

**Problema 1**

Dados vetores  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$  e constantes  $a, b \in \mathbb{R}$ , mostre que:

(b)  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$

**Coordenadas cartesianas:** expandido, temos:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$$

em que foi usada uma propriedade da álgebra matricial que a permutação de uma linha (vale também para colunas), uma vez (permutação ímpar) resulta na troca de sinal do determinante. A identidade também poderia ter sido mostrada expandindo o determinante, trocando as coordenadas  $u_i$  de lugar com  $v_i$  e reconstruindo o determinante.

**Notação indicial:**  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \varepsilon_{ijk} u^i u^j v^k$  e notamos que, como cada termo que acompanha  $\varepsilon_{ijk}$  é oposto ao que acompanha  $\varepsilon_{jik}$  (exemplo:  $\varepsilon_{123} u^1 u^2 v^3 = -\varepsilon_{213} u^2 u^1 v^3$ ) então ao serem permutados uma (ou um número ímpar) de vezes, o resultado é a troca de sinal.<sup>a</sup>

**Geometria:** A definição de  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  é de um vetor ortogonal a  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  cuja norma é  $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \alpha$  em que  $\alpha$  é ângulo entre eles e cuja direção é dada pela *regra da mão direita*. A troca da posição dos vetores, em razão da necessidade de conservar a orientação dada pela mencionada regra, resulta na troca de sinal (teste usando a mão direita, o dedo indicador representando  $u$ , o dedo médio representado  $v$  e o polegar erguido representando  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ).

(c)-(g) Resolvidos na lista do Roldão, disponível no repositório (ver cabeçalho).

<sup>a</sup>Note que a maioria dos termos (quaisquer com índices repetidos) já é nula em razão da própria definição do símbolo de Levi-Civita,  $\varepsilon$ .

## Problema 2

Sendo  $E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ ,  $E' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$  bases, com

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 &= \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - 3\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}'_2 &= \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 &= \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 \end{cases}$$

e o vetor  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = (1, 1, 1)_B$

(a) Dê a matriz de mudança  $M$  da base  $E$  para a base  $E' : E \xrightarrow{M} E'$

Escrevendo as bases como um "vetor-linha" de vetores, tem-se pelo sistema dado a identidade (confira mentalmente ou manualmente fazendo o produto matricial)<sup>a</sup>:

$$[\mathbf{e}'_1 \quad \mathbf{e}'_2 \quad \mathbf{e}'_3] = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3] \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_M$$

(note que a depender do autor/definição, a *inversa* dessa matriz será chamada de  $M$ . Para a etapa seguinte do problema, essa diferença é irrelevante desde que seja mantida uma única convenção ao longo de todo o exercício).

(b) Ache as coordenadas de  $\mathbf{u}$  na base  $E'$ .

A definição geométrica de vetor em CVT é a de um objeto *invariante* dado pela seguinte definição simbólica:

$$\mathbf{v} = \underbrace{v^i \mathbf{e}_i}_{\text{notação de Einstein}} = \sum_i v^i \mathbf{e}_i.$$

Sendo invariante, precisa se tratar do mesmo objeto em qualquer sistema de coordenadas, devendo valer então<sup>b</sup>:

$$\mathbf{v} = v'^i \mathbf{e}'_i = v^i \mathbf{e}_i \Rightarrow [\mathbf{e}'_1 \quad \mathbf{e}'_2 \quad \mathbf{e}'_3] \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{bmatrix} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \Rightarrow [E']v'_{E'} = [E]v_E$$

Mas  $[E'] = [E]M$  (item (a)), portanto:

$$\begin{aligned} [E']\{v'\}_{E'} &= [E]M\{v'\}_{E'} = [E]\{v\}_E \xrightarrow{[E]^{-1} \text{ à esquerda}} M\{v'\}_{E'} = \{v\}_E \rightarrow \\ &\xrightarrow{M^{-1} \text{ à esquerda}} \{v'\}_{E'} = M^{-1}\{v\}_E \end{aligned}$$

ou seja, a matriz *inversa* à definida no item (a) será usada. Essa é também a razão da localização dos índices alternados em vetores da base e as componentes do vetor naquela base<sup>c</sup> e das noções de *covariância* ("que varia conjuntamente" – com a matriz de mudança de base) e *contravariância* ("que varia contrariamente").

