Problema 1

Um campo de forças $\mathbf{F}$ é dado por $\mathbf{F}(x, y) = cxy\hat{\mathbf{i}} + x^6y^2\hat{\mathbf{j}}$, onde c é uma constante positiva. Essa força age em uma partícula que se move do ponto $(0, 0)$ à reta $x = 1$, ao longo de uma curva $y(x) = ax^b$, onde $a > 0$ e $b > 0$. Encontre o valor de a como função de c, para que o trabalho realizado pela força $\mathbf{F}$ seja independente de b.

Solução: O caminho já está parametrizado em x, então substituindo y já tomamos:

$$\mathbf{r} = (x, ax^b); \quad x \in [0, 1] \;\Rightarrow\; d\mathbf{r} = (1, abx^{b-1})dx$$

$$\mathbf{F} = (acx^{b+1}, a^2x^{2b+6})$$

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 [(acx^{b+1})(1) + (a^2x^{2b+6})(abx^{b-1})]dx = \int_0^1 [acx^{b+1} + a^3bx^{3b+5}]dx$$

$$= \left[\frac{acx^{b+2}}{b+2} + \frac{a^3bx^{3b+6}}{3b+6}\right]_0^1 = \frac{ac}{b+2} + \frac{a^3b}{3b+6} = \frac{3ac + a^3b}{3b+6}$$

Queremos agora que W seja *independente* de b. Por independente, isso significa que quando b varia isoladamente, W não varia. Ou seja

$$\frac{\partial W}{\partial b} = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial b} = \frac{a^3(3b+6) - 3(3ac + a^3b)}{(3b+6)^2} = 0 \Rightarrow a^3(\cancel{3b} + 6) - 9ac - \cancel{3a^3b} = 0$$

$$= 6a^3 - 9ac = 0 \Rightarrow a = \pm\sqrt{\frac{3c}{2}}$$

Problema 2

Integre a função $\frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}$ sobre o caminho dado por $\mathbf{r}(t) = (t, t, t)$, onde $0 \leq a \leq t \leq b$.

Solução: Se $\phi = \frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}$, buscamos então $\int_C \phi ds$. Para obter o comprimento diferencial de arco, vamos usar o seguinte mnemônico[a]:

$$ds = |d\mathbf{r}| = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| dt \Rightarrow ds = |(1,1,1)|dt = \sqrt{3}dt; \quad t \in [a, b]$$

$$\phi(t) = \frac{t+t+t}{t^2+t^2+t^2} = \frac{1}{t}$$

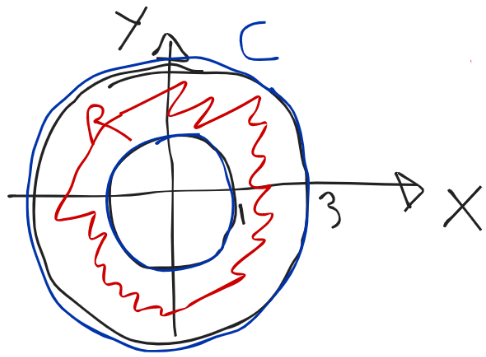
$$\int_C \phi ds = \int_a^b \frac{dt}{t} = \ln\frac{b}{a}$$

[a] Enxergue-o como uma regra da cadeia.

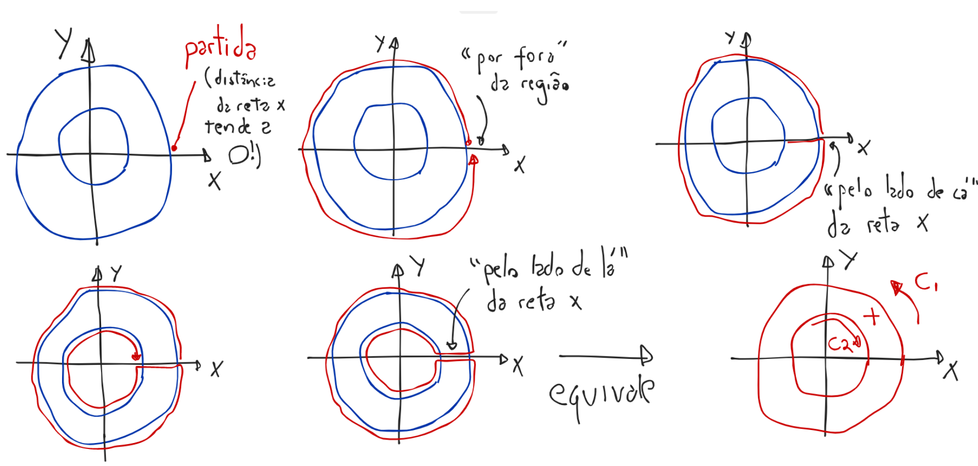
Problema 3

Calcule $\int_C (x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy$, onde C é a fronteira da região com centro na origem e raios 1 e 3, respectivamente.

