Problema 1

Verifique se as seguintes leis da física são invariantes (mantém suas formas) sob as seguintes transformações Galileanas entre sistemas interciais S e S'

$$x' = x - vt,$$
$$t' = t$$

(a) Equação de Newton em 1D:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{d}{dx}V(x)$$

onde m é massa (constante) de um corpo que está sujeito a um potencial $V(x)$.

Solução: Reordenando as transformações de Galileu, tem-se[a]:

$$x(x'(t'), t') = x' + vt'$$
$$t(x'(t'), t') = t'.$$

Apenas inserir as transformações não irão fazer justiça à caracterização do problema, em especial em razão da inserção *artificial* de dependência do potencial V da variável temporal t' (uma situação obviamente indesejável) que simplesmente trocar x por $x' + vt$ irá inserir.

Considerar-se-á, então, que o potencial V seja função da *distância*[b] entre duas partículas (ou dois pontos do espaço), em que uma é referência:

$$V = V(|\mathbf{r} - \mathbf{r_0}|) = V(r)$$

e que se relacione com a força através de $\mathbf{F} = -\nabla V$. No caso unidimensional e num referencial com ponto de referência dado (ou seja, x_0 é tido como uma referência e x é permitido variar), a força se reduz a $\mathbf{F} = F_x = -\frac{dV}{dx}$, enquanto $r = |x(t) - x_0(t)|$. Sendo assim, por regra da cadeia:

$$\frac{d}{dx}V(r) = \frac{dr}{dx}\frac{dV(r)}{dr},$$

agora notemos o seguinte: quando o sistema se transforma conforme mostrado no enunciado, r é preservado em razão do fato de os dois pontos serem mapeados conjuntamente pela transformação:

$$r = |x(t) - x_0(t)| = |(x'(t) + vt') - (x_0'(t) + vt')| = |x'(t) - x_0'(t)| = r',$$

desse modo, podemos exprimir[c]:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}V(r) &= \frac{dr}{dx}\frac{dV(r)}{dr} = \text{sgn}(x - x_0)\frac{dV(r)}{dr} = \text{sgn}(x' - x'_0)\frac{dV(r')}{dr'} \\ &= \frac{dr'}{dx'}\frac{dV(r')}{dr'} = \frac{d}{dx'}V(r'),\end{aligned}$$

e, por fim, voltando à expressão original *e considerando* $r' = r'(x')$, obtém-se:

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = -\frac{d}{dx'}V(x'),$$

o que atestaria a invariância da equação sob transformação de coordenadas.

(b) Equação de onda eletromagnética onde o campo elétrico está viajando na direção z e oscilando na direção x:

$$\frac{\partial^2 E_z(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_z(x,t)}{\partial t^2} = 0,$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo.

Solução: Iremos considerar c como constante. Usando a regra da cadeia:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \cancelto{0}{\frac{\partial t'}{\partial x}}\frac{\partial}{\partial t'}\right) = \frac{\partial}{\partial x'}; \qquad \frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'}\right) = \frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'},$$

e, substituindo:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'}\right)\right]E_z = 0$$

$$\left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} + 2\frac{v}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'\partial x'}\right]E_z = 0,$$

não possui o mesmo formato da equação original. A questão reside na *invariância* assumida para c, o que já se trata de um princípio especial-relativístico. Outras equações de onda clássicas podem ser compatibilizadas com as transformações de Galileu: deve-se compatibilizar as velocidades.

[a]A dependência da variável espacial com o tempo (x' em t' e x em t) vem da interpretação fundamental da *mecânica clássica* de que as trajetórias são essencialmente funções do tempo no referencial em que são consideradas. A dependência multivariada das coordenadas umas com as outras, por sua vez, se dão apenas em razão das transformações que desejamos fazer.

[b]Um argumento similar é mostrado em [Resnick, 1968]. Poder-se-ia argumentar que V seja função *dos pontos*, estes se transformando conjuntamente.

[c]Supõe-se que as partículas permaneçam com distância $r > 0$, não havendo então a questão da diferenciabilidade "na origem"aparente pela forma da equação. Nota-se que sgn se trata da função sinal. Mesmo o uso dessa função é artificial: caso a dependência fosse distância quadrática, como costumam ser as forças clássicas, o desenvolvimento seria ainda mais simples, mas o intuito foi mostrar na hipótese *mais fraca possível do caso unidimensional*.

Problema 2

Verifique se as leis da física na questão anterior são invariantes sob as seguintes transformações de Lorentz

$$x' = \gamma(x - vt),$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right),$$

onde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$.

