Cvičení 3 - Sdílení tepla - Válec a koule

Elektroenergetika 3

Petr Jílek

2024

Obsah

Úprava značení

- Absolutní tepelný odpor: $R_{\vartheta A} \rightarrow R$ $(\mathrm{K} \cdot \mathrm{W}^{-1})$
- Součinitel přestupu tepla: $\alpha_{\vartheta} \rightarrow \alpha$ $(\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{K}^{-1})$

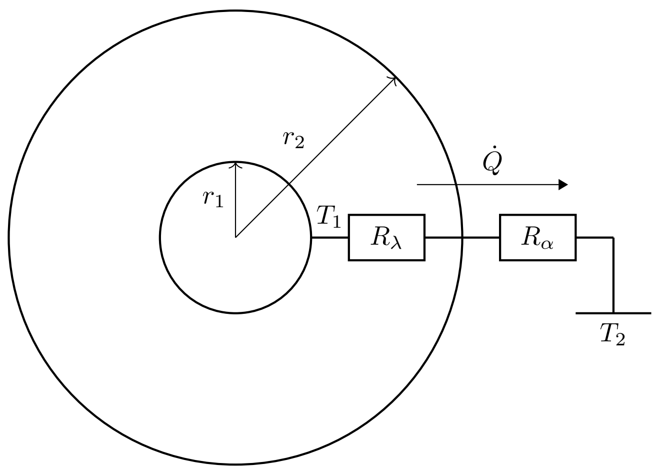
1 💿 Válec 🌶️🌶️🌶️

1.1 Odvození tepelného odporu

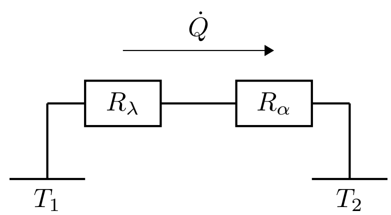
Tepelný odpor válce se skládá ze dvou částí:

- tepelný odpor vedení tepla v materiálu válce R_λ,
- tepelný odpor přestupu tepla z povrchu válce do okolí R_α.

Ilustrace válce bude vypadat následovně:



Tepelné schéma válce bude vypadat následovně:



Pro odvození tepelného odporu R_λ využijeme vztah pro absolutní tepelný odpor R:

$$R = \frac{d}{\lambda \cdot S}, \qquad (\mathrm{K} \cdot \mathrm{W}^{-1}) \tag{1}$$

kde:
d – tloušťka materiálu (m),
λ – tepelná vodivost materiálu $(\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1})$,
S – plocha přenosu tepla (m^2).

Zde d nahradíme nekonečně malou částí poloměru válce:

$$d \to dr.$$

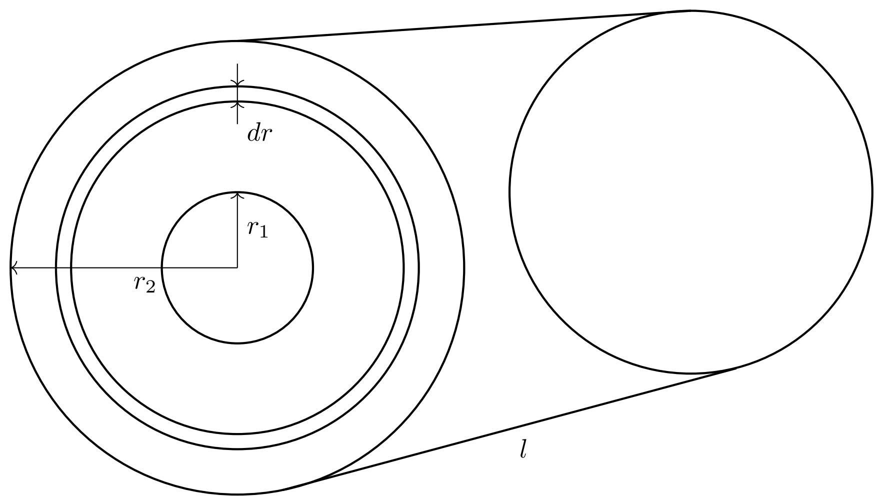
Dále S nahradíme plochou válce:

$$S \to 2\pi r \cdot l \cdot dr,$$

kde:
r – poloměr válce (m),
l – délka válce (m).

