Problema 1

Dados vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^3$ e constantes $a, b \in \mathbb{R}$, mostre que:

(a) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ e $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$

Antissimetria: notemos que na expressão $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$, ao colocar $\mathbf{u}$ no lugar de $\mathbf{v}$ e vice-versa[a], obtém-se $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{u})$ e, da álgebra vetorial, $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Então $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0} \Rightarrow -\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ e bastaria mostrar a primeira identidade para obter a segunda sem esforço adicional.

Notação indicial: $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \varepsilon_{ijk} u^i u^j v^k$ e notamos que, como cada termo que acompanha ε_{ijk} é oposto ao que acompanha ε_{jik} (exemplo: $\varepsilon_{123} u^1 u^2 v^3 = -\varepsilon_{213} u^2 u^1 v^3$) então ao serem *somados* (note que o índice repetido implica uma soma) o resultado é o anulamento de pares de termos da soma[b] e, por consequência, da soma inteira.

Geometria: em Geometria Analítica se definiu como $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ o vetor que é *normal*[c] ao plano definido por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Ademais, é ortogonal aos próprios $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e vale, portanto, $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = ||\mathbf{u}||||\mathbf{u} \times \mathbf{v}|| \cos\beta = u^2 v \sin\alpha \cos\beta = 0$ pois dados α ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e β ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, ocorre que $\beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\beta = 0$.

Vetores em componentes cartesianos: Dados[d]

$$\mathbf{u} = u^i \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{i} = u^1 \hat{\mathbf{i}} + u^2 \hat{\mathbf{j}} + u^3 \hat{\mathbf{k}}$$

e

$$\mathbf{v} = v^i \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{i} = v^1 \hat{\mathbf{i}} + v^2 \hat{\mathbf{j}} + v^3 \hat{\mathbf{k}},$$

tem-se então, expandindo o determinante pela primeira coluna:

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \\ u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix} = u^1 \cancelto{0}{\begin{vmatrix} u^2 & u^3 \\ v^2 & v^3 \end{vmatrix}} - u^1 \cancelto{0}{\begin{vmatrix} u^2 & u^3 \\ v^2 & v^3 \end{vmatrix}} + v^1 \cancelto{0}{\begin{vmatrix} u^2 & u^3 \\ u^2 & u^3 \end{vmatrix}},$$

em que o mesmo resultado seria obtido fazendo qualquer outra expansão (método de Laplace), inclusive a primeira linha como usual. Ademais, o mesmo resultado seria obtido notando que existe um teorema da Álgebra matricial em que se uma linha ou coluna é combinação linear da outra (em particular, se uma é identicamente igual a outra), então o determinante será nulo.

(b) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$

Notação indicial: $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = u^i[\mathbf{v}+\mathbf{w}]_i = u^i(v_i+w_i) = u^iv_i + u^iw_i = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$.

Vetores em componentes cartesianos:

$$\mathbf{v}+\mathbf{w} = (v^1+w^1)\hat{\mathbf{i}} + (v^2+w^2)\hat{\mathbf{j}} + (v^3+w^3)\hat{\mathbf{k}},$$

portanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{w} &= \\ u^1(v^1+w^1)+u^2(v^2+w^2)+u^3(v^3+w^3) &= (u^1v^1+u^2v^2+u^3v^3)+(u^1w^1+u^2w^2+u^3w^3) \\ &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}.\end{aligned}$$

(c) $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{w}$

Notação indicial: $[\mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{w}]_i = \varepsilon_{ijk}u^j[\mathbf{v}+\mathbf{w}]^k = \varepsilon_{ijk}u^i(v^k+w^k) = \varepsilon_{ijk}u^jv^k+\varepsilon_{ujk}v^jw^k = [\mathbf{u}\times\mathbf{v}]_i + [\mathbf{u}\times\mathbf{w}]_i$.

Vetores em componentes cartesianas:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w}) &= \begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1+w^1 & v^2+w^2 & v^3+w^3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ u^1 & u^2 & u^3 \\ w^1 & w^2 & w^3\end{vmatrix} \\ &= \mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{w}.\end{aligned}$$

(d) $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = (uv)^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2$

Notação indicial:

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = [\mathbf{u}\times\mathbf{v}]^i[\mathbf{u}\times\mathbf{v}]_i = \varepsilon^{imn}u_mv_n\varepsilon_{ipq}u^pv^q = (\varepsilon^{imn}\varepsilon_{ipq})u_mv_nu^pv^q,$$

mas

$$\begin{aligned}\varepsilon^{imn}\varepsilon_{ipq} &= \begin{vmatrix}\delta^i{}_i & \delta^i{}_p & \delta^i{}_q \\ \delta^m{}_i & \delta^m{}_p & \delta^m{}_q \\ \delta^n{}_i & \delta^n{}_p & \delta^n{}_q\end{vmatrix} = \overset{3}{\cancel{\delta^i{}_i}}\begin{vmatrix}\delta^m{}_p & \delta^m{}_q \\ \delta^n{}_p & \delta^n{}_q\end{vmatrix} - \delta^i{}_p\begin{vmatrix}\delta^m{}_p & \delta^m{}_q \\ \delta^n{}_p & \delta^n{}_q\end{vmatrix} + \delta^i{}_q\begin{vmatrix}\delta^m{}_i & \delta^m{}_p \\ \delta^n{}_i & \delta^n{}_p\end{vmatrix} \\ &= \delta^m{}_p\delta^n{}_q - \delta^m{}_q\delta^n{}_p,\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}(\delta^m{}_p\delta^n{}_q - \delta^m{}_q\delta^n{}_p)u_mv_nu^pv^q = \delta^m{}_p\delta^n{}_qu_mv_nu^pv^q - \delta^m{}_q\delta^n{}_pu_mv_nu^pv^q &= u^pv^qu_pv_q - u^qv^pu_pv_q \\ &= (u^pu_p)(v^qv_q) - (u^qv_q)(v^pu_p) = (uv)^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2.\end{aligned}$$