(a) Equação de Newton em 1D:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{d}{dx}V(x)$$

onde m é massa (constante) de um corpo que está sujeito a um potencial $V(x)$.

Solução: Consideremos o vetor espaço-tempo:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix}$$

e apliquemos a transformação de Lorentz (reciprocada, pois partiremos das transformações *unprimed*) sobre os dois pontos que resultam no potencial (num dado instante[a]):

$$\mathbf{r} = x \text{ e } \mathbf{r_0} = 0 \implies V(x) = V\left(\begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}\right) = V\left(\gamma\begin{bmatrix} t' + (v/c^2)x' \\ x' + vt' \end{bmatrix} - \gamma\begin{bmatrix} t' - (v^2/c^2)t' \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$
$$= V(x', t')$$

em que foi usado o fato de que para manter $x = 0$ num referencial que se move para a direita com velocidade v, este ponto deve ser enxergado pelo referencial S' como tendo posição $x' = -vt'$. Veja que a dependência temporal agora é inevitável: há relatividade de simultaneidade, portanto, a separação simultânea no referencial S *não* é mantida do ponto de vista dos referenciais em movimento.

Quanto ao lado esquerdo, notemos que massa é invariante[b] e vejamos o termo de derivada por regra da cadeia (aplicada nos diferenciais)[c]:

$$\begin{cases} dx = \gamma(x' + vdt') \\ dt = \gamma(dt' + vdx'/c^2) \end{cases} \implies \frac{dx}{dt} = \dot{x} = \frac{dx' + vdt'}{dt' + vdx'/c^2} = \frac{\dot{x}' + v}{1 + v\dot{x}'/c^2}$$

Diferenciando novamente:

$$d\dot{x} = \frac{d\dot{x}'(1 + \cancel{v\dot{x}'/c^2}) - (\cancel{\dot{x}'} + v)vd\dot{x}'/c^2}{(1 + v\dot{x}'/c^2)^2} = d\dot{x}'\frac{1 - v^2/c^2}{(1 + v\dot{x}'/c^2)^2} = \frac{d\dot{x}'}{\gamma^2}\frac{1}{(1 + v\dot{x}'/c^2)^2}$$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \ddot{x} = \frac{d\dot{x}'}{dt' + vdx'/c^2}\frac{1}{\gamma(1 + v\dot{x}'/c^2)^2} = \frac{\ddot{x}'}{1 + v\dot{x}'/c^2}\frac{1}{\gamma^3(1 + v\dot{x}'/c^2)^2} = \frac{\ddot{x}'}{\gamma^3(1 + v\dot{x}'/c^2)^3}$$

voltando à equação original:

$$\frac{m\ddot{x}'}{\gamma^3(1+v\dot{x}'/c^2)^3} = V(x',t'),$$

é, em geral, uma expressão diferente da original (no referencial S).

(b) Equação de onda eletromagnética onde o campo elétrico está viajando na direção z e oscilando na direção x:

$$\frac{\partial^2 E_z(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_z(x,t)}{\partial t^2} = 0,$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo.

Solução: Por regra da cadeia e teorema de Clairaut[d], podemos transformar os operadores diferenciais:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x = \partial_x x' \partial_{x'} + \partial_x t' \partial_{t'} = \gamma(\partial_{x'} - (v/c^2)\partial_{t'}),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \partial_t = \partial_t x' \partial_{x'} + \partial_t t' \partial_{t'} = \gamma(-v\partial_{x'} + \partial t'),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \partial_x\partial_x = \gamma^2(\partial_{x'} - (v/c^2)\partial_{t'})(\partial_{x'} - (v/c^2)\partial_{t'}) = \gamma^2(\partial_{x'x'} - 2(v/c^2)\partial_{x'}\partial_{t'} + (v/c^2)^2\partial_{t't'}),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \partial_t\partial_t = \gamma^2(-v\partial_{x'} + \partial_{t'})(-v\partial_{x'} + \partial_{t'}) = \gamma^2(v^2\partial_{x'x'} - 2v\partial_{x'}\partial_{t'} + \partial_{t't'}),$$

