Problema 1

Por indução, para todo $n > 0$, prove que a relação abaixo é valida para todo número complexo $q \neq 1$.

$$1 + 2q + 3q^2 + \cdots + nq^{n-1} = \frac{1 - q^{n+1}}{(1-q)^2} - (n+1)\frac{q^n}{1-q}.$$

Solução: Faremos pela indução (fraca) no índice n, notando que a equação será reescrita como:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{(1-q)^2} - (n+1)\frac{q^n}{1-q}.$$

- Caso inicial: quando $n = 1$, é fácil verificar que:

$$\frac{1-q^2}{(1-q)^2} - \frac{2q}{1-q} = \frac{\cancel{(1-q)}(1+q)}{\cancel{(1-q)}(1-q)} - \frac{2q}{1-q} = \frac{1+q-2q}{1-q} = \frac{1-q}{1-q} = \sum_{k=0}^{0}(k+1)q^k.$$

- Passo indutivo: suporemos por hipótese indutiva em algum $m > 0$ que:.

$$\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)q^k = \frac{1 - q^{m+1}}{(1-q)^2} - (m+1)\frac{q^m}{1-q},$$

  agora consideraremos a soma no próximo inteiro, $m + 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{(m+1)-1}(k+1)q^k &= \sum_{k=0}^{m}(k+1)q^k = \sum_{k=0}^{m-1}(k+1)q^k \ + \ (m+1)q^m = \\
&= \frac{1-q^{m+1}}{(1-q)^2} - (m+1)\frac{q^m}{1-q} + (m+1)q^m = \\
&= \frac{1-q^{m+1}}{(1-q)^2} + (m+1)q^m\left[1 - \frac{1}{1-q}\right] = \\
&= \frac{1-q^{m+1}}{(1-q)^2} - (m+1)\frac{q^{m+1}}{1-q} = \frac{1-q^{m+1} - (m+1)(1-q)q^{m+1}}{(1-q)^2} = \\
&= \frac{1-q^{m+1} + (m+1)q^{m+2} - (m+1)q^{m+1}}{(1-q)^2} = \\
&= \frac{1-q^{m+2} + (m+2)q^{m+2} - (m+2)q^{m+1}}{(1-q)^2} = \\
&= \frac{1-q^{m+2}}{(1-q)^2} - (m+2)\frac{q^{m+1}}{1-q} = \frac{1-q^{(m+1)+1}}{(1-q)^2} - [(m+1)+1]\frac{q^{m+1}}{1-q},
\end{aligned}$$

  ou seja, é válido também para $m + 1$ se for válido para $m > 0$.

- Conclusão: a proposição é válida para todo $n > 0$ ($n \in \mathbb{N}$).

Problema 2

Por indução, prove a propriedade de distributividade da intersecção sobre a união de n conjuntos:

$$A \cap \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$$

Solução: Provaremos por indução (fraca) sobre o índice n.

- Caso inicial: quando $n = 1$, há apenas um termo na união e então a igualdade se reduz a:

  $$A \cap B_1 = (A \cap B_1),$$

  cuja validade é evidente.

- Passo indutivo: suponhamos que para algum $k \geq 1$ inteiro, valha a hipótese indutiva:

  $$A \cap \bigcup_{i=1}^{k} B_i = \bigcup_{i=1}^{k} (A \cap B_i),$$

  portanto, para o caso $k + 1$:

  $$A \cap \bigcup_{i=1}^{k+1} B_i = A \cap \left(B_{k+1} \cup \bigcup_{i=1}^{k} B_i \right),$$

  em que podemos usar a propriedade distributiva $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ para dois termos na união[a]:

  $$A \cap \left(B_{k+1} \cup \bigcup_{i=1}^{k} B_i \right) = (A \cap B_{k+1}) \cup \left(A \cap \bigcup_{i=1}^{k} B_i \right),$$

  em que podemos agora usar a hipótese indutiva no último termo:

  $$(A \cap B_{k+1}) \cup \left(A \cap \bigcup_{i=1}^{k} B_i \right) = (A \cap B_{k+1}) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} (A \cap B_i) \right) = \bigcup_{i=1}^{k+1} (A \cap B_i),$$

  ou seja, é valida para $m + 1$ se for válida para m.

- Conclusão: a propriedade é valida para todo $n > 0$ ($n \in \mathbb{N}$).

[a] Poder-se-ia argumentar que essa propriedade é o caso $n = 2$ e que, portanto, precisa ser provada *independentemente* e não assumida. Isso é verdade. A demonstração não será dada aqui, mas se resume à propriedade distributiva lógica $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ aplicada sobre o pertencimento de um elemento arbitrário.