Álgebra vetorial: nota-se que

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = ||\mathbf{u}\times\mathbf{v}||^2 = u^2v^2\sin^2\alpha$$

em que α é ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Mas $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$, então

$$||\mathbf{u}\times\mathbf{v}||^2 = u^2v^2 - u^2v^2\cos^2\alpha = (uv)^2 - (uv\cos\alpha)^2 = (uv)^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2.$$

(e) $(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = u^2 - v^2$

Notação indicial[e]**:**

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = (\mathbf{u}-\mathbf{v})^i(\mathbf{u}+\mathbf{v})_i = \sum_i (\mathbf{u}-\mathbf{v})^i(\mathbf{u}+\mathbf{v})_i = \sum_i (u^i - v^i)(u_i + v_i) = \\
= \sum_i (u^i u_i - u^i v_i + v^i u_i - v^i v_i) = u^i u_i - u^i v_i + v^i u_i - v^i v_i = \\
= u^2 - \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - v^2 = u^2 - v^2
\end{aligned}
$$

Álgebra vetorial: $(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \cancelto{0}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = u^2 - v^2$

(f) $(\mathbf{u}-\mathbf{v})\times(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = 2\mathbf{u}\times\mathbf{v}$

Notação indicial:

$$
\begin{aligned}
[(\mathbf{u}-\mathbf{v})\times(\mathbf{u}+\mathbf{v})]_i = \varepsilon_{ijk}(\mathbf{u}-\mathbf{v})^j(\mathbf{u}+\mathbf{v})^k = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk}(\mathbf{u}-\mathbf{v})^j(\mathbf{u}+\mathbf{v})^k = \\
= \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk}(u^j - v^j)(u^k + v^k) = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk}(u^j u^k + u^j v^k - v^j u^k - v^j v^k) \\
= \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} u^j u^k + \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} u^j v^k - \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} v^j u^k - \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} v^j v^k = \\
= \varepsilon_{ijk} u^j u^k + \varepsilon_{ijk} u^j v^k - \varepsilon_{ijk} v^j u^k - \varepsilon_{ijk} v^j v^k = \\
= \cancelto{0}{(\mathbf{u}\times\mathbf{u})_i} + (\mathbf{u}\times\mathbf{v})_i - (\mathbf{v}\times\mathbf{u})_i - \cancelto{0}{(\mathbf{v}\times\mathbf{v})_i} = \\
= (\mathbf{u}\times\mathbf{v})_i + (\mathbf{u}\times\mathbf{v})_i = 2(\mathbf{u}\times\mathbf{v})_i
\end{aligned}
$$

Álgebra vetorial: $(\mathbf{u}-\mathbf{v})\times(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \cancelto{0}{\mathbf{u}\times\mathbf{u}} + \mathbf{u}\times\mathbf{v} - \mathbf{v}\times\mathbf{u} + \cancelto{0}{\mathbf{v}\times\mathbf{v}} = 2\mathbf{u}\times\mathbf{v}$

(g) $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \mathbf{v}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}) - \mathbf{w}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$ [f]

Notação indicial:

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})]_i = \varepsilon_{ijk} u^j (\mathbf{v}\times\mathbf{w})^k = \varepsilon_{ijk} u^j (\varepsilon^{kpq} v_p w_q) = \varepsilon_{ijk}\varepsilon^{kpq} u^j v_p w_q = \\
= \begin{vmatrix} \delta^k{}_i & \delta^k{}_j & \delta^k{}_k \\ \delta^p{}_i & \delta^p{}_j & \delta^p{}_k \\ \delta^q{}_i & \delta^q{}_j & \delta^q{}_k \end{vmatrix} u^j v_p w_q = \sum_k \underbrace{\begin{vmatrix} \cancelto{0}{\delta^k{}_i} & \cancelto{0}{\delta^k{}_j} & \cancelto{1}{\delta^k{}_k} \\ \delta^p{}_i & \delta^p{}_j & \cancelto{0}{\delta^p{}_k} \\ \delta^q{}_i & \delta^q{}_j & \cancelto{0}{\delta^q{}_k} \end{vmatrix}}_{\text{1! formas de escolher o índice somado}} u^j v_p w_q = \\
= 1! \begin{vmatrix} \delta^p{}_i & \delta^p{}_j \\ \delta^q{}_i & \delta^q{}_j \end{vmatrix} u^j v_p w_q = (\delta^p{}_i \delta^q{}_j - \delta^p{}_j \delta^q{}_i) u^j v_p w_q = \\
= \delta^p{}_i \delta^q{}_j u^j v_p w_q - \delta^p{}_j \delta^q{}_i u^j v_p w_q = u^j v_i w_j - u^j v_j w_i = \\
= v_i (u^j w_j) - w_i (u^j v_j) = v_i(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}) - w_i(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})
\end{aligned}
$$

(h) $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{x}) = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}) - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{x})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}) = \begin{vmatrix} \mathbf{u}\cdot\mathbf{w} & \mathbf{u}\cdot\mathbf{x} \\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} & \mathbf{v}\cdot\mathbf{x} \end{vmatrix}$

Notação indicial:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{x}) &= (\mathbf{u}\times\mathbf{v})^i(\mathbf{w}\times\mathbf{x})_i = \varepsilon^{ijk}u_j v_k \varepsilon_{imn} w^m x^n = \varepsilon^{ijk}\varepsilon_{imn} w^m x^n u_j v_k = \\
&= \sum_i \underbrace{\begin{vmatrix} \cancelto{1}{\delta^i{}_i} & \cancelto{0}{\delta^i{}_m} & \cancelto{0}{\delta^i{}_n} \\ \cancelto{0}{\delta^j{}_i} & \delta^j{}_m & \delta^j{}_n \\ \cancelto{0}{\delta^k{}_i} & \delta^k{}_m & \delta^k{}_n \end{vmatrix}}_{1!} w^m x^n u_j v_k = 1!(\delta^j{}_m \delta^k{}_n - \delta^j{}_n \delta^k{}_m) w^m x^n u_j v_k \\
&= \delta^j{}_m \delta^k{}_n w^m x^n u_j v_k - \delta^j{}_n \delta^i{}_m w^m x^n u_j v_k = \\
&= w^j x^k u_j v_k - w^k x^j u_j v_k = (u_j w^j)(v_k x^k) - (u_j x^j)(v_k w^k) = \\
&= (\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}) - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{x})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})
\end{aligned}
$$