Contorno de integração: Pode-se pensar que o contorno é a curva C que é contorno da região R mostrada a seguir:



Que pode ser percorrida através da seguinte sequência:



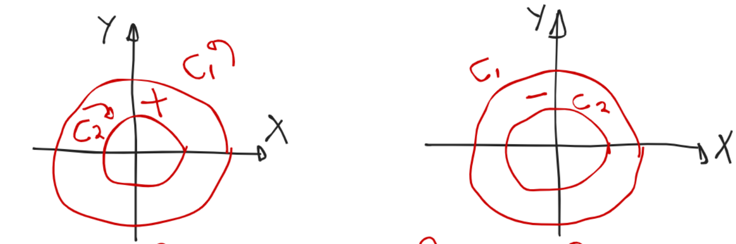
Note que tomamos o cuidado de nunca cruzar a linha em si mesma. A partida é de uma distância *infinitesimal* e positiva acima da reta x, ou seja, tende ao ponto $(x, y) = (3, 0)$ por cima. Do ponto de vista da integral isso não faz diferença, pois a integral no intervalo de um ponto para um campo contínuo em x, y como é o $\mathbf{F}$ dado (falaremos adiante como enxergar esse campo), é nula.

Ademais, note que a integral "pelo lado de cá" do eixo x se cancela com a "pelo lado de lá", pois por mais que não cruze a si mesma (a curva é de Jordan), a distância entre elas é infinitesimal e, sendo o campo contínuo, têm o mesmo valor em cada ponto do trecho e é percorrida em sentidos contrários, se cancelando.

Portanto, a integral que buscamos é:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Por fim, vejamos que parametrizar circunferências é confortável no sentido das coordenadas polares, ou seja, com variável angular crescendo no sentido antihorário. Portanto, podemos inverter o sinal da soma acima e o da orientação da parametrização (a fim de reciclar a parametrização da circunferência e mudar apenas o raio):



$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} = \int_{C_1} - \int_{-C_2}$$

Notação: é fácil converter, caso queira, a notação $\int_C (f_x dx + f_y dy)$ em $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, basta tomar $\mathbf{F} = (f_x, f_y)$ e reverter o produto escalar indicado. Não iremos fazer isso no presente exercício, para praticar outra notação para resolução.

Solução: Uma circunferência é parametrizada por:

$$\mathbf{r} = (x, y) = (R\cos\theta, R\sin\theta); \quad \theta \in [0, 2\pi) \;\Rightarrow\; d\mathbf{r} = (dx, dy) = (-R\sin\theta, R\cos\theta)d\theta$$

Então notando que tanto em C_1 e $-C_2$ (note a orientação antihorária de $-C_2$) a integral é dada por:

$$\begin{aligned}\int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \Big[(R_i^3\cos^3\theta - R_i^3\sin^3\theta)(-R_i\sin\theta d\theta) + (R_i^3\cos^3\theta + R_i^3\sin^3\theta)(R_i\cos\theta d\theta)\Big] \\ &= R_i^4 \int_0^{2\pi} \Big[\sin^4\theta d\theta - \cos^3\theta\sin\theta + \cos^4\theta + \cos\theta\sin^3\theta\Big].\end{aligned}$$

Note ainda a simplificação por uso de identidades trigonométricas:

$$\sin^4\theta + \cos^4\theta = \underbrace{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2}_{1} - 2\sin^2\theta\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{2}\underbrace{(2\sin\theta\cos\theta)^2}_{\sin^2 2\theta} = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\theta,$$

$$\cos 4\theta = \cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta = 1 - 2\sin^2 2\theta \Rightarrow \sin^2 2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4\theta,$$

então:

$$\sin^4\theta + \cos^4\theta = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4\theta.$$