Da discussão anterior, poderíamos argumentar que uma definição do tipo:

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}^i$$

seja igualmente válida para o *mesmo vetor*. Em geral, entretanto, os vetores  $\mathbf{e}_i$  e  $\mathbf{e}^i$  não serão iguais, assim como as componentes  $v^i$  e  $v_i$  em dada base. Esses vetores são chamados *duais* entre si.

Convencionando a base como feito nesse exercício, também se fixa que os índices "embaixo"/linha são ditos covariantes e os coeficientes "no alto"/coluna são contravariantes (em relação a essa definição de  $M$ ).

Por fim, temos que:

$$\{u\}_{E'} = M^{-1}\{u\}_E = \left(\frac{3}{11}, \frac{8}{11}, \frac{12}{11}\right)_{E'} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

(não confundir a notação  $(x, y, z)_E$  com  $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}_E$ , em vista da discussão de covariância acima – a primeira descrição é de uma *tupla ordenada*).

---

<sup>a</sup>Apenas uma convenção. Na discussão subsequente, valeriam os mesmos argumentos porém com "orientação" da matriz trocada.

<sup>b</sup>Note que o produto matricial só será válido nas definições dadas se os produtos forem tomados na ordem mostrada a seguir. Note também que na notação indicial/soma de Einstein, para a atual disciplina, será em geral desconsiderada a ordem dos fatores.

<sup>c</sup>o que chamados de "vetor" em notação indicial muitas vezes é o conjunto das *componentes* do objeto geométrico vetor, numa dada base

### Problema 3

O torque  $\tau$  de uma força  $\mathbf{F}$  com respeito a um ponto  $O$  é dado pela expressão  $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  em que  $\mathbf{r}$  é o vetor de posição do início do vetor  $\mathbf{F}$  em relação a  $O$ . A projeção de  $\tau$  em um eixo  $\mathbf{u}$  passando por  $O$ , isto é, a quantidade  $\tau_u = \tau \cdot \mathbf{u}$  em que  $\mathbf{u}$  é um vetor unitário na direção do eixo  $\mathbf{u}$ , é chamada de torque de  $\mathbf{F}$  com relação ao eixo  $\mathbf{u}$ . Prove que  $\tau_u$  é independente da posição de  $O$  em  $\mathbf{u}$ .

**Solução:** Se  $P$  for outro ponto na reta definida por  $O$  e  $\mathbf{u}$ , então podemos dizer que o vetor  $\overrightarrow{OP}$  é paralelo a  $\mathbf{u}$  e dado por  $\overrightarrow{OP} = \lambda \mathbf{u}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  e o vetor posição  $\mathbf{r}'$  da posição a partir de  $P$  dado por

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \overrightarrow{OP} = \mathbf{r} + \lambda \mathbf{u}.$$

Então

$$(\tau_u)' = (\mathbf{r}' \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{u} = ((\mathbf{r} + \lambda \mathbf{u}) \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{u} = \underbrace{(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{u}}_{\tau_u} + \lambda (\mathbf{u} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{u} \overset{0}{=} \tau_u.$$

#### Problema 4

Calcule  $\partial_{xx}$ ,  $\partial_{yy}$  e  $\partial_{yx} = \partial_x(\partial_y)$  de duas funções  $f = f(u)$  com  $u = u(x, y)$ .

