

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta stavební



Algoritmy v digitální kartografii

Konvexní obálky

Bc. Petra Pasovská
Bc. David Zahradník

Obsah

1	Zadání	2
1.1	Údaje o bonusových úlohách	2
2	Popis a rozbor problému	3
3	Popis použitých algoritmů	4
3.1	Jarvis Scan	4
3.1.1	Problematické situace	4
3.1.2	Implementace metody	4
3.2	Quick Hull	5
3.2.1	Implementace globální metody	5
3.3	Sweep line	6
3.3.1	Implementace metody	6
3.4	Graham Scan	7
3.4.1	Implementace metody	8
4	Vstupní data	8
5	Výstupní data	8
6	Aplikace	9
7	Dokumentace	16
7.1	Třídy	16
7.1.1	Algorithms	16
7.1.2	Draw	17
7.1.3	SortByXAsc	18
7.1.4	sortByYAsc	18
7.1.5	Widget	18
8	Závěr	19
9	Reference	20

1 Zadání

Níže uvedené zadání je kopie ze stránek předmětu.

Vstup: množina $P = \{p_1, \dots, p_n\}$, $p_i = [x, y_i]$.

Výstup: $\mathcal{H}(P)$.

Nad množinou P implementujete následující algoritmy pro konstrukci $\mathcal{H}(P)$:

- Jarvis Scan,
- Quick Hull,
- Sweep Line.

Vstupní množiny bodů včetně vygenerovaných konvexních obálek vhodně vizualizujte. Pro množiny $n \in \{1000, 1000000\}$ vytvořte grafy ilustrující doby běhu algoritmů pro zvolenou n . Měření proveďte pro různé typy vstupních množin (náhodná množina, rastr, body na kružnici) opakovaně (10x) a různou n (nejméně 10 množin) s uvedením rozptylu. Naměřené údaje uspořádejte do přehledných tabulek.

Zamyslete se nad problematikou možných singularit pro různé typy vstupních množin a možnými optimalizacemi. Zhodnoťte dosažené výsledky. Rozhodněte, která z těchto metod je s ohledem na časovou složitost a typ vstupní množiny P nejvhodnější.

Hodnocení:

Krok	Hodnocení
Konstrukce konvexních obálek metodami Jarvis Scan, Quick Hull, Sweep Line.	15b
Konstrukce konvexní obálky metodou Graham Scan	+5b
Konstrukce striktně konvexních obálek pro všechny uvedené algoritmy.	+5b
Ošetření singulárního případu u Jarvis Scan: existence kolineárních bodů v datasetu.	+2b
Konstrukce Minimum Area Enclosing box některou z metod (hlavní směry budov).	+5b
Algoritmus pro automatické generování konvexních/nekonvexních množin bodů různých tvarů (kruh, elipsa, čtverec, star-shaped, popř. další).	+4b
Max celkem:	36b

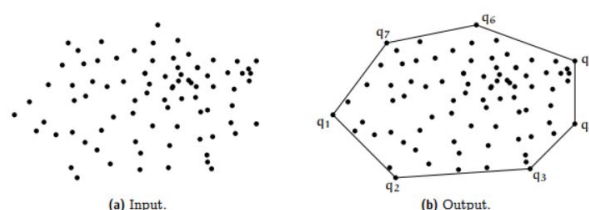
1.1 Údaje o bonusových úlohách

Z bonusových úloh byl vytvořen algoritmus pro automatické generování množin bodů různých tvarů. Uživatel si může v aplikaci sám zvolit, zda chce vygenerovat kruh, elipsu, čtverec, star-shaped či grid. Byla vložena i možnost náhodného rozmístění bodů v daném zobrazovacím okně. Dále byl vytvořen algoritmus pro výpočet konvexní obálky metodou Graham Scan.

2 Popis a rozbor problému

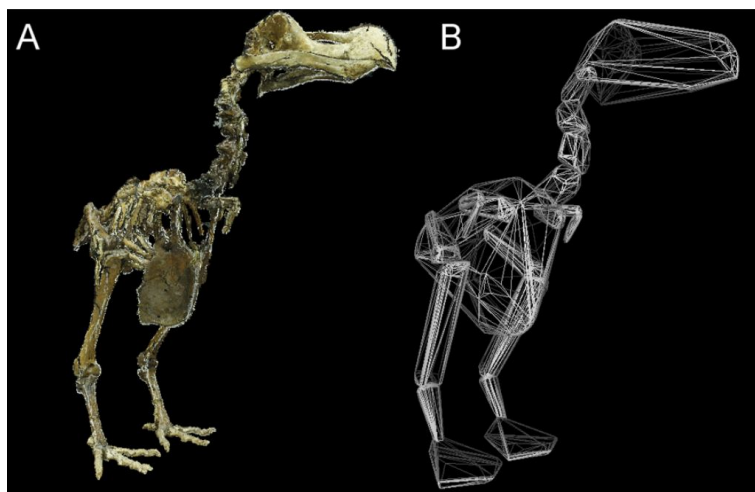
Hlavním cílem této úlohy je tvorba aplikace, která pro vygenerované množství bodů vytvoří konvexní obálku za pomoci různých algoritmů. Pro jednotlivé metody byla započítána i doba trvání algoritmu. Výsledné časy jsou v závěru následně porovnány.

Lze říci, že konvexní obálka množiny M je nejmenší konvexní množina, která množinu M obsahuje. V současné době mají konvexní obálky, v některých literaturách označovány jako konvexní obaly, mnoho využití. Často se využívají jako první odhad tvaru nějakého prostorového jevu, např. detekce kolizí, detekce natočení budov a jejich tvaru v kartografii, analýza shluků atd. [Zdroj: 1]



Obrázek 1: Ukázka vstupních bodů, kolem nichž je vytvořena konvexní obálka. [zdroj: 2]

Konvexní obálky využívá celá řada vědních oborů. Zajímavé bylo využití konvexních obálek v paleontologii, kde za pomoci konvexních obálek jsou vědci schopni určit přibližně tvar těla vyhynulých živočichů, jejichž kosti byly nalezeny.



