

**Problema 1: lista 10, exercício 2**

(a) Mostre que:

$$\int_0^{\infty} x^{2s+1} e^{-ax^2} dx = \frac{s!}{2a^{s+1}}$$

(b) Mostre que:

$$\int_0^{\infty} x^{2s} e^{-ax^2} dx = \frac{\Gamma(s+1/2)}{2a^{s+1/2}} = \frac{(2s-1)!!}{2^{s+1}a^s} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

**Conhecimento:** Usei a leitura de [Arfken and Weber, 2013] e [Hassani, 2009] sobre a função gama.

**Compreensão:** Aprendi a utilização da definição da função gama (através de substituições adequadas em integrais) para a determinação de certas integrais impróprias.

**Resolução:**

(a)  $\int_0^{\infty} x^{2s+1} e^{-ax^2} dx = \frac{s!}{2a^{s+1}}$ : usando a substituição  $t = x^2$ ,  $\frac{dt}{2} = x dx$ ,

$$\int_0^{\infty} x^{2s+1} e^{-ax^2} dx = \int_0^{\infty} (x^2)^s e^{-a(x^2)} x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} t^s e^{-at} dt = \frac{1}{2} \frac{s!}{a^{s+1}}$$

(b)  $\int_0^{\infty} x^{2s} e^{-ax^2} dx = \frac{\Gamma(s+1/2)}{2a^{s+1/2}} = \frac{(2s-1)!!}{2^{s+1}a^s} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ : usando agora uma outra substituição em que  $t = ax^2$ ,  $dx = \frac{dt}{2a^{1/2}t^{1/2}}$  (notar que  $x > 0$ ):

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{2s} e^{-ax^2} dx &= \int_0^{\infty} (x^2)^s e^{-t} \frac{dt}{2a^{1/2}t^{1/2}} = \frac{1}{2a^{1/2}} \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{a}\right)^s e^{-t} \frac{dt}{t^{1/2}} = \\ &= \frac{1}{2a^{s+1/2}} \int_0^{\infty} t^{s-1/2} e^{-t} dt = \frac{1}{2a^{s+1/2}} \int_0^{\infty} t^{(s+1/2)-1} e^{-t} dt = \frac{\Gamma(s+1/2)}{2a^{s+1/2}}, \end{aligned}$$

a partir da relação mostrada em [Arfken and Weber, 2013]:

$$\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \frac{(2n-1)!!}{2^n},$$

substituindo chega-se à segunda igualdade.

**Análise, Síntese e Aplicações:** A função gama pode ser pensada como uma generalização do fatorial. É, ademais, uma função especial que aparece em decorrência de certas integrais impróprias recorrentes envolvendo os termos polinomiais e exponenciais.

Uma aplicação notória é a aproximação de Stirling,  $x! = \Gamma(x+1) \approx \sqrt{2\pi} e^{-x} x^{x+1/2}$  [Hassani, 2009].

## Problema 2: lista 10, exercício 5

Prove que:

$$\frac{\sin x}{x} = \int_0^{\pi/2} J_0(x \cos \theta) \cos \theta d\theta$$
$$\frac{1 - \cos \theta}{x} = \int_0^{\pi/2} J_1(x \cos \theta) d\theta$$

**Conhecimento:** Usei a leitura de [Arfken and Weber, 2013] e [Hassani, 2009] sobre as funções de Bessel e sobre o fatorial duplo, além da página referenciada no corpo da dedução.

**Compreensão:** Compreendi principalmente a utilização da definição em séries das funções de Bessel, além de identidades envolvendo fatorial duplo.

**Resolução:** Pela definição em séries das funções de Bessel, tem-se [Arfken and Weber, 2013]:

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(n+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s} \implies J_0(x \cos \theta) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(s!)^2} \left(\frac{x \cos \theta}{2}\right)^{2s},$$

integrando termo-a-termo (dada a convergência):

$$\int_0^{\pi/2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(s!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s} \cos^{2s+1} \theta d\theta = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(s!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s} \int_0^{\pi/2} \cos^{2s+1} \theta d\theta,$$

é fornecida a dica em [Arfken and Weber, 2013] que:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2s+1} \theta d\theta = \frac{(2s)!!}{(2s+1)!!} = \frac{2^{2s}(s!)^2}{(2s+1)!},$$

em que foram usadas na última igualdade as **propriedades**:

$$(2s)!! = 2^s s! \quad (s \text{ par})$$

$$(2s+1)!! = (2(s+1)-1)!! = \frac{(2s+1)!}{2^s s!} \quad (s \text{ ímpar})$$

então, substituindo:

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(s!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s} \int_0^{\pi/2} \cos^{2s+1} \theta d\theta &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(s!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s} \frac{2^{2s}(s!)^2}{(2s+1)!} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{x^{2s}}{(2s+1)!} = \\ &= \frac{1}{x} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!} = \frac{1}{x} \sin x = \frac{\sin x}{x}. \end{aligned}$$

A segunda igualdade é feita de maneira análoga:

$$J_1(x \cos \theta) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(s+1)!} \left(\frac{x \cos \theta}{2}\right)^{2s+1},$$

integrando:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_1(x \cos \theta) d\theta &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(s+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2s+1} d\theta = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(s+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+1} \frac{2^{2s}(s!)^2}{(2s+1)!} = \\
 &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{2(s+1)} \frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{2s+2} \frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{x^{2s+1}}{(2s+2)!} = \\
 &= -\frac{1}{x} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{s+1} \frac{x^{2(s+1)}}{(2(s+1))!} = -\frac{1}{x} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{x^{2s}}{(2s)!} = \\
 &= -\frac{1}{x} \left[ \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{x^{2s}}{(2s)!} - (-1)^0 \frac{x^0}{0!} \right] = -\frac{1}{x} [\cos x - 1] = \frac{1 - \cos x}{x}.
 \end{aligned}$$

**Análise, Síntese e Aplicações:** Funções de Bessel são importantes em equações de Laplace em coordenadas cilíndricas, tanto que por vezes são ditas **harmônicos cilíndricos** (contrastar com os harmônicos esféricos, dados por funções de Legendre associadas).

Em engenharia de transferência de calor, aparecem frequentemente em soluções analíticas para simetrias cilíndricas como dutos e aletas, ou são corrigidas por coeficientes experimentais.

## Referências

- [Arfken and Weber, 2013] Arfken, G. B. and Weber, H. J. (2013). *Mathematical methods for physicists; 7th ed.* Academic Press, San Diego, CA.
- [Hassani, 2009] Hassani, S. (2009). *Mathematical Methods For Students of Physics and Related Fields / by Sadri Hassani.* Springer New York : Imprint: Springer, New York, NY, 2nd ed. 2009. edition.