Problema 1: lista 8, exercício 1

Mostre que a relação de Rodrigues para os Polinômios associados de Legendre é dada por:

$$P_l^m(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^l l!}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(1-x^2).$$

Conhecimento:

Compreensão:

Resolução: Ao se deparar com a Eq. Associada de Legendre:

$$(1-x^2)P''(x) - 2xP'(x) + \left[\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right] P(x) = 0,$$

pode-se eliminar a presença do denominador $1-x^2$ usando a substituição[a]

$$P(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\mathcal{P}(x),$$

cuja substituição e substituição na Eq. Associada de Legendre resulta na equação:

$$(1-x^2)\mathcal{P}''(x) - 2x(m+1)\mathcal{P}'(x) = [\lambda - m(m+1)]\,\mathcal{P}(x) = 0 \quad (1)$$

e cuja resolução pode ser obtida por método de Frobenius ($\mathcal{P}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_k x^{k+j}$) numa relação de recorrência:

$$a_{j+2} = a_j\left[\frac{j^2 + (2m+1)j - \lambda + m(m+1)}{(j+1)(j+2)}\right]; \qquad (k = 0 \text{ na eq. indicial}),$$

divergente em $x = \cos\theta = \pm 1$ em geral, pois se nota que $\lim_{j\to\infty} a_{j+2} = a_j$ (ou seja, os coeficientes da série estabilizam) e as potências de x^{k+j} deixam de ser decrescentes para todo x. Ou seja, *possivelmente* se obtém violações da condição necessária para convergência de séries (reais, no caso) de que o coeficiente tende a 0.

Isso é evitado fazendo com que a sequência de coeficientes se anule em algum ponto, ou seja, que $a_j = 0$ para algum j inteiro positivo, par (veja que a sequência acima é par, iniciando de $j = 0$). Com isso, a relação de recorrência anulará todos os termos seguintes e a série de potências de $\mathcal{P}(x)$ é truncada, resultando num polinômio.

Para que se anule a relação de recorrência, será anulado o numerador, resolvendo a equação quadrática em j:

$$j^2 + (2m+1)j - \lambda + m(m+1),$$

em que $\lambda = l(l+1),\ l \in \mathbb{N}$ é imposto para que λ seja um número inteiro e par (afinal, j é inteiro e par). A solução consiste no índice $j = l - m$, o que força $l > m$ e a terem mesma paridade. Denotam-se assim as funções associadas de Legendre:

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \mathcal{P}_l^m(x); \qquad \mathcal{P}_l^m(x) \text{ polinômio},$$

e então usando a regra de Leibniz para o produto:

$$\frac{d^m}{dx^m}\left[A(x)B(x)\right] = \sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s} \frac{d^{m-s}}{dx^{m-s}}[A(x)] \frac{d^s}{dx^s}[B(x)],$$

na Equação de Legendre:

$$(1-x^2)P_l'' - 2xP_l' + l(l+1)P_l = 0,$$

obtendo:

$$(1-x^2)u'' - 2x(m+1)u' + \left[l(l+1) - m(m+1)\right]u = 0, \tag{2}$$

em que $u(x) = \frac{d^m}{dx^m}P_l(x)$. Comparando a Eq. 2 com a Eq. 1, vemos que pode-se tomar[b]:

$$\mathcal{P}_l^m(x) = u(x) = \frac{d^m}{dx^m}P_l(x), \tag{3}$$

da qual se pode obter a Relação de Rodrigues para as funções associadas de Legendre substituindo na Eq. **??** a Relação de Rodrigues para os Polinômios de Legendre $P_l(x)$:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l,$$

obtendo por fim:

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\mathcal{P}_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l =$$
$$= \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^l l!}\left[\frac{d^m}{dx^m}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l\right] = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^l l!}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(1-x^2)$$

que é a relação buscada.

Análise, Síntese e Aplicações:

[a] [Arfken and Weber, 2013] menciona que essa escolha foi feita por *tentativa-e-erro*, portanto, não será justificada aqui e apenas constatada.

[b] Nota-se que, apesar de profundamente *ad hoc*, o desenvolvimento mostrado aqui é bastante econômico e se chega muito rapidamente às equações desejadas.

Problema 2: lista 8, exercício 5

Mostre que:

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{dP_l^m}{d\theta} \frac{dP_l'^m}{d\theta} + \frac{m^2}{\sin^2\theta} P_l^m P_l'^m \right) \sin\theta d\theta = \frac{2(l+1)}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}.$$

Conhecimento:

Compreensão:

Resolução: Tomemos a substituição: $x = \cos\theta$, então $dx = -\sin\theta d\theta$, $\sin\theta = 1 - x^2$ (notando a restrição de 1º e segundo quadrante). Ademais, para o operador derivada:

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta}\frac{d}{dx} = \frac{d\cos\theta}{d\theta}\frac{d}{dx} = -\sin\theta\frac{d}{dx} = (x^2 - 1)\frac{d}{dx}$$

Portanto a integral recai em:

Análise, Síntese e Aplicações:

Referências

[Arfken and Weber, 2013] Arfken, G. B. and Weber, H. J. (2013). *Mathematical methods for physicists; 7th ed.* Academic Press, San Diego, CA.