Problema 1

Calcule a área do toro descrito pela equação

$$\mathbf{r}(u,v) = ((a + b\cos u)\sin v, (a + b\cos u)\cos v, b\sin u)$$

onde $0 < b < a$ e $0 \leq u < 2\pi$, $0 \leq v < 2\pi$.

Solução: Por área entendemos a área superficial $A_S = \oiint_S dS$. Dada a parametrização, podemos encontrar o vetor de elemento de área:

$$d\mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dudv$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= (-b\sin u \sin v, -b\sin u\cos v, b\cos u) \times ((a + b\cos u)\cos v, -(a + b\cos u)\sin v, 0) = \\
&= ((a + b\cos u)b\cos u\sin v, (a + b\cos u)b\cos u\cos v, (a + b\cos u)b(\sin u\sin^2 v + \sin u\cos^2 u)) \\
&= [(a + b\cos u)b](\cos u\sin v, \cos u\cos v, \sin u),
\end{aligned}$$

logo:

$$dS = |d\mathbf{S}| = |(a + b\cos u)b| = (a + b\cos u)b$$

vejamos de imediato a independência de v. Logo a integral pode ser reduzida a:

$$\oiint_S dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (a + b\cos u)bdvdu = 2\pi b\left(2\pi a + b\int_0^{2\pi} \cos udu\right) = 4\pi^2 ab$$

Problema 2

Considere o campo vetorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z) = \mathbf{r}$. Calcule o fluxo de $\mathbf{F}$ através da esfera S^2, cuja normal no ponto $(0,1,0)$ tem segunda componente positiva.

Solução: Vejamos que a superfície é fechada e vale a pena aplicar o teorema de Gauss:

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV.$$

Como $\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{r} = 3$, o problema passa a ser *idêntico* ao Problema 1 da lista 2.5 (ver repositório).

Problema 3

Verifique o Teorema de Stokes para o campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (y,z,x)$, onde S é a porção do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ com $z \geq 0$, e $\hat{\mathbf{n}}$ é a normal com componente z não negativa.

Domínio: vejamos que o problema é facilmente expresso em coordenadas cilíndricas como sendo a superfície $z = 1 - \rho^2$, o que sugere a parametrização:

$$\mathbf{r} = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, 1-\rho^2), \quad \rho \in [0,1], \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

Integral de superfície: Façamos a integral a partir da parametrização:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} &= (\cos\varphi, \sin\varphi, -2\rho) \times (-\rho\sin\varphi, \rho\cos\varphi, 0) = (2\rho^2\cos\varphi, 2\rho^2\sin\varphi, \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi) \\ &= \rho(2\rho\cos\varphi, 2\rho\sin\varphi, 1)\end{aligned}$$

$$d\mathbf{S} = \rho(2\rho\cos\varphi, 2\rho\sin\varphi, \underbrace{1}_{>0})d\rho d\varphi$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = (\partial_y F_z - \partial_z F_y, \partial_z F_x - \partial_x F_z, \partial_x F_y - \partial_y F_x) = (0-1, 0-1, 0-1) = -(1,1,1)$$

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[2\rho^2(\sin\varphi + \cos\varphi) + \rho\right] d\rho d\varphi$$

Vejamos que é uma integral já num domínio retangular (no plano ρ, φ) e que as integrais de senos e cossenos se anulam no período inteiro. Desse modo, resta apenas:

$$-\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho d\rho d\varphi = -\pi.$$

Integral de linha: tomaremos, ao invés da integral dupla, a integral de linha:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

no contorno circunferencial parametrizado por (note $\rho = 1$ quando $z = 0$):

$$\mathbf{r} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \quad \varphi \in [0, 2\pi) \;\Rightarrow\; d\mathbf{r} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)d\varphi$$

então:

$$\mathbf{F} = (\sin\varphi, 0, \cos\varphi)$$

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi = -\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right) d\varphi = -\pi.$$

Teorema de Stokes: verificou-se que:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Problema 4

Dados $\mathbf{r} = (x, y, z)$ e $\mathbf{u} \times \mathbf{r} = (P, Q, R)$, onde $\mathbf{u}$ é um vetor constante, mostre que

$$\int_C (P, Q, R) \cdot d\mathbf{r} = 2 \iint_S \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS,$$

onde $C = \partial S$ e $\hat{\mathbf{n}}$ é a normal à superfície S.