(i) (identidade de Jacobi)[g] $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) + \mathbf{w}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) + \mathbf{v}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

Aplicação repetida de BAC-CAB:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) + \mathbf{w}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) + \mathbf{v}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{u}) &= \\
&= [\mathbf{v}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}) - \mathbf{w}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})] + [\mathbf{u}(\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}) - \mathbf{v}(\mathbf{w}\cdot\mathbf{u})] + [\mathbf{w}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}) - \mathbf{u}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})] \\
&= [\mathbf{v}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}) - \mathbf{v}(\mathbf{w}\cdot\mathbf{u})] + [\mathbf{w}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}) - \mathbf{w}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})] + [\mathbf{u}(\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}) - \mathbf{u}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})] \\
&= \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

---

[a] Isso pode ser feito pois são tomados $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ arbitrários.

[b] Note que a maioria dos termos (quaisquer com índices repetidos) já é nula em razão da própria definição do símbolo de Levi-Civita, ε.

[c] Ou, caso não definam um plano são paralelos e então seu produto vetorial é o vetor nulo $\mathbf{0}$.

[d] Será usado o índice *acima* para componentes de vetores, algo que ficará claro na seção de tensores do curso. Por ora, dá igual escrever o índice das componentes "em cima"ou "em baixo", contanto que não se confunda com potências.

[e] Note que a notação de Einstein para soma foi suspensa e depois retomada em passos intermediários. É sempre possível fazer isso, na realidade, sequer é necessário usar a notação de Einstein e quando esta for um empecilho se recomenda escrever por extenso todos os somatórios.

[f] Essa regra também é conhecida como regra BAC-CAB ("*back minus cab*"), veja, mantendo $\mathbf{a}$ fora do parêntesis do lado esquerdo: $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$.

[g] Note que os termos seguintes ao primeiro na soma são permutações cíclicas dos vetores nas posições.

Problema 2

Calcule $\frac{\partial^2}{\partial_x \partial_y} f = \partial_{yx} f$ dos seguintes campos escalares:

(a) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2), \quad (x,y) \neq (0,0)$

$$\begin{aligned}\partial_{yx} \ln(x^2+y^2) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln(x^2+y^2)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y}\frac{d}{d(x^2+y^2)}\ln(x^2+y^2)\right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(2y \times \frac{1}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right) = \frac{(x^2+y^2)\cancelto{0}{\partial_x(2y)} - 2y\partial_x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

(b) $f(x,y) = \arctan(y/x), \quad (x,y) \neq (0,0)$

$$\begin{aligned}\partial_{yx} \arctan(y/x) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\arctan(y/x)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(y/x)}{\partial y}\frac{d}{d(y/x)}\arctan(y/x)\right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x} \times \frac{1}{1+(y/x)^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x} \times \frac{x^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \\ &= \frac{(x^2+y^2)\cancelto{1}{\partial_x(x)} - x\partial_x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

Problema 3

Seja $v(r,t) = t^n \exp(-\frac{r^2}{4t})$. Calcule n para que o campo escalar v satisfaça a equação:

$$\partial_t v = \frac{1}{r^2}\partial_r \left(r^2 \partial_r v\right)$$

Solução: Temos, separadamente:

$$\partial_t v = nt^{n-1} \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right) - t^n \times \frac{r^2}{4t^2} \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right) = \left(nt^{n-1} - \frac{1}{4}t^{n-2}r^2\right) \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right)$$

e, para o lado direito da equação:

$$\frac{1}{r^2}\partial_r \left(r^2 \partial_r v\right) = \frac{1}{r^2}(2r\partial_r v + r^2 \partial_{rr} v) = \frac{2}{r}\partial_r v + \partial_{rr} v,$$

mas

$$\partial_r v = t^n \partial_r \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right) = -\frac{2r}{4t} t^n \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right) = -\frac{1}{2} r t^{n-1} \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right)$$

$$\partial_{rr} v = -\frac{1}{2}t^{n-1} \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right) = \frac{1}{4} r^2 t^{n-2} \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right) = \left(-\frac{1}{2}t^{n-1} - \frac{1}{4}t^{n-2}r^2\right) \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right),$$

portanto,

$$\frac{2}{r}\partial_r v + \partial_{rr} v = \left(-\frac{3}{2}t^{n-1} - \frac{1}{4}t^{n-2}r^2\right) \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right),$$

por fim:

$$\left(nt^{n-1} - \frac{1}{4}t^{n-2}r^2\right) \cancel{\exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right)} = \left(-\frac{3}{2}t^{n-1} - \frac{1}{4}t^{n-2}r^2\right) \cancel{\exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right)}$$

$$nt^{n-1} - \cancel{\frac{1}{4}t^{n-2}r^2} = -\frac{3}{2}t^{n-1} - \cancel{\frac{1}{4}t^{n-2}r^2} \Rightarrow n\cancelto{\neq 0}{t^{n-1}} = -\frac{3}{2}\cancelto{\neq 0}{t^{n-1}} \Rightarrow n = -\frac{3}{2}$$

Problema 4

Calcule o gradiente ∇f dos seguintes campos escalares:

