Problema 1: lista 1 ex. 3

A equação de Helmholtz é dada por $\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$. Escreva a equação em coordenadas cilíndricas e faça a separação de variáveis.

Conhecimento: Para a resolução, revi a bibliografia indicada nos passos que referenciei e nas aulas da semana. Pela classificação de [AW13], a equação pode ser entendida como a redução à parte espacial de uma equação parabólica dependente do tempo.

Compreensão: Para o presente problema, reforcei os conteúdos de separação de variáveis para solução de EDPs e o uso de coordenadas curvilíneas ortogonais.

Resolução: Em coordenadas curvilíneas ortogonais x_i, o operador laplaciano é dado por [AW13, But73]:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{1}{\Pi_i h_i}\left[\sum_i \partial_i \left(\frac{\Pi_{j\neq i} h_j}{h_i}\partial_i\right)\right],$$

em que h_i são os *coeficientes de Lamé* e representam uma constante necessária para normalizar a variação do vetor posição em relação a cada coordenada, ou seja:

$$h_i = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i}\right|,$$

que, no caso de coordenadas cilíndricas ($x_1 = \rho, x_2 = \phi, x_3 = z$), se reduzem assim como o operador laplaciano a:

$$\begin{cases} h_\rho &= 1 \\ h_\phi &= \rho \\ h_z &= 1 \end{cases} \Rightarrow\ \nabla^2 = \frac{1}{\rho}\left[\partial_\rho(\rho\partial_\rho) + \partial_\phi\left(\frac{1}{\rho}\partial_\phi\right) + \partial_z(\rho\partial_z)\right]$$

Façamos agora a separação de variáveis $\psi(\rho,\phi,z) = P(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$. Pode-se facilmente verificar também que:

$$\partial_i\psi = X_i'(\Pi_{j\neq i}X_j) = X_i'\frac{\psi}{X_i}.$$

Usaremos também os seguintes operadores intermediários:

- $\partial_\rho(\rho\partial_\rho\phi) = [\partial_\rho(\rho P')]\dfrac{\psi}{P} = \left[\dfrac{1}{P}\partial_\rho(\rho P')\right]\psi = D_\rho\psi$
- $\partial_\phi\left(\dfrac{1}{\rho}\partial_\phi\psi\right) = \dfrac{1}{\rho}\partial_{\phi\phi}\psi = \left[\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\Phi''}{\Phi}\right]\psi = D_\phi\psi$
- $\partial_z(\rho\partial_z\psi) = \rho\partial_{zz}\psi = \left[\rho\dfrac{Z''}{Z}\right]\psi = D_z\psi$

Então agora podemos escrever, para ψ arbitrária:

$$[\nabla^2 + k^2]\psi = \frac{1}{\rho}[D_\rho + D_\phi + D_z]\cancel{\psi} + k^2\cancel{\psi} = 0 \;\Rightarrow\; D_\rho + D_\phi + D_z + k^2\rho = 0,$$

e propor a separação de variáveis em etapas:

- $-D_z = k^2\rho + D_\rho + D_\phi \;\Rightarrow\; -\frac{Z''}{Z} = k^2 + \frac{D_\rho + D_\phi}{\rho} = F(\rho, \phi) \;\Rightarrow\; \frac{Z''}{Z} = l^2 \quad D_z = \rho l^2$
- $D_\rho + D_\phi + \rho(k^2 + l^2) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\Phi''}{\Phi} = -\rho^2(k^2 + l^2) - \frac{\rho}{P}\partial_\rho(\rho P') = G(\rho) = -m^2$
- $\rho^2 n^2 + \frac{\rho}{P}\partial_\rho(\rho P') = m^2 \quad n^2 = k^2 + l^2$

Tudo isso, por fim, leva a três EDOs:

$$\begin{cases} Z'' - l^2 Z = 0 \\ \Phi'' + m^2\Phi = 0 \\ \rho\partial_\rho(\rho P') + (n^2\rho^2 - m^2)P = 0 \end{cases}$$

e então a solução geral se torna, por sobreposição (notando a linearidade da Eq. de Helmholtz) [AW13]:

$$\psi_{lm}(\rho, \phi, z) = \sum_{lm} \alpha_{lm} P_{lm}(\rho)\Phi_m(\phi)Z_l(z)$$

Análise: As EDOs encontradas indicam (ver próximo exercício) que a solução possui propriedades exponenciais em z, oscilatórias em ϕ e não linear na direção radial ρ.

