

Problema 1

Dados vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ e constantes $a, b \in \mathbb{R}$, mostre que:

(a) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ e $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$

Antissimetria: notemos que na expressão $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$, ao colocar \mathbf{u} no lugar de \mathbf{v} e vice-versa^a, obtém-se $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{u})$ e, da álgebra vetorial, $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Então $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0 \Rightarrow -\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ e bastaria mostrar a primeira identidade para obter a segunda sem esforço adicional.

Notação indicial: $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \varepsilon_{ijk} u^i u^j v^k$ e notamos que, como cada termo que acompanha ε_{ijk} é oposto ao que acompanha ε_{jik} (exemplo: $\varepsilon_{123} u^1 u^2 v^3 = -\varepsilon_{213} u^2 u^1 v^3$) então ao serem *somados* (note que o índice repetido implica uma soma) o resultado é o anulamento de pares de termos da soma^b e, por consequência, da soma inteira.

Geometria: em Geometria Analítica se definiu como $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ o vetor que é *normal*^c ao plano definido por \mathbf{u} e \mathbf{v} . Ademais, é ortogonal aos próprios \mathbf{u} e \mathbf{v} e vale, portanto, $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = ||\mathbf{u}|| ||\mathbf{u} \times \mathbf{v}|| \cos \beta = u^2 v \sin \alpha \cos \beta = 0$ pois dados α ângulo entre \mathbf{u} e \mathbf{v} e β ângulo entre \mathbf{u} e $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, ocorre que $\beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \beta = 0$.

Vetores em componentes cartesianos: Dados^d

$$\mathbf{u} = u^i \hat{\mathbf{e}}_i = u^1 \hat{\mathbf{i}} + u^2 \hat{\mathbf{j}} + u^3 \hat{\mathbf{k}}$$

e

$$\mathbf{v} = v^i \hat{\mathbf{e}}_i = v^1 \hat{\mathbf{i}} + v^2 \hat{\mathbf{j}} + v^3 \hat{\mathbf{k}},$$

tem-se então, expandindo o determinante pela primeira coluna:

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \\ u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix} = u^1 \begin{vmatrix} u^2 & u^3 \\ v^2 & v^3 \end{vmatrix} - u^1 \begin{vmatrix} u^2 & u^3 \\ v^2 & v^3 \end{vmatrix} + v^1 \begin{vmatrix} u^2 & u^3 \\ u^2 & u^3 \end{vmatrix},$$

em que o mesmo resultado seria obtido fazendo qualquer outra expansão (método de Laplace), inclusive a primeira linha como usual. Ademais, o mesmo resultado seria obtido notando que existe um teorema da Álgebra matricial em que se uma linha ou coluna é combinação linear da outra (em particular, se uma é idênticamente igual a outra), então o determinante será nulo.

(b) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

Notação indicial: $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = u^i [\mathbf{v} + \mathbf{w}]_i = u^i (v_i + w_i) = u^i v_i + u^i w_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$.

Vetores em componentes cartesianos:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v^1 + w^1)\hat{\mathbf{i}} + (v^2 + w^2)\hat{\mathbf{j}} + (v^3 + w^3)\hat{\mathbf{k}},$$

portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} &= \\ u^1(v^1 + w^1) + u^2(v^2 + w^2) + u^3(v^3 + w^3) &= (u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3) + (u^1 w^1 + u^2 w^2 + u^3 w^3) \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}. \end{aligned}$$

(c) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$

Notação indicial: $[\mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{w}]_i = \varepsilon_{ijk} u^j [\mathbf{v} + \mathbf{w}]^k = \varepsilon_{ijk} u^j (v^k + w^k) = \varepsilon_{ijk} u^j v^k + \varepsilon_{ijk} u^j w^k = [\mathbf{u} \times \mathbf{v}]_i + [\mathbf{u} \times \mathbf{w}]_i$.

Vetores em componentes cartesianas:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 + w^1 & v^2 + w^2 & v^3 + w^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ u^1 & u^2 & u^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}. \end{aligned}$$

(d) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (uv)^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$

Notação indicial:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = [\mathbf{u} \times \mathbf{v}]^i [\mathbf{u} \times \mathbf{v}]_i = \varepsilon^{imn} u_m v_n \varepsilon_{ipq} u^p v^q = (\varepsilon^{imn} \varepsilon_{ipq}) u_m v_n u^p v^q,$$

mas

$$\begin{aligned} \varepsilon^{imn} \varepsilon_{ipq} &= \begin{vmatrix} \delta^i_i & \delta^i_p & \delta^i_q \\ \delta^m_i & \delta^m_p & \delta^m_q \\ \delta^n_i & \delta^n_p & \delta^n_q \end{vmatrix} = \delta^m_p \begin{vmatrix} \delta^i_i & \delta^i_q \\ \delta^n_i & \delta^n_q \end{vmatrix} - \delta^m_q \begin{vmatrix} \delta^i_i & \delta^i_p \\ \delta^n_i & \delta^n_p \end{vmatrix} + \delta^i_q \begin{vmatrix} \delta^m_i & \delta^m_p \\ \delta^n_i & \delta^n_p \end{vmatrix} \\ &= \delta^m_p \delta^n_q - \delta^m_q \delta^n_p, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} (\delta^m_p \delta^n_q - \delta^m_q \delta^n_p) u_m v_n u^p v^q &= \delta^m_p \delta^n_q u_m v_n u^p v^q - \delta^m_q \delta^n_p u_m v_n u^p v^q = u^p v^q u_p v_q - u^q v^p u_p v_q \\ &= (u^p u_p)(v^q v_q) - (u^q v_q)(v^p u_p) = (uv)^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2. \end{aligned}$$

Álgebra vetorial: nota-se que

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = u^2 v^2 \sin^2 \alpha$$

em que α é ângulo entre \mathbf{u} e \mathbf{v} . Mas $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$, então

