

Problema 1

Seja $\omega \neq 0$ e considere o problema de Cauchy ($c \neq 0$):

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= \sin \omega t & (1.1a) \\ u(0, x) &= \sin \omega x & (1.1b) \\ u_t(0, x) &= 1, \quad x \in \mathbb{R} & (1.1c) \end{cases}$$

(a) Resolva o problema de Cauchy acima.

Seja $D = \partial_{tt} - c^2 \partial_{xx}$ um operador diferencial^a. O problema homogêneo associado é:

$$Du = 0 \quad (1.2)$$

e podemos reescrevê-lo como (“fatoração” sugerida em [Arfken and Weber, 2013]):

$$Du = (\partial_{tt} - c^2 \partial_{xx}) u = \underbrace{(\partial_t - c \partial_x)}_{D_1} \underbrace{(\partial_t + c \partial_x)}_{D_2} u = D_1 D_2 u = 0$$

Em que para a “fatoração” do operador foi assumido que u seja contínua nas segundas derivadas mistas no domínio \mathbb{R}^2 , de modo que pelo teorema de Clairaut também possamos assumir que as derivadas mistas de ordens diferentes sejam iguais. Isso também nos permite constatar que $D_1 D_2 = D_2 D_1$

Podemos então encontrar soluções que satisfaçam D_1 e independam de D_2 e vice-versa anulando cada um isoladamente. Começemos por D_1 :

$$D_1 u = (\partial_t - c \partial_x) u = 0$$

Vejamos que uma função $f = f(x + ct)$ *arbitrária* será suficiente, pois:

$$\partial_t f = \partial_t(x + ct) f'(x + ct) = c f',$$

$$\partial_x f = \partial_x(x + ct) f'(x + ct) = f',$$

$$D_1 f = c f' - c f' = 0,$$

da mesma forma se mostra que $g(x - ct)$ *arbitrária* é suficiente para D_2 , ou seja, $D_2 g = 0$. Por fim, uma combinação linear $f + g$ obedecerá a D – notando que D é linear e tomando quaisquer constantes como inclusas nas próprias funções f e g :

$$D(f + b) = (D_1 D_2)(f + b) = D_1 D_2 f + D_1 D_2 g = D_2 \underbrace{(D_1 f)}_0 + D_1 \underbrace{(D_2 g)}_0 = 0.$$

Por essa razão diremos que:

$$u = f(x + ct) + g(x - ct) \quad (1.3)$$

é solução da Eq. 1.2, que representa a parte homogênea.

Podemos pensar agora nas condições de contorno impostas, ou seja, as Eqs. 1.1b e 1.1c porém para o problema homogêneo dado pela Eq. 1.2. Ou seja, tem-se:

$$\begin{cases} u(0, x) = \sin \omega x \\ u_t(0, x) = 1, \quad x \in \mathbb{R} \end{cases} \implies \begin{cases} f(x) + g(x) = \sin \omega x \\ f'(x) - g'(x) = \frac{1}{c} \end{cases} \quad (1.4a)$$

$$(1.4b)$$

A começar pela integração da Eq. 1.4b, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\int_a^x (f'(s) - g'(s)) ds = \int_a^x (f - g)'(s) ds = (f - g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{x - a}{c}$$

Essa equação forma com 1.4a um sistema linear:

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \sin \omega x \\ f(x) - g(x) = \frac{1}{c} \int_a^x ds \end{cases} \implies \begin{cases} f(x) = \frac{1}{2} \sin \omega x + \frac{1}{2c} \int_a^x ds \\ g(x) = \frac{1}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2c} \int_a^x ds \end{cases} \quad (1.5a)$$

$$(1.5b)$$

Logo podemos retornar à definição da solução da Eq. 1.3, substituindo x pelos argumentos apropriados:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2} (\sin \omega(x + ct) + \sin \omega(x - ct)) + \frac{1}{2c} \left[\underbrace{\int_a^{x+ct} ds - \int_a^{x-ct} ds}_{\int_{x-ct}^{x+ct} ds} \right] \\ &= \frac{1}{2} (\sin \omega(x + ct) + \sin \omega(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} ds, \end{aligned}$$