Tepelný odpor dR_λ válce bude tedy:

$$dR_\lambda = \frac{dr}{\lambda \cdot 2\pi r \cdot l \cdot dr}.$$



Pro získání celkového tepelného odporu R_λ je třeba provést integraci od vnitřního poloměru izolace r_1 po vnější poloměr válce r_2:

$$R_\lambda = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\lambda \cdot 2\pi r \cdot l} dr = \frac{1}{\lambda \cdot 2\pi \cdot l} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = \frac{1}{\lambda \cdot 2\pi \cdot l} \cdot \left[\ln |r|\right]_{r_1}^{r_2}.$$

Jelikož poloměry r_1 a r_2 jsou kladné (záporné poloměry nedávají fyzikální smysl), můžeme absolutní hodnotu u logaritmu zanedbat:

$$R_\lambda = \frac{1}{\lambda \cdot 2\pi \cdot l} \cdot [\ln r]_{r_1}^{r_2} = \frac{1}{\lambda \cdot 2\pi \cdot l} \cdot (\ln r_2 - \ln r_1) = \frac{1}{\lambda \cdot 2\pi \cdot l} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{2\pi l \lambda} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Pro odpor přestupu tepla z povrchu válce do okolí R_α využijeme vztah pro odpor přestupu tepla R_α:

$$R_\alpha = \frac{1}{\alpha \cdot S}, \qquad (\mathrm{K} \cdot \mathrm{W}^{-1}) \qquad (2)$$

kde:
α – součinitel přestupu tepla ($\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{K}^{-1}$).

Plochu S nahradíme plochou válce:

$$S \to 2\pi r_2 \cdot l.$$

Odpor přenosu tepla z povrchu válce do okolí R_α bude tedy:

$$R_\alpha = \frac{1}{\alpha \cdot 2\pi r_2 \cdot l} = \frac{1}{2\pi l \alpha r_2}.$$

Celkový tepelný odpor válce $R_{\vartheta,\Sigma}$ bude součtem obou odporů:

$$R_\Sigma = R_\lambda + R_\alpha = \frac{1}{2\pi l \lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\pi l \alpha r_2}.$$

1.2 Minimum tepelného odporu

Pro nalezení extrému tepelného odporu R_Σ podle poloměru válce r_2 je třeba zjistit, kdy bude derivace R_Σ podle r_2 rovna nule:

$$\frac{dR_\Sigma}{dr_2} = 0.$$

Derivace R_Σ podle r_2 bude:

$$\frac{dR_\Sigma}{dr_2} = \frac{dR_\lambda}{dr_2} + \frac{dR_\alpha}{dr_2}.$$

Derivace R_λ podle r_2 bude:

$$\frac{dR_\lambda}{dr_2} = \frac{d}{dr_2}\left(\frac{1}{2\pi l \lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}\right) = \frac{d}{dr_2}\left(\frac{1}{2\pi l \lambda} (\ln r_2 - \ln r_1)\right) =$$

$$= \frac{d}{dr_2}\left(\frac{1}{2\pi l \lambda} \ln r_2\right) = \frac{1}{2\pi l \lambda r_2}.$$

Derivace R_α podle r_2 bude:

$$\frac{dR_\alpha}{dr_2} = \frac{d}{dr_2}\left(\frac{1}{2\pi l \alpha r_2}\right) = -\frac{1}{2\pi l \alpha r_2^2}.$$

Derivace R_Σ podle r_2 bude tedy:

$$\frac{dR_\Sigma}{dr_2} = \frac{1}{2\pi l \lambda r_2} - \frac{1}{2\pi l \alpha r_2^2}.$$

Nyní můžeme zjistit, kdy bude derivace R_Σ podle r_2 rovna nule:

$$\frac{1}{2\pi l \lambda r_2} - \frac{1}{2\pi l \alpha r_2^2} = 0$$

$$\frac{1}{\lambda r_2} - \frac{1}{\alpha r_2^2} = 0$$

$$\frac{1}{\lambda r_2} = \frac{1}{\alpha r_2^2}$$

$$\frac{r_2}{\lambda} = \frac{1}{\alpha}$$

$$r_2 = \frac{\lambda}{\alpha}.$$

V další části budeme zkoumat, zda se jedná o minimum nebo maximum. K tomu využijeme druhou derivaci R_Σ podle r_2:

$$\frac{d^2 R_\Sigma}{dr_2^2} = \frac{d}{dr_2}\left(\frac{1}{2\pi l \lambda r_2} - \frac{1}{2\pi l \alpha r_2^2}\right) = -\frac{1}{2\pi l \lambda r_2^2} + \frac{1}{\pi l \alpha r_2^3}.$$

