FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ ČVUT V PRAZE

NI-KOP
Experimentální hodnocení kvality algoritmů

Petr Pondělík

Fakulta informačních technologií Českého vysokého učení technického v Praze,
Thákurova 9, 160 00 Praha 6
pondepe1@fit.cvut.cz

1 Specifikace úlohy

Zadání dostupné na Moodle.

2 Rozbor hodnocených algoritmů

V základu problému batohu máme zadány následující proměnné:

- celé číslo n (počet věcí)
- celé číslo M (kapacita batohu)
- konečná množina $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ (hmotnosti věcí)
- konečná množina $C = \{c_1, c_2, ..., c_n\}$ (ceny věcí)

Tato práce se zaměřuje na hodnocení algoritmů pro řešení **konstruktivní verze** optimalizačního 0/1 problému batohu.

V konstruktivní verzi optimalizačního 0/1 problému batohu hledáme množinu $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ (konfigurace) kde každé $x_i \in \{0, 1\}$ tak, aby platila nerovnost $\sum_{i=1}^{n} x_i v_i \leq M$ (omezení) a suma $\sum_{i=1}^{n} x_i c_i$ byla maximální (optimalizační kritérium).

2.1 Branch&Bound

2.1.1 Rozbor řešení

Řešení problému je možné optimalizovat prořezáváním stavového prostoru. Pro dosažení rozumné optimalizace je nutné prořezávat prostor jak shora (překročení kapacity batohu), tak zdola (stávající řešení nemůže být lepší než nejlepší dosud nalezené). Asymptotická složitost řešení je stále $O(2^n)$.

2.1.2 Postup řešení

Ořezávání shora je implementováno testováním podmínky na aktuální hmotnost v každém rekurentním volání. Ořezávání zdola je implementováno testováním, zda v dané větvi rekurze potenciálně lze dosáhnout lepšího řešení, než je aktuální optimální řešení. Testování spočívá v přičtení sumy cen všech zbývajících předmětů k ceně aktuálního stavu a její srovnání s cenou aktuálně nejlepšího řešení.

2.1.3 Kostra algoritmu

```
# Globálně dostupná proměnná opt (defaulně nulová cena, nekonečná hmotnost)
vyhodnotInstanci():
    zpracujStav(uroven = 1, prvni predmet nepridan, konfigurace = [])
    zpracujStav(uroven = 1, prvni predmet pridan, konfigurace = [])
    return optimalni reseni

zpracujStav(uroven, stav, konfigurace):
    konfigurace.append(stav.x)
    if stav.hmotnost > M: return
    if not potencialneLepsi(uroven, stav): return
    if uroven >= n:
        updatujOptimum(stav, konfigurace)
        return
    zpracujStav(uroven++, predmet nepridan, konfigurace.add(True))
    konfigurace.pop()
    zpracujStav(uroven++, predmet pridan, konfigurace.add(False))
    konfigurace.pop()

potencialneLepsi(uroven, stav):
    ziskej zbyvajici predmety dle urovne
    pCena = stav.cena + suma cen zbyvajicich predmetu
    pHmotnost = stav.hmotnost + suma cen zbyvajicich predmetu
    return pCena > opt.cena or (pCena == opt.cena and pHmotnost < opt.hmotnost)

updatujOptimum(stav, konfigurace):
    if (
        stav.hmotnost < M and (
            stav.cena > opt.cena or (stav.cena == opt.cena and stav.hmotnost < opt.hmotnost)
        )
    ):
        updatuj optimalni reseni aktualnim stavem a konfiguraci
```

2.2 Greedy heuristika

2.2.1 Rozbor řešení

Greedy heuristika staví na plnění batohu předměty v sestupném pořadí dle poměru $\frac{cena}{hmotnost}$. Nevýhodou je, že její chyba není shora omezena.

2.2.2 Postup řešení

Pro instanci o vel. n je definována konfigurace $\{x_1 = 0, ..., x_n = 0\}$. Předměty jsou seřazeny dle poměru $\frac{cena}{hmotnost}$. Následně jsou iterovány a dokud řešení po zahrnutí předmětu nepřekročí kapacitu M, je předmět přidán do řešení. V případě přidání i-tého předmětu je v konfiguraci nastavena hodnota $x_i = 1$ a cena řešení je inkrementována o jeho hmotnost.

