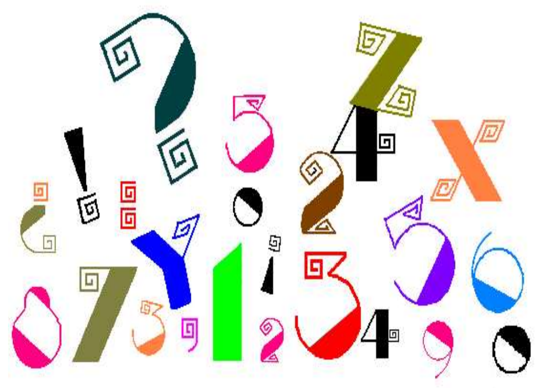
COLECCIÓN ESTUDIOS
DIVULGACIÓN CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA

OLIMPIADA JUVENIL DE MATEMÁTICA

2016

Problemas y Soluciones

JOSÉ HEBER NIETO SAID, RAFAEL SÁNCHEZ LAMONEDA



ACADEMIA DE CIENCIAS FÍSICAS, MATEMÁTICAS Y Y NATURALES

José Heber Nieto Said. Venezolano de origen uruguayo, es egresado de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Buenos Aires, M.Sc. en Matemática y Dr. H.C. por la Universidad del Zulia (LUZ). Es profesor titular emérito de LUZ, donde fue Director del Departamento de Matemática y Computación, profesor de casi todas las materias dictadas por ese Departamento, proyectista de la Licenciatura en Computación y editor de revistas científicas. Ha escrito varios libros y artículos sobre diversos aspectos de la matemática. Es miembro de varias asociaciones académicas y profesionales (AMV, AVCM, MAA, AMS y CMS). En las olimpiadas matemáticas venezolanas ha participado desde hace más de quince años como entrenador, jefe o tutor de delegaciones, jurado y apoyo académico.

Rafael Sánchez Lamoneda. Venezolano. Profesor Titular de la Escuela de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UCV. Egresado del Instituto Pedagógico de Caracas, M.Sc. en Matemáticas de la Universidad Simón Bolívar y PhD en Matemáticas de Brandeis University, Massachusetts, USA. Ha escrito varios artículos sobre Algebra en revistas internacionales. Fue Jefe del Departamento de Matemáticas del Ivic y miembro de la Comisión de postgrado de ese Instituto y de la Escuela de Matemáticas de la UCV. Premio Erdös 2010, otorgado por la World Federation for National Mathematical Competitions. Premio al mejor trabajo en el área de Matemáticas otorgado por el Conicit en el año 1993. Ha trabajado en las Olimpiadas Matemáticas en Venezuela desde 1978, ha sido jefe o tutor de delegaciones del país en Olimpiadas de Matemáticas Internacionales desde 1981. Asesor de la Organización de Estados Ibero-americanos para la Educación la Ciencia y la Cultura, OEI, en el área de Matemáticas y Olimpiadas Matemáticas. Asesor en el área de Matemáticas de la Academia Venezolana de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales. Pertenece a la directiva de la Asociación Matemática Venezolana desde hace más de diez años. En la actualidad es el Presidente de la Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas, ACM.

OLIMPIADA JUVENIL DE MATEMÁTICA

(OJM, OMCC, 0IM, IMO)

2016

Problemas y Soluciones

JOSÉ HEBER NIETO SAID
RAFAEL SÁNCHEZ LAMONEDA

OLIMPIADA DE MATEMÁTICA 2016

COLECCIÓN ESTUDIOS

Hecho el Depósito de Ley
Deposito Legal: DC2019001585
ISBN: 978-980-6195-64-6

Diseño General: Antonio Machado-Allison

Diseño Carátula: Claudia Nieto y Antonio Machado-Allison

Olimpiada Juvenil de Matemáticas 2016

(OJM, OM, OMCC, OIM, IMO)

Problemas y Soluciones

José Heber Nieto Said
Rafael Sánchez Lamoneda

OLIMPIADA JUVENIL DE MATEMÁTICAS 2016

COLECCIÓN ESTUDIOS

Hecho el Depósito de Ley
Depósito Legal:
ISBN:

Diseño General: Antonio Machado-Allison

Diseño Carátula: Claudia Nieto y Antonio Machado-Allison

Índice general

Introducción

Las Olimpiadas Matemáticas son competencias dirigidas principalmente a jóvenes de escuela elemental y secundaria. Actualmente esta actividad se ha extendido por todo el mundo debido a su gran efectividad en la popularización de las matemáticas y en la detección de jóvenes con talento para el estudio de esta ciencia.

El presente libro reúne todos los problemas propuestos en la Olimpiada Juvenil de Matemáticas 2016, así como aquellos de los eventos internacionales en los cuales participamos desde hace varios años. Estos fueron: la 57^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO) celebrada en Hong Kong, China, del 6 al 16 de julio; la XVIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y del Caribe (OMCC) celebrada en Kingston, Jamaica, del 15 al 23 de junio y la XXXI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, OIM, celebrada en Antofagasta, Chile, del 23 de septiembre al 1 de octubre. Las tres competencias son de carácter presencial. Cada una de ellas consta de dos exámenes, presentados en días consecutivos. Cada prueba tiene 3 problemas y los participantes disponen de cuatro horas y media para resolverlos. El valor de cada pregunta es de 7 puntos, para un máximo posible de 42 puntos en la competencia. Los ganadores reciben medallas de oro, plata o bronce y mención honorífica, según haya sido su desempeño. También incluimos en este libro los problemas de la Olimpiada Matemática de Mayo, competencia por correspondencia que se plantea a dos niveles para alumnos no mayores de 13 y 15 años y de carácter iberoamericano. Agradecemos a la Fundación Olimpiada Matemática Argentina, organizadores de esta competencia, por permitirnos publicar aquí los problemas y sus soluciones. La mayoría los estudiantes que participaron en los eventos internacionales mencionados ganaron algún premio, bien sea medallas o menciones honoríficas, obteniéndose un total de cuatro medallas de plata, siete de bronce y nueve menciones honoríficas. Al final del libro aparece la lista de alumnos ganadores en estas competencias y los premios que obtuvieron.

La OJM consta de tres etapas o pruebas. La primera de ellas es el *Canguro Matemático*, un examen de treinta problemas de selección simple, que fue presentado por 34308 estudiantes provenientes de 18 regiones del país. La segunda etapa de la competencia es la *Prueba Final Regional*. La misma consta de un examen de cinco problemas de desarrollo y compiten los alumnos que quedaron ubicados en el nueve por ciento superior en el Canguro Matemático. Esta prueba se organiza en cada estado que participa en la OJM y los ganadores reciben medallas de oro, plata y bronce. La tercera y última fase es la

Prueba Final Nacional, la misma consta de un examen de cuatro problemas de desarrollo y en ella participan los alumnos ganadores de medalla de oro en la Prueba Final Regional. En la primera fase de la competencia los alumnos presentan la prueba en sus colegios. La Prueba Regional la presentan juntos todos los estudiantes de cada estado, en una sede previamente seleccionada por el coordinador local. Para la Final Nacional se elige cada año una sede y allí se organiza el evento, permitiendo a los participantes, sus profesores y representantes estrechar lazos de amistad y compartir una experiencia educativa enriquecedora. La Prueba Final Nacional 2016 se realizó en la *Universidad Metropolitana*, y participaron 100 alumnos representando a 16 regiones.

Esta obra consta de siete capítulos. En los tres primeros se estudian los problemas de la OJM, dedicando un capítulo a cada fase de la competencia. Los últimos cuatro capítulos versan sobre las competencias internacionales. En ellos se presentan los problemas y sus soluciones. Esperamos que este libro sea de gran utilidad tanto para profesores como para estudiantes, y que les permita conocer las matemáticas desde un punto de vista interesante y entretenido.

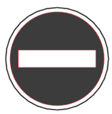
No queremos terminar esta introducción sin agradecer a nuestros patrocinadores, en especial a la *Fundación Empresas Polar*, a la *Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales*, a la *Facultad de Ciencias de la UCV* junto a la *Fundación Amigos de Ciencias*, a la *Universidad Simón Bolívar*, la *Universidad Rafael Urdaneta*, a la *Universidad del Zulia*, a *Acumuladores Duncan*, a la *Fundación Alas de Venezuela* de Santa Bárbara Airlines y a la *Fundación Cultural del Colegio Emil Friedman*, así como a todos los colegas que con su trabajo y esfuerzo, permiten que la Olimpiada Juvenil de Matemáticas sea una realidad.

Capítulo 1

Prueba Canguro

1.1. Prueba de Primer Año y Segundo Año

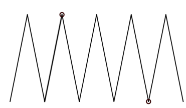
Problema 1. ¿Cuál de las siguientes señales de tránsito tiene un mayor número de ejes de simetría?

Ⓐ ; Ⓑ ; Ⓒ ; Ⓓ ; Ⓔ .

Problema 2. Miguel cortó una pizza en cuartos. Luego cortó cada cuarto en tercios. ¿Qué parte de la pizza completa es cada pedazo?

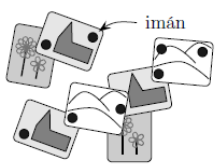
Ⓐ un doceavo; Ⓑ un octavo; Ⓒ un séptimo; Ⓓ un cuarto; Ⓔ un tercio.

Problema 3. Un hilo de 10 cm de longitud se pliega en partes iguales como muestra la figura. Luego se corta en los dos puntos marcados. ¿Cuáles son las longitudes de las tres partes?



Ⓐ 1 cm, 3 cm, 6 cm; Ⓑ 2 cm, 2 cm, 6 cm;
Ⓒ 1 cm, 4 cm, 5 cm; Ⓓ 2 cm, 3 cm, 5 cm; Ⓔ 3 cm, 3 cm, 4 cm.

Problema 4. En la puerta de la nevera de Luisa, 8 imanes (los discos negros en la figura) mantienen en posición varias tarjetas postales.

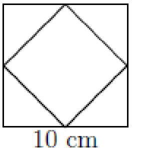


¿Cuál es el mayor número de imanes que Luisa puede quitar sin que se caiga ninguna tarjeta?

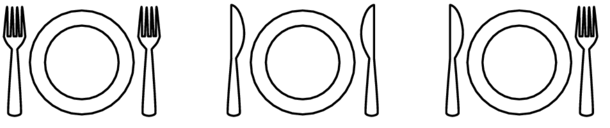
Ⓐ 2; Ⓑ 5; Ⓒ 3; Ⓓ 4; Ⓔ 6.

Problema 5. Cora dibuja un cuadrado de lado 10 cm. Luego une los puntos medios de los lados para formar un cuadrado más pequeño. ¿Cuál es el área de ese cuadrado más pequeño?

Ⓐ 10 cm^2; Ⓑ 50 cm^2; Ⓒ 20 cm^2; Ⓓ 40 cm^2; Ⓔ 25 cm^2.


10 cm

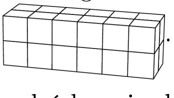
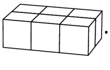
Problema 6. La mamá de Alicia desea ver un cuchillo a la derecha de cada plato y un tenedor del lado izquierdo. ¿Cuál es el menor número de intercambios de un cuchillo con un tenedor que Alicia debe realizar para complacer a su madre?



Ⓐ 2; Ⓑ 1; Ⓒ 5; Ⓓ 3; Ⓔ 6.

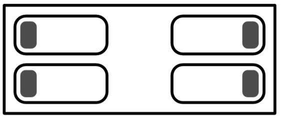
Problema 7. Un ciempiés tiene 25 pares de zapatos. Si necesita un zapato para cada uno de sus 100 pies, ¿cuántos zapatos le faltan?

Ⓐ 75; Ⓑ 15; Ⓒ 50; Ⓓ 20; Ⓔ 35.

Problema 8. Tomás y Juan construyen cajas rectangulares usando la misma cantidad de cubos idénticos. La caja de Tomás se ve así: . El primer nivel de la caja de Juan se ve así: . ¿Cuántos niveles tendrá la caja de Juan?

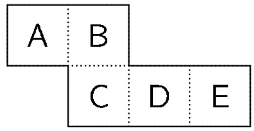
Ⓐ 2; Ⓑ 3; Ⓒ 4; Ⓓ 5; Ⓔ 6.

Problema 9. En la parte izquierda del cuarto, Beatriz y Pilar están durmiendo con sus cabezas sobre la almohada, una frente a la otra. En la parte derecha del cuarto, María y Karina están durmiendo con sus cabezas sobre la almohada, dándose la espalda. ¿Cuántas chicas están durmiendo con su oreja derecha apoyada sobre la almohada?



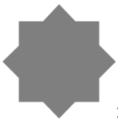
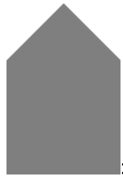
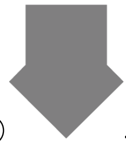
Ⓐ 0; Ⓑ 2; Ⓒ 1; Ⓓ 4; Ⓔ 3.

Problema 10. La pieza de papel que muestra la figura se dobla por las líneas punteadas para formar una caja abierta. La caja se coloca sobre una mesa con la abertura hacia arriba. ¿Qué cara de la caja queda abajo?



Ⓐ A; Ⓑ B; Ⓒ C; Ⓓ D; Ⓔ E.

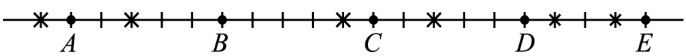
Problema 11. ¿Cuál de las siguientes figuras **no** se puede formar pegando dos cuadrados de papel idénticos?

Ⓐ  ; Ⓑ  ; Ⓒ  ; Ⓓ  ; Ⓔ  .

Problema 12. María, Ana y Neida trabajan en un kinder. Cada día, de lunes a viernes, exactamente dos de ellas van a trabajar. María trabaja 3 días por semana y Ana trabaja 4 días por semana. ¿Cuántos días por semana trabaja Neida?

Ⓐ 1; Ⓑ 4; Ⓒ 2; Ⓓ 5; Ⓔ 3.

Problema 13. Cinco ardillas A, B, C, D y E están en los puntos indicados en una línea. En la línea hay 6 nueces, en los puntos marcados con X. En cierto momento cada ardilla comienza a correr hacia la nuez más cercana, todas a la misma velocidad. Tan pronto como una ardilla toma una nuez, ella comienza a correr hacia la siguiente nuez más cercana. ¿Cuál de las ardillas cogerá dos nueces?



Ⓐ A; Ⓑ B; Ⓒ C; Ⓓ D; Ⓔ E.

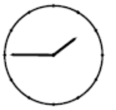
Problema 14. En una clase hay 30 estudiantes, sentados de a pares. Cada chico está sentado al lado de una chica, y exactamente la mitad de las chicas están sentadas al lado de un chico. ¿Cuántos chicos hay en la clase?

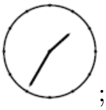
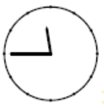
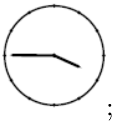
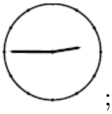
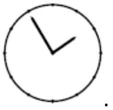
Ⓐ 5; Ⓑ 10; Ⓒ 15; Ⓓ 20; Ⓔ 25.

Problema 15. El número 2581953764 se escribe en una tira de papel. Juan hace dos cortes en la tira y obtiene tres números. Luego suma los tres números. ¿Cuál es el menor valor posible que puede obtener como resultado?

Ⓐ 2675; Ⓑ 2975; Ⓒ 2978; Ⓓ 4217; Ⓔ 4298.

Problema 16. Bruno está sentado en el sillón del peluquero. En el espejo que tiene frente a sí ve la imagen reflejada de un reloj (ver figura a la derecha). ¿Qué hubiera visto si hubiese mirado al espejo 10 minutos antes?



Ⓐ ; Ⓑ ; Ⓒ ; Ⓓ ; Ⓔ .

Problema 17. La abuela tiene cuatro gatos. Hoy les compró alimento suficiente para alimentarlos durante 12 días, pero de regreso encontró dos gatos abandonados y se los llevó a su casa. Si cada día le da a cada gato la misma cantidad de alimento, ¿para cuántos días le alcanzará el alimento que compró?

Ⓐ 4; Ⓑ 7; Ⓒ 5; Ⓓ 8; Ⓔ 6.

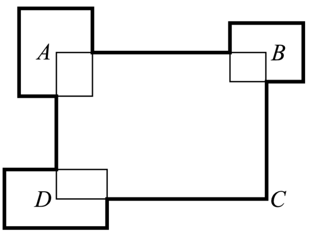
Problema 18. Cada letra de la palabra BENJAMIN representa uno de los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 ó 7. Letras diferentes representan dígitos diferentes. Si el número BENJAMIN es impar y divisible entre 3, ¿qué dígito corresponde a la N?

Ⓐ 7; Ⓑ 2; Ⓒ 5; Ⓓ 1; Ⓔ 3.

Problema 19. Tim, Tom y Tam son trillizos (hermanos nacidos el mismo día), mientras que su hermano Carlos es 3 años menor. ¿Cuál de los números siguientes podría ser la suma de las edades de los cuatro hermanos?

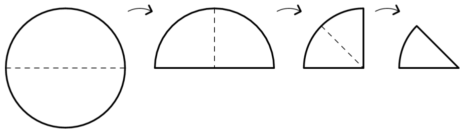
Ⓐ 53; Ⓑ 54; Ⓒ 56; Ⓓ 59; Ⓔ 60.

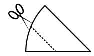
Problema 20. El perímetro del rectángulo $ABCD$ es 30 cm. Otros tres rectángulos tienen sus centros en los puntos A, B y D, como muestra la figura, y la suma de sus perímetros es 20 cm. ¿Cuál es la longitud de la línea gruesa?



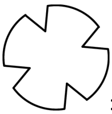
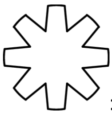
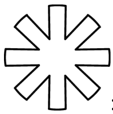
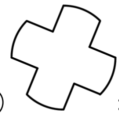
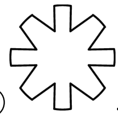
Ⓐ 40 cm; Ⓑ 50 cm; Ⓒ 35 cm; Ⓓ 45 cm; Ⓔ imposible determinarlo.

Problema 21. Ana pliega una hoja redonda de papel por la mitad. Luego la pliega una segunda y una tercera vez.



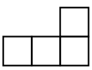
Por último Ana corta el papel plegado por la línea marcada: 

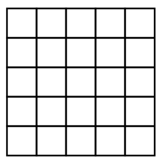
¿Cuál es la forma de la parte media del papel cuando se desdobla?

Ⓐ ; Ⓑ ; Ⓒ ; Ⓓ ; Ⓔ .

Problema 22. Ricardo escribió todos los números enteros con las siguientes propiedades: (a) el primer dígito es 1; (b) cada uno de los dígitos siguientes es al menos tan grande como el que lo precede; (c) la suma de todos los dígitos es 5. ¿Cuántos números escribió?

Ⓐ 4; Ⓑ 5; Ⓒ 6; Ⓓ 7; Ⓔ 8.

Problema 23. ¿Cuál es el mayor número de piezas de la forma  que se pueden recortar de un cuadrado de 5×5?

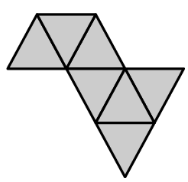


Ⓐ 7; Ⓑ 5; Ⓒ 2; Ⓓ 4; Ⓔ 6.

Problema 24. Luis montó un pequeño restaurante. Su amigo Jorge le regaló algunas mesas cuadradas y algunas sillas. Primero Luis trató de disponer las mesas individualmente, cada una con 4 sillas alrededor, pero le faltaron 6 sillas. Luego colocó las mesas unidas de a pares, con 6 sillas alrededor de cada par, y le sobraron 4 sillas. ¿Cuántas mesas le regaló Jorge a Luis?