Logo temos, para o operador original:

$$\begin{aligned}
&\partial_{xx} - (1/c^2)\partial_{tt} = \\
&\quad \gamma^2[(\partial_{x'x'} - \cancel{2(v/c^2)\partial_{x'}\partial_{t'}} + (v/c^2)^2\partial_{t't'}) - ((v^2/c^2)\partial_{x'x'} - \cancel{2(v/c^2)\partial_{x'}\partial_{t'}} + (1/c^2)\partial_{t't'})] \\
&\quad = \gamma^2[(1-v^2/c^2)\partial x'x' + (1-v^2/c^2)(1/c^2)\partial_{t't'}] = \cancelto{1}{\gamma^2(1-v^2/c^2)}[\partial_{x'x'} - (1/c^2)\partial_{t't'}] \quad = \\
&\quad = \partial_{x'x'} - (1/c^2)\partial_{t't'},
\end{aligned}$$

ou seja, o operador em si é invariante! Em particular qualquer equação diferencial do tipo:

$$(\partial_{xx} - (1/c^2)\partial_{tt})u = 0$$

em que $u = u'$ também o será, em particular aquela com $u = E_z(x,t)$

[a] Esse ponto é sutil, mas importante: como a partícula possuirá *dinâmica* dada pela equação diferencial, é esperado que com a passagem do tempo o potencial varie conforme a posição $x(t)$ mude.

[b] Será aqui adotada a posição de que não há "massa relativística" pois massa é uma propriedade material.

[c] Apesar de matematicamente muito insatisfatório, esse método é muito econômico e usado, por exemplo, em referências como [French, 1968] e [Landau and Lifshitz, 1980]. Nota-se também que aqui foi usada a notação de Newton $\frac{du}{dt} = \dot{u}$ para uma dada quantidade u, o que não é usual mas remete ao fato de que *o observador está interessado nas velocidades medidas por seu próprio referencial*

[d] Assumiremos diferenciabilidade nas derivadas parciais de modo que $\partial_{x'}\partial_{t'} = \partial_{t'}\partial_{x'}$.

Problema 3

Se um sistema inercial S' se move com velocidade v na direção x positiva de S, de acordo com o princípio da relatividade, também podemos considerar que o sistema S se move com velocidade v na direção x negativa de S'. De acordo com as transformações galileanas, as coordenadas de um evento visto por S' e S estão relacionadas da seguinte forma:

$$x' = x - vt,$$
$$x = x' + vt'.$$

Para ser consistente com o postulado de Einstein de que a velocidade da luz é constante em todos os sistemas inerciais, as transformações galileanas devem ser modificadas para:

$$x' = a(x - vt),$$
$$x = a(x' + vt'),$$

em que a é uma função de v que se torna 1 no limite $v \to 0$.

(a) Determine a usando, por exemplo, uma luz que é emitida nas origens quando $t = t' = 0$.

Solução: Esse é um argumento de *simetria* e é apresentado (com pouca modificação) em [French, 1968]. Pelo princípio da invariância da velocidade da luz, os dois observadores irão observar as frentes de onda de luz se propagando nas direções x e $-x$ com mesma velocidade. Ou seja, a equação cinemática que descreve a equação de frente de onda em x positivo, por exemplo, é dada nos dois referenciais pela mesma equação:

$$\begin{cases} x &= ct, \\ x' &= ct' \end{cases} \implies \begin{cases} ct' &= a(c-v)t, \\ ct &= a(c+v)t' \end{cases}$$

dessa última igualdade, isolar t' e substituir na anterior:

$$ct' = \frac{c^2\cancel{t}}{a(c+v)} = a(c-v)\cancel{t} \implies c^2 = a^2(c^2 - v^2) \implies a^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} = \frac{1}{1 - (v/c)^2}$$
$$\implies a = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}},$$

vejamos que atende ao requisito de $\lim\limits_{v \to 0} \gamma = 1$.

(b) Usando o resultado anterior, determine a transformação entre t e t'

Solução: De uma das equações iniciais, invertendo as relações de simetria para o espaço se chega nas equivalentes para o tempo:

$$\begin{cases} t &= \frac{x}{v} - \frac{x'}{\gamma v} = \frac{\gamma x'}{v} + \gamma t' - \frac{x'}{\gamma v} = \gamma \left[\frac{1}{v}\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)x' + t'\right] = \gamma(\frac{vx'}{c^2} + t'), \\ t' &= \frac{x}{\gamma v} - \frac{x'}{v} = \frac{x}{\gamma v} - \frac{\gamma x}{v} + \gamma t = \gamma\left[\frac{1}{v}\left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right)x + t\right] = \gamma(\frac{-vx}{c^2} + t) \end{cases}$$

Problema 4

As transformações de Lorentz entre dois sistemas inerciais S e S' com velocidade relativa v na direção y são:

$$\begin{aligned} x &= x', \\ y &= \gamma(y' + vt'), \\ z &= z', \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}y'\right). \end{aligned}$$

Se uma luz for emitida em (t_0, x_0, y_0, z_0) em S, ela se moverá com velocidade c em todas as direções, isto é, ela satisfaz a equação $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = c^2(t-t_0)^2$. Mostre que a velocidade da mesma luz também se moverá com velocidade c em todas as direções no sistema S'.

