{Y}_{1,2} = G_{1,2} + j \cdot B_{1,2},$$

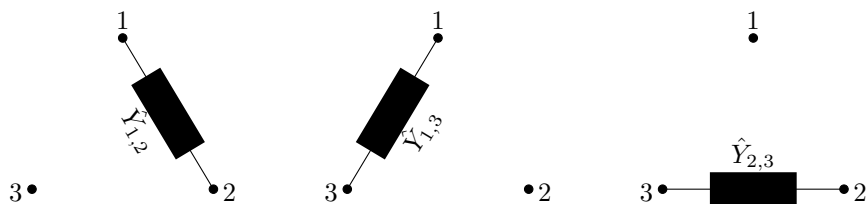
$$\hat{Y}_{1,3} = G_{1,3} + j \cdot B_{1,3},$$

$$\hat{Y}_{2,3} = G_{2,3} + j \cdot B_{2,3}.$$

První krok je provést kompenzaci jalových částí. Stačí pouze vzít zápornou hodnotu jalové části zátěže:



Dále je třeba provést symetrizaci pro každou část zvlášť. Nejprve pro větev 1-2, poté pro větev 1-3 a nakonec pro větev 2-3. Tento krok je znázorněn na obrázku:



Výsledná tabulka symetrizace bude vypadat následovně:

| Větev                      | 1-2                          | 1-3                          | 2-3                          |
|----------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| Kompenzace jalového výkonu | $-jB_{1,2}$                  | $-jB_{1,3}$                  | $-jB_{2,3}$                  |
| Symetrizace 1-2            | 0                            | $-j\frac{G_{1,2}}{\sqrt{3}}$ | $j\frac{G_{1,2}}{\sqrt{3}}$  |
| Symetrizace 1-3            | $j\frac{G_{1,3}}{\sqrt{3}}$  | 0                            | $-j\frac{G_{1,3}}{\sqrt{3}}$ |
| Symetrizace 2-3            | $-j\frac{G_{2,3}}{\sqrt{3}}$ | $j\frac{G_{2,3}}{\sqrt{3}}$  | 0                            |

Symetrizační admitanci pro danou větev dostaneme jako součet všech symetrizačních admitancí (suma ve sloupci):

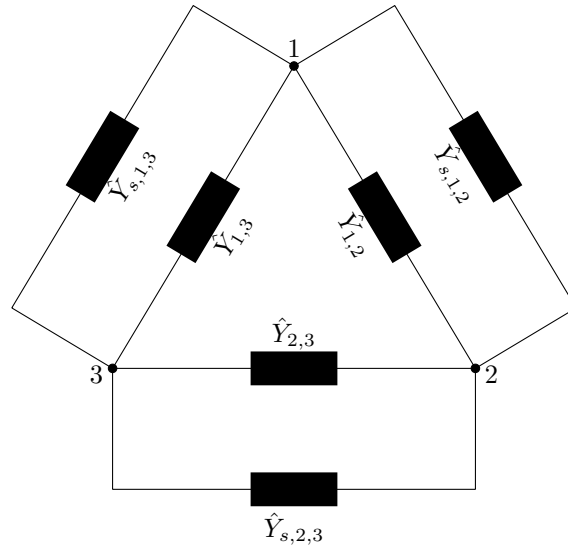
$$\hat{Y}_{s,1,2} = -jB_{1,2} + j\frac{G_{1,3}}{\sqrt{3}} - j\frac{G_{2,3}}{\sqrt{3}},$$

$$\hat{Y}_{s,1,3} = -jB_{1,3} - j\frac{G_{1,2}}{\sqrt{3}} + j\frac{G_{2,3}}{\sqrt{3}},$$



$$\hat{Y}_{s,2,3} = -jB_{2,3} + j\frac{G_{1,2}}{\sqrt{3}} - j\frac{G_{1,3}}{\sqrt{3}}.$$

Tyto admitance následně připojíme paralelně k odpovídajícím větvím. Výsledný obvod bude vypadat následovně:



### 1.2.1 Indučnost a kapacita

Pokud je symetrizační admitance záporná, tak se bude jednat o indukčnost. Jelikož symetrizační admitance má pouze imaginární složku (která je záporná), tak lze ji zadat jako:

$$\hat{Y}_s = -jY_s.$$

Poté můžeme vypočítat indukčnost:

$$\hat{Y}_s = \frac{1}{\hat{Z}_s} = \frac{1}{j\omega L} = -jY_s$$

$$\frac{1}{j\omega L} = -jY_s$$

$$j\omega L = \frac{1}{-jY_s}$$

$$L = \frac{1}{-jj\omega Y_s} = \frac{1}{\omega Y_s}.$$

Vzorec pro dopočítání symetrizační indukčnosti je tedy:

$$L = \frac{1}{2\pi f Y_s}, \quad (\text{H}) \quad (5)$$

kde:

$L$  - indukčnost (H),

$f$  - frekvence (Hz),

$Y_s$  - symetrizační admitance (s).

Pokud je symetrizační admitance kladná, tak se bude jednat o kapacitu. Jelikož symetrizační admitance má pouze imaginární složku (která je kladná), tak lze ji zadat jako:

$$\hat{Y}_s = jY_s.$$

Poté můžeme vypočítat kapacitu:

$$\hat{Y}_s = \frac{1}{\hat{Z}_s} = \frac{1}{\frac{1}{j\omega C}} = jY_s$$

$$\frac{1}{\frac{1}{j\omega C}} = jY_s$$

$$j\omega C = jY_s$$

$$C = \frac{Y_s}{\omega}.$$

Vzorec pro dopočítání symetrizační kapacity je tedy:

$$C = \frac{Y_s}{2\pi f}, \quad (\text{F}) \quad (6)$$

kde:

$C$  - kapacita (F),

$f$  - frekvence (Hz),

$Y_s$  - symetrizační admitance (s).

### 1.3 Přepočet výkonů na admitance

Zátěže jsou často zadány pomocí: činného výkonu, úhlu  $\cos(\varphi)$  a informací, zda je zátěž induktivní nebo kapacitní. Tyto informace můžeme převést na admitanci následovně:

$$\hat{Y} = \frac{P}{U^2} \cdot (1 - j \cdot \operatorname{tg}(\pm\varphi)) = \frac{P}{U^2} \cdot (1 \mp j \cdot \operatorname{tg}(\varphi)), \quad (\text{S}) \quad (7)$$

kde:

$\hat{Y}$  - admitance (s),

$P$  - činný výkon (W),

$U$  - efektivní hodnota napětí (V),

$j$  - imaginární jednotka,

$\varphi$  - úhel  $\cos(\varphi)$ .

### Poznámka

Znaménko  $\pm/\mp$  závisí na tom, zda je zátěž induktivní nebo kapacitní. Pro induktivní zátěž je znaménko v členu  $\operatorname{tg}(\pm\varphi)$  kladné ( $\operatorname{tg}(\varphi)$ ), pro kapacitní zátěž je znaménko záporné ( $\operatorname{tg}(-\varphi)$ ). Funkce  $\operatorname{tg}(\varphi)$  je lichá, tudíž  $\operatorname{tg}(-\varphi) = -\operatorname{tg}(\varphi)$ .

Pro induktivní zátěž:

$$\hat{Y} = \frac{P}{U^2} \cdot (1 - j \cdot \operatorname{tg}(\varphi)).$$

Pro kapacitní zátěž:

$$\hat{Y} = \frac{P}{U^2} \cdot (1 + j \cdot \operatorname{tg}(\varphi)).$$

#### 1.3.1 Odvození 🌶️🌶️🌶️

Ze vztahu pro napětí vyjádříme produ v závislosti na admitanci:

$$\hat{U} = \hat{I} \cdot \hat{Z} = \frac{\hat{I}}{\hat{Y}} \Rightarrow \hat{I} = \hat{U} \cdot \hat{Y}.$$