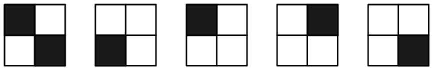
Ⓐ 8; Ⓑ 16; Ⓒ 12; Ⓓ 14; Ⓔ 10.

Problema 25. Clara desea construir un triángulo grande usando baldosas idénticas con forma de triángulo equilátero. Ella ya ha colocado algunas baldosas, como muestra la figura. ¿Cuál es el mínimo número de baldosas que necesita agregar para completar un triángulo?

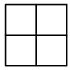


Ⓐ 5; Ⓑ 18; Ⓒ 12; Ⓓ 15; Ⓔ 9.

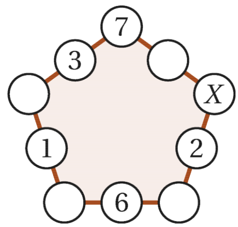
Problema 26. Con 8 cubos idénticos, algunos blancos y otros negros, se construyó un gran cubo. La figura muestra cinco de las caras de ese gran cubo:



¿Cómo se verá la sexta cara del gran cubo?

Ⓐ ; Ⓑ ; Ⓒ ; Ⓓ ; Ⓔ .

Problema 27. Cristina escribió números en 5 de 10 círculos, como se muestra en la figura. Ella quiere escribir un número en cada uno de los círculos restantes, de modo que las sumas de los 3 números en cada lado del pentágono sean iguales. ¿Qué número debe escribir en el círculo marcado con una X?



Ⓐ 13; Ⓑ 7; Ⓒ 15; Ⓓ 8; Ⓔ 11.

Problema 28. Los símbolos $\diamondsuit$, $\square$ y $\triangle$ representan tres dígitos diferentes. Si se suman los dígitos del número de tres dígitos $\diamondsuit\square\diamondsuit$, el resultado es el número de dos dígitos $\square\triangle$. Si se suman los dígitos del número de dos dígitos $\square\triangle$, el resultado es el número de un dígito $\square$. ¿Qué dígito representa $\diamondsuit$?

Ⓐ 4; Ⓑ 5; Ⓒ 6; Ⓓ 8; Ⓔ 9.

Problema 29. Un pequeño canguro juega con su calculadora. Comienza por escribir el número 12. En cada operación, multiplica el número en la pantalla por 2 o por 3, o lo divide entre 2 o entre 3. Luego de realizar 60 de estas operaciones, ¿cuál de los siguientes números **no** puede ser obtenido?

Ⓐ 12; Ⓑ 18; Ⓒ 36; Ⓓ 72; Ⓔ 108.

Problema 30. Dos números enteros de 3 dígitos cada uno tienen sus 6 dígitos diferentes. El dígito de las centenas del segundo número es el doble del dígito de las unidades del primer número. ¿Cuál es el menor valor posible de la suma de ambos números?

Ⓐ 537; Ⓑ 546; Ⓒ 535; Ⓓ 552; Ⓔ 301.

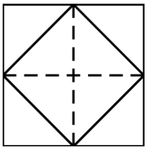
1.1.1. Soluciones

1. A tiene un eje de simetría horizontal, C uno horizontal y otrp vertical, los demás ninguno. La respuesta correcta es la (C).

2. Ub tercio de un cuarto es un doceavo, respuesta (A).

3. La respuesta correcta es la (D).

4. Se pueden quitar el señalado por la flecha, 2 de los 3 que sostienen la tarjeta superior derecha y uno de los 2 que sostienen la tarjeta inferior izquierda. La respuesta correcta es la (D).



5. Las diagonales del cuadrado pequeño lo dividen en 4 triángulos iguales, mientras que el cuadrado grande queda dividido en 8 de esos triángulos. Luego el área del cuadrado pequeño es la mitad de la del cuadrado grande, es decir la mitad de 100 cm^2, que es 50 cm^2. La respuesta correcta es la (B).

6. Hay 2 tenedores y dos cuchillos en mala posición, luego hacen falta 2 intercambios. La respuesta correcta es la (A).

7. $100 - 25 \times 2 = 50$, respuesta (C).

8. La caja de Tomás tiene $6 \times 2 \times 2 = 24$ cubos. Cada nivel de la de Juan tiene 6 cubos. Luego la de Juan debe tener 4 niveles, respuesta (C).

9. Dos: una en la parte izquierda del cuarto y otra en la parte derecha. La respuesta correcta es la (B).

10. La respuesta correcta es la (B).

11. La respuesta correcta es la (D).

12. Entre todas trabajan $5 \times 2 = 10$ turnos, luego Neida trabaja $10 - 3 - 4 = 3$ días, respuesta (E).

13. La respuesta correcta es la (C).

14. Si hay x chicos entonces hay x chicas sentadas con ellos, y otras x chicas para un total de $3x$ estudiantes. Como $3x = 30$ entonces $x = 10$, respuesta (B).

15. $258 + 1953 + 764 = 2975$. La respuesta correcta es la (B).

16. Bruno ve la imagen reflejada de las 10:15. Diez minutos antes eran las 10:05, cuya imagen reflejada es la opción (E).

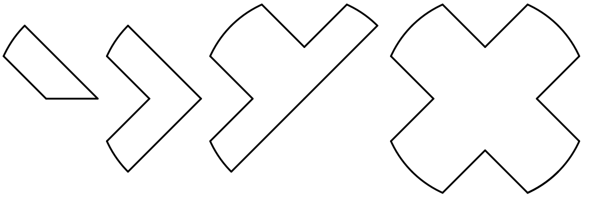
17. $12 \times 4 = 6x$, luego $x = 8$. La respuesta correcta es la (D).

18. N es impar, y como la suma de los dígitos de BENJAMIN es $1+2+3+4+5+6+7+N = 28+N$, N debe dejar resto 2 al dividirlo entre 3. Luego $N = 5$ y la respuesta correcta es la (C).

19. Si la edad de los trillizos es x entonces la suma de las cuatro edades es $3x + (x-3) = 4x - 3$. El único número de esta forma en la lista es 53. La respuesta correcta es la (A).

20. $30 + 20 - 10 = 40$. El exceso en $30 + 20$ es la suma de los perímetros de los 3 triángulos con borde fino, y cada uno de ellos es la mitad del perímetro del rectángulo correspondiente centrado en un vértice. La respuesta correcta es la (A).

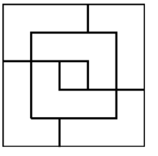
21. Si se deshacen los pliegues después del corte se obtienen sucesivamente:



Por tanto la respuesta correcta es la (D).

22. Los números que escribió son 11111, 1112, 113, 122 y 14. La respuesta correcta es la (B).

23. La figura muestra cómo colocar 6, y obviamente más no se puede. Luego la respuesta correcta es la (E).



24. Si s son sillas y m mesas, entonces $s = 4m - 6 = 6(m/2) + 4$, de donde $m = 10$. La respuesta correcta es la (E).

25. El triángulo debe tener lado al menos 4, luego se necesitan 16 baldosas y hay que agregar 9. La respuesta correcta es la (E).

26. Cada cubo negro aporta 3 cuadrados negros a la superficie del grande, luego ésta debe contener un número de cuadrados negros múltiplo de 3. La cara faltante no puede tener dos cuadrados negros adyacentes (pues entonces otra cara también los tendría), luego o contiene uno solo o contiene dos diagonalmente opuestos o no contiene ninguno. Pero en los dos primeros casos el número total de cuadrados negros sería 7 u 8, imposible. Luego la cara restante es toda blanca y la respuesta correcta es la (D).

27. Sean Y, Z, W, U los números que faltan, en sentido horario a partir de X. Entonces $X+2+Y = Y+6+Z$, de donde $Z = X - 4$, y $Z+1+W = W+3+7$, de donde $Z = 9$ y $X = 13$. La respuesta correcta es la (A).

28. Como $\square + \triangle = \square$, es $\triangle = 0$. Y de $2\diamondsuit + \square = 10\square + \triangle = 10\square$ resulta $2\diamondsuit = 9\square$ y debe ser $\diamondsuit = 9$ y $\square = 2$. La respuesta correcta es la (E).

29. El resultado será de la forma $12 \cdot 2^{a-b}3^{c-d}$ donde $a + b + c + d = 60$. Luego $a + d$ y $b + c$ son de la misma paridad, igual que $a - b$ y $c - d$, y 2 y 3 tendrán exponentes de diferente paridad. 36 es el único que los tiene de igual paridad. La respuesta correcta es la (C).

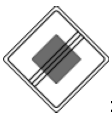
30. Los candidatos son de la forma $3x1$, $2yz$ ó $1x2$, $4yz$. Del primer tipo la menor suma es $301 + 245 = 546$, del segundo $102 + 435 = 537$. Luego la respuesta correcta es la (A), 537.

1.2. Prueba de Tercer Año

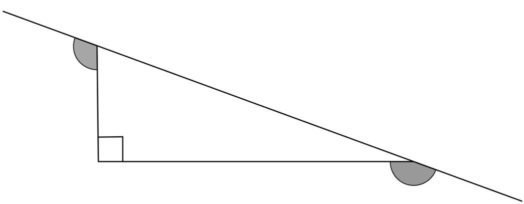
Problema 1. ¿Cuántos números enteros hay entre 20,16 y 3,17?

(A) 15; (B) 16; (C) 17; (D) 18; (E) 19.

Problema 2. ¿Cuál de las siguientes señales de tráfico tiene el mayor número de ejes de simetría?

(A) ; (B) ; (C) ; (D) ; (E) .

Problema 3. ¿Cuál es la suma de las medidas de los dos ángulos sombreados?

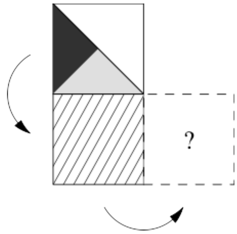


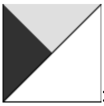
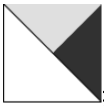
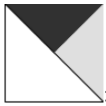
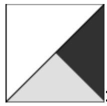
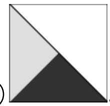
(A) 180°; (B) 150°; (C) 320°; (D) 270°; (E) 360°.

Problema 4. Julia tenía que sumar 26 a cierto número. En vez de hacer esto ella restó 26 y obtuvo -14. ¿Qué número debería haber obtenido?

(A) 28; (B) 32; (C) 36; (D) 38; (E) 42.

Problema 5. Juana voltea una ficha cuadrada sobre su arista inferior y luego sobre su arista derecha, como se muestra. ¿Qué es lo que ella ve?



Ⓐ ; Ⓑ ; Ⓒ ; Ⓓ ; Ⓔ .

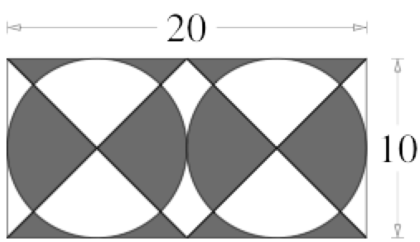
Problema 6. Isabel junta 555 grupos de 9 piedras cada uno en una sola pila. Luego ella parte la pila resultante en grupos de 5 piedras. ¿Cuántos grupos obtiene?

Ⓐ 999; Ⓑ 900; Ⓒ 555; Ⓓ 111; Ⓔ 45.

Problema 7. En mi colegio el 60 % de los profesores van al colegio en bicicleta, los cuales son 45 profesores. El 12 % de los profesores usan su carro para ir al colegio, y el resto va en bus. ¿Cuántos profesores usan su carro para ir al colegio?

Ⓐ 4; Ⓑ 6; Ⓒ 9; Ⓓ 10; Ⓔ 12.

Problema 8. ¿Cuánto mide el área de la región sombreada?

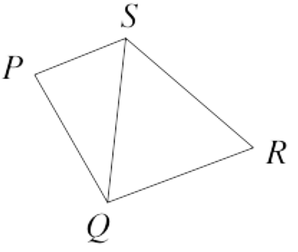


Ⓐ 50; Ⓑ 80; Ⓒ 100; Ⓓ 120; Ⓔ 150.

Problema 9. Dos pedazos de cuerda tienen longitudes 1 m y 2 m. Alejandro corta los pedazos en varias partes, todas de la misma longitud. ¿Cuál de los siguientes no puede ser el número total de partes obtenidas?

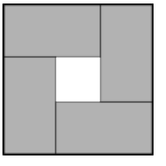
Ⓐ 6; Ⓑ 8; Ⓒ 9; Ⓓ 12; Ⓔ 15.

Problema 10. Cuatro ciudades P, Q, R y S están conectadas por cinco carreteras, como muestra la figura. El recorrido de una carrera debe comenzar en S, terminar en Q y pasar exactamente una vez por cada carretera. ¿Cuántas recorridos posibles hay para la carrera?



Ⓐ 10; Ⓑ 6; Ⓒ 2; Ⓓ 4; Ⓔ 8.

Problema 11. La figura muestra cuatro rectángulos idénticos colocados dentro de un cuadrado. El perímetro de cada rectángulo es 16 cm. ¿Cuál es el perímetro del cuadrado?



Ⓐ 20 cm; Ⓑ 28 cm; Ⓒ 24 cm; Ⓓ 32 cm; Ⓔ 16 cm.

Problema 12. Pedro tiene 49 metras azules y una metra roja. ¿Cuántas metras debe descartar Pedro para que el 90 % de sus metras sean azules?

Ⓐ 4; Ⓑ 10; Ⓒ 29; Ⓓ 39; Ⓔ 40.

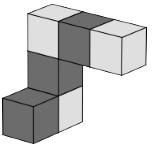
Problema 13. ¿Cuál de las siguientes fracciones tiene valor más cercano a $\frac{1}{2}$?

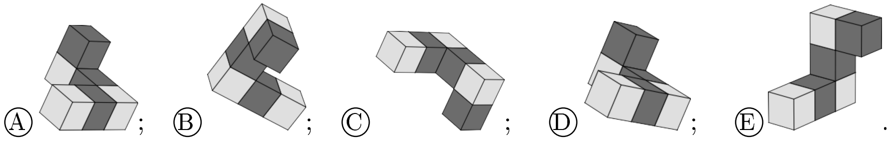
Ⓐ $\frac{25}{79}$; Ⓑ $\frac{27}{59}$; Ⓒ $\frac{29}{57}$; Ⓓ $\frac{52}{79}$; Ⓔ $\frac{57}{92}$.

Problema 14. Iván escribió los resultados de los cuartos de final, semifinales y la final de un torneo en el cual la persona que pierde un partido sale. Los resultados fueron (no necesariamente en este orden): Bruno le ganó a Antonio, Carlos le ganó a Darío, Gonzalo le ganó a Hugo, Gonzalo le ganó a Carlos, Carlos le ganó a Bruno, Eduardo le ganó a Fernando y Gonzalo le ganó a Eduardo. ¿Qué par jugó la final?

Ⓐ Gonzalo y Hugo; Ⓑ Gonzalo y Carlos; Ⓒ Carlos y Bruno;
Ⓓ Gonzalo y Eduardo; Ⓔ Carlos y Darío.

Problema 15. Ana ha pegado algunos cubos, como se muestra a la derecha. Ella gira el sólido para verlo desde ángulos diferentes. ¿Cuál de las siguientes no es una vista posible?

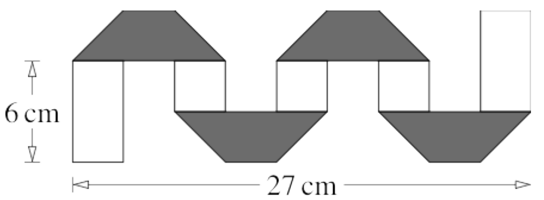




Problema 16. Tim, Tom y Tam son trillizos (tres hermanos nacidos el mismo día). Sus hermanos Juan y Jaime son gemelos y tres años más jóvenes. ¿Cuál de los siguientes números podría ser la suma de las edades de los cinco hermanos?

(A) 92; (B) 36; (C) 76; (D) 53; (E) 89.

Problema 17. Una tira de papel de 3 cm de ancho es gris de un lado y blanca del otro. María dobla la tira, como se muestra.



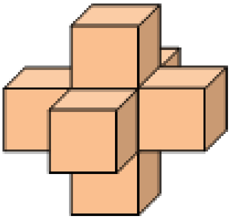
Los trapecios grises son iguales. ¿Cuál es la longitud de la tira original?

(A) 36 cm; (B) 48 cm; (C) 54 cm; (D) 57 cm; (E) 81 cm.

Problema 18. Los canguros Juan y Pedro comienzan a saltar a la vez, desde el mismo punto y en la misma dirección. Cada uno da un salto por segundo. Cada salto de Juan tiene 6 m de longitud. El primer salto de Pedro es de 1 m de longitud, el segundo es de 2 m, el tercero es 3 m y así sucesivamente. ¿Después de cuántos saltos Pedro alcanzará a Juan?

(A) 10; (B) 14; (C) 11; (D) 13; (E) 12.

Problema 19. Se pegan siete dados estándar para formar el sólido mostrado. Las caras de los dados que están pegadas tienen el mismo número de puntos. ¿Cuántos puntos hay en la superficie del sólido?



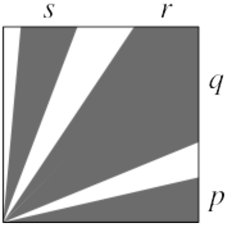
Ⓐ 105; Ⓑ 90; Ⓒ 24; Ⓓ 95; Ⓔ 126.

Problema 20. En un salón de clases hay 20 estudiantes. Se sientan en parejas de manera que exactamente la tercera parte de los chicos se sientan con una chica y exactamente la mitad de las chicas se sientan con un chico. ¿Cuántos chicos hay en el salón?

Ⓐ 12; Ⓑ 15; Ⓒ 9; Ⓓ 18; Ⓔ 16.

Problema 21. Dentro de un cuadrado de área 36 hay 3 regiones sombreadas, como muestra la figura. El área total sombreada es 27. ¿Cuál es el valor de $p + q + r + s$?

Ⓐ 4; Ⓑ 6; Ⓒ 8; Ⓓ 9; Ⓔ 10.



Problema 22. El reloj de Teófilo está 10 minutos atrasado, pero él cree que está adelantado 5 minutos. El reloj de Leonardo está adelantado 5 minutos, pero él piensa que está atrasado 10 minutos. En el mismo momento, cada uno de ellos mira la hora. Teófilo piensa que son las 12:00. ¿Qué hora piensa Leonardo que es?

Ⓐ 11:30; Ⓑ 12:30; Ⓒ 11:45; Ⓓ 12:45; Ⓔ 12:00.

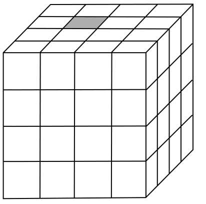
Problema 23. Doce chicas se encontraron en una cafetería. En promedio, cada una de ellas comió 1,5 donas. Ninguna de ellas comió más de 2 donas y dos de ellas únicamente pidieron agua mineral. ¿Cuántas chicas comieron dos donas?

Ⓐ 2; Ⓑ 5; Ⓒ 6; Ⓓ 7; Ⓔ 8.

Problema 24. Caperucita Roja lleva galletas a tres abuelas. Ella comienza con una canasta llena de galletas, pero inmediatamente antes de entrar en la casa de cada una de las abuelas, el Lobo Feroz se come la mitad de las galletas que hay en la canasta. Cuando Caperucita salió de la casa de la tercera abuela, ya no le quedaban galletas. Si Caperucita dejó la misma cantidad de galletas a cada abuela, ¿cuál de los siguientes números se puede asegurar que divide al número de galletas con que comenzó?