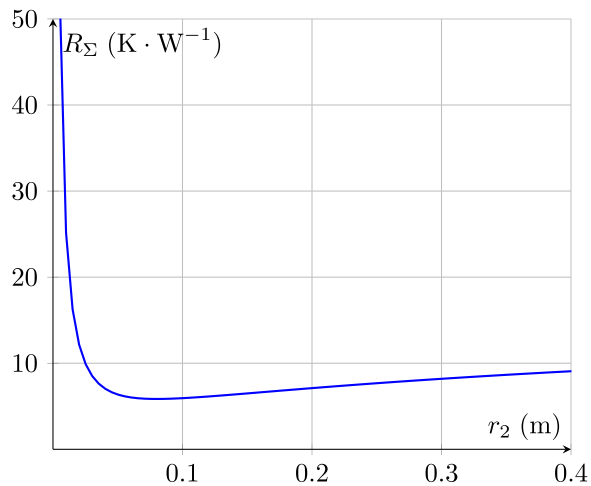
Nyní dosadíme $r_2 = \frac{\lambda}{\alpha}$:

$$-\frac{1}{2\pi l \lambda \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^2} + \frac{1}{\pi l \alpha \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^3} = -\frac{1}{2\pi l \lambda \frac{\lambda^2}{\alpha^2}} + \frac{1}{\pi l \alpha \frac{\lambda^3}{\alpha^3}} =$$

$$= -\frac{\alpha^2}{2\pi l \lambda^3} + \frac{\alpha^2}{\pi l \lambda^3} = \frac{-\alpha^2 + 2\alpha^2}{2\pi l \lambda^3} = \frac{\alpha^2}{2\pi l \lambda^3}.$$

Hodnoty α a λ jsou kladné, tudíž druhá derivace je kladná. To znamená, že se jedná o minimum.

Závislost tepelného odporu R_Σ na poloměru válce r_2



1.3 Ekonomie

Nyní můžeme porovnat rozdíl v rychlosti růstu tepelného odporu R_Σ a objemu izolace v závislosti na poloměru válce r_2. Řešíme objem izolace, jelikož při konstrukci se platí za objem materiálu. Pro objem izolace platí:

$$V = \pi(r_2^2 - r_1^2) \cdot l = \pi r_2^2 \cdot l - \pi r_1^2 \cdot l.$$

Nyní provedeme zjednodušení vzorce podobně jako se provádí u časové složitosti algoritmů. Zkoumáme rychlost růstu objemu izolace v závislosti na poloměru válce r_2, tudíž vyřadíme konstantní členy, čímž dostaneme:

$$V \sim \pi r_2^2 \cdot l.$$

Dále vyřadíme všechny násobící konstanty, čímž dostaneme:

$$V \sim r_2^2.$$

Zde dostáváme, že objem roste s druhou mocninou poloměru válce r_2. Pro odpor R_Σ platí:

$$R_\Sigma = \frac{1}{2\pi l\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\pi l\alpha r_2}.$$

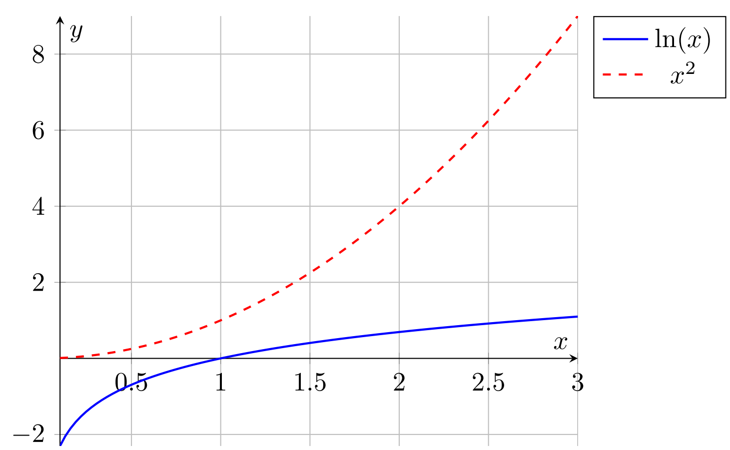
Zde druhý člen jde do nuly, když r_2 jde do nekonečna, tudíž ho můžeme vyřadit. Zbyde nám:

$$R_\Sigma \sim \frac{1}{2\pi l\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Dále můžeme vyřadit konstantní členy a dostaneme:

$$R_\Sigma \sim \ln r_2.$$

Na následujícím grafu je porovnání závislosti logaritmické funkce a kvadratické funkci:



Poznámka

Vidíme, že odpor roste logaritmicky s poloměrem válce r_2. Pokud porovnáme rychlost růstu objemu izolace a rychlost růstu odporu R_Σ, zjistíme, že objem izolace roste rychleji než odpor R_Σ. To znamená, že při dimenzování izolace je třeba brát v potaz i ekonomické hledisko, jelikož při velkém přidání izolace nám dramaticky může narůst cena, ale odpor R_Σ se nám příliš nezmění.

1.4 Číselný příklad 1

Mějme izolovaný vodič v rozvaděči, kde tepelná vodivost izolace je $\lambda = 0,159\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$, součinitel přestupu tepla do okolí je $\alpha = 10\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$ Vypočítejte vnější poloměr izolovaného vodiče r_2, kdy bude tepelný odpor R_Σ minimální.

1.4.1 Řešení

Dosadíme do vzorce pro minimum tepelného odporu R_Σ:

$$r_2 = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{0,159}{10} = 0,0159\ \mathrm{m} = 1,59\ \mathrm{cm}.$$

Z výsledku můžeme říct, že pokud máme vodič o poloměru r_1, který je menší, než $1,59$ cm, pak pokud přidáme izolaci tak, aby vnější poloměr byl $1,59$ cm, tak bude izolovaný vodič nejlépe odvádět teplo do okolí.

1.5 Číselný příklad 2

Izolace horkovodního potrubí má tepelnou vodivost $\lambda = 0,02\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$ a součinitel přestupu tepla do okolí je $\alpha = 5\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$. Vypočítejte vnější poloměr válce r_2, kdy bude tepelný odpor R_Σ minimální.

1.5.1 Řešení

Dosadíme do vzorce pro minimum tepelného odporu R_Σ:

$$r_2 = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{0,02}{5} = 0,004\ \mathrm{m} = 0,4\ \mathrm{cm}.$$

Z výsledku můžeme říct, že by vnitřní poloměr potrubí r_1 měl být menší než $0,4$ cm, aby bylo výhodné přidat izolaci. Nicméně takto malý poloměr potrubí se v praxi nevyskytuje.

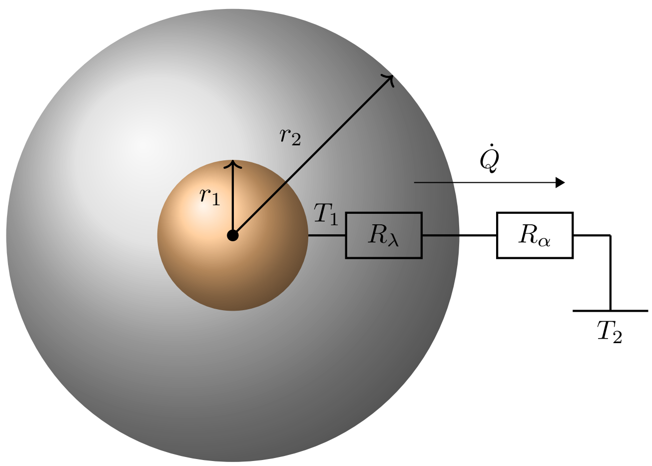
2 ⚽ Koule 🌶️🌶️🌶️

2.1 Odvození tepelného odporu

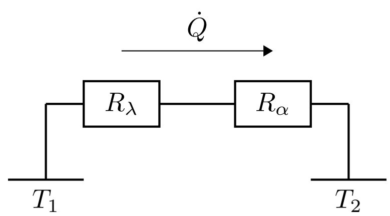
Tepelný odpor koule se skládá ze dvou částí:

- odpor vedení tepla v materiálu koule R_λ,
- odpor přenosu tepla z povrchu koule do okolí R_α.