em que calculando:

$$\frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} ds = \frac{x + ct - (x - ct)}{2c} = t,$$

tem-se por fim a solução da Eq. 1.2:

$$u_{\text{homog}}(x, t) = \frac{1}{2} (\sin \omega(x + ct) + \sin \omega(x - ct)) + t, \quad (1.6)$$

bastando substituir nas Eqs. 1.1b, 1.1c e 1.2 para verificar sua validade. Agora nos voltaremos para o problema 1.1a, considerando condições de contorno nulas e então encontrar uma solução $u_{\text{não homog.}}$ que a satisfaça. Por fim, a solução de 1 será dada por:

$$u(x, t) = u_{\text{homog}}(x, t) + u_{\text{não homog}}(x, t) \quad (1.7)$$

Para a solução da parte não homogênea, tem-se:

$$\frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(s, y) dy ds, \quad (1.8)$$

que por comparação com a Eq. 1 se tem $F(t, x) = \sin \omega t$. Logo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} \sin \omega s dy ds &= \int_0^t (t-s) \sin \omega s ds = t \int_0^t \sin \omega s ds - \int_0^t s \sin \underbrace{\omega s}_u ds = \\ &= \frac{t}{\omega} [-\cos \omega s]_0^t - \frac{1}{\omega^2} \int_0^{\omega t} u \sin u du = \\ &= \frac{t}{\omega} [1 - \cos \omega t] - \frac{1}{\omega^2} \int_0^{\omega t} u \sin u du, \end{aligned}$$

mas, integrando por partes:

$$\int u \sin u du = \sin u - u \cos u + C \implies \int_0^{\omega t} u \sin u du = \sin \omega t - \omega t \cos \omega t,$$

portanto:

$$u_{\text{não homog.}}(t, x) = \frac{t}{\omega} - \frac{1}{\omega^2} \sin \omega t,$$

e, retornando à Eq. 1.7, temos a solução para as Eqs. 1 (notando que $\omega \neq 0$ por hipótese):

$$u(t, x) = \frac{1}{2} (\sin \omega(x + ct) + \sin \omega(x - ct)) + t \left[1 + \frac{1}{\omega} \right] - \frac{1}{\omega^2} \sin \omega t.$$

(b) Determine o domínio de influência do ponto $(0, 2)$.

O domínio de influência do ponto $P = (t_p, x_p)$ será a região dos instantes futuros ($t > t_p$) contida pelas características que passam por P . As duas características passando por P são dadas por:

$$x + ct = x_p + ct_p = 2 + 0c = 2 \implies x = 2 - ct$$

$$x - ct = x_p - ct_p = 2 - 0c = 2 \implies x = 2 + ct$$

Se $c > 0$, essa região será:

$$D_{\text{inf}}(P) = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t > 0 \text{ e } 2 - ct < x < 2 + ct\},$$

caso contrário:

$$D_{\text{inf}}(P) = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t > 0 \text{ e } 2 + ct < x < 2 - ct\}.$$

(c) Determine o intervalo de dependência do ponto $(3, -1)$.

O intervalo de dependência de um ponto P é o conjunto de valores de x dentre os dois que correspondem aos pontos *no instante inicial* cujas características passam por P . Ou seja, buscamos quais posições da curva inicial estão de fato influenciando P .

As duas características passando por P são:

$$x + ct = x_p + ct_p = -1 + 3c \implies x = -1 + c(3 - t),$$

$$x - ct = x_p - ct_p = -1 - 3c \implies x = -1 + c(t - 3),$$

quando $t = 0$, temos os valores $-1 + 3c$ e $-1 - 3c$. Logo o intervalo de dependência será dado por:

$$I_{dep}(P) = \begin{cases} [-1 - 3c, -1 + 3c], & \text{se } c > 0 \\ [-1 + 3c, -1 - 3c], & \text{se } c < 0 \end{cases}$$

(d) Determine o domínio de dependência do ponto $(3, -1)$.