Obrázek 2: Využití konvexních obálek v paleontologii [zdroj: 3]

3 Popis použitých algoritmů

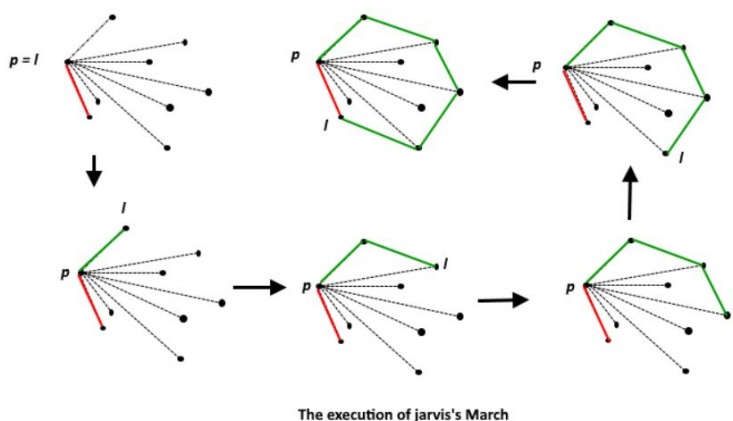
Existuje několik způsobů jak vytvořit konvexní obálku. V této úloze byly použity pro tvorbu 4 metody - Jarvis Scan, Quick Hull, Sweep Line a Graham Scan.

3.1 Jarvis Scan

Tato metoda bývá přirovnávána ke způsobu balení dárků (alternativní název Gift Wrapping Algorithm). Předpokladem pro algoritmus Jarvis Scan je, že 3 body nesmí ležet na jedné přímce. Metoda je poměrně snadná pro zápis, velkou nevýhodou je však časová náročnost $O(n^2)$, které lze dosáhnout, pokud body z množiny S leží na kružnici. Běžný čas výpočtu bývá $O(n \cdot h)$, kde n je počet vstupních bodů a h je počet bodů, které tvoří obálku. [zdroj: 1]

Metoda je pojmenována po R. A. Jarvisu, který ji publikoval v roce 1973.

Abychom byli schopni algoritmus sestavit, je potřeba nalézt pivot, označme jej q . Nalezení pivotu má časovou náročnost $O(n)$. Pivotu nalezneme jako bod s minimální hodnotou souřadnice Y . Následně porovnáváme úhel, který svírá pivot a bod následující a předcházející pivotu, dokud nenalezneme maximální úhel. Když takovýto úhel nalezneme, je přidán mezi body konvexní obálky. V algoritmu dojde k přeindexování bodů a jsou porovnávány následující body, dokud nově vložený bod není pivot.



Obrázek 3: Princip Jarvis Scan algoritmu [zdroj: 4]

3.1.1 Problematické situace

K chybě v algoritmu může dojít v případě, že tři body budou kolineární. Tedy v případě, že se budou tři body nacházet na jedné přímce. (Jak bychom toto vyřešili hmm??)

3.1.2 Implementace metody

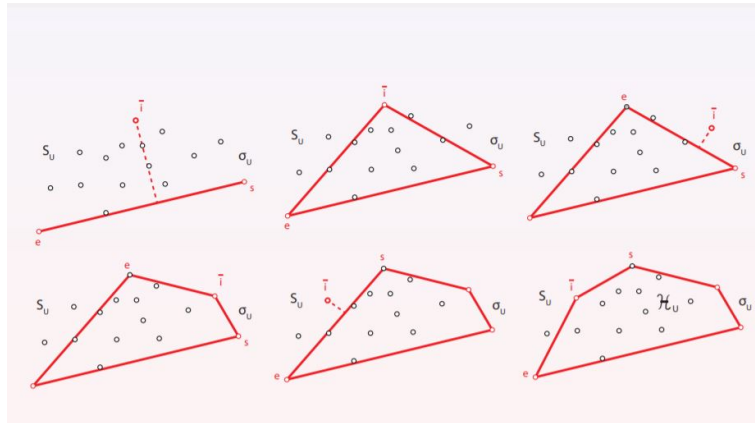
1. Nalezení pivotu q : $q = \min(y_i)$
2. Přidej bod q do konvexní obálky: $q \rightarrow H$

3. Inicializuj: $p_j = q; p_{j+1} = p_{j-1}$
4. Opakuj, dokud: $p_{j+1} \neq q$
 - Nalezni p_{j+1} : $p_{j+1} = \operatorname{argmax}_{p_i \in P} \angle(p_{j-1}, p_j, p_i)$
 - Přidej p_{j+1} : $p_{j+1} \rightarrow H$
 - Přeindexování bodů: $p_{j-1} = p_j; p_j = p_{j+1}$

3.2 Quick Hull

Metoda Quick Hull slouží k vytvoření konvexní obálky nad konečným počtem bodů. Využívá techniku "Rozdě a panuj", označovanou anglicky "Divide and Conquer". V této metodě lze najít analogii s QuickSortem, odkud také pochází označení algoritmu. Jedná se o poměrně rychlý algoritmus, časová náročnost je $O(n \cdot \log(n))$, v nejhorším případě je však časová náročnost kvadratická $O(n^2)$.

Pro výpočet metodou Quick Hull je nejprve zapotřebí nalézt extrémní body, v aplikaci byly souřadnice seřazeny podle x-ové souřadnice. Bod s nejnižší a nejvyšší hodnotou x-ové souřadnice je vložen do množiny, do které uchováváme body konvexní obálky. Těmito body je vedena pomyslná přímka, která množinu bodů rozdělí na dvě množiny - horní a dolní. V každé polorovině nalezneme nejvzdálenější bod od přímky, tento bod přidáme do množiny bodů patřících do konvexní obálky a vytvoříme přímky tohoto bodu a krajních bodů předešlé přímky. Následně pokračujeme analogicky a nad každou nově vzniklou přímkou nalezneme nejvzdařenější bod.



