Problema 1

Um campo de forças $\mathbf{F}$ é dado por $\mathbf{F}(x,y) = cxy\hat{\mathbf{i}} + x^6y^2\hat{\mathbf{j}}$, onde c é uma constante positiva. Essa força age em uma partícula que se move do ponto $(0,0)$ à reta $x = 1$, ao longo de uma curva $y(x) = ax^b$, onde $a > 0$ e $b > 0$. Encontre o valor de a como função de c, para que o trabalho realizado pela força $\mathbf{F}$ seja independente de b.

Solução: O caminho já está parametrizado em x, então substituindo y já tomamos:

$$\mathbf{r} = (x, ax^b); \quad x \in [0,1] \;\Rightarrow\; d\mathbf{r} = (1, abx^{b-1})dx$$

$$\mathbf{F} = (acx^{b+1}, a^2x^{2b+6})$$

$$W = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 [(acx^{b+1})(1) + (a^2x^{2b+6})(abx^{b-1})]dx = \int_0^1 [acx^{b+1} + a^3bx^{3b+5}]dx$$
$$= \left[\frac{acx^{b+2}}{b+2} + \frac{a^3bx^{3b+6}}{3b+6}\right]_0^1 = \frac{ac}{b+2} + \frac{a^3b}{3b+6} = \frac{3ac + a^3b}{3b+6}$$

Queremos agora que W seja *independente* de b. Por independente, isso significa que quando b varia isoladamente, W não varia. Ou seja

$$\frac{\partial W}{\partial b} = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial b} = \frac{a^3(3b+6) - 3(3ac + a^3b)}{(3b+6)^2} = 0 \Rightarrow a^3(\cancel{3b} + 6) - 9ac - \cancel{3a^3b} = 0$$
$$= 6a^3 - 9ac = 0 \Rightarrow a = \pm\sqrt{\frac{3c}{2}}$$

Problema 2

Integre a função $\frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}$ sobre o caminho dado por $\mathbf{r}(t) = (t, t, t)$, onde $0 \leq a \leq t \leq b$.

Solução: Se $\phi = \frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}$, buscamos então $\int_C \phi ds$. Para obter o comprimento diferencial de arco, vamos usar o seguinte mnemônico[a]:

$$ds = |d\mathbf{r}| = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| dt \Rightarrow ds = |(1,1,1)|dt = \sqrt{3}dt; \quad t \in [a, b]$$

$$\phi(t) = \frac{t+t+t}{t^2+t^2+t^2} = \frac{1}{t}$$

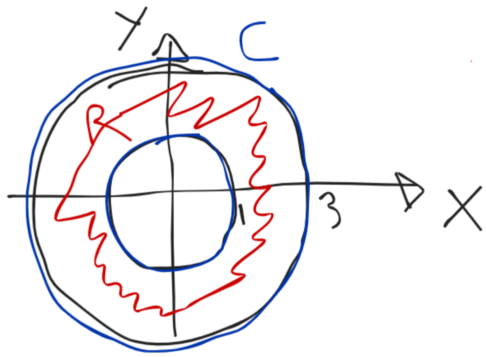
$$\int_C \phi ds = \int_a^b \frac{dt}{t} = \ln\frac{b}{a}$$

[a] Enxergue-o como uma regra da cadeia.