Síntese: Com o presente problema pôde-se observar as propriedades das soluções para uma geometria em particular. Evidentemente, esse sistema de coordenadas se mostrará vantajoso se o problema físico real propiciar simetria radial ao longo de um eixo, o que usualmente indica forte preferência pelo uso de coordenadas cilíndricas.

Aplicações: Essa não é a única forma de resolver a Eq. de Helmholtz, pois haveria tantas formas quanto, no mínimo, haveria formas de escolher sistemas de coordenadas ortogonais (e há infinitas). Entretanto, o método praticado aqui fornece o "roteiro" que poderia ser seguido em qualquer outro sistema. A sobreposição também indica que, para um problema físico específico, devem ser consideradas as condições de contorno.

Problema 2: lista 1 ex. 4

Suponha que você tenha as seguintes equações diferenciais:

$$y'' + \alpha^2 y = 0 \quad \alpha = \text{constante} > 0$$
$$y'' - \alpha^2 y = 0 \quad \alpha = \text{constante} > 0$$

Descreva que tipo de solução você obterá destas equações.

Conhecimento: Soluções de EDOs homogêneas de segunda ordem em coeficientes constantes são comuns em livros de Cálculo e de Equações Diferenciais do curso básico. Na teoria de Sinais e Sistemas Lineares, costumam-se chamar também de sistemas LIT (lineares e invariantes no tempo).

Compreensão: As soluções são usualmente demonstradas *ad hoc* para esse tipo de equação, ou seja, uma substituição em particular é feita, mostra-se o formato de uma única solução e então se presume que todo o espaço das funções solução pode ser preenchido por todas as combinações admissíveis do formato encontrado.

Resolução: Cada caso, separadamente, supondo uma função real $y = y(x)$:

- $y'' + \alpha^2 y = 0; \quad \alpha > 0$ Tomando $y = e^{\lambda x}$ e inserindo na EDO:

  $$(\lambda^2 + \alpha^2)e^{\lambda x} = 0 \;\Rightarrow\; \lambda^2 + \alpha^2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \pm i\alpha; \quad i^2 = -1 \;\Rightarrow\; y = Ae^{i\alpha x} + Be^{-i\alpha x}$$

  Usando a identidade de Euler [SLSS09] $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ e coletando termos, temos:

  $$y = (A + B)\cos(\alpha x) + i(A - B)\sin(\alpha x) = C\cos(\alpha x) + D\sin(\alpha x)$$

  em que assumiremos que uma escolha cuidadosa de $A, B \in \mathbb{C}$ possa ser feita de modo que $C, D \in \mathbb{R}$.

- $y'' - \alpha^2 y = 0; \quad \alpha > 0$ Procedendo de maneira idêntica, encontramos a equação de autovalor:

  $$\lambda^2 - \alpha^2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \pm\alpha \;\Rightarrow\; y = Ae^{\alpha x} + Be^{\alpha x}; \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Análise: A primeira solução é oscilatória e a segunda é exponencial, com uma componente rapidamente se extinguindo e onda crescendo ilimitadamente em módulo se os coeficientes forem reais e não nulos. Isso significa que enquanto uma solução como a primeira seria ao menos marginalmente estável, a segunda certamente seria instável.

Síntese: Com a presente solução podemos rapidamente caracterizar como se comportarão as soluções de EDOs de segunda ordem com o formato indicado apelas pelo sinal da constante que acompanha o segundo termo. Isso, de fato, foi feito no exercício anterior.

Aplicações: A solução fornecida é a mais geral sem adentrar em critérios de existência e unicidade de EDOs. Vale notar ainda que como $\frac{d}{dx}e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$, podemos pensar a exponencial e a constante como autofunção e autovalor da diferenciação, respectivamente.