Ⓐ 6; Ⓑ 5; Ⓒ 9; Ⓓ 4; Ⓔ 7.

Problema 25. El cubo mostrado a la derecha está dividido en 64 cubos pequeños. Uno y sólo uno de los cubos es gris. El primer día, todos los cubos vecinos al cubo gris se vuelven grises (dos cubos son vecinos si tienen una cara c mún). El segundo día todos los cubos vecinos a algún cubo gris se vuelven grises. ¿Cuántos cubos grises hay al final del segundo día?

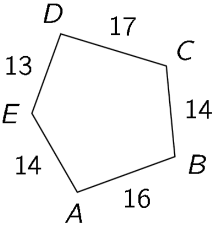


Ⓐ 11; Ⓑ 13; Ⓒ 15; Ⓓ 16; Ⓔ 17.

Problema 26. Se escriben varios números enteros positivos diferentes en la pizarra. El producto de los dos más pequeños es 16. El producto de los dos más grandes es 225. ¿Cuál es la suma de todos los enteros?

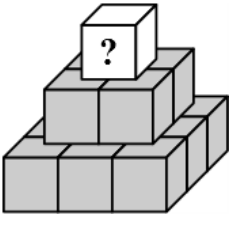
Ⓐ 42; Ⓑ 38; Ⓒ 58; Ⓓ 44; Ⓔ 243.

Problema 27. El diagrama muestra un pentágono $ABCDE$ y las longitudes de sus lados. Sofía dibuja cinco círculos con centros en los vértices A, B, C, D y E, de manera que cada par de círculos cuyos centros sean los dos extremos de un mismo lado, sean tangentes. ¿Cuál es el centro del círculo más grande dibujado por Sofía?



Ⓐ A; Ⓑ B; Ⓒ C; Ⓓ D; Ⓔ E.

Problema 28. Karina escribe un número entero positivo diferente en cada uno de los catorce cubos en la pirámide. La suma de los nueve enteros escritos en los cubos de la base es igual a 50. El entero escrito en cada uno de los otros cubos es igual a la suma de los enteros escritos en los cuatro cubos que se hallan debajo de él. ¿Cuál es el mayor entero posible que puede ser escrito en el cubo superior?



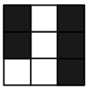
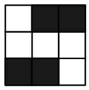
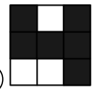
Ⓐ 80; Ⓑ 98; Ⓒ 104; Ⓓ 110; Ⓔ 118.

Problema 29. Un tren tiene cinco vagones, cada uno con al menos un pasajero. Se dice que dos pasajeros son *vecinos* si están en el mismo vagón o están en dos vagones adyacentes. Cada pasajero tiene exactamente cinco o exactamente diez vecinos. ¿Cuántos pasajeros hay en el tren?

Ⓐ 13; Ⓑ 15; Ⓒ 17; Ⓓ 20; Ⓔ Hay más de una posibilidad..

Problema 30. Se construye un cubo de $3 \times 3 \times 3$ con 15 cubitos negros y 12 cubitos blancos. Se muestran cinco caras del cubo grande.

¿Cuál de las siguientes es la sexta cara del cubo grande?

(A) ; (B) ; (C) ; (D) ; (E) .

1.2.1. Soluciones

1. Los enteros del 4 al 20, que son 17, respuesta (C).

2. La (A), que tiene 4. Las demás, en orden, tienen 2, 3, 0 y 1.

3. Los dos ángulos sombreados más los 3 del triángulo suman dos llanos y un recto, 450°. Luego los dos ángulos sombreados suman $450° - 180° = 270°$, respuesta (D).

4. $-14 + 26 + 26 = 38$, respuesta (D).

5. Luego de la primer vuelta obtiene A, y luego B. La respuesta correcta es la (B).

6. $555 \times 9/5 = 999$, respuesta (A).

7. Hay $45/0{,}6 = 75$ profesores en total, y el 12 % son 9, respuesta (C).

8. La mitad del total, respuesta (C).

9. 8, respuesta (B), ya que el número total de partes debe ser múltiplo de 3.

10. Los recorridos posibles son SQPSRQ, SQRSPQ, SPQSRQ, SPQRSQ, SRQPSQ y SRQSPQ. La respuesta correcta es la (B).

11. Si a y b denotan el lado mayor y el menor, respectivammente, de cada rectángulo, entonces $2a + 2b = 16$, y el perímetro del cuadrado es $4a + 4b = 32$, respuesta (D).

12. Debe quedarse con una metra roja y 9 azules, luego debe descartar 40, respuesta (E).

13. Las diferencias con 1/2, en valor absoluto, son 29/158, 5/118, 1/114, 25/158 y 11/92, de las cuales evidentemente la más pequeña es 1/114. La respuesta correcta es la (C).

14. El campeón debe haber ganado 3 partidos y el segundo 2, luego son Gonzalo y Carlos, respuesta (C).

15. B no puede ser. Se puede ver usando los dedos pulgar, índice y medio. La respuesta correcta es la (B).

16. La suma es de la forma $3t + 2(t - 3) = 5t - 6$, le falta uno para ser múltiplo de 5. La respuesta correcta es la (E).

17. La tira se descompone en 19 cuadraditos de 3 cm de lado, longitud 57 cm. La respuesta correcta es la (D).

18. $1 + 2 + \cdots + n = 6n$, $n(n + 1)/2 = 6n$, $n + 1 = 12$, $n = 11$. La respuesta correcta es la (C).

19. Las caras de cada cubo suman $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Hay 7 cubos, pero hay 2 caras pegadas con cada número de puntos, luego quedan $21 \times 5 = 105$. La respuesta correcta es la (A).

20. Si hay x chicos e y chicas entonces $x/3 = y/2$, $x + y = 20$, de donde $x = 12$, $y = 8$. La respuesta correcta es la (A).

21. El lado del cuadrado es 6. El área sombreada es $6(p + q + r + s)/2 = 27$, de donde $p + q + r + s = 9$. La respuesta correcta es la (D).

22. Teófilo piensa que son las 12:00, ve 12:05, son 12:15. Leonardo ve 12:20 y piensa que son 12:30. La respuesta correcta es la (B).

23. En total comieron $12 \cdot 1,5 = 18$ donas. Si x chicas comieron 2 donas c/u, entonces $10 - x$ comieron 1 c/u. Luego $2x + (10 - x) = 18$, de donde $x = 8$. La respuesta correcta es la (E).

24. Si le dejó x galletas a cada abuela, antes de entrar a la tercera casa tenía $2x$, entró a la segunda casa con $3x$, antes de entrar tenía $6x$, entró a la primera casa con $7x$ y antes de entrar tenía $14x$. De los números dados como opciones, el único que se puede asegurar que divide $14x$ es el 7, respuesta (E).

25. El primer día se contagian 4 cubos de la primera capa y uno de la segunda. El segundo día, 6 cubos más de la primera capa, 4 más de la segunda y uno de la tercera. Total $1 + 5 + 11 = 17$, respuesta (E).

26. Los dos más pequeños pueden ser 1 y 16 ó 2 y 8. Los dos más grandes sólo pueden ser 9 y 25. La única posibilidad es entonces 2, 8, 9, 25 que suman 44. La respuesta correcta es la (D).

27. Sean a, b, c, d y e los radios de las circunferencias de centros A, B, C, D y E, respectivamente. Entonces $a + b = 16$, $b + c = 14$, $c + d = 17$, $d + e = 13$ y $e + a = 14$, de donde

$$a + b - (b + c) + (c + d) - (d + e) + (e + a) = 16 - 14 + 17 - 13 + 14,$$

o sea $2a = 20$, de donde $a = 10$ y $b = 6$, $c = 8$, $d = 9$ y $e = 4$. La respuesta correcta es la (A).

28. En las esquinas de la base se ponen 1, 2, 3, 4; en los puntos medios de los lados 5, 6, 7, 8 y en el centro $50 - 10 - 26 = 14$. Arriba queda $10 + 2 \times 26 + 4 \times 14 = 118$. La respuesta correcta es la (E).

29. El vagón central lleva 5. Los dos primeros 6, igual que los dos últimos. La respuesta correcta es la (C).

30. Cada patrón en las aristas debe aparecer un número par de veces. Como en las 5 caras mostradas aparecen NNN 3 veces, NNB 5, BBN 5 y NBN 7, estos 4 patrones deben aparecer en la que falta. Eso excluye B, C y D. Con A o E, el número de cubos negros en las esquinas es $(3 + 3 + 4 + 3 + 2 + 3)/3 = 6$, y el de medios de aristas $(3 + 2 + 0 + 1 + 2 + 2)/2 = 5$. Luego a lo sumo 4 centros de caras pueden ser negros, lo que excluye E. La respuesta correcta es la (A).

1.3. Prueba de Cuarto Año y Quinto Año

Problema 1. El promedio de cuatro números es 9. Si tres de los números son 5, 9 y 12, ¿cuál es el cuarto número?

Ⓐ 8; Ⓑ 6; Ⓒ 10; Ⓓ 9; Ⓔ 36.

Problema 2. ¿Cuál de los siguientes números es una mejor aproximación al resultado de $\dfrac{17 \times 0{,}3 \times 20{,}16}{999}$?

Ⓐ 0.1; Ⓑ 1; Ⓒ 100; Ⓓ 10; Ⓔ 0.01.

Problema 3. En un examen de 30 preguntas, el número de respuestas correctas dadas por Rita fue 50 % mayor que el número de sus respuestas incorrectas. Si contestó todas las preguntas, y cada una de sus respuestas fue correcta o incorrecta, ¿cuántas respuestas correctas dió Rita?

Ⓐ 10; Ⓑ 12; Ⓒ 15; Ⓓ 18; Ⓔ 20.

Problema 4. En un sistema de coordenadas cartesiano, cuatro de los puntos siguientes son los vértices de un cuadrado. ¿Qué punto no es vértice de ese cuadrado?

Ⓐ $(0; -4)$; Ⓑ $(1; 1)$; Ⓒ $(-2; -1)$; Ⓓ $(-1; 3)$; Ⓔ $(3; -2)$.

Problema 5. Si el entero positivo x se divide entre 6, el resto es 3. ¿Cuál es el resto si $3x$ se divide entre 6?

Ⓐ 4; Ⓑ 3; Ⓒ 2; Ⓓ 1; Ⓔ 0.

Problema 6. ¿Cuántas semanas son 2016 horas?

Ⓐ 12; Ⓑ 6; Ⓒ 16; Ⓓ 8; Ⓔ 10.

Problema 7. El pequeño Lucas inventó su propio sistema para escribir números negativos, antes de aprender la manera usual con el signo $-$ delante. Contando hacia atrás, el escribía: ... 3, 2, 1, 0, 00, 000, 0000,... ¿Cuál es el resultado de $000 + 0000$ en su notación?

Ⓐ 1; Ⓑ 00000; Ⓒ 000000; Ⓓ 0000000; Ⓔ 00000000.

Problema 8. Tengo algunos dados extraños: las caras muestran los números del 1 al 6 como de costumbre, pero los valores impares son negativos (-1, -3 y -5 en lugar de 1, 3 y 5). Si lanzo dos de esos dados y sumo los valores que salgan, ¿cuál de los siguientes resultados no puede ser obtenido?

Ⓐ 4; Ⓑ 3; Ⓒ 7; Ⓓ 5; Ⓔ 8.

Problema 9. ¿Cuántas veces, como mínimo, hay que intercambiar pares de letras adyacentes para transformar la palabra GATO paso a paso en la palabra TOGA?

Ⓐ 3; Ⓑ 4; Ⓒ 5; Ⓓ 6; Ⓔ 7.

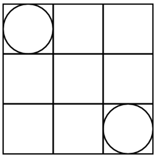
Problema 10. Sergio escribió cinco enteros positivos diferentes, de un dígito cada uno, en la pizarra. Él descubrió que ninguna suma de dos de los números escritos es igual a 10. ¿Cuál de los siguientes números se puede asegurar que fue escrito por Sergio?

Ⓐ 1; Ⓑ 5; Ⓒ 2; Ⓓ 4; Ⓔ 3.

Problema 11. Si $a + 5 = b^2 - 1 = c^2 + 3 = d - 4$, ¿cuál de los números a, b, c, d es el mayor?

Ⓐ a; Ⓑ b; Ⓒ c; Ⓓ d; Ⓔ es imposible determinarlo.

Problema 12. Un tablero de 3×3 está dividido en 9 cuadrados unitarios, en dos de los cuales están inscriptos dos círculos (ver figura). ¿Cuál es la distancia entre los círculos?

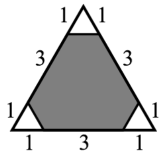


Ⓐ 2; Ⓑ 3; Ⓒ $2\sqrt{2}$; Ⓓ $\sqrt{2} + 1$; Ⓔ $2\sqrt{2} - 1$.

Problema 13. En un torneo de tenis por eliminatorias, seis de los resultados de los cuartos de final, de las semifinales y de la final (no necesariamente en ese orden) fueron: Bella le ganó a Ana, Celia le ganó a Diana, Gloria le ganó a Hilda, Gloria le ganó a Celia, Celia le ganó a Bella y Eva le ganó a Flora. ¿Cuál es el resultado que falta?

Ⓐ Gloria le ganó a Bella; Ⓑ Celia le ganó a Ana; Ⓒ Gloria le ganó a Eva;
Ⓓ Bella le ganó a Hilda; Ⓔ Eva le ganó a Celia.

Problema 14. ¿Qué porcentaje del área del triángulo grande que se ve en la figura está sombreada?



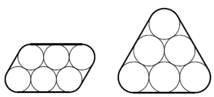
Ⓐ 90 %; Ⓑ 88 %; Ⓒ 85 %; Ⓓ 80 %; Ⓔ es imposible determinarlo.

Problema 15. Julia quiere construir un cuadrado mágico multiplicativo usando los números 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 y 100. Los productos de los números en cada fila, cada columna y cada una de las dos diagonales deben ser iguales. La figura muestra cómo comenzó. ¿Qué número debe colocar Julia en la casilla con el signo de interrogación?

20	**1**	
		?

Ⓐ 2; Ⓑ 4; Ⓒ 5; Ⓓ 10; Ⓔ 25.

Problema 16. Juan desea mantener unidos seis tubos de sección circular de 2 cm de diámetro mediante una banda elástica. Él consideró las dos posibilidades que muestran las figuras:



¿Cuál de las siguientes afirmaciones acerca de la longitud de la banda elástica es verdadera?

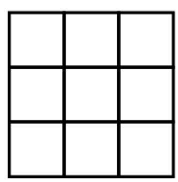
Ⓐ La de la izquierda es π cm más corta;

Ⓑ La de la izquierda es 4 cm más corta;
Ⓒ La de la derecha es π cm más corta;
Ⓓ La de la derecha es 4 cm más corta;
Ⓔ Ambas tienen la misma longitud.

Problema 17. Ocho sobres idénticos contienen los números 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 y 128 (un número en cada sobre). Eva escoge algunos sobres al azar. Alicia toma el resto. Cada una suma los números en sus respectivos sobres. La suma de Eva supera en 31 a la de Alicia. ¿Cuántos sobres tomó Eva?

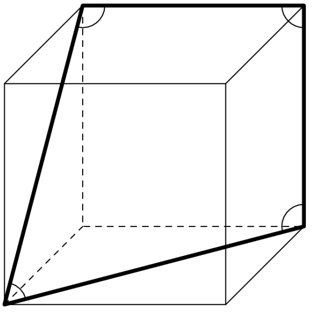
Ⓐ 2; Ⓑ 3; Ⓒ 4; Ⓓ 5; Ⓔ 6.

Problema 18. Pedro desea colorear las casillas de un tablero de 3×3 de manera que las tres casillas de cada fila, de cada columna y de cada una de las dos diagonales sean de tres colores diferentes. ¿Cuál es el mínimo número de colores que Pedro debe usar?



Ⓐ 3; Ⓑ 4; Ⓒ 5; Ⓓ 6; Ⓔ 7.

Problema 19. La figura muestra un cubo con cuatro ángulos marcados. ¿Cuánto es la suma de las medidas de esos ángulos?

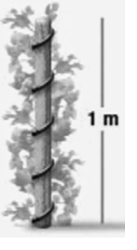


Ⓐ 330°; Ⓑ 315°; Ⓒ 360°; Ⓓ 345°; Ⓔ 375°.

Problema 20. Hay 2016 canguros, cada uno de los cuales es gris o rojo. Hay al menos un canguro gris y al menos un canguro rojo. Para cada canguro K se divide el número de canguros de color diferente al de K entre el número de canguros del mismo color que K (incluido el propio K). Halle la suma de los 2016 resultados obtenidos.

Ⓐ 2016; Ⓑ 1344; Ⓒ 1008; Ⓓ 672; Ⓔ se necesita más información.

Problema 21. Una planta se enrolló 5 veces alrededor de un tubo de altura 1 m y circunferencia 15 cm, como muestra la figura. Mientras trepaba, la altura de la planta aumentaba a un ritmo constante. ¿Cuál es la longitud de la planta?

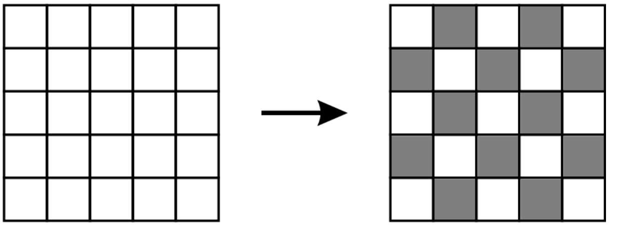


Ⓐ 0.75 m; Ⓑ 1.75 m; Ⓒ 1.0 m; Ⓓ 1.25 m; Ⓔ 1.5 m.

Problema 22. ¿Cuál es el mayor resto posible que se puede obtener cuando un número de dos dígitos se divide entre la suma de sus dígitos?

Ⓐ 13; Ⓑ 15; Ⓒ 14; Ⓓ 17; Ⓔ 16.

Problema 23. Un cuadrado de 5×5 se divide en 25 casillas. Inicialmente todas las casillas son blancas, como se muestra a la izquierda. Una *operación* consiste en seleccionar dos casillas adyacentes (es decir, que tengan un lado común) y cambiar el color de cada una al opuesto (es decir, blanco a negro o negro a blanco)



¿Cuál es el mínimo número de operaciones que se requieren para obtener la coloración estilo ajedrez que se muestra a la derecha?

Ⓐ 11; Ⓑ 15; Ⓒ 13; Ⓓ 14; Ⓔ 12.

Problema 24. Una lancha a motor tarda 4 horas en ir, corriente abajo, desde X hasta Y. Para regresar de Y a X, contra la corriente, tarda 6 horas. ¿Cuánto tarda un tronco en ser llevado por la corriente desde X hasta Y, suponiendo que no encuentre ningún obstáculo?

Ⓐ 5; Ⓑ 10; Ⓒ 12; Ⓓ 20; Ⓔ 24.

Problema 25. En la República Canguro cada mes tiene 40 días, numerados del 1 al 40. Si el número de un día es primo o es múltiplo de 6, ese día es feriado. ¿Cuántos días de trabajo hay en el mes tales que tanto el día precedente como el siguiente sean feriados?

Ⓐ 5; Ⓑ 4; Ⓒ 3; Ⓓ 2; Ⓔ 1.

Problema 26. Dos de las alturas de un triángulo miden 10 cm y 11 cm. ¿Cuál de las siguientes **no** puede ser la longitud de la tercer altura?