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = u^2 v^2 - u^2 v^2 \cos^2 \alpha = (uv)^2 - (uv \cos \alpha)^2 = (uv)^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2.$$

$$(e) (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = u^2 - v^2$$

Notação indicial:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= (\mathbf{u} - \mathbf{v})^i (\mathbf{u} + \mathbf{v})_i = \sum_i (\mathbf{u} - \mathbf{v})^i (\mathbf{u} + \mathbf{v})_i = \sum_i (u^i - v^i)(u_i + v_i) = \\ &= \sum_i (u^i u_i - u^i v_i + v^i u_i - v^i v_i) = u^i u_i - u^i v_i + v^i u_i - v^i v_i = \\ &= u^2 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - v^2 = u^2 - v^2 \end{aligned}$$

Álgebra vetorial: $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \cancel{\mathbf{v}}^0 + \cancel{\mathbf{v}}^0 \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = u^2 - v^2$

$$(f) (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = 2\mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

Notação indicial:

$$\begin{aligned} [(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \times (\mathbf{u} + \mathbf{v})]_i &= \varepsilon_{ijk} (\mathbf{u} - \mathbf{v})^j (\mathbf{u} + \mathbf{v})^k = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} (\mathbf{u} - \mathbf{v})^j (\mathbf{u} + \mathbf{v})^k = \\ &= \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} (u^j - v^j)(u^k + v^k) = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} (u^j u^k + u^j v^k - v^j u^k - v^j v^k) \\ &= \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} u^j u^k + \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} u^j v^k - \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} v^j u^k - \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} v^j v^k = \\ &= \varepsilon_{ijk} u^j u^k + \varepsilon_{ijk} u^j v^k - \varepsilon_{ijk} v^j u^k - \varepsilon_{ijk} v^j v^k = \\ &= \cancel{(\mathbf{u} \times \mathbf{u})}^0_i + (\mathbf{u} \times \mathbf{v})_i - (\mathbf{v} \times \mathbf{u})_i - \cancel{(\mathbf{v} \times \mathbf{v})}^0_i = \\ &= (\mathbf{u} \times \mathbf{v})_i + (\mathbf{u} \times \mathbf{v})_i = 2(\mathbf{u} \times \mathbf{v})_i \end{aligned}$$

Álgebra vetorial: $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \cancel{\mathbf{u} \times \mathbf{u}}^0 + \mathbf{u} \times \mathbf{v} - \mathbf{v} \times \mathbf{u} + \cancel{\mathbf{v} \times \mathbf{v}}^0 = 2\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

$$(g) \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) - \mathbf{w}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^f$$

Notação indicial:

$$\begin{aligned} [\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})]_i &= \varepsilon_{ijk} u^j (\mathbf{v} \times \mathbf{w})^k = \varepsilon_{ijk} u^j (\varepsilon^{kpq} v_p w_q) = \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{kpq} u^j v_p w_q = \\ &= \begin{vmatrix} \delta^k_i & \delta^k_j & \delta^k_k \\ \delta^p_i & \delta^p_j & \delta^p_k \\ \delta^q_i & \delta^q_j & \delta^q_k \end{vmatrix} u^j v_p w_q = \sum_k \underbrace{\begin{vmatrix} \cancel{\delta^k_i}^0 & \cancel{\delta^k_j}^0 & \delta^k_k \\ \delta^p_i & \delta^p_j & \cancel{\delta^p_k}^0 \\ \delta^q_i & \delta^q_j & \cancel{\delta^q_k}^0 \end{vmatrix}}_{1! \text{ formas de escolher o índice somado}} u^j v_p w_q = \\ &= 1! \begin{vmatrix} \delta^p_i & \delta^p_j \\ \delta^q_i & \delta^q_j \end{vmatrix} u^j v_p w_q = (\delta^p_i \delta^q_j - \delta^p_j \delta^q_i) u^j v_p w_q = \\ &= \delta^p_i \delta^q_j u^j v_p w_q - \delta^p_j \delta^q_i u^j v_p w_q = u^j v_i w_j - u^j v_j w_i = \\ &= v_i (u^j w_j) - w_i (u^j v_j) = v_i (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) - w_i (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \end{aligned}$$

$$(h) (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{x}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} & \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} & \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} \end{vmatrix}$$

Notação indicial:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{x}) &= (\mathbf{u} \times \mathbf{v})^i (\mathbf{w} \times \mathbf{x})_i = \varepsilon^{ijk} u_j v_k \varepsilon_{imn} w^m x^n = \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{imn} w^m x^n u_j v_k = \\ &= \sum_i \underbrace{\begin{vmatrix} \delta_i^1 & \delta_i^0 & \delta_i^0 \\ \delta_i^0 & \delta_i^j & \delta_i^n \\ \delta_i^0 & \delta_i^k & \delta_i^n \end{vmatrix}}_{1!} w^m x^n u_j v_k = 1! (\delta_m^j \delta_n^k - \delta_n^j \delta_m^k) w^m x^n u_j v_k = \\ &= \delta_m^j \delta_n^k w^m x^n u_j v_k - \delta_n^j \delta_m^k w^m x^n u_j v_k = \\ &= w^j x^k u_j v_k - w^k x^j u_j v_k = (u_j w^j)(v_k x^k) - (u_j x^j)(v_k w^k) = \\ &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \end{aligned}$$

$$(i) \text{ (identidade de Jacobi)}^g \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

Aplicação repetida de BAC-CAB:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) &= \\ &= [\mathbf{v}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) - \mathbf{w}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})] + [\mathbf{u}(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v}(\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})] + [\mathbf{w}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})] \\ &= [\mathbf{v}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) - \mathbf{v}(\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})] + [\mathbf{w}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{w}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})] + [\mathbf{u}(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{u}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})] \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

^aIsso pode ser feito pois são tomados \mathbf{u} e \mathbf{v} arbitrários.