Obrázek 4: Princip Quick Hull algoritmu [zdroj: 5]

3.2.1 Implementace globální metody

1. Vytvoření množiny konvexní obálky, horní a dolní množiny: $H = 0; S_U = 0; S_L = 0$
2. Nalezení extrémních hodnot: $q_1 = \min_{p_i \in S} (x_i); q_3 = \max_{p_i \in S} (x_i)$
3. Přidání extrémních bodů do horní a dolní množiny: $S_U \leftarrow q_1; S_U \leftarrow q_3; S_L \leftarrow q_1; S_L \leftarrow q_3$

4. Pro všechny body množiny: $\forall p_i \in S$

Rozhodnutí, zda bod patří do horní množiny: $if(p_i \in \sigma_l(q_1, q_3)) S_U \leftarrow p_i$

V opačném případě: $S_L \leftarrow p_i$

5. Přidání krajního bodu do konvexní obálky: $H \leftarrow q_3$

6. Nalezení nejvzdálenějšího bodu c v horní části od přímky, přidání do množiny konvexní obálky a opakování vůči nově vzniklé přímce.

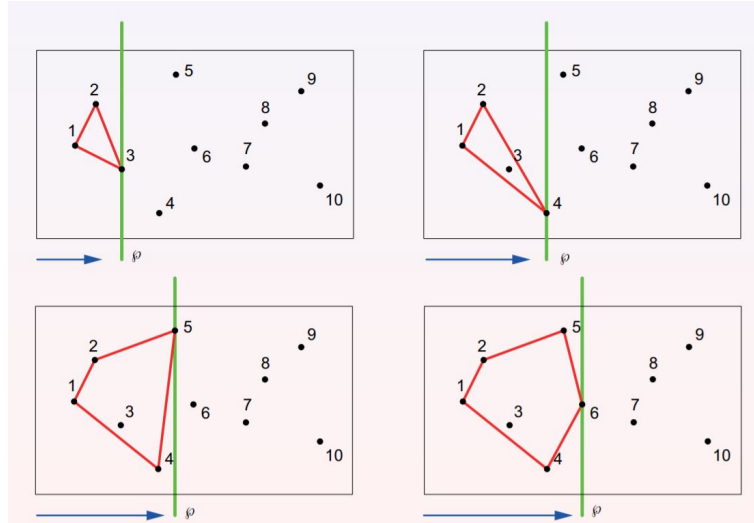
7. Přidání krajního bodu do konvexní obálky: $H \leftarrow q_1$

8. Opakování hledání nejvzdálenějšího bodu v dolní části.

Tady nevím, jestli nerozepsat i implementaci lokální metody??? Možná by to pak bylo pochopitelnější

3.3 Sweep line

Metoda Sweep line, v češtině označovaná také jako metoda zametací přímky, využívá strategii inkrementální konstrukce. Množinu bodů si v dané dimenzi rozdělíme na zpracovanou a nezpracovanou část. Rozdělovací kritérium je ve většině případů jedna ze souřadnicových os. Je zde tedy nutné body podle této osy seřadit a následně vyhodnocovat každý následující nezpracovaný bod. Body se vyhodnocují v závislosti na jejich poloze vůči tečně. Časová složitost této metody je $O(n \log(n))$.



Obrázek 5: Princip algoritmu zametací přímky [zdroj: 5]

3.3.1 Implementace metody

1. Seřazení bodů množiny podle osy x: $SortP_s = sort(P)byx$

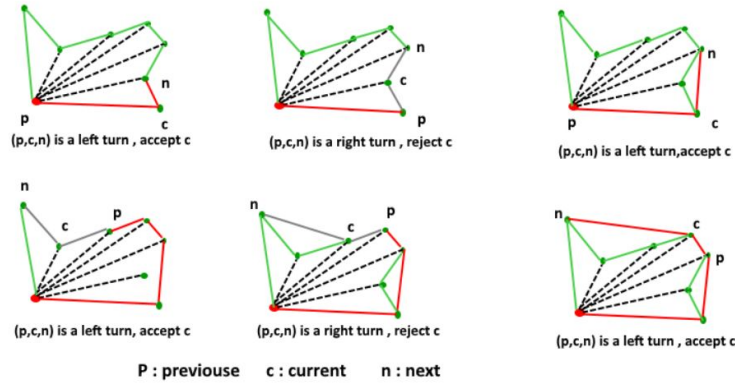
2. Vyhodnocení v případě, že bod p_3 leží v levé polorovině od přímky p_1, p_2 : $if(p_3 \in \sigma_L(p_1, p_2))$
 Změna indexů následovníků: $n[1] = 2; n[2] = 3; n[3] = 1$
 Změna indexů předchůdců: $p[1] = 3; p[2] = 1; p[3] = 2$
3. Vyhodnocení v případě, že bod p_3 leží v levé polorovině od přímky p_1, p_2 : $if(p_3 \in \sigma_P(p_1, p_2))$
 Změna indexů následovníků: $n[1] = 3; n[3] = 2; n[2] = 1$
 Změna indexů předchůdců: $p[1] = 2; p[3] = 1; p[2] = 3$
4. Vyhodnocování následujících bodů: $for p_i \in P_S, i > 3$
 Porovnání hodnoty souřadnice y: $if(y_i > y_{i-1})$
 Změna indexů při splnění podmínky: $p[i] = i - 1; n[i] = n[i - 1]$
 V opačném případě: $p[i] = p[i - 1]; n[i] = i - 1$
 Přeindexování následníka předchůdce a předchůdce následníka:
 $n[p[i]] = i; p[n[i]] = i$
 Zhodnocení polohy následníka následníka vůči přímce bodu a následníka:
 $while(n[n[i]]) \in \sigma_R(i, n[i])$
 Změna indexů: $p[n[n[i]]] = i; n[i] = n[n[i]]$
 Zhodnocení polohy předchůdce předchůdce vůči přímce bodu a předchůdce:
 $while(p[p[i]]) \in \sigma_L(i, p[i])$
 Změna indexů: $n[p[p[i]]] = i; p[i] = p[p[i]]$

ta implementace vypadá trochu chaoticky, když zbyde čas tak nějak upravíme :-)

3.4 Graham Scan

Algoritmus Graham Scan slouží k vytvoření konvexní obálky nad konečným množstvím bodů. Metoda je pojmenována po Ronaldu Grahamovi, který ji publikoval v roce 1972. Časová náročnost metody je $O(n \log(n))$. Hlavní myšlenka algoritmu je taková, že každá uspořádaná trojice bodů musí splňovat kritérium levotočivosti (uvažujeme uspořádání hran v CCW orientaci - proti směru hodinových ručiček).