Ⓐ 10 cm; Ⓑ 6 cm; Ⓒ 7 cm; Ⓓ 5 cm; Ⓔ 100 cm.

Problema 27. Jacobo escribió cuatro enteros positivos consecutivos. Luego calculó los cuatro resultados posibles que se obtienen al sumar tres de los cuatro enteros. Ninguno de esos resultados es un número primo. ¿Cuál es el menor entero que Jacobo pudo haber escrito?

Ⓐ 7; Ⓑ 6; Ⓒ 3; Ⓓ 10; Ⓔ 12.

Problema 28. Dos niñas y dos niños están sentados alrededor de una mesa redonda. Cada uno está vestido de un color diferente; azul, rojo, amarillo o verde. La persona de azul está sentada a la izquierda de Andrea. La persona de rojo está sentada frente a Bruno. Eva y Felipe están sentados uno junto al otro. A la izquierda de la persona de amarillo está sentada una niña. ¿De qué color está vestida Eva?

Ⓐ es imposible saberlo; Ⓑ azul; Ⓒ amarillo; Ⓓ verde; Ⓔ rojo.

Problema 29. Las fechas pueden escribirse en la forma DD.MM.AAAA. Por ejemplo, hoy es 17.03.2016. Una fecha es *sorprendente* si todos sus 8 dígitos son diferentes. ¿En qué mes ocurrirá la próxima fecha sorprendente?

(A) Marzo; (B) Diciembre; (C) Junio; (D) Agosto; (E) Julio.

Problema 30. En una conferencia los 2016 participantes se registran con números del 1 al 2016. Cada participante del 1 al 2015 le da la mano a exactamente tantos participantes como indica su número de registro. ¿A cuántos participantes les da la mano el participante 2016?

(A) 1008; (B) 672; (C) 2015; (D) 1; (E) 504.

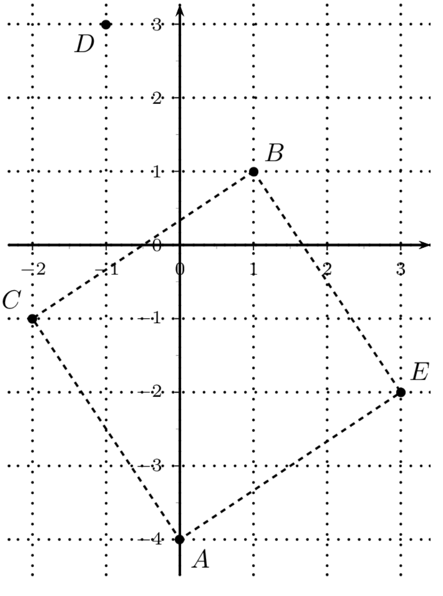
1.3.1. Soluciones

1. Sea x el cuarto número. Entonces $(x+5+9+12)/4 = 9$, de donde se despeja $x = 10$, respuesta (C).

2. $(17 \times 0{,}3 \times 20{,}16)/999$ es aproximadamente $(17 \times 0{,}3 \times 20)/1000 = 0{,}102$, luego la respuesta correcta es la (A).

3. El 60 % de 30, o sea 18, respuesta (D).

4. Basta hacer un dibujo para ver que el punto que no es vértice del cuadrado es el $(-1, 3)$. La respuesta correcta es la (D).



5. $x = 6q + 3$, entonces $3x = 18q + 9 = 6(3q + 1) + 3$. La respuesta correcta es la (B).

6. La respuesta es $(2016/24)/7 = 12$, o sea la (A).

7. Es $-2 - 3 = -5$, que en su notación es 000000. La respuesta correcta es la (C).

8. $4 = 2 + 2$, $3 = 4 - 1$, $5 = 6 - 1$, $8 = 4 + 4 = 2 + 6$. El úbico que no se puede obtener es el 7, respuesta (C).

9. Se puede con 4 movimientos: GATO GTAO GTOA TGOA TOGA. Como la A debe hacer al menos dos mivimientos para llegar a la cuarta posición, y lo mismo la G para llegar a la tercera, ese es el mínimo y la respuesta correcta es la (B).

10. De cada par $\{1, 9\}$, $\{2, 8\}$, $\{3, 7\}$, $\{4, 6\}$ a lo sumo escribió uno, luego necesariamente escribió el 5. La respuesta correcta es la (B).

11. Se tiene $d = a + 9$, luego $d > a$. Además $d = c^2 + 7 \geq 7$, $b^2 = d - 3$ y $c^2 = d - 7$. Como $(b - 1)^2 \geq 0$ se tiene $b^2 + 1 \geq 2b$ y $b \leq (b^2 + 1)/2$. Luego $b \leq (d - 2)/2 < d/2 < d$ y análogamente $c \leq (c^2 + 1)/2 = (d - 6)/2 = d/2 - 3 < d$. O sea que d es el mayor, respuesta (D).

12. La distancia entre los centros de los círculos es $2\sqrt{2}$, y restando dos radios queda $2\sqrt{2} - 1$. La respuesta correcta es la (E).

13. La final sólo pudo haber sido entre Gloria y Celia, y ganó Gloria, luego falta un juego ganado por Gloria. Ana, Diana, Flora e Hilda fueron eliminadas en la primera vuelta, y Bella fue eliminada en la segunda vuelta por Celia, luego falta el juego que Gloria le ganó a Eva. La respuesta correcta es la (C).

14. El área de cada triangulito blanco es $1/25$ del grande, luego el área sombreada es $22/25$ o sea el 88 % del grande. La respuesta correcta es la (B).

15. El producto de los 9 números es 10^9, luego el producto de cada línea de 3 es 1000. Entonces en la esquina superior derecha va el 50. Si el número del centro es x, multiplicando las 4 líneas que pasan por el centro se ve que $1000^4 = 10^9 x^3$, de donde $x = 10$, la esquina inferior derecha es 5 y en la casilla con el signo de interrogación va el 4. La respuesta correcta es la (B).

16. En ambas figuras los arcos suman una circunferencia completa y los segmentos rectilíneos suman 12 cm. La respuesta correcta es la (E).

17. Si la suma de Eva es e, entonces $1+2+4+8+16+32+64+128 = 255 = e+(e-31)$, de donde $e = 143 = 128 + 8 + 4 + 2 + 1$. Luego Eva tomó 5 sobres, respuesta (D).

18. Las cuatro esquinas y el centro deben ser de colores diferentes, luego se necesitan al menos 5 colores. Y con 5 colores es suficiente, como muestra la figura siguiente. Luego la respuesta correcta es la (C).

1	2	3
2	4	1
5	1	2

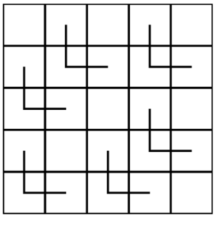
19. $\alpha = 60°$, $\beta = \gamma = \delta = 90°$ y la suma es $330°$. La respuesta correcta es la (A).

20. Sea g el número de canguros grises y r el número de canguros rojos. Entonces la suma es igual a $g(r/g) + r(g/r) = r + g = 2016$. La respuesta correcta es la (A).

21. Imaginemos una hoja de papel de 1 m de altura enrollada 5 veces alrededor del tubo. Si se desenrrolla resulta un rectángulo de 75 cm de ancho por 100 cm de altura, cuya diagonal tiene la longitud de la planta. Luego la respuesta es $\sqrt{75^2 + 100^2} = 25\sqrt{3^2 + 4^2} = 125$ cm, opción (D).

22. Para que el resto sea grande la suma S de los dígitos debe ser grande. El valor más grande posible es $S = 18$, que corresponde al número 99. Pero $99 = 18 \cdot 6 + 9$ y el resto es 9. Con $S = 17$ hay dos números, 98 y 89. Se tiene $98 = 17 \cdot 5 + 13$ y $89 = 17 \cdot 5 + 4$. Con $S = 16$ hay tres números: 97, 88 y 79. $97 = 16 \cdot 6 + 1$, $88 = 16 \cdot 5 + 8$ y $79 = 16 \cdot 4 + 15$. Este último resto, 15, es el máximo, ya que los números que quedan por examinar tienen $S \leq 15$ y por lo tanto dejarán restos a lo sumo de 14. La respuesta correcta es la (B).

23. Para obtener cada casilla negra se requiere al menos una operación, luego se necesitan al menos 12 operaciones. Pero 12 son suficientes, como muestra la figura, donde cada segmento une dos casillas que cambian de color simultáneamente. La respuesta correcta es la (E).



24. Sea u la velocidad de la lancha, v la velocidad de la corriente y d la distancia de X a Y. Entonces $d/4 = u + v$ y $d/6 = u - v$, de donde $d/4 - d/6 = (u + v) - (u - v) = 2v$, es decir $d/12 = 2v$ y $v = d/24$, o sea que el tronco tarda 24 horas en recorrer la distancia d llevado por la corriente. La respuesta correcta es la (E).

25. Si uno de los días adyacentes a otro es múltiplo de 6, el otro no es múltiplo de 6 ni primo. Luego la única posibilidad es que los dos adyacentes sean primos, lo que ocurre sólo para el 4. La respuesta correcta es la (E).

26. Como $ah_a = bh_b = ch_c$ (doble del área), de la desigualdad triangular $a < b + c$ se deduce $1/h_a < 1/h_b + 1/h_c$, luego 5 no puede ser pues $1/5 > 1/10 + 1/11$. La respuesta correcta es la (D).

27. Si a es el menor, las 4 sumas son enteros consecutivos a partir de $3a+3$. Los primeros 4 enteros consecutivos sin primos son 24, 25, 26 y 27, luego $3a+3 = 24$ y $a = 7$, respuesta (A).

28. Bruno no está a la derecha de Andrea (pues tendría azul enfrente) ni frente a Andrea (pues separaría a Eva de Felipe), luego está a la izquierda de Andrea. A la derecha de Andrea está rojo, de donde Andrea viste anmarillo y Eva está a su derecha, de rojo. La respuesta correcta es la (E).

29. Supongamos que ocurra en el año $2xyz$. Si $x = 0$ entonces no se puede escribir el mes. Si $x = 1$ entonces el mes debe ser $0z$, y al haber usado el 0, 1 y 2 no se puede escribir el día. O sea que el menor valor posible para x es 3, y para el año es 2345. Ahora el mes más pequeño sería el 01, pero no sirve pues entonces no se podría escribir el día. El siguiente disponible es 06, para el cual el día más pequeño disponible es el 17. luego la fecha es el 17.06.2345, respuesta (C).

30. El 2015 le da la mano a todos los demás, y el 1 sólo al 2015. El 2014 a todos menos al 1, y el 2 sólo al 2014 y al 2015. El 2013 a todos menos 1 y 2, y así sucesivamente hasta el 1008, que le da la mano a todos menos 1, 2, 3,..., 1007, es decir a 1009, 1010,..., 2016. Luego 2016 les da la mano a 1008,..., 2015, que son 1008. La respuesta correcta es la (A).

Capítulo 2

Prueba Regional

La prueba regional de la OJM consta de cuatro problemas, que se valoran en una escala de 1 a 7. Los participantes disponen de tres horas y media para resolverlos.

2.1. Prueba de Primer Año

Problema 1. Halle el mayor entero de tres dígitos que sea el producto de tres números primos diferentes.

Problema 2. Un triángulo equilátero tiene igual perímetro que un hexágono regular.

Si el área del hexágono es 15 cm^2, ¿cuál es el área del triángulo?

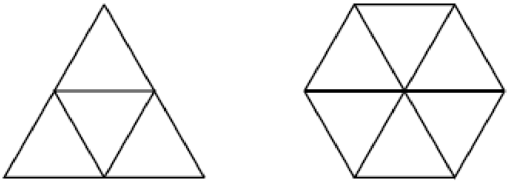
Problema 3. Cuando Juan nació, su abuela tenía 48 años. Hoy Juan está cumpliendo años. Si los años que está cumpliendo Juan son la tercera parte de los que tiene su abuela, ¿cuántos años tiene hoy la abuela?

Problema 4. En un torneo participaron seis ajedrecistas. Cada uno de ellos jugó exactamente una vez contra cada uno de sus contrincantes. Una victoria vale 2 puntos, un empate vale 1 punto y una derrota vale 0 puntos. Al final del torneo, uno de los participantes totalizó 8 puntos, otro 6 puntos, y los cuatro restantes obtuvieron n puntos cada uno. Determine el valor de n.

2.1.1. Soluciones

1. 999 no es pues $999 = 3^3 \cdot 37$. 998 tampoco pues $998 = 2 \cdot 499$, producto de dos primos. 997 es primo, y $996 = 2^2 \cdot 3 \cdot 83$. $995 = 5 \cdot 299$, producto de dos primos. Finalmente $994 = 2 \cdot 7 \cdot 71$, ése es.

2. Si el lado del hexágono es a, entonces el lado del triángulo debe ser $2a$. Pero el hexágono se descompone en 6 triangulitos equiláteros de lado a, mientras que el triángulo se descompone en cuatro de esos triangulitos. Luego el área del triángulo es $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ de la del hexágono, es decir $\frac{2}{3}15 = 10$ cm^2.



3. Si Juan está cumpliendo x años, su abuela tiene $48 + x$. Como $48 + x = 3x$ resulta $48 = 2x$ y $x = 24$. Luego la abuela tiene $48 + 24 = 72$ años.

4. Se jugaron $\frac{6\cdot 5}{2} = 15$ partidas (también se pueden contar como $5+4+3+2+1$), luego el total de puntos da $2 \cdot 15 = 30$ y $8 + 6 + 4n = 30$, de donde $n = 4$.

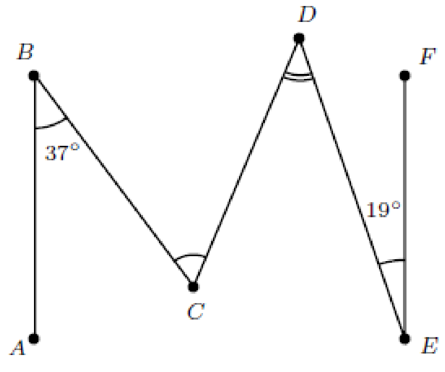
2.2. Prueba de Segundo Año

Problema 1. Idéntico al Problema 1 de Primer Año (ver pág. 28).

Problema 2. Ana tiene tres bolsas con caramelos. La primera bolsa contiene 27 caramelos menos que las otras dos bolsas juntas. La segunda bolsa contiene 35 caramelos menos que las otras dos bolsas juntas. ¿Cuántos caramelos contiene la tercera bolsa?

Problema 3. ¿Cuántos números enteros entre 2000 y 3000 tienen la suma de sus dígitos igual a 16?

Problema 4. Los segmentos AB y EF son paralelos. Como indica la figura $\angle ABC = 37°$ y $\angle DEF = 19°$. Calcule la diferencia de ángulos $\angle BCD - \angle CDE$.



2.2.1. Soluciones

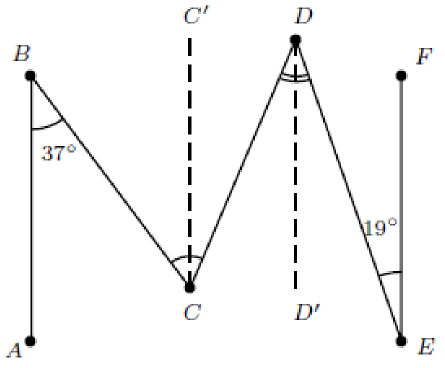
2. $x = y + z - 27$, $y = x + z - 35$, sumando resulta $x + y = y + x + 2z - 62$, de donde $0 = 2z - 62$, $2z = 62$, $z = 31$.

3. El primer dígito debe ser 2. Sea b el segundo dígito. Si $b = 0$ entonces los dos últimos dígitos deben sumar 14 y pueden ser 59, 68, 77, 86 o 95, 5 posibilidades. Análogamente si $b = 1$, los dos últimos deben sumar 13 y pueden ser 49, 58, 67, 76, 85 o 94, 6 posibilidades. Continuando así cuando b es 2, 3, 4 o 5 hay 7, 8, 9 o 10 posibilidades, respectivamente. Pero si $b = 6$, las posibilidades vuelven a ser 9: 08, 17, 26,..., 80. Para b igual a 7, 8 o 9 las posibilidades son 8, 7 o 6, respectivamente. Por lo tanto la respuesta es

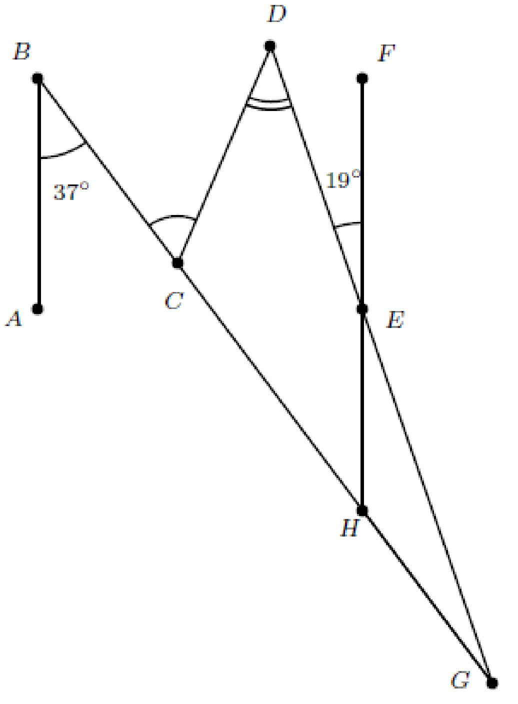
$$5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 = 75.$$

4. Trazando CC' y DD' paralelas a AB se tiene $\angle BCC' = \angle ABC = 37°$, $\angle D'DE = \angle DEF = 19°$ y $\angle C'CD = \angle CDD'$. Luego

$$\begin{aligned}\angle BCD - \angle CDE &= (\angle BCC' + \angle C'CD) - (\angle CDD' + \angle D'DE)\\ &= \angle BCC' - \angle CDD' = 37° - 19° = 18°.\end{aligned}$$



Solución alternativa:



Prolongar BC y DE hasta que se corten en G. Prolongar FE hasta cortar a CG en H. Como $\angle BCD$ es ángulo externo del triángulo CDG, se tiene $\angle BCD - \angle CDE = \angle CGD$. Y como $\angle CHE$ es ángulo externo del triángulo EHG, se tiene $\angle CGD = \angle CHE - \angle HEG$. Pero $\angle CHE = \angle CBA = 37°$ y $\angle HEG = \angle DEF = 19°$, luego $\angle CGD = \angle CHE - \angle HEG = 37° - 19° = 18°$.

2.3. Prueba de Tercer Año

Problema 1. Halle el mayor entero positivo que cumpla las tres condiciones siguientes:

a) Todos sus dígitos son diferentes.

b) Es múltiplo de 9.

c) La suma de sus dígitos es menor que 16.

Problema 2. Idéntico al Problema 2 de Segundo Año (ver pág. 29).

Problema 3. Idéntico al Problema 3 de Segundo Año (ver pág. 29).

Problema 4. Idéntico al Problema 4 de Segundo Año (ver pág. 30).

2.3.1. Soluciones

1. Como es múltiplo de 9, la suma de sus dígitos también lo es, y como es menor que 16 sólo puede ser 9. Si el número tiene 5 o más dígitos diferentes, su suma sería al menos $0+1+2+3+4=10$. Por lo tanto puede tener a lo suma cuatro dígitos. Si a es uno de los dígitos, la suma de los otros tres es al menos $0+1+2=3$, luego $a \leq 6$. La respuesta es 6210.