O domínio de dependência do ponto P é bastante análogo ao caso anterior (de fato, consideraremos o intervalo de dependência como um segmento contido no domínio de dependência), de modo que são os pontos a partir (inclusive) do instante inicial que estão contidos entre as características que passa por P .

Do item anterior, temos as características:

$$x = -1 + c(3 - t), \quad t > 0$$

$$x = -1 + c(t - 3), \quad t > 0$$

e podemos expressar essa região por:

$$D_{dep}(P) = \begin{cases} \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq 3 \text{ e } -1 + c(3 - t) \leq x \leq -1 + c(t - 3)\}, & \text{se } c > 0 \\ \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq 3 \text{ e } -1 + c(t - 3) \leq x \leq -1 + c(3 - t)\}, & \text{se } c < 0 \end{cases}$$

^aPoderíamos tomar o já existente d'Alembertiano $\square^2 = \frac{1}{c^2} \partial_{tt} - \partial_{xx}$, entretanto, por conveniência do exercício será definido este novo.

Problema 2

Sejam c e L constantes positivas. Resolva o seguinte problema misto:

$$\begin{cases} u_{tt} &= c^2 u_{xx} \end{cases} \quad (2.1a)$$

$$\begin{cases} u(0, x) &= f(x) \end{cases} \quad (2.1b)$$

$$\begin{cases} u_t(0, x) &= g(x) \quad x \in (0, L) \end{cases} \quad (2.1c)$$

$$\begin{cases} u_x(t, 0) &= u_x(t, L) = 0, \quad t \geq 0 \end{cases} \quad (2.1d)$$

Solução: Assumamos que u possa ser separada nas variáveis de modo que [Butkov, 1973]:

$$u(t, x) = T(t)X(x), \quad (2.2)$$

logo inserindo na Eq. 2.1a tem-se, para $u \neq 0$:

$$XT'' = c^2 X''T \implies \frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = -\lambda^2, \quad (2.3)$$

em que foram usados os fatos de que as derivadas parciais se reduzem à derivadas simples nas funções apropriadas^a e que uma vez separadas em cada variável, a única possibilidade para que os dois lados da expressão dada pela Eq. 2.3 sejam iguais é caso sejam ambas iguais à mesma constante^b.

Também podemos verificar que as duas equações se reduzem à forma:

$$y''(s) + \alpha y(s) = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Estudaremos os três casos: assumiremos para as condições de contorno em x a solução da parcela à esquerda da Eq. 2.3:

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2 \implies X'' + \lambda^2 X = 0 \implies X(x) = a_1 e^{-\sqrt{-\lambda^2}x} + a_2 e^{\sqrt{-\lambda^2}x},$$

em que aplicadas as condições de contorno da Eq. 2.1d:

$$\begin{cases} -\sqrt{-\lambda^2}a_1 + -\sqrt{-\lambda^2}a_2 &= 0 \\ -\sqrt{-\lambda^2}a_1 e^{-\sqrt{-\lambda^2}L} + -\sqrt{-\lambda^2}a_2 e^{\sqrt{-\lambda^2}L} &= 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\sqrt{-\lambda^2} & -\sqrt{-\lambda^2} \\ -\sqrt{-\lambda^2}e^{-\sqrt{-\lambda^2}L} & -\sqrt{-\lambda^2}e^{\sqrt{-\lambda^2}L} \end{bmatrix}}_M \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

terá soluções não triviais para a_1, a_2 caso $\det(M) = 0$ (notando que um sistema determinado e homogêneo admite apenas uma solução, a trivial). Entretanto, fazendo o cálculo do determinante tem-se:

$$\det(M) = -2\lambda^2 \sinh \sqrt{-\lambda^2}L = 0.$$

- $-\lambda^2 > 0$: então $\sqrt{-\lambda^2} \in \mathbb{R}$ e não há forma de zerar o seno hiperbólico. Logo desprezaremos essas soluções.
- $\lambda = 0$: satisfaz a relação trivialmente, logo será uma solução mantida.
- $-\lambda^2 < 0$: então $\sqrt{-\lambda^2} = \pm i\lambda$ e a equação pode ser satisfeita notando que:

$$-2\lambda^2 \sinh \sqrt{-\lambda^2} L = \pm 2\lambda^2 i \sin \lambda L = 0 \implies \sin \lambda L = 0 \implies \lambda = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

ou seja, um conjunto discreto de possibilidades admissíveis para λ , que inclui o zero. Reitaremos esse ponto adiante, pois irá reaparecer na determinação das constantes.