^bNote que a maioria dos termos (quaisquer com índices repetidos) já é nula em razão da própria definição do símbolo de Levi-Civita, ε .

^cOu, caso não definam um plano são paralelos e então seu produto vetorial é o vetor nulo $\mathbf{0}$.

^dSerá usado o índice *acima* para componentes de vetores, algo que ficará claro na seção de tensores do curso. Por ora, dá igual escrever o índice das componentes "em cima" ou "em baixo", contanto que não se confunda com potências.

^eNote que a notação de Einstein para soma foi suspensa e depois retomada em passos intermediários. É sempre possível fazer isso, na realidade, sequer é necessário usar a notação de Einstein e quando esta for um empecilho se recomenda escrever por extenso todos os somatórios.

^fEssa regra também é conhecida como regra BAC-CAB ("*back minus cab*"), veja, mantendo a fora do parêntesis do lado esquerdo: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$.

^gNote que os termos seguintes ao primeiro na soma são permutações cíclicas dos vetores nas posições.

Problema 2

Calcule $\frac{\partial^2}{\partial_x \partial_y} f = \partial_{yx} f$ dos seguintes campos escalares:

(a) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2), \quad (x, y) \neq (0, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_{yx} \ln(x^2 + y^2) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \ln(x^2 + y^2) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial y} \frac{d}{d(x^2 + y^2)} \ln(x^2 + y^2) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(2y \times \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{(x^2 + y^2) \cancel{\partial_x(2y)}^0 - 2y \partial_x(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

(b) $f(x, y) = \arctan(y/x), \quad (x, y) \neq (0, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_{yx} \arctan(y/x) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \arctan(y/x) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial(y/x)}{\partial y} \frac{d}{d(y/x)} \arctan(y/x) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \times \frac{1}{1 + (y/x)^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \times \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \\ &= \frac{(x^2 + y^2) \cancel{\partial_x(x)}^1 - x \partial_x(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

Problema 3

Seja $v(r, t) = t^n \exp(-\frac{r^2}{4t})$. Calcule n para que o campo escalar v satisfaça a equação:

$$\partial_t v = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r v)$$

Solução: Temos, separadamente:

$$\partial_t v = nt^{n-1} \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right) + t^n \times \frac{r^2}{4t^2} \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right) = \left(nt^{n-1} + \frac{1}{4}t^{n-2}r^2\right) \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right)$$

e, para o lado direito da equação:

$$\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r v) = \frac{1}{r^2} (2r \partial_r v + r^2 \partial_{rr} v) = \frac{2}{r} \partial_r v + \partial_{rr} v,$$

mas

$$\partial_r v = t^n \partial_r \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right) = -\frac{2r}{4t} t^n \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right) = -\frac{1}{2} r t^{n-1} \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right)$$

$$\partial_{rr} v = -\frac{1}{2} t^{n-1} \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right) + \frac{1}{4} r^2 t^{n-2} \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right) = \left(-\frac{1}{2} t^{n-1} + \frac{1}{4} t^{n-2} r^2\right) \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right),$$

portanto,

$$\frac{2}{r} \partial_r v + \partial_{rr} v = \left(-\frac{3}{2} t^{n-1} + \frac{1}{4} t^{n-2} r^2\right) \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right),$$

por fim:

$$\left(nt^{n-1} + \frac{1}{4} t^{n-2} r^2\right) \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right) = \left(-\frac{3}{2} t^{n-1} + \frac{1}{4} t^{n-2} r^2\right) \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right)$$

$$nt^{n-1} + \frac{1}{4} t^{n-2} r^2 = -\frac{3}{2} t^{n-1} + \frac{1}{4} t^{n-2} r^2 \Rightarrow nt^{n-1} \neq 0 = -\frac{3}{2} t^{n-1} \neq 0 \Rightarrow n = -\frac{3}{2}$$

Problema 4

Calcule o gradiente ∇f dos seguintes campos escalares:

(a) $f(x, y) = x^2 + y \cos(xy)$

$$\nabla f = (\partial_x f)\hat{\mathbf{i}} + (\partial_y f)\hat{\mathbf{j}} = [2x - y^2 \sin(xy)]\hat{\mathbf{i}} + [\cos(xy) - xy \sin(xy)]\hat{\mathbf{j}}$$

$$||\nabla f|| = \sqrt{[2x - y^2 \sin(xy)]^2 + [\cos(xy) - xy \sin(xy)]^2}$$

(b) $f(x, y) = \exp(x^2) \sin y$

$$\nabla f = (\partial_x f)\hat{\mathbf{i}} + (\partial_y f)\hat{\mathbf{j}} = [2x \sin y \exp(x^2)]\hat{\mathbf{i}} + [\cos y \exp(x^2)]\hat{\mathbf{j}}$$

$$||\nabla f|| = \exp(x^2) \sqrt{4x^2 \sin^2 y + \cos^2 y}$$

(c) $f(x, y, z) = \ln(x^2 + 2y^3 - z^4)$

$$\nabla f = (\partial_x f)\hat{\mathbf{i}} + (\partial_y f)\hat{\mathbf{j}} + (\partial_z f)\hat{\mathbf{k}} =$$

$$= \frac{df}{d(x^2 + 2y^3 - z^4)} f\{[\partial_x(x^2 + 2y^3 - z^4)]\hat{\mathbf{i}} + [\partial_y(x^2 + 2y^3 - z^4)]\hat{\mathbf{j}} + [\partial_z(x^2 + 2y^3 - z^4)]\hat{\mathbf{k}}\}$$

$$= \frac{1}{x^2 + 2y^3 - z^4} [2x\hat{\mathbf{i}} + 6y^2\hat{\mathbf{j}} - 4z^3\hat{\mathbf{k}}] =$$

$$= \frac{2x}{x^2 + 2y^3 - z^4} \hat{\mathbf{i}} + \frac{6y^2}{x^2 + 2y^3 - z^4} \hat{\mathbf{j}} - \frac{4z^3}{x^2 + 2y^3 - z^4} \hat{\mathbf{k}}$$

$$||\nabla f|| = \frac{1}{|x^2 + 2y^3 - z^4|} \sqrt{4x^2 + 36y^4 + 16z^6} = \frac{2}{|x^2 + 2y^3 - z^4|} \sqrt{x^2 + 9y^4 + 4z^6}$$

Problema 5

Considere duas funções $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Prove que $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$.

