Problema 1

Seja $\omega \neq 0$ e considere o problema de Cauchy ($c \neq 0$):

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} & = \sin \omega t & (1.1a) \\ u(0,x) & = \sin \omega x & (1.1b) \\ u_t(0,x) & = 1, \quad x \in \mathbb{R} & (1.1c) \end{cases}$$

(a) Resolva o problema de Cauchy acima.

Seja $D = \partial_{tt} - c^2 \partial_{xx}$ um operador diferencial[a]. O problema homogêneo associado é:

$$Du = 0 \tag{1.2}$$

e podemos reescrevê-lo como ("fatoração" sugerida em [Arfken and Weber, 2013]):

$$Du = \left(\partial_{tt} - c^2 \partial_{xx}\right) u = \underbrace{(\partial_t - c\partial_x)}_{D_1} \underbrace{(\partial_t + c\partial_x)}_{D_2} u = D_1 D_2 u = 0$$

Em que para a "fatoração" do operador foi assumido que u seja contínua nas segundas derivadas mistas no domínio $\mathbb{R}^2$, de modo que pelo teorema de Clairaut também possamos assumir que as derivadas mistas de ordens diferentes sejam iguais. Isso também nos permite constatar que $D_1 D_2 = D_2 D_1$

Podemos então encontrar soluções que satisfaçam D_1 e independam de D_2 e vice-versa anulando cada um isoladamente. Comecemos por D_1:

$$D_1 u = (\partial_t - c\partial_x) u = 0$$

Vejamos que uma função $f = f(x + ct)$ *arbitrária* será suficiente, pois:

$$\partial_t f = \partial_t (x + ct) f'(x + ct) = cf',$$

$$\partial_x f = \partial_x (x + ct) f'(x + ct) = f',$$
$$D_1 f = cf' - cf' = 0,$$

da mesma forma se mostra que $g(x - ct)$ *arbitrária* é suficiente para D_2, ou seja, $D_2 g = 0$. Por fim, uma combinação linear $f + g$ obedecerá a D – notando que D é linear e tomando quaisquer constantes como inclusas nas próprias funções f e g:

$$D(f + b) = (D_1 D_2)(f + b) = D_1 D_2 f + D_1 D_2 g = D_2 \underbrace{(D_1 f)}_{0} + D_1 \underbrace{(D_2 g)}_{0} = 0.$$

Por essa razão diremos que:

$$u = f(x + ct) + g(x - ct) \tag{1.3}$$

é solução da Eq. 1.2, que representa a parte homogênea.

Podemos pensar agora nas condições de contorno impostas, ou seja, as Eqs. 1.1b e 1.1c *porém para o problema homogêneo dado pela Eq. 1.2*. Ou seja, tem-se:

$$\begin{cases} u(0,x) &= \sin\omega x \\ u_t(0,x) &= 1, \quad x \in \mathbb{R} \end{cases} \implies \begin{cases} f(x)+g(x) &= \sin\omega x & (1.4a) \\ f'(x)-g'(x) &= \frac{1}{c} & (1.4b) \end{cases}$$

A começar pela integração da Eq. 1.4b, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\int_a^x \left(f'(s)-g'(s)\right)ds = \int_a^x (f-g)'(s)ds = (f-g)(x) = f(x)-g(x) = \frac{x-a}{c}$$

Essa equação forma com 1.4a um sistema linear:

$$\begin{cases} f(x)+g(x) &= \sin\omega x \\ f(x)-g(x) &= \frac{1}{c}\int_a^x ds \end{cases} \implies \begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2}\sin\omega x + \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_a^x ds & (1.5a) \\ g(x) = \dfrac{1}{2}\sin\omega x - \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_a^x ds & (1.5b) \end{cases}$$

Logo podemos retornar à definição da solução da Eq. 1.3, substituindo x pelos argumentos apropriados:

