

Problema 1

Considere o campo vetorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $\mathbf{F}(x, y, z) = (x - y, x + y, z)$. Calcule o fluxo de \mathbf{F} através da esfera S^2 , cuja normal no ponto $(0, 1, 0)$ tem segunda componente positiva.

Solução: imaginemos que saibamos o domínio (ainda não sabemos). Como o campo vetorial é polinomial, é contínuo e definido em qualquer lugar de \mathbb{R}^3 . Podemos aplicar teorema de Gauss:

$$\Phi = \iint_{\text{superfície}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\text{volume}} \nabla \cdot \mathbf{F} dV$$

Vejamos que o campo dado é tal que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 3$ e independe em geral da localização da esfera. De fato:

$$\iiint_{\text{volume}} \nabla \cdot \mathbf{F} dV = 3 \iiint_{\text{volume}} dV = 4\pi R^3$$

é função exclusivamente do raio da esfera. Basta sabermos agora qual o valor de raio satisfaz o proposto.

Determinação do domínio: usaremos a notação de **2-esfera** dada pelo enunciado. A questão, agora, é localizá-la no espaço. Vejamos que uma esfera com raio R e centro em $(x, y, z) = (a, b, c)$ teria equação dada por:

$$\phi(x, y, z) = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - R^2 = 0.$$

O vetor normal a essa superfície pode ser encontrado pelo gradiente:

$$\mathbf{n}(x, y, z) = \nabla \phi(x, y, z) = (2(x - a), 2(y - b), 2(z - c))$$

No ponto dado:

$$\mathbf{n}(0, 1, 0) = (-2a, 2(1 - b), -2c) = (-2a, \alpha, -2c) \quad \alpha > 0$$

então sabemos que $b < 1$. Outra informação dada (implicitamente) é que $(0, 1, 0)$ pertence à esfera, logo:

$$a^2 + (1 - b)^2 + c^2 = R^2$$

Então:

$$\Phi = 4\pi [a^2 + (1 - b)^2 + c^2]^{\frac{3}{2}}$$

para escolhas de a, c livres e $b < 1$.

Problema 2

O escoamento de um fluido, de densidade $\rho = 10 \text{ kg/m}^3$, possui velocidade

$$\mathbf{v} = (-y, x, 2z) \text{ [m/s]} \quad (x, y, z) \text{ [m]}$$

Determine a vazão de tal escoamento através da esfera de raio 5 m.

Solução: pela definição de vazão *mássica* $\dot{m} = \iint_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ e notando que o escoamento é sempre bem-definido em \mathbb{R}^3 , o que nos permite o usar o teorema de Gauss:

$$\dot{m} = \iint_{\partial V} \rho \mathbf{v} = \iiint_V \rho \nabla \cdot \mathbf{v} dV,$$

podemos calcular agora a divergência: $\nabla \cdot \mathbf{v} = 2 \text{ [1/s]}$ e então:

$$\dot{m} = 20 \text{ [kg/(m}^3 \cdot \text{s)]} \times \iiint_V dV = 20 \text{ [kg/(m}^3 \cdot \text{s)]} \times \frac{4}{3} \pi R^3 = 3333.3\pi \text{ [kg/s]}.$$

Problema 3

Calcule o fluxo $\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$, onde $\mathbf{F} = (x, 2y, 3z)$, onde S é a superfície do cubo com vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.

Solução: vejamos que o problema é numa região fechada e o campo vetorial está bem definido. Logo podemos calcular por Teorema de Gauss:

$$\Phi = \iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iiint_V (1 + 2 + 3) dV = 6 \iiint_V dV = 6V = 48.$$

Problema 4

Calcule o fluxo $\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$, onde $\mathbf{F} = (0, y, -z)$, onde S é formado pela união do parabolóide $y = x^2 + z^2, 0 \leq y \leq 1$ com sua tampa (que é o círculo $x^2 + z^2 \leq 1, y = 1$).

Solução: vejamos que o problema é numa região fechada e o campo vetorial está bem definido. Logo podemos calcular por Teorema de Gauss:

$$\Phi = \iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iiint_V (0 + 1 - 1) dV = \iiint_V 0 dV = 0.$$

Problema 5

Dada a temperatura $u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, de uma casca hemisférica metálica S , calcule o fluxo de calor através de S .

Integral de superfície: o domínio não está completamente especificado, mas suporemos se tratar da casca hemisférica formada pela divisão da esfera de raio arbitrário R centrada na origem pelo plano xy e com a casca da parte com $z > 0$. Note que o problema tem simetria radial: se a casca não está na disposição descrita acima, basta rotacionar os eixos até que esteja.