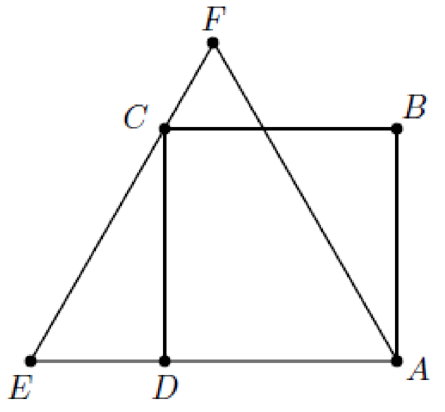
2.4. Prueba de Cuarto Año

Problema 1. Un entero mayor que 10 se dice *bueno* si sus dígitos se pueden dividir en dos grupos tales que la suma de los dígitos de uno de los grupos es igual a la suma de los dígitos del otro grupo. Por ejemplo 22 es bueno, pues $2=2$; 3454 es bueno pues $3+5=4+4$; 29403 es bueno, pues $9+0=2+3+4$. Halle el menor número natural n tal que n es bueno y $n+1$ también es bueno.

Problema 2. Resuelva el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2^x - 2^y &= 2016, \\ x - y &= 6. \end{aligned}$$

Problema 3. $ABCD$ es un cuadrado y AEF es un triángulo equilátero. Si el área del cuadrado es 6 cm^2, ¿cuál es el área del triángulo?



Problema 4. ¿Cuántos enteros positivos múltiplos de 9 están formados por 7 dígitos no nulos diferentes?

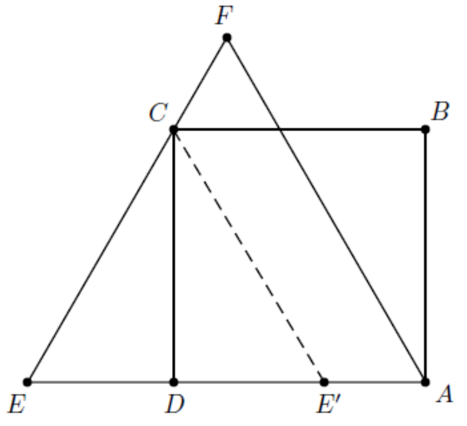
2.4.1. Soluciones

1. La suma de los dígitos de un número bueno n debe ser par. Luego el número debe terminar en 9 pues de lo contrario la suma de dígitos de $n+1$ sería impar. Con dos dígitos la única posibilidad es 99, pero $99+1=100$ no es bueno. Con tres dígitos las posibilidades son 189, 279, 369, 459, 549, 639, 729, 819 y 909. Ni 190 ni 280 ni 370 ni 460 son buenos, pero 550 sí es bueno. Luego la respuesta es 549.

2. $x=y+6$, $2^x-2^y=2^{y+6}-2^y=(2^6-1)2^y=63\cdot 2^y$, $2016=63\cdot 32$, $63\cdot 2^y=63\cdot 32$, $2^y=32$, de donde $y=5$ y $x=y+6=11$.

3. El lado del cuadrado mide $\sqrt{6}$ cm. En el triángulo rectángulo EDC, por Pitágoras, $EC^2=ED^2+DC^2=ED^2+6$. Si E' es el simétrico de E respecto a D entonces es claro que $EE'C$ es equilátero, luego $EC=EE'=2ED$ y nos queda $(2ED)^2=ED^2+6$, de donde $3ED^2=6$ y $ED=\sqrt{2}$. El lado del triángulo AEF mide entonces $EA=ED+DA=\sqrt{2}+\sqrt{6}$ cm. Como el área de un triángulo equilátero de lado a es $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, el área de AEF es entonces

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(8+2\sqrt{12})=\sqrt{3}(2+\sqrt{3})=3+2\sqrt{3}.$$



4. La suma de 7 dígitos no nulos diferentes es como mínimo $1+2+3+4+5+6+7=28$ y como máximo $3+4+5+6+7+8+9=42$. Como esa suma debe ser múltiplo de 9, debe ser 36. Como $1+2+3+4+5+6+7+8=36$, la suma 36 no se puede lograr con 7 sumandos a menos que intervenga el 9. Si interviene el 9, los otros 6 números deben sumar 27, y los dos dígitos no nulos no usados deben sumar 9, es decir que pueden ser 1 y 8, 2 y 7, 3 y 6 ó 4 y 5. Se tienen así las siguientes posibilidades: $2+3+4+5+6+7+9$, $1+3+4+5+6+8+9$, $1+2+4+5+7+8+9$ y $1+2+3+6+7+8+9$. Entonces los números que cumplen la condición son los que se obtienen permutando los dígitos de cada uno de los cuatro grupos anteriores, es decir que hay $4 \cdot 7! = 4 \cdot 5040 = 20160$.

2.5. Prueba de Quinto Año

La prueba de Quinto Año fue idéntica a la de Cuarto Año (ver pág. 32).

Capítulo 3

Prueba Final OJM 2016

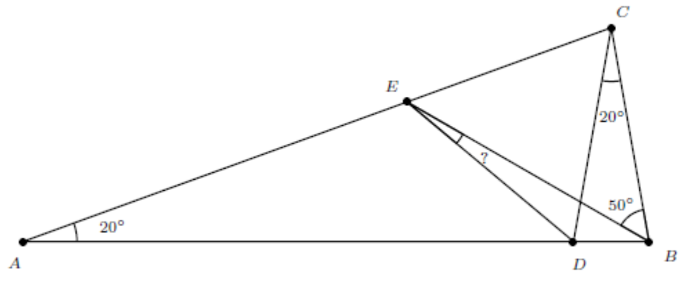
La prueba final de la OJM 2016 se realizó el sábado 11 de junio en la Universidad Metropolitana, en Caracas. La prueba constó de cuatro problemas, cada uno de ellos con un valor de 7 puntos. Los participantes dispusieron de tres horas y media para resolverlos.

3.1. Prueba de Primer Año

Problema 1. En cierta isla, los habitantes son de dos tipos: los *honestos*, que siempre dicen la verdad, y los *embusteros*, que siempre mienten. Un día se encuentran reunidas Ana, Berta y Claudia, tres habitantes de la isla. Ana dice "Las tres somos embusteras". Berta dice "Las tres somos honestas". Claudia permanece callada. ¿Qué es cada una de ellas?

Problema 2. Una caja contiene pelotas amarillas, azules y rojas. Si se extraen 10 pelotas cualesquiera, entre ellas siempre hay al menos una de cada color. ¿Cuál es el máximo número de pelotas que puede haber en la caja?

Problema 3. Sea ABC un triángulo con $AB = AC$ y $\angle BAC = 20°$. Sean D y E puntos en los lados AB y AC, respectivamente, tales que $\angle CBE = 50°$ y $\angle BCD = 20°$. ¿Cuánto mide el ángulo $\angle DEB$?



Problema 4. Carlos dividió 123 entre cierto entero positivo n, y obtuvo como resto 17. ¿Qué resto obtendrá si divide 2016 entre n?

3.1.1. Soluciones

1. Si Ana fuese honesta entonces las tres serían embusteras, incluida Ana, lo cual es una contradicción. Luego Ana es embustera. Berta también es embustera, ya que como al menos Ana es embustera no es verdad que las tres sean honestas. Finalmente Claudia debe ser honesta, ya que si fuese embustera, las tres lo serían, y Ana habría dicho la verdad.

2. El máximo es 13, que se puede lograr por ejemplo con 5 pelotas amarillas, 4 azules y 4 rojas. Supongamos que los números de pelotas de cada color son x, y y z, y que $x \leq y \leq z$. Si $y + z \geq 10$ se podrían extraer 10 pelotas de sólo dos colores, luego $y + z \leq 9$. Y entonces $y \leq 4$ (pues si $y \geq 5$ entonces $y + z \geq y + y \geq 10$). Por lo tanto $x + y + z \leq y + (y + z) \leq 4 + 9 = 13$.

3. Como ABC es isósceles se tiene $\angle ABC = \angle ACB = (180° - 20°)/2 = 80°$. Entonces $\angle BDC = 180° - \angle DBC - \angle DCB = 180° - 80° - 20° = 80°$ y BDC es isósceles, luego $BC = DC$. Además $\angle ECD = \angle ECB - \angle DCB = 80° - 20° = 60°$. Por otra parte $\angle BEC = 180° - 50° - 80° = 50°$ y BEC es isósceles, luego $EC = BC$. Esto significa que CDE es equilátero, por tener $EC = DC$ y $\angle ECD = 60°$. Por lo tanto $\angle DEC = 60°$, de donde $\angle DEB = \angle DEC - \angle BEC = 60° - 50° = 10°$.

4. $123 = qn + 17$, de donde $qn = 123 - 17 = 106$. Pero 106 sólo se factoriza como $1 \cdot 106$ o como $2 \cdot 53$. Como n debe ser mayor que 17, debe ser $n = 106$ o $n = 53$. Verificación: $123 = 1 \cdot 106 + 17 = 2 \cdot 53 + 17$. Pero $2016 = 19 \cdot 106 + 2 = 38 \cdot 53 + 2$, así que en cualquiera de los dos casos el resto buscado es 2.

3.2. Prueba de Segundo Año

Problema 1. Idéntico al Problema 2 de Primer Año (ver pág. 35).

Problema 2. Idéntico al Problema 3 de Primer Año (ver pág. 36).

Problema 3. Idéntico al Problema 4 de Primer Año (ver pág. 36).

Problema 4. Un supermercado recibe varios camiones con cajas de frutas. Cada caja contiene frutas de un solo tipo, que puede ser mangos, fresas, naranjas o peras. Cada camión trae el mismo número de cajas. La fruta de la que más cajas se han recibido es el mango. Del total de cajas recibidas, uno de los camiones ha traído exactamente $1/3$ de las cajas de mangos, $1/5$ de las de fresas, $1/6$ de las de naranjas y $1/7$ de las de peras. ¿Cuántos camiones llegaron?

3.2.1. Soluciones

4. El número de cajas con mangos debe ser múltiplo de 3, digamos entonces que es $3m$ (con n natural). Análogamente sean $5f$, $6n$ y $7p$ el número de cajas de fresas, naranjas y peras, respectivamente. Uno de los camiones (y por lo tanto todos) traen un total de $m+f+n+p$ cajas. El número total de cajas es $3m+5f+6n+7p$, luego si son k camiones debe cumplirse $k(m+f+n+p) = 3m+5f+6n+7p$. De esta igualdad resulta obvio que $3 < k < 7$, luego k sólo puede ser 4, 5 ó 6.

Si fuese $k = 6$ entonces $6(m+f+n+p) = 3m+5f+6n+7p$, de donde $3m+f = p$ y habría muchas más cajas de peras ($7p$) que de mangos ($3m$).

Si fuese $k = 5$ entonces de $5(m+f+n+p) = 3m+5f+6n+7p$ resulta $2m = n+2p$. Pero esto es imposible, pues como $3m > 6n$ se tiene $m > 2n$, y entonces $4m = 2n+4p < m+4p$ y $3m < 4p < 7p$, y habría más cajas de peras que de mangos.

Sólo queda la posibilidad $k = 4$, que efectivamente puede darse, por ejemplo así: 3 camiones cargados cada uno con 6 cajas de mangos, una de fresas, una de naranjas y una de peras, y un cuarto camión con 2 cajas de fresas, 3 de naranjas y 4 de peras.

3.3. Prueba de Tercer Año

Problema 1. Idéntico al Problema 2 de Primer Año (ver pág. 35).

Problema 2. Halle todos los pares de números primos (p, q), con $p < q$, tales que los números $p+2q$, $2p+q$ y $p+q-22$ también sean primos.

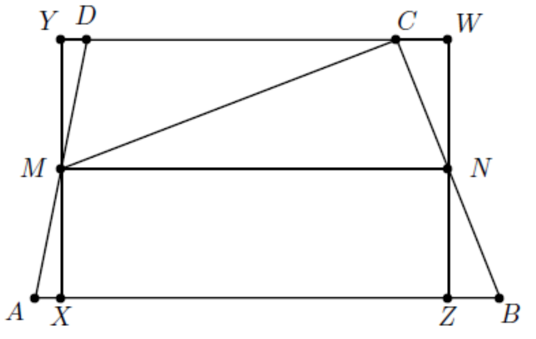
Problema 3. Idéntico al Problema 4 de Segundo Año (ver pág. 37).

Problema 4. $ABCD$ es un trapecio con bases AB y CD. M es el punto medio del lado AD. Se sabe que el ángulo $\angle MCB$ es recto, que $MC = 7$ cm y que $BC = 5$ cm. Calcule el área del trapecio.

3.3.1. Soluciones

2. Si $p = 2$ entonces $p+2q$ sería par y mayor que 2, y no sería primo. Por lo tanto p y q son impares y $p+q-22$ es par. Como $p+q-22$ debe ser primo, la única posibilidad es que $p+q-22 = 2$, es decir $p+q = 24$. Luego (p, q) ppdría ser $(5, 19)$, $(7, 17)$ o $(11, 13)$. Como $5+2\cdot 19 = 43$ y $2\cdot 5+19 = 29$ son primos, $(5, 19)$ es una solución. Como $7+2\cdot 17 = 41$ y $2\cdot 7+17 = 31$ son primos, $(7, 17)$ es otra solución. Pero $2\cdot 11+13 = 35$ no es primo, y se descarta $(11, 13)$. Luego las soluciones son $(5, 19)$ y $(7, 17)$.

4. Sea N el punto medio de BC. Trazando perpendiculares a las bases como se ve en la figura, y usando [] para denotar áreas, se tiene que $[AXM] = [DYM]$ y $[BZN] = [CWN]$.



Por lo tanto el área del trapecio es igual a la del rectángulo $XZWY$. Si la altura del trapecio es h, entonces su área es

$$[ABCD] = MNh.$$

(Esto último es conocido: el área de un trapecio es igual al producto de su paralela media por su altura. Si un estudiante cita este resultado es suficiente.)

Ahora bien, el área del triángulo MNC es $[MNC] = \frac{1}{2}MN\frac{h}{2} = \frac{1}{4}MNh$. Pero como MNC es rectángulo esa área es también

$$\frac{MC\cdot CN}{2} = \frac{7\cdot\frac{5}{2}}{2} = \frac{35}{4}.$$

Es decir que $\frac{1}{4}MNh = \frac{35}{4}$, de donde $MNh = 35$ y por lo tanto $[ABCD] = 35$.

3.4. Prueba de Cuarto Año

Problema 1. A una fiesta asisten 4 niñas, cada una acompañada de un hermano. Las niñas se llaman Ana, Berta, Carmen y Dora. Sus hermanos se llaman, en algún orden, Juan, Luis, Mario y Pedro. De una bandeja con 38 caramelos, Ana tomó uno, Berta dos, Carmen tres y Dora cuatro. Juan tomó el mismo nímero de caramelos que su hermana, Luis tomó el doble que su hermana, Mario tomó el triple que su hermana y Pedro tomó el cuádruple que su hermana. La bandeja quedó vacía. Determine el nombre del hermano de cada niña.

Problema 2. Idéntico al Problema 2 de Tercer Año (ver pág. 37).

Problema 3. Halle todas las soluciones reales (x, y) del sistema de ecuaciones

$$x - \frac{1}{y} = \frac{8}{x},$$
$$y - \frac{1}{x} = \frac{8}{y}.$$

Problema 4. Idéntico al Problema 4 de Tercer Año (ver pág. 37).

3.4.1. Soluciones

1. Sean x, y, z, w los números de caramelos que tomaron las hermanas de Juan, Luis, Mario y Pedro, respectivamente. Entonces x, y, z, w son, en algún orden, 1, 2, 3 y 4. Por lo tanto $x + y + z + w = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Entre los cuatro hermanos tomaron los 28 caramelos restantes, es decir que $x + 2y + 3z + 4w = 28$. Restando miembro a miembro queda $y + 2z + 3w = 18$. Como $y + 2z \leq 3 + 2 \cdot 4 = 11$, w no puede ser 1 ni 2.

Si $w = 4$ entonces $y + 2z = 18 - 3 \cdot 4 = 6$. Luego y es par y debe ser $y = 2$, de donde $2z = 4$ y $z = 2$, lo cual es imposible pues se repite el 2.

Si $w = 3$ entonces $y + 2z = 18 - 3 \cdot 3 = 9$. Luego y es impar y debe ser $y = 1$, de donde $z = 4$ y $x = 2$. Tenemos así una solución, en la cual las hermanas de Juan, Luis, Mario y Pedro son, respectivamente, Berta, Ana, Dora y Carmen.

3. Multiplicando las ecuaciones por xy nos queda

$$x^2y - x = 8y,$$
$$xy^2 - y = 8x.$$

y sumando miembro a miembro resulta $x^2y - x + xy^2 - y = 8y + 8x$, o sea

$$xy(x + y) = 9(x + y).$$

Si $x + y \neq 0$ entonces $xy = 9$, y sustituyendo en $x^2y - x = 8y$ nos queda $9x - x = 8y$, es decir $8x = 8y$ y $x = y$.

Análogamente, restando miembro a miembro resulta $x^2y - x - xy^2 + y = 8y - 8x$, o sea

$$xy(x - y) = 7(y - x).$$

Si $x \neq y$ entonces $xy = -7$, y sustituyendo en $x^2y - x = 8y$ nos queda $-7x - x = 8y$, es decir $-8x = 8y$ y $x = -y$.

Es decir que cualquier solución debe cumplir $x = -y$ o $x = y$.

Si $x = y$ entonces $x - \frac{1}{x} = \frac{8}{x}$, es decir $x = \frac{9}{x}$, $x^2 = 9$, y tenemos las soluciones $(3, 3)$ y $(-3, -3)$.

Si $x = -y$ entonces $x + \frac{1}{x} = \frac{8}{x}$, es decir $x = \frac{7}{x}$, $x^2 = 7$, y tenemos las soluciones $(\sqrt{7}, -\sqrt{7})$ y $(-\sqrt{7}, \sqrt{7})$.

Es decir que hay cuatro soluciones: $(3, 3)$, $(-3, -3)$. $(\sqrt{7}, -\sqrt{7})$ y $(-\sqrt{7}, \sqrt{7})$.

3.5. Prueba de Quinto Año

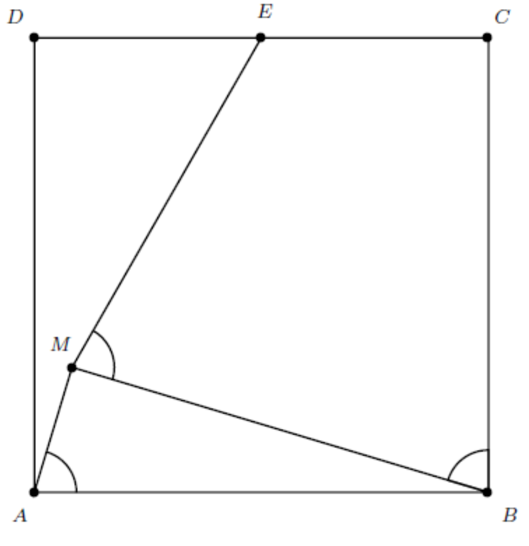
Problema 1. Idéntico al Problema 1 de Cuarto Año (ver pág. 38).

Problema 2. ¿Cuál es el menor número natural que se puede expresar como la suma de 9 naturales consecutivos y también como la suma de 10 naturales consecutivos?

Nota: “natural” es lo mismo que “entero positivo”.

Problema 3. Idéntico al Problema 3 de Cuarto Año (ver pág. 39).

Problema 4. Sea $ABCD$ un cuadrado, E el punto medio del lado CD y M un punto interior del cuadrado tal que $\angle MAB = \angle MBC = \angle BME$. Calcular la medida del ángulo $\angle MAB$.