Pro výpočet je nejprve nutné body seřadit dle námi zvoleného kritéria, v tomto případě podle souřadnice Y. Bod s nejnižší souřadnicí Y označíme jako pivot. Následně je vypočtena směrnice s osou X vůči pivotu všech ostatních bodů. Body jsou následně podle tohoto úhlu seříděny. Po seřídění je možné přejít k vyhodnocování polohy bodů, kde jsou vždy testovány 2 poslední přidané body v polygonu konvexních obálek a následující seříděný bod.



Obrázek 6: Princip vyhodnocení polohy bodu v metodě Graham Scan [zdroj: 6]

3.4.1 Implementace metody

1. Nalezení pivota q : $q = \min_{\forall p_i \in S} (y_i), q \in H$
2. Setřídění bodů dle úhlu s osou x : $\forall p_i \in S$ sort by $\omega_i = \angle(p_i, q, x)$
3. Při nalezení stejného úhlu: $\omega_k = \omega_l \rightarrow$ delete the closer point
4. Vložení pivota a prvního bodu do množiny: $H \leftarrow q; H \leftarrow p_1$
5. Opakuj pro všechna: $for j < n$
6. Vyhodnocení polohy bodu: if p_j vpravo od předešlých bodů $\rightarrow pop S$
7. V opačném případě přidej bod do konvexní obálky: $p_j \rightarrow H$

4 Vstupní data

Vstupními daty je množina bodů, která je vygenerovaná uživatelem. Uživatel může v tomto případě generovat body sám za pomoci kurzoru. Případně je v aplikaci implementována funkce pro automatické generování bodů. Uživatel má navíc možnost vlastní volby, jakým způsobem budou body generovány, zda budou body v kruhu, ve čtverci, elipse či v gridu.

Při automatickém generování bodů je nutné nastavit i počet bodů, ze kterých bude daný útvar tvořen. Ne všechny tvary však lze vytvořit z vloženého množství bodů. V případě, že vstup nebude zcela odpovídat zvolenému útvaru, zobrazí se uživateli vyskakovací okno, které upozorní na nevhodný vstup a případnou modifikaci vloženého počtu. Tento případ nastane například při vložení tří bodů, ze kterých by uživatel chtěl vytvořit čtverec.

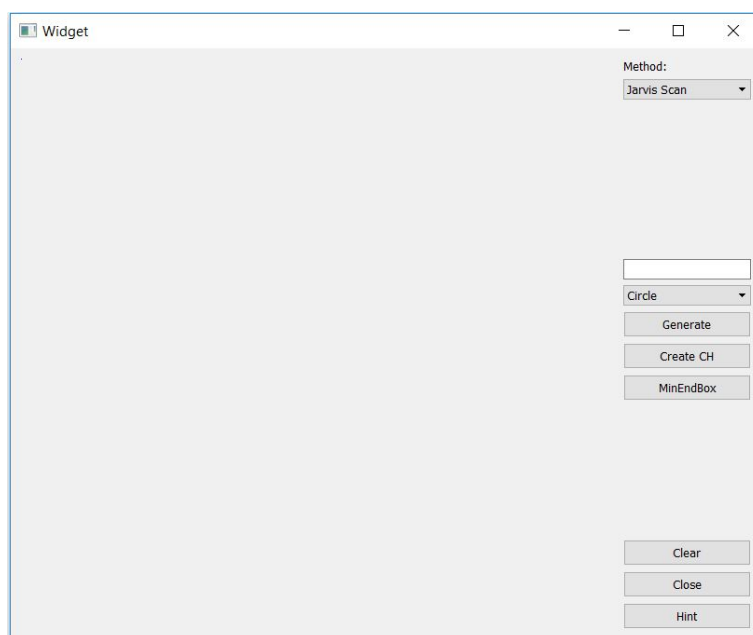
5 Výstupní data

Výstupem této úlohy je grafická aplikace, ve které jsou vstupní data analyzovány a následně je v závislosti na jejich vzájemně poloze vytvořena konvexní obálka. Konvexní

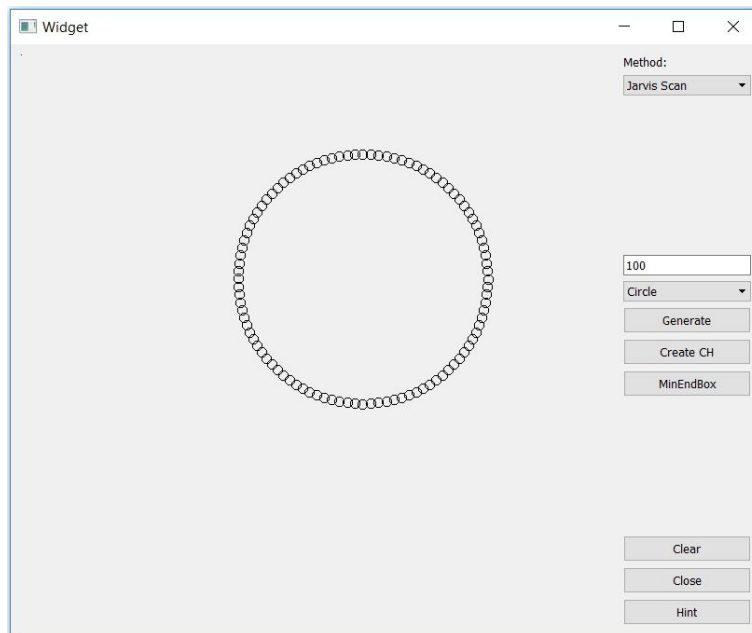
obálku je možné vytvořit čtyřmi způsoby za pomoci nejznámějších algoritmů - Jarvis Scan, Quick Hull, Sweep Line a Graham Scan.

Zároveň jsou výstupem data s porovnáním jednotlivých dob výpočtů na různém množství dat. Tyto hodnoty jsou vzájemně porovnány za pomoci tabulek a grafů.