Tomando $\lambda^2 > 0$ e expressando as equações diferenciais contidas na Eq. 2.3 e as resolvendo, tem-se:

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 \\ T'' + c^2 \lambda^2 T = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} X(x) = A_\lambda \cos \lambda x + B_\lambda \sin \lambda x \\ T(t) = C_\lambda \cos c\lambda t + D_\lambda \sin c\lambda t \end{cases} \quad \begin{matrix} (2.4a) \\ (2.4b) \end{matrix}$$

E, por sobreposição (a linearidade do problema foi discutida no exercício anterior):

$$u(t, x) = \sum_{\lambda} T(t) X(x) \quad (2.5)$$

em que já foi notado que não é *qualquer* λ que fornece uma solução, pois inserindo a Eq. 2.4a na Eq. 2.1d, para $\lambda > 0$, tem-se:

$$\begin{cases} u_x(t, 0) = 0 \\ u_x(t, L) = 0 \end{cases} = \begin{cases} \sum_{\lambda} T(t) X'(0) = 0 \\ \sum_{\lambda} T(t) X'(L) = 0 \end{cases} = \begin{cases} \sum_{\lambda} T(t) \lambda B_\lambda = 0 \\ \sum_{\lambda} T(t) \lambda (-A_\lambda \sin \lambda L) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (2.6a) \\ (2.6b) \end{matrix}$$

de onde se obtém da Eq. 2.6a que $B_\lambda = 0$ e da Eq. 2.6b (na qual já foi usado o fato anterior) que os valores admissíveis de λ são:

$$\sin \lambda L = 0 \implies \lambda L = n\pi \implies \lambda = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (\text{já sabíamos}),$$

Reinserindo estes resultado na Eq. 2.5, reduziu-se as soluções possíveis para:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} \left(C_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + D_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} \left(C_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + D_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right), \end{aligned} \quad (2.7)$$

em que a última passagem simplesmente nota que os coeficientes não podem ser negativos, a que podemos estudar agora as condições de contorno das Eqs. 2.1b e 2.1c:

$$\begin{cases} u(0, x) = f(x) \\ u_t(0, x) = g(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} A_n C_n \cos \frac{n\pi x}{L} = f(x) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} A_n D_n \cos \frac{n\pi x}{L} = g(x) \end{cases} \quad \begin{matrix} (2.8a) \\ (2.8b) \end{matrix}$$

condições que agora podem ser abordadas, primeiro tomando $A_n = 1$ sem prejuízo para a determinação de constantes, segundo ao se notar que se tratam de Séries de Fourier e usando da relação de ortogonalidade das funções cosseno (não será desenvolvido, mas comentado aqui) [Riley et al., 1997]:

$$\begin{cases} C_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx & (\text{média}) \\ C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}, & n \in \mathbb{N} \\ D_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \cos \frac{n\pi x}{L}, & n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (2.9)$$

notando que quando $n = 0$ não aparecerão os senos da Eq. 2.7, logo o resultado acima estará condizente.

Podemos então expressar a solução do problema dado pela Eq. 2 por:

$$u(t, x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi x}{L} \left(C_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + D_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right),$$

com coeficientes dados pela Eq. 2.9.

^aNão será mostrado, mas pode ser facilmente verificado pela definição.

^bTambém não será mostrado, mas pode ser argumentado através de derivação parcial de cada lado com relação às duas variáveis e mostrar que a única possibilidade é que todas sejam nulas – logo os dois lados representam uma (mesma) constante.