3.5.1. Soluciones

2. Supongamos que $a+(a+1)+\cdots+(a+8)=b+(b+1)+\cdots+(b+9)$. Entonces $9(2a+8)/2=10(2b+9)/2$, o $9(a+4)=5(2b+9)$. Luego 9 divide a $2b+9$, y por lo tanto a $2b$ y a b. Es decir que el menor valor posible para b es 9. Con $b=9$ se tiene $9(a+4)=5(2b+9)=5\cdot 27$, de donde $a+4=15$ y $a=11$. El número buscado es por lo tanto $9\cdot 15=5\cdot 27=135$. Verificación: $11+12+\cdots+19=135$, $9+10+\cdots+18=135$.

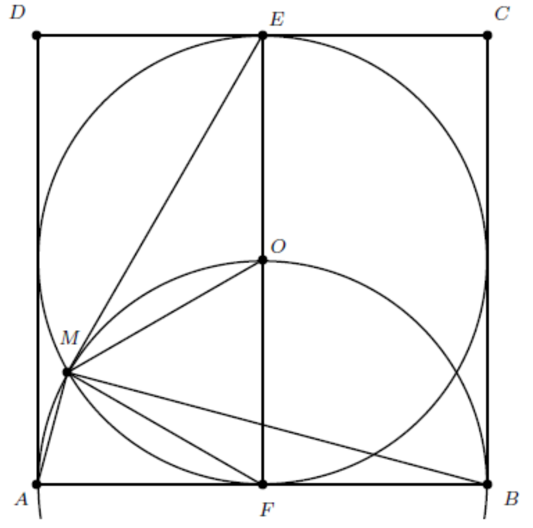
Solución alternativa: $a+(a+1)+\cdots+(a+8)=9(2a+8)/2=9(a+4)$ y $a+(a+1)+\cdots+(a+8)+(a+9)=10(2a+9)/2=5(2a+9)$. Una tabla de estas dos funciones nos da;

a	$9(a+4)$	$5(2a+9)$
1	45	55
2	54	65
3	63	75
4	72	85
5	81	95
6	90	105
7	99	115
8	108	125
9	117	135
10	126	145
11	135	155

4. Como $\angle MAB+\angle MBA=\angle MBC+\angle MBA=\angle CBA=90°$, debe ser $\angle AMB=90°$ y M pertenece a la circunferencia de diámetro AB y centro el punto medio F de AB. Como $FM=FB$, $\triangle FMB$ es isósceles y $\angle FMB=\angle FBM$. Entonces

$$\angle FME=\angle FMB+\angle MBE=\angle FBM+\angle MBC=90°,$$

de donde M pertenece a la circunferencia de diámetro FE, cuyo centro es el centro O del cuadrado. Entonces $OM=OF=FM$ y $\triangle OMF$ es equilátero, de donde $\angle OFM=60°$, $\angle MFA=30°$ y $\angle MAB=(180°-30°)/2=75°$.


D
E
C
O
M
A
F
B

Capítulo 4

Olimpiada de Mayo

La Olimpiada de Mayo es una competencia matemática internacional coordinada por la Olimpiada Matemática Argentina (OMA). Consiste en una prueba escrita de 3 horas de duración y consta de dos niveles: el primer nivel es para jóvenes que no hayan cumplido 13 años hasta el 31 de diciembre del año anterior a la prueba, y el segundo nivel es para jóvenes que no hayan cumplido 15 años hasta el 31 de Diciembre del año anterior a la prueba.

4.1. Problemas del Primer Nivel

Problema 1. En una hoja están escritos siete números enteros positivos diferentes. El resultado de la multiplicación de los siete números es el cubo de un número entero. Si el mayor de los números escritos en la hoja es N, determinar el menor valor posible de N. Mostrar un ejemplo para ese valor de N y explicar por qué no es posible que N sea más chico.

Problema 2. En una competición deportiva en la que se realizan varias pruebas, solo participan los tres atletas A, B, C. En cada prueba, el ganador recibe x puntos, el segundo y puntos y el tercero z puntos. No hay empates, y los números x, y, z son enteros positivos distintos con $x > y > z$. Al terminar la competición resulta que A ha acumulado 20 puntos, B ha acumulado 10 puntos y C ha acumulado 9 puntos. Sabemos que el atleta A fue segundo en la prueba de 100 metros. Determinar cuál de los tres atletas resultó segundo en la prueba de salto.

Problema 3. En el triángulo ABC se marcaron el punto D en el lado BC y el punto E en el lado AC de manera que $CD = DE = EB = BA$. El ángulo $\angle ACB$ mide $20°$. Calcular la medida del ángulo $\angle ADE$.

Problema 4. Dado un tablero de 3×3 se quiere escribir en sus casillas los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y un número entero positivo M, no necesariamente distinto de los anteriores. El objetivo es que la suma de los tres números de cada fila sea la misma.

a) Hallar todos los valores de M para los que esto es posible.

b) ¿Para cuáles de los valores de M hallados en a) es posible acomodar los números de modo que no solo las tres filas sumen lo mismo sino que también las tres columnas sumen lo mismo?

Problema 5. En el pizarrón están escritos los 400 números enteros 1, 2, 3,. . . , 399, 400. Luis borra 100 de estos números, luego Martín borra otros 100. Martín gana si la suma de los 200 números borrados es igual a la suma de los no borrados; en otro caso, gana Luis. ¿Cuál de los dos tiene estrategia ganadora? ¿Y si Luis borra 101 números y Martín borra 99? En cada caso, explicar cómo puede asegurarse la victoria el jugador que tiene la estrategia ganadora.

4.2. Soluciones del Primer Nivel

1. Consideremos el siguiente ejemplo para $N = 12$: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12. El producto de esos siete números es $2^9 \cdot 3^3$, un cubo perfecto. Supongamos que algún valor $N < 12$ sea posible, entonces tenemos que escoger siete elementos del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ cuyo producto sea un cubo perfecto. Si alguno de esos números es 5 o 10, el factor primo 5 debería aparecer al menos tres veces en ese conjunto, pero eso no es posible. De forma similar, es imposible que alguno de esos números sea 7 u 11. Luego, los siete elementos escogidos deberían ser 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, pero el producto de esos siete números es $2^7 \cdot 3^4$, que no es un cubo perfecto.

2. Sea n el número de pruebas realizadas. Sabemos que $n \geq 2$. En cada prueba se otorgan $x + y + z$ puntos y por tanto la suma de puntos obtenidos por los tres atletas es $n(x + y + z) = 20 + 10 + 9 = 39$. Luego $x + y + z$ es un divisor de $39 = 3 \cdot 13$. Pero $x + y + z \geq 1 + 2 + 3 = 6$, luego $x + y + z = 13$ y $n = 3$.

Una de las tres puntuaciones obtenidas por A fue y. Si A hubiera resultado tercero en alguna de las otras dos pruebas, tendríamos que $20 \leq x + y + z = 13$, absurdo.

Si A hubiera sido segundo en las tres pruebas, tendríamos $20 = 3y$, que también es imposible.

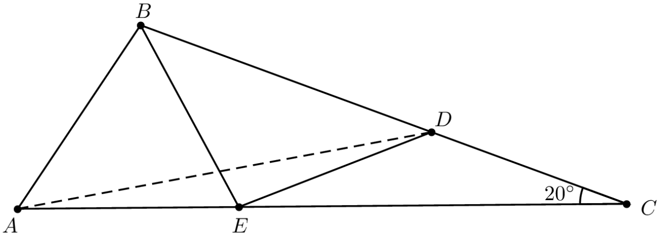
Si A hubiera sido segundo en dos de las tres pruebas y ganador de la tercera entonces $x+2y = 20$, y restando $x+y+z = 13$ resulta $y-z = 20-13 = 7$, de donde $y \geq 7+z \geq 8$, $x \geq 9$ y $x + y \geq 17 > 13$, absurdo.

La única posibilidad que queda es que A haya ganado dos de las pruebas y haya sido segundo en la restante. Entonces $2x+y = 20$, y restando $x+y+z = 13$ resulta $x-z = 7$. Luego $x \geq 7 + z \geq 8$, de donde $y = 20 - 2x$ debe ser un número par no superior a 4, es decir que $y = 2$ o $y = 4$.

Si $y = 2$ entonces necesariamente $z = 1$ y $x = 13 - 1 - 2 = 10$, imposible pues en este caso la suma de puntos de A sería $2x + y = 22 \neq 20$. Por lo tanto $y = 4$, de donde $2x = 20 - y = 16$, $x = 8$ y $z = 1$.

Ahora bien, la única forma de que C haya acumulado 9 puntos en las tres pruebas es que haya quedado segundo en dos de ellas y tercero en la restante ($4+4+1 = 9$). Como A quedó segundo en la de 100 metros, el que quedó segundo en la de salto fue C.

3. Por las condiciones del enunciado, los triángulos ABE, BED y EDC son isósceles, y los ángulos $\angle DCE$ y $\angle DEC$ son iguales e iguales a $20°$.



Se tiene $\angle BDE = \angle DCE + \angle DEC = 40°$ pues $\angle BDE$ es exterior al triángulo CDE, y como $\angle EDB = \angle EBD$ tenemos $\angle BED = 180° - (\angle EDB + \angle EBD) = 100°$. Luego $\angle AEB = 180° - \angle BED - \angle DEC = 180° - 100° - 20° = 60°$, y como $\angle BAE = \angle AEB$, resulta $\angle ABE = 180° - (\angle BAE + \angle AEB) = 60°$. Luego el triángulo ABE es equilátero, y $AE = BE = ED$, con lo que el triángulo ADE es isósceles con $AE = DE$. Entonces

$$\angle ADE = \angle DAE = \frac{1}{2}(180° - (\angle BEA + \angle BED)) = \frac{1}{2}(180° - (60° + 100°)) = 10°.$$

4. Sea S el valor común de la suma de las tres filas. Entonces la suma de todos los números del tablero es $3S$. Por otro lado, esta suma es igual a $1 + 2 + \cdots + 8 + M = 36 + M$. Luego $3S = 36 + M$, lo que implica que M es divisible entre 3. Si los otros dos números en la fila de M son x e y, entonces los seis números de las otras dos filas suman $2S = 36 - x - y \leq 36 - 1 - 2 = 33$, de donde $S \leq 16$ y $M = 3S - 36 \leq 48 - 36 = 12$. Entonces M sólo puede ser 3, 6, 9 o 12. Todos ellos son posibles, como se muestra en los siguientes ejemplos:

1 8 4	6 2 6	9 1 5	12 1 3
7 3 3	1 8 5	4 8 3	8 2 6
5 2 6	7 4 3	2 6 7	4 5 7

Así, la respuesta a la parte a) es 3, 6, 9 y 12. Notemos que en las tablas que corresponden a $M = 3, 6, 9$ no solo las sumas de las filas son iguales, sino también las de las columnas. Pero tal ordenamiento es imposible para $M = 12$. En ese caso $3S = 36+M = 48$ y $S = 16$. Entonces los dos números de la fila del 12 suman 4, lo cual solo es posible si son 1 y 3. Luego 1 y 3 no están en la columna de 12, y la suma de esta columna no es 16. En conclusión la respuesta a b) es 3, 6 y 9.

5. Martín puede ganar. Los números $1, 2, \ldots, 400$ se pueden dividir en 200 pares con suma 401 en cada par: $\{1, 400\}$, $\{2, 399\}, \ldots, \{200, 201\}$. Supongamos que entre los 100 números que borra Luis hay exactamente $2k$ que forman pares completos, con $0 \leq k \leq 50$. Entonces si x es uno de los restantes $100 - 2k$ números borrados, el segundo número $x' = 401 - x$ del par de x no fue borrado, de modo que Martín borra los $100 - 2k$ respectivos números x', formando $100 - 2k$ nuevos pares completos. Además Martín tiene que borrar otros $100 - (100 - 2k) = 2k$ números más, que es una cantidad par. Como todos los números borrados hasta ahora están en pares, Martín puede borrar k pares completos más. De esta manera, entre los dos han borrado en total $k + (100 - 2k) + k = 100$ pares completos. Los números de estos pares suman $100 \cdot 401$, exactamente lo mismo que la suma de los números no borrados, que también forman 100 pares completos. Luego Martín gana.

En el segundo caso Luis gana trivialmente. Por ejemplo Luis puede borrar los primeros 101 números $1, 2, \ldots, 101$. Luego, cualesquiera 99 números que borre Martín, la suma de todos los números borrados es a lo sumo

$$\begin{aligned}
&(1 + 2 + \cdots + 101) + (302 + 303 + \cdots + 400)\\
&= (1 + 400) + (2 + 399) + \cdots + (99 + 302) + 100 + 101\\
&= 99 \cdot 401 + 201 < 100 \cdot 401,
\end{aligned}$$

y Luis gana.

4.3. Problemas del Segundo Nivel

Problema 1. Decimos que un número de cuatro cifras $\overline{abcd}$, que comienza en a y termina en d, es *intercambiable* si existe un entero $n > 1$ tal que $n \times \overline{abcd}$ es un número de cuatro cifras que comienza en d y termina en a. Por ejemplo, 1009 es intercambiable ya que $9 \times 1009 = 9081$. Hallar el mayor número intercambiable.

Problema 2. ¿Cuántas casillas se deben pintar como mínimo en un tablero de 5×5 de tal modo que en cada fila, en cada columna y en cada cuadrado de 2×2 haya al menos una casilla pintada?

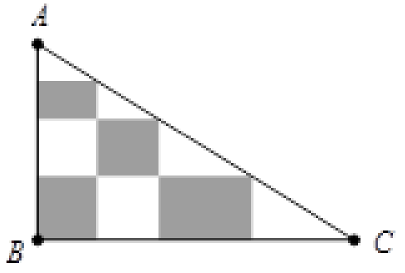
Problema 3. Decimos que un número entero positivo es *cua-divi* si es divisible por la suma de los cuadrados de sus dígitos, y además ninguno de sus dígitos es igual a cero.

a) Encontrar un número cua-divi tal que la suma de sus dígitos sea 24.

b) Encontrar un número cua-divi tal que la suma de sus dígitos sea 1001.

Problema 4. En un triángulo ABC, sean D y E puntos de los lados BC y AC, respectivamente. Los segmentos AD y BE se cortan en O. Supongamos que la base media del triángulo, paralela a AB, divide al segmento DE por la mitad. Demostrar que el triángulo ABO y el cuadrilátero $ODCE$ tienen áreas iguales.

Problema 5. Rosa y Sara juegan con un triángulo ABC, rectángulo en B. Rosa comienza marcando dos puntos interiores de la hipotenusa AC, luego Sara marca un punto interior de la hipotenusa AC distinto de los de Rosa. Luego, desde estos tres puntos se trazan las perpendiculares a los lados AB y BC, formándose la siguiente figura.



Sara gana si el área de la superficie sombreada es igual al área de la superficie no sombreada; en otro caso gana Rosa. Determinar quién de las dos tiene estrategia ganadora.

4.4. Soluciones del Segundo Nivel

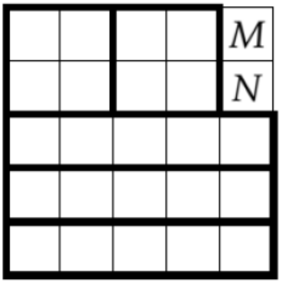
1. Sea $\overline{abcd}$ un número intercambiable, donde $n \times \overline{abcd}$ es de la forma $\overline{d**a}$. Como $n \geq 2$, entonces $\overline{abcd} < 5000$ y $a \leq 4$.

Si $a = 4$ entonces $n = 2$ y $d = 8$ ó 9, pero en ninguno de estos casos nd termina en a.

Si $a = 3$ entonces $n = 3$ (ya que nd debe ser impar) y $d = 9$, pero no se cumple que nd termine en a.

Si $a = 2$, entonces n puede ser 2, 3 ó 4. Si $n = 2$ entonces $d = 4$ ó 5 y si $n = 3$, entonces $d = 6$, 7 u 8, pero en ninguno de estos casos se cumple que nd termine en a. Luego, el único caso que queda es $n = 4$ y $d = 8$, donde el mayor valor que puede tomar $n \times \overline{abcd}$ es 8992, y por ende el mayor valor de $\overline{abcd}$ es $8992/4 = 2248$, que claramente cumple con las condiciones.

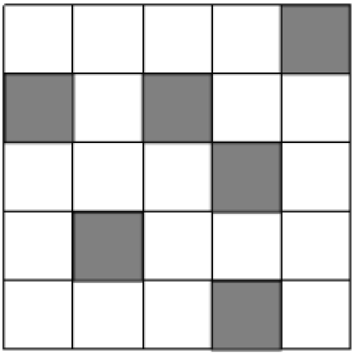
2. Sea n la cantidad de casillas pintadas. Como en cada fila debe haber al menos una casilla pintada, entonces $n \geq 5$. Supongamos que $n = 5$. En ese caso, en cada fila y en cada columna debe haber exactamente una casilla pintada. Dividamos el tablero de la siguiente manera:



Tenemos 5 regiones marcadas con línea gruesa. Si alguna de esas regiones tuviera más de 1 casilla pintada, habría en total más de 5 casillas pintadas. Como hay 5 casillas pintadas en total, concluimos que cada una de esas regiones tiene exactamente una casilla pintada. En particular, las casillas M y N no pueden estar pintadas. Si consideramos todas las simetrías y rotaciones de las casillas M y N, obtenemos que las siguientes casillas, marcadas con una X, no deben estar pintadas:

X	X	B	X	X
X				X
A				C
X				X
X	X	D	X	X

Por lo cual las casillas A, B, C y D deben estar necesariamente pintadas, lo cual es una contradicción, pues la fila central tendría dos o más casillas pintadas. Luego, n es al menos 6. Un ejemplo para $n = 6$ es el siguiente:



3. a) Vamos a buscar un número cua-divi tal que la suma de los cuadrados de sus dígitos es igual a 32. Comencemos con un número de 24 dígitos todos iguales a 1, al cual le hacemos la siguiente operación: cambiamos dos unos por un dos. Con cada operación se mantiene la suma pero la suma de los cuadrados de los dígitos se incrementa en 2. Como queremos que la suma de los cuadrados de los dígitos aumente de 24 a 32, hacemos la operación 4 veces. Luego tendríamos el número

$$2222\underbrace{11\ldots11}_{16 \text{ unos}}.$$

Ahora vamos a reordenar los dígitos de ese número para que sea divisible entre 32. Como debe ser par, debe terminar en 2. Como es múltiplo de 4 debe terminar en 12 (pues no puede terminar en 22). Como es múltiplo de 8 debe terminar en 112 (pues no puede terminar en 212), y así sucesivamente completamos los 5 últimos dígitos: 22112, con lo que un posible número sería

$$2\underbrace{11\ldots11}_{14 \text{ unos}}22112.$$

Como 22112 es múltiplo de 32, aseguramos que el número anterior es cua-divi pues es múltiplo de 32.

b) Recordemos que un número es divisible por 5^n si y solo si el número formado por sus últimos n dígitos es múltiplo de 5^n. Vamos a buscar un número cua-divi tal que la suma de los cuadrados de sus dígitos sea $5^5 = 3125$. Comenzamos fijando los últimos cinco dígitos del número; estos dígitos deben formar un múltiplo de 5^5. Intentamos con $5^6 = 15625$ que cumple que ninguno de sus dígitos es igual a cero. Ahora necesitamos colocar algunos dígitos adicionales tales que su suma sea $1001-(1+5+6+2+5) = 982$ y la suma de sus cuadrados sea $3125-(1^2+5^2+6^2+2^2+5^2) = 3034$. Partimos del número $\underbrace{11\ldots11}_{982 \text{ unos}}$, al cual le aplicamos la operación de cambiar cuatro unos por un cuatro; cada operación mantiene la suma de dígitos pero la suma de los cuadrados aumenta en 12. Como $3034 - 982 = 2052$ es múltiplo de 12, podemos hacer exactamente $2052/12 = 171$ operaciones para que la suma de los cuadrados de los dígitos sea 3034. Luego tendríamos el número

$$\underbrace{444\ldots44}_{171 \text{ cuatros}}\underbrace{111\ldots11}_{298 \text{ unos}}15625,$$

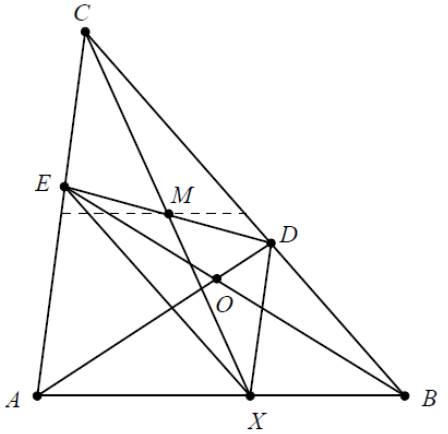
que cumple lo pedido.