2.2.3 Kostra algoritmu

```
solution # Globální proměnná (defaulně nulová cena a hmotnost)
X = [0, ..., 0] # Pole o velikosti instance
for item in items:
    if solution.weight + item.weight <= M:
        solution.cost += item.cost
        solution.weight += item.weight
        X[item.inx] = 1
```

2.3 Dynamické programování

2.3.1 Rozbor řešení

Dynamické programování (DP) využívá dekompozici instance problému. Řešení podproblémů vzniklých dekompozicí jsou ukládána do paměti a znovupoužita v případě potřeby řešit již známý podproblém. DP tedy převádí časovou složitost na složitost paměťovou.

Pro řešení problému batohu pomocí DP lze využít dekompozici dle váhy či ceny. V případě dekompozice dle ceny pak hledáme řešení inverzního problému batohu. Tedy pro daný počet předmětů n a cenu C hledáme konfiguraci $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ takovou, aby $\sum_{i=1}^{n} x_i c_i = C$ (omezení) a suma $\sum_{i=1}^{n} x_i w_i$ byla minimální (optimalizační kritérium).

Velikost potřebné paměti je $n\sum_{i=1}^{n} c_i$. Každý prvek lze spočítat v konstantním čase. Nechť $C_M = max\{c_1, c_2, ..., c_n\}$. Pak $\sum_{i=1}^{n} c_i \leq nC_M$. Asymptotická složitost této varianty je tedy $O(n^2 C_M)$. Parametr C_M nezávisí na velikosti instance, tudíž se jedná o pseudopolynomiální algoritmus.

2.3.2 Postup řešení

Využita je dekompozice dle ceny. DP je vyřešeno iterativně. Alokována je tabulka **memory** hmotností (hodnoty ∞) o velikosti $(n+1)(C_{sum}+1)$, kde $C_{sum} = \sum_{i=1}^{n} c_i$. Z optimalizačního důvodu jsou ceny předmětů s hmotností přesahující M nastaveny na 0 (nižší C_{sum}). Definujeme $memory[0][0] = 0$. Následně jsou řešeny postupně rostoucí podproblémy o $n^{'}$ prvcích z množiny $\{1, ..., n\}$ plnění batohu tak, aby $\sum_{i=1}^{n^{'}} x_i c_i = C$ (omezení) a suma $\sum_{i=1}^{n^{'}} x_i w_i$ byla minimální. Opakující se podproblémy nejsou opakovaně počítány, ale je využíváno již vyřešených podproblémů. Minimální váha, pomocí které lze dosáhnout ceny c pro instanci o $i+1$ prvních předmětech, je získána vztahem $memory[c][i+1] = min(memory[c][i], memory[c - c_{i+1}][i] + w_i)$. Tedy zkoumáme, odkud jsme na aktuální pole tabulky mohli přistoupit v případě, že nový předmět nepřidáme ($memory[c][i]$), či přidáme ($memory[c-c_{i+1}][i]+w_i$) a vybíráme hodnotu s nižší hmotností.

Výslednou cenu C_{res} nalezneme jako maximální řádkový index c prvku posledního sloupce tabulky, jehož váha je $\leq M$. Konstrukce konfigurace řešení získáme pomocí backtrackingu z pozice ceny C_{res}. Vycházíme ze souřadnic optimálního řešení a postupně zmenšujeme řešený problém odebíráním předmětů. Pokud se při zmenšení problému nezmění minimální hmotnost (porovnání $memory[c][i] = memory[c][i-1]$), předmět nepatří do konfigurace řešení.

2.3.3 Kostra algoritmu

```
# Globální proměnné
n, M, C, W, cSum, solution
memory = [[inf for i in {0, ..., n+1}] for j in {0, ..., cSum+1)]
memory[0][0] = 0
for i in {1, ..., n+1}:
    for cost in C:
        memory[cost][i+1] = min(memory[cost][i], memory[cost - C[i+1]][i] + W[i])

findSolution(memory):
    return memory[c,n], kde memory[c,n] <= M a c je maximalni

findSolutionConf(memory, cost):
    conf = [0 for i in {0, ..., n}]
    actualCost, actualItem = cost, n
    for i in {1, n + 1}:
        originItem, originCost = actualItem-1, actualCost
        originWeight = self.memory[actualCost][originItem]
        actualWeight = self.memory[actualCost][actualItem]
        if actualWeight != originWeight:
            originCost = actualCost - C[n-i]
            conf[n-i] = 1
            actualCost, actualItem = originCost, originItem
    return conf

solution.cost = findSolution(memory)
solution.configuration = findSolutionConf(memory, solution.cost)

return solution
```

3 Experimentální vyhodnocení

3.1 Specifikace platformy

Procesor: Intel Core i5-10210U, 1.6 GHz (TurboBoost 4.2 GHz)
Operační systém: Kubuntu 20.04.1 LTS
Programovací jazyk: Python 3.8

3.2 Generátor instancí

Pro účely generování dat byl využit generátor instancí problému batohu dostupný na stránkách kurzu.