Coordenadas cartesianas: Tem-se:

$$\begin{aligned}\nabla(fg) &= [\partial_x(fg)]\hat{\mathbf{i}} + [\partial_y(fg)]\hat{\mathbf{j}} + [\partial_z(fg)]\hat{\mathbf{k}} = [g\partial_x f + f\partial_x g]\hat{\mathbf{i}} + [g\partial_y f + f\partial_y g]\hat{\mathbf{j}} + [g\partial_z f + f\partial_z g]\hat{\mathbf{k}} \\ &= f[\partial_x g\hat{\mathbf{i}} + \partial_y g\hat{\mathbf{j}} + \partial_z g\hat{\mathbf{k}}] + g[\partial_x f\hat{\mathbf{i}} + \partial_y f\hat{\mathbf{j}} + \partial_z f\hat{\mathbf{k}}] = f\nabla g + g\nabla f.\end{aligned}$$

Diferencial:^a Usando a definição de gradiente:

$df = \nabla f \cdot d\mathbf{r}$ e $dg = \nabla g \cdot d\mathbf{r}$ mas por regra do produto $d(fg) = f dg + g df$, então: $d(fg) = f dg + g df = f \nabla g \cdot d\mathbf{r} + g \nabla f \cdot d\mathbf{r} = (f \nabla g + g \nabla f) \cdot d\mathbf{r}$. Por definição, $d(fg) = \nabla(fg) \cdot d\mathbf{r}$, de onde se conclui que para que valha em qualquer diferencial $d\mathbf{r}$, deve ocorrer que $\nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f$.

^aBasicamente, um grande abuso de notação.

Problema 6

Mostre que $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\mathbf{r}$.

Coordenadas esféricas:^a

$$\nabla(r^n) = \underbrace{\frac{1}{1}}_{1/h_1} (\partial_r r^n) \hat{\mathbf{r}} + \underbrace{\frac{1}{r}}_{1/h_2} (\partial_\theta r^n) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \underbrace{\frac{1}{r \sin \theta}}_{1/h_3} (\partial_\phi r^n) \hat{\boldsymbol{\phi}} = nr^{n-1} \hat{\mathbf{r}},$$

mas $r\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}$, logo $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\mathbf{r}$.

Coordenadas cartesianas:

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow r^n = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}},$$

portanto, vale:

$$\begin{aligned} \nabla(r^n) &= [\partial_x(r^n)]\hat{\mathbf{i}} + [\partial_y(r^n)]\hat{\mathbf{j}} + [\partial_z(r^n)]\hat{\mathbf{k}} = \frac{d(r^n)}{dr}[(\partial_x r)\hat{\mathbf{i}} + (\partial_y r)\hat{\mathbf{j}} + (\partial_z r)\hat{\mathbf{k}}] \\ &= nr^{n-1} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{\mathbf{i}} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{\mathbf{j}} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{\mathbf{k}} \right] \\ &= nr^{n-2}[x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}] = nr^{n-2}\mathbf{r} \end{aligned}$$

Diferencial:^b

$$r = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{\frac{1}{2}} \Rightarrow r^n = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{\frac{n}{2}}[x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}] = nr^{n-2}\mathbf{r},$$

pelo uso de regra da cadeia no diferencial,

$$d(r^n) = d[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{\frac{n}{2}}] = \frac{n}{2}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{\frac{n}{2}-1} d(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = \frac{n}{2}r^{n-2}d(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}),$$

mas ocorre que $d(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} + d\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = 2\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$, então:

$$d(r^n) = nr^{n-2}\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \nabla(r^n) \cdot d\mathbf{r}$$

que ocorre para $d\mathbf{r}$ completamente arbitrário apenas se $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\mathbf{r}$.

^aOs termos indicados por h_i são chamados *coeficientes de Lamé* e definidos por $h_i = \|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}\|$ em que x^i é a i -ésima coordenada. O problema poderia ter sido resolvido em qualquer outro sistema de coordenadas (inclusive cartesianas!), o esférico foi escolhido apenas por cancelar a maior parte dos termos e assumindo que se tratava de \mathbb{R}^3 .

^bAssim como no problema anterior, foi feito grande abuso de notação.

Problema 7

Mostre que os operadores divergente e rotacional são lineares, ou seja, dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e constante $a \in \mathbb{R}$ segue-se que:

(a) $\nabla \cdot (a\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{v}$

Coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (a\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \partial_x(au_1 + v_1) + \partial_y(au_2 + v_2) + \partial_z(au_3 + v_3) = \\ &= [a\partial_x u_1 + \partial_x v_1] + [a\partial_y u_2 + \partial_y v_2] + [a\partial_z u_3 + \partial_z v_3] \\ &= [a(\partial_x u_1 + \partial_y u_2 + \partial_z u_3)] + [\partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3] = \\ &= a\nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{v}\end{aligned}$$

Notação indicial, cartesiano:

$$\nabla \cdot (a\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \partial_i(a\mathbf{u} + \mathbf{v})_i = \partial_i(au_i + v_i) = a\partial_i u_i + \partial_i v_i = a\nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{v}$$

(b) $\nabla \times (a\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\nabla \times \mathbf{u} + \nabla \times \mathbf{v}$