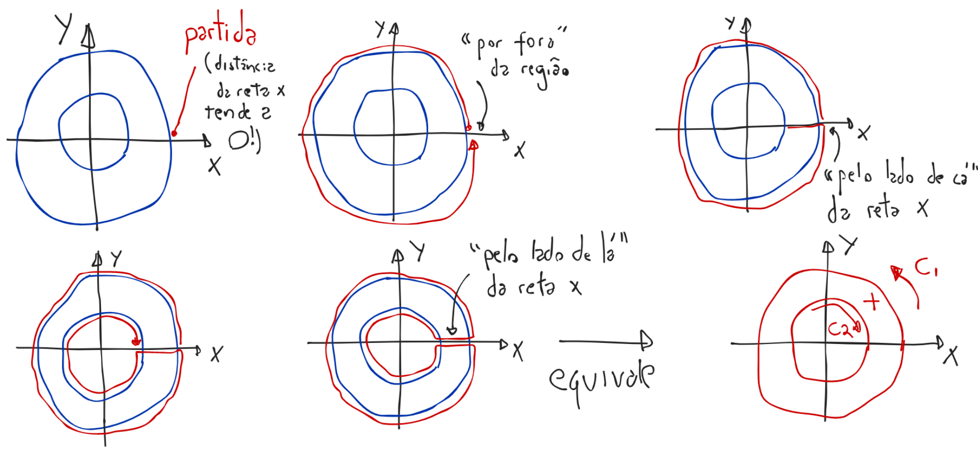
Problema 3

Calcule $\int_C (x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy$, onde C é a fronteira da região com centro na origem e raios 1 e 3, respectivamente.

Contorno de integração: Pode-se pensar que o contorno é a curva C que é contorno da região R mostrada a seguir:



Que pode ser percorrida através da seguinte sequência:



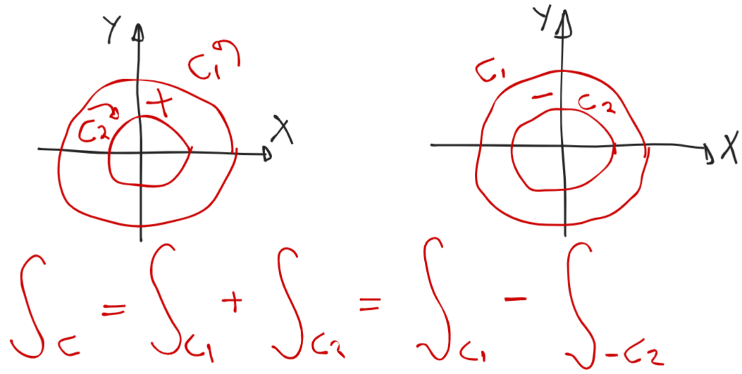
Note que tomamos o cuidado de nunca cruzar a linha em si mesma. A partida é de uma distância *infinitesimal* e positiva acima da reta x, ou seja, tende ao ponto $(x, y) = (3, 0)$ por cima. Do ponto de vista da integral isso não faz diferença, pois a integral no intervalo de um ponto para um campo contínuo em x, y como é o $\mathbf{F}$ dado (falaremos adiante como enxergar esse campo), é nula.

Ademais, note que a integral "pelo lado de cá" do eixo x se cancela com a "pelo lado de lá", pois por mais que não cruze a si mesma (a curva é de Jordan), a distância entre elas é infinitesimal e, sendo o campo contínuo, têm o mesmo valor em cada ponto do trecho e é percorrida em sentidos contrários, se cancelando.

Portanto, a integral que buscamos é:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Por fim, vejamos que parametrizar circunferências é confortável no sentido das coordenadas polares, ou seja, com variável angular crescendo no sentido antihorário. Portanto, podemos inverter o sinal da soma acima e o da orientação da parametrização (a fim de reciclar a parametrização da circunferência e mudar apenas o raio):



Notação: é fácil converter, caso queira, a notação $\int_C (f_x dx + f_y dy)$ em $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, basta tomar $\mathbf{F} = (f_x, f_y)$ e reverter o produto escalar indicado. Não iremos fazer isso no presente exercício, para praticar outra notação para resolução.

Solução: Uma circunferência é parametrizada por:

$$\mathbf{r} = (x, y) = (R\cos\theta, R\sin\theta); \quad \theta \in [0, 2\pi) \;\Rightarrow\; d\mathbf{r} = (dx, dy) = (-R\sin\theta, R\cos\theta)d\theta$$

Então notando que tanto em C_1 e $-C_2$ (note a orientação antihorária de $-C_2$) a integral é dada por:

$$\int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \Big[(R_i^3\cos^3\theta - R_i^3\sin^3\theta)(-R_i\sin\theta d\theta) + (R_i^3\cos^3\theta + R_i^3\sin^3\theta)(R_i\cos\theta d\theta)\Big]$$
$$= R_i^4 \int_0^{2\pi} \Big[\sin^4\theta d\theta - \cos^3\theta\sin\theta + \cos^4\theta + \cos\theta\sin^3\theta\Big].$$