Dále použijeme vztah pro zdánlivý výkon:

$$\hat{S} = \hat{U} \cdot \hat{I}^* = \hat{U} \cdot (\hat{U} \cdot \hat{Y})^* = \hat{U} \cdot \hat{U}^* \cdot \hat{Y}^* = U^2 \cdot \hat{Y}^*,$$

$$\Rightarrow \hat{Y}^* = \frac{\hat{S}}{U^2} \Rightarrow \hat{Y} = \frac{\hat{S}^*}{U^2}$$

$$\hat{Y} = \frac{(P + j \cdot Q)^*}{U^2} = \frac{P - j \cdot Q}{U^2} = \frac{P - j \cdot P \cdot \operatorname{tg}(\varphi)}{U^2}.$$

Úhel  $\varphi$  je kladný pro induktivní zátěž a záporný pro kapacitní zátěž. Funkce  $\operatorname{tg}(\varphi)$  lichá:

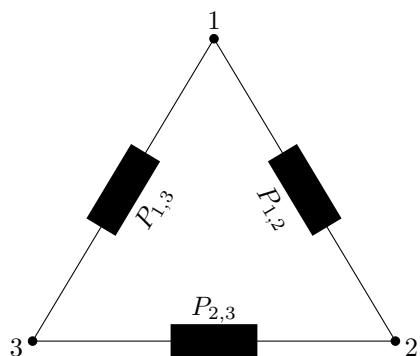
$$\operatorname{tg}(-\varphi) = \frac{\sin(-\varphi)}{\cos(-\varphi)} = \frac{-\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = -\frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = -\operatorname{tg}(\varphi).$$

Tudíž můžeme výsledný vztah zapsat jako:

$$\hat{Y} = \frac{P}{U^2} \cdot (1 \mp j \cdot \operatorname{tg}(\varphi)).$$

#### 1.4 Číselný příklad

Mějme 3 fázovou nesymetrickou zátěž nazončenou na obrázku:



Parametry:

- $U = 400\text{V}$ ,
- $\cos(\varphi) = 0,8$ ,
- $P_{1,2} = 63\text{ kW}$ , induktivní,
- $P_{1,3} = 28\text{ kW}$ , induktivní,
- $P_{2,3} = 26\text{ kW}$ , kapacitní.

Provedte symetrizaci zátěže.

#### 1.4.1 Řešení

Nejprve získáme úhel  $\varphi$ :

$$\varphi = \arccos(0,8) \approx 0,644 \text{ rad.}$$

Dále vypočítáme  $\text{tg}(\varphi)$ :

$$\text{tg}(\varphi) = \text{tg}(0,644) \approx 0,751.$$

Následně získáme admitance:

$$Y_{1,2} = \frac{P_{1,2}}{U^2} \cdot (1 - j \cdot \text{tg}(\varphi)) = \frac{63\,000}{400^2} \cdot (1 - j \cdot 0,751) = (0,394 - j \cdot 0,296) \text{ S},$$

$$Y_{1,3} = \frac{P_{1,3}}{U^2} \cdot (1 - j \cdot \text{tg}(\varphi)) = \frac{28\,000}{400^2} \cdot (1 - j \cdot 0,751) = (0,175 - j \cdot 0,131) \text{ S},$$

$$Y_{2,3} = \frac{P_{2,3}}{U^2} \cdot (1 + j \cdot \text{tg}(\varphi)) = \frac{26\,000}{400^2} \cdot (1 + j \cdot 0,751) = (0,163 + j \cdot 0,122) \text{ S}.$$

Dále vytvoříme tabulku symetrizace:

| Větev                      | 1-2                        | 1-3                        | 2-3                        |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| Kompenzace jalového výkonu | $j0,296$                   | $j0,131$                   | $-j0,122$                  |
| Symetrizace 1-2            | 0                          | $-j\frac{0,394}{\sqrt{3}}$ | $j\frac{0,394}{\sqrt{3}}$  |
| Symetrizace 1-3            | $j\frac{0,175}{\sqrt{3}}$  | 0                          | $-j\frac{0,175}{\sqrt{3}}$ |
| Symetrizace 2-3            | $-j\frac{0,163}{\sqrt{3}}$ | $j\frac{0,163}{\sqrt{3}}$  | 0                          |