Ilustrace koule bude vypadat následovně:



Tepelné schéma koule bude vypadat následovně:



Pro odvození tepelného odporu R_λ využijeme vztah pro absolutní tepelný odpor R:

$$R = \frac{d}{\lambda \cdot S},$$

kde:
d - tloušťka materiálu (m),
λ - tepelná vodivost materiálu $(\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1})$,
S - plocha přenosu tepla (m^2).

Zde d nahradíme nekonečně malou částí poloměru koule:

$$d \to dr.$$

Dále S nahradíme plochou koule:

$$S \rightarrow 4\pi r^2.$$

Tepelný odpor dR_ϑ koule bude tedy:

$$dR_\lambda = \frac{dr}{\lambda \cdot 4\pi r^2}.$$

Pro získání celkového odporu R_λ je třeba provést integraci od vnitřního poloměru r_1 po vnější poloměr koule r_2:

$$R_\lambda = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\lambda \cdot 4\pi r^2} dr = \frac{1}{\lambda \cdot 4\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{1}{\lambda \cdot 4\pi} \cdot \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2}.$$

Po dosazení mezí integrace dostaneme:

$$R_\lambda = \frac{1}{\lambda \cdot 4\pi} \cdot \left(-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right) = \frac{1}{\lambda \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{1}{4\pi\lambda} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Pro odpor přenosu tepla z povrchu koule do okolí R_α využijeme vztah pro odpor přenosu tepla R_α:

$$R_\alpha = \frac{1}{\alpha \cdot S},$$

kde:
α - součinitel přestupu tepla (W/m^2·K).

Plochu S nahradíme plochou koule:

$$S \rightarrow 4\pi r_2^2.$$

Odpor přenosu tepla z povrchu koule do okolí R_α bude tedy:

$$R_\alpha = \frac{1}{\alpha \cdot 4\pi r_2^2} = \frac{1}{4\pi\alpha r_2^2}.$$

Celkový tepelný odpor koule R_Σ bude součtem obou odporů:

$$R_\Sigma = R_\lambda + R_\alpha = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{4\pi\alpha r_2^2}$$

Nyní pojďme vyšetřit limitu odporu pro r_2 jdoucí do nekonečna:

$$\lim_{r_2 \to \infty} R_\Sigma = \lim_{r_2 \to \infty} \left(\frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{4\pi\alpha r_2^2} \right)$$

Členy, kde se vyskytuje r_2 ve jmenovateli, jdou do nuly, čímž dostaneme:

$$\lim_{r_2 \to \infty} R_\Sigma = \frac{1}{4\pi\lambda r_1}.$$

Poznámka

Limita odporu koule pro r_2 jdoucí do nekonečna je:

$$\lim_{r_2 \to \infty} R_\Sigma = \frac{1}{4\pi\lambda r_1}.$$

Toto znamená, že koule bude mít vždy nějaký konečný tepelný odpor, který nelze překonat přidáním izolace. Koule tedy nelze úplně tepelné izolovat.

2.2 Minimum tepelného odporu

Pro nalezení extrému tepelného odporu R_Σ podle poloměru koule r_2 je třeba zjistit, kdy bude derivace R_Σ podle r_2 rovna nule:

$$\frac{dR_\Sigma}{dr_2} = 0.$$

Derivace R_Σ podle r_2 bude:

$$\frac{dR_\Sigma}{dr_2} = \frac{dR_\lambda}{dr_2} + \frac{dR_\alpha}{dr_2}.$$

Derivace R_λ podle r_2 bude:

$$\frac{dR_\lambda}{dr_2} = \frac{d}{dr_2}\left(\frac{1}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\right) = \frac{1}{4\pi\lambda r_2^2}$$

Derivace R_α podle r_2 bude:

$$\frac{dR_\alpha}{dr_2} = \frac{d}{dr_2}\left(\frac{1}{4\pi\alpha r_2^2}\right) = -\frac{2}{4\pi\alpha r_2^3} = -\frac{1}{2\pi\alpha r_2^3}.$$

Derivace R_Σ podle r_2 bude tedy:

$$\frac{dR_\Sigma}{dr_2} = \frac{1}{4\pi\lambda r_2^2} - \frac{1}{2\pi\alpha r_2^3}.$$

