Problema 1: lista 10, exercício 2

(a) Mostre que:

$$\int_0^\infty x^{2s+1}e^{-ax^2}dx = \frac{s!}{2a^{s+1}}$$

(b) Mostre que:

$$\int_0^\infty x^{2s}e^{-ax^2}dx = \frac{\Gamma(s+1/2)}{2a^{s+1/2}} = \frac{(2s-1)!!}{2^{s+1}a^s}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Conhecimento: Usei a leitura de [Arfken and Weber, 2013] e [Hassani, 2009] sobre a função gama.

Compreensão: Aprendi a utilização da definição da função gama (através de substituições adequadas em integrais) para a determinação de certas integrais impróprias.

Resolução:

(a) $\int_0^\infty x^{2s+1}e^{-ax^2}dx = \frac{s!}{2a^{s+1}}$: usando a substituição $t = x^2$, $\frac{dt}{2} = xdx$,

$$\int_0^\infty x^{2s+1}e^{-ax^2}dx = \int_0^\infty (x^2)^s e^{-a(x^2)}xdx = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^s e^{-at}dt = \frac{1}{2}\frac{s!}{a^{s+1}}$$

(b) $\int_0^\infty x^{2s}e^{-ax^2}dx = \frac{\Gamma(s+1/2)}{2a^{s+1/2}} = \frac{(2s-1)!!}{2^{s+1}a^s}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$: usando agora uma outra substituição em que $t = ax^2$, $dx = \frac{dt}{2a^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}}$ (notar que $x > 0$):

$$\int_0^\infty x^{2s}e^{-ax^2}dx = \int_0^\infty (x^2)^s e^{-t}\frac{dt}{2a^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2a^{\frac{1}{2}}}\int_0^\infty \left(\frac{t}{a}\right)^s e^{-t}\frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}} =$$
$$= \frac{1}{2a^{s+\frac{1}{2}}}\int_0^\infty t^{s-\frac{1}{2}}e^{-t}dt = \frac{1}{2a^{s+\frac{1}{2}}}\int_0^\infty t^{(s+\frac{1}{2})-1}e^{-t}dt = \frac{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}{2a^{s+\frac{1}{2}}},$$

a partir da relação mostrada em [Arfken and Weber, 2013]:

$$\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\frac{(2n-1)!!}{2^n},$$

substituindo chega-se à segunda igualdade.

Análise, Síntese e Aplicações: A função gama pode ser pensada como uma generalização do fatorial. É, ademais, uma função especial que aparece em decorrência de certas integrais impróprias recorrentes envolvendo os termos polinomiais e exponenciais.

Uma aplicação notória é a aproximação de Stirling, $x! = \Gamma(x+1) \approx \sqrt{2\pi}e^{-x}x^{x+\frac{1}{2}}$ [Hassani, 2009].

Problema 2: lista 10, exercício 5

Prove que:

$$\frac{\sin x}{x} = \int_0^{\pi/2} J_0(x\cos\theta)\cos\theta d\theta$$

$$\frac{1-\cos\theta}{x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_1(x\cos\theta) d\theta$$

Conhecimento: Usei a leitura de [Arfken and Weber, 2013] e [Hassani, 2009] sobre as funções de Bessel e sobre o fatorial duplo, além da página referenciada no corpo da dedução.

Compreensão: Compreendi principalmente a utilização da definição em séries das funções de Bessel, além de identidades envolvendo fatorial duplo.

Resolução: Pela definição em séries das funções de Bessel, tem-se [Arfken and Weber, 2013]:

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s} \implies J_0(x\cos\theta) = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(s!)^2}\left(\frac{x\cos\theta}{2}\right)^{2s},$$

integrando termo-a-termo (dada a convergência):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(s!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s}\cos^{2s+1} d\theta = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(s!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2s+1} d\theta,$$

é fornecida a dica em [Arfken and Weber, 2013] que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2s+1} d\theta = \frac{(2s)!!}{(2s+1)!!} = \frac{2^{2s}(s!)^2}{(2s+1)!},$$

em que foram usadas na última igualdade as propriedades:

$$(2s)!! = 2^s s! \quad (s \text{ par})$$

$$(2s+1)!! = (2(s+1)-1)!! = \frac{(2s+1)!}{2^s s!} \quad (s \text{ ímpar})$$

então, substituindo:

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(s!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2s+1} d\theta = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{\cancel{(s!)^2}}\left(\frac{x}{\cancel{2}}\right)^{2s}\frac{\cancel{2^{2s}(s!)^2}}{(2s+1)!} = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{x^{2s}}{(2s+1)!} =$$

$$= \frac{1}{x}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!} = \frac{1}{x}\sin x = \frac{\sin x}{x}.$$

A segunda igualdade é feita de maneira análoga:

$$J_1(x\cos\theta) = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!(s+1)!}\left(\frac{x\cos\theta}{2}\right)^{2s+1},$$

integrando:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_1(x\cos\theta)d\theta &= \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!(s+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2s+1}d\theta = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!(s+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+1}\frac{2^{2s}(s!)^2}{(2s+1)!} = \\
&= \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{2(s+1)}\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!} = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{2s+2)}\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!} = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{x^{2s+1}}{(2s+2)!} = \\
&= -\frac{1}{x}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{s+1}\frac{x^{2(s+1)}}{(2(s+1))!} = -\frac{1}{x}\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s\frac{x^{2s}}{(2s)!} = \\
&= -\frac{1}{x}\left[\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{x^{2s}}{(2s)!} - (-1)^0\frac{x^0}{0!}\right] = -\frac{1}{x}\left[\cos x - 1\right] = \frac{1-\cos x}{x}.
\end{aligned}$$

Análise, Síntese e Aplicações: Funções de Bessel são importantes em equações de Laplace em coordenadas cilíndricas, tanto que por vezes são ditas harmônicos cilíndricos (contrastar com os harmônicos esféricos, dados por funções de Legendre associadas.

Em engenharia de transferência de calor, aparecem frequentemente em soluções analíticas para simetrias cilíndricas como dutos e aletas, ou são corrigidas por coeficientes experimentais.

Referências

[Arfken and Weber, 2013] Arfken, G. B. and Weber, H. J. (2013). *Mathematical methods for physicists; 7th ed.* Academic Press, San Diego, CA.

[Hassani, 2009] Hassani, S. (2009). *Mathematical Methods For Students of Physics and Related Fields / by Sadri Hassani.* Springer New York : Imprint: Springer, New York, NY, 2nd ed. 2009. edition.