Por fim:

$$\int_0^{2\pi}\left[\frac{3}{4}+\underbrace{\cancel{\frac{1}{4}\cos 4\theta}}_{0 \text{ depois de integrar}}-\cos^3\theta\sin\theta+\cos\theta\sin^3\theta\right]d\theta$$

$$=\frac{3\pi}{2}-\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos^3\theta\sin\theta d\theta}_{\text{escolha } u=\cos\theta}+\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin^3\theta d\theta}_{\text{escolha } u=\sin\theta}=$$

$$=\frac{3\pi}{2}+0+0=\frac{3\pi}{2}$$

Logo $\int_{C_i}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\frac{3\pi}{2}R_i^4$ e dado o raio externo e interno,

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\frac{3\pi}{2}(R_{ext}^4-R_{int}^4)=120\pi.$$

Solução usando Teorema de Green:[a] Note que a curva é fechada e delimita uma área (aquela que dissemos que é contorno, R), dentro da qual a função é diferenciável e bem definida. Façamos então:

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_R(\partial_x f_y-\partial_y f_x)dA=\iint_R(3x^2+3y^2)dA=3\iint_R\underbrace{(x^2+y^2)}_{r^2}dA.$$

Mas para o elemento de área:

$$dA=dxdy=\underbrace{\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|}_{\text{jacobiano}}drd\theta=rdrd\theta,$$

tem-se então:

$$3\iint_R r^2dA=3\int_0^{2\pi}\int_1^3 r^3drd\theta=3\left[\int_0^{2\pi}d\theta\right]\left[\int_1^3 r^3dr\right]=\frac{3\pi}{2}(3^4-1^4)=120\pi.$$

[a] A presente solução também tem como objetivo constatar a superioridade do método para o problema proposto. O teorema não é inútil!

Problema 4

Calcule as seguintes integrais de linha ao longo dos respectivos caminhos indicados.

(a) $\mathbf{F}(x,y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$, entre os pontos $(-1,1)$ e $(1,1)$ ao longo da parábola $y = x^2$

$$\mathbf{r} = (x, x^2); \quad x \in [-1,1] \ \Rightarrow \ d\mathbf{r} = (1, 2x)dx$$

$$\mathbf{F} = (x^2 - 2x^3, x^4 - 2x^3)$$

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{-1}^{1} [x^2 - 2x^3 + 2x(x^4 - 2x^3)]dx = -\frac{14}{15}$$

(b) $\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2 - z^2, 2yz, -x^2)$ ao longo da trajetória $\mathbf{r} = (t, t^2, t^3)$, $t \in [0,1]$

$$\mathbf{r} = (t, t^2, t^3) \quad t \in [0,1] \ \Rightarrow \ d\mathbf{r} = (1, 2t, 3t^2)dt$$

$$\mathbf{F} = (t^4 - t^6, 2t^5, -t^2)$$

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 [t^4 - t^6 + (2t)(2t^5) - (3t^2)(t^2)]dt = \frac{1}{35}$$

(c) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x, y, xz - y)$, ao longo do segmento de reta que liga $(0,0,0)$ e $(1,2,4)$
Uma possibilidade de parametrização é usando Geometria Analítica vetorial:

$$\mathbf{r} = (\lambda, 2\lambda, 4\lambda); \quad \lambda \in [0,1] \ \Rightarrow \ d\mathbf{r} = (1,2,4)d\lambda$$

$$\mathbf{F} = (\lambda, 2\lambda, 4\lambda^2 - 2\lambda)$$

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 [\lambda + (2)(2\lambda) + (4)(4\lambda^2 - 2\lambda)]d\lambda = \frac{23}{6}$$

(d) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x, y, xz - y)$, ao longo da trajetória $\mathbf{r} = (t^2, 2t, 4t^2)$, $t \in [0,1]$

$$\mathbf{r} = (t^2, 2t, 4t^2); \quad t \in [0,1] \ \Rightarrow \ d\mathbf{r} = (2t, 2, 8t)dt$$

$$\mathbf{F} = (t^2, 2t, 4t^4 - 2t)$$

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 [t^2(2t) + 2t(2) + (4t^2 - 2t)8t]dt = \frac{31}{6}$$

Problema 5

Calcule $\int_c \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, onde C é o quadrado de vértices $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ e $(0,-1)$, no sentido anti-horário.