Problema 3: lista 2 ex. 2

Sabendo que a equação do calor é regida pela EDP

$$u_t = Ku_{xx}$$

que representa a condução de calor em uma barra com temperatura 0 em suas extremidades e sujeita às condições:

$$\begin{cases} u(0,t) - u(L,t) = 0 & \text{para } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & \text{para } x \in [0,L] \end{cases},$$

mostrar que:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Conhecimento: Fiz a leitura de classificação de EDPs em [AW13] e [Ior18]. A EDP apresentada é *parabólica* pois pode ser reduzida à forma:

$$u_{xx} = f(x,t,u,u_x,u_y),$$

ou seja, há apenas um termo de segunda ordem. Para muitos dos passos, fiz revisão de [But73], [RBH97] e [AW13].

Compreensão: Para resolver o problema aprendi a utilização do princípio de superposição, da utilização de condições de contorno para reduzir o número de soluções admissíveis (em geral, buscamos apenas aquela que seja de fato a física para o problema) e o uso de ortogonalidade em integração para encontrar os coeficientes de Fourier.

Resolução: Assumindo a separação de variáveis

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

a EDP pode ser reescrita como [RBH97]:

$$XT' = KX''T \;\Rightarrow\; \frac{1}{K}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2$$

vejamos que isso foi assumida uma constante não positiva para que a EDO temporal (à esquerda) não possua autovalor real positivo, o que causaria a divergência com o tempo (uma distribuição de temperatura tendendo aos infinitos). Dito isso, resolvendo as EDOs separadas:

- $\displaystyle \frac{1}{K}\frac{T'}{T} = -\lambda^2 \;\Rightarrow\; \frac{dT}{T} = -K\lambda^2 dt \;\Rightarrow\; ln|T| = -k\lambda^2 t + ln|A_\lambda| \;\Rightarrow\; T = A_\lambda e^{-k\lambda^2 t}$
- $\displaystyle \frac{X''}{X} = -\lambda^2 \;\Rightarrow\; X'' + \lambda^2 X = 0 \;\Rightarrow\; X = B_\lambda \cos(\lambda x) + C_\lambda \sin(\lambda_x)$

Portanto, temos a solução geral da EDP dada por sobreposição [RBH97]:

$$u(x,t) = \sum_{\lambda} A_\lambda e^{-K\lambda^2 t}[B_\lambda \cos(\lambda x) + C_\lambda \sin(\lambda x)],$$

bastando aplicar as condições de contorno:

- $u(0,t) = 0 = \sum_{\lambda} A_\lambda B_\lambda e^{-K\lambda^2 t} \Rightarrow A_\lambda B_\lambda e^{-K\lambda^2 t} = 0$ escolheremos tomar $B_\lambda = 0$
- $u(L,t) = 0 \Rightarrow \sum_{\lambda} A_\lambda C_\lambda e^{-K\lambda^2 t} \sin \lambda x = 0$ escolheremos $A_\lambda = 1$ e $\lambda = \frac{n\pi}{L}$; $n \in \mathbb{Z}$

Temos então até agora, notando que em decorrência da segunda condição acima houve uma *discretização* do conjunto de constantes admissíveis:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-K(\frac{n\pi}{L})^2 t} \sin \frac{n\pi x}{L},$$

notemos agora que se $n = 0$ a função se anula. Logo esse termo não contribui pra série, podemos reescrever $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-K(\frac{n\pi}{L})^2 t} \sin \frac{n\pi x}{L}$ e procedermos agora pra última condição:

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

notando que o lado direito da equação se trata de uma expansão de Fourier [AW13] de uma função ímpar e podemos encontrar os coeficientes usando as propriedades de ortogonalidade existentes em funções seno e cosseno, em particular para a função seno multplicada e integrada:

$$\int_0^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} = \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \delta_{mn} = C_m n$$

logo os coeficientes podem ser determinados por:

$$C_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx$$

Análise: A solução indicada é plausível desde que $f(x)$ seja "bem-comportada" o suficiente para que possamos fazer a determinação de coeficientes proposta.

Síntese: Com o presente problema resolvemos a solução com domínio nulo "nas laterais" e uma função prescrita no instante inicial do domínio. Essa solução pode ser sobreposta a soluções com domínios mais complicados nas laterais e assim determinar soluções para condução de calor em problemas mais gerais.