Popis parametrů generátoru vyskytujících se dále v textu:

- -n: počet předmětů [celé číslo],
- -N: počet instancí [celé číslo],
- -m: poměr kapacity batohu k sumární váze jako pevná hodnota [reálné číslo],
- -W: maximální váha předmětu [celé číslo],
- -w: převaha lehkých/těžkých věcí [bal|light|heavy],
- -C: maximální cena předmětu [celé číslo],
- -c: korelace s váhou žádná/menší/silná [uni|corr|strong],
- -k: exponent granularity [reálné číslo]

3.3 Branch & Bound

3.3.1 Citlivost výp. času na poměr kapacity batohu k sumární váze

Hypotéza

Předpokládejme, že pro poměr kapacity batohu k sumární váze v intervalu $[0.0, 0.5]$ bude při rostoucím poměru růst rovněž výpočetní čas. Dále předpokládejme, že pro poměr v intervalu $(0.5, 1.0]$ bude výpočetní čas klesat. Hypotéza je založena na myšlence, že pokud je poměr v intervalu $[0.0, 0.5]$,

n	m=0,1	m=0,2	m=0,3	m=0,4	m=0,5	m=0,6	m=0,7	m=0,8	m=0,9
5	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
10	0,12	0,98	1,15	1,68	1,93	1,72	1,22	0,91	0,09
15	1,77	7,50	19,04	34,05	40,90	33,24	18,38	6,64	1,47
20	10,67	84,05	364,40	815,64	1038,87	757,42	315,44	69,50	7,27
22	22,54	242,73	1258,16	3073,87	3990,42	2810,46	1048,21	189,55	13,95

Tabulka 1: Průměrný CPU čas B&B dle volby m [ms]

dochází s klesajícím poměrem k většímu ořezávání shora (na základě překročení kapacity batohu), resp. pokud je poměr v intervalu $(0.5, 1.0]$, dochází s rostoucím poměrem k většímu ořezávání zdola (stávající řešení nemůže být lepší než nejlepší dosud nalezené).

Příprava dat pro experimentální vyhodnocení

Pro účely experimentálního vyhodnocení byla pro $n \in \{5, 10, 15, 20, 22\}$ vygenerována skupina datových sad s prefixem **m**.

Vlastnosti sad (dle konfigurace generátoru) jsou následující:

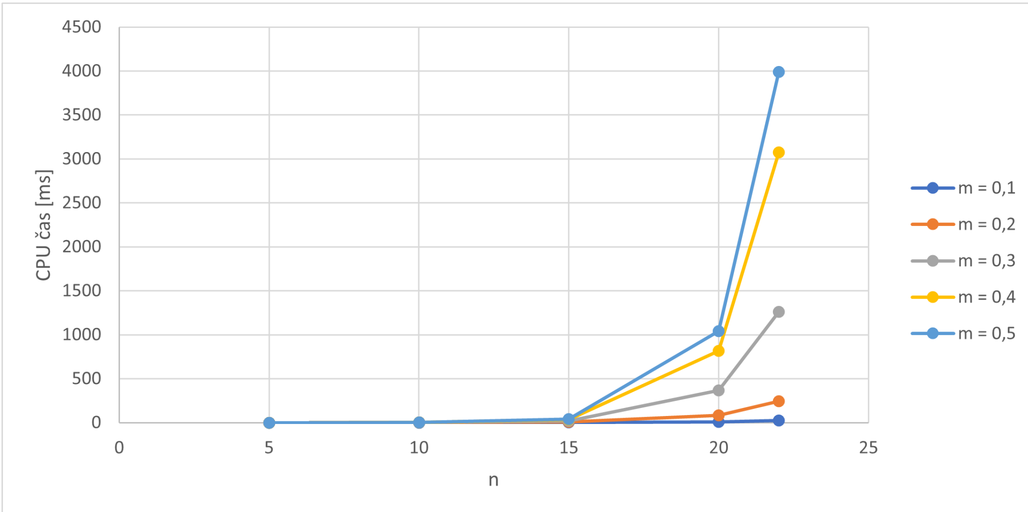
-N	-m	-W	-w	-C	-c	-k
500	{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9}	300	bal	1500	corr	1

Výsledky měření

Naměřené časy jsou k dispozici v tabulce 1.