O fato dessa propriedade, provada em separado, coincidir com o caso $n = 2$ pode ser considerado como incidental, não afeta o desenvolvimento da demonstração. Mesmo que fosse usada a indução forte, deveria ser provada como um dos casos iniciais, sem recorrer ao próprio teorema que se está provando.

Problema 3

Sejam $a_0 = 1$ e $a_{n+1} = 2\sum_{i=0}^{n} a_i$ para todo inteiro $n \geq 0$. Forneça uma fórmula fechada para a_n (i.e., sem somatórios) e prove sua validade por indução.

Solução: Seja feita de início uma análise "exploratória" dos termos iniciais, a fim de que se torne clara a identidade a ser provada. Vejamos alguns casos:

$$n = 0 \implies a_1 = 2\sum_{i=0}^{0} = 2a_0 = (2 \times 3^0)a_0$$

$$n = 1 \implies a_2 = 2\sum_{i=0}^{1} = 2(a_0 + a_1) = 6a_0 = (2 \times 3^1)a_0$$

$$n = 2 \implies a_3 = 2\sum_{i=0}^{2} = 2(a_0 + a_1 + a_2) = 18a_0 = (2 \times 3^2)a_0$$

$$n = 3 \implies a_4 = 2\sum_{i=0}^{3} = 2(a_0 + a_1 + a_2 + a_3) = 54a_0 = (2 \times 3^3)a_0$$

que sugere a fórmula $a_n = (2 \times 3^{n-1})a_0$ para $n > 0$, dada qualquer escolha de a_0. Prová-la-emos por indução (fraca) sobre o índice n:

- Caso inicial: mostrado acima.
- Passo indutivo: tomemos a hipótese indutiva para algum $k \geq 1$, ou seja, que valha $a_k = (2 \times 3^{k-1})a_0$. Vejamos o caso para $k+1$, partindo da definição recursiva:

  $$a_{k+1} = 2\sum_{i=0}^{k} a_i = 2\left(\sum_{i=0}^{k-1} a_i + a_k\right) = 2\sum_{i=0}^{k-1} a_i + 2a_k,$$

  mas notando que $2\sum_{i=0}^{k-1} a_i = a_k$ (novamente, pela definição recursiva que vale para $n \in \mathbb{N}$), a igualdade acima se reduz a:

  $$a_{k+1} = a_k + 2a_k = 3a_k = 3\left[(2 \times 3^{k-1})a_0\right] = (2 \times 3^k)a_0,$$

  ou seja, mostrou-se que a fórmula é válida também para $k+1$.
- Conclusão: a fórmula é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Comentário: não foi feita hipótese alguma sobre que tipo de objeto a_0 poderia ser para que valesse a dedução.

  De imediato, qualquer categoria de objeto que contemple uma definição de soma (comutativa! a notar pelo uso da notação somatório, em que se escreve sem ambiguidade para somar finitas $a_0 + (a_1 + a_2) = (a_0 + a_1) + a_2 = a_0 + a_1 + a_2$) e produto por escalar (esse produto é distributivo com a soma, associativo e comutativo) poderia ser, o que inclui aí todos os anéis (estruturas algébricas) e, por consequência, corpos (reais, complexos etc.).

  Por argumentos similares, valeria também para vetores, tensores, matrizes etc.

Problema 4

Seja $p(k)$ um polinômio de grau $d \geq 0$:

$$p(k) := \sum_{j=0}^{d} a_j k^j = a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + \cdots + a_d k^d,$$

com $a_i \in \mathbb{R}$ e $a_d \neq 0$. Prove que $q(n) := \sum_{k=1}^{n} p(k)$ é um polinômio de grau $d+1$. Prove que q satisfaz $q(0) = 0$.

Solução: provaremos por indução (fraca) sobre o índice d.