Coordenadas cartesianas:^a

$$\begin{aligned}\nabla \times (a\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ au_1 + v_1 & au_2 + v_2 & au_3 + v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ au_1 & au_2 & au_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \\ &= a \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ u_1 + v_1 & u_2 + v_2 & u_3 + v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = a\nabla \times \mathbf{u} + \nabla \times \mathbf{v}\end{aligned}$$

Notação indicial, cartesiano:

$$\begin{aligned}[\nabla \times (a\mathbf{u} + \mathbf{v})]_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j (a\mathbf{u} + \mathbf{v})_k = \varepsilon_{ijk} \partial_j (au_k + v_k) = \varepsilon_{ijk} (a\partial_j u_k + \partial_j v_k) = \\ &= a\varepsilon_{ijk} \partial_j u_k + \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k = a[\nabla \times \mathbf{u}]_i + [\nabla \times \mathbf{v}]_i\end{aligned}$$

^aAqui foram usadas propriedades de matrizes/determinantes. Pode-se chegar à mesma conclusão indo até o fim na expansão dos termos.

Problema 8

Mostre que:

(a) $\nabla \times (f\mathbf{u}) = f\nabla \times \mathbf{u} + (\nabla f) \times \mathbf{u}$

Coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times (f\mathbf{u}) &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ fu_1 & fu_2 & fu_3 \end{vmatrix} = \\
 &= [\partial_y(fu_3) - \partial_z(fu_2)]\hat{\mathbf{i}} + [\partial_z(fu_1) - \partial_x(fu_3)]\hat{\mathbf{j}} + [\partial_x(fu_2) - \partial_y(fu_1)]\hat{\mathbf{k}} = \\
 &= [f\partial_y u_3 + u_3\partial_y f - f\partial_z u_2 - u_2\partial_z f]\hat{\mathbf{i}} + [f\partial_z u_1 + u_1\partial_z f - f\partial_x u_3 - u_3\partial_x f]\hat{\mathbf{j}} + \\
 &\quad + [f\partial_x u_2 + u_2\partial_x f - f\partial_y u_1 - u_1\partial_y f]\hat{\mathbf{k}} = \\
 &= f[(\partial_y u_3 - \partial_z u_2)\hat{\mathbf{i}} + (\partial_z u_1 - \partial_x u_3)\hat{\mathbf{j}} + (\partial_x u_2 - \partial_y u_1)\hat{\mathbf{k}}] + \\
 &\quad + [(\partial_y f)u_3 - (\partial_z f)u_2]\hat{\mathbf{i}} + [(\partial_z f)u_1 - (\partial_x f)u_3]\hat{\mathbf{j}} + [(\partial_x f)u_2 - (\partial_y f)u_1]\hat{\mathbf{k}} = \\
 &= f \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x f & \partial_y f & \partial_z f \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = f\nabla \times \mathbf{u} + (\nabla f) \times \mathbf{u}
 \end{aligned}$$

Notação indicial, cartesiano:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times [(f\mathbf{u})]_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j (fu_k) = \varepsilon_{ijk} (f\partial_j u_k + u_k \partial_j f) = f(\varepsilon_{ijk} \partial_j u_k) + \varepsilon_{ijk} (\partial_j f) u_k \\
 &= f[\nabla \times \mathbf{u}]_i + [(\nabla f) \times \mathbf{u}]_i
 \end{aligned}$$

(b) $\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})$

Coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= \nabla \cdot [(u_2 v_3 - u_3 v_2)\hat{\mathbf{i}} + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\hat{\mathbf{j}} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\hat{\mathbf{k}}] = \\
 &= \partial_x(u_2 v_3 - u_3 v_2) + \partial_y(u_3 v_1 - u_1 v_3) + \partial_z(u_1 v_2 - u_2 v_1) = \\
 &= (u_2 \partial_x v_3 + v_3 \partial_x u_2 - u_3 \partial_x v_2 - v_2 \partial_x u_3) + \\
 &\quad + (u_3 \partial_y v_1 + v_1 \partial_y u_3 - u_1 \partial_y v_3 - v_3 \partial_y u_1) + \\
 &\quad + (u_1 \partial_z v_2 + v_2 \partial_z u_1 - u_2 \partial_z v_1 - v_1 \partial_z u_2) = \\
 &= \underbrace{[v_1(\partial_y u_3 - \partial_z u_2) + v_2(\partial_z u_1 - \partial_x u_3) + v_3(\partial_x u_2 - \partial_y u_1)]}_{\mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u})} + \\
 &\quad + \underbrace{[u_1(\partial_z v_2 - \partial_y v_3) + u_2(\partial_x v_3 - \partial_z v_1) + u_3(\partial_y v_1 - \partial_x v_2)]}_{-\mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})} \\
 &= \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})
 \end{aligned}$$

Notação indicial, cartesiano:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= (\partial_i \varepsilon_{ijk} u_j v_k) = \varepsilon_{ijk} \partial_i (u_j v_k) = \varepsilon_{ijk} (u_j \partial_i v_k + v_k \partial_i u_j) = \varepsilon_{ijk} u_j \partial_i v_k + \varepsilon_{ijk} v_k \partial_i u_j \\ &= u_j \varepsilon_{ijk} \partial_i v_k + v_k \varepsilon_{ijk} \partial_i u_j = -u_j \underbrace{\varepsilon_{jik} \partial_i v_k}_{[\nabla \times \mathbf{v}]_j} + v_k \underbrace{\varepsilon_{kij} \partial_i u_j}_{[\nabla \times \mathbf{u}]_k} = \\ &= v_k [\nabla \times \mathbf{u}]_k - u_j [\nabla \times \mathbf{v}]_j = \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})\end{aligned}$$

Problema 9

Calcule $\nabla \cdot \mathbf{u}$ e $\nabla \times \mathbf{u}$ para os seguintes campos vetoriais:

(a) $\mathbf{u}(x, y, z) = (x^3 + yz^2)\hat{\mathbf{i}} + (y + xz)\hat{\mathbf{j}} + (z + xy)\hat{\mathbf{k}}$