Note ainda a simplificação por uso de identidades trigonométricas:

$$\sin^4\theta + \cos^4\theta = \underbrace{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2}_{1} - 2\sin^2\theta\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{2}\underbrace{(2\sin\theta\cos\theta)^2}_{\sin^2 2\theta} = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\theta,$$

$$\cos 4\theta = \cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta = 1 - 2\sin^2 2\theta \Rightarrow \sin^2 2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4\theta,$$

então:

$$\sin^4\theta + \cos^4\theta = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4\theta.$$

Por fim:

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{4} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{4}\cos 4\theta}}_{0 \text{ depois de integrar}} - \cos^3\theta \sin\theta + \cos\theta \sin^3\theta \right] d\theta$$

$$= \frac{3\pi}{2} - \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^3\theta \sin\theta d\theta}_{\text{escolha } u = \cos\theta} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\theta \sin^3\theta d\theta}_{\text{escolha } u = \sin\theta} =$$

$$= \frac{3\pi}{2} + 0 + 0 = \frac{3\pi}{2}$$

Logo $\int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{3\pi}{2} R_i^4$ e dado o raio externo e interno,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{3\pi}{2}(R_{ext}^4 - R_{int}^4) = 120\pi.$$

Solução usando Teorema de Green:[a] Note que a curva é fechada e delimita uma área (aquela que dissemos que é contorno, R), dentro da qual a função é diferenciável e bem definida. Façamos então:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R (\partial_x f_y - \partial_y f_x) dA = \iint_R (3x^2 + 3y^2) dA = 3 \iint_R \underbrace{(x^2 + y^2)}_{r^2} dA.$$

Mas para o elemento de área:

$$dA = dxdy = \underbrace{\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right|}_{\text{jacobiano}} drd\theta = rdrd\theta,$$

tem-se então:

$$3 \iint_R r^2 dA = 3 \int_0^{2\pi} \int_1^3 r^3 drd\theta = 3 \left[\int_0^{2\pi} d\theta \right] \left[\int_1^3 r^3 dr \right] = \frac{3\pi}{2}(3^4 - 1^4) = 120\pi.$$

[a] A presente solução também tem como objetivo constatar a superioridade do método para o problema proposto. O teorema não é inútil!

Problema 4

Calcule as seguintes integrais de linha ao longo dos respectivos caminhos indicados.

(a) $\mathbf{F}(x,y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$, entre os pontos $(-1,1)$ e $(1,1)$ ao longo da parábola $y = x^2$

$$\mathbf{r} = (x, x^2); \quad x \in [-1,1] \Rightarrow d\mathbf{r} = (1, 2x)dx$$

$$\mathbf{F} = (x^2 - 2x^3, x^4 - 2x^3)$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-1}^{1} [x^2 - 2x^3 + 2x(x^4 - 2x^3)]dx = -\frac{14}{15}$$

(b) $\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2 - z^2, 2yz, -x^2)$ ao longo da trajetória $\mathbf{r} = (t, t^2, t^3)$, $t \in [0,1]$

$$\mathbf{r} = (t, t^2, t^3) \quad t \in [0,1] \Rightarrow d\mathbf{r} = (1, 2t, 3t^2)dt$$

$$\mathbf{F} = (t^4 - t^6, 2t^5, -t^2)$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 [t^4 - t^6 + (2t)(2t^5) - (3t^2)(t^2)]dt = \frac{1}{35}$$

(c) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x, y, xz - y)$, ao longo do segmento de reta que liga $(0,0,0)$ e $(1,2,4)$
Uma possibilidade de parametrização é usando Geometria Analítica vetorial:

$$\mathbf{r} = (\lambda, 2\lambda, 4\lambda); \quad \lambda \in [0,1] \Rightarrow d\mathbf{r} = (1,2,4)d\lambda$$

$$\mathbf{F} = (\lambda, 2\lambda, 4\lambda^2 - 2\lambda)$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 [\lambda + (2)(2\lambda) + (4)(4\lambda^2 - 2\lambda)]d\lambda = \frac{23}{6}$$