(a) $f(x,y) = x^2 + y\cos(xy)$

$$\nabla f = (\partial_x f)\hat{\mathbf{i}} + (\partial_y f)\hat{\mathbf{j}} = [2x - y^2\sin(xy)]\hat{\mathbf{i}} + [\cos(xy) - xy\sin(xy)]\hat{\mathbf{j}}$$

$$||\nabla f|| = \sqrt{[2x - y^2\sin(xy)]^2 + [\cos(xy) - xy\sin(xy)]^2}$$

(b) $f(x,y) = \exp(x^2)\sin y$

$$\nabla f = (\partial_x f)\hat{\mathbf{i}} + (\partial_y f)\hat{\mathbf{j}} = [2x\sin y\exp(x^2)]\hat{\mathbf{i}} + [\cos y\exp(x^2)]\hat{\mathbf{j}}$$

$$||\nabla f|| = \exp(x^2)\sqrt{4x^2\sin^2 y + \cos^2 y}$$

(c) $f(x,y,z) = \ln(x^2 + 2y^3 - z^4)$

$$\begin{aligned}\nabla f &= (\partial_x f)\hat{\mathbf{i}} + (\partial_y f)\hat{\mathbf{j}} + (\partial_z f)\hat{\mathbf{k}} = \\ &= \frac{df}{d(x^2+2y^3-z^4)} f\{[\partial_x(x^2+2y^3-z^4)]\hat{\mathbf{i}} + [\partial_y(x^2+2y^3-z^4)]\hat{\mathbf{j}} + [\partial_z(x^2+2y^3-z^4)]\hat{\mathbf{k}}\} \\ &= \frac{1}{x^2+2y^3-z^4}[2x\hat{\mathbf{i}} + 6y^2\hat{\mathbf{j}} - 4z^3\hat{\mathbf{k}}] = \\ &= \frac{2x}{x^2+2y^3-z^4}\hat{\mathbf{i}} + \frac{6y^2}{x^2+2y^3-z^4}\hat{\mathbf{j}} - \frac{4z^3}{x^2+2y^3-z^4}\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

$$||\nabla f|| = \frac{1}{|x^2+2y^3-z^4|}\sqrt{4x^2+36y^4+16z^6} = \frac{2}{|x^2+2y^3-z^4|}\sqrt{x^2+9y^4+4z^6}$$

Problema 5

Considere duas funções $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Prove que $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$.

Coordenadas cartesianas: Tem-se:

$$\begin{aligned}\nabla(fg) &= [\partial_x(fg)]\hat{\mathbf{i}} + [\partial_y(fg)]\hat{\mathbf{j}} + [\partial_z(fg)]\hat{\mathbf{k}} = [g\partial_x f + f\partial_x g]\hat{\mathbf{i}} + [g\partial_y f + f\partial_y g]\hat{\mathbf{j}} + [g\partial_z f + f\partial_z g]\hat{\mathbf{k}} \\ &= f[\partial_x g\hat{\mathbf{i}} + \partial_y g\hat{\mathbf{j}} + \partial_z g\hat{\mathbf{k}}] + g[\partial_x f\hat{\mathbf{i}} + \partial_y f\hat{\mathbf{j}} + \partial_z f\hat{\mathbf{k}}] = f\nabla g + g\nabla f.\end{aligned}$$

Diferencial:[a] Usando a definição de gradiente:

$df = \nabla f \cdot d\mathbf{r}$ e $dg = \nabla g \cdot d\mathbf{r}$ mas por regra do produto $d(fg) = fdg + gdf$, então: $d(fg) = fdg + gdf = f\nabla g \cdot d\mathbf{r} + g\nabla f \cdot d\mathbf{r} = (f\nabla g + g\nabla f) \cdot d\mathbf{r}$. Por definição, $d(fg) = \nabla(fg) \cdot d\mathbf{r}$, de onde se conclui que para que valha em qualquer diferencial $d\mathbf{r}$, deve ocorrer que $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$.

[a] Basicamente, um grande abuso de notação.

Problema 6

Mostre que $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\mathbf{r}$.

Coordenadas esféricas:[a]

$$\nabla(r^n) = \underbrace{\frac{1}{1}}_{1/h_1}(\partial_r r^n)\hat{\mathbf{r}} + \underbrace{\frac{1}{r}}_{1/h_2}\cancelto{0}{(\partial_\theta r^n)} + \underbrace{\frac{1}{r\sin\theta}}_{1/h_3}\cancelto{0}{(\partial_\phi)r^n} = nr^{n-1}\hat{\mathbf{r}},$$

mas $r\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}$, logo $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\mathbf{r}$.

Coordenadas cartesianas:

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} \Rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow r^n = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}},$$

portanto, vale:

$$\begin{aligned}
\nabla(r^n) &= [\partial_x(r^n)]\hat{\mathbf{i}} + [\partial_y(r^n)]\hat{\mathbf{j}} + [\partial_z(r^n)]\hat{\mathbf{k}} = \frac{d(r^n)}{dr}[(\partial_x r)\hat{\mathbf{i}} + (\partial_y r)\hat{\mathbf{j}} + (\partial_z r)]\hat{\mathbf{k}} \\
&= nr^{n-1}\left[\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\cancel{2}z}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{\mathbf{k}}\right] \\
&= nr^{n-2}[x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}] = nr^{n-2}\mathbf{r}
\end{aligned}$$

Diferencial:[b]

$$r = \sqrt{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}} = (\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})^{\frac{1}{2}} \Rightarrow r^n = (\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})^{\frac{n}{2}}[x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}] = nr^{n-2}\mathbf{r},$$

pelo uso de regra da cadeia no diferencial,

$$d(r^n) = d[(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})^{\frac{n}{2}}] = \frac{n}{2}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})^{\frac{n}{2}-1}d(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}) = \frac{n}{2}r^{n-2}d(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}),$$

mas ocorre que $d(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}) = \mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} + d\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = 2\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}$, então:

$$d(r^n) = nr^{n-2}\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = \nabla(r^n)\cdot d\mathbf{r}$$

que ocorre para $d\mathbf{r}$ completamente arbitrário apenas se $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\mathbf{r}$.

[a] Os termos indicados por h_i são chamados *coeficientes de Lamé* e definidos por $h_i = ||\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^i}||$ em que x^i é a i-ésima coordenada. O problema poderia ter sido resolvido em qualquer outro sistema de coordenadas (inclusive cartesianas!), o esférico foi escolhido apenas por cancelar a maior parte dos termos e assumindo que se tratava de $\mathbb{R}^3$.