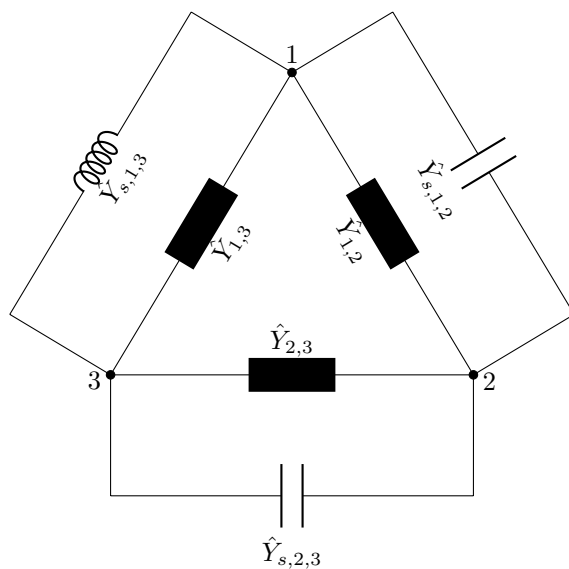
Symetrizační admittance:

$$Y_{s,1,2} = j0,296 + j\frac{0,175}{\sqrt{3}} - j\frac{0,163}{\sqrt{3}} = j0,296 + j0,101 - j0,094 = j0,303 \text{ S},$$

$$Y_{s,1,3} = j0,131 - j\frac{0,394}{\sqrt{3}} + j\frac{0,163}{\sqrt{3}} = j0,131 - j0,227 + j0,094 = -j0,002 \text{ S},$$

$$Y_{s,2,3} = -j0,122 + j\frac{0,394}{\sqrt{3}} - j\frac{0,175}{\sqrt{3}} = -j0,122 + j0,227 - j0,101 = j0,004 \text{ S}.$$

Výsledné zapojení bude vypadat následovně:












# Cvičení 5 - Aplikace

## Elektroenergetika 3

Petr Jílek

2024

### Obsah

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |   |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| 1   |  Topná sezóna                                                                                          | 2 |
| 1.1 | Řešení . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 2 |
| 2   |  Cihlová pec                                                                                           | 3 |
| 3   |  Průtokový ohříváč    | 5 |
| 3.1 | Řešení . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 5 |

#### Úprava značení

- Elektrické napětí:  $U_e \rightarrow U$  (V – volt)
- Elektrická proudová hustota:  $J_e \rightarrow J$  ( $\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$  – ampér na metr čtvereční)
- Intenzita elektrického pole:  $E_e \rightarrow E$  ( $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$  – volt na metr)

# 1 ❄️ Topná sezóna 🌶️🌶️🌶️

Průměrná venkovní teplota v topné sezóně je  $\bar{T}_{out} = 5\text{ °C}$ . Vnitřní teplota je  $T_{in} = 20\text{ °C}$ . Doba topné sezóny je 200 dní. Celková plocha je  $S = 300\text{ m}^2$ . Součinitel prostupu tepla je  $U_{\vartheta} = 0,5\text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ . Jaký množství tepla projde stěnami za celou topnou sezónu?

## 1.1 Řešení

Celkové množství tepla, které projde stěnami za celou topnou sezónu  $Q$  vypočteme jako:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} \dot{Q} \cdot dt,$$

kde:

$\dot{Q}$  je tepelný tok (W),

$t_1$  je začátek topné sezóny (h),

$t_2$  je konec topné sezóny (h).

Integrál můžeme rozepsat jako:

$$\begin{aligned} Q &= \int_{t_1}^{t_2} U_{\vartheta} \cdot S \cdot (T_{in} - T_{out}(t)) \cdot dt = U_{\vartheta} \cdot S \cdot \int_{t_1}^{t_2} (T_{in} - T_{out}(t)) \cdot dt = \\ &= U_{\vartheta} \cdot S \cdot T_{in} \cdot \int_{t_1}^{t_2} dt - U_{\vartheta} \cdot S \cdot \int_{t_1}^{t_2} T_{out}(t) \cdot dt = \\ &= U_{\vartheta} \cdot S \cdot T_{in} \cdot (t_2 - t_1) - U_{\vartheta} \cdot S \cdot \int_{t_1}^{t_2} T_{out}(t) \cdot dt. \end{aligned}$$