(d) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x, y, xz - y)$, ao longo da trajetória $\mathbf{r} = (t^2, 2t, 4t^2)$, $t \in [0,1]$

$$\mathbf{r} = (t^2, 2t, 4t^2); \quad t \in [0,1] \Rightarrow d\mathbf{r} = (2t, 2, 8t)dt$$

$$\mathbf{F} = (t^2, 2t, 4t^4 - 2t)$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 [t^2(2t) + 2t(2) + (4t^2 - 2t)8t]dt = \frac{31}{6}$$

Problema 5

Calcule $\int_c \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, onde C é o quadrado de vértices $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ e $(0,-1)$, no sentido anti-horário.

Solução: Tomando $\mathbf{F} = \frac{1}{|x|+|y|}(1,1)$ e começando pelo primeiro segmento que parte de $(1,0)$ e vai até $(0,1)$ e seguindo pelos demais:

$$\mathbf{r_1} = (1-t, t); \quad t \in [0,1] \Rightarrow d\mathbf{r_1} = (-1,1)dt \qquad \mathbf{F_1} = \frac{1}{1-t+t}(1,1) = (1,1)$$

$$\mathbf{r_2} = (-t, 1-t); \quad t \in [0,1] \Rightarrow d\mathbf{r_2} = (-1,-1)dt \qquad \mathbf{F_2} = \frac{1}{t+1-t}(1,1) = (1,1)$$

$$\mathbf{r_3} = (-1+t, -t); \quad t \in [0,1] \Rightarrow d\mathbf{r_3} = (1,-1)dt \qquad \mathbf{F_3} = \frac{1}{t-1+t}(1,1) = (1,1)$$

$$\mathbf{r_4} = (t, -1+t); \quad t \in [0,1] \Rightarrow d\mathbf{r_4} = (1,1)dt \qquad \mathbf{F_4} = \frac{1}{t+1-t}(1,1) = (1,1)$$

Por fim:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 - 2 + 0 + 2 = 0$$

Problema 6

Calcule $\int_C 2xds$, onde C é formada pelo arco C_1 da parábola $y = x^2$ de $(0,0)$ a $(1,1)$, seguido de um segmento de reta vertical C_2 de $(1,1)$ a $(2,2)$.

Trecho 1: No primeiro trecho:

$$\mathbf{r} = (x, x^2); \quad x \in [0,1] \Rightarrow d\mathbf{r} = (1, 2x)dx \Rightarrow ds = |d\mathbf{r}| = \sqrt{1+4x^2}dx$$

$$\int_{C_1} 2xds = \int_0^1 2x \underbrace{\sqrt{1+4x^2}}_{\text{escolha } u = 1+4x^2} dx = \frac{1}{4}\int_1^5 \sqrt{u}du = \frac{1}{6}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_1^5 = \frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1)$$

Trecho 2: No segundo trecho:

$$\mathbf{r} = (1+t, 1+t); \quad t \in [0,1] \Rightarrow d\mathbf{r} = (1,1)dt \Rightarrow ds = |d\mathbf{r}| = \sqrt{2}dt$$

$$\int_{C_2} 2xds = \int_0^1 2\sqrt{2}(1+t)dt = 2\sqrt{2}\left[t + \frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = 3\sqrt{2}$$

Solução: Por fim:

$$\int_C 2xds = \int_{C_1} 2xds + \int_{C_2} 2xds = \frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1) + 3\sqrt{2}$$