Aplicações: Novamente, o presente problema foi resolvido apenas num caso particular com domínio não tão geral, num sistema de coordenadas específico e sem menção alguma às características (assim como o primeiro ex., da Eq. de Helmholtz).

Problema 4: lista 2 ex. 4

Para a equação da corda vibrante:

$$u_{tt} = K u_{xx},$$

encontre a solução da equação para as seguintes condições de contorno:

$$\begin{cases} u(0,t) = A + Bt & \text{para } t > 0 \\ u(L,t) = C + Dt & \text{para } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & \text{para } x \in [0, L] \\ u_t(x,0) = g(x) & \text{para } x \in [0, L] \end{cases}$$

Conhecimento: A solução apresentada se baseia principalmente na solução de [Wei21]. Fiz a leitura sobre características de EDPs em [AW13] e [Ior18]. As equações de onda (como essa) são hiperbólicas devido às duas características reais presentes na solução. Isso pode ser visualizado a seguir, na resolução.

Compreensão: No presente problema pude ir mais a fundo na discussão sobre características das soluções de EDPs. De fato, elas foram necessárias para a solução do problema.

Resolução: Separando o operador diferencial:

$$u_t t - K u_x x = (\partial_t + \sqrt{K}\partial_x)(\partial_t - \sqrt{K}\partial_x)u = 0,$$

possui solução em características se isolarmos cada EDP de primeira ordem e usarmos do teorema de Clairaut para funções contínuas até segunda ordem (o que suporemos), de modo que $\partial_{ij} = \partial_{ji}$:

$$\begin{cases} \partial_t u + \sqrt{K}\partial_x u = 0 \\ \partial_t u - \sqrt{K}\partial_x u = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = F(x - \sqrt{K}t) \\ u = G(x + \sqrt{K}t) \end{cases}$$

que correspondem à solução esperada de superposição de uma onda viajando à direita com velocidade $\sqrt{K}$ e outra à esquerda, com mesma velocidade em módulo (propagação das características). Então podemos, por sobreposição, escrever:

$$u(x,t) = F(x - \sqrt{K}t) + G(x + \sqrt{K}t),$$

e para as condições de contorno:

- $u(0,t) = A + Bt = F(-\sqrt{K}t) + G(\sqrt{K}t)$
- $u(L,t) = C + Dt = F(L - \sqrt{K}t) + G(L + \sqrt{K}t)$
- $u(x,0) = f(x) = F(x) + G(x)$
- $u_t(x,0) = g(x) = -\sqrt{K}F'(x) + \sqrt{K}G'(x)$

Analisaremos agora a penúltima condição e a integral da última em conjunto:

$$\begin{cases} f(x) = F(x) + G(x) \\ \int_a^x g(s)ds = -\sqrt{K}F(x) + \sqrt{K}G(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2\sqrt{K}}\int_a^x g(s)ds \\ G(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2\sqrt{K}}\int_a^x g(s)ds \end{cases}$$

agora podemos voltar à solução proposta e às duas primeiras condições:

$$u = \frac{1}{2}\left(F(x-\sqrt{K}t) + G(x+\sqrt{K}t)\right) + \frac{1}{2\sqrt{K}}\left[\int_a^x g(s+\sqrt{K}t)dx - \int_a^x g(s-\sqrt{K}t)dx\right]$$

$$u = \frac{1}{2}\left(F(x-\sqrt{K}t) + G(x+\sqrt{K}t)\right) + \frac{1}{2\sqrt{K}}\int_{x-\sqrt{K}t}^{x+\sqrt{K}t} g(s)ds$$

$$A + Bt = \frac{1}{2}\left(F(-\sqrt{K}t) + G(+\sqrt{K}t)\right) + \frac{1}{2\sqrt{K}}\int_{-\sqrt{K}t}^{\sqrt{K}t} g(s)ds$$

$$C + Dt = \frac{1}{2}\left(F(L-\sqrt{K}t) + G(L+\sqrt{K}t)\right) + \frac{1}{2\sqrt{K}}\int_{L-\sqrt{K}t}^{L+\sqrt{K}t} g(s)ds$$

Análise: Vejamos que o problema está sobredeterminado, pois apenas as duas últimas condições de contorno seriam suficientes para descrever completamente a solução geral da solução. O que pode ser feito, então, é verificar se *existem* valores A, B, C, D para que dadas $f(x), g(x)$ e a solução proposta atendam a todas as condições de contorno. De fato, a análise poderia não se prender apenas às retas, como no presente exercício.