Podemos parametrizar então a superfície em coordenadas esféricas (na base cartesiana) por:

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = R(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \quad \theta \in [0, \pi/2], \quad \phi \in [0, 2\pi)$$

Então poderíamos encontrar o elemento vetorial de superfície por:

$$d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}}dS = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right) d\theta d\phi.$$

Não faremos esse cálculo, mas caso faça, deverá verificar que o vetor encontrado é $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{r}}R^2 \sin \theta d\theta d\phi$. De fato, não é difícil ver que o vetor unitário radial é o vetor normal à casca em todo lugar (apontado para *fora*) e nossa parametrização deve refletir isso. O que poderia surpreender é o aparecimento do fator de escala de área $R^2 \sin \theta$.

O campo escalar é facilmente expresso por $u(r, \theta, \phi) = r^2$ nesse sistema de coordenadas. Seu gradiente (direto em coordenadas esféricas) e depois voltando para cartesianas é dado por:

$$\nabla u = \left(\frac{1}{1} \partial_r r^2, \frac{1}{r} \partial_\theta r^2, \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi r^2 \right)_{\hat{\mathbf{r}}, \hat{\theta}, \hat{\phi}} = (2r, 0, 0)_{\hat{\mathbf{r}}, \hat{\theta}, \hat{\phi}} = 2r(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)_{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}}$$

O fluxo de calor é então calculado por:

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_{\partial V} \nabla u(r = R) \cdot d\mathbf{S} = 2R^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} [\sin^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \theta] \sin \theta d\theta d\phi \\ &= 2R^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} [\sin^2 \theta + \cos^2 \theta] \sin \theta d\theta d\phi = 2R^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta d\phi \\ &= 4\pi R^3. \end{aligned}$$

Teorema de Gauss: vejamos a simplicidade do uso do Teorema de Gauss (ou Divergência). Primeiro vamos calcular a divergência de ∇u em coordenadas esféricas (base esférica):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla u &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\partial_r ((\nabla u)_r r^2 \sin \theta) + \partial_\theta ((\nabla u)_\theta r^2 \sin \theta) + \partial_\phi ((\nabla u)_\phi r^2 \sin \theta) \right] = \\ &= \partial_r ((\nabla u)_r) + \frac{2}{r} (\nabla u)_r = 2 + \frac{2}{r} (2r) = 6. \end{aligned}$$

Agora notemos que a casca do domínio é a mesma coisa que a região fechada que contém a tampa subtraído da tampa. ou seja:

$$\oint\limits_{\text{com tampa}} \nabla u \cdot d\mathbf{S} = \iint\limits_{\text{sem tampa}} \nabla u \cdot d\mathbf{S} + \iint\limits_{\text{tampa}} \nabla u \cdot d\mathbf{S} = \Phi + \iint\limits_{\text{tampa}} \nabla u \cdot d\mathbf{S}.$$

A integral da região fechada admite teorema de Gauss:

$$\oint\limits_{\text{com tampa}} \nabla u \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \nabla u dV = 6V = 4\pi R^3 \quad \left(V = \frac{2}{3}\pi R^3 \right).$$

Já na própria tampa, localizada no plano $z = 0$, notemos que o vetor gradiente aponta na direção radial no próprio plano xy e notando que a parametrização da tampa leva a um vetor normal apontado para z negativo, com elemento de área igual ao de coordenadas polares:

$$d\mathbf{S}_{\text{tampa}} = -k\rho d\theta,$$

concluimos que a integral será identicamente zero (caso queira, faça os cálculos). Disso, concluimos o mesmo resultado anterior: $\Phi = 4\pi R^3$

Nota: na realidade, deveríamos ter usado a **Lei de Fourier**: $\Phi = \iint_S (-k\nabla u) \cdot d\mathbf{S}$. Entretanto, basta multiplicar o resultado final por $-k$.

Problema 6

Calcule $\iint_S x^2 z^2 dS$, onde S é a superfície do cone $3z^2 = x^2 + y^2$, que está entre os planos $z = 1$ e $z = 3$.

Solução: O problema se presta naturalmente às coordenadas cilíndricas. A superfície do cone descreve a equação:

$$3z^2 = \rho^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{3}z$$

em que já consideramos o sinal da medida radial como positivo e z é positivo devido ao intervalo dado. Parametrizando então em termos da componente axial:

$$\mathbf{r}(\phi, z) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z) = (\sqrt{3}z \cos \phi, \sqrt{3}z \sin \phi, z)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} &= (-\sqrt{3}z \sin \phi, \sqrt{3}z \cos \phi, z) \times (\sqrt{3} \cos \phi, \sqrt{3} \sin \phi, 1) = \\ &= (\sqrt{3}z(\cos \phi - \sin \phi), \sqrt{3}z(\cos \phi + \sin \phi), -3z) \end{aligned}$$

$$dS = |(\sqrt{3}z(\cos \phi - \sin \phi), \sqrt{3}z(\cos \phi + \sin \phi), -3z)| d\phi dz = \sqrt{15}z d\phi dz$$

$$x^2 z^2 = 3z^4 \cos^2 \phi$$

$$\iint_S x^2 z^2 dS = 3\sqrt{15} \int_1^3 \int_0^{2\pi} z^5 \cos^2 \phi d\phi dz = 364\sqrt{15}\pi$$

Problema 7

Calcule $\iint_S (x^2z + y^2z) dS$, onde S é o hemisférico de raio 2, $z \geq 0$.