Nyní uděláme odbočku, kde vyjádříme průměrnou venkovní teplotu  $\bar{T}_{out}$  jako:

$$\bar{T}_{out} = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} T_{out}(t) \cdot dt.$$

Vyjádříme daný integrál:

$$\int_{t_1}^{t_2} T_{out}(t) \cdot dt = \bar{T}_{out} \cdot (t_2 - t_1).$$

Dosadíme zpět do původní rovnice:

$$\begin{aligned} Q &= U_{\vartheta} \cdot S \cdot T_{in} \cdot (t_2 - t_1) - U_{\vartheta} \cdot S \cdot \bar{T}_{out} \cdot (t_2 - t_1) = \\ &= U_{\vartheta} \cdot S \cdot (T_{in} - \bar{T}_{out}) \cdot (t_2 - t_1). \end{aligned}$$

Nyní můžeme dosadit a vypočítat:

$$\begin{aligned} Q &= 0,5 \cdot 300 \cdot (20 - 5) \cdot (200 \cdot 24 \cdot 3\,600 - 0) = \\ &= 0,5 \cdot 300 \cdot 15 \cdot 200 \cdot 24 \cdot 3\,600 = 38,9\text{ GJ}. \end{aligned}$$

## 2 Cihlová pec

U cihlové pece je vysoký rozdíl teplot, tudíž tepelnou vodivost je třeba uvažovat jako proměnnou. Tepelnou vodivost  $\lambda$  můžeme zapsat jako:

$$\lambda(x) = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot T,$$

Pro zed o tloušťce  $d$  budeme uvažovat následující zjednodušující předpoklady:

- $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ ,
- $\vec{v} = 0$ ,
- $\dot{Q}_V = 0$ ,
- $\lambda(x) = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot T$ ,
- $T = T(x)$  - teplota závislá pouze na ose  $x$ .

Poté Fourierova-Kirchhoffova rovnice bude mít tvar:

$$0 = \frac{d}{dx} \left( \lambda(T) \cdot \frac{dT}{dx} \right).$$

Fourierův zákon pro tepelný tok bude mít tvar:

$$\dot{q} = -\lambda(T) \cdot \frac{dT}{dx}.$$

Vynásobme rovnici mínus jedna:

$$-\dot{q} = \lambda(T) \cdot \frac{dT}{dx}.$$

Pokud dosadíme do Fourierova-Kirchhoffovy rovnice, dostaneme:

$$0 = \frac{d}{dx} (-\dot{q}).$$

Z toho vidíme, že měrný tepelný tok  $\dot{q}$  je konstantní a nezávisí na poloze  $x$ . Můžeme tedy rozepsat Fourierův zákon jako:

$$-\dot{q} = (\lambda_0 + \lambda_1 \cdot T) \cdot \frac{dT}{dx}.$$

Můžeme řešit tuto diferenciální rovnici separací proměnných:

$$-\dot{q} \cdot dx = (\lambda_0 + \lambda_1 \cdot T) \cdot dT.$$

Nyní meze budou jak pro  $x$ , tak pro  $T$ :

- $x = 0 \Rightarrow T = T_1$ ,



- $x = d \Rightarrow T = T_2$ .

Rovnici můžeme integrovat:

$$\begin{aligned}
-\int_0^d \dot{q} \cdot dx &= \int_{T_1}^{T_2} (\lambda_0 + \lambda_1 \cdot T) \cdot dT \\
-\dot{q} \cdot [x]_0^d &= \lambda_0 \cdot [T]_{T_1}^{T_2} + \frac{\lambda_1}{2} \cdot [T^2]_{T_1}^{T_2} \\
-\dot{q} \cdot d &= \lambda_0 \cdot (T_2 - T_1) + \frac{\lambda_1}{2} \cdot (T_2^2 - T_1^2) \\
-\dot{q} \cdot d &= \lambda_0 \cdot (T_2 - T_1) + \frac{\lambda_1}{2} \cdot (T_2 - T_1) \cdot (T_2 + T_1) \\
-\dot{q} \cdot d &= (T_2 - T_1) \cdot \left( \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{2} \cdot (T_2 + T_1) \right).
\end{aligned}$$

