

## Problema 1

Dados vetores  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$  e constantes  $a, b \in \mathbb{R}$ , mostre que:

(a)  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$  e  $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$

**Antissimetria:** notemos que na expressão  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ , ao colocar  $\mathbf{u}$  no lugar de  $\mathbf{v}$  e vice-versa<sup>a</sup>, obtém-se  $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{u})$  e, da álgebra vetorial,  $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ . Então  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0 \Rightarrow -\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$  e bastaria mostrar a primeira identidade para obter a segunda sem esforço adicional.

**Notação indicial:**  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \varepsilon_{ijk} u^i u^j v^k$  e notamos que, como cada termo que acompanha  $\varepsilon_{ijk}$  é oposto ao que acompanha  $\varepsilon_{jik}$  (exemplo:  $\varepsilon_{123} u^1 u^2 v^3 = -\varepsilon_{213} u^2 u^1 v^3$ ) então ao serem somados (note que o índice repetido implica uma soma) o resultado é o anulamento de pares de termos da soma<sup>b</sup> e, por consequência, da soma inteira.

**Geometria:** em Geometria Analítica se definiu como  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  o vetor que é *normal*<sup>c</sup> ao plano definido por  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ . Ademais, é ortogonal aos próprios  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  e vale, portanto,  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = ||\mathbf{u}|| ||\mathbf{u} \times \mathbf{v}|| \cos \beta = u^2 v \sin \alpha \cos \beta = 0$  pois dados  $\alpha$  ângulo entre  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  e  $\beta$  ângulo entre  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ , ocorre que  $\beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \beta = 0$ .

**Vetores em componentes cartesianos:** Dados<sup>d</sup>

$$\mathbf{u} = u^i \hat{\mathbf{e}}_i = u^1 \hat{\mathbf{i}} + u^2 \hat{\mathbf{j}} + u^3 \hat{\mathbf{k}}$$

e

$$\mathbf{v} = v^i \hat{\mathbf{e}}_i = v^1 \hat{\mathbf{i}} + v^2 \hat{\mathbf{j}} + v^3 \hat{\mathbf{k}},$$

tem-se então, expandindo o determinante pela primeira coluna:

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \\ u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix} = u^1 \begin{vmatrix} u^2 & u^3 \\ v^2 & v^3 \end{vmatrix} - u^1 \begin{vmatrix} u^2 & u^3 \\ v^2 & v^3 \end{vmatrix} + v^1 \begin{vmatrix} u^1 & u^1 \\ u^2 & u^2 \end{vmatrix},$$

em que o mesmo resultado seria obtido fazendo qualquer outra expansão (método de Laplace), inclusive a primeira linha como usual. Ademais, o mesmo resultado seria obtido notando que existe um teorema da Álgebra matricial em que se uma linha ou coluna é combinação linear da outra (em particular, se uma é identicamente igual a outra), então o determinante será nulo.

(b)  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

**Notação indicial:**  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = u^i [\mathbf{v} + \mathbf{w}]_i = u^i (v_i + w_i) = u^i v_i + u^i w_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ .

**Vetores em componentes cartesianos:**

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v^1 + w^1)\hat{\mathbf{i}} + (v^2 + w^2)\hat{\mathbf{j}} + (v^3 + w^3)\hat{\mathbf{k}},$$

portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} &= \\ u^1(v^1 + w^1) + u^2(v^2 + w^2) + u^3(v^3 + w^3) &= (u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3) + (u^1 w^1 + u^2 w^2 + u^3 w^3) \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}. \end{aligned}$$

(c)  $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$

**Notação indicial:**  $[\mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{w}]_i = \varepsilon_{ijk} u^j [\mathbf{v} + \mathbf{w}]^k = \varepsilon_{ijk} u^j (v^k + w^k) = \varepsilon_{ijk} u^j v^k + \varepsilon_{ijk} u^j w^k = [\mathbf{u} \times \mathbf{v}]_i + [\mathbf{u} \times \mathbf{w}]_i$ .

**Vetores em componentes cartesianas:**

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 + w^1 & v^2 + w^2 & v^3 + w^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ u^1 & u^2 & u^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}. \end{aligned}$$

(d)  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (uv)^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$

**Notação indicial:**

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = [\mathbf{u} \times \mathbf{v}]^i [\mathbf{u} \times \mathbf{v}]_i = \varepsilon^{imn} u_m v_n \varepsilon_{ipq} u^p v^q = (\varepsilon^{imn} \varepsilon_{ipq}) u_m v_n u^p v^q,$$

mas

$$\begin{aligned} \varepsilon^{imn} \varepsilon_{ipq} &= \begin{vmatrix} \delta^i_i & \delta^i_p & \delta^i_q \\ \delta^m_i & \delta^m_p & \delta^m_q \\ \delta^n_i & \delta^n_p & \delta^n_q \end{vmatrix} = \delta^m_p \begin{vmatrix} \delta^i_i & \delta^i_q \\ \delta^n_i & \delta^n_q \end{vmatrix} - \delta^m_q \begin{vmatrix} \delta^i_i & \delta^i_p \\ \delta^n_i & \delta^n_p \end{vmatrix} + \delta^i_q \begin{vmatrix} \delta^m_i & \delta^m_p \\ \delta^n_i & \delta^n_p \end{vmatrix} \\ &= \delta^m_p \delta^n_q - \delta^m_q \delta^n_p, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} (\delta^m_p \delta^n_q - \delta^m_q \delta^n_p) u_m v_n u^p v^q &= \delta^m_p \delta^n_q u_m v_n u^p v^q - \delta^m_q \delta^n_p u_m v_n u^p v^q = u^p v^q u_p v_q - u^q v^p u_p v_q \\ &= (u^p u_p)(v^q v_q) - (u^q v_q)(v^p u_p) = (uv)^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2. \end{aligned}$$