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{1}{2}\left(\sin\omega(x+ct)+\sin\omega(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\underbrace{\left[\int_a^{x+ct} ds - \int_a^{x-ct} ds\right]} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sin\omega(x+ct)+\sin\omega(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} ds, \end{aligned}$$

em que calculando:

$$\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} ds = \frac{x+ct-(x-ct)}{2c} = t,$$

tem-se por fim a solução da Eq. 1.2:

$$u_{\text{homog}}(x,t) = \frac{1}{2}\left(\sin\omega(x+ct)+\sin\omega(x-ct)\right) + t, \tag{1.6}$$

bastando substituir nas Eqs. 1.1b, 1.1c e 1.2 para verificar sua validade. Agora nos voltaremos para o problema 1.1a, considerando condições de contorno nulas e então encontrar uma solução $u_{\text{não homog.}}$ que a satisfaça. Por fim, a solução de 1 será dada por:

$$u(x,t) = u_{\text{homog}}(x,t) + u_{\text{não homog}}(x,t) \tag{1.7}$$

Para a solução da parte não homogênea, tem-se:

$$\frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(s,y)dyds, \tag{1.8}$$

que por comparação com a Eq. 1 se tem $F(t,x) = \sin \omega t$. Logo:

$$\frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} \sin \omega s dy ds = \int_0^t (t-s)\sin \omega s ds = t\int_0^t \sin \omega s ds - \int_0^t s \sin \underbrace{\omega s}_{u} ds =$$
$$= \frac{t}{\omega}\left[-\cos \omega s\right]_0^t - \frac{1}{\omega^2}\int_0^{\omega t} u \sin u du =$$
$$= \frac{t}{\omega}\left[1-\cos \omega t\right] - \frac{1}{\omega^2}\int_0^{\omega t} u \sin u du,$$

mas, integrando por partes:

$$\int u \sin u du = \sin u - u\cos u + C \implies \int_0^{\omega t} u \sin u du = \sin \omega t - \omega t \cos \omega t,$$

portanto:

$$u_{\text{não homog.}}(t,x) = \frac{t}{\omega} - \frac{1}{\omega^2}\sin \omega t,$$

e, retornando à Eq. 1.7, temos a solução para as Eqs. 1 (notando que $\omega \neq 0$ por hipótese):

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(\sin \omega(x+ct) + \sin \omega(x-ct)\right) + t\left[1 + \frac{1}{\omega}\right] - \frac{1}{\omega^2}\sin \omega t.$$

(b) Determine o domínio de influência do ponto $(0,2)$.

O domínio de inflência do ponto $P = (t_p, x_p)$ será a região dos instantes futuros ($t > t_p$) contida pelas características que passam por P. As duas características passando por P são dadas por:

$$x + ct = x_p + ct_p = 2 + 0c = 2 \implies x = 2 - ct$$
$$x - ct = x_p - ct_p = 2 - 0c = 2 \implies x = 2 + ct$$

Se $c > 0$, essa região será:

$$D_{inf}(P) = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t > 0 \text{ e } 2 - ct < x < 2 + ct\},$$

caso contrário:

$$D_{inf}(P) = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t > 0 \text{ e } 2 + ct < x < 2 - ct\}.$$

(c) Determine o intervalo de dependência do ponto $(3,-1)$.

O intervalo de dependência de um ponto P é o conjunto de valores de x dentre os dois que correspondem aos pontos *no instante inicial* cujas características passam por P. Ou seja, buscamos quais posições da curva inicial estão de fato influenciando P.

As duas características passando por P são:

$$x + ct = x_p + ct_p = -1 + 3c \implies x = -1 + c(3-t),$$

$$x - ct = x_p - ct_p = -1 - 3c \implies x = -1 + c(t-3),$$

quando $t = 0$, temos os valores $-1 + 3c$ e $-1 - 3c$. Logo o intervalo de dependência será dado por:

$$I_{dep}(P) = \begin{cases} [-1 - 3c, -1 + 3c], & \text{se c > 0} \\ [-1 + 3c, -1 - 3c], & \text{se c < 0} \end{cases}$$

(d) Determine o domínio de dependência do ponto $(3, -1)$.