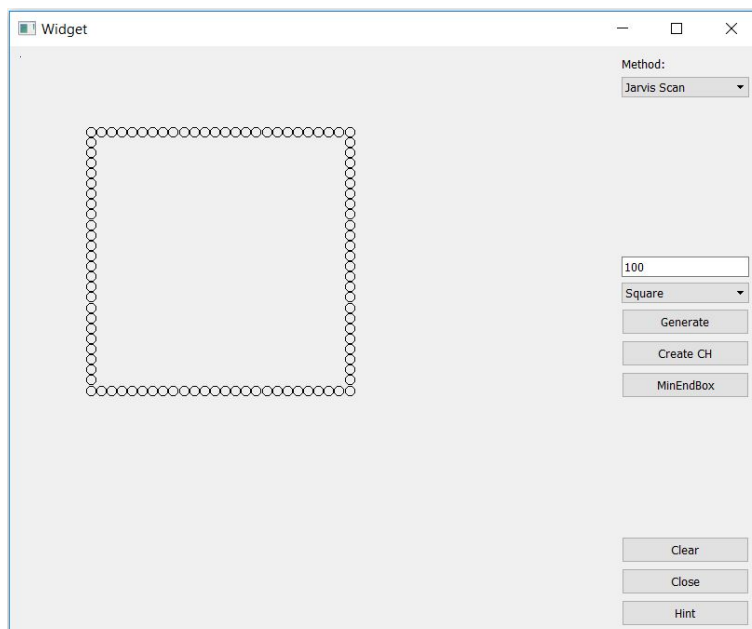
6 Aplikace



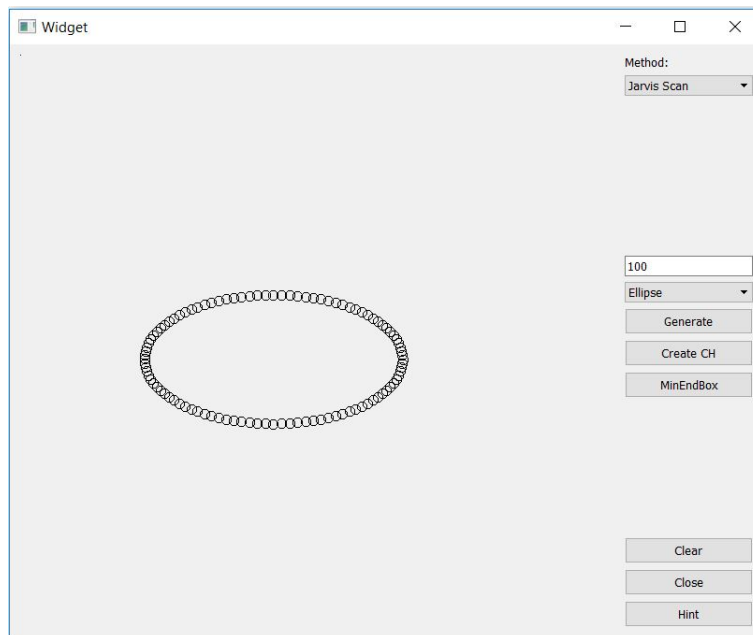
Obrázek 7: Zobrazené okno po spuštění aplikace