**Álgebra vetorial:** nota-se que

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = u^2 v^2 \sin^2 \alpha$$

em que  $\alpha$  é ângulo entre  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ . Mas  $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ , então

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = u^2 v^2 - u^2 v^2 \cos^2 \alpha = (uv)^2 - (uv \cos \alpha)^2 = (uv)^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2.$$

(e)  $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = u^2 - v^2$

**Notação indicial:**

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= (\mathbf{u} - \mathbf{v})^i (\mathbf{u} + \mathbf{v})_i = \sum_i (\mathbf{u} - \mathbf{v})^i (\mathbf{u} + \mathbf{v})_i = \sum_i (u^i - v^i)(u_i + v_i) = \\ &= \sum_i (u^i u_i - u^i v_i + v^i u_i - v^i v_i) = u^i u_i - u^i v_i + v^i u_i - v^i v_i = \\ &= u^2 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - v^2 = u^2 - v^2 \end{aligned}$$

**Álgebra vetorial:**  $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = u^2 - v^2$

(f)  $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = 2\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

**Notação indicial:**

$$\begin{aligned} [(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \times (\mathbf{u} + \mathbf{v})]_i &= \varepsilon_{ijk} (\mathbf{u} - \mathbf{v})^j (\mathbf{u} + \mathbf{v})^k = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} (\mathbf{u} - \mathbf{v})^j (\mathbf{u} + \mathbf{v})^k = \\ &= \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} (u^j - v^j)(u^k + v^k) = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} (u^j u^k + u^j v^k - v^j u^k - v^j v^k) \\ &= \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} u^j u^k + \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} u^j v^k - \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} v^j u^k - \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} v^j v^k = \\ &= \varepsilon_{ijk} u^j u^k + \varepsilon_{ijk} u^j v^k - \varepsilon_{ijk} v^j u^k - \varepsilon_{ijk} v^j v^k = \\ &= \cancel{(\mathbf{u} \times \mathbf{u})_i} + (\mathbf{u} \times \mathbf{v})_i - (\mathbf{v} \times \mathbf{u})_i - \cancel{(\mathbf{v} \times \mathbf{v})_i} = \\ &= (\mathbf{u} \times \mathbf{v})_i + (\mathbf{u} \times \mathbf{v})_i = 2(\mathbf{u} \times \mathbf{v})_i \end{aligned}$$

**Álgebra vetorial:**  $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times \mathbf{u} + \mathbf{u} \times \mathbf{v} - \mathbf{v} \times \mathbf{u} + \mathbf{v} \times \mathbf{v} = 2\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

(g)  $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) - \mathbf{w}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

**Notação indicial:**

$$\begin{aligned} [\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})]_i &= \varepsilon_{ijk} u^j (\mathbf{v} \times \mathbf{w})^k = \varepsilon_{ijk} u^j (\varepsilon^{kpq} v_p w_q) = \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{kpq} u^j v_p w_q = \\ &= \begin{vmatrix} \delta^k_i & \delta^k_j & \delta^k_k \\ \delta^p_i & \delta^p_j & \delta^p_k \\ \delta^q_i & \delta^q_j & \delta^q_k \end{vmatrix} u^j v_p w_q = \sum_k \underbrace{\begin{vmatrix} \delta^k_i & \delta^k_j & \delta^k_k \\ \delta^p_i & \delta^p_j & \delta^p_k \\ \delta^q_i & \delta^q_j & \delta^q_k \end{vmatrix}}_{1! \text{ formas de escolher o índice somado}} u^j v_p w_q = \\ &= 1! \begin{vmatrix} \delta^p_i & \delta^p_j \\ \delta^q_i & \delta^q_j \end{vmatrix} u^j v_p w_q = (\delta^p_i \delta^q_j - \delta^p_j \delta^q_i) u^j v_p w_q = \\ &= \delta^p_i \delta^q_j u^j v_p w_q - \delta^p_j \delta^q_i u^j v_p w_q = u^j v_i w_j - u^j v_j w_i = \\ &= v_i (u^j w_j) - w_i (u^j v_j) = v_i (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) - w_i (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \end{aligned}$$

$$(h) (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{x}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} & \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} & \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} \end{vmatrix}$$

**Notação indicial:**

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{x}) &= (\mathbf{u} \times \mathbf{v})^i (\mathbf{w} \times \mathbf{x})_i = \varepsilon^{ijk} u_j v_k \varepsilon_{imn} w^m x^n = \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{imn} w^m x^n u_j v_k = \\ &= \sum_i \underbrace{\begin{vmatrix} \delta_i^1 & \delta_i^0 & \delta_i^0 \\ \delta_i^0 & \delta_i^j & \delta_i^n \\ \delta_i^0 & \delta_i^k & \delta_i^n \end{vmatrix}}_{1!} w^m x^n u_j v_k = 1! (\delta_m^j \delta_n^k - \delta_n^j \delta_m^k) w^m x^n u_j v_k = \\ &= \delta_m^j \delta_n^k w^m x^n u_j v_k - \delta_n^j \delta_m^k w^m x^n u_j v_k = \\ &= w^j x^k u_j v_k - w^k x^j u_j v_k = (u_j w^j)(v_k x^k) - (u_j x^j)(v_k w^k) = \\ &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \end{aligned}$$

$$(i) (\text{identidade de Jacobi})^g \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

**Aplicação repetida de BAC-CAB:**

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) &= \\ &= [\mathbf{v}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) - \mathbf{w}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})] + [\mathbf{u}(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v}(\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})] + [\mathbf{w}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})] \\ &= [\mathbf{v}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) - \mathbf{v}(\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})] + [\mathbf{w}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{w}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})] + [\mathbf{u}(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{u}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})] \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

<sup>a</sup>Isso pode ser feito pois são tomados  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  arbitrários.