O domínio de dependência do ponto P é bastante análogo ao caso anterior (de fato, consideraremos o intervalo de dependência como um segmento contido no domínio de dependência), de modo que são os pontos a partir (incluso) do instante inicial que estão contidos entre as características que passa por P.

Do item anterior, temos as características:

$$x = -1 + c(3 - t), \quad t > 0$$

$$x = -1 + c(t - 3), \quad t > 0$$

e podemos expressar essa região por:

$$D_{dep}(P) = \begin{cases} \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq 3 \text{ e } -1 + c(3 - t) \leq x \leq -1 + c(t - 3)\}, & \text{se } c > 0 \\ \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq 3 \text{ e } -1 + c(t - 3) \leq x \leq -1 + c(3 - t)\}, & \text{se } c < 0 \end{cases}$$

[a] Poderíamos tomar o já existente d'Alembertiano $\Box^2 = \frac{1}{c^2}\partial_{tt} - \partial_{xx}$, entretanto, por conveniência do exercício será definido este novo.

Problema 2

Sejam c e L constantes positivas. Resolva o seguinte problema misto:

$$\begin{cases} u_{tt} &= c^2 u_{xx} & (2.1a) \\ u(0,x) &= f(x) & (2.1b) \\ u_t(0,x) &= g(x) \quad x \in (0,L) & (2.1c) \\ u_x(t,0) &= u_x(t,L) = 0, \quad t \geq 0 & (2.1d) \end{cases}$$

Solução: Assumamos que u possa ser separada nas variáveis de modo que [Butkov, 1973]:

$$u(t,x) = T(t)X(x), \tag{2.2}$$

logo inserindo na Eq. 2.1a tem-se, para $u \neq 0$:

$$XT'' = c^2 X'' T \implies \frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = -\lambda^2, \tag{2.3}$$

em que foram usados os fatos de que as derivadas parciais se reduzem à derivadas simples nas funções apropriadas[a] e que uma vez separadas em cada variável, a única possibilidade para que os dois lados da expressão dada pela Eq. 2.3 sejam iguais é caso sejam ambas iguais à mesma constante[b].

Também podemos verificar que as duas equações se reduzem à forma:

$$y''(s) + \alpha y(s) = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Estudaremos os três casos: assumiremos para as condições de contorno em x a solução da parcela à esquerda da Eq. 2.3:

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2 \implies X'' + \lambda^2 X = 0 \implies X(x) = a_1 e^{-\sqrt{-\lambda^2}x} + a_2 e^{\sqrt{-\lambda^2}x},$$

em que aplicadas as condições de contorno da Eq. 2.1d:

$$\begin{cases} -\sqrt{-\lambda^2}a_1 + -\sqrt{-\lambda^2}a_2 &= 0 \\ -\sqrt{-\lambda^2}a_1 e^{-\sqrt{-\lambda^2}L} + -\sqrt{-\lambda^2}a_2 e^{\sqrt{-\lambda^2}L} &= 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\sqrt{-\lambda^2} & -\sqrt{-\lambda^2} \\ -\sqrt{-\lambda^2}e^{-\sqrt{-\lambda^2}L} & -\sqrt{-\lambda^2}e^{\sqrt{-\lambda^2}L} \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

terá soluções não triviais para a_1, a_2 caso $\det(M) = 0$ (notando que um sistema determinado e homogêneo admite apenas uma solução, a trivial). Entretanto, fazendo o cálculo do determinante tem-se:

$$\det(M) = -2\lambda^2 \sinh\sqrt{-\lambda^2}L = 0.$$

- $-\lambda^2 > 0$: então $\sqrt{-\lambda^2} \in \mathbb{R}$ e não há forma de zerar o seno hiperbólico. Logo desprezaremos essas soluções.
- $\lambda = 0$: satisfaz a relação trivialmente, logo será uma solução mantida.
- $-\lambda^2 < 0$: então $\sqrt{-\lambda^2} = \pm i\lambda$ e a equação pode ser satisfeita notando que:

$$-2\lambda^2 \sinh \sqrt{-\lambda^2} L = \pm 2\lambda^2 i \sin \lambda L = 0 \implies \sin \lambda L = 0 \implies \lambda = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

  ou seja, um conjunto discreto de possibilidades admissíveis para λ, que inclui o zero. Reitaremos esse ponto adiante, pois irá reaparecer na determinação das constantes.