Síntese: Com o presente problema a discussão sobre as características se mostrou inevitável, assim como mostrar que a separação de variáveis não é a panaceia para a solução analítica de EDPs. De fato, a solução por separação de variáveis se mostra infrutífera para o presente contorno.

Aplicações: Uma outra forma de entender essa equação é tomando $K = c^2$ uma constante positiva, de modo que a equação se reduz à versão unidimensional equação de onda unidimensional que satisfaz:

$$\Box u = 0$$

em que $\Box$ é dito *operador de d'Alembert*. Isso significa que a equação inicial do problema está inserida num contexto mais geral de equações que satisfazem a equação acima (um contexto ainda mais geral existe onde o termo da direita *não* é nulo, é uma função, é um outro operador diferencial etc.).

Problema 5: lista 3 ex. 2

A molécula de CO_2 é descrita por dois osciladores harmônicos ligados a três massas, sendo que o átomo de carbono está no centro da molécula em uma estrutura planar, temos as equações do movimento dos osciladores descritas abaixo. Obtenha os autovalores e autovetores para este sistema:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\frac{k}{M}(x_1 - x_2) \\ \ddot{x}_2 = -\frac{k}{m}(x_2 - x_1) - \frac{k}{m}(x_2 - x_3) \\ \ddot{x}_3 = -\frac{k}{M}(x_3 - x_2) \end{cases}$$

Conhecimento: Já havia estudado o conteúdo relativo a esse tipo de sistema na disciplina de Vibrações, cuja referência usada foi [Mei10] e outras de Teoria Clássica de Controle.

Compreensão: No presente problema, pude praticar as técnicas de obtenção de autovalores e autovetores. Além disso, deles se podem observar características importantes sobre o sistema estudado.

Resolução: Adotando variáveis intermediárias $x_4 = \dot{x}_1$, $x_5 = \dot{x}_2$ e $x_6 = \dot{x}_3$ o sistema pode ser reescrito como:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_4 \\ \dot{x}_2 = x_5 \\ \dot{x}_3 = x_6 \\ \dot{x}_4 = \ddot{x}_1 = -\frac{k}{M}x_1 + \frac{k}{M}x_2 \\ \dot{x}_5 = \ddot{x}_2 = \frac{k}{m}x_1 - 2\frac{k}{m}x_2 + \frac{k}{m}x_3 \\ \dot{x}_6 = \ddot{x}_3 = \frac{k}{M}x_2 - \frac{k}{M}x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & \frac{k}{M} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k}{M} & -\frac{k}{M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$$

a equação acima é dita descrever a *dinâmica* do sistema por uma *equação de estado*. Vejamos que A e $\mathbf{x}$ podem ser convenientemente expressos por submatrizes:

$$A = \begin{bmatrix} [0]_{3\times3} & [I]_{3\times3} \\ B & [0]_{3\times3} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}$$

reescrevendo a equação, temos:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0]_{3\times3} & [I]_{3\times3} \\ B & [0]_{3\times3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}$$

e podemos proceder pra análise de autovalores: seja $[\Lambda]$ uma *matriz 3 $\times$ 3*, diagonal, de autovalores. Então:

$$\det(A - [\Lambda][I]_{3\times3}) = \begin{vmatrix} -[\Lambda] & [I]_{3\times3} \\ B & -[\Lambda] \end{vmatrix} \Rightarrow [\Lambda]^2 - B = 0.$$