<sup>b</sup>Note que a maioria dos termos (quaisquer com índices repetidos) já é nula em razão da própria definição do símbolo de Levi-Civita,  $\varepsilon$ .

<sup>c</sup>Ou, caso não definam um plano são paralelos e então seu produto vetorial é o vetor nulo  $\mathbf{0}$ .

<sup>d</sup>Será usado o índice *acima* para componentes de vetores, algo que ficará claro na seção de tensores do curso. Por ora, dá igual escrever o índice das componentes "em cima" ou "em baixo", contanto que não se confunda com potências.

<sup>e</sup>Note que a notação de Einstein para soma foi suspensa e depois retomada em passos intermediários. É sempre possível fazer isso, na realidade, sequer é necessário usar a notação de Einstein e quando esta for um empecilho se recomenda escrever por extenso todos os somatórios.

<sup>f</sup>Essa regra também é conhecida como regra BAC-CAB ("*back minus cab*"), veja, mantendo a fora do parêntesis do lado esquerdo:  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ .

<sup>g</sup>Note que os termos seguintes ao primeiro na soma são permutações cíclicas dos vetores nas posições.

## Problema 2

Calcule  $\frac{\partial^2}{\partial_x \partial_y} f = \partial_{yx} f$  dos seguintes campos escalares:

(a)  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2), \quad (x, y) \neq (0, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_{yx} \ln(x^2 + y^2) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial y} \ln(x^2 + y^2) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial y} \frac{d}{d(x^2 + y^2)} \ln(x^2 + y^2) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( 2y \times \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{2y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{(x^2 + y^2) \cancel{\partial_x(2y)}^0 - 2y \partial_x(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

(b)  $f(x, y) = \arctan(y/x), \quad (x, y) \neq (0, 0)$

$$\begin{aligned}\partial_{yx} \arctan(y/x) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial y} \arctan(y/x) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial(y/x)}{\partial y} \frac{d}{d(y/x)} \arctan(y/x) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{x} \times \frac{1}{1 + (y/x)^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \\ &= \frac{(x^2 + y^2) \cancel{\partial_x(x)}^1 - x \partial_x(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

### Problema 3

Seja  $v(r, t) = t^n \exp(-\frac{r^2}{4t})$ . Calcule  $n$  para que o campo escalar  $v$  satisfaça a equação:

$$\partial_t v = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r v)$$

**Solução:** Temos, separadamente:

$$\partial_t v = nt^{n-1} \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right) - t^n \times \frac{r^2}{4t^2} \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right) = \left(nt^{n-1} - \frac{1}{4}t^{n-2}r^2\right) \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right)$$

e, para o lado direito da equação:

$$\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r v) = \frac{1}{r^2} (2r \partial_r v + r^2 \partial_{rr} v) = \frac{2}{r} \partial_r v + \partial_{rr} v,$$

mas

$$\partial_r v = t^n \partial_r \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right) = -\frac{2r}{4t} t^n \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right) = -\frac{1}{2} r t^{n-1} \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right)$$

$$\partial_{rr} v = -\frac{1}{2} t^{n-1} \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right) = \frac{1}{4} r^2 t^{n-2} \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right) = \left(-\frac{1}{2} t^{n-1} - \frac{1}{4} t^{n-2} r^2\right) \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right),$$

portanto,

$$\frac{2}{r} \partial_r v + \partial_{rr} v = \left(-\frac{3}{2} t^{n-1} - \frac{1}{4} t^{n-2} r^2\right) \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right),$$

por fim:

$$\left(nt^{n-1} - \frac{1}{4} t^{n-2} r^2\right) \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right) = \left(-\frac{3}{2} t^{n-1} - \frac{1}{4} t^{n-2} r^2\right) \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right)$$

$$nt^{n-1} - \frac{1}{4} t^{n-2} r^2 = -\frac{3}{2} t^{n-1} - \frac{1}{4} t^{n-2} r^2 \Rightarrow nt^{n-1} \neq 0 = -\frac{3}{2} t^{n-1} \neq 0 \Rightarrow n = -\frac{3}{2}$$

#### Problema 4

Calcule o gradiente  $\nabla f$  dos seguintes campos escalares:

(a)  $f(x, y) = x^2 + y \cos(xy)$

$$\nabla f = (\partial_x f)\hat{\mathbf{i}} + (\partial_y f)\hat{\mathbf{j}} = [2x - y^2 \sin(xy)]\hat{\mathbf{i}} + [\cos(xy) - xy \sin(xy)]\hat{\mathbf{j}}$$

$$||\nabla f|| = \sqrt{[2x - y^2 \sin(xy)]^2 + [\cos(xy) - xy \sin(xy)]^2}$$

(b)  $f(x, y) = \exp(x^2) \sin y$

$$\nabla f = (\partial_x f)\hat{\mathbf{i}} + (\partial_y f)\hat{\mathbf{j}} = [2x \sin y \exp(x^2)]\hat{\mathbf{i}} + [\cos y \exp(x^2)]\hat{\mathbf{j}}$$

$$||\nabla f|| = \exp(x^2) \sqrt{4x^2 \sin^2 y + \cos^2 y}$$

(c)  $f(x, y, z) = \ln(x^2 + 2y^3 - z^4)$

$$\nabla f = (\partial_x f)\hat{\mathbf{i}} + (\partial_y f)\hat{\mathbf{j}} + (\partial_z f)\hat{\mathbf{k}} =$$