Tomando $\lambda^2 > 0$ e expressando as equações diferenciais contidas na Eq. 2.3 e as resolvendo, tem-se:

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X &= 0 \\ T'' + c^2\lambda^2 T &= 0 \end{cases} \implies \begin{cases} X(x) &= A_\lambda \cos \lambda x + B_\lambda \sin \lambda x & \text{(2.4a)} \\ T(t) &= C_\lambda \cos c\lambda t + D_\lambda \sin c\lambda t & \text{(2.4b)} \end{cases}$$

E, por sobreposição (a linearidade do problema foi discutida no exercício anterior):

$$u(t,x) = \sum_\lambda T(t)X(x) \tag{2.5}$$

em que já foi notado que não é *qualquer* λ que fornece uma solução, pois inserindo a Eq. 2.4a na Eq. 2.1d, para $\lambda > 0$, tem-se:

$$\begin{cases} u_x(t,0) = 0 \\ u_x(t,L) = 0 \end{cases} = \begin{cases} \sum_\lambda T(t)X'(0) = 0 \\ \sum_\lambda T(t)X'(L) = 0 \end{cases} = \begin{cases} \displaystyle\sum_\lambda T(t)\lambda B_\lambda = 0 & \text{(2.6a)} \\ \displaystyle\sum_\lambda T(t)\lambda(-A_\lambda \sin \lambda L) = 0 & \text{(2.6b)} \end{cases}$$

de onde se obtém da Eq. 2.6a que $B_\lambda = 0$ e da Eq. 2.6b (na qual já foi usado o fato anterior) que os valores admissívels de λ são:

$$\sin \lambda L = 0 \implies \lambda L = n\pi \implies \lambda = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{(já sabíamos)},$$

Reinserindo estes resultado na Eq. 2.5, reduziu-se as soluções possíveis para:

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} \left(C_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + D_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} \left(C_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + D_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right), \end{aligned} \tag{2.7}$$

em que a última passagem simplesmente nota que os coeficientes não podem ser negativos, a que podemos estudar agora as condições de contorno das Eqs. 2.1b e 2.1c:

$$\begin{cases} u(0,x) & = f(x) \\ u_t(0,x) & = g(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A_n C_n \cos\frac{n\pi x}{L} & = f(x) \qquad (2.8a) \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} A_n D_n \cos\frac{n\pi x}{L} & = g(x) \qquad (2.8b) \end{cases}$$

condições que agora podem ser abordadas, primeiro tomando $A_n = 0$ sem prejuízo para a determinação de constantes, segundo ao se notar que se tratam de Séries de Fourier e usando da relação de ortogonalidade das funções cosseno (não será desenvolvido, mas comentado aqui) [Riley et al., 1997]:

$$\begin{cases} C_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx \quad \text{(média)} \\ C_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}, \quad n \in \mathbb{N} \\ D_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L g(x)\cos\frac{n\pi x}{L}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{2.9}$$

notando que quando $n = 0$ não aparecerão os senos da Eq. 2.7, logo o resultado acima estará condizente.

Podemos então expressar a solução do problema dado pela Eq. 2 por:

$$u(t,x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{n\pi x}{L}\left(C_n \cos\frac{n\pi ct}{L} + D_n \sin\frac{n\pi ct}{L}\right),$$

com coeficientes dados pela Eq. 2.9.

[a]Não será mostrado, mas pode ser facilmente verificado pela definição.

[b]Também não será mostrado, mas pode ser argumentado através de derivação parcial de cada lado com relação às duas variáveis e mostrar que a única possibilidade é que todas sejam nulas – logo os dois lados representam uma (mesma) constante.

Problema 3

Suponha que g seja uma função par, isto é, $g(x) = g(-x)$. Resolva o seguinte problema de Cauchy:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - \dfrac{2}{x}u_x = 0 & \text{(3.1a)} \\ u(0,x) = 0 & \text{(3.1b)} \\ u_t(0,x) = g(x) & \text{(3.1c)} \end{cases}$$

Sugestão: o que aconteceria se $w = xu$?

