Cálculo Vetorial e Tensorial 2021.2 ——— **CVT 2021.2**
Última atualização: 13 de junho de 2021 **Lista 3**
Repositório online: `https://github.com/petrinijr/listasCVT`

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Mostrar que $\iint_S (f\partial_n g - g\partial_n f)dS = \iiint_V (f\nabla^2 g - g\nabla^2 g)dV$

Solução: Veja que a notação $\partial_n \phi = \frac{\partial \phi}{\partial n}$ representa a derivada direcional do campo escalar na direção $\hat{\mathrm{n}}$ *normal* à superfície, o que pode ser expresso por $\partial_n \phi = \nabla\phi \cdot \hat{\mathbf{n}}$. Então:

$$\iint_S (f\partial_n g - g\partial_n f)dS = \iint_S (f\nabla g - g\nabla f)\cdot \hat{\mathbf{n}}dS = \iint_S (f\nabla g - g\nabla f)\cdot d\mathbf{S}$$

Usaremos a propriedade mostrada a seguir:

$$\nabla\cdot(\phi\mathbf{u}) = \partial_i(\phi\mathbf{u})_i = \partial_i\phi u_i = \phi\partial_i u_i + u_i\partial_i\phi = \phi\nabla\cdot\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla\phi,$$

o teorema de Gauss e a definição de Laplaciano $\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla$:

$$\begin{aligned}
\iint_S (f\nabla g - g\nabla f)\cdot d\mathbf{S} &= \iiint_V \nabla\cdot(f\nabla g - g\nabla f)dV \\
&= \iiint_V (\cancel{\nabla f\cdot\nabla g} + f\nabla^2 g - \cancel{\nabla f\cdot\nabla g} - g\nabla^2 f) = \\
&= \iiint_V (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)dV
\end{aligned}$$

Problema 6

$\iint_S (f\partial_n g)dS = \iint_s (g\partial_n f)dS$, se f, g forem harmônicas.

Solução: Basta usar o exercício anterior e a definição de que se ϕ é harmônica, $\nabla^2\phi = 0$.

$$\iint_S (f\partial_n g - g\partial_n f)dS = \iint_S (f\partial_n g)dS - \iint_S (g\partial_n f)dS = \iiint_V (f\cancelto{0}{\nabla^2 g} - g\cancelto{0}{\nabla^2 f})dV = 0$$

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Problema 11

Problema 12

Problema 13

Problema 14