$$= \frac{df}{d(x^2 + 2y^3 - z^4)} f\{[\partial_x(x^2 + 2y^3 - z^4)]\hat{\mathbf{i}} + [\partial_y(x^2 + 2y^3 - z^4)]\hat{\mathbf{j}} + [\partial_z(x^2 + 2y^3 - z^4)]\hat{\mathbf{k}}\}$$

$$= \frac{1}{x^2 + 2y^3 - z^4} [2x\hat{\mathbf{i}} + 6y^2\hat{\mathbf{j}} - 4z^3\hat{\mathbf{k}}] =$$

$$= \frac{2x}{x^2 + 2y^3 - z^4} \hat{\mathbf{i}} + \frac{6y^2}{x^2 + 2y^3 - z^4} \hat{\mathbf{j}} - \frac{4z^3}{x^2 + 2y^3 - z^4} \hat{\mathbf{k}}$$

$$||\nabla f|| = \frac{1}{|x^2 + 2y^3 - z^4|} \sqrt{4x^2 + 36y^4 + 16z^6} = \frac{2}{|x^2 + 2y^3 - z^4|} \sqrt{x^2 + 9y^4 + 4z^6}$$

### Problema 5

Considere duas funções  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Prove que  $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$ .

**Coordenadas cartesianas:** Tem-se:

$$\begin{aligned}\nabla(fg) &= [\partial_x(fg)]\hat{\mathbf{i}} + [\partial_y(fg)]\hat{\mathbf{j}} + [\partial_z(fg)]\hat{\mathbf{k}} = [g\partial_x f + f\partial_x g]\hat{\mathbf{i}} + [g\partial_y f + f\partial_y g]\hat{\mathbf{j}} + [g\partial_z f + f\partial_z g]\hat{\mathbf{k}} \\ &= f[\partial_x g\hat{\mathbf{i}} + \partial_y g\hat{\mathbf{j}} + \partial_z g\hat{\mathbf{k}}] + g[\partial_x f\hat{\mathbf{i}} + \partial_y f\hat{\mathbf{j}} + \partial_z f\hat{\mathbf{k}}] = f\nabla g + g\nabla f.\end{aligned}$$

**Diferencial:**<sup>a</sup> Usando a definição de gradiente:

$df = \nabla f \cdot d\mathbf{r}$  e  $dg = \nabla g \cdot d\mathbf{r}$  mas por regra do produto  $d(fg) = f dg + g df$ , então:  $d(fg) = f dg + g df = f \nabla g \cdot d\mathbf{r} + g \nabla f \cdot d\mathbf{r} = (f \nabla g + g \nabla f) \cdot d\mathbf{r}$ . Por definição,  $d(fg) = \nabla(fg) \cdot d\mathbf{r}$ , de onde se conclui que para que valha em qualquer diferencial  $d\mathbf{r}$ , deve ocorrer que  $\nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f$ .

---

<sup>a</sup>Basicamente, um grande abuso de notação.



## Problema 6

Mostre que  $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\mathbf{r}$ .

**Coordenadas esféricas:**<sup>a</sup>

$$\nabla(r^n) = \underbrace{\frac{1}{1}}_{1/h_1} (\partial_r r^n) \hat{\mathbf{r}} + \underbrace{\frac{1}{r}}_{1/h_2} (\partial_\theta r^n) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \underbrace{\frac{1}{r \sin \theta}}_{1/h_3} (\partial_\phi r^n) \hat{\boldsymbol{\phi}} = nr^{n-1} \hat{\mathbf{r}},$$

mas  $r\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}$ , logo  $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\mathbf{r}$ .

**Coordenadas cartesianas:**

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow r^n = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}},$$

portanto, vale:

$$\begin{aligned} \nabla(r^n) &= [\partial_x(r^n)]\hat{\mathbf{i}} + [\partial_y(r^n)]\hat{\mathbf{j}} + [\partial_z(r^n)]\hat{\mathbf{k}} = \frac{d(r^n)}{dr}[(\partial_x r)\hat{\mathbf{i}} + (\partial_y r)\hat{\mathbf{j}} + (\partial_z r)\hat{\mathbf{k}}] \\ &= nr^{n-1} \left[ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{\mathbf{i}} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{\mathbf{j}} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{\mathbf{k}} \right] \\ &= nr^{n-2}[x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}] = nr^{n-2}\mathbf{r} \end{aligned}$$

**Diferencial:**<sup>b</sup>

$$r = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{\frac{1}{2}} \Rightarrow r^n = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{\frac{n}{2}}[x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}] = nr^{n-2}\mathbf{r},$$

pelo uso de regra da cadeia no diferencial,

$$d(r^n) = d[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{\frac{n}{2}}] = \frac{n}{2}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{\frac{n}{2}-1} d(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = \frac{n}{2}r^{n-2}d(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}),$$

mas ocorre que  $d(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} + d\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = 2\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$ , então:

$$d(r^n) = nr^{n-2}\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \nabla(r^n) \cdot d\mathbf{r}$$

que ocorre para  $d\mathbf{r}$  completamente arbitrário apenas se  $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\mathbf{r}$ .

<sup>a</sup>Os termos indicados por  $h_i$  são chamados *coeficientes de Lamé* e definidos por  $h_i = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} \right\|$  em que  $x^i$  é a  $i$ -ésima coordenada. O problema poderia ter sido resolvido em qualquer outro sistema de coordenadas (inclusive cartesianas!), o esférico foi escolhido apenas por cancelar a maior parte dos termos e assumindo que se tratava de  $\mathbb{R}^3$ .

<sup>b</sup>Assim como no problema anterior, foi feito grande abuso de notação.