Problema 7

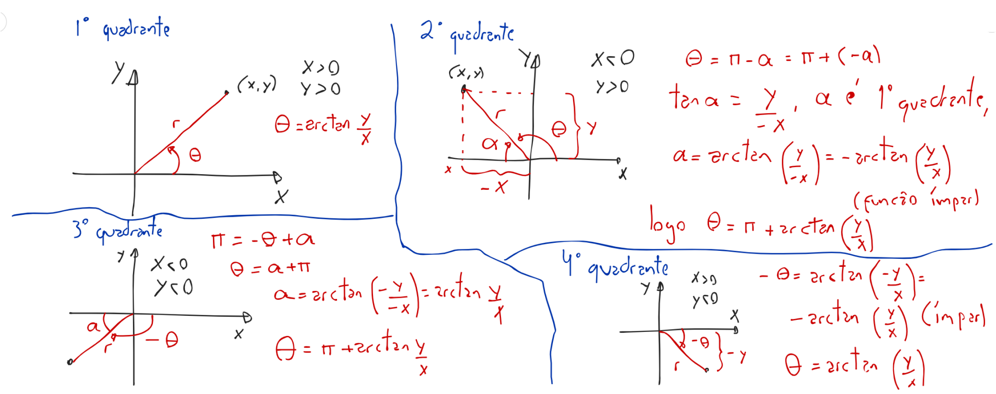
Defina o conjunto $T = \mathbb{R}^2 - \{(x, y) \mid y = 0, x \leq 0\}$. Se $(x, y) \in T$, considere $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r > 0$ e $-\pi < \theta < \pi$. Prove que θ é dado por:

$$\theta = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & \text{se } x > 0 \\ \pm\frac{\pi}{2}, & \text{se } x = 0,\ \pm y > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Mostre que:

$$\partial_x \theta = -\frac{y}{x^2 + y^2} \qquad \partial_y \theta = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Solução: os valores assumidos por θ ficam fáceis de ver por Geometria Plana quando se separa os casos em quadrantes:



enquanto os valores $\pm\frac{\pi}{2}$ são inseridos para eliminar descontinuidades. Quanto às derivadas parciais, vejamos que todos os casos à exceção de $x = 0$ caem na mesma expressão pois a constante π, quando houver, é eliminada. Logo, por regra da cadeia:

$$\partial_x \theta = \partial_x \arctan\frac{y}{x} = \frac{\partial(y/x)}{\partial x}\frac{d}{d(y/x)}\arctan\frac{y}{x} = -\frac{y}{x^2}\left(\frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$
$$\partial_y \theta = \partial_y \arctan\frac{y}{x} = \frac{\partial(y/x)}{\partial y}\frac{d}{d(y/x)}\arctan\frac{y}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

e é fácil ver (basta substituir) que o limite quando $x = 0$ existe nas duas derivadas e é igual à substituição direta (razão de polinômios, que são contínuos) em quaisquer pontos de T e tomados em quaisquer direções, dado que os casos "patológicos" com $x, y = 0$ foram removidos de início.

Problema 8

Ver Ex. 4.

Problema 9

Calcule $\int_C x^3 ds$, onde C é formada:

(a) pelo arco C_1 da parábola $y = x^2$ de $(0,0)$ a $(1,1)$, seguido de um segmento de reta vertical de $(1,1)$ a $(2,2)$.

A parametrização é idêntica à do exercício 6 e a integral ligeiramente diferente, com x^3 no lugar de $2x$ nos dois trechos.

(b) pela elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

Uma parametrização possível é tomar:

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 3\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi)$$

Então:

$$\mathbf{r} = (2\cos\theta, 3\sin\theta) \;\Rightarrow\; d\mathbf{r} = (-2\sin\theta, 3\cos\theta)d\theta \;\Rightarrow\; ds = \sqrt{4\sin^2\theta + 9\cos^2\theta}d\theta,$$

que pode ser simplificada pela identidade fundamental da trigonometria e um truque algébrico nas constantes para:

$$ds = \sqrt{4\sin^2\theta + 9\cos^2\theta}d\theta = \sqrt{9 - 5\sin^2\theta}d\theta = 3\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\sin\theta\right)^2}d\theta,$$

inserindo na integral:

$$\int_0^{2\pi} 24\cos^3\theta\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\sin\theta\right)^2}d\theta$$

que não se presume ter solução simples, mas que pode ser calculada numericamente, por exemplo.