- Caso inicial: para $d = 0$ $p(k) = \sum_{j=0}^{0} a_j b^j = a_0 b^0 = a_0$. Logo $q(n) = \sum_{k=1}^{n} a_0 = a_0 n$, um polinômio que é garantido ser ordem 1 em n pois $a_0 \neq 0$. Nota-se com igual facilidade que $q(0) = 0$.
- Passo indutivo: suponhamos que a propriedade valha para algum $m \geq 0$, $m \in \mathbb{Z}$. Ou seja, que $q(n)$ seja um polinômio de grau $m+1$ e $q(0) = 0$ caso $p(k) = \sum_{j=0}^{m} a_j k^j$. Agora tomaremos outro polinômio e outra definição de função q:

  $$p'(k) = \sum_{j=0}^{m+1} a_j k^j \quad a_{m+1} \neq 0 \implies q'(n) := \sum_{k=1}^{n} p'(k),$$

  substituindo a definição de p' e trabalhando os somatórios:

  $$\begin{aligned} q'(n) := \sum_{k=1}^{n} p'(k) &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{m+1} a_j k^j = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} a_j k^j + a_{m+1} k^{m+1} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\sum_{j=0}^{m} a_j k^j}_{p(k)} + \sum_{k=1}^{n} a_{m+1} k^{m+1} = \sum_{k=1}^{n} p(k) + a_{m+1} \sum_{k=1}^{n} k^{m+1} = \\ &= q(n) + a_{m+1} \sum_{k=1}^{n} k^{m+1} \end{aligned}$$

  se vê de imediato que deveria ocorrer que $q'(0) = q(0) + 0 = 0$, pois $q(0) = 0$ é parte da hipótese indutiva e, por convenção, toma-se que um somatório tomado nos índices fora do conjunto estipulado é nulo. Essa nulidade será comentada novamente mais adiante.

  Para o somatório do lado direito da igualdade, iremos usar a seguinte identidade que não será provada aqui mas cuja demonstração pode ser consultada em [Spivak, 2008][a]:

  $$\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + s_p(n),$$

em que $s_p(n)$ é um polinômio de ordem até p (nos interessa apenas que não ultrapasse $p+1$) tal que $s_p(0)=0$. Aplicando na expressão encontrada:

$$q'(n) = q(n) + a_{m+1}\sum_{k=1}^{n} k^{m+1} = q(n) + \frac{a_{m+1}}{m+2}n^{m+2} + a_{m+1}s_{m+1}(n),$$

é um polinômio de ordem $m+2$ em n[b] e que $q'(0) = q(0) + a_{m+1}s_{m+1}(0) = 0$ por razões já comentadas. Logo se conclui que quando a propriedade vale para m, também o fará para $m+1$.

- Conclusão: a propriedade vale para $d \in \mathbb{N}$, $d > 0$.

[a]No contexto da referida obra, $s_p(k)$ é completamente explicitada e envolve os números de Bernoulli. Essa caracterização completa não será necessária para o presente problema e será, portanto, omitida. O teorema é fornecido como exercício cuja solução se encontra em *solution's manual*.

[b]Tome $q(n) = \sum_{i=0}^{m+1} b_i n^i$, $s_{m+1}(n) = \sum_{i=0}^{m+1} c_i n^i$ e então se mostraria que $q'(n) = \sum_{i=0}^{m+2} \gamma_i n^i$ com $\gamma_i = b_i + c_i$ para $i = 0, \ldots, m+1$ e $\gamma_{m+2} = \frac{a_{m+1}}{m+2}$, que podemos garantir não ser nulo devido ao fato de que forçamos, por hipótese, p' a ser um polinômio de ordem $m+1$, ou seja, a admitir $a_{m+1} \neq 0$.

Problema 5

Em um torneio de tênis com 2^n participantes, cada possível par de indivíduos se enfrentou uma única vez. Prove que é possível encontrarmos $n+1$ jogadores e arrumá-los em uma fila (um atrás do outro) de forma que cada jogador derrotou todos os demais que estão atrás dele (na fila).

Solução: Mostrar-se-á o resultado por indução forte sobre o índice n:

- Caso inicial: um torneio com $2^1 = 2$ jogadores tem apenas uma única partida, na qual o jogador a_2 irá vencer o jogador a_1[a]. Sendo assim, a fila gerada é (a_2, a_1), de modo que apenas a_2 tem a_1 atrás de si. Vê-se também que se trata de uma fila de $1+1=2$ jogadores.
- Passo indutivo: suponhamos que para todo $0 < j \leq k$ valha que um torneio com 2^j jogadores $(a_1, a_2, \dots, a_{2j})$ com um único enfrentamento entre cada par que se encontrou possa ser organizado em uma fila de $j+1$ jogadores em que atrás de cada membro estejam todos aqueles que foram derrotados. Essa fila pode ser escrita como[b]:

  $$\mathbf{x} = (\alpha_{j+1}, \alpha_j, \dots, \alpha_1),$$

  em particular:

  $$\mathbf{z} = (\alpha_{k+1}, \alpha_k, \dots, \alpha_1)$$

  agora consideremos a adição de jogadores $b_1, b_2, \dots, b_{2j}$ ao torneio de k jogadores, totalizando agora 2^{k+1}. Tomando apenas esses novos jogadores e organizando um torneio entre eles, vale por hipótese indutiva que poderíamos tomar uma fila do tipo:

  $$\mathbf{y} = (\beta_{k+1}, \beta_k, \dots, \beta_1),$$

  agora ocorrerão as partidas entre cada elemento de $\mathbf{z}$ e cada elemento de $\mathbf{y}$. Tomemos o elemento β_{k+1} de $\mathbf{y}$. Ou este ganhou de *todos* os elementos de $\mathbf{z}$ ou houve alguma derrota. Se β_{k+1} ganhou de todos, basta construir:

  $$\mathbf{z}' = \underbrace{(\beta_{k+1}, \alpha_{k+1}, \alpha_k, \dots, \alpha_1)}_{k+2 \text{ elementos}},$$

  ou houve

Incompleto

[a] No mundo real, essa solução funcionaria *ad hoc*: espera-se pra ver quem ganhou e assim escolher a_2. Caso essa escolha tivesse sido feito antes de ocorrer a partida, bastaria renomear ao fim desta, caso necessário.

[b] A notação usada foi a de tupla ordenada para uma fila.

Problema 6

O lema abaixo é verdadeiro, mas a prova fornecida é defeituosa. Identifique o ponto preciso na prova em que um passo não justificado é feito e explique o porquê tal passo é injustificado.

Lema 1 *Para quaisquer primo p e inteiros positivos $n, x_1, x_2, \ldots, x_n$, se $p|x_1x_2\ldots x_n$, então $p|x_1$ para algum $i \leq i \leq n$.*

Prova defeituosa: A prova é por indução (forte) em n. Como hipótese de indução, suponha que o lema é valido para n. Quando $n = 1$, o caso base, temos que $p|x_1$ e, portanto $p|x_1$ para $i = 1$.

Para o passo de indução, supondo que a afirmação é válida para todo $k \leq n$, vamos provar que ela é válida para $n+1$. Assim, suponha que $p|x_1x_2\ldots x_{n+1}$. Seja $y_n = x_nx_{n+1}$, de forma que

$$x_1x_2\ldots x_{n+1} = x_1x_2\ldots x_{n-1}y_n.$$

Como o lado direito da equação é um produto de n termos, temos por hipótese de indução que p divide um deles. Se $p|x_1$ para algum $i < n$, obtemos o valor de i desejado. Em caso contrário, $p|y_n$. Mas como y_n é produto dos dois termos x_n e x_{n+1}, temos por hipótese de indução que p divide um deles. Neste caso, $p|x_i$ para $i = n$ ou $i = n + 1$, o que conclui a prova. $\square$

Solução: Há dois problemas: um no caso inicial e outro no passo indutivo.

O problema no passo inicial é mesmo como está escrito: se supõe a validade do Lema que se deseja provar, entretanto, o caso precisa ser provado *independentemente*. A hipótese indutiva deve ser feita e usada no passo indutivo, não no caso base.

Ou seja, se o Lema consiste no fato de que se um número primo divide um produto (finito) de inteiros, então p divide pelo menos algum deles isoladamente, precisamos no caso base provar que $p|x_1 \Rightarrow \exists i \in \mathbb{N}, p|x_i$ o que pode ser feito tomando $i = 1$ (como indicado) e *sem* assumir a validade do Lema. Um reordenamento de frases poderia eliminar a ambiguidade.

Já no passo indutivo o problema é assumir que o Lema vale para um produto de *dois* inteiros. Isso ocorrerá se $n > 1$, mas o caso em que $n = 1$ para $n = 2$ não está justificado e precisa ser mostrado[a].

[a] Poder-se-ia argumentar que, dado o problema se tratar de indução forte, é necessário acrescer o caso de dois termos nos casos base. Ou não, pode-se provar independentemente como um teorema à parte e usá-lo no passo indutivo. Ver rodapé do Problema 2.

Problema 7

Seja $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de um n-conjunto X com a propriedade de que quaisquer dois membros $A, B \in \mathcal{F}$ se *encontram*, isto é, $A \cap B \neq \emptyset$. Suponha ainda que nenhum subconjunto de X se encontra com todos os membros de $\mathcal{F}$. Prove que $|\mathcal{F}| = 2^{n-1}$.

Não resolvido

Referências

[Spivak, 2008] Spivak, M. (2008). *Calculus*. Publish or Perish, fourth edition.