1 Álgebra de vetores

Problema 1

Provar que $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$ e $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$ usando a definição do produto vetorial.

Coordenadas cartesianas: Note que podemos escrever:

$$\hat{\mathbf{i}} = 1\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{k}}$$

$$\hat{\mathbf{j}} = 0\hat{\mathbf{i}} + 1\hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{k}}$$

$$\hat{\mathbf{k}} = 0\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}} + 1\hat{\mathbf{k}}$$

Portanto, usando o mnemônico do determinante:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{i}} \cancelto{0}{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} - \hat{\mathbf{j}} \cancelto{0}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}} + \hat{\mathbf{k}} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{i}} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \hat{\mathbf{j}} \cancelto{0}{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} + \hat{\mathbf{k}} \cancelto{0}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}} = \hat{\mathbf{i}}$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{i}} \cancelto{0}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}} - \hat{\mathbf{j}} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \hat{\mathbf{k}} \cancelto{0}{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = \hat{\mathbf{j}}$$

Notação indicial, cartesiano: Podemos escrever $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \varepsilon_{ijk}\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{i} u_j v_k$ em que os $\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{i}$ são os vetores da base e ε é conhecido como símbolo de Levi-Civita. Nesse sentido, as três identidades se reduzem a $\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \times \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{j} = \varepsilon_{ijk}\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{k}$.

Problema 2

Dados vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^3$ e constantes $a, b \in \mathbb{R}$, mostre que:

(e) $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = -\mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v})$

Coordenadas cartesianas: Usando a definição mnemônica/matricial do produto misto e uma regra da álgebra matricial temos:

$$\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = -\mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v})$$

Notação de braças: pode-se pensar que se todos os resultados possíveis de agrupar as braças a seguir são equivalentes:

$$\mathbf{u} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{w} \quad \mathbf{u} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{w}$$

$$[\mathbf{u} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{w}] \quad \mathbf{u} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{w} = \mathbf{u} \quad [\mathbf{v} \quad \mathbf{w} \quad \mathbf{u}] \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{w} = \mathbf{u} \quad \mathbf{v} \quad [\mathbf{w} \quad \mathbf{u} \quad \mathbf{v}] \quad \mathbf{w}$$
$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$$

Assim como nas sequências contrárias:

$$\mathbf{w} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{u} \quad \mathbf{w} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{u}$$

$$[\mathbf{w} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{u}] \quad \mathbf{w} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{u} = \mathbf{w} \quad [\mathbf{v} \quad \mathbf{u} \quad \mathbf{w}] \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{u} = \mathbf{w} \quad \mathbf{v} \quad [\mathbf{u} \quad \mathbf{w} \quad \mathbf{v}] \quad \mathbf{u}$$
$$\mathbf{w} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v})$$

Pode-se pensar também que um membro que pertença a uma dessas sequência tem sinal negativo ao que pertence a outra. Exemplo:

$$[\mathbf{u} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{w}] \quad \mathbf{u} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{w} = -[\mathbf{w} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{u}] \quad \mathbf{w} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{u}$$

E também se pode pensar que caso seja repetido um dos vetores, o resultado será nulo (ver exercício 2)a)).

Todos os demais itens estão em outras listas do repositório.

Problema 3

Achar quando o produto triplo satisfaz $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = uvw$ (assumir que $u \neq 0$, $v \neq 0$, $w \neq 0$)?

Solução: Entendendo o produto triplo/misto como o produto escalar de $\mathbf{u}$ com $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ e as definições geométricas:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = vw \sin \alpha$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \beta$$

em que α e β são os ângulos entre os vetores de cada operação, tem-se:

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = uvw \sin \alpha \cos \beta$$

naturalmente, como $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ e $-1 \leq \cos \beta \leq 1$, uvw é um dos valores admissíveis e ocorrerá quando

$$\sin \alpha \cos \beta = 1$$

ou seja, quando u, v e w forem ortogonais e o seno e cosseno tenham mesmo sinal e valor em módulo $\frac{\pi}{2} = 90^o$. Como o ângulo entre dois vetores está em $[0, \pi)$, o seno será *sempre* positiva e então a identidade se dará apenas quando o cosseno também for e os três vetores formarem um triedro pela *mão direita*.

Problema 4

(a) Achar a condição na forma de $f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$ para que dois vetores, $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, nao sejam paralelos.