Problema 10

Ver lista 1.

Problema 11

Mostre que $\oint_C \mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}=0$, onde $\mathbf{r}$ é o vetor posição e C é uma curva de Jordan.

Solução: Por uma curva de Jordan entende-se uma curva que delimita uma região fechada, sem cruzar a si mesma. Podemos, então, aplicar o teorema de Green:

$$\int_C (xdx+ydy) = \iint_A (\cancelto{0}{\partial_x y} - \cancelto{0}{\partial_y x})dA = 0.$$

Problema 12

Dados f e g dois campos escalares definidos em $\mathbb{R}^3$, mostre que dada C uma curva de Jordan,

$$\oint_C f(\nabla g)\cdot d\mathbf{r} = -\oint_C g(\nabla f)\cdot d\mathbf{r}$$

e que

$$\int_{\partial S} f(\nabla g)\cdot d\mathbf{r} = \iint_S [(\nabla f\times\nabla g]\cdot d\mathbf{S}.$$

Solução: Primeiramente, note (ver lista 1, exercício 5) que podemos usar a seguinte identidade:

$$\nabla fg = f\nabla g + g\nabla f$$

Como o campo é definido em todo $\mathbb{R}^3$, suporemos também diferenciável, usaremos o teorema de Stokes:

$$\oint_C \nabla(fg) = \iint \cancelto{0}{[\nabla\times\nabla(fg)]}\cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$0 = \oint_C \nabla(fg) = \oint_C f(\nabla g)\cdot d\mathbf{r} + \oint_C g(\nabla f)\cdot d\mathbf{r}.$$

Para a segunda expressão, usando o teorema de Stokes numa superfície S cuja curva de borda seja ∂S:

$$\int_{\partial S} f(\nabla g)\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla\times(f\nabla g) = \iint_S \underbrace{[\cancelto{0}{f(\nabla\times\nabla g)} + (\nabla f\times\nabla g)]}_{\text{lista 1, ex. 8)a)}}\cdot d\mathbf{S}$$

$$= \iint_S [(\nabla f\times\nabla g)]\cdot d\mathbf{S}$$

Nota: O fato de que para um campo ϕ diferenciável até segunda ordem vale $\nabla\times\nabla\phi=0$ foi mostrado na solução da lista 1 (ver repositório).

Problema 13

Seja Γ o quadrado de vértices em $(0,0),(2,0),(2,2)$, e $(0,2)$. Seja o campo vetorial $\mathbf{F}(x,y) = (y^2, x)$. Calcule $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

Solução: A região é fechada e o campo vetorial é diferenciável e contínuo nas derivadas. Podemos aplicar o teorema de Green na área do quadrado:

$$\oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_\square (\partial_x f_y - \partial_y f_x) dA = \int_0^2 \int_0^2 (1-2y) dy dx = -4$$

Problema 14

Seja Γ a fronteira do quadrado $[0,1] \times [0,1]$, orientada no sentido positivo. Calcule

$$\oint_\Gamma \left[\frac{2y + \sin x}{1+x^2} dx + \frac{x + e^y}{1+y^2} dy \right]$$

e

$$\oint \left[(3x^4 + 5) dx + (y^3 + 3y^2 - 1) dy \right]$$

Primeira integral: Pode ser feita por Teorema de Green:

$$\oint_\Gamma (f_x dx + f_y d_y) = \iint_\square (\partial_x f_y - \partial_y f_x) dA = \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{1+y^2} - \frac{2}{1+x^2} \right] dy dx$$

$$= \int_0^1 \left[\underbrace{\arctan 1}_{\pi/4} - \frac{2}{1+x^2} \right] dx = \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$$

Segunda integral: Novamente, usando Green:

$$\oint_\Gamma (f_x dx + f_y d_y) = \iint_\square (\partial_x f_y - \partial_y f_x) dA = \int_0^1 \int_0^1 (0-0) = 0$$

Problema 15

Mostre que $\oint (y dx + x dy) = 0$ para qualquer curva fechada simples C

Solução: Usando teorema de Green:

$$\oint (y dx + x dy) = \iint (\partial_x x - \partial_y y) dA = \iint (1-1) da = 0$$

Problema 16

Dado um campo vetorial $\mathbf{F} = (P, Q)$, onde $P(x,y) = xe^{-y^2}$ e $Q(x,y) = -x^2ye^{-y^2} + 1/(x^2+y^2)$, calcule a integral $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C é a fronteira de um quadrado de lado $2a$ em torno da origem, percorrida no sentido anti-horário.