Data jsou vizualizována třemi grafy. Na grafu 1 můžeme vidět srovnání CPU časů metody B&B v závislosti na velikosti instance n pro $m \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$. Na srovnání můžeme s rostoucí hodnotou m pozorovat rostoucí CPU čas. Naopak na grafu 2 (pro $m \in \{0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9\}$) lze pozorovat klesající CPU čas s rostoucí hodnotou m. Graf 3 pak poskytuje jiný pohled na data a zachycuje vývoj CPU času pro konkrétní volby n v závislosti na m. Můžeme pozorovat, že maximální CPU čas byl naměřen při volbě $m = 0.5$. S m vzdalujícím se od hodnoty 0.5 CPU čas klesá.

Naměřené výsledky tedy potvrzují hypotézu 3.3.1.



Obrázek 1: Závislosti CPU času B&B na n pro parametr $m \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$

3.4 Greedy heuristika

3.4.1 Citlivost chyby na granularitu

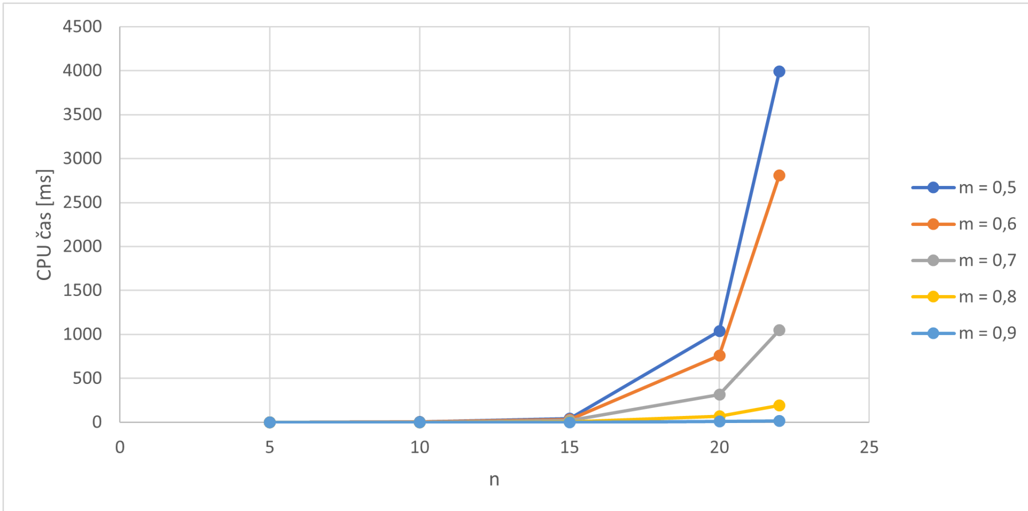
Hypotéza

Mějme batoh s kapacitou relativně nízkou vůči sumární váze předmětů. Dále měníme granularitu předmětů směrem dolů (tedy dostáváme stále menší předměty - předměty s nižší vahou). Předpokládejme, že chyba heuristiky bude klesat.

Příprava dat pro experimentální vyhodnocení

Pro účely experimentálního vyhodnocení byla pro $n \in \{5, 10, 15, 20, 22, 25\}$ vygenerována skupina datových sad s prefixem **k**. Vlastnosti sad (dle konfigurace generátoru) jsou následující:

-N	-m	-W	-w	-C	-c	-k
500	0.2	300	light	1500	uni	{1, 5, 10, 50, 100, 200, 300}



Obrázek 2: Závislost CPU času B&B na n pro parametr $m \in \{0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9\}$

Výsledky měření

Naměřené průměrné chyby jsou k dispozici v tabulce 2. Hodnoty chyb byly získány jakožto průměrné relativní odchylky od optimálních řešení (optimální řešení byla získána pomocí metody B&B).