Solução: Vejamos que a integral é uma região aberta, mas também quando $z = 0$ o campo escalar é nulo, logo podemos tomar a versão de campo escalar do Teorema de Gauss para a casca hemisférica adicionada à tampa de baixo (que não contribui pro resultado, de todo modo). Seja \hat{n} o vetor normal à superfície integrada.

Tomaremos $u = x^2z + y^2z = u(\hat{n} \cdot \hat{n})$. Na integral:

$$\iint_S u dS = \iint_S (u\hat{n}) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V [\nabla \cdot (u\hat{n})] dV = \iiint_V \underbrace{[\nabla u \cdot \hat{n} + u \nabla \cdot \hat{n}]}_{\text{ver lista 1}} dV,$$

calcularemos primeiro a divergência, notando que o vetor normal para o caso esférico é simplesmente o vetor radial normalizado (coordenadas esféricas, base esférica):

$$\nabla \cdot \hat{n} = \nabla \cdot \hat{r} = \nabla \cdot (1, 0, 0)_{\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}} = 0,$$

então, retornando à integral:

$$\iint_S u dS = \iiint_V \nabla u \cdot \hat{r} dV = \iiint_V (\nabla u)_r dV,$$

para calcularmos a componente radial do gradiente do campo, vejamos que em coordenadas esféricas:

$$u(x, y, z) = (x^2 + y^2)z \Rightarrow u(r, \theta, \phi) = r^3 \sin^2 \theta \cos \theta,$$

$$(\nabla u)_r = \frac{1}{r} \partial_r u = 3r^2 \sin^2 \theta \cos \theta,$$

por fim:

$$\begin{aligned} \iint_S u dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^2 3r^2 \sin^2 \theta \cos \theta \underbrace{(r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi)}_{dV} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^2 3r^4 \sin^3 \theta \cos \theta dr d\theta d\phi = \frac{48}{5} \pi \end{aligned}$$

Problema 8

Calcule $\iint_S (x^2y + z^2)dS$, onde S é a parte do cilindro $x^2 + y^2 = 9$, entre os planos $z = 0$ e $z = 2$.

Solução: Usando coordenadas cilíndricas:

$$\mathbf{r} = (3 \cos \phi, 3 \sin \phi, z), \quad \phi \in [0, 2\pi) \quad z \in [0, 2]$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = (-3 \sin \phi, 3 \cos \phi, z) \times (0, 0, 1) = (3 \cos \phi, 3 \sin \phi, 0) = 3\hat{\rho}$$

$$d\mathbf{S} = 3\hat{\rho}d\phi dz \Rightarrow dS = 3d\phi dz$$

$$u(x, y, z) = x^2y + z^2 \Rightarrow u(\rho, \phi, z) = 27 \cos^2 \phi \sin \phi + z^2$$

$$\iint_S u dS = 3 \int_0^2 \int_0^{2\pi} (27 \cos^2 \phi \sin \phi + z^2) d\phi dz = 16\pi$$

Problema 9

Determine a massa de um funil fino com o formato de um cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $1 \leq z \leq 4$, se sua função densidade é $\rho(x, y, z) = 10 - z$

Solução: Notando que o formato do cone em coordenadas cilíndricas é $z = r$ e parametrizando:

$$\mathbf{r} = (z \cos \phi, z \sin \phi, z), \quad \phi \in [0, 2\pi), \quad z \in [1, 4],$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = (-z \sin \phi, z \cos \phi, 0) \times (\cos \phi, \sin \phi, 1) = (z \cos \phi, z \sin \phi, -z),$$

$$d\mathbf{S} = (\cos \phi, \sin \phi, -1)z d\phi dz.$$

Para calcular a massa usaremos $m = \iint_S \rho dS$. Temos então:

$$dS = |d\mathbf{S}| = \sqrt{2}z d\phi dz,$$

logo:

$$m = \sqrt{2} \int_1^4 \int_0^{2\pi} (10 - z)z d\phi dz = 108\pi\sqrt{2}$$

Problema 10

Calcule $\iint_S \sqrt{1+x^2+y^2} dS$, onde S é o helicóide

$$\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v), \quad u \in [0, 1] \quad v \in [0, \pi]$$

Solução: dada a parametrização acima, tomamos:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (\cos v, \sin v, 0) \times (-u \sin v, u \cos v, 1) = (\sin v, -\cos v, u),$$

$$d\mathbf{S} = |(\sin v, -\cos v, u)| du dv = \sqrt{1+u^2} du dv.$$

Notemos ainda que o próprio campo escalar é dado por $\phi = \sqrt{1+x^2+y^2} = \sqrt{1+u^2}$. Logo a integral é bastante simplificada para:

$$\iint_S \phi dS = \int_0^\pi \int_0^1 (1+u^2) du dv = \frac{4}{3}\pi$$