Divergência:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \cancel{\partial_x(x^3 + yz^2)}^0 + \cancel{\partial_y(y + xz)}^0 + \cancel{\partial_z(z + xy)}^0 = \partial_x x^3 + \partial_y y + \partial_z z = 3x^2 + 2$$

Rotacional:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{u} &= \begin{vmatrix} \partial_y & \partial_z \\ y + xz & z + xy \end{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} + \begin{vmatrix} \partial_z & \partial_x \\ z + xy & x^3 + yz^2 \end{vmatrix} \hat{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ x^3 + yz^2 & y + xz \end{vmatrix} \hat{\mathbf{k}} = \\ &= (x - x)\hat{\mathbf{i}} + (2zy - y)\hat{\mathbf{j}} + (z - z^2)\hat{\mathbf{k}} = 0\hat{\mathbf{i}} + y(2z - 1)\hat{\mathbf{j}} + z(1 - z)\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

(b) $\mathbf{u}(x, y, z) = (z - 3y^2)\hat{\mathbf{i}} + (3x - z)\hat{\mathbf{j}} + (y - 2x)\hat{\mathbf{k}}$

Divergência:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \cancel{\partial_x(z - 3y^2)}^0 + \cancel{\partial_y(3x - z)}^0 + \cancel{\partial_z(y - 2x)}^0 = 0$$

Rotacional:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{u} &= \begin{vmatrix} \partial_y & \partial_z \\ 3x - z & y - 2x \end{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} + \begin{vmatrix} \partial_z & \partial_x \\ y - 2x & z - 3y^2 \end{vmatrix} \hat{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ z - 3y^2 & 3x - z \end{vmatrix} \hat{\mathbf{k}} = \\ &= (1 + 1)\hat{\mathbf{i}} + (1 + 2)\hat{\mathbf{j}} + (3 + 6y)\hat{\mathbf{k}} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} + 3(1 + 2y)\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

Problema 10

Mostre que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é solenoidal se \mathbf{u} e \mathbf{v} são ambos irrotacionais.

Solução: Queremos saber como se comportará $\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ dado $\nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Veja que, pelo Problema 8b, $\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$.

Condição necessária? Não. Basta tomar qualquer vetor \mathbf{u} tal que $\nabla \times \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. De fato, $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ e, evidentemente, $\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{u}) = 0$. Logo $\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{u}) = 0$ não faz $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Problema 11

Se \mathbf{u} é irrotacional (ou seja, $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$), sendo $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$, mostre que $\mathbf{u} \times \mathbf{r}$ é solenoidal (um campo vetorial é dito solenoidal se seu divergente for nulo).

Solução: Pelo problema 8b, $\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{r})$. Agora vejamos:

$$\nabla \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_y & \partial_z \\ y & z \end{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} + \begin{vmatrix} \partial_z & \partial_x \\ z & x \end{vmatrix} \hat{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ x & y \end{vmatrix} \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0}$$

Daí conclui-se que $\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{r}) = 0$.

Problema 12

Defina o operador momento angular $\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z)$, onde as componentes são dadas por

$$L_x = -i(y\partial_z - z\partial_y), \quad L_y = -i(z\partial_x - x\partial_z), \quad L_z = -i(x\partial_y - y\partial_x)$$

Mostre que $\mathbf{L} = -i\mathbf{r} \times \nabla$. Mostre que $L_x L_y - L_y L_x = iL_z$, $L_z L_x - L_x L_z = iL_y$, $L_y L_z - L_z L_y = iL_x$.

- $\mathbf{L} = -i\mathbf{r} \times \nabla$:^a Tomando ∇ como um vetor a partir de suas componentes, temos que

$$\mathbf{r} \times \nabla = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ x & y & z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \end{vmatrix} = (y\partial_z - z\partial_y)\hat{\mathbf{i}} + (z\partial_x - x\partial_z)\hat{\mathbf{j}} + (x\partial_y - y\partial_x)\hat{\mathbf{k}},$$

de onde é imediato que multiplicando por $-i$ se obtém o desejado.

- Demais identidades: Note que cada uma delas é uma componente da identidade

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = (L_y L_z - L_z L_y)\hat{\mathbf{i}} + (L_z L_x - L_x L_z)\hat{\mathbf{j}} + (L_x L_y - L_y L_x)\hat{\mathbf{k}} = i\mathbf{L}.$$

Note então que se a, b, c formam uma permutação cíclica positiva/par, bastaria mostrar uma única delas e as demais seriam consequência de trocar a, b, c por permutações (pares) de x, y, z :

$$L_b L_c - L_c L_b = iL_a; \quad L_a = -i(b\partial_c - c\partial_b)$$

Então:

$$\begin{aligned} L_b L_c - L_c L_b &= \cancel{(-i)} \cancel{(-i)}^{-1} [(c\partial_a - a\partial_c)(a\partial_b - b\partial_a) - (a\partial_b - b\partial_a)(c\partial_a - a\partial_c)] \\ &= - \underbrace{c(\partial_b + a\partial_{ba} - \partial_a b\partial_a - b\partial_{aa}) + a(\partial_c a\partial_b + a\partial_{bc} - \partial_c b\partial_a - b\partial_{ac})}_{!!!} + \\ &\quad + a(\partial_b c\partial_a + c\partial_{ab} - \partial_b a\partial_c - a\partial_{cb}) - b(\partial_a c\partial_a + c\partial_{aa} - \underbrace{\partial_c}_{!!!} - a\partial_{ca}) \end{aligned}$$

Cancelando os inúmeros termos, notando que pelo teorema de Clairaut (estamos assumindo que valha o teorema para as funções nas quais o operador será aplicado) $\partial_{ij} = \partial_{ji}$, temos por fim:

$$L_b L_c - L_c L_b = (b\partial_c - c\partial_b) = iL_a$$

^aNote que $\mathbf{r} \times \nabla \neq \nabla \times \mathbf{r}$. Isso se dá porque, por exemplo, enquanto $\partial_x z$ significa "derivada parcial de z em relação a x ", $z\partial_x$ significa " z multiplicando a derivada parcial em relação a x " que ainda será aplicada ao termo que seguirá o ∂_x . Ou seja, o primeiro caso é uma derivada parcial e um segundo é um operador diferencial (a ser posteriormente aplicado).