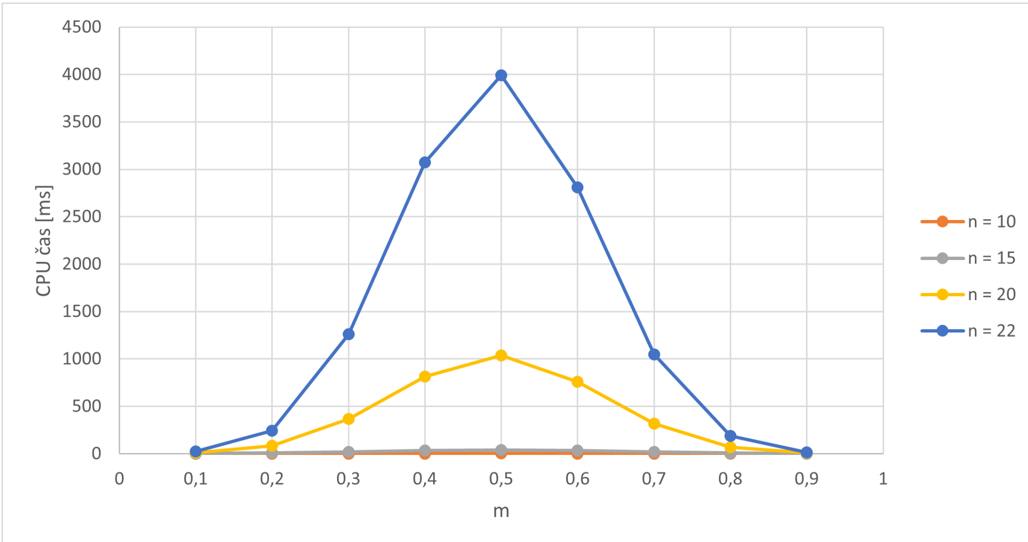
Data jsou vizualizována dvěma grafy. Na grafu 4 můžeme pozorovat klesající průměrnou chybu v závislosti na velikosti instance n při rostoucím koeficientu k. Výrazný pokles chybovosti pak lze pozorovat pro volby $k \in \{200, 300\}$. Na grafu 5 lze pozorovat klesající průměrnou chybu s rostoucí hodnotou koeficientu k pro konkrétní volby n.

Naměřené výsledky tedy potvrzují hypotézu 3.4.1.

3.4.2 Citlivost chyby na poměr kapacity batohu k sumární váze

Hypotéza

Předpokládejme, že s rostoucím poměrem kapacity batohu vůči sumární váze předmětů bude chybovost heuristiky klesat. Hypotéza je založena na myšlence, že na konci pole předmětů seřazeného dle poměru $\frac{C_i}{m_i}$ zbude méně předmětů tvořících případnou chybu heuristiky.



Obrázek 3: Závislosti CPU času B&B na parametru m pro $n \in \{10, 15, 20, 22\}$

Příprava dat pro experimentální vyhodnocení

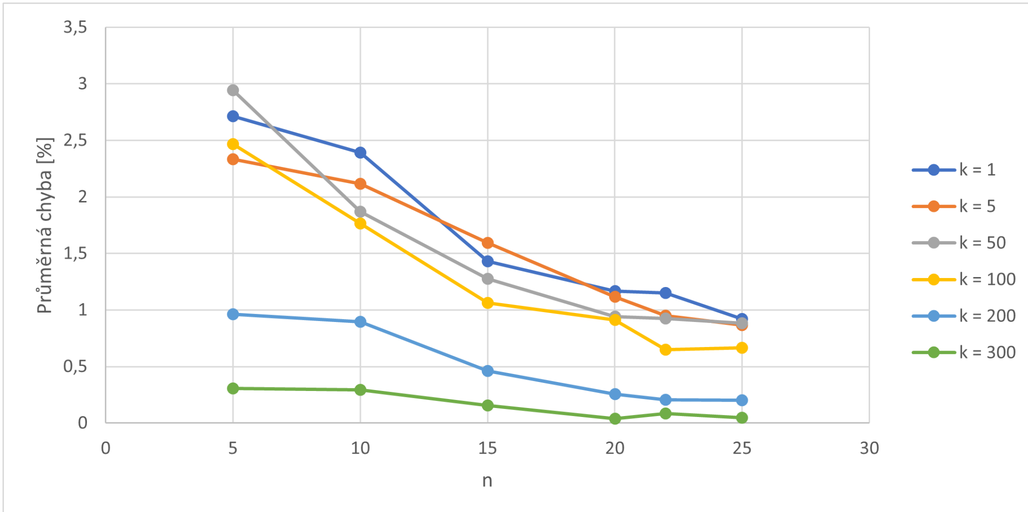
Pro účely experimentálního vyhodnocení byla pro $n \in \{5, 10, 15, 20, 22, 25\}$ vygenerována skupina datových sad s prefixem **gm**.

Vlastnosti sad (dle konfigurace generátoru) jsou následující:

-N	-m	-W	-w	-C	-c	-k
500	{0.1 0.2 0.4 0.8 1.0}	300	heavy	1500	uni	1

n	k=1	k=5	k=50	k=100	k=200	k=300
5	2,714	2,332	2,944	2,467	0,964	0,307
10	2,391	2,117	1,868	1,764	0,896	0,295
15	1,432	1,595	1,277	1,064	0,460	0,157
20	1,168	1,116	0,942	0,913	0,257	0,037
22	1,152	0,951	0,924	0,649	0,207	0,087
25	0,921	0,868	0,881	0,666	0,200	0,047

Tabulka 2: Průměrná chyba greedy heuristiky dle volby k [%]



Obrázek 4: Závislosti průměrné chyby greedy heuristiky na n pro $k \in \{1, 5, 10, 50, 100, 200, 300\}$

Výsledky měření

Naměřené průměrné chyby jsou k dispozici v tabulce 3. Chyby byly získány stejně jako v případě 3.4.1.

