Problema 1

Calcule $\nabla\phi$, $(\nabla\phi)^2 = \nabla\phi\cdot\nabla\phi = ||\nabla\phi||^2$ e $D_{\hat{\mathbf{v}}}\phi$ dos campos escalares.

Procedimentos para solução: Dado o gabarito, não iremos aqui resolver o passo-a-passo (isso pode ser facilmente obtido pelo . Entretanto, um guia geral para a solução será fornecido:

- $\nabla\phi$ (gradiente): o vetor gradiente no presente problema é em coordenadas cartesianas, então pode ser calculado por[a]:

$$\nabla\phi = \partial_x\phi\hat{\mathbf{i}} + \partial_y\phi\hat{\mathbf{j}} + \partial_z\phi\hat{\mathbf{k}}$$

  e, caso o campo escalar seja em apenas duas coordenadas, basta ignorar o termo remanescente.

- $(\nabla\phi)^2 = \nabla\phi\cdot\nabla\phi = ||\nabla\phi||^2$ (norma ao quadrado do gradiente)[b]: o gradiente é um vetor e pode ter sua norma calculada como um:

$$(\nabla\phi)^2 = (\partial_x\phi)^2 + (\partial_y\phi)^2 + (\partial_z\phi)^2$$

- $D_{\mathbf{v}}\phi$ (derivada direcional): pode ser calculada pelo produto escalar do gradiente pelo vetor *normalizado* que representa a direção desejada (assumindo que seja diferenciável):

$$D_{\mathbf{v}}\phi = \nabla\phi\cdot\hat{\mathbf{v}} = \nabla\phi\cdot\frac{1}{||\mathbf{v}||}\mathbf{v}$$

[a] Aqui será usada a notação $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$

[b] Não confundir com o *Laplaciano*, cuja notação para um campo escalar é $\nabla^2\phi$ e seu valor é uma soma das derivadas segundas $\nabla^2\phi = \partial_{xx}\phi + \partial_{yy}\phi + \partial_{zz}\phi$

Problema 2

Mostre que $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\mathbf{r}$, onde $\mathbf{r} = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$.

Ver lista 1 do Roldão (repositório).

Problema 3

Mostre que:

(a) $\nabla\times(\phi\mathbf{v}) = \phi\nabla\times\mathbf{v} + (\nabla\phi)\times\mathbf{v}$

(b) $\nabla\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot(\nabla\times\mathbf{u}) - \mathbf{u}\cdot(\nabla\times\mathbf{v})$

Ver lista 1 do Roldão (repositório).

Problema 4

Calcule o Laplaciano das seguintes Funções:

(a) $\phi = \arctan(y/x), \quad x \neq 0$

(b) $\phi = xy$

(c) $\phi = \ln(x^2 + y^2)$

(d) $\phi = e^{x^2-y^2} = \exp(x^2 - y^2)$

Procedimentos para solução: Note que as funções são da forma $f = f(u)$ com $u = u(x, y)$. Então temos as derivadas, por regra da cadeia e regras de derivação:

$$
\begin{aligned}
\partial_x f &= \frac{\partial f}{\partial_x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{df}{du} = f'\partial_x u \\
\partial_y f &= \frac{\partial f}{\partial_y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{df}{du} = f'\partial_y u \\
\partial_{xx} f &= \frac{\partial}{\partial_x}\frac{\partial f}{\partial_x} = \partial_x(f'\partial_x u) = \partial_x(f')\partial_x u + f'\partial_x(\partial_x u) = f''(\partial_x u)^2 + f'\partial_{xx} u \\
\partial_{yy} f &= \frac{\partial}{\partial_y}\frac{\partial f}{\partial_y} = \partial_y(f'\partial_y u) = \partial_y(f')\partial_y u + f'\partial_y(\partial_y u) = f''(\partial_y u)^2 + f'\partial_{yy} u \\
\partial_{yx} f &= \partial_x(\partial_y f) = \partial_x(f'\partial_y u) = (\partial_x f')(\partial_y u) + f'\partial_x(\partial_y)u = f''(\partial_x u)(\partial_y u) + \partial_{yx} u.
\end{aligned}
$$