Problema 13

A velocidade de um fluido bidimensional é dada por $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y) = u(x, y)\hat{\mathbf{i}} - v(x, y)\hat{\mathbf{j}}$. Supondo que o fluido seja incompressível (ou seja, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ e irrotacional, prove que valem as condições de Cauchy-Riemann

$$\partial_x u = \partial_y v, \quad \partial_y u = -\partial_x v$$

Solução: Sendo irrotacional, sabemos também que $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$. As duas informações podem ser sumarizadas como a seguir:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \partial_x u + \partial_y(-v) = 0 \\ (\partial_x(-v) - \partial_y u)\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \partial_x u - \partial_y v = 0 \\ (-\partial_x v - \partial_y u)\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0} \end{cases}$$

de onde procedem as condições de Cauchy-Riemann mencionadas no enunciado.

Problema 14

Sejam f, g dois campos escalares diferenciáveis. Prove que $(\nabla f) \times (\nabla g)$ é solenoidal. Use o ex. 8, letra b).

Solução: Pelo exercício 8b,

$$\nabla \cdot ((\nabla f) \times (\nabla g)) = \nabla f \cdot (\nabla \times (\nabla g)) - \nabla g \cdot (\nabla \times (\nabla f)).$$

Agora vejamos que mostrar que será solenoidal se reduzirá a mostrar que os gradientes na realidade são irrotacionais (veja que esse é o exercício 10). Podemos fazer apenas para ∇f e o outro caso será perfeitamente análogo.

- Coordenadas cartesianas:

$$\nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \partial_x f & \partial_y f & \partial_z f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_y & \partial_z \\ \partial_y f & \partial_z f \end{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} + \begin{vmatrix} \partial_z & \partial_x \\ \partial_z f & \partial_x f \end{vmatrix} \hat{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ \partial_x f & \partial_y f \end{vmatrix} \hat{\mathbf{k}}$$

Notemos que cada termo do vetor resultante é do tipo $\partial_{ij}f - \partial_{ji}f$. Dada a diferenciabilidade, podemos assumir que vale o teorema de Clairaut e então

$$\partial_{ij}f = \partial_{ji}f \Rightarrow \partial_{ij}f - \partial_{ji}f = 0$$

logo $\nabla \times (\nabla f) = 0$. Por fim, fazendo o mesmo pra ∇g :

$$\nabla \cdot ((\nabla f) \times (\nabla g)) = \nabla f \cdot \mathbf{0} - \nabla g \cdot \mathbf{0} = 0.$$

Problema 15

Prove que $\nabla \times (\phi \nabla \phi) = \mathbf{0}$, onde ϕ é um campo escalar diferenciável.

Solução: Usando o exercício 8a:

$$\nabla \times (\phi \nabla \phi) = \phi [\nabla \times (\nabla \phi)] + \nabla \phi \times \nabla \phi$$

Veja que $\nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0}$ como mostrado no exercício anterior. Ademais, note que para qualquer \mathbf{u} vale $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$. Logo o resultado será a soma de vetores nulos e, portanto, também vetor nulo.

Problema 16

Considere o conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$ e o campo vetorial

$$\mathbf{u} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{i}} + \frac{x}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{j}}$$

se $(x, y) \in S$. Mostre que $\nabla \times \mathbf{u} = 0 = \nabla \cdot \mathbf{u}$.

Divergência:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \\ &= -\frac{(x^2 + y^2) \cancel{\partial_x y}^0 - y \partial_x (x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{(x^2 + y^2) \cancel{\partial_y x}^0 - x \partial_y (x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

Rotacional: Veja que haverá somente componente em z . Então:

$$\begin{aligned} [\nabla \times \mathbf{u}]_z &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{(x^2 + y^2) \cancel{\partial_x x}^1 - x \partial_x (x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{(x^2 + y^2) \cancel{\partial_y y}^1 - y \partial_y (x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= \frac{2(x^2 + y^2) - 2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

Problema 17

Usando o item 1) a), mostre que se \mathbf{u} é um vetor constante, então $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{u}$.

Coordenadas cartesianas, sem uso de 1)a):

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \nabla \times [(u_2z - u_3y)\hat{\mathbf{i}} + (u_3x - u_1z)\hat{\mathbf{j}} + (u_1y - u_2x)\hat{\mathbf{k}}] = \nabla \times v_1\hat{\mathbf{i}} + v_2\hat{\mathbf{j}} + v_3\hat{\mathbf{k}}$$

Usando $\mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{r}$, faremos por componente:

$$[\nabla \times \mathbf{v}]_x = \partial_y v_3 - \partial_z v_2 = u_1 - (-u_1) = 2u_1$$

$$[\nabla \times \mathbf{v}]_y = \partial_z v_1 - \partial_x v_3 = u_2 - (-u_2) = 2u_2$$

$$[\nabla \times \mathbf{v}]_z = \partial_x v_2 - \partial_y v_1 = u_3 - (-u_3) = 2u_3$$

de onde temos que $\nabla \times \mathbf{v} = 2\mathbf{u}$.