Solução: Veja que em Q temos um termo na fração que não está definida na origem, o que prejudica o uso do teorema de Green. Outro problema são as integrais do tipo e^{-y^2} que não tem integrais em termos de funções elementares. Entretanto, nada impede que usemos o fato de que a integral da soma é a soma das integrais e dividir a parte que pode ser simplificada por Green mas não integrada diretamente e a que ocorre o contrário. A saber:

$$\begin{aligned}\oint_C (Pdx + Qdy) &= \oint_C \left[xe^{-y^2}dx + \left(-x^2ye^{-y^2} + \frac{1}{x^2+y^2}\right)dy\right] \\ &= \underbrace{\oint_C \left[xe^{-y^2}dx - x^2ye^{-y^2}dy\right]}_{\text{usaremos Green}} + \underbrace{\oint_C \left[0dx + \frac{1}{x^2+y^2}dy\right]}_{\text{integraremos diretamente}}.\end{aligned}$$

Para a primeira integral, usando Teorema de Green:

$$\oint_C \left[xe^{-y^2}dx - x^2ye^{-y^2}dy\right] = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}\left(-2xye^{-y^2} + 2xye^{-y^2}\right)dydx = 0.$$

Já para a segunda integral, usando os segmentos como parametrização e notando que apenas haverá integração nos trechos em que x é constante e se varia em y, (quando y não varia se tem $dy = 0$ e a integral se anula, notando que o que acompanha dx também é 0):

$$\oint_C \left[0dx + \frac{1}{x^2+y^2}dy\right] = \underbrace{\int_{-a}^{a}\frac{dy}{a^2+y^2}}_{\text{subindo a lateral}} + \underbrace{\int_{a}^{-a}\frac{dy}{(-a)^2+y^2}}_{\text{descendo a lateral}} = \int_{-a}^{a}\left[\frac{1}{a^2+y^2} - \frac{1}{a^2+y^2}\right]dy = 0$$

Problema 17

Calcule a área interna de um cardióide, cuja equação polar é $r = a(1 - \cos\theta), \theta \in [0, 2pi)$.

Solução: Aqui será usado o teorema de Green porém "ao contrário" do usual: sabemos que a integral de área é dada por:

$$\iint_A dA = \iint_A 1dA = \iint_A (\partial_x f_y - \partial_y f_x)dA = \oint_{\partial A} (f_x dx + f_y dy),$$

então temos a liberdade de escolher f_x, f_y tal que $\partial_x f_y - \partial_y f_x = 1$. A escolha usualmente feita é $\mathbf{F} = \frac{1}{2}(-y, x) = \frac{1}{2}\left(-r(\theta)\sin\theta, r(\theta)\cos\theta\right)$ já usando das coordenadas polares. Para o diferencial:

$$\mathbf{r} = (x, y) = (r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta) \;\Rightarrow\; d\mathbf{r} = (r'\cos\theta - r\sin\theta, r'\sin\theta + r\cos\theta)$$

$$\oint_{\partial A} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[r^2\sin^2\theta - \cancel{r'r\sin\theta\cos\theta} + \cancel{r'r\sin\theta\cos\theta} + r^2\cos^2\theta\right] d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)^2 d\theta = \frac{a^2}{2}\left[\int_0^{2\pi} d\theta + 2\cancelto{0}{\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta} + \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos^2\theta}_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta} d\theta\right] =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[2\pi + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta + \frac{1}{2}\cancelto{0}{\int_0^{2\pi}\cos 2\theta d\theta}\right] = \frac{3}{2}\pi a^2$$

Nota: Nada disso era necessário, bastando ter usado expressões já conhecidas de integrais de área em coordenadas polares. Entretanto, o uso do Teorema de Green exemplifica o de um planímetro.

