Problema 1

Dados vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^3$ e constantes $a, b \in \mathbb{R}$, mostre que:

(b) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$

Coordenadas cartesianas: expandido, temos:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$$

em que foi usada uma propriedade da álgebra matricial que a permutação de uma linha (vale também para colunas), uma vez (permutação ímpar) resulta na troca de sinal do determinante. A identidade também poderia ter sido mostrada expandindo o determinante, trocando as coordenadas u_i de lugar com v_i e reconstruindo o determinante.

Notação indicial: $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \varepsilon_{ijk} u^i u^j v^k$ e notamos que, como cada termo que acompanha ε_{ijk} é oposto ao que acompanha ε_{jik} (exemplo: $\varepsilon_{123} u^1 u^2 v^3 = -\varepsilon_{213} u^2 u^1 v^3$) então ao serem permutados uma (ou um número ímpar) de vezes, o resultado é a troca de sinal.[a]

Geometria: A definição de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é de um vetor ortogonal a $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ cuja norma é $||\mathbf{u} \times \mathbf{v}|| = ||\mathbf{u}|| ||\mathbf{v}|| \sin \alpha$ em que α é ângulo entre eles e cuja direção é dada pela *regra da mão direita*. A troca da posição dos vetores, em razão da necessidade de conservar a orientação dada pela mencionada regra, resulta na troca de sinal (teste usando a mão direita, o dedo indicador representando u, o dedo médio representado v e o polegar erguido representando $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

(c)-(g) Resolvidos na lista do Roldão, disponível no repositório (ver cabeçalho).

[a] Note que a maioria dos termos (quaisquer com índices repetidos) já é nula em razão da própria definição do símbolo de Levi-Civita, ε.

Problema 2

Sendo $E = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$, $E' = (\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, \mathbf{e'_3})$ bases, com

$$\begin{cases} \mathbf{e'_1} &= \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3} - 3\mathbf{e_1} \\ \mathbf{e'_2} &= \mathbf{e_1} - 2\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3} \\ \mathbf{e'_3} &= \mathbf{e_1} + 2\mathbf{e_2} \end{cases}$$

e o vetor $\mathbf{u} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3} = (1,1,1)_B$

(a) Dê a matriz de mudança M da base E para a base $E' : E \xrightarrow{M} E'$

Escrevendo as bases como um "vetor-linha" de vetores, tem-se pelo sistema dado a identidade (confira mentalmente ou manualmente fazendo o produto matricial)[a]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e'_1} & \mathbf{e'_2} & \mathbf{e'_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{M}$$

(note que a depender do autor/definição, a *inversa* dessa matriz será chamada de M. Para a etapa seguinte do problema, essa diferença é irrelevante desde que seja mantida uma única convenção ao longo de todo o exercício).

(b) Ache as coordenadas de $\mathbf{u}$ na base E'.

A definição geométrica de vetor em CVT é a de um objeto *invariante* dado pela seguinte definição simbólica:

$$\mathbf{v} = \underbrace{v^i \mathbf{e_i}}_{\text{notação de Einstein}} = \sum_i v^i \mathbf{e_i}.$$

Sendo invariante, precisa se tratar do mesmo objeto em qualquer sistema de coordenadas, devendo valer então[b]:

$$\mathbf{v} = v^{i'} \mathbf{e'_i} = v^i \mathbf{e_i} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{e'_1} & \mathbf{e'_2} & \mathbf{e'_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v'_1} \\ \mathbf{v'_2} \\ \mathbf{v'_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v_1} \\ \mathbf{v_2} \\ \mathbf{v_3} \end{bmatrix} \Rightarrow [E']v'_{E'} = [E]v_E$$

Mas $[E'] = [E]M$ (item (a)), portanto:

$$[E']\{v'\}_{E'} = [E]M\{v'\}_{E'} = [E]\{v\}_E \xrightarrow{[E]^{-1} \text{ à esquerda}} M\{v'\}_{E'} = \{v\}_E \rightarrow$$
$$\xrightarrow{M^{-1} \text{ à esquerda}} \{v'\}_{E'} = M^{-1}\{v\}_E$$

ou seja, a matriz *inversa* à definida no item (a) será usada. Essa é também a razão da localização dos índices alternados em vetores da base e as componentes do vetor naquela base[c] e das noções de *covariância* ("que varia conjuntamente" – com a matriz de mudança de base) e *contravariância* ("que varia contrariamente").