Espera-se que $\partial_{yx} = \partial_{xy}$ por continuidade (teorema de Clairaut). Ademais note que para esse tipo de função:

$$\nabla^2 u = \Delta u = \partial_{xx} f + \partial_{yy} f = [(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2]f'' + [\nabla^2 u]f'.$$

e os campos escalares do enunciado podem ser entendidas como:

(a) $\phi = \arctan u, \quad u = y/x \quad x \neq 0$

(b) $\phi = u \quad u = xy$ (nesse caso o uso da variável intermediária é redundante, pois note que $f' = 1$, $f'' = 0$ e $\nabla^2 u$ é precisamente o que queremos calcular)

(c) $\phi = \ln u \quad u = x^2 = y^2$

(d) $\phi = \exp u \quad u = x^2 - y^2$

Por fim, ressalta-se que não é necessário usar a variável intermediária em nenhum dos casos. É provável que, em muitos casos, simplifique a solução.

Problema 5

Seja $\phi = \phi(x^2 + y^2)$, onde $\phi(u)$ é uma função de uma variável real derivável até 2ª ordem ($u = x^2 + y^2$). Suponha que $\Delta\phi = \nabla^2\phi = 0$. Mostre que $u\phi''(u) = -\phi'(u)$.

Solução: Veja pela discussão do exercício anterior que

$$\nabla^2 u = \Delta u = \partial_{xx}\phi + \partial_{yy}\phi = [(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2]\phi'' + [\nabla^2 u]\phi',$$

temos no presente exercício que $u = x^2 + y^2$. Logo

$$\partial_x u = 2x; \quad \partial_y u = 2y \Rightarrow [(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2] = (4x^2 + 4y^2) = 4u; \quad \nabla^2 u = 2 + 2 = 4$$

$$0 = [(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2]\phi'' + [\nabla^2 u]\phi' = 4u\phi'' + 4\phi'$$

de onde temos então que $u\phi''(u) = -\phi'(u)$.

Problema 6

Mostre que $\nabla^2(\phi\psi) = \phi\nabla^2\psi + 2(\nabla\phi \cdot \nabla\psi) + \phi\nabla^2\phi$.

Solução: Usando regra do produto, veja que:

$$\partial_x(\phi\psi) = \phi\partial_x\psi + \psi\partial_x\phi$$

$$\partial_y(\phi\psi) = \phi\partial_y\psi + \psi\partial_y\phi$$

$$\partial_z(\phi\psi) = \phi\partial_z\psi + \psi\partial_z\phi$$

$$\partial_{xx}(\phi\psi) = (\partial_x\phi)(\partial_x\psi) + \phi\partial_{xx}\psi + (\partial_x\psi)(\partial_x\phi) + \psi\partial_{xx}\phi = \phi\partial_{xx}\psi + 2(\partial_x\phi)(\partial_x\psi) + \psi\partial_{xx}\phi$$

$$\partial_{yy}(\phi\psi) = (\partial_y\phi)(\partial_y\psi) + \phi\partial_{yy}\psi + (\partial_y\psi)(\partial_y\phi) + \psi\partial_{yy}\phi = \phi\partial_{yy}\psi + 2(\partial_y\phi)(\partial_y\psi) + \psi\partial_{yy}\phi$$

$$\partial_{zz}(\phi\psi) = (\partial_z\phi)(\partial_z\psi) + \phi\partial_{zz}\psi + (\partial_z\psi)(\partial_z\phi) + \psi\partial_{zz}\phi = \phi\partial_{zz}\psi + 2(\partial_z\phi)(\partial_z\psi) + \psi\partial_{zz}\phi$$