A equação anterior possui solução se B for diagonalizável e possuir seus próprios autovalores e autovetores. De fato, *os autovalores de B ditam a estabilidade do sistema como* *um todo*. Notando a característica não-dissipativa do sistema, assumiremos que esses valores são frequências ao quadrado, logo, para o novo problema de autovalor:

$$-\det(B-\lambda I)=0\Rightarrow k^3\begin{vmatrix}\frac{1}{M}-\lambda & \frac{1}{M} & 0\\ \frac{1}{m} & -\frac{2}{m}-\lambda & \frac{1}{m}\\ 0 & \frac{1}{M} & -\frac{1}{M}-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3=0,$$

em que a_i são os elementos invariantes para três dimensões, a saber:

- $a_1=-\text{tr}(B)=2k\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{m}\right)$
- $a_2=\frac{1}{2}\left(\text{tr}^2(B)-\text{tr}(B^2)\right)=\frac{k^2}{M^2}+\frac{2k^2}{mM}$
- $a_3=-\det(B)=0$

Então encontramos as soluções):

$$\lambda_1=0\qquad\lambda_2=-k/M\qquad\lambda_3=-k/M-2k/m$$

Os autovalores podem ser encontrados resolvendo os sistemas de equações:

$$B\mathbf{q}=\lambda_i\mathbf{q}\quad i=1,2,3$$

encontrando (após normalização):

$$\mathbf{q_1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\qquad\mathbf{q_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\qquad\mathbf{q_3}=\frac{1}{\sqrt{2+4M^2/m^2}}\begin{bmatrix}1\\-\frac{2M}{m}\\1\end{bmatrix}$$

Análise: A solução é factível para soluções do tipo $\mathbf{q}=\mathbf{q_i}\sin(\omega_i x)$, notando que sua substituição em $\ddot{\mathbf{q}}-\lambda\mathbf{q}=\mathbf{0}\Rightarrow\ddot{\mathbf{q}}=B\mathbf{q}=\lambda\mathbf{q}$ resulta em $-\omega_i^2=\lambda$, de onde obtemos então as frequências:

$$\omega_1=0\qquad\omega_2=\sqrt{\frac{k}{M}}\qquad\omega_3=\sqrt{\frac{k}{M}+\frac{2k}{M}}$$

e os modos de vibrar dado pelos autovetores. Note que um deles não vibra, é um modo de corpo rígido (afinal a molécula está “livre”), o segundo modo representa a massa central estática em relação ao centro do corpo e as oscilações opostas (ver coeficientes opostos) das massas periféricas e o terceiro possui movimentação das três massas. Esses modos podem ser excitados por ressonância com fonte em frequência similar a essas duas.

Síntese: Com o presente problema pudemos caracterizar o movimento de um modelo através de suas frequências e modos de vibrar.

Aplicações: Essa análise pode ser usada em vários outros contextos que não o molecular. Ademais, as técnicas mostradas aqui podem ser usadas inclusive para modelos não lineares, se tomarmos uma linearização em torno de um ponto que seja demonstrável de equilíbrio e analizarmos a nova dinâmica (método indireto de Lyapunov).

Problema 6: lista 3 ex. 4

Mostre por meio da integral de ação

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x), y'(x), x]dx$$

que podemos escrever a equação de Lagrange como:

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) = 0$$

Conhecimento: Essa equação se encontra pelo princípio de mínima ação em muitos textos de Mecânica Analítica e Mecânica Clássica.

Compreensão: Com o presente problema pude aprender a intuição por trás da dedução da Eq. de Euler-Lagrange.

Resolução: Tomemos uma variação de uma $y(x)$ contínua, δy como $\delta y = y(x) + \alpha\eta(x)$. Então se $S[y(x)]$ é um *funcional* ("função de funções"), fizando y e admitindo variação apenas de α para funções contínuas $\eta(x)$ que compartilhem dos mesmos pontos final e inicial que y, o funcional se torna função apenas de α, ou seja, $S = S(\alpha)$.