Solução: Seguiremos a sugestão e obteremos as expressões:

$$w = xu \implies \begin{cases} w_t = xu_t \\ w_x = u + xu_x \end{cases} \implies \begin{cases} w_{xx} = 2u_x + xu_{xx} \\ w_{tt} = xu_{tt} \end{cases}$$

Isolando, $u_{xx} = \frac{w_{xx}}{x}$, $u_{tt} = \frac{w_{tt}}{x}$ (notemos que $x = 0$ já não faz parte do domínio, de todo modo) e inserindo nas Eqs. 3:

$$\begin{cases} \frac{1}{x}\left[w_{tt} - w_{xx} + \cancel{2u_x} - \cancel{2u_x}\right] = 0 \\ \frac{w(0,x)}{x} = 0 \\ \frac{w_t(0,x)}{x} = g(x) \end{cases} \implies \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0 & \text{(3.2a)} \\ w(0,x) = 0 & \text{(3.2b)} \\ w_t(0,x) = xg(x) & \text{(3.2c)} \end{cases}$$

é um problema que recai na mesma equação de onda que vimos nos exercícios anteriores, com $c = 1$. Como não há a restrição espacial que permitiria a restrição das funções admissíveis na sobreposição (o problema misto do segundo exercício), abordaremos o problema pelas características, como no primeiro.

Seguindo exatamente os mesmos passos, recai-se na solução:

$$w(t,x) = \phi(x+t) + \psi(x-t) \tag{3.3}$$

e para o tratamento das condições de contorno:

$$\begin{cases} w(0,x) &= 0 \\ w_t(0,x) &= xg(x) \end{cases} \implies \begin{cases} \phi(x) + \psi(x) &= 0 & \text{(3.4a)} \\ \phi'(x) - \psi'(x) &= xg(x) & \text{(3.4b)} \end{cases}$$

resolvendo ainda da mesma forma que no primeiro problema:

$$\begin{cases} \phi(x) + \psi(x) &= 0 \\ \phi(x) - \psi(x) &= \int_a^x sg(s)ds \end{cases} \implies \begin{cases} \phi(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^x sg(s)ds & \text{(3.5a)} \\ \psi(x) = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^x sg(s)ds & \text{(3.5b)} \end{cases}$$

substituindo na Eq. 3.3 com os argumentos apropriados:

$$w(t,x) = \frac{1}{2}\left[\int_a^{x+t} sg(s)ds - \int_a^{x-t} sg(s)ds\right] = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} sg(s)ds,$$

$$u(t,x) = \frac{1}{2x}\int_{x-t}^{x+t} sg(s)ds.$$

Agora notemos os seguintes fatos:

- $g(x)$ é par: foi dado.
- $xg(x)$ é ímpar: $(I \cdot g)(-x) = -xg(-x) = -xg(x) = -(I \cdot g)(x)$.
- $\int xg(x)dx$ é par: $\left[\int (I \cdot g)\right](-x) = \int (-x)g(-x)d(-x) = \int x \underbrace{g(-x)}_{\text{par}} dx = \int xg(x)dx$.

Se tomarmos $F(x) = \int xg(x)dx$, então F é uma função par.

Problema 4

Seja $u(t,x)$ uma solução clássica da equação

$$u_{tt} + au_t = c^2 u_{xx}, \tag{4.1}$$

em que $a \geq 0$. A energia total do sistema descrito por esta equação é

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left(u_t^2 + c^2 u_x^2\right) dx. \tag{4.2}$$

Suponha que exista $a > 1/2$ e $C(t) > 0$ tal que

$$\max\{|u_t(t,x)|, |u_x(t,x)|\} \leq C(t)/|x|^{\alpha} \tag{4.3}$$

para todo $t > 0$ fixado e $|x| \gg 1$.

(a) Prove que se $a = 0$, então $t \mapsto E(t)$ é constante.