**Como resolver:** Não será feito o passo-a-passo pois as respostas podem ser verificadas, por exemplo, no WolframAlpha. Entretanto, note que as funções são da forma  $f = f(u)$  com  $u = u(x, y)$ . Então temos as derivadas, por regra da cadeia e regras de derivação:

$$\partial_x f = \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{df}{du} = f' \partial_x u$$

$$\partial_y f = \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{df}{du} = f' \partial_y u$$

$$\partial_{xx} f = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x (f' \partial_x u) = \partial_x (f') \partial_x u + f' \partial_x (\partial_x u) = f'' (\partial_x u)^2 + f' \partial_{xx} u$$

$$\partial_{yy} f = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} = \partial_y (f' \partial_y u) = \partial_y (f') \partial_y u + f' \partial_y (\partial_y u) = f'' (\partial_y u)^2 + f' \partial_{yy} u$$

$$\partial_{yx} f = \partial_x (\partial_y f) = \partial_x (f' \partial_y u) = (\partial_x f') (\partial_y u) + f' \partial_x (\partial_y u) = f'' (\partial_x u) (\partial_y u) + \partial_{yx} u.$$

Espera-se que  $\partial_{yx} = \partial_{xy}$  por continuidade (teorema de Clairaut). Ademais note (isso será útil para um problema posterior das listas) que para esse tipo de função:

$$\nabla^2 u = \Delta u = \partial_{xx} f + \partial_{yy} f = [(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2] f'' + [\nabla^2 u] f'.$$

#### Problema 5

Feito na lista do Roldão.

## Problema 6

Mostre que:

$$(a) \frac{d}{dt} \left[ \mathbf{v} \cdot \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} \right) \right] = \mathbf{v} \cdot \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \frac{d^3\mathbf{v}}{dt^3} \right)$$

Serão usadas as "regras do produto" para o produto interno/escalar e o produto exterior/produto de cunha/vetorial, ou seja:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Então:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \mathbf{v} \cdot \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} \right) \right] &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} \right) + \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} \right) = \\ &= \mathbf{v} \cdot \left( \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} \times \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} + \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \frac{d^3\mathbf{v}}{dt^3} \right) = \mathbf{v} \cdot \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \frac{d^3\mathbf{v}}{dt^3} \right). \end{aligned}$$

$$(b) \int \left( \mathbf{v} \times \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} \right) dt = \mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{u} \text{ Assumindo vetor } \mathbf{u} \text{ constante, temos:}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{u} \right) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \times \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2},$$

tem-se, por uma forma vetorial (e que não iremos demonstrar) do teorema fundamental do cálculo que vale a identidade do enunciado.

$$(c) \text{ se } \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = f(r)\mathbf{r}, \text{ então } \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{w}$$

Novamente,

$$\frac{d}{dt} \left( \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \mathbf{r} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{0}$$

Isso significa que os vetores posição  $\mathbf{r}$  e aceleração  $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$  são ortogonais. Um vetor da forma  $f(r)\mathbf{r}$  certamente satisfaz tal propriedade, pois  $\mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$ . Uma consequência desse fato é que se um corpo está sujeito a forças centrais, o momento angular é constante.

Esse fato é importante em Mecânica Celeste e Mecânica Orbital pois permite caracterizar o plano da órbita (direção) e conhecida uma posição, o formato (magnitude).

### Problema 7

Calcule a matriz Jacobiana de campo vetorial  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \mathbf{v} = (e^x \sin x)\hat{\mathbf{i}} + (e^x \cos y)\hat{\mathbf{j}}$

**Solução:** A matriz jacobiana é dada por:

$$J[\mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} v_1 & \cdots & \partial_{x_n} v_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1} v_n & \cdots & \partial_{x_n} v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x v_1 & \partial_y v_1 \\ \partial_x v_2 & \partial_y v_2 \end{bmatrix}$$

e tomando  $\mathbf{v} = v_1\hat{\mathbf{i}} + v_2\hat{\mathbf{j}}$  e fazendo as operações indicadas se chega ao resultado do gabarito disponibilizado.