Nyní odvodíme střední hodnotu tepelné vodivosti  $\bar{\lambda}$ :

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda} &= \frac{1}{T_2 - T_1} \cdot \int_{T_1}^{T_2} \lambda(T) \cdot dT = \frac{1}{T_2 - T_1} \cdot \int_{T_1}^{T_2} (\lambda_0 + \lambda_1 \cdot T) \cdot dT \\
&= \frac{1}{T_2 - T_1} \cdot \left[ \lambda_0 \cdot T + \frac{\lambda_1}{2} \cdot T^2 \right]_{T_1}^{T_2} = \frac{1}{T_2 - T_1} \cdot \left( \lambda_0 \cdot (T_2 - T_1) + \frac{\lambda_1}{2} \cdot (T_2^2 - T_1^2) \right) = \\
&= \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{2} \cdot (T_2 + T_1).
\end{aligned}$$

Nyní můžeme videt, že člen v závorce u vyřešené diferenciální rovnice je roven střední hodnotě tepelné vodivosti  $\bar{\lambda}$ :

$$-\dot{q} \cdot d = (T_2 - T_1) \cdot \bar{\lambda}.$$

Nyní můžeme odvodit vztah pro měrný tepelný tok  $\dot{q}$ :

$$\dot{q} = \frac{T_1 - T_2}{d} \cdot \bar{\lambda}.$$

### 3 Průtokový ohříváč

Máme průtokový ohříváč tvořený dvěma obdelníkovými elektrodoými deskami o délce  $l$  (m) a šířce  $b$  (m). Vzdálenost mezi deskami je  $d$  (m). Mezi deskami je voda produkující o rychlosti  $v$  pouze ve směru  $x$ . Voda má měrnou tepelnou kapacitu  $c$  ( $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ) a hustotu  $\rho$  ( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ). Elektrické napětí mezi deskami je  $U$  (V). Odvoďte změnu teploty vody  $T_2$  (K) na výstupu průtokového ohříváče, pokud na vstupu je voda o teplotě  $T_1$  (K).

Budou platit následující předpoklady:

- $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ ,
- $\nabla \cdot (\lambda \cdot \vec{\nabla} T) = 0$ .

#### 3.1 Řešení

Fourier-Kirchhoffova rovnice:

$$\rho \cdot c \cdot \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \dot{Q}_V, \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-3}) \quad (1)$$

kde:

$\rho$  – hustota ( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ),

$c$  – měrná tepelná kapacita ( $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ),

$\vec{v}$  – rychlost ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ),

$\vec{\nabla} T$  – gradient teploty ( $\text{K} \cdot \text{m}^{-1}$ ),

$\dot{Q}_V$  – objemový zdroj tepla ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$ ).

Vektor rychlosti  $\vec{v}$  je:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vektor rychlosti  $\vec{v}$  má pouze složku  $v$ , protože voda teče pouze ve směru osy  $x$ . Můžeme tedy rovnici zjednodušit na:

$$\rho \cdot c \cdot v \cdot \frac{dT}{dx} = \dot{Q}_V.$$

Dále je třeba vyjádřit rychlost  $v$  a objemový zdroj tepla  $\dot{Q}_V$ . Rychlost  $v$  je:

$$v = \frac{\dot{V}}{S} = \frac{\dot{V}}{d \cdot b},$$

kde:

$\dot{V}$  – objemový průtok ( $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ ).

Objemový zdroj tepla  $\dot{Q}_V$  můžeme vyjádřit pomocí intenzity elektrického pole  $E$  a proudové hustoty  $J$ :

$$\dot{Q}_V = E \cdot J,$$

kde:

$E$  – intenzita elektrického pole ( $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ ),

$J$  – proudová hustota ( $\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$ ).

Proudovou hustotu  $J$  můžeme vyjádřit pomocí Ohmova zákona v diferenciálním tvaru:

$$J = \sigma_e \cdot E,$$

kde:

$\sigma_e$  – měrná elektrická vodivost ( $\Omega \cdot \text{m}^{-1}$ ).