Um extremo (no caso, a curva de mínima ação, ou de ação estacionária) será obtido se definirmos que $S(\alpha)$ seja, para determinada curva, *insensível* à α conforme estejamos ao longo da própria curva solução ($\alpha = 0$), ou seja:

$$\left.\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\int_{x_1}^{x_2} f(y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta', x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \alpha}dx,$$

em que podemos supor que a derivada adentra a integral devido ao fato de que os limites são constantes. Procedendo por regra da cadeia e depois por integração por partes:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\partial(y+\alpha\eta)}{\partial \alpha}\frac{\partial f}{\partial(y+\alpha\eta)} + \frac{\partial(y'+\alpha\eta')}{\partial \alpha}\frac{\partial f}{\partial(y'+\alpha\eta')} + \cancelto{0}{\frac{\partial x}{\partial \alpha}}\frac{\partial f}{\partial x} = \eta\frac{\partial f}{\partial(y+\alpha\eta)} + \eta'\frac{\partial f}{\partial(y'+\alpha\eta')}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \eta'\frac{\partial f}{\partial y'}$$

$$\int_{x_1}^{x_2}\left.\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}dx = \int_{x_1}^{x_2}\eta\frac{\partial f}{\partial y}dx + \int_{x_1}^{x_2}\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y'}}_{u}\underbrace{\eta' dx}_{dv} = \Big[\underbrace{\cancelto{0}{\eta}}_{v}\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y'}}_{u}\Big]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2}\underbrace{\eta}_{v}\underbrace{\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}dx}_{du}$$

$$\int_{x_1}^{x_2}\left.\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}dx = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right]\eta dx$$

apenas valerá para uma função contínua η *arbitrária* que compartilhe dos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) com y solução se o termo entre colchetes for nulo – Eq. de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0.$$

A equação de Lagrange mencionada (relacionada à aplicação específica em mecânica clássica pelo princípio de mínima ação) é obtida simplesmente trocando a variável independente x por t e renomeando a função f para L.

Análise: A solução é factível desde que o ponto inicial e final sejam fixos. Isso é particularmente relevante no caso de trajetórias ótimas, em que ao invés do funcional ação se pode minimizar o tempo, expresso como integral de variáveis dependentes, suas derivadas e a variável independente do sistema – exemplo notório: a curva Braquistócrona.

Síntese: Com o presente problema é mostrada a redução de um problema variacional (expresso em termos de funcionais) a um problema de EDOs. Ademais, o princípio de mínima ação é uma generalização na Mecânica Clássica e permite, por exemplo, determinar a dinâmica do sistema sem a utilização das Leis de Newton (de fato, pode-se mostrar que as Leis de Newton resultam do princípio de mínima ação).

Aplicações: A solução pode ser extendida para casos com várias variáveis, problemas com fronteiras móveis, problemas com restrições (em que são inseridos multiplicadores de Lagrange) etc. As Eqs. de Euler-Lagrange e o método variacional são base para problemas de Relatividade (equação geodésica, dedução das Eqs. de Einstein), para a formulação de Mecânica Quântica por integrais de caminho, para sistemas reais de engenharia – equações de vôo otimizadas no tempo, teoria de controle ótimo, otimização de formas estruturais em função de carregamento etc.

Referências

[AW13] George B Arfken and Hans J Weber. *Mathematical methods for physicists; 7th ed.* Academic Press, San Diego, CA, 2013. URL: https://cds.cern.ch/record/379118.

[But73] E. Butkov. *Mathematical Physics*. Addison-Wesley Series in Advanced Physics. Addison-Wesley, 1973. URL: https://books.google.com.br/books?id=dhGbnQEACAAJ.

[Ior18] V M Iorio. *EDPs: um curso de graduação*. IMPA, 2018. URL: https://impa.br/en_US/page-livros/edp-um-curso-de-graduacao/.

[Mei10] L. Meirovitch. *Fundamentals of Vibrations*. Waveland Press, 2010. URL: https://books.google.com.br/books?id=0vb-SAAACAAJ.

[RBH97] K F Riley, S J Bence, and M P Hobson. *Mathematical methods for physics and engineering: a comprehensive guide*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997. URL: https://cds.cern.ch/record/345425.

[SLSS09] M.R. Spiegel, S. Lipschutz, J.J. Schiller, and D. Spellman. *Schaum's Outline of Complex Variables, 2ed*. Schaum's Outline Series. McGraw-Hill Education, 2009. URL: https://books.google.com.br/books?id=EjT3fE2SgGwC.

[Wei21] E W Weisstein. d'Alembert Solution, 2021. URL: https://mathworld.wolfram.com/dAlembertsSolution.html.