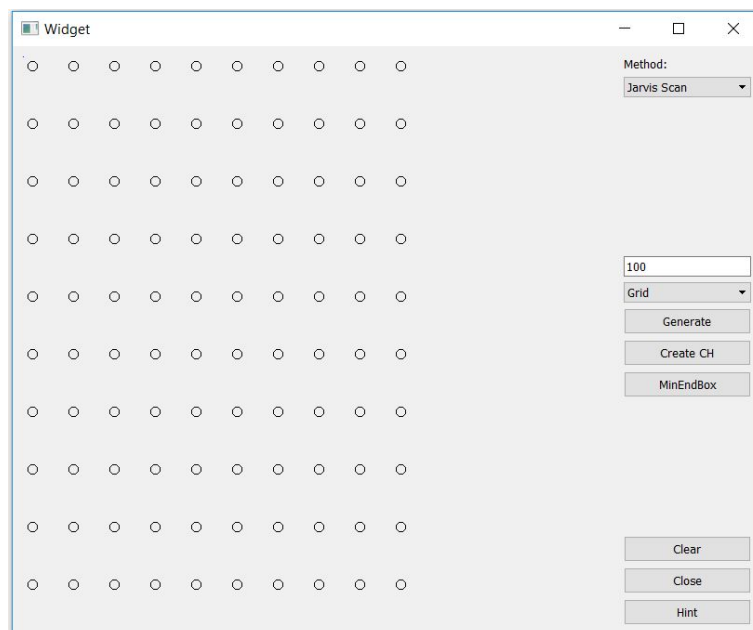
Obrázek 8: Vygenerované body v kruhu



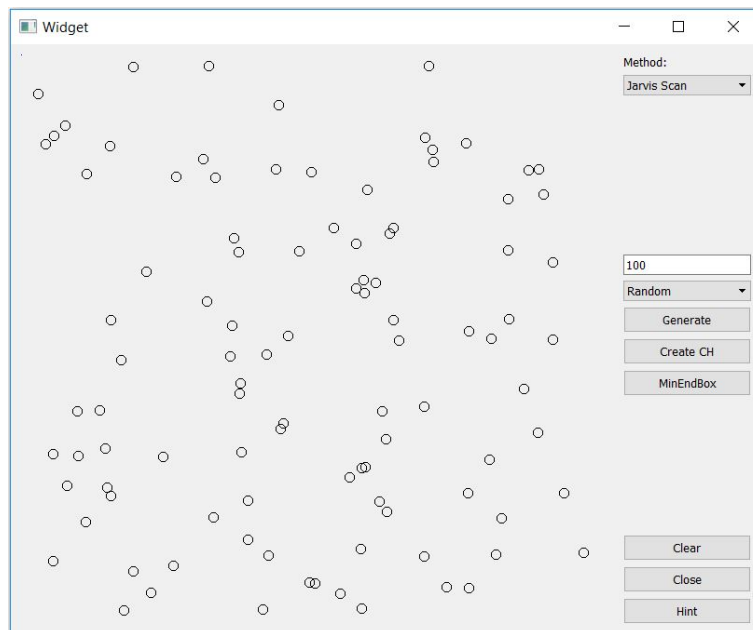
Obrázek 9: Vygenerované body ve čtverci



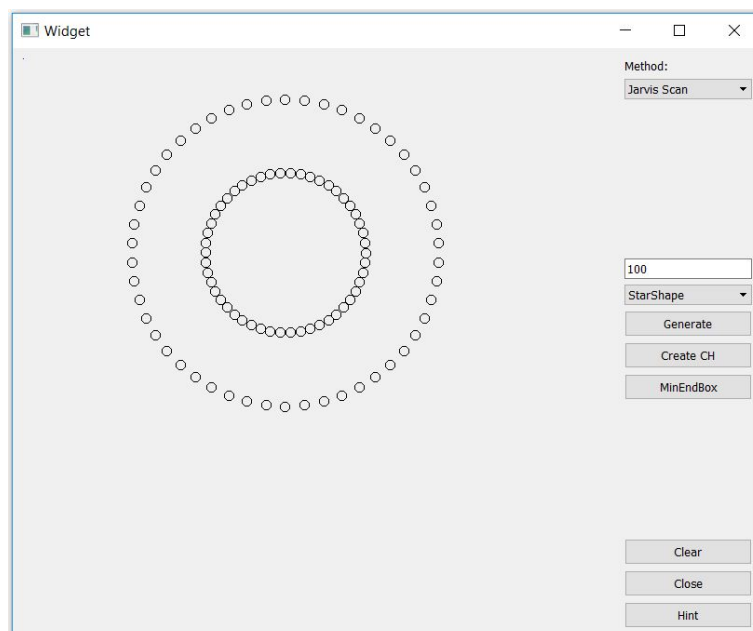
Obrázek 10: Vygenerované body v elipse



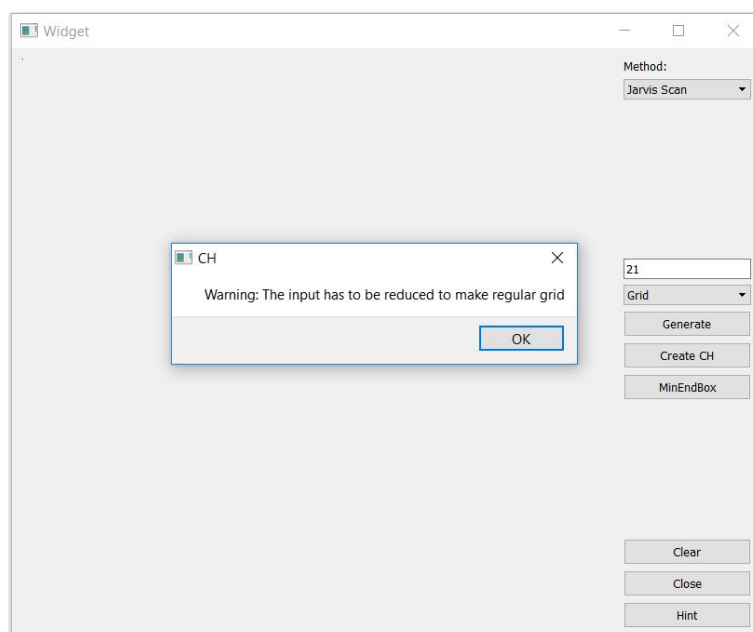
Obrázek 11: Vygenerované body v pravidelné mřížce



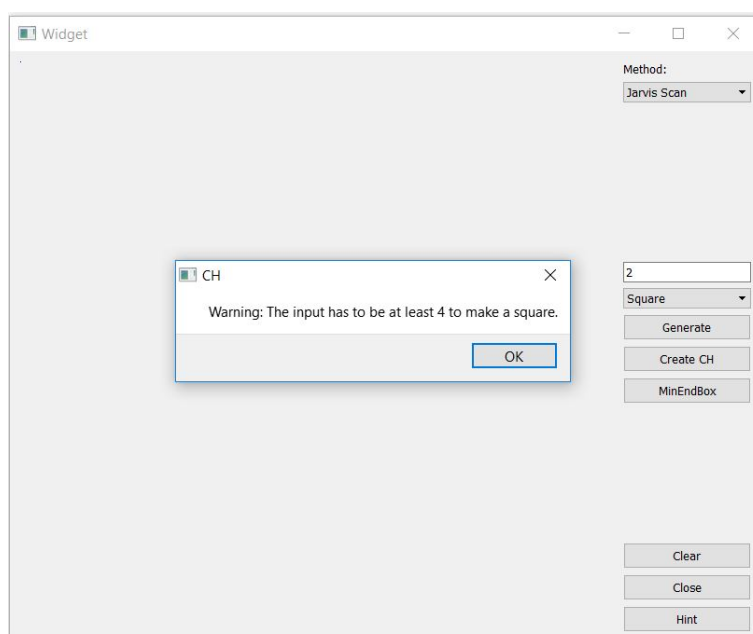
Obrázek 12: Náhodně vygenerované body



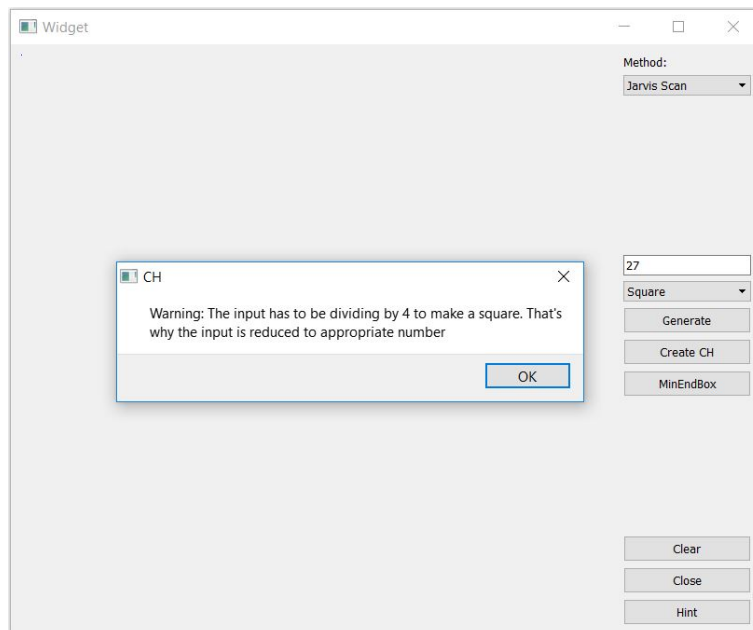
Obrázek 13: Vygenerované body ve tvaru Star Shaped