Dostaneme tedy:

$$\dot{Q}_V = E \cdot \sigma_e \cdot E = \sigma_e \cdot E^2.$$

Intenzitu elektrického pole  $E$  můžeme vyjádřit pomocí napětí  $U$  a vzdálenosti mezi deskami  $d$ :

$$E = \frac{U}{d}.$$

Dostaneme tedy:

$$\dot{Q}_V = \sigma_e \cdot \left(\frac{U}{d}\right)^2.$$

Zde je třeba uvažovat měrnou elektrickou vodivost  $\sigma_e$  jako proměnnou závislou na teplotě. U kovů se vzrůstající teplotou se měrná elektrická vodivost snižuje, jelikož volné nosiče náboje mají problém se v rozpohybované krystalové mřížce kvůli teplotě pohybovat. Naopak u iontových roztoků jako třeba u vody se měrná elektrická vodivost zvyšuje s teplotou. Nahradíme tedy  $\sigma_e$  lineární funkcí teploty  $\sigma_e(T)$ :

$$\sigma_e = \sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T.$$

Nyní můžeme dosadit vše do rovnice:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\dot{V}}{d \cdot b} \cdot \frac{dT}{dx} = (\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T) \cdot \left(\frac{U}{d}\right)^2.$$

Dostáváme diferenciální rovnici, kterou můžeme řešit separací proměnných:

$$\frac{dT}{\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T} = \frac{U^2 \cdot b}{d \cdot \rho \cdot c \cdot \dot{V}} \cdot dx.$$

Pravou stranu můžeme pro lepší čitelnost nahradit:

$$\xi = \frac{U^2 \cdot b}{d \cdot \rho \cdot c \cdot \dot{V}}.$$

Dostáváme:

$$\frac{dT}{\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T} = \xi \cdot dx.$$

Integrujeme obě strany:

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T} = \int_0^l \xi \cdot dx,$$

kde:

$T_1$  – počáteční teplota (K),

$T_2$  – konečná teplota (K),

$l$  – délka průtokového ohřívače (m).

Dostáváme:

$$\left[ \frac{1}{\sigma_{e,1}} \cdot \ln(\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T) \right]_{T_1}^{T_2} = [\xi \cdot x]_0^l$$

$$\frac{1}{\sigma_{e,1}} \cdot \ln(\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_2) - \frac{1}{\sigma_{e,1}} \cdot \ln(\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_1) = \xi \cdot l$$

$$\ln\left(\frac{\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_2}{\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_1}\right) = \sigma_{e,1} \cdot \xi \cdot l$$

$$\frac{\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_2}{\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_1} = e^{\sigma_{e,1} \cdot \xi \cdot l}$$

$$\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_2 = (\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_1) \cdot e^{\sigma_{e,1} \cdot \xi \cdot l}$$

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{(\sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_1) \cdot e^{\sigma_{e,1} \cdot \xi \cdot l} - \sigma_{e,0}}{\sigma_{e,1}} = \frac{\sigma_{e,0} \cdot e^{\sigma_{e,1} \cdot \xi \cdot l} - \sigma_{e,0} + \sigma_{e,1} \cdot T_1 \cdot e^{\sigma_{e,1} \cdot \xi \cdot l}}{\sigma_{e,1}} = \\ &= \frac{\sigma_{e,0} \cdot e^{\sigma_{e,1} \cdot \xi \cdot l} - \sigma_{e,0}}{\sigma_{e,1}} + T_1 \cdot e^{\sigma_{e,1} \cdot \xi \cdot l}. \end{aligned}$$

Pokud za  $\xi$  dosadíme původní výraz, dostaneme:

$$T_2 = \frac{\sigma_{e,0} \cdot e^{\sigma_{e,1} \cdot \frac{U^2 \cdot b}{d \cdot \rho \cdot c \cdot V} \cdot l} - \sigma_{e,0}}{\sigma_{e,1}} + T_1 \cdot e^{\sigma_{e,1} \cdot \frac{U^2 \cdot b}{d \cdot \rho \cdot c \cdot V} \cdot l}.$$