[b] Assim como no problema anterior, foi feito grande abuso de notação.

Problema 7

Mostre que os operadores divergente e rotacional são lineares, ou seja, dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e constante $a \in \mathbb{R}$ segue-se que:

(a) $\nabla \cdot (a\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{v}$

Coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (a\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \partial_x(au_1 + v_1) + \partial_y(au_2 + v_2) + \partial_z(au_3 + v_3) = \\ &= [a\partial_x u_1 + \partial_x v_1] + [a\partial_y u_2 + \partial_y v_2] + [a\partial_z u_3 + \partial_z v_3] \\ &= [a(\partial_x u_1 + \partial_y u_2 + \partial_z u_3)] + [\partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3] = \\ &= a\nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{v}\end{aligned}$$

Notação indicial, cartesiano:

$$\nabla \cdot (a\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \partial_i(a\mathbf{u} + \mathbf{v})_i = \partial_i(au_i + v_i) = a\partial_i u_i + \partial_i v_i = a\nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{v}$$

(b) $\nabla \times (a\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\nabla \times \mathbf{u} + \nabla \times \mathbf{v}$

Coordenadas cartesianas:[a]

$$\begin{aligned}\nabla \times (a\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_k \\ au_1 + v_1 & au_2 + v_2 & au_3 + v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_k \\ au_1 & au_2 & au_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_k \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \\ &= a\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_k \\ u_1 + v_1 & u_2 + v_2 & u_3 + v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_k \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = a\nabla \times \mathbf{u} + \nabla \times \mathbf{v}\end{aligned}$$

Notação indicial, cartesiano:

$$\begin{aligned}[\nabla \times (a\mathbf{u} + \mathbf{v})]_i &= \varepsilon_{ijk}\partial_j(a\mathbf{u} + \mathbf{v})_k = \varepsilon_{ijk}\partial_j(au_k + v_k) = \varepsilon_{ijk}(a\partial_j u_k + \partial_j v_k) = \\ &= a\varepsilon_{ijk}\partial_j u_k + \varepsilon_{ijk}\partial_j v_k = a[\nabla \times \mathbf{u}]_i + [\nabla \times \mathbf{v}]_i\end{aligned}$$

[a] Aqui foram usadas propriedades de matrizes/determinantes. Pode-se chegar à mesma conclusão indo até o fim na expansão dos termos.

Problema 8

Mostre que:

(a) $\nabla \times (f\mathbf{u}) = f\nabla \times \mathbf{u} + (\nabla f) \times \mathbf{u}$

Coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}
\nabla \times (f\mathbf{u}) &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ fu_1 & fu_2 & fu_3 \end{vmatrix} = \\
&= [\partial_y(fu_3) - \partial_z(fu_2)]\hat{\mathbf{i}} + [\partial_z(fu_1) - \partial_x(fu_3)]\hat{\mathbf{j}} + [\partial_x(fu_2) - \partial_y(fu_1)]\hat{\mathbf{k}} = \\
&= [f\partial_y u_3 + u_3\partial_y f - f\partial_z u_2 - u_2\partial_z f]\hat{\mathbf{i}} + [f\partial_z u_1 + u_1\partial_z f - f\partial_x u_3 - u_3\partial_x f]\hat{\mathbf{j}} + \\
&\quad\ + [f\partial_x u_2 + u_2\partial_x f - f\partial_y u_1 - u_1\partial_y f]\hat{\mathbf{k}} = \\
&= f[(\partial_y u_3 - \partial_z u_2)\hat{\mathbf{i}} + (\partial_z u_1 - \partial_x u_3)\hat{\mathbf{j}} + (\partial_x u_2 - \partial_y u_1)\hat{\mathbf{k}}] + \\
&\quad\ [(\partial_y f)u_3 - (\partial_z f)u_2]\hat{\mathbf{i}} + [(\partial_z f)u_1 - (\partial_x f)u_3]\hat{\mathbf{j}} + [(\partial_x f)u_2 - (\partial_y f)u_1]\hat{\mathbf{k}} = \\
&= f\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x f & \partial_y f & \partial_z f \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = f\nabla \times \mathbf{u} + (\nabla f) \times \mathbf{u}
\end{aligned}$$

Notação indicial, cartesiano:

$$\begin{aligned}
\nabla \times [(f\mathbf{u})]_i &= \varepsilon_{ijk}\partial_j(fu_k) = \varepsilon_{ijk}(f\partial_j u_k + u_k\partial_j f) = f(\varepsilon_{ijk}\partial_j u_k) + \varepsilon_{ijk}(\partial_j f)u_k \\
&= f[\nabla \times \mathbf{u}]_i + [(\nabla f) \times \mathbf{u}]_i
\end{aligned}$$

(b) $\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})$

Coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= \nabla \cdot [(u_2v_3 - u_3v_2)\hat{\mathbf{i}} + (u_3v_1 - u_1v_3)\hat{\mathbf{j}} + (u_1v_2 - u_2v_1)\hat{\mathbf{k}}] = \\
&= \partial_x(u_2v_3 - u_3v_2) + \partial_y(u_3v_1 - u_1v_3) + \partial_z(u_1v_2 - u_2v_1) = \\
&= (u_2\partial_x v_3 + v_3\partial_x u_2 - u_3\partial_x v_2 - v_2\partial_x u_3) + \\
&\quad\ + (u_3\partial_y v_1 + v_1\partial_y u_3 - u_1\partial_y v_3 - v_3\partial_y u_1) + \\
&\quad\ + (u_1\partial_z v_2 + v_2\partial_z u_1 - u_2\partial_z v_1 - v_1\partial_z u_2) = \\
&= \underbrace{[v_1(\partial_y u_3 - \partial_z u_2) + v_2(\partial_z u_1 - \partial_x u_3) + v_3(\partial_x u_2 - \partial_y u_1)]}_{\mathbf{v}\cdot(\nabla\times\mathbf{u})} + \\
&\quad\ + \underbrace{[u_1(\partial_z v_2 - \partial_y v_3) + u_2(\partial_x v_3 - \partial_z v_1) + u_3(\partial_y v_1 - \partial_x v_2)]}_{-\mathbf{u}\cdot(\nabla\times\mathbf{v})} \\
&= \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})
\end{aligned}$$