Problema 18

(a) Mostre que $\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \nabla(u^2) - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$

Notação indicial, cartesiano:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})]_i &= \varepsilon_{ijk} u_j [\nabla \times \mathbf{u}]_k = \varepsilon_{ijk} u_j \varepsilon_{kmn} \partial_m u_n = (\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn}) u_j \partial_m u_n = \\
 &= \sum_{j,m,n} \left(\sum_k \underbrace{\begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jk} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kk} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}}_{1!} \right) u_j \partial_m u_n = \\
 &= 1! \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jm} & \delta_{jn} \end{vmatrix} u_j \partial_m u_n = (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) u_j \partial_m u_n = \\
 &= \delta_{im} \delta_{jn} u_j \partial_m u_n - \delta_{in} \delta_{jm} u_j \partial_m u_n = u_j \partial_i u_j - u_j \partial_j u_i.
 \end{aligned}$$

Agora note que $u_j \partial_i u_j = \frac{1}{2} \partial_i (u_j u_j) = \frac{1}{2} \partial_i (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \partial_i (u^2) = \frac{1}{2} [\nabla(u^2)]_i$. Ademais, veja que o segundo termo $u_j \partial_j u_i$ é o produto escalar $\mathbf{u} \cdot \nabla$ aplicado ao termo correspondente de \mathbf{u} . Então, na forma vetorial, podemos entender como se esse produto escalar fosse um operador aplicado em \mathbf{u} , a saber, $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$.

(b) Mostre que se o potencial magnético \mathbf{A} é dado por $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(u \nabla v - v \nabla u)$, então o campo magnético é dado por $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla u \times \nabla v$.

Solução: Usaremos os Problemas 8a, 7b e a identidade que deduzimos para resolver o Problema 14:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \left[\frac{1}{2}(u \nabla v - v \nabla u) \right] &= \frac{1}{2} \nabla \times (u \nabla v) - \frac{1}{2} \nabla \times (v \nabla u) = \\
 &= \frac{1}{2} (u [\nabla \times \nabla v] + \nabla u \times \nabla v) - \frac{1}{2} (v [\nabla \times \nabla u] + \nabla v \times \nabla u) \\
 &= \frac{1}{2} \nabla u \times \nabla v - \frac{1}{2} \nabla v \times \nabla u = \nabla u \times \nabla v
 \end{aligned}$$

Problema 19

Se o potencial eletromagnético \mathbf{A} é dado por

$$\mathbf{A} = \frac{yz}{r(x^2 + y^2)} \hat{\mathbf{i}} - \frac{xz}{r(x^2 + y^2)} \hat{\mathbf{j}},$$

calcule a indução magnética \mathbf{B} dada por $\nabla \times \mathbf{A}$.

Solução:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} &= (\partial_y A_z - \partial_z A_y) \hat{\mathbf{i}} + (\partial_z A_x - \partial_x A_z) \hat{\mathbf{j}} + (\partial_x A_y - \partial_y A_x) \hat{\mathbf{k}} = \\ &= -\partial_z A_y \hat{\mathbf{i}} + \partial_z A_x \hat{\mathbf{j}} + (\partial_x A_y - \partial_y A_x) \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

Usaremos ainda as variáveis intermediárias e suas derivadas:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow \partial_{x_i} r = \frac{x_i}{r}; \quad x_i = x, y, z$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \partial_{x_i} \rho = \begin{cases} \frac{x_i}{\rho}; & x_i = x, y \\ 0; & x_i = z \end{cases}$$

$$\rho^2 + z^2 = r^2$$

$$\partial_z A_y = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{xz}{r\rho^2} \right) = -\frac{xr\rho^2 - xz\partial_z(r\rho^2)}{(r\rho^2)^2} = \frac{x(r\partial_z\rho^2 + z\rho^2\partial_z r - r\rho^2)}{r^2\rho^4} = \frac{x(\rho^2\frac{z}{r} - r\rho^2)}{r^2\rho^4} =$$

$$= \frac{x(\frac{z}{r} - r)}{r^2\rho^2} = \frac{x(z^2 - r^2)}{r^3\rho^2} = \frac{x}{r^3} \left(\frac{z^2 - r^2}{\rho^2} \right) = -\frac{x}{r^3}$$

$$\begin{aligned} \partial_z A_x &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{yz}{r\rho^2} \right) = \frac{yr\rho^2 - yz\partial_z(r\rho^2)}{r^2\rho^4} = \frac{yr\rho^2 - yz(\frac{z}{r}\rho^2)}{r^2\rho^4} = \frac{y(r^2\rho^2 - z^2\rho^2)}{r^3\rho^4} = \frac{y(z^2 - r^2)}{r^3\rho^2} = \\ &= \frac{y}{r^3} \end{aligned}$$

$$\partial_x A_y = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{xz}{r\rho^2} \right) = -\frac{zr\rho^2 - xz(\frac{x}{r}\rho^2 + r\frac{2\rho x}{\rho^3})}{r^2\rho^4} = -\frac{zr\rho^2 - z\frac{x^2\rho^2}{r} - 2x^2rz}{r^2\rho^4} = z\frac{x^2\frac{\rho^2}{r} + 2x^2r - r\rho^2}{r^2\rho^4}$$

$$\partial_y A_x = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{yz}{r\rho^2} \right) = \frac{zr\rho^2 - yz(\frac{y}{r}\rho^2 + r\frac{2\rho y}{\rho^3})}{r^2\rho^4} = \frac{zr\rho^2 - z\frac{y^2\rho^2}{r} - 2y^2rz}{r^2\rho^4} = z\frac{r\rho^2 - \frac{y^2\rho^2}{r} - 2y^2r}{r^2\rho^4}$$

$$\partial_x A_y - \partial_y A_x = \frac{z}{r^2\rho^4} \left[\underbrace{(x^2 + y^2)}_{\rho^2} \frac{\rho^2}{r} + 2 \underbrace{(x^2 + y^2)}_{\rho^2} r - 2r\rho^2 \right] = \frac{z}{r^2\rho^2} \left[\frac{\rho^2}{r} + 2r - 2r \right] = \frac{z}{r^3}.$$

Note, por fim, que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^3}(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}) = \frac{1}{r^3}\mathbf{r} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$.