Solução: usaremos o Teorema de Stokes:

$$\int_C (P, Q, R) \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

Mas, pelo Problema 17 da lista 1 (ver repositório):

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{u},$$

logo:

$$\int_C (P, Q, R) \cdot d\mathbf{r} = 2 \iint_S \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = 2 \iint_S \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

Problema 5

Mostrar que $\iint_S (f\partial_n g - g\partial_n f) dS = \iiint_V (f\nabla^2 g - g\nabla^2 g) dV$

Solução: Veja que a notação $\partial_n \phi = \frac{\partial \phi}{\partial n}$ representa a derivada direcional do campo escalar na direção $\hat{\mathbf{n}}$ *normal* à superfície, o que pode ser expresso por $\partial_n \phi = \nabla\phi \cdot \hat{\mathbf{n}}$. Então:

$$\iint_S (f\partial_n g - g\partial_n f) dS = \iint_S (f\nabla g - g\nabla f) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iint_S (f\nabla g - g\nabla f) \cdot d\mathbf{S}$$

Usaremos a propriedade mostrada a seguir:

$$\nabla \cdot (\phi\mathbf{u}) = \partial_i (\phi\mathbf{u})_i = \partial_i \phi u_i = \phi\partial_i u_i + u_i \partial_i \phi = \phi\nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla\phi,$$

o teorema de Gauss e a definição de Laplaciano $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$:

$$\begin{aligned}
\iint_S (f\nabla g - g\nabla f) \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_V \nabla \cdot (f\nabla g - g\nabla f) dV \\
&= \iiint_V (\cancel{\nabla f \cdot \nabla g} + f\nabla^2 g - \cancel{\nabla f \cdot \nabla g} - g\nabla^2 f) = \\
&= \iiint_V (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f) dV
\end{aligned}$$

Problema 6

$\iint_S (f\partial_n g)dS = \iint_s (g\partial_n f)dS$, se f, g forem harmônicas.

Solução: Basta usar o exercício anterior e a definição de que se ϕ é harmônica, $\nabla^2\phi = 0$.

$$\iint_S (f\partial_n g - g\partial_n f)dS = \iint_S (f\partial_n g)dS - \iint_S (g\partial_n f)dS = \iiint_V (f\cancelto{0}{\nabla^2 g} - g\cancelto{0}{\nabla^2 f})dV = 0$$

Problema 7

Calcule o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $\mathbf{F}(x, y, z) = (x - y - 4, y, z)$, através do hemisfério norte de uma esfera.

Solução: Chamando $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \Phi$ e usando Teorema de Gauss na região que inclui a tampa da casca hemisférica:

$$\underset{\text{com tampa}}{\oiint} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \underset{\text{sem tampa}}{\oiint} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \underset{\text{tampa}}{\oiint} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \Phi + \underset{\text{tampa}}{\oiint} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

mas:

$$\underset{\text{com tampa}}{\oiint} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = 3 \iiint_V dV = 3V = 2\pi R^3 \quad \left(V = \frac{2}{3}\pi R^3\right)$$

restou agora a integral na tampa. Para parametrização, notando que $z = 0$ e que o vetor normal aponta para fora, para baixo:

$$\mathbf{F} = (x - y - 4, y, 0)$$

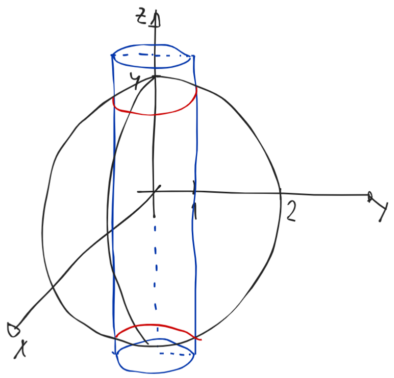
$$d\mathbf{S} = -\hat{\mathbf{k}}dA = (0, 0, -1)dA$$