Notação indicial, cartesiano:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) &= (\partial_i\varepsilon_{ijk}u_jv_k) = \varepsilon_{ijk}\partial_i(u_jv_k) = \varepsilon_{ijk}(u_j\partial_iv_k + v_k\partial_iu_j) = \varepsilon_{ijk}u_j\partial_iv_k + \varepsilon_{ijk}v_k\partial_iu_j\\ &= u_j\varepsilon_{ijk}\partial_iv_k + v_k\varepsilon_{ijk}\partial_iu_j = -u_j\underbrace{\varepsilon_{jik}\partial_iv_k}_{[\nabla\times\mathbf{v}]_j} + v_k\underbrace{\varepsilon_{kij}\partial_iu_j}_{[\nabla\times\mathbf{u}]_k} =\\ &= v_k[\nabla\times\mathbf{u}]_k - u_j[\nabla\times\mathbf{v}]_j = \mathbf{v}\cdot(\nabla\times\mathbf{u}) - \mathbf{u}\cdot(\nabla\times\mathbf{v})\end{aligned}$$

Problema 9

Calcule $\nabla \cdot \mathbf{u}$ e $\nabla \times \mathbf{u}$ para os seguintes campos vetoriais:

(a) $\mathbf{u}(x, y, z) = (x^3 + yz^2)\hat{\mathbf{i}} + (y + xz)\hat{\mathbf{j}} + (z + xy)\hat{\mathbf{k}}$

Divergência:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \partial_x(x^3 + \cancelto{0}{yz^2}) + \partial_y(y + \cancelto{0}{xz}) + \partial_z(z + \cancelto{0}{xy}) = \partial_x x^3 + \partial y_y + \partial_z z = 3x^2 + 2$$

Rotacional:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{u} &= \begin{vmatrix} \partial_y & \partial_z \\ y + xz & z + xy \end{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} + \begin{vmatrix} \partial_z & \partial_x \\ z + xy & x^3 + yz^2 \end{vmatrix} \hat{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ x^3 + yz^2 & y + xz \end{vmatrix} \hat{\mathbf{k}} = \\ &= (x - x)\hat{\mathbf{i}} + (2zy - y)\hat{\mathbf{j}} + (z - z^2)\hat{\mathbf{k}} = 0\hat{\mathbf{i}} + y(2z - 1)\hat{\mathbf{j}} + z(1 - z)\hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

(b) $\mathbf{u}(x, y, z) = (z - 3y2)\hat{\mathbf{i}} + (3x - z)\hat{\mathbf{j}} + (y - 2x)\hat{\mathbf{k}}$

Divergência:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \cancelto{0}{\partial_x(z - 3y^2)} + \cancelto{0}{\partial_y(3x - z)} + \cancelto{0}{\partial_z(y - 2x)} = 0$$

Rotacional:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{u} &= \begin{vmatrix} \partial_y & \partial_z \\ 3x - z & y - 2x \end{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} + \begin{vmatrix} \partial_z & \partial_x \\ y - 2x & z - 3y^2 \end{vmatrix} \hat{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ z - 3y^2 & 3x - z \end{vmatrix} \hat{\mathbf{k}} = \\ &= (1 + 1)\hat{\mathbf{i}} + (1 + 2)\hat{\mathbf{j}} + (3 + 6y)\hat{\mathbf{k}} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} + 3(1 + 2y)\hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

Problema 10

Mostre que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é solenoidal se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são ambos irrotacionais.

Solução: Queremos saber como se comportará $\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ dado $\nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Veja que, pelo Problema 8b, $\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \cancelto{0}{(\nabla \times \mathbf{u})} - \mathbf{u} \cdot \cancelto{0}{(\nabla \times \mathbf{v})} = \mathbf{0}$.

Condição necessária? Não. Basta tomar qualquer vetor $\mathbf{u}$ tal que $\nabla \times \mathbf{u} \neq 0$. De fato, $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ e, evidentemente, $\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Logo $\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{u}) = \mathbf{0}$ não faz $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Problema 11

Se $\mathbf{u}$ é irrotacional (ou seja, $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$), sendo $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}}+y\hat{\mathbf{j}}+z\hat{\mathbf{k}}$, mostre que $\mathbf{u} \times \mathbf{r}$ é solenoidal (um campo vetorial é dito solenoidal se seu divergente for nulo).

Solução: Pelo problema 8b,$\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot \cancelto{0}{\nabla \times \mathbf{u}} - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{r})$. Agora vejamos:

$$\nabla \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \cancelto{0}{\begin{vmatrix} \partial_y & \partial_z \\ y & z \end{vmatrix}}\hat{\mathbf{i}} + \cancelto{0}{\begin{vmatrix} \partial_z & \partial_x \\ z & x \end{vmatrix}}\hat{\mathbf{j}} + \cancelto{0}{\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ x & y \end{vmatrix}}\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0}$$

Daí conclui-se que $\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{r}) = \mathbf{0}$.

Problema 12

Defina o operador momento angular $\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z)$, onde as componentes são dadas por

$$L_x = -i(y\partial_z - z\partial_y), \quad L_y = -i(z\partial_x - x\partial_z), \quad L_z = -i(x\partial_y - y\partial_x)$$

Mostre que $\mathbf{L} = -i\mathbf{r} \times \nabla$. Mostre que $L_xL_y - L_yL_x = iL_z$, $L_zL_x - L_xL_z = iL_y$, $L_yL_z - L_zL_y = iL_x$.