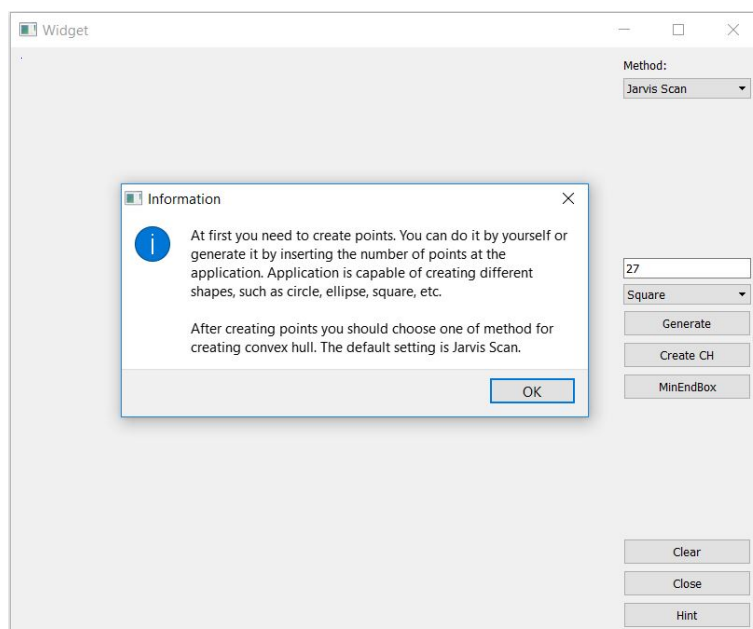
Obrázek 14: Varování na redukci vloženého počtu bodů při tvorbě gridu



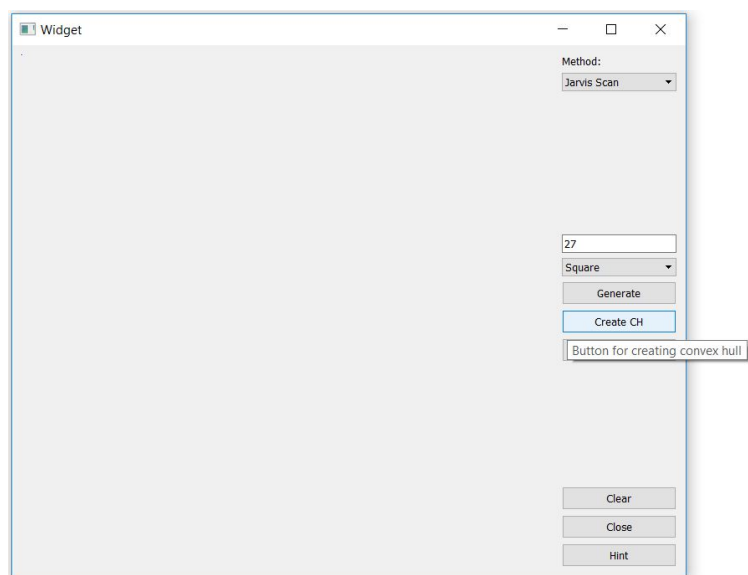
Obrázek 15: Varování při neplatném vstupu při tvorbě čtverce



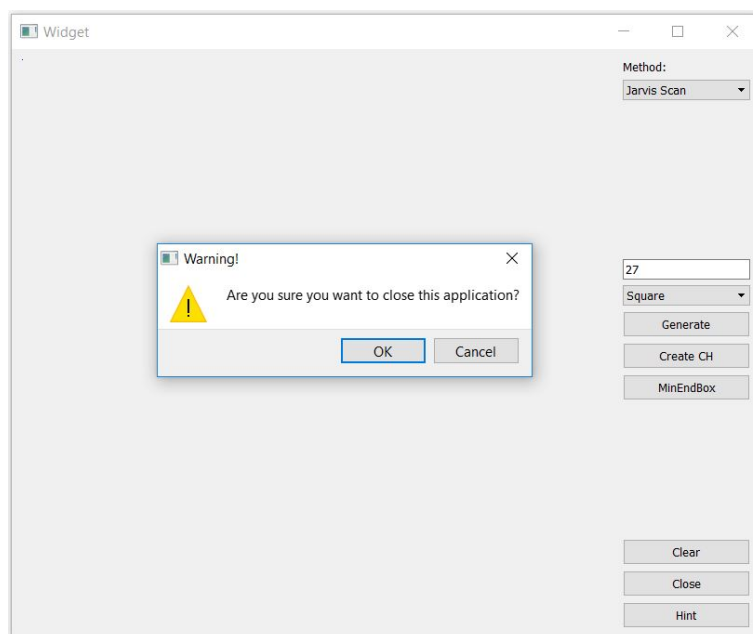
Obrázek 16: Varování na redukci vloženého počtu bodů při tvorbě čtverce



Obrázek 17: Náповěda, pokud si uživatel nebude jistý, jak v aplikaci postupovat



Obrázek 18: Po přiložení kurzoru se zobrazí informace o objektu



Obrázek 19: Vyskakovací okno při ukončování aplikace

7 Dokumentace

7.1 Třídy

7.1.1 Algorithms

Třída Algorithms obsahuje celkem xx metod. Metody jsou určeny pro výpočty použitých algoritmů.

double length2Points(QPoint q, QPoint p) Metoda jejíž návratová hodnota je typu double vrací velikost spojnice mezi dvěma body.

void polygonTransform(QPoint p, QPoint k, QPoint p1, QPoint k1, QPolygon &pol) Metoda je přetížená pro podobnostní transformaci QPolygon a QLine. Transformační klíč je dán dvěma body se souřadnicemi v obou souřadných soustavách. Body p a k jsou v souřadné soustavě, ze které pochází pol. Body p1 a k1 jsou v souřadné soustavě, do které chceme transformovat. Výsledek transformace přeuloží do proměnné pol.

rotateByAngle(QPolygon &points, double angle) Metoda je přetížená pro rotaci QPolygon a QLine. Prvky proměnné pol se pouze rotují podle úhlu angle. Proměnná úhel je v radiánech. Výsledek transformace přeuloží do proměnné pol.

TPosition getPointLinePosition(QPoint &q, QPoint &a, QPoint &b)

double get2LinesAngle(QPoint &p1, QPoint &p2, QPoint &p3, QPoint &p4)

QPolygon CHJarvis (vector<QPoint >&points) Metoda pro výpočet konvexní obálky nad vektorem bodů metodou Jarvis Scan. Metoda vrátí konvexní obálku s typem QPolygon.