Problema 3

Suponha que g seja uma função par, isto é, $g(x) = g(-x)$. Resolva o seguinte problema de Cauchy:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - \frac{2}{x}u_x = 0 \end{cases} \quad (3.1a)$$

$$\begin{cases} u(0, x) = 0 \end{cases} \quad (3.1b)$$

$$\begin{cases} u_t(0, x) = g(x) \end{cases} \quad (3.1c)$$

Sugestão: o que aconteceria se $w = xu$?

Solução: Seguiremos a sugestão e obteremos as expressões:

$$w = xu \implies \begin{cases} w_t = xu_t \\ w_x = u + xu_x \end{cases} \implies \begin{cases} w_{xx} = 2u_x + xu_{xx} \\ w_{tt} = xu_{tt} \end{cases}$$

Isolando, $u_{xx} = \frac{w_{xx}}{x}$, $u_{tt} = \frac{w_{tt}}{x}$ (notemos que $x = 0$ já não faz parte do domínio, de todo modo) e inserindo nas Eqs. 3:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} [w_{tt} - w_{xx} + 2u_x - 2u_x] = 0 \\ \frac{w(0, x)}{x} = 0 \\ \frac{w_t(0, x)}{x} = g(x) \end{cases} \implies \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0 \\ w(0, x) = 0 \\ w_t(0, x) = xg(x) \end{cases} \quad \begin{matrix} (3.2a) \\ (3.2b) \\ (3.2c) \end{matrix}$$

é um problema que recai na mesma equação de onda que vimos nos exercícios anteriores, com $c = 1$. Como não há a restrição espacial que permitiria a restrição das funções admissíveis na sobreposição (o problema misto do segundo exercício), abordaremos o problema pelas características, como no primeiro.

Seguindo exatamente os mesmos passos, recai-se na solução:

$$w(t, x) = \phi(x + t) + \psi(x - t) \quad (3.3)$$

e para o tratamento das condições de contorno:

$$\begin{cases} w(0, x) = 0 \\ w_t(0, x) = xg(x) \end{cases} \implies \begin{cases} \phi(x) + \psi(x) = 0 \\ \phi'(x) - \psi'(x) = xg(x) \end{cases} \quad \begin{matrix} (3.4a) \\ (3.4b) \end{matrix}$$

resolvendo ainda da mesma forma que no primeiro problema:

$$\begin{cases} \phi(x) + \psi(x) = 0 \\ \phi(x) - \psi(x) = \int_a^x sg(s)ds \end{cases} \implies \begin{cases} \phi(x) = \frac{1}{2} \int_a^x sg(s)ds \\ \psi(x) = -\frac{1}{2} \int_a^x sg(s)ds \end{cases} \quad \begin{matrix} (3.5a) \\ (3.5b) \end{matrix}$$

substituindo na Eq. 3.3 com os argumentos apropriados:

$$w(t, x) = \frac{1}{2} \left[\int_a^{x+t} sg(s)ds - \int_a^{x-t} sg(s)ds \right] = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} sg(s)ds,$$

$$u(t, x) = \frac{1}{2x} \int_{x-t}^{x+t} sg(s)ds.$$

Agora notemos os seguintes fatos:

- $g(x)$ é par: foi dado.
- $xg(x)$ é ímpar: $(I \cdot g)(-x) = -xg(-x) = -xg(x) = -(I \cdot g)(x)$.
- $\int xg(x)dx$ é par: $[\int (I \cdot g)](-x) = \int (-x)g(-x)d(-x) = \int x \underbrace{g(-x)}_{\text{par}} dx = \int xg(x)dx$.

Se tomarmos $F(x) = \int xg(x)dx$, então F é uma função par.

Problema 4

Seja $u(t, x)$ uma solução clássica da equação

$$u_{tt} + au_t = c^2 u_{xx}, \quad (4.1)$$

em que $a \geq 0$. A energia total do sistema descrito por esta equação é

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (u_t^2 + c^2 u_x^2) dx. \quad (4.2)$$

Suponha que exista $a > 1/2$ e $C(t) > 0$ tal que

$$\max \{|u_t(t, x)|, |u_x(t, x)|\} \leq C(t)/|x|^\alpha \quad (4.3)$$

para todo $t > 0$ fixado e $|x| \gg 1$.