Da discussão anterior, poderíamos argumentar que uma definição do tipo:

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e^i}$$

seja igualmente válida para o *mesmo vetor*. Em geral, entretanto, os vetores $\mathbf{e_i}$ e $\mathbf{e^i}$ *não* serão iguais, assim como as componentes v^i e v_i em dada base. Esses vetores são chamados *duais* entre si.

Convencionando a base como feito nesse exercício, também se fixa que os índices ”embaixo”/linha são ditos covariantes e os coeficientes ”no alto”/coluna são contravariantes (em relação a essa definição de M).

Por fim, temos que:

$$\{u\}_{E'} = M^{-1}\{u\}_E = (\frac{3}{11}, \frac{8}{11}, \frac{12}{11})_{E'} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

(não confundir a notação $(x, y, z)_E$ com $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}_E$, em vista da discussão de covariância acima – a primeira descrição é de uma *tupla ordenada*).

[a] Apenas uma convenção. Na discussão subsequente, valeriam os mesmos argumentos porém com ”orientação” da matriz trocada.

[b] Note que o produto matricial só será válido nas definições dadas se os produtos forem tomados na ordem mostrada a seguir. Note também que na notação indicial/soma de Einstein, para a atual disciplina, será em geral desconsiderada a ordem dos fatores.

[c] o que chamados de ”vetor” em notação indicial muitas vezes é o conjunto das *componentes* do objeto geométrico vetor, numa dada base

Problema 3

O torque $\boldsymbol{\tau}$ de uma força $\mathbf{F}$ com respeito a um ponto O é dado pela expressão $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ em que $\mathbf{r}$ é o vetor de posição do início do vetor $\mathbf{F}$ em relação a O. A projeção de τ em um eixo $\mathbf{u}$ passando por O, isto é, a quantidade $\tau_u = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}$ em que $\mathbf{u}$ é um vetor unitário na direção do eixo $\mathbf{u}$, é chamada de torque de $\mathbf{F}$ com relação ao eixo $\mathbf{u}$. Prove que τ_u é independente da posição de O em u.

Solução: Se P for outro ponto na reta definida por O e $\mathbf{u}$, então podemos dizer que o vetor $\overrightarrow{OP}$ é *paralelo* a u e dado por $\overrightarrow{OP} = \lambda\mathbf{u}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e o vetor posição $\mathbf{r}'$ da posição a partir de P dado por

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \overrightarrow{OP} = \mathbf{r} + \lambda\mathbf{u}.$$

Então

$$(\tau_u)' = (\mathbf{r}' \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{u} = ((\mathbf{r} + \lambda\mathbf{u}) \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{u} = \underbrace{(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{u}}_{\tau_u} + \lambda\cancelto{0}{(\mathbf{u} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{u}} = \tau_u.$$

Problema 4

Calcule ∂_{xx}, ∂_{yy} e $\partial_{yx} = \partial_x(\partial_y)$ de duas funções $f = f(u)$ com $u = u(x, y)$.