Por fim basta somar:

$$\nabla^2(\phi\psi) = \phi_{xx}(\phi\psi) + \phi_{yy}(\phi\psi) + \phi_{zz}(\phi\psi),$$

notando que:

$$\begin{aligned} 2[(\partial_x\phi)(\partial_x\psi) + (\partial_y\phi)(\partial_y\psi) + (\partial_z\phi)(\partial_z\psi)] &= 2[(\partial_x\phi\hat{\mathbf{i}} + \partial_y\phi\hat{\mathbf{j}} + \partial_z\phi\hat{\mathbf{k}}) \cdot (\partial_x\psi\hat{\mathbf{i}} + \partial_y\psi\hat{\mathbf{j}} + \partial_z\psi\hat{\mathbf{k}})] \\ &= 2(\nabla\phi \cdot \nabla\psi) \end{aligned}$$

Problema 7

Calcule $\nabla \cdot \mathbf{w}$ e $\nabla \times \mathbf{w}$ para dados campos vetoriais.

Indicação de solução: Os exercícios possuem gabarito, portanto, será apenas indicado como realizar as operações em coordenadas cartesianas:

- $\nabla \cdot \mathbf{w}$ (divergência): $\nabla \cdot \mathbf{w} = \partial_x w_1 + \partial_y w_2 + \partial_z w_3$
- $\nabla \times \mathbf{w}$ (rotacional)[a]:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{w} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{i}} \begin{vmatrix} \partial_y & \partial_z \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - \hat{\mathbf{j}} \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_z \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + \hat{\mathbf{k}} \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} = \\ &= (\partial_y w_3 - \partial_z w_2)\hat{\mathbf{i}} + (\partial_z w_1 - \partial_x w_3)\hat{\mathbf{j}} + (\partial_x w_2 - \partial_y w_1)\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

[a] Note que a notação de determinante é um mnemônico e que um operador do tipo ∂_x sempre "multiplicará à esquerda" de modo que, por exemplo, $\partial_x w_2$ seja lido como "derivada parcial de w_2 em relação a x".

Problema 8

Mostre que:

(a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é solenoidal ($\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são ambos irrotacionais.

(b) $\mathbf{u} \times \mathbf{r}$ é solenoidal ($\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$) se $\mathbf{u}$ é irrotacional.

Ver lista 1 Roldão (repositório).

Problema 9

O operador de momento angular é $\mathbf{L} = L_x\hat{\mathbf{i}} + L_y\hat{\mathbf{j}} + L_z\hat{\mathbf{k}}$, onde

$$L_x = -i(y\partial_z - z\partial_y)$$

$$L_y = -i(z\partial_x - x\partial_z)$$

$$L_z = -i(x\partial_y - y\partial_x)$$

Mostre que (veja que todas essas conclusões se encontram aqui e são uma sequência de exercícios do Griffiths):

(a) $\mathbf{L} = -i\mathbf{r} \times \nabla$: ver Lista 1 do Roldão (repositório).

(b) $[L_i, L_j] = i\varepsilon_{ijk}L_k$: também foi feito na Lista 1 do Roldão, porém ao invés de usar o símbolo de Levi-Civita foi feito um comentário sobre "permutações pares" dos índices. Pela definição do símbolo, basta ver que se trata da exata mesma coisa (no enunciado, está sendo feita soma de Einstein).

(c) $[L_i, \mathbf{L}^2]$: note que $\mathbf{L}^2$ corresponde à "norma ao quadrado" do vetor $\mathbf{L}$. Ou seja, $\mathbf{L}^2 = L^2 = (L_x)^2 + (L_y)^2 + (L_z)^2$ e o operador ao quadrado representa a aplicação consecutiva (2 vezes) desse operador. Pela definição $[L_i, L_j] = L_iL_j - L_jL_i$:

$$[L_i, L^2] = [L_i, (L_x)^2 + (L_y)^2 + (L_z)^2]$$

Mas veja que:

$$\begin{aligned}[A, B + C] = A(B + C) - (B + C)A = AB + AC - BA - CA = \\ = (AB - BA) + (AC - CA) = [A, B] + [A, C]\end{aligned}$$

ou seja, o operador "distribui"para somas. Logo

$$[L_i, L^2] = [L_i, (L_x)^2 + (L_y)^2 + (L_z)^2] = [L_i, (L_x)^2] + [L_i, (L_y)^2] + [L_i, (L_z)^2]$$