Se $a = 0$, então a Eq. 4.1 se reduz a:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \tag{4.4}$$

Usaremos agora a seguinte estratégia[a]: multiplicaremos a Eq. 4.4 por u_t e então integraremos em todo o espaço. Vejamos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_t(u_{tt} - c^2 u_{xx})dx = \int_{-\infty}^{\infty} (u_{tt}u_t - c^2 u_{xx}u_t)dx = 0,$$

considerando cada termo da soma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_{tt}u_t dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{\partial u_t^2}{\partial t}dx = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} u_t^2 dx}_{\text{função apenas de t}} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} u_t^2 dx$$

em que foi usado o fato de que a integral realçada é função apenas de t e a definição de derivada parcial se torna idêntica à de derivada total. Agora integrando por partes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{u_t}_{u}\underbrace{u_{xx}dx}_{dv} = \underbrace{[u_t u_x]_{-\infty}^{\infty}}_{0\text{ , pela Eq. 4.3}} - \int_{-\infty}^{\infty} u_x \underbrace{\frac{\partial u_t}{\partial x}}_{\text{Clairaut}} dx = -\int_{-\infty}^{\infty} u_x \frac{\partial u_x}{\partial t}dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx,$$

em que foi usado que as derivadas u_t e u_x vão a zero no infinito e que as derivadas parciais comutam se assumirmos (e iremos assumir) uma função solução u contínua. Por fim:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (u_{tt}u_t - c^2 u_{xx}u_t)dx = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} (u_t^2 + c^2 u_x^2)dx\right] = \frac{dE}{dt} = 0,$$

logo $E(t)$ será constante.

(b) Prove que se $a > 0$, então a energia é decrescente.

Seguindo exatamente a mesma estratégia, notando agora que $u_{tt} - c^2 u_{xx} = -au_t$, multiplicando por u_t e integrando, tem-se:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(u_t^2 + c^2u_x^2)dx\right] = \int_{-\infty}^{\infty} u_t \underbrace{(u_{tt} - c^2u_{xx})}_{-au_t} dx = -a \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} u_t^2 dx}_{\geq 0} \leq 0,$$

ou seja, mostra-se que a energia é *não-crescente*, contando que possamos sempre resolver um problema linear homogêneo com a solução trivial, que é fácil de constatar que possui energia nula em todos os instantes.

Foi usado no último passo o fato de que uma integral de uma função contínua (ao menos em partes) e não-negativa é não-negativa.

(c) Suponha que $a = 0$ e u seja uma solução da Eq. 4.1 sujeita às condições $u(0,x) = u_t(0,x) = 0$ e satisfazendo à Eq. 4.3. Prove que $u \equiv 0$ usando o item a).

Sabemos pelo item a) que a energia será constante em toda a evolução temporal. Agora vejamos a energia no instante inicial:

$$E(t) = E(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \cancelto{0}{u_t^2(0,x)} + c^2u_x^2(0,x)dx = c^2\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(0,x)dx,$$

façamos esta última integração por partes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{u_x(0,x)}_{u}\underbrace{u_x(0,x)dx}_{dv} = \underbrace{\Big[u_x(0,x)u(0,x)\Big]_{-\infty}^{\infty}}_{0\text{ , pela Eq. 4.3}} - \int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{u(0,x)}_{\text{contorno}}u_{xx}(0,x)dx = 0.$$

Agora mostraremos que se a energia de uma função contínua é nula em $\mathbb{R}^2$, a única solução admissível é $u(t,x) = u_0 \in \mathbb{R}$, uma constante. Restringiremos o problema às funções contínuas e diferenciáveis até segunda ordem pois as soluções buscadas para equações como a Eq. 4.1 são desse tipo, ao menos numa região de interesse.