## Problema 7

Mostre que os operadores divergente e rotacional são lineares, ou seja, dados  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  e constante  $a \in \mathbb{R}$  segue-se que:

(a)  $\nabla \cdot (a\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{v}$

**Coordenadas cartesianas:**

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (a\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \partial_x(au_1 + v_1) + \partial_y(au_2 + v_2) + \partial_z(au_3 + v_3) = \\ &= [a\partial_x u_1 + \partial_x v_1] + [a\partial_y u_2 + \partial_y v_2] + [a\partial_z u_3 + \partial_z v_3] \\ &= [a(\partial_x u_1 + \partial_y u_2 + \partial_z u_3)] + [\partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3] = \\ &= a\nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{v}\end{aligned}$$

**Notação indicial, cartesiano:**

$$\nabla \cdot (a\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \partial_i(a\mathbf{u} + \mathbf{v})_i = \partial_i(au_i + v_i) = a\partial_i u_i + \partial_i v_i = a\nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{v}$$

(b)  $\nabla \times (a\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\nabla \times \mathbf{u} + \nabla \times \mathbf{v}$

**Coordenadas cartesianas:<sup>a</sup>**

$$\begin{aligned}\nabla \times (a\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ au_1 + v_1 & au_2 + v_2 & au_3 + v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ au_1 & au_2 & au_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \\ &= a \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ u_1 + v_1 & u_2 + v_2 & u_3 + v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = a\nabla \times \mathbf{u} + \nabla \times \mathbf{v}\end{aligned}$$

**Notação indicial, cartesiano:**

$$\begin{aligned}[\nabla \times (a\mathbf{u} + \mathbf{v})]_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j (a\mathbf{u} + \mathbf{v})_k = \varepsilon_{ijk} \partial_j (au_k + v_k) = \varepsilon_{ijk} (a\partial_j u_k + \partial_j v_k) = \\ &= a\varepsilon_{ijk} \partial_j u_k + \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k = a[\nabla \times \mathbf{u}]_i + [\nabla \times \mathbf{v}]_i\end{aligned}$$

<sup>a</sup>Aqui foram usadas propriedades de matrizes/determinantes. Pode-se chegar à mesma conclusão indo até o fim na expansão dos termos.

## Problema 8

Mostre que:

$$(a) \quad \nabla \times (f\mathbf{u}) = f\nabla \times \mathbf{u} + (\nabla f) \times \mathbf{u}$$

**Coordenadas cartesianas:**

$$\begin{aligned} \nabla \times (f\mathbf{u}) &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ fu_1 & fu_2 & fu_3 \end{vmatrix} = \\ &= [\partial_y(fu_3) - \partial_z(fu_2)]\hat{\mathbf{i}} + [\partial_z(fu_1) - \partial_x(fu_3)]\hat{\mathbf{j}} + [\partial_x(fu_2) - \partial_y(fu_1)]\hat{\mathbf{k}} = \\ &= [f\partial_y u_3 + u_3\partial_y f - f\partial_z u_2 - u_2\partial_z f]\hat{\mathbf{i}} + [f\partial_z u_1 + u_1\partial_z f - f\partial_x u_3 - u_3\partial_x f]\hat{\mathbf{j}} + \\ &\quad + [f\partial_x u_2 + u_2\partial_x f - f\partial_y u_1 - u_1\partial_y f]\hat{\mathbf{k}} = \\ &= f[(\partial_y u_3 - \partial_z u_2)\hat{\mathbf{i}} + (\partial_z u_1 - \partial_x u_3)\hat{\mathbf{j}} + (\partial_x u_2 - \partial_y u_1)\hat{\mathbf{k}}] + \\ &\quad + [(\partial_y f)u_3 - (\partial_z f)u_2]\hat{\mathbf{i}} + [(\partial_z f)u_1 - (\partial_x f)u_3]\hat{\mathbf{j}} + [(\partial_x f)u_2 - (\partial_y f)u_1]\hat{\mathbf{k}} = \\ &= f \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x f & \partial_y f & \partial_z f \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = f\nabla \times \mathbf{u} + (\nabla f) \times \mathbf{u} \end{aligned}$$

**Notação indicial, cartesiano:**

$$\begin{aligned} \nabla \times [(f\mathbf{u})]_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j (fu_k) = \varepsilon_{ijk} (f\partial_j u_k + u_k \partial_j f) = f(\varepsilon_{ijk} \partial_j u_k) + \varepsilon_{ijk} (\partial_j f) u_k \\ &= f[\nabla \times \mathbf{u}]_i + [(\nabla f) \times \mathbf{u}]_i \end{aligned}$$

$$(b) \quad \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})$$

**Coordenadas cartesianas:**

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= \nabla \cdot [(u_2 v_3 - u_3 v_2)\hat{\mathbf{i}} + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\hat{\mathbf{j}} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\hat{\mathbf{k}}] = \\ &= \partial_x(u_2 v_3 - u_3 v_2) + \partial_y(u_3 v_1 - u_1 v_3) + \partial_z(u_1 v_2 - u_2 v_1) = \\ &= (u_2 \partial_x v_3 + v_3 \partial_x u_2 - u_3 \partial_x v_2 - v_2 \partial_x u_3) + \\ &\quad + (u_3 \partial_y v_1 + v_1 \partial_y u_3 - u_1 \partial_y v_3 - v_3 \partial_y u_1) + \\ &\quad + (u_1 \partial_z v_2 + v_2 \partial_z u_1 - u_2 \partial_z v_1 - v_1 \partial_z u_2) = \\ &= \underbrace{[v_1(\partial_y u_3 - \partial_z u_2) + v_2(\partial_z u_1 - \partial_x u_3) + v_3(\partial_x u_2 - \partial_y u_1)]}_{\mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u})} + \\ &\quad + \underbrace{[u_1(\partial_z v_2 - \partial_y v_3) + u_2(\partial_x v_3 - \partial_z v_1) + u_3(\partial_y v_1 - \partial_x v_2)]}_{-\mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})} \\ &= \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \end{aligned}$$

