Problema 1

Considere o campo vetorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $\mathbf{F}(x, y, z) = (x - y, x + y, z)$. Calcule o fluxo de $\mathbf{F}$ através da esfera S^2, cuja normal no ponto (0,1,0) tem segunda componente positiva.

Solução: imaginemos que saibamos o domínio (ainda não sabemos). Como o campo vetorial é polinomial, é contínuo e definido em qualquer lugar de $\mathbb{R}^3$. Podemos aplicar teorema de Gauss:

$$\Phi = \iint_{\text{superfície}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\text{volume}} \nabla \cdot \mathbf{F} dV$$

Vejamos que o campo dado é tal que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 3$ e independe em geral da localização da esfera. De fato:

$$\iiint_{\text{volume}} \nabla \cdot \mathbf{F} dV = 3 \iiint_{\text{volume}} dV = 4\pi R^3$$

é função exclusivamente do raio da esfera. Basta sabermos agora qual o valor de raio satisfaz o proposto.

Determinação do domínio: usaremos a notação de 2-esfera dada pelo enunciado. A questão, agora, é localizá-la no espaço. Vejamos que uma esfera com raio R e centro em $(x, y, z) = (a, b, c)$ teria equação dada por:

$$\phi(x, y, z) = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - R^2 = 0.$$

O vetor normal a essa superfície pode ser encontrado pelo gradiente:

$$\mathbf{n}(x, y, z) = \nabla\phi(x, y, z) = (2(x - a), 2(y - b), 2(z - c))$$

No ponto dado:

$$\mathbf{n}(0, 1, 0) = (-2a, 2(1 - b), -2c) = (-2a, \alpha, -2c) \qquad \alpha > 0$$

então sabemos que $b < 1$. Outra informação dada (implicitamente) é que $(0, 1, 0)$ pertence à esfera, logo:

$$a^2 + (1 - b)^2 + c^2 = R^2$$

Então:

$$\Phi = 4\pi \left[a^2 + (1 - b)^2 + c^2\right]^{\frac{3}{2}}$$

para escolhas de a, c livres e $b < 1$.

Problema 2

O escoamento de um fluido, de densidade $\rho = 10\ kg/m^3$, possui velocidade

$$\mathbf{v} = (-y, x, 2z)\ [m/s] \qquad (x, y, z)\ [m]$$

Determine a vazão de tal escoamento através da esfera de raio 5 m.

Solução: pela definição de vazão *mássica* $\dot{m} = \iint_{\partial V} \rho\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ e notando que o escoamento é sempre bem-definido em $\mathbb{R}^3$, o que nos permite o usar o teorema de Gauss:

$$\dot{m} = \iint_{\partial V} \rho\mathbf{v} = \iiint_V \rho\nabla \cdot \mathbf{v} dV,$$

podemos calcular agora a divergência: $\nabla \cdot \mathbf{v} = 2\ [1/s]$ e então:

$$\dot{m} = 20\ [kg/(m^3.s)] \times \iiint_V dV = 20\ [kg/(m^3.s)] \times \frac{4}{3}\pi R^3 = 3333.\bar{3}\pi\ [kg/s].$$

Problema 3

Calcule o fluxo $\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$, onde $\mathbf{F} = (x, 2y, 3z)$, onde S é a superfície do cubo com vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.

Solução: vejamos que o problema é numa região fechada e o campo vetorial está bem definido. Logo podemos calcular por Teorema de Gauss:

$$\Phi = \iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iiint_V (1 + 2 + 3) dV = 6 \iiint_V dV = 6V = 48.$$

Problema 4

Calcule o fluxo $\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$, onde $\mathbf{F} = (0, y, -z)$, onde S é formado pela união do parabolóide $y = x^2 + z^2, 0 \leq y \leq 1$ com sua tampa (que é o círculo $x^2 + z^2 \leq 1, y = 1$).

Solução: vejamos que o problema é numa região fechada e o campo vetorial está bem definido. Logo podemos calcular por Teorema de Gauss:

$$\Phi = \iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iiint_V (0 + 1 - 1) d = \iiint_V 0 dV = 0.$$

Problema 5

Dada a temperatura $u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, de uma casca hemisférica metálica S, calcule o fluxo de calor através de S.

Integral de superfície: o domínio não está completamente especificado, mas suporemos se tratar da casca hemisférica formada pela divisão da esfera de raio arbitrário R centrada na origem pelo plano xy e com a casca da parte com $z > 0$. Note que o problema tem simetria radial: se a casca não está na disposição descrita acima, basta rotacionar os eixos até que esteja.

Podemos parametrizar então a superfície em coordenadas esféricas (na base cartesiana) por:

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = R(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta), \quad \theta \in [0, \pi/2], \quad \phi \in [0, 2\pi)$$

Então poderíamos encontrar o elemento vetorial de superfície por:

$$d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}} dS = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right) d\theta d\phi.$$

Não faremos esse cálculo, mas caso faça, deverá verificar que o vetor encontrado é $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{r}} R^2 \sin\theta d\theta d\phi$. De fato, não é difícil ver que o vetor unitário radial é o vetor normal à casca em todo lugar (apontado para *fora*) e nossa parametrização deve refletir isso. O que poderia surpreender é o aparecimento do fator de escala de área $R^2 \sin\theta$.