QPolygon QHull (vector<QPoint >&points) Metoda pro výpočet konvexní obálky nad vektorem bodů metodou Quick Hull. Metoda vrátí konvexní obálku s typem QPolygon.

void qh (int s, int e, vector<QPoint >&p, QPolygon &h) Pomocná metoda pro rekursi v metodě Qhull. Na vstupu jsou indexi bodů s a e, které určují přímkou, podle níž se určí zda bod p patří do konvexní obálky h a nebo ne. Metoda nic nevrací, pouze ukládá body, které patří do konvexní obálky.

void minimumAreaEnclosingBox (QPolygon &ch, QPolygon &rectangle, QLine &direction) Metoda pro výpočet hlavních směrů budovy. Na vstupu je konvexní obálka ch a prázdné proměnné rectangle a direction. Do rectangle se uloží minimální ohraničující obdélník a do direction hlavní směr budovy.

7.1.2 Draw

Třída Draw obsahuje celkem xx metod. Metody jsou určeny pro generování a vykreslování proměnných.

void paintEvent(QPaintEvent *e) Metoda slouží k vykreslení vytvořených, generovaných bodů a zobrazení výsledků použitých algoritmů.

void mousePressEvent(QMouseEvent *e) Po stisknutí levého tlačítka myši na zobrazovací okno, metoda uloží bod se souřadnicemi místa kliknutí.

void clearCanvas() Metoda slouží k vymazání proměnných a k překreslení

std::vector<QPoint >generateGrid(int n) Metoda generuje pravidelnou mřížku. Na vstupu je počet generovaných bodů. Návrátová hodnota je vektor bodů.

std::vector<QPoint >generateRandomPoints(int n) Metoda generuje náhodné body. Na vstupu je počet generovaných bodů. Návrátová hodnota je vektor bodů.

std::vector<QPoint >generateStarShape(int n) Metoda generuje body do tvaru hvězdy. Na vstupu je počet generovaných bodů. Návrátová hodnota je vektor bodů.

std::vector<QPoint >generateSquare(int n) Metoda generuje body do tvaru čtverce. Na vstupu je počet generovaných bodů, změna v počtu bodů se projeví s násobkem čtyř. Návrátová hodnota je vektor bodů.

std::vector<QPoint >generateEclipse(int n) Metoda generuje body do tvaru elipsy. Na vstupu je počet generovaných bodů. Návrátová hodnota je vektor bodů.

std::vector<QPoint >generateCircle(int n) Metoda generuje body do tvaru kruhu. Na vstupu je počet generovaných bodů. Návrátová hodnota je vektor bodů.

void setCH(QPolygon ch_) Metoda slouží pro převod konvexní obálky do vykreslovacího okna.

setRectangle(QPolygon rectangle_) Metoda slouží pro převod minimální ohraničujícího obdélníku do vykreslovacího okna.

setDirection(QLine direction_) Metoda slouží pro převod hlavního směru budovy do vykreslovacího okna.

setPoints(std::vector<QPoint >points_) Metoda slouží pro převod vektoru bodů do vykreslovacího okna.

std::vector<QPoint >getPoints() Metoda slouží pro převod vektoru bodů z vykreslovacího okna.

QPolygon getConvexHull() Metoda slouží pro převod konvexní obálky z vykreslovacího okna.

7.1.3 SortByXAsc

Třída SortByXAsc slouží k porovnání souřadnic v ose x.

bool operator()(QPoint &p1, QPoint &p2) Přetížený operátor () vrátí bod s větší souřadnicí x z dvojice bodů.

7.1.4 sortByYAsc

Třída SortByYAsc slouží k porovnání souřadnic v ose y.

bool operator()(QPoint &p1, QPoint &p2) Přetížený operátor () vrátí bod s větší souřadnicí y z dvojice bodů.

7.1.5 Widget

void on_pushButton_clicked() Při stisknutí tlačítka Create CH se volají metody třídy Algorithms dle metody vybrané v comboboxu.

void on_generate_clicked() Při stisknutí tlačítka Generate se volají metody třídy Draw dle metody vybrané v comboboxu.

void on_pushButton_2_clicked() Při stisknutí tlačítka Clear se zavolá metoda třídy Draw clearCanvas.

void on_minimumAreaEnclosingBox_clicked() Při stisknutí tlačítka MinEndBox se nad konvexní obálkou zavolá metoda třídy Algorithms minimumAreaEnclosingBox.

8 Závěr

9 Reference

1. MARTÍNEK, Petr. Konvexní obálka rozsáhlé množiny bodů v E² [online][cit. 31.10.2018]. Dostupné z: http://graphics.zcu.cz/files/86_BP_2010_Martinek_Petr.pdf
2. Convex Hulls: Explained. [online][cit. 31.10.2018] Dostupné z: <https://medium.com/@harshitsikchi/convex-hulls-explained-baab662c4e94>
3. Convex-hull mass estimates of the dodo (*Raphus cucullatus*). [online][cit. 31.10.2018] Dostupné z: [https://www.semanticscholar.org/paper/Convex-hull-mass-estimates-of-the-dodo-\(Raphus-of-a-Brassey-OMahoney/12e07d3b712561cad16501ac8096120e14901eb8](https://www.semanticscholar.org/paper/Convex-hull-mass-estimates-of-the-dodo-(Raphus-of-a-Brassey-OMahoney/12e07d3b712561cad16501ac8096120e14901eb8)
4. GeeksforGeeks: Convex Hull - Set 1 (Jarvis's Algorithm or Wrapping. [online][cit. 5.11.2018] Dostupné z: <https://www.geeksforgeeks.org/convex-hull-set-1-jarviss-algorithm-or-wrapping/>
5. BAYER, Tomáš. Geometrické vyhledávání [online][cit. 5.11.2018]. Dostupné z: <https://web.natur.cuni.cz/~bayertom/images/courses/Adk/adk4.pdf>
6. GeeksforGeeks: Convex Hull - Set 2 (Graham Scan). [online][cit. 12.11.2018] Dostupné z: <https://www.geeksforgeeks.org/convex-hull-set-2-graham-scan/>