Problema 18

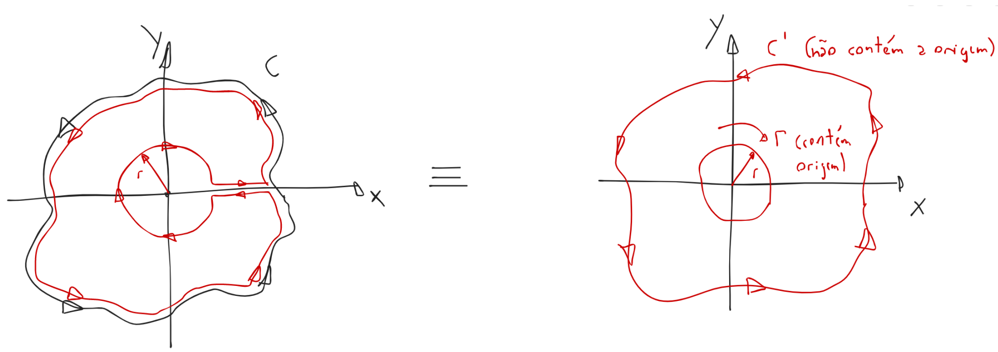
Considere:

$$\mathbf{F} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

Mostre que $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$, para qualquer curva fechada simples C orientada no sentido positivo e que contenha a origem. Mostre ainda que $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$, para qualquer curva fechada simples C orientada no sentido positivo que *não* contenha a origem.

Solução: O caso que não contém a origem é simples notando que, pelo exercício 7, ficaria simples adotar $\phi = \theta$ e então $\mathbf{F} = \nabla\phi$ (isso também pode ser feito com Teorema de Green, que se aplica nos casos que excluem a origem da área). Logo essa integral seria independente do caminho e, sendo a curva fechada, a integral de linha identicamente nula.

Já o caso que contém a origem precisa lidar com a *singularidade* presente ali (note que ela *não* permite o uso do Teorema de Green nessa área). Entretanto, compare as seguintes curvas:



Veja que a integral de linha pelo caminho preto pode ser pensada como a pelo caminho vermelho, uma curva que tem removida uma circunferência central de raio r e pode ser pensada como uma curva C' que delimita com a curva Γ inteirna uma área que não abarca a origem e a própria interna, uma circunferência Γ cuja área interna abarca a origem.

Agora notemos que a curva preta pode ser entendida como a vermelha (contendo o contorno Γ) subtraído desse mesmo contorno interno Γ (veja que a integral de linha no segmento que liga os dois contornos "vai e volta" pelo mesmo caminho e, sendo contínuo o campo fora da origem, esses trechos da integral de linha se anulam). Logo temos:

$$\underbrace{\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}_{\text{circuito original}} = \underbrace{\oint_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}_{\text{contorno que evita a origem}} - \underbrace{\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}_{\text{circunferência em torno da origem, horária}}$$

notoriamente $\oint_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$, como vimos anteriormente para o caso que não contém a origem. Adotando a parametrização de circunferência e coordenadas polares, temos para a segunda integral:

$$\mathbf{r} = r(\cos\theta, \sin\theta); \quad \theta \in (2\pi, 0] \text{ (sentido horário) } \Rightarrow \; d\mathbf{r} = r(-\sin\theta, \cos\theta)d\theta$$

$$\mathbf{F} = \left(-r\frac{\sin\theta}{r^2}, \frac{r\cos\theta}{r^2}\right) = \left(-\frac{\sin\theta}{r}, \frac{\cos\theta}{r}\right)$$

$$\oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{2\pi}^{0} \underbrace{\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)}_{1} d\theta = -2\pi,$$

de onde vemos, retornando à equação acima, que:

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 2\pi$$