O campo escalar é facilmente expresso por $u(r, \theta, \phi) = r^2$ nesse sistema de coordenadas. Seu gradiente (direto em coordendas esféricas) e depois voltando para cartesianas é dado por:

$$\nabla u = \left(\frac{1}{1}\partial_r r^2, \cancelto{0}{\frac{1}{r}\partial_\theta r^2}, \cancelto{0}{\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi r^2} \right)_{\hat{\mathbf{r}}, \hat{\theta}, \hat{\phi}} = (2r, 0, 0)_{\hat{\mathbf{r}}, \hat{\theta}, \hat{\phi}} = 2r(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)_{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}}$$

O fluxo de calor é então calculado por:

$$\begin{aligned}
\Phi = \iint_{\partial V} \nabla u(r = R) \cdot d\mathbf{S} &= 2R^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta \right] \sin\theta d\theta d\phi \\
&= 2R^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin^2\theta + \cos^2\theta \right] \sin\theta d\theta d\phi = 2R^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta d\phi \\
&= 8\pi R^3.
\end{aligned}$$

Teorema de Gauss: vejamos a simplicidade do uso do Teorema de Gauss (ou Divergência). Primeiro vamos calcular a divergência de ∇u em coordenadas esféricas (base esférica):

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \nabla u &= \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[\partial_r((\nabla u)_r r^2 \sin\theta) + \partial_\theta(\cancelto{0}{(\nabla u)_\theta} r \sin\theta) + \partial_\phi(\cancelto{0}{(\nabla u)_\phi} r) \right] = \\
&= \partial_r\left((\nabla u)_r\right) + \frac{2}{r}(\nabla u)_r = 2 + \frac{2}{r}(2r) = 6.
\end{aligned}$$

Agora notemos que a casca do domínio é a mesma coisa que a região fechada que contém a tampa subtraído da tampa. ou seja:

$$\oiint_{\text{com tampa}} \nabla u \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\text{sem tampa}} \nabla u \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\text{tampa}} \nabla u \cdot d\mathbf{S} = \Phi + \iint_{\text{tampa}} \nabla u \cdot d\mathbf{S}.$$

A integral da região fechada admite teorema de Gauss:

$$\oiint_{\text{com tampa}} \nabla u \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \nabla u dV = 2V = 8\pi R^3.$$

Já na própria tampa, localizada no plano $z = 0$, notemos que o vetor gradiente aponta na direção radial no próprio plano xy e notando que a parametrização da tampa leva a um vetor normal apontado para z negativo, com elemento de área igual ao de coordenadas polares:

$$d\mathbf{S}_{\text{tampa}} = -\mathbf{k} d\rho d\theta,$$

concluímos que a integral será identicamente zero (caso queira, faça os cálculos). Disso, concluímos o mesmo resultado anterior: $\Phi = 8\pi R^3$

Nota: na realidade, deveríamos ter usado a Lei de Fourier: $\Phi = \iint_S (-k\nabla u) \cdot d\mathbf{S}$. Entretanto, basta multiplicar o resultado final por $-k$.

Problema 6

Calcule $\iint_S x^2 z^2 dS$, onde S é a superfície do cone $3z^2 = x^2 + y^2$, que está entre os planos z = 1 e z = 3.

Solução: O problema se presta naturalmente às coordenadas cilíndricas. A superfície do cone descreve a equação:

$$3z^2 = \rho^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{3}z$$

em que já consideramos o sinal da medida radial como positivo e z é positivo devido ao intervalo dado. Parametrizando então em termos da compoente axial:

$$\mathbf{r}(\phi, z) = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, z) = (\sqrt{3}z\cos\phi, \sqrt{3}z\sin\phi, z)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} &= (-\sqrt{3}z\sin\phi, \sqrt{3}z\cos\phi, z) \times (\sqrt{3}\cos\phi, \sqrt{3}\sin\phi, 1) = \\ &= (\sqrt{3}z(\cos\phi - \sin\phi), \sqrt{3}z(\cos\phi + \sin\phi), -3z)\end{aligned}$$

$$dS = |(\sqrt{3}z(\cos\phi - \sin\phi), \sqrt{3}z(\cos\phi + \sin\phi), -3z)| d\phi dz = \sqrt{15} z d\phi dz$$

$$x^2 z^2 = 3z^4 \cos^2\phi$$

$$\iint_S x^2 z^2 dS = 3\sqrt{15} \int_1^3 \int_0^{2\pi} z^5 \cos^2\phi d\phi dz = 364\sqrt{15}\pi$$

Problema 7

Calcule $\iint_S (x^2 z + y^2 z) dS$, onde S é o hemisférico de raio 2, $z \geq 0$.