Primeiramente, um comentário sobre a notação: uma função $f = f(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ pode significar, em geral, uma função qualquer, em geral de várias variáveis que são as componentes dos vetores envolvidos. Nesse exemplo em particular, pode-se encontrar uma expressão que envolve simbolicamente os vetor inteiros. A saber:

$$f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = ||\mathbf{a} \times \mathbf{b}|| = \sqrt{(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}$$

é uma possível escolha, pois quando dois vetores são paralelos, o produto vetorial entre eles é nulo (ângulo entre eles nulo ou π, anulando o seno).

(b) O mesmo para que não sejam ortogonais. Novamente, de Geometria Analítica vetorial, pode-se escolher o produto escalar:

$$f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

pois quando o produto escalar é nulo, os vetores são ortogonais.

Problema 5

Encontrar a equação do plano, $mx + ny + pz = q$, que contém o ponto $\mathbf{r_0} = x_0\hat{\mathbf{i}} + y_0\hat{\mathbf{j}} + z_0\hat{\mathbf{k}}$ e os dos vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ (nesse caso $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$).

Solução: Se o produto misto está associado ao volume do paralelepípedo formado pelos três vetores envolvidos e se a área da base (área de um paralelogramo) é não nula (basta $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ não paralelos), bastaria que o terceiro vetor esteja no plano formado pelos outros dois para que o volume seja nulo. Isso significa que para um vetor posição *relativo a um ponto do plano*:

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{r_0} = (x - x_0)\hat{\mathbf{i}} + (y - y0)\hat{\mathbf{j}} + (z - z0)\hat{\mathbf{k}}$$

em que $\mathbf{x} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ e consideramos a posição relativa a $\mathbf{r_0}$ (ou seja, $\mathbf{r_0}$ é como a origem de outro sistema, o relativo ao plano). Para que esse vetor relativo seja paralelo ao plano, o produto misto deverá ser nulo:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x} - \mathbf{r_0}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \\
&= (x - x_0) \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - (y - y_0) \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + (z - z_0) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \\
&= (x - x_0)(a_2 b_3 - a_3 b_2) + (y - y_0)(a_3 b_1 - a_1 b_3) + (z - z_0)(a_1 b_2 - a_2 b_1) = \\
&= \underbrace{(a_2 b_3 - a_3 b_2)}_{m} x + \underbrace{(a_3 b_1 - a_1 b_3)}_{n} y + \underbrace{(a_1 b_2 - a_2 b_1)}_{p} z - \\
&\quad - \underbrace{[x_0(a_2 b_3 - a_3 b_2) + y_0(a_3 b_1 - a_1 b_3) + z_0(a_1 b_2 - a_2 b_1)]}_{q} = \\
&= mx + ny + pz - q = 0
\end{aligned}$$

em que se pode obter os coeficientes aplicando as expressões acima para cada coeficiente.

Problema 6

Simplificar o produto $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$ de modo que a expressão final contenha somente os produtos escalares de vetores.

Solução: Resolvido em outras listas (Roldão - ver repositório).

Problema 7

Expressar o produto $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$ como soma de vetores com coeficientes sendo produtos triplos de vetores. Dica: usar a regra BAC-CAB.

Usando BAC-CAB:

$$\underbrace{(\mathbf{a} \times \mathbf{b})}_{A} \times (\underbrace{\mathbf{c}}_{B} \times \underbrace{\mathbf{d}}_{C}) = \underbrace{\mathbf{c}}_{B}[\underbrace{(\mathbf{a} \times \mathbf{b})}_{A} \cdot \underbrace{\mathbf{d}}_{C}] - \underbrace{\mathbf{d}}_{C}[\underbrace{(\mathbf{a} \times \mathbf{b})}_{A} \cdot \underbrace{\mathbf{c}}_{B}]$$

Problema 8

Calcular o produto $(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot [(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})]$ (**Dica:** usar a regra BAC-CAB). O resultado é uma função (qual?) do volume do paralelepípedo formado a partir de três arestas diferentes a partir da mesma origem e cujos comprimentos são iguais aos módulos dos vetores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$.

Solução: Pelo exercício anterior,

$$(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = [(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}]\mathbf{a} - [(\mathbf{c} \times \mathbf{a})\mathbf{a}]\mathbf{b}$$

então

$$\begin{aligned}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot [(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})] &= (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \left\{[(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}]\mathbf{a} - \cancelto{0}{[(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a}]}\mathbf{b}\right\} = \\ &= [(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}][(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}]\end{aligned}$$

Por fim veja pela discussão do Problema 2)e) que $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$, logo o resultado será:

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot [(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})] = [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]^2 = V^2$$

em que V é o volume do paralelepípedo mencionado no enunciado.