(a) Prove que se $a = 0$, então $t \mapsto E(t)$ é constante.

Se $a = 0$, então a Eq. 4.1 se reduz a:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad (4.4)$$

Usaremos agora a seguinte estratégia^a: multiplicaremos a Eq. 4.4 por u_t e então integraremos em todo o espaço. Vejamos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_t(u_{tt} - c^2 u_{xx}) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (u_{tt}u_t - c^2 u_{xx}u_t) dx = 0,$$

considerando cada termo da soma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_{tt}u_t dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{\partial u_t^2}{\partial t} dx = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} u_t^2 dx}_{\text{função apenas de } t} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u_t^2 dx$$

em que foi usado o fato de que a integral realçada é função apenas de t e a definição de derivada parcial se torna idêntica à de derivada total. Agora integrando por partes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{u_t}_u \underbrace{u_{xx}}_{dv} dx = \underbrace{[u_t u_x]_{-\infty}^{\infty}}_{0, \text{ pela Eq. 4.3}} - \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{u_x \frac{\partial u_t}{\partial x}}_{\text{Clairaut}} dx = - \int_{-\infty}^{\infty} u_x \frac{\partial u_x}{\partial t} dx = - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx,$$

em que foi usado que as derivadas u_t e u_x vão a zero no infinito e que as derivadas parciais comutam se assumirmos (e iremos assumir) uma função solução u contínua. Por fim:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (u_{tt}u_t - c^2 u_{xx}u_t) dx = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (u_t^2 + c^2 u_x^2) dx \right] = \frac{dE}{dt} = 0,$$

logo $E(t)$ será constante.

(b) Prove que se $a > 0$, então a energia é decrescente.

Seguindo exatamente a mesma estratégia, notando agora que $u_{tt} - c^2 u_{xx} = -au_t$, multiplicando por u_t e integrando, tem-se:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (u_t^2 + c^2 u_x^2) dx \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{u_t (u_{tt} - c^2 u_{xx})}_{-au_t} dx = -a \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} u_t^2 dx}_{\geq 0} \leq 0,$$

ou seja, mostra-se que a energia é *não-crescente*, contanto que possamos sempre resolver um problema linear homogêneo com a solução trivial, que é fácil de constatar que possui energia nula em todos os instantes.

Foi usado no último passo o fato de que uma integral de uma função contínua (ao menos em partes) e não-negativa é não-negativa.

(c) Suponha que $a = 0$ e u seja uma solução da Eq. 4.1 sujeita às condições $u(0, x) = u_t(0, x) = 0$ e satisfazendo à Eq. 4.3. Prove que $u \equiv 0$ usando o item a).

Sabemos pelo item a) que a energia será constante em toda a evolução temporal. Agora vejamos a energia no instante inicial:

$$E(t) = E(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \cancel{u_t^2(0, x)} + c^2 u_x^2(0, x) dx = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(0, x) dx,$$

façamos esta última integração por partes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{u_x(0, x)}_u \underbrace{u_x(0, x)}_{dv} dx = \left[\underbrace{u_x(0, x)u(0, x)}_{0, \text{ pela Eq. 4.3}} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{u(0, x)}_{\text{contorno}} u_{xx}(0, x) dx = 0.$$

Agora mostraremos que se a energia de uma função contínua é nula em \mathbb{R}^2 , a única solução admissível é $u(t, x) = u_0 \in \mathbb{R}$, uma constante. Restringiremos o problema às funções contínuas e diferenciáveis até segunda ordem pois as soluções buscadas para equações como a Eq. 4.1 são desse tipo, ao menos numa região de interesse.