4. Escribimos el área del triángulo ABC como la suma de las áreas de tres triángulos y un cuadrilátero:

$$[ABC] = [AEO] + [BDO] + [ABO] + [ODCE].$$

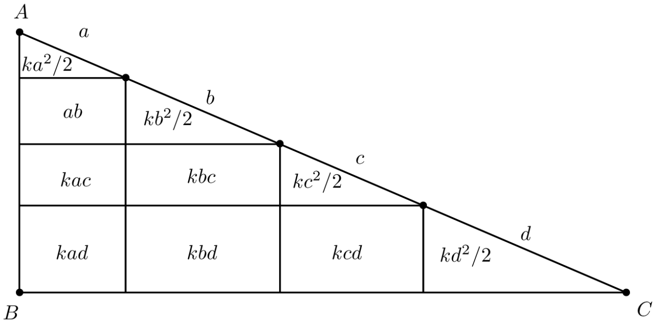
La igualdad $[ABO] = [ODCE]$ es equivalente a

$$[ABC] = [AEO] + [BDO] + 2[ODCE] = [ACD] + [BCE]. \tag{1}$$



Demostraremos (1). El punto medio M de DE pertenece a la paralela media paralela al lado AB. De modo que si prolongamos CM más allá de M hasta el punto X tal que $MX = CM$, el punto X que se obtiene pertenece a AB. Por construcción, $XDCE$ es un paralelogramo, pues sus diagonales se bisecan mutuamente. Dado que $DX \parallel AC$, tenemos que $[ACD] = [ACX]$ y análogamente $[BCE] = [BCX]$. Luego $[ACD]+[BCE] = [ABC]$, que era lo que queríamos demostrar.

5. Si $\alpha = \angle BAC$ y $\gamma = \angle BCA$ entonces el área del triangulito superior en la figura siguiente es $a\cos\alpha)(a\cos\gamma)/2 = ka^2/2$, donde $k = \cos\alpha\cos\gamma$. Análogamente los demás triángulos y rectángulos que aparecen en la figura tienen las áreas allí indicadas.



Luego, si igualamos el área no sombreada y el área sombreada y cancelamos la constante k tenemos:

$$\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}+\frac{c^2}{2}+\frac{d^2}{2}+ac+bd=ab+ad+bc+cd,$$

que es equivalente a

$$a^2+b^2+c^2+d^2+2ac+2bd-2ab-2ad-2bc-2cd=0,$$

o bien a

$$(a-b+c-d)^2=0.$$

Veamos que Sara siempre puede ganar colocando el tercer punto de tal modo que $a+c=b+d$.

Caso 1) Rosa elige el punto medio M de AC y otro punto N. Entonces a Sara le basta elegir el punto simétrico de N respecto a M.

Caso 2) Rosa elige dos puntos M y N, diferentes del punto medio de AC. Supongamos que A, M, N y C están en ese orden. Si M y N están en lados distintos respecto del punto medio de AC, entonces Sara debe elegir el punto P en el segmento MN tal que $NP=\frac{1}{2}AC-AM$ (P está en el interior de MN ya que $AN>\frac{1}{2}AC$). Si M y N están en el mismo lado respecto al punto medio de AC, supongamos que del mismo lado que A, entonces Sara debe elegir el punto P en el segmento NC tal que $PC=\frac{1}{2}AC-MN$ (P está en el interior de NC ya que $MC>\frac{1}{2}AC$).

Capítulo 5

Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe

La XVIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe tuvo lugar en Kingston, Jamaica, desde el 16 hasta el 23 de junio de 2016. Participaron trece países: Colombia, Costa Rica, Cuba, El Salvador, Guatemala, Honduras, Jamaica, México, Nicaragua, Panamá, Puerto Rico, República Dominicana y Venezuela.

Venezuela participó con una delegación integrada por los estudiantes José Alberto Ortiz Seba, del colegio San José Maristas y Juan Diego Guevara Lugo, del colegio Bella Vista, ambos de Maracay. Los dos obtuvieron mención honorífica. El jefe de la delegación fue el profesor José Alberto Infante, de la Universidad Simón Bolívar.

5.1. Problemas

Primer Día

Problema 1. Encuentre todos los enteros positivos n de 4 cifras tales que todos sus dígitos son cuadrados perfectos y n es múltiplo de 2, 3, 5 y 7.

Problema 2. Sea ABC un triángulo acutángulo, Γ su circunferencia circunscrita y M el punto medio del lado BC. Sea N el punto del arco BC de Γ que no contiene a A, tal que $\angle NAC = \angle BAM$. Sea R el punto medio de AM, S el punto medio de AN y T el pie de la altura desde A al lado BC. Demuestre que los puntos R, S y T son colineales.

Problema 3. El polinomio $T(x) = x^3 - 21x + 35 = 0$ tiene tres raíces reales diferentes. Halle reales a y b tales que el polinomio $P(t) = t^2 + at + b$ permute cíclicamente las raíces de T, es decir que si u, v y w son las raíces de T (en cierto orden) entonces $P(u) = v$, $P(v) = w$ y $P(w) = u$.

Segundo Día

Problema 4. En la pizarra está escrito el múmero 3. Ana y Bernardo juegan alternadamente, comenzando por Ana, de la siguiente manera: si en la pizarra está escrito el número n, el jugador que tenga el turno lo debe sustituir por cualquier entero m que sea coprimo con n y tal que $n < m < n^2$. El primer jugador que escriba un número mayor o igual que 2016 pierde. Determine qué jugador tiene una estrategia ganadora y descríbala.

Problema 5. Digamos que un número es *irie* si se puede expresar como $1 + \frac{1}{k}$, para algún entero positivo k. Demuestre que cualquier entero $n \geq 2$ se puede expresar como el producto de r números irie diferentes, para cualquier entero $r \geq n - 1$.

Problema 6. Sea ABC un triángulo con incentro I y circuncírculo Γ. Sean M y N los puntos de intersección de las rectas BI y CI con Γ. La paralela a MN que pasa por I interseca a AB en P y a AC en Q. Demuestre que la circunferencia que pasa por B, N y P tiene el mismo radio que la circunferencia que pasa por C, M y Q.

5.2. Soluciones

1. Sea $n = \overline{abcd}$ donde los dígitos a, b, c, d son cuadrados perfectos, es decir que sólo pueden valer 0, 1, 4 o 9 (y a no puede ser cero).

Como n se divide por 2 y 5, debe terminar en cero, es decir $d = 0$, y

$$n = 10^3a + 10^2b + 10c.$$

Como n se divide entre 3 debe ser

$$a + b + c \equiv 0 \pmod{3}.$$

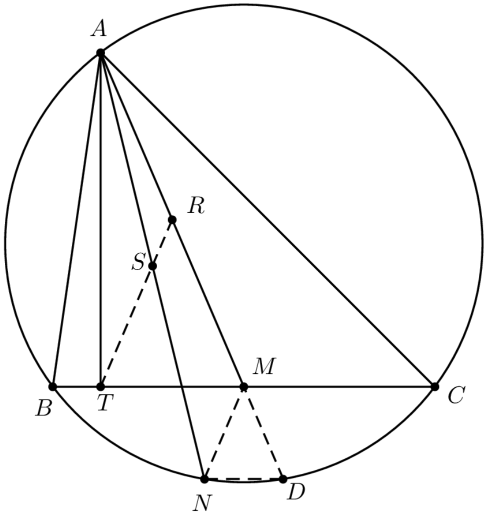
Como un cuadrado perfecto sólo puede ser congruente con 0 o 1 módulo 3, hay dos casos:

Caso 1: $a \equiv b \equiv c \equiv 0 \pmod{3}$. En este caso hay 4 números n posibles: 9990, 9900, 9090 and 9000. Pero ninguno es divisible entre 7.

Caso 2: $a \equiv b \equiv c \equiv 1 \pmod{3}$. En este caso hay 8 números n posibles: 1110, 1140, 1410, 1440, 4110, 4140, 4410 and 4440. De éstos, sólo 4410 es divisible entre 7.

En conclusión, $n = 4410$ es el único número que cumple las condiciones.

2. Como $\angle ATM$ es recto, R es el circuncentro del $\triangle ATM$ y $RT = RM$. Por lo tanto $\angle RTM = \angle RMT$. Es suficiente probar que $TR \parallel NM$, pues en ese caso la intersección de TR y AN será el punto medio de AN, es decir S.



Sea D la segunda intersección de AM con Γ. Entonces

$$\angle NBC = \angle NAC = \angle BAM = \angle BAD = \angle BCD$$

y $\widehat{NC} = \widehat{BD}$. Restando $\widehat{ND}$ resulta $\widehat{BN} = \widehat{DC}$, de donde $BN = DC$. Entonces N y D son simétricos respecto a la mediatriz de BC. En particular $BC \parallel ND$, $MN = MD$ y $\angle MND = \angle MDN$. Por lo tanto

$$\angle RTM = \angle RMT = \angle MDN = \angle MND$$

y $TR \parallel NM$, como queríamos probar.

3. Por Vieta se tiene

$$\begin{aligned} u + v + w &= 0, \\ uv + vw + uw &= -21, \\ uvw &= -35. \end{aligned} \tag{1}$$

Las condiciones $P(u) = v$, $P(v) = w$, $P(w) = u$ equivalen a

$$\begin{aligned} u^2 + au + b &= v, \\ v^2 + av + b &= w, \\ w^2 + aw + b &= u. \end{aligned} \tag{2}$$

Sumando estas tres últimas se obtiene

$$u^2 + v^2 + w^2 + a(u + v + w) + 3b = u + v + w,$$

Pero como $u + v + w = 0$ y

$$u^2 + v^2 + w^2 = (u + v + w)^2 - 2(uv + vw + uw) = 0 - 2(-21) = 42,$$

nos queda que $42 + 3b = 0$ y $b = -14$.

Multiplicando ahora las tres ecuaciones (2) por u, v y w, respectivamente, resulta

$$\begin{aligned} u^3 + au^2 + bu &= uv, \\ v^3 + av^2 + bv &= vw, \\ w^3 + aw^2 + bw &= uw, \end{aligned} \tag{3}$$

y sumando miembro a miembro se obtiene

$$u^3 + v^3 + w^3 + a(u^2 + v^2 + w^2) + b(u + v + w) = uv + vw + uw,$$

es decir

$$u^3 + v^3 + w^3 + 42a = -21. \tag{4}$$

Pero

$$\begin{aligned} u^3 - 21u + 35 &= 0, \\ v^3 - 21v + 35 &= 0, \\ w^3 - 21w + 35 &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

y sumando miembro a miembro se obtiene $u^3 + v^3 + w^3 - 21(u + v + w) + 105 = 0$, es decir $u^3 + v^3 + w^3 = -105$. Sustituyendo en (4) resulta $-105 + 42a = -21$, de donde $42a = 84$ y $a = 2$. En conclusión la única posibilidad para P es $P(t) = t^2 + 2t - 14$.

Ahora probaremos que P efectivamente permuta cíclicamente las raíces de T.

En primer lugar, veamos que si r es raíz de T entonces $P(r)$ también lo es. En efecto, si $T(r) = 0$ entonces

$$\begin{aligned} T(P(r)) &= (r^2 + ru - 14)^3 - 21(r^2 + ru - 14) + 35 \\ &= r^6 + 6r^5 - 30r^4 - 160r^3 + 399r^2 + 1134r - 2415 \\ &= (r^3 - 21r + 35)(r^3 + 6r^2 - 9r - 69) = 0. \end{aligned}$$

Ahora veamos que P no deja fija ninguna raíz de T, es decir que si $T(r) = 0$ entonces $P(r) \neq r$. Por absurdo, si $P(r) = r$ entonces $r^2 + 2r - 14 = r$, o sea $r^2 + r - 14 = 0$. Pero

$$r^3 - 21r + 35 = (r^2 + r - 14)(r - 1) - 6r + 21,$$

de donde $-6r + 21 = 0$ y $r = 7/2$. Pero $7/2$ no es raíz de T.

P tampoco intercambia dos raíces de T, es decir que si $T(u) = T(v) = 0$ y $u \neq v$, no puede ser que $P(u) = v$ y $P(v) = u$. En efecto, nuevamente por absurdo si $P(u) = v$ y $P(v) = u$ entonces, como

$$u^3 - 21u + 35 = (u^2 + 2u - 14)(u - 1) - 3u + 7,$$

resulta que $v(u-1)-3u+7=0$. Por simetría $u(v-1)-3v+7=0$, y restando miembro a miembro resulta $2v-2u=0$, o sea $u=v$, contra lo supuesto.

Por lo tanto si u es una raíz de T entonces $v=P(u)\neq u$ es otra raíz de T, $w=P(v)$ es otra raíz de T diferente de u y de v, y $T(w)$ es una raíz de T diferente de w y de v, por lo cual $T(w)=u$ y terminamos.

4. Digamos que un número es *ganador* si el que lo escriba puede asegurarse la victoria, y que es *perdedor* en caso contrario. Obviamente $2015=5\cdot 13\cdot 31$ es ganador. El número $2005=5\cdot 401$ también es ganador, pues a cualquier respuesta posible entre 2006 y 2014 (exceptuado el 2010) se puede replicar con 2015.

Veamos ahora que Ana tiene una estrategia ganadora. En su primer jugada debe escribir 5. A partir de aquí puede continuar de varias maneras, escribiendo múltiplos de 5 hasta llegar a 2005 o a 2015. Una forma de hacerlo es la siguiente: al 5 Bernardo debe responder con un m_1 coprimo con 5 y tal que $5<m_1<25$. Entonces Ana escribe $25=5^2$. Bernardo debe responder con un m_2 coprimo con 5 y tal que $25<m_1<625$. Entonces Ana escribe $625=5^4$. Bernardo debe responder con un m_3 coprimo con 5 y tal que $625<m_3<5^8$. Si $m_3\geq 2016$, Ana gana. Obviamente m_3 no puede ser 2015. Si $2005<m_3<2015$, Ana responde 2015 que es ganador. Si m_3 es $802=2\cdot 401$, $1203=3\cdot 401$ o $1604=4\cdot 401$, Ana responde 2015 que es ganador. Si $625<m_3<2005$ y m_3 es coprimo con 5 y 401, Ana responde $2005=5\cdot 401$ que es ganador.

5. Pongamos $a_k=1+\frac{1}{k}$. En primer lugar observemos que

$$a_1a_2\cdots a_{n-1}=\frac{2\cdot 3\cdots(n-1)n}{1\cdot 2\cdots(n-2)(n-1)}=n,$$

es decir que n se puede expresar como producto de $n-1$ números irie diferentes.

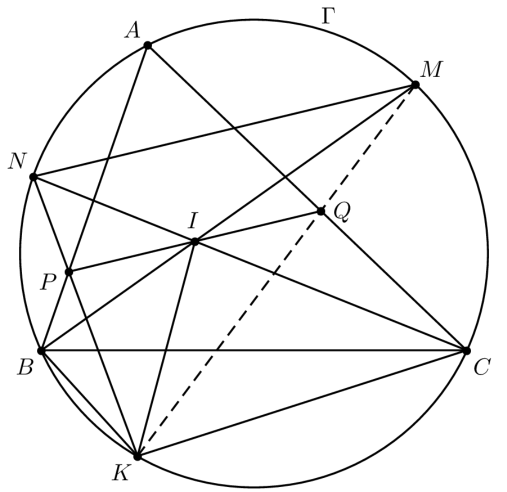
Ahora notemos que

$$a_k=\frac{k+1}{k}=\frac{2k+2}{2k}=\frac{2k+1}{2k}\frac{2k+2}{2k+1}=a_{2k}a_{2k+1}.$$

Esto permite completar la solución por inducción. En efecto, si $0<i_1<i_2<\cdots<i_r$ y $n=a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_r}$, entonces también $n=a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_{r-1}}a_{2i_r}a_{2i_r+1}$.

6. Puesto que $PQ \parallel MN$, se tiene que $\angle CIQ = \angle CNM$. Además, por ser $\angle AQP$ exterior al triángulo CIQ, se tiene que $\angle AQP = \angle CIQ + \angle QCI$. Por ello,

$$\angle AQP = \angle CIQ + \angle QCI = \angle CNM + \angle ACI = \angle MBC + \angle ACI = \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2}.$$



Similarmente, $\angle APQ = \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2}$, por lo que $AP = AQ$. Por ser PQ paralela a MN, se sigue que $\angle NMB = \angle PIB$. Puesto que el cuadrilátero $MNBC$ es cíclico, se tiene que $\angle NMB = \angle NCB$. Sea K la segunda intersección de NP con Γ. Por construcción, el cuadrilátero $NBKC$ es cíclico, así que $\angle BKN = \angle BCN$. Por las igualdades anteriores de ángulos se tiene que

$$\angle PKB = \angle NKB = \angle NCB = \frac{\angle C}{2} = \angle NMB = \angle PIB,$$

lo cual demuestra que el cuadrilátero $PIKB$ es cíclico. Así, $\angle PKI = \angle PBI = \frac{\angle B}{2}$. Por ello, $\angle BKI = \angle BKP + \angle PKI = \frac{\angle C}{2} + \frac{\angle B}{2}$. Además, por ser $ABKC$ un cuadrilátero cíclico, se tiene que $\angle BKC = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - \angle A = \angle B + \angle C$. Finalmente, observemos que

$$\begin{aligned}\angle IKC &= \angle BKC - \angle BKI = \angle B + \angle C - \frac{\angle B + \angle C}{2}\\ &= \frac{\angle B + \angle C}{2} = \angle AQP = 180^\circ - \angle IQC,\end{aligned}$$

por lo que $IKCQ$ es cíclico. Por ello,

$$\angle CKQ = \angle CIQ = \angle CNM = \angle CKM,$$

probando que K, Q, M, son colineales. En otras palabras, NP y MQ se intersecan en un punto K sobre Γ.