**Notação indicial, cartesiano:**

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= (\partial_i \varepsilon_{ijk} u_j v_k) = \varepsilon_{ijk} \partial_i (u_j v_k) = \varepsilon_{ijk} (u_j \partial_i v_k + v_k \partial_i u_j) = \varepsilon_{ijk} u_j \partial_i v_k + \varepsilon_{ijk} v_k \partial_i u_j \\ &= u_j \varepsilon_{ijk} \partial_i v_k + v_k \varepsilon_{ijk} \partial_i u_j = -u_j \underbrace{\varepsilon_{jik} \partial_i v_k}_{[\nabla \times \mathbf{v}]_j} + v_k \underbrace{\varepsilon_{kij} \partial_i u_j}_{[\nabla \times \mathbf{u}]_k} = \\ &= v_k [\nabla \times \mathbf{u}]_k - u_j [\nabla \times \mathbf{v}]_j = \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})\end{aligned}$$

### Problema 9

Calcule  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  e  $\nabla \times \mathbf{u}$  para os seguintes campos vetoriais:

(a)  $\mathbf{u}(x, y, z) = (x^3 + yz^2)\hat{\mathbf{i}} + (y + xz)\hat{\mathbf{j}} + (z + xy)\hat{\mathbf{k}}$

**Divergência:**

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \cancel{\partial_x(x^3 + yz^2)}^0 + \cancel{\partial_y(y + xz)}^0 + \cancel{\partial_z(z + xy)}^0 = \partial_x x^3 + \partial_y y + \partial_z z = 3x^2 + 2$$

**Rotacional:**

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{u} &= \begin{vmatrix} \partial_y & \partial_z \\ y + xz & z + xy \end{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} + \begin{vmatrix} \partial_z & \partial_x \\ z + xy & x^3 + yz^2 \end{vmatrix} \hat{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ x^3 + yz^2 & y + xz \end{vmatrix} \hat{\mathbf{k}} = \\ &= (x - x)\hat{\mathbf{i}} + (2zy - y)\hat{\mathbf{j}} + (z - z^2)\hat{\mathbf{k}} = 0\hat{\mathbf{i}} + y(2z - 1)\hat{\mathbf{j}} + z(1 - z)\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

(b)  $\mathbf{u}(x, y, z) = (z - 3y^2)\hat{\mathbf{i}} + (3x - z)\hat{\mathbf{j}} + (y - 2x)\hat{\mathbf{k}}$

**Divergência:**

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \cancel{\partial_x(z - 3y^2)}^0 + \cancel{\partial_y(3x - z)}^0 + \cancel{\partial_z(y - 2x)}^0 = 0$$

**Rotacional:**

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{u} &= \begin{vmatrix} \partial_y & \partial_z \\ 3x - z & y - 2x \end{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} + \begin{vmatrix} \partial_z & \partial_x \\ y - 2x & z - 3y^2 \end{vmatrix} \hat{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ z - 3y^2 & 3x - z \end{vmatrix} \hat{\mathbf{k}} = \\ &= (1 + 1)\hat{\mathbf{i}} + (1 + 2)\hat{\mathbf{j}} + (3 + 6y)\hat{\mathbf{k}} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} + 3(1 + 2y)\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

### Problema 10

Mostre que  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  é solenoidal se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são ambos irrotacionais.

**Solução:** Queremos saber como se comportará  $\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$  dado  $\nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Veja que, pelo Problema 8b,  $\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$ .

**Condição necessária?** Não. Basta tomar qualquer vetor  $\mathbf{u}$  tal que  $\nabla \times \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ . De fato,  $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$  e, evidentemente,  $\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{u}) = 0$ . Logo  $\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{u}) = 0$  não faz  $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ .

### Problema 11

Se  $\mathbf{u}$  é irrotacional (ou seja,  $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ ), sendo  $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ , mostre que  $\mathbf{u} \times \mathbf{r}$  é solenoidal (um campo vetorial é dito solenoidal se seu divergente for nulo).

**Solução:** Pelo problema 8b,  $\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{r})$ . Agora vejamos:

$$\nabla \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_y & \partial_z \\ y & z \end{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} + \begin{vmatrix} \partial_z & \partial_x \\ z & x \end{vmatrix} \hat{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ x & y \end{vmatrix} \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0}$$

Daí conclui-se que  $\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{r}) = 0$ .

## Problema 12

Defina o operador momento angular  $\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z)$ , onde as componentes são dadas por

$$L_x = -i(y\partial_z - z\partial_y), \quad L_y = -i(z\partial_x - x\partial_z), \quad L_z = -i(x\partial_y - y\partial_x)$$

Mostre que  $\mathbf{L} = -i\mathbf{r} \times \nabla$ . Mostre que  $L_x L_y - L_y L_x = iL_z$ ,  $L_z L_x - L_x L_z = iL_y$ ,  $L_y L_z - L_z L_y = iL_x$ .

- $\mathbf{L} = -i\mathbf{r} \times \nabla$ :<sup>a</sup> Tomando  $\nabla$  como um vetor a partir de suas componentes, temos que

$$\mathbf{r} \times \nabla = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ x & y & z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \end{vmatrix} = (y\partial_z - z\partial_y)\hat{\mathbf{i}} + (z\partial_x - x\partial_z)\hat{\mathbf{j}} + (x\partial_y - y\partial_x)\hat{\mathbf{k}},$$

de onde é imediato que multiplicando por  $-i$  se obtém o desejado.