Data jsou vizualizována dvěma grafy. Na grafu 6 můžeme pozorovat klesající průměrnou chybu v závislosti na n při rostoucí relativní kapacitě batohu m. Výjimku tvoří chyba pro volbu $n = 0.5$ a $m = 0.5$, kde byla naměřena velmi malá chyba. Na grafu 5 lze pozorovat klesající průměrnou chybu s rostoucí hodnotou m pro konkrétní volby n. Výjimku zde opět tvoří hodnota pro volbu $n = 0.5$ a $m = 0.5$.

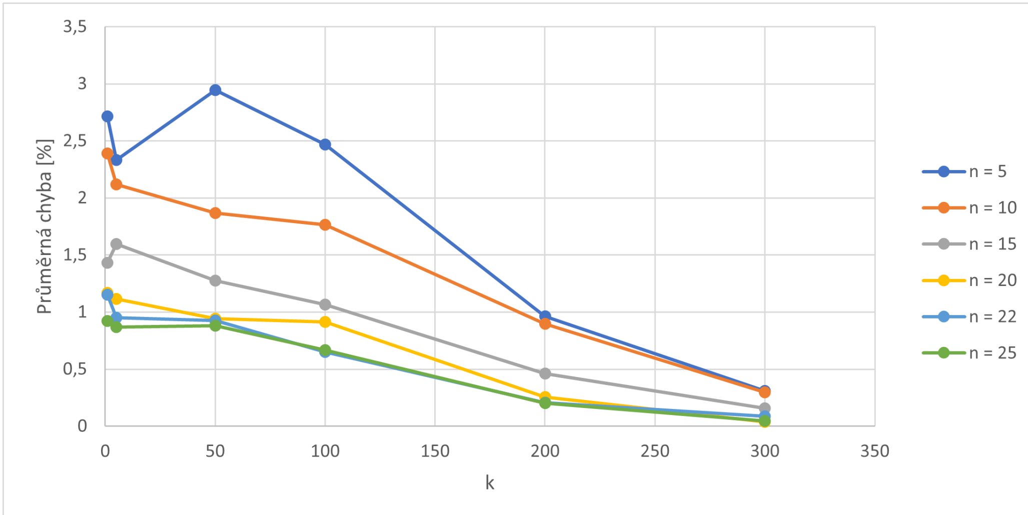
Naměřené výsledky tedy potvrzují hypotézu 3.4.2.

3.5 Dynamické programování

3.5.1 Citlivost výpočetního času na maximální cenu

Hypotéza

Mějme silnou korelaci váhy s cenou. Předpokládejme, že s rostoucí maximální cenou poroste výpočetní čas DP. Hypotéza je založena na skutečnosti, že vyšší maximální cena předmětů povede na vyšší sumární váhu C_M, což povede na



Obrázek 5: Závislosti průměrné chyby greedy heuristiky na k pro $n \in \{5, 10, 15, 20, 22, 25\}$

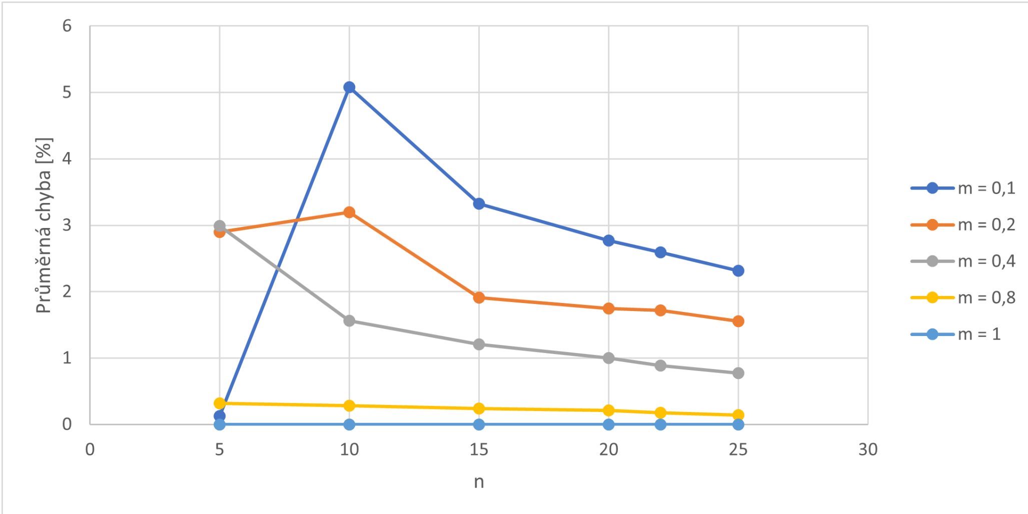
vyšší složitost, jelikož C_M vystupuje jako činitel v asymptotické složitosti DP při dekompozici dle ceny ($O(n^2 C_M)$).