Suponhamos $u(t, x)$ contínua e diferenciável até segunda ordem não seja constante em $(t_i, x_i) \in \mathbb{R}^2$. Logo existe uma direção n (representada no \mathbb{R}^2 pelo vetor normal não nulo \hat{n}) tal que a derivada direcional (que existe) não é nula:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_0, y_0) \neq 0 \implies \nabla u \cdot \hat{n} \neq 0 \implies u_t \neq 0, \text{ ou } u_x \neq 0 \text{ (ou ambos)}.$$

Ademais, sendo contínua, podemos assumir ainda que exista um intervalo I_{t_i} ou I_{x_i} em x (mais precisamente, em torno de $(t_i, x_i \pm \varepsilon_i)$) nos quais u_t ou u_x mantenham seu sinal não nulo (isso é mostrado para funções de uma variável em [Apostol, 1967]).

Portanto, calculando a energia:

$$E(t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(t_i, x) dx + c^2 \int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(t_i, x) dx > 0,$$

pois ambas as integrais são não-negativas e a única forma de zerar ambas é ocorrendo em t_i que $u_t(t_i, x) = u_x(t_i, x) = 0$. A contrapositiva dessa conclusão é que se a energia é nula num instante, $u(t_i, x_i)$ será uma constante. Variando as posições ao longo dos pontos admissíveis no domínio, tem-se que $u(t, x) = u_0$ em \mathbb{R}^2 .

Sabemos da informação do instante inicial que essa constante deverá ser $u_0 = 0$, o que termina a demonstração deste item.

(d) Prove que existe no máximo uma solução da Eq. 4.1 satisfazendo às condições

$$u(0, x) = f(x) \quad \text{e} \quad u_t(0, x) = g(x).$$

Suponhamos duas soluções, u_1 e u_2 que satisfaçam às condições dadas. Logo $w = u_1 - u_2$ também é uma solução (a Eq. 4.1 é linear pela definição de [Iorio, 2018], mas também pode ser verificado diretamente). Vejamos agora as condições de contorno:

$$w(0, x) = u_1(0, x) - u_2(0, x) = f(x) - f(x) = 0$$

$$w_t(0, x) = u_{1t}(0, x) - u_{2t}(0, x) = g(x) - g(x) = 0.$$

Se $a = 0$, $w(t, x)$ é uma função com condições iniciais nulas e o caso recai no item c). Logo $w(t, x) = 0$ em todo o domínio, ou seja, $u_1 = u_2$.

Agora suponhamos que $a > 0$. Pelo item b), a energia $E(t)$ de $w(t, x)$ deverá ser não crescente. Ademais, deverá ser não negativa, pelo modo como está definida (integração de função não negativa). Portanto, para quaisquer dois instantes de tempo t_1 e t_2 deverá ocorrer que:

$$t_2 > t_1 \implies E(t_1) \geq E(t_2) \geq 0. \quad (4.5)$$

Vejamos ainda que:

$$E(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{w_t(0, x)}^0 + c^2 w_x^2(0, x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{w(0, x) w_{xx}(0, x)}^0 dx = 0,$$

em que foi usada uma sequência de passos completamente análoga à feita no item c). Concluimos do exposto acima que a energia no instante inicial é nula e, inserindo na Eq. 4.5, que deverá ser nula a todo instante. Pela mesma discussão do item anterior, deve ocorrer então que $w(t, x) = 0$, ou seja, que $u_1(t, x) = u_2(t, x)$, ou seja, que são iguais.

^aPode ser encontrada nestas [notas de aula](#).

Referências

- [Apostol, 1967] Apostol, T. (1967). *Calculus, Volume 1*. Blaisdell book in pure and applied mathematics. Wiley.
- [Arfken and Weber, 2013] Arfken, G. B. and Weber, H. J. (2013). *Mathematical methods for physicists; 7th ed.* Academic Press, San Diego, CA.
- [Butkov, 1973] Butkov, E. (1973). *Mathematical Physics*. Addison-Wesley Series in Advanced Physics. Addison-Wesley.
- [Iorio, 2018] Iorio, V. M. (2018). *EDPs: um curso de graduação*. IMPA.
- [Riley et al., 1997] Riley, K. F., Bence, S. J., and Hobson, M. P. (1997). *Mathematical methods for physics and engineering: a comprehensive guide*. Cambridge Univ. Press, Cambridge.