Como resolver: Não será feito o passo-a-passo pois as respostas podem ser verificadas, por exemplo, no WolframAlpha. Entretanto, note que as funções são da forma $f = f(u)$ com $u = u(x, y)$. Então temos as derivadas, por regra da cadeia e regras de derivação:

$$\begin{aligned}
\partial_x f &= \frac{\partial f}{\partial_x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{df}{du} = f'\partial_x u \\
\partial_y f &= \frac{\partial f}{\partial_y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{df}{du} = f'\partial_y u \\
\partial_{xx} f &= \frac{\partial}{\partial_x}\frac{\partial f}{\partial_x} = \partial_x(f'\partial_x u) = \partial_x(f')\partial_x u + f'\partial_x(\partial_x u) = f''(\partial_x u)^2 + f'\partial_{xx} u \\
\partial_{yy} f &= \frac{\partial}{\partial_y}\frac{\partial f}{\partial_y} = \partial_y(f'\partial_y u) = \partial_y(f')\partial_y u + f'\partial_y(\partial_y u) = f''(\partial_y u)^2 + f'\partial_{yy} u \\
\partial_{yx} f &= \partial_x(\partial_y f) = \partial_x(f'\partial_y u) = (\partial_x f')(\partial_y u) + f'\partial_x(\partial_y)u = f''(\partial_x u)(\partial_y u) + \partial_{yx} u.
\end{aligned}$$

Espera-se que $\partial_{yx} = \partial_{xy}$ por continuidade (teorema de Clairaut). Ademais note (isso será útil para um problema posterior das listas) que para esse tipo de função:

$$\nabla^2 u = \Delta u = \partial_{xx} f + \partial_{yy} f = [(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2]f'' + [\nabla^2 u]f'.$$

Problema 5

Feito na lista do Roldão.

Problema 6

Mostre que:

(a) $\frac{d}{dt}\left[\mathbf{v}\cdot\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2}\right)\right] = \mathbf{v}\cdot\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\times\frac{d^3\mathbf{v}}{dt^3}\right)$

Serão usadas as ”regras do produto” para o produto interno/escalar e o produto exterior/produto de cunha/vetorial, ou seja:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt}\times\mathbf{v} + \mathbf{u}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Então:

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{v}\cdot\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2}\right)\right] = \cancelto{0}{\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2}\right)} + \mathbf{v}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2}\right) =$$

$$= \mathbf{v}\cdot\left(\cancelto{0}{\frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2}\times\frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2}} + \frac{d\mathbf{v}}{dt}\times\frac{d^3\mathbf{v}}{dt^3}\right) = \mathbf{v}\cdot\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\times\frac{d^3\mathbf{v}}{dt^3}\right).$$

(b) $\int\left(\mathbf{v}\times\frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2}\right)dt = \mathbf{v}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{u}$ Assumindo vetor $\mathbf{u}$ constante, temos:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \cancelto{0}{\mathbf{u}}\right) = \cancelto{0}{\frac{d\mathbf{v}}{dt}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt}} + \mathbf{v}\times\frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2},$$

tem-se, por uma forma vetorial (e que não iremos demonstrar) do teorema fundamental do cálculo que vale a identidade do enunciado.

(c) se $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = f(r)\mathbf{r}$, então $\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{w}$

Novamente,

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \mathbf{r}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{0}$$

Isso significa que os vetores posição $\mathbf{r}$ e aceleração $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ são ortogonais. Um vetor da forma $f(r)\mathbf{r}$ certamente satisfaz tal propriedade, pois $\mathbf{r}\times\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Uma consequência desse fato é que se um corpo está sujeito a forças centrais, o momento angular é constante.

Esse fato é importante em Mecânica Celeste e Mecânica Orbital pois permite caracterizar o plano da órbita (direção) e conhecida uma posição, o formato (magnitude).

Problema 7

Calcule a matriz Jacobiana de campo vetorial $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \mathbf{v} = (e^x \sin x)\hat{\mathbf{i}} + (e^x \cos y)\hat{\mathbf{j}}$

Solução: A matriz jacobiana é dada por:

$$J[\mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} v_1 & \dots & \partial_{x_n} v_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1} v_n & \dots & \partial_{x_n} v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x v_1 & \partial_y v_1 \\ \partial_x v_2 & \partial_y v_2 \end{bmatrix}$$

e tomando $\mathbf{v} = v_1\hat{\mathbf{i}} + v_2\hat{\mathbf{j}}$ e fazendo as operações indicadas se chega ao resultado do gabarito disponibilizado.