Solução: Tomando $\mathbf{F} = \frac{1}{|x|+|y|}(1,1)$ e começando pelo primeiro segmento que parte de $(1,0)$ e vai até $(0,1)$ e seguindo pelos demais:

$$\mathbf{r_1} = (1-t,t); \quad t \in [0,1] \;\Rightarrow\; d\mathbf{r_1} = (-1,1)dt \qquad \mathbf{F_1} = \frac{1}{1-t+t}(1,1) = (1,1)$$

$$\mathbf{r_2} = (-t,1-t); \quad t \in [0,1] \;\Rightarrow\; d\mathbf{r_2} = (-1,-1)dt \qquad \mathbf{F_2} = \frac{1}{t+1-t}(1,1) = (1,1)$$

$$\mathbf{r_3} = (-1+t,-t); \quad t \in [0,1] \;\Rightarrow\; d\mathbf{r_3} = (1,-1)dt \qquad \mathbf{F_3} = \frac{1}{t-1+t}(1,1) = (1,1)$$

$$\mathbf{r_4} = (t,-1+t); \quad t \in [0,1] \;\Rightarrow\; d\mathbf{r_4} = (1,1)dt \qquad \mathbf{F_4} = \frac{1}{t+1-t}(1,1) = (1,1)$$

Por fim:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_3} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_4} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0 - 2 + 0 + 2 = 0$$

Problema 6

Calcule $\int_C 2xds$, onde C é formada pelo arco C_1 da parábola $y = x^2$ de $(0,0)$ a $(1,1)$, seguido de um segmento de reta vertical C_2 de $(1,1)$ a $(2,2)$.

Trecho 1: No primeiro trecho:

$$\mathbf{r} = (x,x^2); \quad x \in [0,1] \;\Rightarrow\; d\mathbf{r} = (1,2x)dx \;\Rightarrow\; ds = |d\mathbf{r}| = \sqrt{1+4x^2}dx$$

$$\int_{C_1} 2xds = \int_0^1 2x \underbrace{\sqrt{1+4x^2}}_{\text{escolha } u=1+4x^2} dx = \frac{1}{4}\int_1^5 \sqrt{u}du = \frac{1}{6}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_1^5 = \frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1)$$

Trecho 2: No segundo trecho:

$$\mathbf{r} = (1+t,1+t); \quad t \in [0,1] \;\Rightarrow\; d\mathbf{r} = (1,1)dt \;\Rightarrow\; ds = |d\mathbf{r}| = \sqrt{2}dt$$

$$\int_{C_2} 2xds = \int_0^1 2\sqrt{2}(1+t)dt = 2\sqrt{2}\left[t + \frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = 3\sqrt{2}$$

Solução: Por fim:

$$\int_C 2xds = \int_{C_1} 2xds + \int_{C_2} 2xds = \frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1) + 3\sqrt{2}$$

Problema 7

Problema 8

Problema 9

Problema 10

Ver lista 1.

Problema 11

Mostre que $\oint_C \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = 0$, onde $\mathbf{r}$ é o vetor posição e C é uma curva de Jordan.

Solução: Por uma curva de Jordan entende-se uma curva que delimita uma região fechada, sem cruzar a si mesma. Podemos, então, aplicar o teorema de Green:

$$\int_C (xdx + ydy) = \iint_A (\cancelto{0}{\partial_x y} - \cancelto{0}{\partial_y x}) dA = 0.$$

Problema 12

Dados f e g dois campos escalares definidos em $\mathbb{R}^3$, mostre que dada C uma curva de Jordan,

$$\oint_C f(\nabla g) \cdot d\mathbf{r} = -\oint_C g(\nabla f) \cdot d\mathbf{r}$$

Solução: Primeiramente, note (ver lista 1, exercício 5) que podemos usar a seguinte identidade:

$$\nabla fg = f\nabla g + g\nabla f$$

Como o campo é definido em todo $\mathbb{R}^3$, suporemos também diferenciável, usaremos o teorema de Stokes:

$$\oint_C \nabla(fg) = \iint \cancelto{0}{[\nabla \times \nabla(fg)]} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$0 = \oint_C \nabla(fg) = \oint_C f(\nabla g) \cdot d\mathbf{r} + \oint_C g(\nabla f) \cdot d\mathbf{r}$$

Nota: O fato de que para um campo ϕ diferenciável até segunda ordem vale $\nabla \times \nabla\phi = 0$ foi mostrado na solução da lista 1 (ver repositório).

Problema 13

Problema 14

Problema 15

Mostre que $\oint(ydx + xdy) = 0$ para qualquer curva fechada simples C

Solução: Usando teorema de Green:

$$\oint(ydx + xdy) = \iint(\partial_x x - \partial_y y)dA = \iint(1-1)da = 0$$

Problema 16

Problema 17

Problema 18