Solução: Vejamos que a integral é uma região aberta, mas também quando $z = 0$ o campo escalar é nulo, logo podemos tomar a versão de campo escalar do Teorema de Gauss para a casca hemisférica adicionada à tampa de baixo (que não contribui pro resultado, de todo modo). Seja $\hat{\mathbf{n}}$ o vetor normal à superfície integrada.

Tomaremos $u = x^2 z + y^2 z = u(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}})$. Na integral:

$$\iint_S u dS = \iint_S (u\hat{\mathbf{n}}) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V [\nabla \cdot (u\hat{\mathbf{n}})] dV = \iiint_V \underbrace{[\nabla u \cdot \hat{\mathbf{n}} + u \nabla \cdot \hat{\mathbf{n}}]}_{\text{ver lista 1}} dV,$$

calcularemos primeiro a divergência, notando que o vetor normal para o caso esférico é simplesmente o vetor radial normalizado (coordenadas esféricas, base esférica):

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}} = \nabla \cdot \hat{\mathbf{r}} = \nabla \cdot (1, 0, 0)_{\hat{\mathbf{r}}, \hat{\theta}, \hat{\phi}} = 0,$$

então, retornando à integral:

$$\iint_S u dS = \iiint_V \nabla u \cdot \hat{\mathbf{r}} dV = \iiint_V (\nabla u)_r dV,$$

para calcularmos a componente radial do gradiente do campo, vejamos que em coordenadas esféricas:

$$u(x, y, z) = (x^2 + y^2) z \;\Rightarrow\; u(r, \theta, \phi) = r^3 \sin^2\theta \cos\theta,$$

$$(\nabla u)_r = \frac{1}{1} \partial_r u = 3r^2 \sin^2\theta \cos\theta,$$

por fim:

$$\iint_S u dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^2 3r^2 \sin^2\theta \cos\theta \underbrace{(r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi)}_{dV}$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^2 3r^4 \sin^3\theta \cos\theta dr d\theta d\phi = \frac{48}{5}\pi$$

Problema 8

Calcule $\iint_S (x^2y + z^2)dS$, onde S é a parte do cilindro $x^2 + y^2 = 9$, entre os planos $z = 0$ e $z = 2$.

Solução: Usando coordenadas cilíndricas:

$$\mathbf{r} = (3\cos\phi, 3\sin\phi, z), \quad \phi \in [0, 2\pi) \quad z \in [0, 2]$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = (-3\sin\phi, 3\cos\phi, z) \times (0, 0, 1) = (3\cos\phi, 3\sin\phi, 0) = 3\hat{\rho}$$

$$d\mathbf{S} = 3\hat{\rho}d\phi dz \;\Rightarrow\; dS = 3d\phi dz$$

$$u(x, y, z) = x^2y + z^2 \;\Rightarrow\; u(\rho, \phi, z) = 27\cos^2\phi\sin\phi + z^2$$

$$\iint_S udS = 3\int_0^2 \int_0^{2\pi} (27\cos^2\phi\sin\phi + z^2)d\phi dz = 16\pi$$

Problema 9

Determine a massa de um funil fino com o formato de um cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}, 1 \leq z \leq 4$, se sua função densidade é $\rho(x, y, z) = 10 - z$

Solução: Notando que o formato do cone em coordenadas cilíndricas é $z = r$ e parametrizando:

$$\mathbf{r} = (z\cos\phi, z\sin\phi, z), \quad \phi \in [0, 2pi), \quad z \in [1, 4],$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = (-z\sin\phi, z\cos\phi, 0) \times (\cos\phi, \sin\phi, 1) = (z\cos\phi, z\sin\phi, -z),$$

$$d\mathbf{S} = (\cos\phi, \sin\phi, -1)zd\phi dz.$$

Para calcular a massa usaremos $m = \iint_S \rho dS$. Temos então:

$$dS = |d\mathbf{S}| = \sqrt{2}zd\phi dz,$$

logo:

$$m = \sqrt{2}\int_1^4 \int_0^{2\pi} (10 - z)zd\phi dz = 108\pi\sqrt{2}$$

Problema 10

Calcule $\iint_S \sqrt{1+x^2+y^2}dS$, onde S é o helicoide

$$\mathbf{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v), \quad u \in [0,1] \quad v \in [0,\pi]$$

Solução: dada a parametrização acima, tomamos:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (\cos v, \sin v, 0) \times (-u\sin v, u\cos v, 1) = (\sin v, -\cos v, u),$$

$$d\mathbf{S} = |(\sin v, -\cos v, u)|dudv = \sqrt{1+u^2}dudv.$$

Notemos ainda que o próprio campo escalar é dado por $\phi = \sqrt{1+x^2+y^2} = \sqrt{1+u^2}$. Logo a integral é bastante simplificada para:

$$\iint_S \phi dS = \int_0^\pi \int_0^1 (1+u^2)dudv = \frac{4}{3}\pi$$