- Demais identidades: Note que cada uma delas é uma componente da identidade

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = (L_y L_z - L_z L_y)\hat{\mathbf{i}} + (L_z L_x - L_x L_z)\hat{\mathbf{j}} + (L_x L_y - L_y L_x)\hat{\mathbf{k}} = i\mathbf{L}.$$

Note então que se  $a, b, c$  formam uma permutação cíclica positiva/par, bastaria mostrar uma única delas e as demais seriam consequência de trocar  $a, b, c$  por permutações (pares) de  $x, y, z$ :

$$L_b L_c - L_c L_b = iL_a; \quad L_a = -i(b\partial_c - c\partial_b)$$

Então:

$$\begin{aligned} L_b L_c - L_c L_b &= \cancel{(-i)} \cancel{(-i)} \overset{-1}{[(c\partial_a - a\partial_c)(a\partial_b - b\partial_a) - (a\partial_b - b\partial_a)(c\partial_a - a\partial_c)]} \\ &= - \underbrace{c(\partial_b + a\partial_{ba} - \partial_a b\partial_a - b\partial_{aa}) + a(\partial_c a\partial_b + a\partial_{bc} - \partial_c b\partial_a - b\partial_{ac})}_{!!!} + \\ &\quad + a(\partial_b c\partial_a + c\partial_{ab} - \partial_b a\partial_c - a\partial_{cb}) - b(\partial_a c\partial_a + c\partial_{aa} - \underbrace{\partial_c}_{!!!} - a\partial_{ca}) \end{aligned}$$

Cancelando os inúmeros termos, notando que pelo teorema de Clairaut (estamos assumindo que valha o teorema para as funções nas quais o operador será aplicado)  $\partial_{ij} = \partial_{ji}$ , temos por fim:

$$L_b L_c - L_c L_b = (b\partial_c - c\partial_b) = iL_a$$

<sup>a</sup>Note que  $\mathbf{r} \times \nabla \neq \nabla \times \mathbf{r}$ . Isso se dá porque, por exemplo, enquanto  $\partial_x z$  significa "derivada parcial de  $z$  em relação a  $x$ ",  $z\partial_x$  significa " $z$  multiplicando a derivada parcial em relação a  $x$ " que ainda será aplicada ao termo que seguirá o  $\partial_x$ . Ou seja, o primeiro caso é uma derivada parcial e um segundo é um operador diferencial (a ser posteriormente aplicado).



### Problema 13

A velocidade de um fluido bidimensional é dada por  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y) = u(x, y)\hat{\mathbf{i}} - v(x, y)\hat{\mathbf{j}}$ . Supondo que o fluido seja incompressível (ou seja,  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  e irrotacional, prove que valem as condições de Cauchy-Riemann

$$\partial_x u = \partial_y v, \quad \partial_y u = -\partial_x v$$

**Solução:** Sendo irrotacional, sabemos também que  $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ . As duas informações podem ser sumarizadas como a seguir:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \partial_x u + \partial_y(-v) = 0 \\ (\partial_x(-v) - \partial_y u)\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \partial_x u - \partial_y v = 0 \\ (-\partial_x v - \partial_y u)\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0} \end{cases}$$

de onde procedem as condições de Cauchy-Riemann mencionadas no enunciado.

### Problema 14

Sejam  $f, g$  dois campos escalares diferenciáveis. Prove que  $(\nabla f) \times (\nabla g)$  é solenoidal. Use o ex. 8, letra b).

**Solução:** Pelo exercício 8b,

$$\nabla \cdot ((\nabla f) \times (\nabla g)) = \nabla f \cdot (\nabla \times (\nabla g)) - \nabla g \cdot (\nabla \times (\nabla f)).$$

Agora vejamos que mostrar que será solenoidal se reduzirá a mostrar que os gradientes na realidade são irrotacionais (veja que esse é o exercício 10). Podemos fazer apenas para  $\nabla f$  e o outro caso será perfeitamente análogo.

- Coordenadas cartesianas:

$$\nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \partial_x f & \partial_y f & \partial_z f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_y & \partial_z \\ \partial_y f & \partial_z f \end{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} + \begin{vmatrix} \partial_z & \partial_x \\ \partial_z f & \partial_x f \end{vmatrix} \hat{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ \partial_x f & \partial_y f \end{vmatrix} \hat{\mathbf{k}}$$

Notemos que cada termo do vetor resultante é do tipo  $\partial_{ij}f - \partial_{ji}f$ . Dada a diferenciabilidade, podemos assumir que vale o teorema de Clairaut e então

$$\partial_{ij}f = \partial_{ji}f \Rightarrow \partial_{ij}f - \partial_{ji}f = 0$$

logo  $\nabla \times (\nabla f) = 0$ . Por fim, fazendo o mesmo pra  $\nabla g$ :

$$\nabla \cdot ((\nabla f) \times (\nabla g)) = \nabla f \cdot \mathbf{0} - \nabla g \cdot \mathbf{0} = 0.$$

**Problema 15**

Prove que  $\nabla \times (\phi \nabla f) = \mathbf{0}$ , onde  $\phi$  é um campo escalar diferenciável.

**Solução:** Usando o exercício 8a:

$$\nabla \times (\phi \nabla \phi) = \phi[\nabla \times (\nabla \phi)] + \nabla \phi \times \nabla \phi$$

Veja que  $\nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0}$  como mostrado no exercício anterior. Ademais, note que para qualquer  $\mathbf{u}$  vale  $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ . Logo o resultado será a soma de vetores nulos e, portanto, também vetor nulo.