Solução: O problema é equivalente a mostrar que a mesma equação será satisfeita salvo por uma mudança nas constantes (t_0, x_0, y_0, z_0) que marcam o centro do evento e que podem ser transladada no espaço-tempo/4D como se queira a partir da escolha da posição (espaço-tempo, novamente) inicial. Pois vejamos que:

$$\begin{aligned} &(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = c^2(t-t_0)^2 \implies \\ &\quad (x'-x_0)^2 + [\gamma(y'+vt') - y_0]^2 + (z'-z_0)^2 = c^2\left[\gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}y'\right) - t_0\right]^2 \end{aligned}$$

Para desenvolver os termos seguintes, por conveniência, será escolhido um referencial S'', com mesma velocidade v em y e centrado no evento (t_0, x_0, y_0, z_0) de modo que valha a seguinte transformação de coordenadas:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= x'' = x' - x_0, \\ y - y_0 &= \gamma(y'' + vt'') = \gamma(y' + vt') - y_0, \\ z - z_0 &= z'' = z' - z_0, \\ t - t_0 &= \gamma\left(t'' + \frac{v}{c^2}y''\right) = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}y'\right) - t_0. \end{aligned}$$

então uma vez mostrada a invariância de S para S'', poderemos mais facilmente mostrar a invariância para S'. A equação anterior se reduz a:

$$x''^2 + \gamma^2(y'' + vt'')^2 + z''^2 = \gamma^2 c^2 \left(t'' + \frac{v}{c^2}y''\right)^2 \implies$$

$$x''^2 + \gamma^2(y''^2 + 2vy''t'' + v^2t''^2) + z''^2 = \gamma^2 c^2 \left(t''^2 + 2\frac{v}{c^2}y''t'' + \frac{v^2}{c^4}y''^2\right) \implies$$

$$x''^2 + z''^2 = \gamma^2 c^2 \left(t''^2 + \cancel{2\frac{v}{c^2}y''t''} + \frac{v^2}{c^4}y''^2 - \frac{y''^2}{c^2} - \cancel{2\frac{v}{c^2}y''t''} - \frac{v^2}{c^2}t''^2\right) \implies$$

$$x''^2 + z''^2 = \gamma^2 c^2 \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)t''^2 - \frac{1}{c^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)y''^2\right] = \gamma^2 c^2 \underbrace{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}_{\frac{1}{\gamma^2}}\left[t''^2 - \frac{1}{c^2}y''^2\right]$$

$$\implies x''^2 + z''^2 = c^2t''^2 - y''^2 \implies x''^2 + z''^2 + y''^2 = c^2t''^2,$$

é a forma do invariante de S''. Faz sentido físico, pois S'' vê a luz saindo de sua origem em todas as direções com velocidade c. Agora podemos substituir as expressões para S':

$$(x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2 + (z' - z_0)^2 = c^2(t' - t_0)^2,$$

e aplicar a transformação inversa sobre o evento (t_0, x_0, y_0, z_0) para obter o valor das constantes em coordenadas de S':

$$\begin{bmatrix} t'_0 \\ x'_0 \\ y'_0 \\ z'_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma\left(t_0 - \frac{v}{c^2}y_0\right) \\ x_0 \\ \gamma(y_0 - vt_0) \\ z_0 \end{bmatrix},$$

em que se nota (como era esperado) que as coordenadas do evento em S' é função, além da separação espacial espacial e temporal de O e O', também da velocidade relativa v entre esses referenciais.

Problema 5

Segundo Stephan, dois eventos ocorrem em tempos diferentes $t_1 \neq t_2$ nas seguintes coordenadas:

- P: $t_1, \;\; x_1 = x_0, \;\; y_1 = z_1 = 0$
- Q: $t_2, \;\; x_2 = 4x_0, \;\; y_2 = z_2 = 0$

(a) Determine a condição $t_2 - t_1$ de modo que os dois eventos possam ocorrer ao mesmo tempo em um sistema inercial.

Solução: Usando as transformações de Lorentz[a], queremos um referencial tal que $t'_2 - t'_1 = 0$, ou seja, temos:

$$\begin{cases} t_2 - t_1 & = \gamma\left[\cancelto{0}{t'_2 - t'_1} + \frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1)\right] \\ x_2 - x_1 & = \gamma\left[x'_2 - x'_1 + v\cancelto{0}{(t'_2 - t'_1)}\right] \end{cases}$$

Da segunda equação,

$$x_2 - x_1 = 3x_0 = \gamma(x'_2 - x'_1),$$

substituindo na primeira:

$$t_2 - t_1 = \frac{v}{c^2}\gamma(x'_2 - x'_1) = \frac{3x_0 v}{c^2} = \frac{3x_0\beta}{c},$$

como devemos ter $\beta < 1$, então deve ocorrer que:

$$t_2 - t_1 \leq \frac{3x_0}{c}.$$

(b) Se $t_2 = 2t_1 = x_0/c$, Stephanie observou que os eventos ocorreram ao mesmo tempo. Qual é a velocidade de Stephanie em relação a Stephan? Qual é o tempo em que ela observou os dois eventos simultâneos?