Agora usaremos outras duas propriedades:

$$[A, B] = AB - BA = -(BA - AB) = -[B, A]$$

E outra, para três operadores, usando também o fato de que o operador momento angular calha de ser associativo (pois a derivação parcial é associativa, em especial devido ao):

$$\begin{aligned}[AB, C] &= (AB)C - C(AB) = (AB)C - C(AB) + (AC)B - (AC)B = \\ &= [(AB)C - (AC)B] + [(AC)B - C(AB)] = \\ &= [A(BC) - A(CB)] + [(AC)B - (CA)B] = \\ &= A\underbrace{[BC - CB]}_{[B,C]} + \underbrace{[AC - CA]}_{[A,C]}B = \\ &= A[B, C] + [A, C]B\end{aligned}$$

Por fim, para cada termo da norma (aqui *não* está sendo feita soma de Einstein, os somatórios são explicitados):

$$[L_i,(L_j)^2] = [L_i, L_jL_j] = -[L_jL_j, L_i] = -(L_j[L_j,L_i] + [L_j,L_i]L_j) =$$
$$= -\sum_k [L_j(i\varepsilon_{jik}L_k) + (i\varepsilon_{jik}L_k)L_j] = -i\sum_k \varepsilon_{jik}(L_jL_k + L_kL_j),$$

somando:

$$[L_i,\mathbf{L}^2] = [L_i,(L_x)^2] + [L_i,(L_y)^2] + [L_i,(L_z)^2] = \sum_j [L_i,(L_j)^2] = -i\sum_{j,k}\varepsilon_{jik}(L_jL_k + L_kL_j)$$
$$= -i\sum_{j,k}(\varepsilon_{jik}L_jL_k + \underbrace{\varepsilon_{jik}}_{\text{permutar j e k (ímpar)}}L_kL_j) = -i\sum_{j,k}(\varepsilon_{jik}L_jL_k - \underbrace{\varepsilon_{kij}L_kL_j}_{\text{renomear } j \Leftrightarrow k}) =$$
$$= -i\sum_{j,k}\varepsilon_{jik}\cancelto{0}{(L_jL_k - L_jL_k)} = 0$$

Problema 10

Mostre que ($\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são vetores constantes)

(a) $\nabla \times (\phi \nabla \phi) = 0$

(b) $(\nabla \phi) \times (\nabla \psi)$ é campo vetorial solenoidal, ou seja, é a mesma coisa que a letra e)

(c) $\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{a}$

(d) $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{v}^2) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$

(e) Repetido, ver letra b)

Todos os itens acima foram feitos na lista 1 do Roldão (ver repositório).

(f) $\nabla \cdot ((\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b}) = -2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$

$$\nabla \cdot ((\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b}) = -\nabla \cdot (\underbrace{\mathbf{b}}_{A} \times (\underbrace{\mathbf{r}}_{B} \times \underbrace{\mathbf{a}}_{C})) = -\nabla \cdot \underbrace{[\mathbf{r}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})]}_{BAC-CAB} =$$

$$= -[(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\cancelto{3}{\nabla \cdot \mathbf{r}} - \nabla \cdot (\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}))] = -[3(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot \nabla(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}) + \cancelto{0}{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})\nabla \cdot \mathbf{a}}] =$$
$$= -3(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \mathbf{a} \cdot \nabla(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})$$

Note que por regra do produto (aplicado ao produto escalar), cada derivada parcial é dada por

$$\partial_i(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{b} \cdot \partial_i \mathbf{r} + \cancelto{0}{\partial_i \mathbf{b}} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{i}} = b_i$$