### Problema 16

Considere o conjunto  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$  e o campo vetorial

$$\mathbf{u} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{i}} + \frac{x}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{j}}$$

se  $(x, y) \in S$ . Mostre que  $\nabla \times \mathbf{u} = 0 = \nabla \cdot \mathbf{u}$ .

**Divergência:**

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \\ &= -\frac{(x^2 + y^2) \cancel{\partial_x y}^0 - y \partial_x (x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{(x^2 + y^2) \cancel{\partial_y x}^0 - x \partial_y (x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

**Rotacional:** Veja que haverá somente componente em  $z$ . Então:

$$\begin{aligned} [\nabla \times \mathbf{u}]_z &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{(x^2 + y^2) \cancel{\partial_x x}^1 - x \partial_x (x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{(x^2 + y^2) \cancel{\partial_y y}^1 - y \partial_y (x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= \frac{2(x^2 + y^2) - 2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

### Problema 17

Usando o item 1) a), mostre que se  $\mathbf{u}$  é um vetor constante, então  $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{u}$ .

**Coordenadas cartesianas, sem uso de 1)a):**

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \nabla \times [(u_2z - u_3y)\hat{\mathbf{i}} + (u_3x - u_1z)\hat{\mathbf{j}} + (u_1y - u_2x)\hat{\mathbf{k}}] = \nabla \times v_1\hat{\mathbf{i}} + v_2\hat{\mathbf{j}} + v_3\hat{\mathbf{k}}$$

Usando  $\mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{r}$ , faremos por componente:

$$[\nabla \times \mathbf{v}]_x = \partial_y v_3 - \partial_z v_2 = u_1 - (-u_1) = 2u_1$$

$$[\nabla \times \mathbf{v}]_y = \partial_z v_1 - \partial_x v_3 = u_2 - (-u_2) = 2u_2$$

$$[\nabla \times \mathbf{v}]_z = \partial_x v_2 - \partial_y v_1 = u_3 - (-u_3) = 2u_3$$

de onde temos que  $\nabla \times \mathbf{v} = 2\mathbf{u}$ .

## Problema 18

(a) Mostre que  $\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \nabla(u^2) - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$

**Notação indicial, cartesiano:**

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})]_i &= \varepsilon_{ijk} u_j [\nabla \times \mathbf{u}]_k = \varepsilon_{ijk} u_j \varepsilon_{kmn} \partial_m u_n = (\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn}) u_j \partial_m u_n = \\
 &= \sum_{j,m,n} \left( \sum_k \underbrace{\begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jk} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kk} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}}_{1!} \right) u_j \partial_m u_n = \\
 &= 1! \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jm} & \delta_{jn} \end{vmatrix} u_j \partial_m u_n = (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) u_j \partial_m u_n = \\
 &= \delta_{im} \delta_{jn} u_j \partial_m u_n - \delta_{in} \delta_{jm} u_j \partial_m u_n = u_j \partial_i u_j - u_j \partial_j u_i.
 \end{aligned}$$

Agora note que  $u_j \partial_i u_j = \frac{1}{2} \partial_i (u_j u_j) = \frac{1}{2} \partial_i (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \partial_i (u^2) = \frac{1}{2} [\nabla(u^2)]_i$ . Ademais, veja que o segundo termo  $u_j \partial_j u_i$  é o produto escalar  $\mathbf{u} \cdot \nabla$  aplicado ao termo correspondente de  $\mathbf{u}$ . Então, na forma vetorial, podemos entender como se esse produto escalar fosse um operador aplicado em  $\mathbf{u}$ , a saber,  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ .

(b) Mostre que se o potencial magnético  $\mathbf{A}$  é dado por  $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(u \nabla v - v \nabla u)$ , então o campo magnético é dado por  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla u \times \nabla v$ .

**Solução:** Usaremos os Problemas 8a, 7b e a identidade que deduzimos para resolver o Problema 14:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \left[ \frac{1}{2}(u \nabla v - v \nabla u) \right] &= \frac{1}{2} \nabla \times (u \nabla v) - \frac{1}{2} \nabla \times (v \nabla u) = \\
 &= \frac{1}{2} (u [\nabla \times \nabla v] + \nabla u \times \nabla v) - \frac{1}{2} (v [\nabla \times \nabla u] + \nabla v \times \nabla u) \\
 &= \frac{1}{2} \nabla u \times \nabla v - \frac{1}{2} \nabla v \times \nabla u = \nabla u \times \nabla v
 \end{aligned}$$

### Problema 19

Se o potencial eletromagnético  $\mathbf{A}$  é dado por

$$\mathbf{A} = \frac{yz}{r(x^2 + y^2)} \hat{\mathbf{i}} - \frac{xz}{r(x^2 + y^2)} \hat{\mathbf{j}},$$

calcule a indução magnética  $\mathbf{B}$  dada por  $\nabla \times \mathbf{A}$ .

**Solução:**

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = (\partial_x A_y - \partial_y A_x) \hat{\mathbf{k}}$$

Há apenas uma componente em  $z$  pois o potencial está definido apenas no plano  $xy$ . Sendo assim, a solução não pode ser a  $\mathbf{B} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$  indicada, que possui componentes nas três direções. Entretanto, vamos calcular o que for possível:

$$\begin{aligned}\partial_x A_y &= -\frac{zr(x^2 + y^2) - xz[\frac{x}{r}(x^2 + y^2) + 2xr]}{r^2(x^2 + y^2)^2} \\ \partial_y A_x &= \frac{zr(x^2 + y^2) - yz[\frac{y}{r}(x^2 + y^2) + 2yr]}{r^2(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$