Nyní můžeme zjistit, kdy bude derivace R_Σ podle r_2 rovna nule:

$$\frac{1}{4\pi\lambda r_2^2} - \frac{1}{2\pi\alpha r_2^3} = 0$$

$$\frac{1}{4\lambda r_2^2} - \frac{1}{2\alpha r_2^3} = 0$$

$$\frac{1}{4\lambda r_2^2} = \frac{1}{2\alpha r_2^3}$$

$$\frac{1}{\lambda r_2^2} = \frac{2}{\alpha r_2^3}$$

$$\frac{r_2}{\lambda} = \frac{2}{\alpha}$$

$$r_2 = \frac{2\lambda}{\alpha}.$$

V další části budeme zkoumat, zda se jedná o minimum nebo maximum. K tomu využijeme druhou derivaci R_Σ podle r_2:

$$\frac{d^2R_\Sigma}{dr_2^2} = \frac{d}{dr_2}\left(\frac{1}{4\pi\lambda r_2^2} - \frac{1}{2\pi\alpha r_2^3}\right) = -\frac{2}{4\pi\lambda r_2^3} + \frac{3}{2\pi\alpha r_2^4} = -\frac{1}{2\pi\lambda r_2^3} + \frac{3}{2\pi\alpha r_2^4}.$$

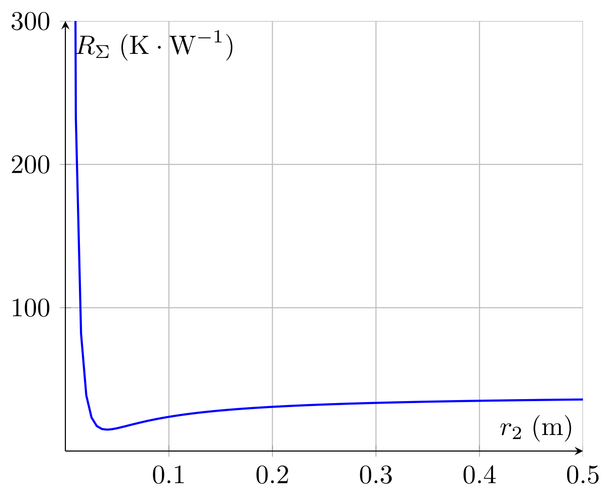
Nyní dosadíme $r_2 = \frac{2\lambda}{\alpha}$:

$$-\frac{1}{2\pi\lambda\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)^3} + \frac{3}{2\pi\alpha\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)^4} = -\frac{1}{2\pi\lambda\frac{8\lambda^3}{\alpha^3}} + \frac{3}{2\pi\alpha\frac{16\lambda^4}{\alpha^4}} =$$

$$= -\frac{\alpha^3}{16\pi\lambda^4} + \frac{3\alpha^3}{32\pi\lambda^4} = \frac{-2\alpha^3 + 3\alpha^3}{32\pi\lambda^4} = \frac{\alpha^3}{32\pi\lambda^4}.$$

Hodnoty α a λ jsou kladné, tudíž druhá derivace je kladná. To znamená, že se jedná o minimum.

Závislost tepelného odporu R_Σ na poloměru koule r_2



2.3 Ekonomie

Nyní můžeme porovnat rozdíl v rychlosti růstu tepelného odporu R_Σ a objemu izolace v závislosti na poloměru koule r_2.

$$V = \frac{4}{3}\pi(r_2^3 - r_1^3).$$

Po zjednodušení dostaneme:

$$V \sim r_2^3.$$

Rychlost růstu objemu izolace je kubická a jde do někonečna, zatímco tepelný odpor dosáhne limitní hodnoty.

2.4 Číselný příklad

Mějme izolovanou kouli, kde tepelná vodivost izolace je $\lambda = 0,159\ \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1}$, součinitel přestupu tepla do okolí je $\alpha = 10\ \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{K}^{-1}$ Vypočítejte vnější poloměr koule r_2, kdy bude tepelný odpor R_Σ minimální.

2.4.1 Řešení

Dosadíme do vzorce pro minimum tepelného odporu R_Σ:

$$r_2 = \frac{2\lambda}{\alpha} = \frac{2 \cdot 0,159}{10} = 0,0318\ \mathrm{m} = 3,18\ \mathrm{cm}.$$