Suponhamos $u(t,x)$ contínua e diferenciável até segunda ordem não seja constante em $(t_i, x_i) \in \mathbb{R}^2$. Logo existe uma direção n (representada no $\mathbb{R}^2$ pelo vetor normal não nulo $\hat{\mathbf{n}}$) tal que a derivada direcional (que existe) não é nula:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_0, y_0) \neq 0 \implies \nabla u \cdot \hat{\mathbf{n}} \neq 0 \implies u_t \neq 0, \text{ ou } u_x \neq 0 \text{ (ou ambos).}$$

Ademais, sendo contínua, podemos assumir ainda que exista um intervalo I_{ti} ou I_{xi} em x (mais precisamente, em torno de $(t_i, x_i \pm \varepsilon_i)$) nos quais u_t ou u_x mantenham seu sinal não nulo (isso é mostrado para funções de uma variável em [Apostol, 1967]).

Portanto, calculando a energia:

$$E(t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(t_i,x)dx + c^2\int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(t_i,x)dx > 0,$$

pois ambas as integrais são não-negativas e a única forma de zerar ambas é ocorrendo em t_i que $u_t(t_i,x) = u_x(t_i,x) = 0$. A contrapositiva dessa conclusão é que se a energia é nula num instante, $u(t_i,x_i)$ será uma constante. Variando as posições ao longo dos pontos admissíveis no domínio, tem-se que $u(t,x) = u_0$ em $\mathbb{R}^2$.

Sabemos da informação do instante inicial que essa constante deverá ser $u_0 = 0$, o que termina a demonstração deste item.

(d) Prove que existe no máximo uma solução da Eq. 4.1 satisfazendo às condições

$$u(0,x) = f(x) \quad \text{e} \quad u_t(0,x) = g(x).$$

Suponhamos duas soluções, u_1 e u_2 que satisfaçam às condições dadas. Logo $w = u_1 - u_2$ também é uma solução (a Eq. 4.1 é linear pela definição de [Iorio, 2018], mas também pode ser verificado diretamente). Vejamos agora as condições de contorno:

$$w(0,x) = u_1(0,x) - u_2(0,x) = f(x) - f(x) = 0$$

$$w_t(0,x) = u_{1t}(0,x) - u_{2t}(0,x) = g(x) - g(x) = 0.$$

Se $a = 0$, $w(t,x)$ é uma função com condições iniciais nulas e o caso recai no item c). Logo $w(t,x) = 0$ em todo o domínio, ou seja, $u_1 = u_2$.

Agora suponhamos que $a > 0$. Pelo item b), a energia $E(t)$ de $w(t,x)$ deverá ser não crescente. Ademais, deverá ser não negativa, pelo modo como está definida (integração de função não negativa). Portanto, para quaisquer dois instantes de tempo t_1 e t_2 deverá ocorrer que:

$$t_2 > t_1 \implies E(t_2) \geq E(t_1) \geq 0. \tag{4.5}$$

Vejamos ainda que:

$$E(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \cancelto{0}{w_t(0,x)} + c^2 w_x^2(0,x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \cancelto{0}{w(0,x)} w_{xx}(0,x)dx = 0,$$

em que foi usada uma sequência de passos completamente análoga à feita no item c). Concluímos do exposto acima que a energia no instante inicial é nula e, inserindo na Eq. 4.5, que deverá ser nula a todo instante. Pela mesma discussão do item anterior, deve ocorrer então que $w(t,x) = 0$, ou seja, que $u_1(t,x) = u_2(t,x)$, ou seja, que são iguais.

[a] Pode ser encontrada nestas notas de aula.

Referências

[Apostol, 1967] Apostol, T. (1967). *Calculus, Volume 1*. Blaisdell book in pure and applied mathematics. Wiley.

[Arfken and Weber, 2013] Arfken, G. B. and Weber, H. J. (2013). *Mathematical methods for physicists; 7th ed.* Academic Press, San Diego, CA.

[Butkov, 1973] Butkov, E. (1973). *Mathematical Physics*. Addison-Wesley Series in Advanced Physics. Addison-Wesley.

[Iorio, 2018] Iorio, V. M. (2018). *EDPs: um curso de graduação*. IMPA.

[Riley et al., 1997] Riley, K. F., Bence, S. J., and Hobson, M. P. (1997). *Mathematical methods for physics and engineering: a comprehensive guide*. Cambridge Univ. Press, Cambridge.