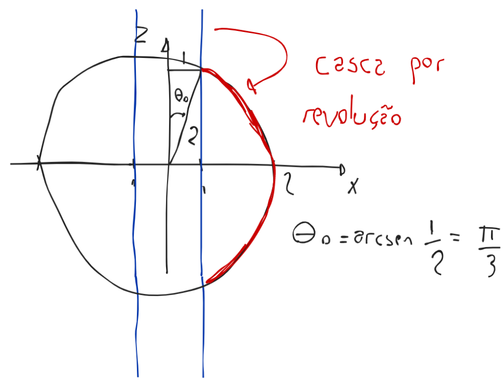
$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Problema 8

Calcule $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F} = (0, 0, -1)$ e S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ fora do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, com $\hat{\mathbf{n}}$ sendo o vetor normal apontado para fora da esfera.

Domínio: o domínio não é tão facilmente descrito e será, portanto, ilustrado:





em que se espera agora que você se convença que a seguinte parametrização descreve a casca desejada (note que é a descrição da superfície de uma esfera, ou seja, fixar raio $r = 2$ e limitar o intervalo do ângulo zenital, que não vai até os extremos):

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = (2\sin\theta\cos\varphi, 2\sin\theta\sin\varphi, 2\cos\theta), \quad \theta \in [\pi/3, 2\pi/3], \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Solução: A partir da parametrização:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} &= 4(\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta) \times (-\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, 0) = \\
&= 4(\sin^2\theta\cos\varphi, \sin^2\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi + \sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi) = \\
&= 4\sin\theta(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) = (2^2)\sin\theta\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}},
\end{aligned}$$

o que confirma o enunciado que menciona o vetor normal ser na direção radial. Note que o vetor acima (em três componentes) está em coordenadas esféricas (ou seja, em funções de linhas coordenadas esféricas) mas na *base* cartesiana, então podemos tomar o produto escalar como usual (para comparação, o vetor acima na base esférica é $4\sin\theta(1, 0, 0)_{\hat{\mathbf{e}_r}, \hat{\mathbf{e}_\theta}, \hat{\mathbf{e}_\phi}}$):

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -4\sin\theta\cos\theta d\theta d\varphi = -2\sin 2\theta d\theta d\varphi$$

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} -2\sin 2\theta d\theta d\varphi = \left[\int_0^{2\pi} d\varphi\right] \left[\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} -2\sin 2\theta d\theta\right] = 2\pi \left[\cos 2\theta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Problema 9

Problema 10

Um campo escalar ϕ satisfaz $|\nabla\phi| = 4\phi$ e $\nabla \cdot (\phi\nabla\phi) = 10\phi$. Calcule $\iint_S \partial_n \phi dS$, onde S é a esfera S^2, n é a coordenada normal à esfera e $\partial_n\phi = \nabla\phi \cdot \hat{\mathbf{n}}$.

Solução: usaremos a identidade (mnemônicamente deduzida em notação de Einstein e para coordenadas cartesianas):

$$\nabla \cdot (\phi\nabla\phi) = \partial_i(\phi\partial_i\phi) = \partial_i\phi\partial_i\phi + \phi\partial_i\partial_i\phi = \nabla\phi \cdot \nabla\phi + \nabla^2\phi = |\nabla\phi|^2 + \nabla^2\phi = 16\phi^2 + \nabla^2\phi$$

$$10\phi = 16\phi^2 + \nabla^2\phi \;\Rightarrow\; \nabla^2\phi = 10\phi - 16\phi^2.$$

Usando teorema de Gauss e a definição dada:

$$\iint_S \partial_n\phi dS = \iint_S \nabla\phi \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \nabla\phi dV = \iiint_V \nabla^2\phi dV = \iiint_V (10\phi - 16\phi^2) dV,$$

e não nos é dada mais informação para que a integral tripla possa ser feita. Entretanto, vale notar que todos os operadores diferenciais foram eliminador e o problema se reduziu de Cálculo Vetorial para Cálculo de Várias Variáveis.

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14