Solução: Partido da expressão já encontrada:

$$t_2 - t_1 = \frac{x_0}{2c} = \frac{3x_0\beta}{c} \implies \beta = \frac{1}{6} \implies v = \frac{c}{6} \text{ e } \gamma = \frac{6}{\sqrt{35}}.$$

Agora para o tempo, retomaremos a transformação de Lorentz já desenvolvida no item a), digamos, para t'_2:

$$t'_2 = \gamma\left(\frac{x_0}{c} - 4\frac{\beta x_0}{c}\right) = \frac{\gamma x_0}{c}\left[1 - \frac{2}{3}\right] = \frac{\gamma x_0}{3c} = \frac{2x_0}{c\sqrt{35}},$$

um cálculo similar revela o mesmo valor para t'_1.

[a] Apenas considerada a direção do movimento e o tempo. O problema (como um todo, os dois itens) possui uma solução elegante e geométrica usando diagramas de Minkowski, mas aqui será tomado o caminho algébrico.

Problema 6

Um raio cósmico pode ter uma energia muito alta. Por exemplo, a partícula Oh-My-God (OMG) que foi detectada em 15 de outubro de 1991 possui uma energia de 3.2×10^{11} GeV ($1\text{GeV} = 1.602 \times 10^{-10}$ J). Suponha que a partícula seja um nêutron. (Dica: podemos usar a relação entre energia de uma partícula e sua massa $E = \gamma mc^2$ para determinar o fator de Lorentz.)

(a) De acordo com uma cientista que observou a partícula OMG, quanto tempo leva para a partícula atravessar a nossa galáxia com diâmetro de 1.0×10^5 anos-luz?

Solução: Usando os dados de massa do nêutron $mc^2 = 939.565$ MeV, o fator de Lorentz da partícula é:

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} = \frac{3.2 \times 10^{11}\ \text{GeV}}{0.939565\ \text{GeV}} = 3.4 \times 10^{11},$$

ou seja,

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \approx c,$$

notando que a energia é tão alta e a velocidade tão próxima de c que, para fins de exercício, iremos calcular como iguais. Sendo assim, naturalmente a cientista observaria a partícula levando algo na ordem de 1.0×10^5 anos (cem mil anos).

(b) Quanto tempo leva para a partícula atravessar a nossa galáxia no próprio sistema de referência da partícula?

Solução: Calcularemos por dois métodos:

- Para a cientista (S), o referencial da partícula (S') sofre dilatação temporal e, portanto,

$$\Delta t = \gamma \Delta t' \implies \Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{1.0 \times 10^5\ \text{anos}}{3.4 \times 10^{11}} = 2.9 \times 10^{-7}\ \text{anos} = 9.3\ \text{s}$$

- No próprio referencial da partícula (S), a galáxia está em movimento com o referido fator γ se aproximando e, portanto, tem seu diâmetro reduzido (no referencial solidário à galáxia S') pela contração espacial em:

$$L' = \frac{L}{\gamma} = \frac{1.0 \times 10^5\ \text{anos-luz}}{3.4 \times 10^{11}} = 2.9 \times 10^{-7}\ \text{anos-luz} = 9.3\ \text{segundos-luz},$$

que a galáxia ira percorrer com velocidade relativa $\approx c$, logo o tempo do ponto de vista da partícula será $\Delta t = 9.3$ s.

(c) Como um nêutron tem vida média de 14 minutos e 39 segundos quando está em repouso, estime a distância de origem da partícula (em anos-luz).

Solução: Como 14 min 39 s = 879 s, por simples proporção com o exercício anterior se chega ao valor de 8.8×10^7 anos-luz para que haja decaimento de vida média, valor que usaremos como estimativa razoável da distância até origem.

Referências

[French, 1968] French, A. (1968). *Special Relativity*. Taylor & Francis.

[Landau and Lifshitz, 1980] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. (1980). *The Classical Theory of Fields*. Butterworth-Heinemann, 4 edition.

[Resnick, 1968] Resnick, R. (1968). *Introduction to Special Relativity*. Wiley.