- $\mathbf{L} = -i\mathbf{r} \times \nabla$:[a] Tomando ∇ como um vetor a partir de suas componentes, temos que

$$\mathbf{r} \times \nabla = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ x & y & z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \end{vmatrix} = (y\partial_z - z\partial_y)\hat{\mathbf{i}} + (z\partial_x - x\partial_z)\hat{\mathbf{j}} + (x\partial_y - y\partial_x)\hat{\mathbf{k}},$$

  de onde é imediato que multiplicando por $-i$ se obtem o desejado.

- Demais identidades: Note que cada uma delas é uma componente da identidade

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = (L_yL_z - L_zL_y)\hat{\mathbf{i}} + (L_zL_x - L_xL_z)\hat{\mathbf{j}} + (L_xL_y - L_yL_x)\hat{\mathbf{k}} = i\mathbf{L}.$$

  Note então que se a, b, c formam uma permutação cíclica positiva/par, bastaria mostrar uma única delas e as demais seriam consequência de trocar a, b, c por permutações (pares) de x, y, z:

$$L_bL_c - L_cL_b = iL_a; \quad L_a = -i(b\partial_c - c\partial_b)$$

  Então:

$$\begin{aligned} L_bL_c - L_cL_b &= \cancelto{-1}{(-i)(-i)}[(c\partial_a - a\partial_c)(a\partial_b - b\partial_a) - (a\partial_b - b\partial_a)(c\partial_a - a\partial_c)] \\ &= -\underbrace{c(\partial_b}_{!!!} + a\partial_{ba} - \partial_a b\partial_a - b\partial_{aa}) + a(\partial_c a\partial_b + a\partial_{bc} - \partial_c b\partial_a - b\partial_{ac}) + \\ &\quad + a(\partial_b c\partial_a + c\partial_{ab} - \partial_b a\partial_c - a\partial_{cb}) - b(\partial_a c\partial_a + c\partial_{aa} - \underbrace{\partial_c}_{!!!} - a\partial_{ca}) \end{aligned}$$

  Cancelando os inúmeros termos, notando que pelo teorema de Clairaut (estamos assumindo que valha o teorema para as funções nas quais o operador sera aplicado) $\partial_{ij} = \partial_{ji}$, temos por fim:

$$L_bL_c - L_cL_b = (b\partial_c - c\partial_b) = iL_a$$

[a] Note que $\mathbf{r} \times \nabla \neq \nabla \times \mathbf{r}$. Isso se dá porque, por exemplo, enquanto $\partial_x z$ significa "derivada parcial de z em relação a x", $z\partial_x$ significa "z multiplicando a derivada parcial em relação a x"que ainda será aplicada ao termo que seguirá o ∂_x. Ou seja, o primeiro caso é uma derivada parcial e um segundo é um operador diferencial (a ser posteriormente aplicado).

Problema 13

A velocidade de um fluido bidimensional é dada por $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x,y) = u(x,y)\hat{\mathbf{i}} - v(x,y)\hat{\mathbf{j}}$. Supondo que o fluido seja incompressível (ou seja, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ e irrotacional, prove que valem as *condições de Cauchy-Riemann*

$$\partial_x u = \partial_y v, \quad \partial_y u = -\partial_x v$$

Solução: Sendo irrotacional, sabemos também que $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$. As duas informações podem ser sumarizadas como a seguir:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} & = 0 \\ \nabla \times \mathbf{v} & = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \partial_x u + \partial_y(-v) & = 0 \\ (\partial_x(-v) - \partial_y u)\hat{\mathbf{k}} & = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \partial_x u - \partial_y v & = 0 \\ (-\partial_x v - \partial_y u)\hat{\mathbf{k}} & = \mathbf{0} \end{cases}$$

de onde procedem as condições de Cauchy-Riemann mencionadas no enunciado.

Problema 14

Sejam f, g dois campos escalares diferenciáveis. Prove que $(\nabla \mathbf{f}) \times (\nabla \mathbf{g})$ é solenoidal. Use o ex. 8, letra b).

Solução: Pelo exercício 8b,

$$\nabla \cdot ((\nabla \mathbf{f}) \times (\nabla \mathbf{g})) = \nabla f \cdot (\nabla \times (\nabla f)) - \nabla g \cdot (\nabla \times (\nabla g)).$$

Agora vejamos que mostrar que será solenoidal se reduzirá a mostrar que os gradientes na realidade são irrotacionais (veja que esse é o exercício 10). Podemos fazer apenas para ∇f e o outro caso será perfeitamente análogo.

- Coordenadas cartesianas:

$$\nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \partial_x f & \partial_y f & \partial_z f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_y & \partial_z \\ \partial_y f & \partial_z f \end{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} + \begin{vmatrix} \partial_z & \partial_x \\ \partial_z f & \partial_x f \end{vmatrix} \hat{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ \partial_x f & \partial_y f \end{vmatrix} \hat{\mathbf{k}}$$

  Notemos que cada termo do vetor resultante é do tipo $\partial_{ij} f - \partial_{ji} f$. Dada a diferenciabilidade, podemos assumir que vale o teorema de Clairaut e então

$$\partial_{ij} f = \partial_{ji} f \Rightarrow \partial_{ij} f - \partial_{ji} f = 0$$

  logo $\nabla \times (\nabla f) = 0$. Por fim, fazendo o mesmo pra ∇g:

$$\nabla \cdot ((\nabla \mathbf{f}) \times (\nabla \mathbf{g})) = \nabla f \cdot \mathbf{0} - \nabla g \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Problema 15

Prove que $\nabla \times (\phi \nabla \phi) = \mathbf{0}$, onde ϕ é um campo escalar diferenciável.

Solução: Usando o exercício 8a:

$$\nabla \times (\phi \nabla \phi) = \phi[\nabla \times (\nabla \phi)] + \nabla \phi \times \nabla \phi$$

Veja que $\nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0}$ como mostrado no exercício anterior. Ademais, note que para qualquer $\mathbf{u}$ vale $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$. Logo o resultado será a soma de vetores nulos e, portanto, também vetor nulo.