Příprava dat pro experimentální vyhodnocení

Pro účely experimentálního vyhodnocení byla pro $n \in \{5, 10, 15, 20, 22, 25\}$ vygenerována skupina datových sad s prefixem **C**. Vlastnosti sad (dle konfigurace generátoru) jsou následující:

n	m=0,1	m=0,2	m=0,4	m=0,8	m=1
5	0,127	2,897	2,991	0,317	0,000
10	5,077	3,198	1,563	0,284	0,000
15	3,325	1,910	1,207	0,238	0,000
20	2,767	1,748	0,999	0,211	0,000
22	2,589	1,715	0,888	0,173	0,000
25	2,315	1,557	0,774	0,139	0,000

Tabulka 3: Průměrná chyba greedy heuristiky dle volby m [%]



Obrázek 6: Závislosti průměrné chyby greedy heuristiky na n pro $m \in \{0.1, 0.2, 0.4, 0.8, 1\}$

-N	-m	-W	-w	-C	-c	-k
500	0.8	300	bal	{100, 500, 1500, 4000}	strong	1

Výsledky měření

Naměřené časy jsou k dispozici v tabulce 4.

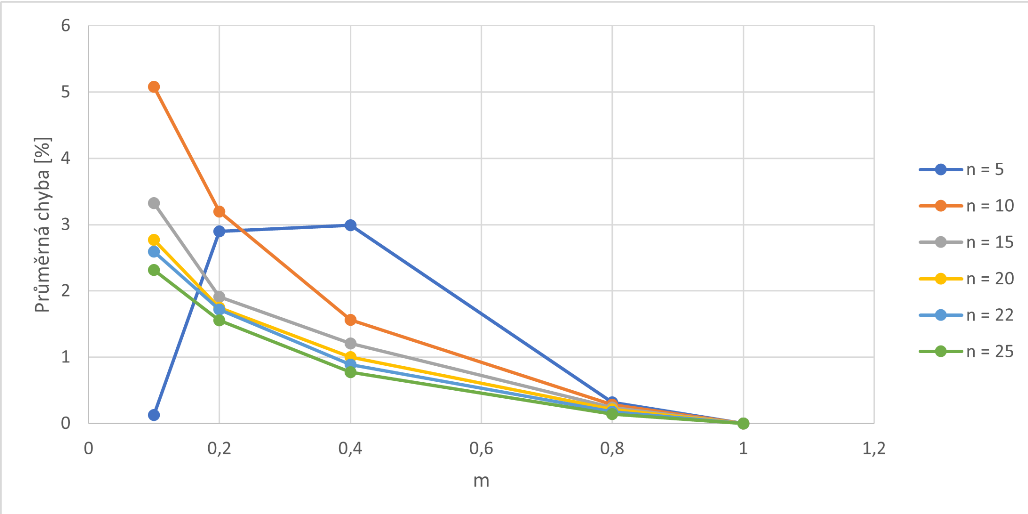
Data jsou vizualizována dvěma grafy. Na grafu 8 lze vidět srovnání CPU časů DP v závislosti na n pro konkrétní volby C. Můžeme pozorovat růst CPU času s rostoucí hodnotou C. Graf 9 pak zachycuje závislost CPU času na C pro konkrétní volby n. S rostoucí hodnotou C můžeme pozorovat nárůst CPU času potřebného pro vyřešení instance o velikosti n.

Naměřené výsledky tedy potvrzují hypotézu 3.5.1.

4 Závěr

Postupně jsme si uvedli čtyři hypotézy ohledně citlivosti metod řešení na konkrétních vlastnostech sad instancí problémů batohu.

Pro tyto hypotézy jsme připravili příslušné datové sady, nad nimiž jsme experimentálně prozkoumali citlivost příslušných metod prostřednictvím měření.