Então:

$$\nabla(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}) = \sum_i \partial_i(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{i}} = \sum_i b_i \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{i}} = \mathbf{b}$$

Por fim:

$$\nabla \cdot ((\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b}) = -3(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

(g) $\nabla \times [(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{b}] = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (note que pode ser "reciclada" a definição intermediária do item anterior)

$$\nabla \times [(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{b}] = -\nabla \times [(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b}] = \nabla \times [\mathbf{r}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})] =$$
$$= \cancelto{0}{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\nabla \times \mathbf{r}} - \nabla \times [\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})] = -\nabla \times [\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})]$$

Agora note que esse é exatamente o próximo item!

(h) $\nabla \times [\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})] = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

Usando o Problema 3)a):

$$\nabla \times [\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})] = \cancelto{0}{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})\nabla \times \mathbf{a}} + \nabla(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}) \times \mathbf{a}$$

Vimos ainda no item f) que $\nabla(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{b}$, então:

$$\nabla \times [\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})] = \mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

Problema 11

A velocidade de um fluido 2D é dada por $\mathbf{v} = f(x,y)\hat{\mathbf{i}} - g(x,y)\hat{\mathbf{j}}$. Supondo que o fluido seja incompressível e irrotacional, prove que valem as condições de Cauchy-Riemann para a função complexa $f + ig$:

$$\partial_x f = \partial_y g, \quad \partial_y f = -\partial_x g$$

Ver lista 1 do Roldão (repositório).

Problema 12

Mostrar que as soluções das equações de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{E} \tag{1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\partial_t \mathbf{H} \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \tag{4}$$

em que ρ é uma função de $\mathbf{r}$ e c é a velocidade da luz, considerada constante, são dadas por:

$$\mathbf{E} = \nabla\phi - \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{A} \tag{5}$$

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{6}$$

em que ainda $\mathbf{A}$ e ϕ, chamados respectivamente de potenciais vetorial e escalar, satisfazem as equações:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} - \frac{1}{c}\partial_t \phi = 0 \tag{7}$$

$$\Box\phi = \nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\phi = 4\pi\rho \tag{8}$$

$$\Box\mathbf{A} = \nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A} = 0 \tag{9}$$

Solução: Veja que mostraremos apenas que (5) e (6) são soluções admissíveis, não que sejam únicas (ou que toda solução de (1)-(4) possuam o formato de (5) e (6), ou nada disso). Comecemos pelo lado esquerdo de (1):

$$\nabla \times \mathbf{H} = \underbrace{\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})}_{\text{ver}} = \nabla(\underbrace{\nabla \cdot \mathbf{A}}_{(7)}) - \underbrace{\nabla^2\mathbf{A}}_{(9)} = \frac{1}{c}\nabla(\partial_t\phi) - \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A} = \frac{1}{c}\partial_t(\nabla\phi) - \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A}$$

Derivando por t a expressão (5) chega-se à mesma expressão de ϕ e $\mathbf{A}$. Já para a equação (2):

$$\nabla \times \mathbf{E} = \underbrace{\cancelto{0}{\nabla \times (\nabla\phi)}}_{\text{lista 1 Roldão}} - \frac{1}{c}\partial_t \underbrace{\nabla \times \mathbf{A}}_{\mathbf{H}} = - - \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{H}$$

Para a equação (3):

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \partial_i(\nabla \times \mathbf{A})_i = \partial_i \varepsilon_{ijk}\partial_j A_k = \varepsilon_{ijk}\underbrace{\partial_i\partial_j A_k}_{\text{Clairaut}} = 0$$

Finalmente, para a equação (4):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \underbrace{\nabla^2 \phi}_{(8)} - \frac{1}{c}\partial_t \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{A}}_{(7)} = \left[4\pi\rho + \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\phi\right] - \frac{1}{c}\partial_t \left(\frac{1}{c}\partial_t \phi\right) = 4\pi\rho + \cancelto{0}{\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\phi - \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\phi} =$$

$$= 4\pi\rho.$$