Problema 16

Considere o conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$ e o campo vetorial

$$\mathbf{u} = -\frac{y}{x^2 + y^2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{x}{x^2 + y^2}\hat{\mathbf{j}}$$

se $(x, y) \in S$. Mostre que $\nabla \times \mathbf{u} = 0 = \nabla \cdot \mathbf{u}$.

Divergência:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{u} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \\
&= -\frac{(x^2 + y^2)\cancelto{0}{\partial_x y} - y\partial_x(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{(x^2 + y^2)\cancelto{0}{\partial_y x} - x\partial_y(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \\
&= \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0.
\end{aligned}$$

Rotacional: Veja que haverá somente componente em z. Então:

$$\begin{aligned}
[\nabla \times \mathbf{u}]_z &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) \\
&= \frac{(x^2 + y^2)\cancelto{1}{\partial_x x} - x\partial_x(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{(x^2 + y^2)\cancelto{1}{\partial_y y} - y\partial_y(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \\
&= \frac{2(x^2 + y^2) - 2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0.
\end{aligned}$$

Problema 17

Usando o item 1) a), mostre que se $\mathbf{u}$ é um vetor constante, então $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{u}$.

Coordenadas cartesianas, sem uso de 1)a):

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \nabla \times [(u_2 z - u_3 y)\hat{\mathbf{i}} + (u_3 x - u_1 z)\hat{\mathbf{j}} + (u_1 y - u_2 x)\hat{\mathbf{k}}] = \nabla \times v_1\hat{\mathbf{i}} + v_2\hat{\mathbf{j}} + v_3\hat{\mathbf{k}}$$

Usando $\mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{r}$, faremos por componente:

$$\begin{aligned}
[\nabla \times \mathbf{v}]_x &= \partial_y v_3 - \partial_z v_2 = u_1 - (-u_1) = 2u_1 \\
[\nabla \times \mathbf{v}]_y &= \partial_z v_1 - \partial_x v_3 = u_2 - (-u_2) = 2u_2 \\
[\nabla \times \mathbf{v}]_z &= \partial_x v_2 - \partial_y v_1 = u_3 - (-u_3) = 2u_3
\end{aligned}$$

de onde temos que $\nabla \times \mathbf{v} = 2\mathbf{u}$.

Problema 18

(a) Mostre que $\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \frac{1}{2}\nabla(u^2) - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$

Notação indicial, cartesiano:

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})]_i &= \varepsilon_{ijk} u_j [\nabla \times \mathbf{u}]_k = \varepsilon_{ijk} u_j \varepsilon_{kmn} \partial_m u_n = (\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}) u_j \partial_m u_n = \\
&= \sum_{j,m,n} \left(\sum_k \underbrace{\begin{vmatrix} \cancelto{0}{\delta_{ik}} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \cancelto{0}{\delta_{jk}} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \cancelto{1}{\delta_{kk}} & \cancelto{0}{\delta_{km}} & \cancelto{0}{\delta_{kn}} \end{vmatrix}}_{1!} \right) u_j \partial_m u_n = \\
&= 1! \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jm} & \delta_{jn} \end{vmatrix} u_j \partial_m u_n = (\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}) u_j \partial_m u_n = \\
&= \delta_{im}\delta_{jn} u_j \partial_m u_n - \delta_{in}\delta_{jm} u_j \partial_m u_n = u_j \partial_i u_j - u_j \partial_j u_i .
\end{aligned}
$$

Agora note que $u_j \partial_i u_j = \frac{1}{2}\partial_i(u_j u_j) = \frac{1}{2}\partial_i(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = \frac{1}{2}\partial_i(u^2) = \frac{1}{2}[\nabla(u^2)]_i$. Ademais, veja que o segundo termo $u_j \partial_j u_i$ é o produto escalar $\mathbf{u} \cdot \nabla$ aplicado ao termo correspondente de $\mathbf{u}$. Então, na forma vetorial, podemos entender como se esse produto escalar fosse um operador aplicado em $\mathbf{u}$, a saber, $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$.

(b) Mostre que se o potencial magnético $\mathbf{A}$ é dado por $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(u\nabla v - v\nabla u)$, então o campo magnético é dado por $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla u \times \nabla v$.

Solução: Usaremos os Problemas 8a, 7b e a identidade que deduzimos para resolver o Problema 14:

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \left[\frac{1}{2}(u\nabla v - v\nabla u)\right] &= \frac{1}{2}\nabla \times (u\nabla v) - \frac{1}{2}\nabla \times (v\nabla u) = \\
&= \frac{1}{2}(\cancelto{0}{u[\nabla \times \nabla v]} + \nabla u \times \nabla v) - \frac{1}{2}(\cancelto{0}{v[\nabla \times \nabla u]} + \nabla v \times \nabla u) \\
&= \frac{1}{2}\nabla u \times \nabla v - \frac{1}{2}\nabla v \times \nabla u = \nabla u \times \nabla v
\end{aligned}
$$

Problema 19

Se o potencial eletromagnético $\mathbf{A}$ é dado por

$$\mathbf{A} = \frac{yz}{r(x^2+y^2)}\hat{\mathbf{i}} - \frac{xz}{r(x^2+y^2)}\hat{\mathbf{j}},$$

calcule a indução magnética $\mathbf{B}$ dada por $\nabla \times \mathbf{A}$.

Solução:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = (\partial_x A_y - \partial_y A_x)\hat{\mathbf{k}}$$

Há apenas uma componente em z pois o potencial está definido apenas no plano xy. Sendo assim, a solução não pode ser a $\mathbf{B} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$ indicada, que possui componentes nas três direções. Entretanto, vamos calcular o que for possível:

$$\partial_x A_y = -\frac{zr(x^2+y^2) - xz[\frac{x}{r}(x^2+y^2) + 2xr]}{r^2(x^2+y^2)^2}$$
$$\partial_y A_x = \frac{zr(x^2+y^2) - yz[\frac{y}{r}(x^2+y^2) + 2yr]}{r^2(x^2+y^2)^2}$$