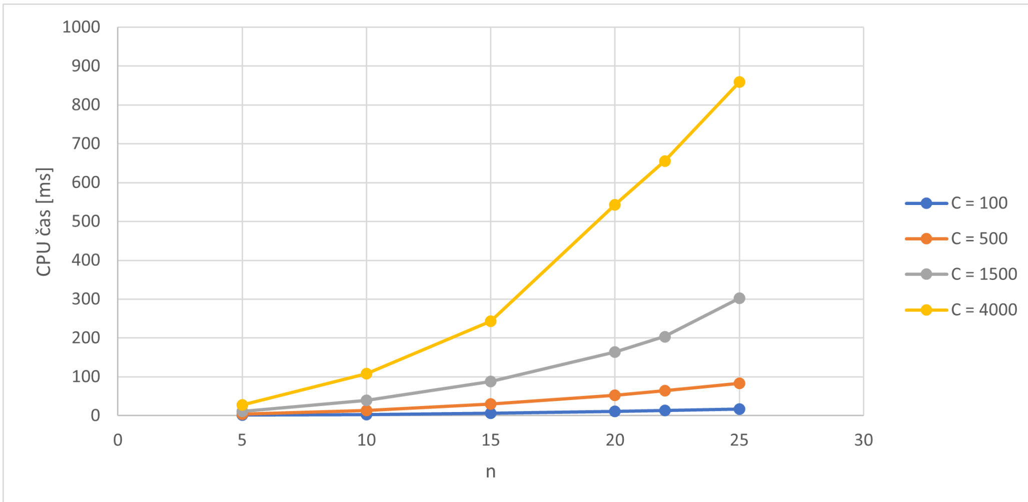
Obrázek 7: Závislosti průměrné chyby greedy heuristiky na m pro $n \in \{5, 10, 15, 20, 22, 25\}$

V případně zkoumání citlivosti času řešení byly zkoumány CPU časy získané zprůměrováním časů ze tří běhů měření. V případě zkoumání citlivosti chyby řešení pak odchylky získaného řešení od optimálnímu řešení, které byly normalizací dle optimálního řešení převedeny na procentuální hodnoty.

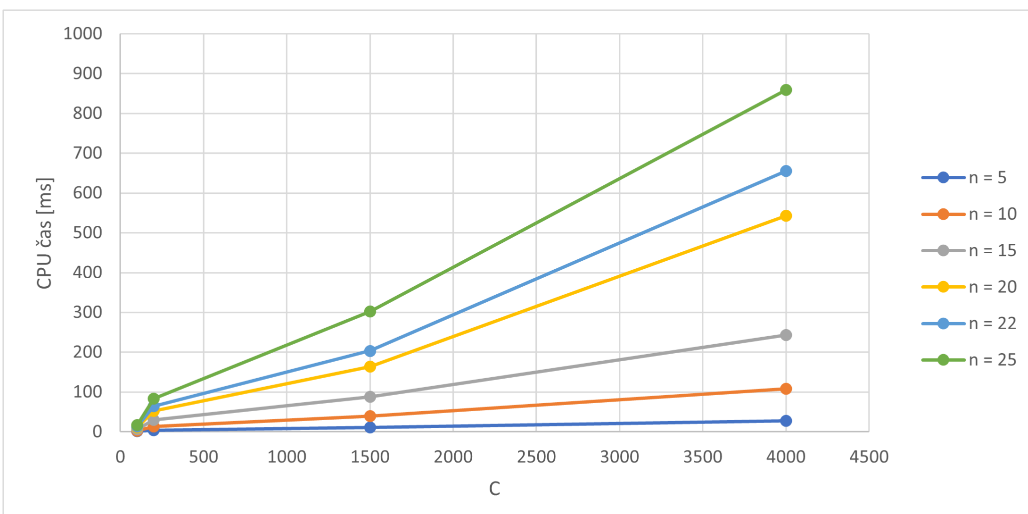
Všechny čtyři hypotézy přitom byly výsledky měření potvrzeny.

n	C=100	C=500	C=1500	C=4000
5	0,975	3,561	10,506	28,175
10	2,749	13,396	39,599	108,353
15	6,087	29,553	87,847	242,611
20	10,705	52,995	164,121	542,847
22	12,861	63,961	203,433	655,499
25	16,553	83,165	302,239	858,833

Tabulka 4: Průměrný CPU čas DP dle volby C [ms]



Obrázek 8: Závislosti CPU času DP na n pro $C \in \{100, 500, 1500, 4000\}$



Obrázek 9: Závislosti CPU času DP na C pro $n \in \{5, 10, 15, 20, 22, 25\}$