Sea R el radio de Γ. Por la Ley de Senos,

$$\frac{BK}{KC} = \frac{\operatorname{sen} \angle BAK}{\operatorname{sen} \angle CAK}.$$

Observemos que, por ser N el punto medio del arco $\widehat{AB}$ de Γ, se tiene que KN es bisectriz de $\angle BKA$. Por el teorema de la bisectriz, $\frac{BP}{BK} = \frac{PA}{AK}$. Similarmente, $\frac{CQ}{CK} = \frac{QA}{AK}$. Puesto que $AP = AQ$, se tiene que $\frac{BP}{BK} = \frac{CQ}{CK}$. Sean R_1 el radio del circuncírculo de BNP y R_2 el radio del circuncírculo de CMQ. Por la Ley de Senos,

$$2R_1 = \frac{BP}{\operatorname{sen} \angle BNP} \quad \text{y} \quad 2R_2 = \frac{CQ}{\operatorname{sen} \angle CMQ},$$

por lo cual,

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{BP}{CQ} \frac{\operatorname{sen} \angle CMQ}{\operatorname{sen} \angle BNP} = \frac{BK}{CK} \frac{\operatorname{sen} \angle CMK}{\operatorname{sen} \angle BNK} = \frac{BK}{CK} \frac{\operatorname{sen} \angle CAK}{\operatorname{sen} \angle BAK} = \frac{BK}{CK} \frac{CK}{BK} = 1.$$

Esto prueba que $R_1 = R_2$, como queríamos.

Capítulo 6

Olimpiada Iberoamericana de Matemática

La XXXI Olimpiada Iberoamericana de Matemática tuvo lugar en Antofagasta, Chile, del 23 de septiembre al 1 de octubre de 2016. En la misma participaron 22 países: Argentina, Bolivia, Brasil, Chile, Colombia, Costa Rica, Cuba, Ecuador, El Salvador, España, Guatemala, Honduras, México, Nicaragua, Panamá, Paraguay, Perú, Portugal, Puerto Rico, República Dominicana, Uruguay y Venezuela. Venezuela participó con una delegación integrada por los estudiantes Wemp Pacheco, del colegio Calicantina de Maracay, Iván Rodríguez, del colegio Santiago León de Caracas y Laura Queipo, del colegio San Vicente de Paúl de Maracaibo. Wemp Pacheco obtuvo medalla de plata e Iván Rodríguez obtuvo medalla de bronce. La delegación fue liderada por el profesor José Alberto Infante de la Universidad Simón Bolívar. La tutora fue Estefanía Ordaz, licenciada en Matemáticas de la Universidad Simón Bolívar.

6.1. Problemas

Primer Día

Problema 1. Determine todos los números primos positivos p, q, r y k tales que $pq + qr + rp = 12k + 1$.

Problema 2. Encuentre todas las soluciones reales positivas del sistema de ecuaciones:

$$x = \frac{1}{y^2 + y - 1}, \qquad y = \frac{1}{z^2 + z - 1}, \qquad z = \frac{1}{x^2 + x - 1}.$$

Problema 3. Sea ABC un triángulo acutángulo cuya circunferencia circunscrita es Γ. Las tangentes a Γ por B y C se cortan en P. Sobre el arco AC que no contiene a B se toma un punto M, distinto de A y de C, tal que la recta AM corta a la recta BC en K. Sean R el punto simétrico de P con respecto a la recta AM y Q el punto de intersección de las rectas RA y PM. Sean J el punto medio de BC y L el punto donde la recta paralela por A a la recta PR corta a la recta PJ. Demuestre que los puntos L, J, A, Q y K están sobre una misma circunferencia.

Segundo Día

Problema 4. Determine la mayor cantidad de alfiles que se pueden colocar en un tablero de ajedrez de 8×8, tal que no haya dos alfiles en la misma casilla y cada alfil sea amenazado como máximo por uno de los otros alfiles.

Nota: Un alfil amenaza a otro si ambos se encuentran en dos casillas distintas de una misma diagonal. El tablero tiene por diagonales las 2 diagonales principales y las paralelas a ellas.

Problema 5. Las circunferencias $\mathcal{C}\infty$ y $\mathcal{C}\in$ se cortan en dos puntos distintos A y K. La tangente común a $\mathcal{C}\infty$ y $\mathcal{C}\in$ más cercana a K toca a $\mathcal{C}\infty$ en B y a $\mathcal{C}\in$ en C. Sean P el pie de la perpendicular desde B sobre AC, y Q el pie de la perpendicular desde C sobre AB. Si E y F son los puntos simétricos de K respecto de las rectas PQ y BC, respectivamente, pruebe que los puntos A, E y F son colineales.

Problema 6. Sean k un entero positivo y a_1, a_2,..., a_k dígitos. Pruebe que existe un entero positivo n tal que los últimos $2k$ dígitos de $2n$ son, en este orden, a_1, a_2,..., a_k, b_1, b_2,..., b_k para ciertos dígitos b_1, b_2,..., b_k.

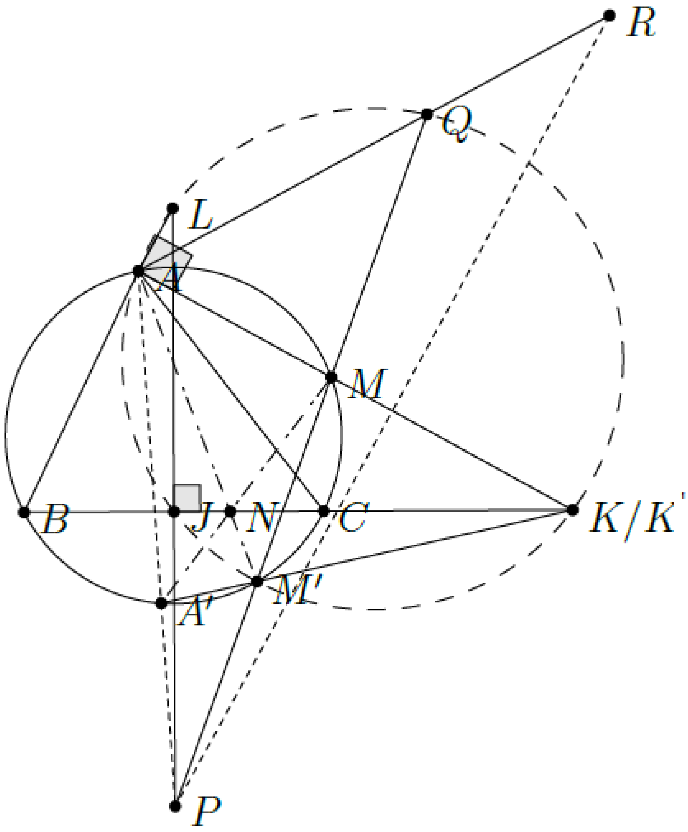
6.2. Soluciones

1. Si p, q y r son los tres impares, entonces $(p+q)(p+r)$ es múltiplo de 4. Pero $(p+q)(p+r) = p^2 + 12k + 1 \equiv 2 \pmod 4$, contradicción. Supongamos (sin pérdida de generalidad) que $p = 2$. Entonces $(q+2)(r+2) = 12k+5 \equiv 2 \pmod 3$, luego $q+2$ o $r+2$ deben ser congruentes con 1 y 2 módulo 3 (en algún orden). Supongamos sin pérdida de generalidad que $q + 2 \equiv 2 \pmod 3$. Entonces $q \equiv 0 \pmod 3$ y $q = 3$. Ahora se tiene que $2 \cdot 3 + 3r + 2r = 12k + 1$, es decir $5 + 5r = 12k$, de donde $5 \mid k$ y $k = 5$, y finalmente $5 + 5r = 12 \cdot 5 = 60$, de donde $r = 11$. Como p, q y r se pueden permutar, las soluciones (p, q, r, k) son (2, 3, 11, 5), (2, 11, 3, 5), (3, 2, 11, 5), (3, 11, 2, 5), (11, 2, 3, 5) y (11, 3, 2, 5).

2. Supongamos que $y = 1$. Entonces de la primera ecuación resulta $x = 1$, y de la tercera $z = 1$. Es claro que $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ es solución del sistema. Probaremos que es la única. Supongamos que exista una solución con $y > 1$. Entonces $y^2 + y - 1 > 1$ y de la primera ecuación resulta $x < 1$. Entonces $x^2 + x - 1 < 1$ y como $x^2 + x - 1 = \frac{1}{z} > 0$, de la tercera ecuación resulta $z > 1$. Pero entonces de la segunda resulta $y < 1$, absurdo.

Análogamente si $y < 1$ entonces $y^2 + y - 1 < 1$ y de la primera ecuación resulta $x > 1$. Ahora $x^2 + x - 1 > 1$ y de la tercera resulta $z < 1$. Pero entonces de la segunda resulta $y > 1$, absurdo.

3. Como el triángulo BPC es isósceles en P, si J es el punto medio del lado BC entonces la recta PJ es mediatriz de BC, y además la recta AK es mediatriz de PR, por lo tanto es perpendicular a AL. Luego el cuadrilátero $LJAK$ es cíclico y $\angle LAK = \angle LJK = 90°$.



Lema 1. Sean A' y M' los segundos puntos de intersección de las rectas PA y PM con Γ, respectivamente. Entonces los puntos A', M' y K son colineales. Además, el cuadrilátero $QAM'K$ es cíclico.

Demostración: Sea K' la intersección de $A'M'$ con AM y sea N la intersección de AM' con MM'. Por el teorema de Brocard la recta NK' es la polar de P con respecto a Γ. Ya que las rectas PB y PC son tangentes a Γ, la recta BC es la polar de P con respecto a Γ, por tanto las rectas BC y NK' deben ser las mismas, pero K es la intersección de AM con BC, por tanto $K = K'$.

Ya que la recta AK es la bisectriz interior del $\angle QAA'$, se tiene que

$$\angle QAK = \angle KAA' = \angle MAA' = \angle MM'K = \angle QM'K.$$

Luego el cuadrilátero $QAM'K$ es cíclico y el resultado sigue.

Lema 2. El cuadrilátero $AJM'K$ es cíclico.

Demostración: Consideremos el cuadrilátero cíclico $A'AMM'$. Por definición del punto N y como también sabemos que yace sobre la recta BC podemos decir, por el teorema de Brocard, que la recta PN es la polar de K con respecto a Γ y por ende la cuaterna de puntos (B, C, N, K) es armónica. Como J es punto medio de BC se obtiene que

$$JB^2 = JC^2 = JN \cdot JK.$$

Por potencia de N en el cuadrilátero $BACM'$

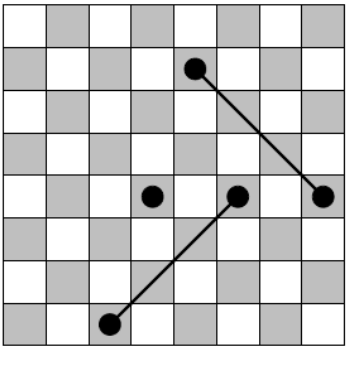
$$AN \cdot NM' = BN \cdot NC.$$

Pero

$$BN \cdot NC = JC^2 - JN^2 = JN \cdot JK - JN^2 = JN \cdot NK.$$

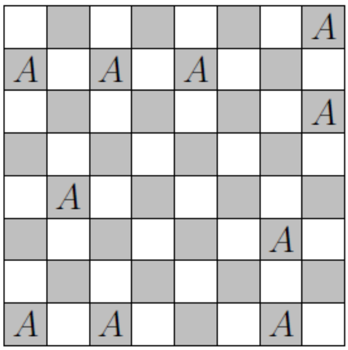
Por tanto $AN \cdot NM' = JN \cdot NK$ y concluimos que el cuadrilátero $AJM'K$ es cíclico. Ya que los cuadriláteros $AJM'K$, $QAM'K$ y $LJAK$ son cíclicos, se concluye que los puntos L, J, A, Q, K y M' son concíclicos.

4. Analicemos solo los alfiles de las casillas negras. Si un alfil ataca a otro alfil, entonces ningún otro alfil puede atacar a uno de estos alfiles. De este modo los alfiles se pueden agrupar en parejas y posiblemente algunos alfiles aislados (que no atacan ni son atacados por ningún otro alfil). Digamos que una pareja de alfiles es del tipo 1 si está en una diagonal de pendiente 1 y del tipo 2 si está en una diagonal de pendiente -1.



Sea a el número de parejas del tipo 1, b el número de parejas del tipo 2 y c la cantidad de alfiles aislados. Las casillas negras determinan siete diagonales de pendiente 1 y ocho diagonales de pendiente -1. Cada pareja del tipo 1 cubre dos diagonales de pendiente -1 y una diagonal de pendiente 1, y cada pareja del tipo 2 cubre dos diagonales de pendiente 1 y una diagonal de pendiente -1. Luego, $2a+b+c \leq 8$ y $a+2b+c \leq 7$, de donde $3a+3b+2c \leq 15$ y $3(2a+2b+c) \leq 6a+6b+4c \leq 30$. Por lo tanto $2a+2b+c \leq 10$, es decir, la cantidad de alfiles en las casillas negras es a lo más 10.

Análogamente, la cantidad de alfiles en las casillas blancas es a lo más 10. Así la cantidad de alfiles en el tablero es a lo más 20. Un ejemplo con 10 alfiles en las casillas negras es el siguiente:



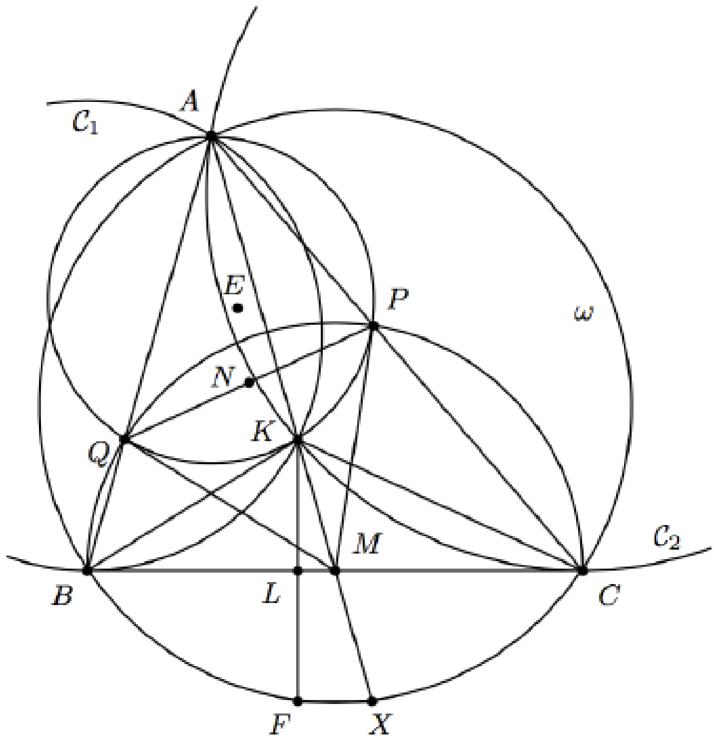
Si adicionamos los alfiles en las casillas blancas simétricas obtenemos un ejemplo con 20 alfiles. Por lo tanto la mayor cantidad de alfiles es 20.

5. Sea ω la circunferencia que pasa por A, B y C, y sea X la intersección de AK con ω. Primero observemos que, por ser BC tangente a $\mathcal{C}_\infty$, se tiene que $\angle CBK = \angle BAK$, en virtud del Teorema del ángulo semi-inscrito. Por otra parte, por ser cíclico el cuadrilátero $ABXC$, se tiene que $\angle XAB = \angle XCB$. Por tanto,

$$\angle XCB = \angle XAB = \angle KAB = \angle KBC,$$

por lo que KB y XC son paralelas. Similarmente, KC y XB son también paralelas, por lo que $KCXB$ es un paralelogramo y sus diagonales KX y BC se intersecan en su punto medio, al que llamaremos M.

Observemos que F pertenece a ω. En efecto, por ser F la reflexión de K respecto de BC, se tiene que $\angle BFC = \angle BKC$. Puesto que $KBXC$ es un paralelogramo, se tiene también que $\angle BKC = \angle BXC$. Por tanto, $\angle BFC = \angle BXC$, por lo que $BFXC$ es un cuadrilátero cíclico, y F pertenece a ω.



Sea L la intersección de KF con BC. Por ser F la reflexión de K respecto de BC, se sigue que L es punto medio de KF. Puesto que M es punto medio de KX, se tiene que $FX \parallel LM$, es decir, $FX \parallel BC$. Esto implica que los arcos BF y CX de ω son iguales, así que $\angle XAC = \angle FAB$. Por otra parte, por hipótesis, los ángulos $\angle BPC$ y $\angle CQB$ son ambos rectos, por lo que el cuadrilátero $PQBC$ es cíclico, y su circuncentro es el punto medio M de BC.

Observemos que, por ser los triángulos MBP, MPQ, MQC isósceles, se tiene

$$\begin{aligned}\angle PQM &= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle PMQ = 90^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle QMB - \angle PMC)\\ &= \frac{1}{2}(\angle QMB + \angle PMC) = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\angle QBM + 180^\circ - 2\angle PCM)\\ &= 180^\circ - \angle QBM - \angle PCM = 180^\circ - \angle ABC - \angle ACB\\ &= \angle BAC = \angle PAQ,\end{aligned}$$

por lo que MP y MQ son tangentes al circuncírculo de APQ, en virtud del Teorema del ángulo semi-inscrito.

Observemos que K pertenece al circuncírculo de APQ. En efecto, por ser $\mathcal{C}_\infty$ tangente a BC, tenemos que la potencia de M respecto a $\mathcal{C}_\infty$ puede calcularse como $MB^2 = MK \cdot MA$. Por ser $MB = MP$, se tiene que $MP^2 = MK \cdot MA$, y por ser MP tangente al circuncírculo de APQ, se sigue que $MK \cdot MA$ es la potencia de M al circuncírculo de APQ. Por ello, K pertenece a dicho circuncírculo, es decir, $APKQ$ es un cuadrilátero cíclico. Además, $\angle AQP = \angle ACBy\angle APQ = \angle ABC$, por lo que los triángulos ABC y APQ son semejantes.

Por otro lado, sea N la intersección de PQ con AF. Probaremos que N es el punto medio de PQ. Puesto que $\angle NAQ = \angle FAB = \angle XAC = \angle MAC$, se sigue que los puntos N y M son homólogos en la semejanza de los triángulos APQ y ABC. Por ser M el punto medio de BC, también se tiene que N es punto medio de PQ. Puesto que el cuadrilátero $APKQ$ es cíclico, tenemos que K es el punto del circuncírculo de APQ tal que $\angle KAP = \angle NAQ$. Puesto que, en la semejanza de los triángulos APQ y ABC los puntos N y M son homólogos, lo anterior implica que K y F son también homólogos. Por ser E la reflexión de K respecto PQ, y por ser K la reflexión de F respecto BC, se sigue que los puntos E y K son homólogos también. En particular, $\angle KAC = \angle EAQ$, es decir,

$$\angle EAB = \angle EAQ = \angle KAC = \angle XAC = \angle FAB,$$

lo cual implica que los puntos A, E, F son colineales, como queríamos.

6. Sea $A = a_1a_2\dots a_k$. Por el algoritmo de la división $A\cdot 10^k = q\cdot 4^k + r$ con $0 \leq r < 4^k$. Como $4^k < 10^k$, $4^k - r$ tiene a lo sumo k dígitos y se puede escribir como $b_1b_2\dots b_k$ (donde se admiten ceros a la izquierda). Entonces $a_1a_2\dots a_kb_1b_2\dots b_k = q\cdot 4^k + r + 4^k - r = (q+1)4^k$ es múltiplo de 4^k y $2^n \equiv a_1a_2\dots a_kb_1b_2\dots b_k \pmod{4^k}$ para $n \geq 2k$. Además como $2\cdot 4^k = 8\cdot 4^{k-1} < 10^k$, también $2\cdot 4^k - r$ se puede escribir como $b_1'b_2'\dots b_k'$, y $a_1a_2\dots a_kb_1'b_2'\dots b_k' = q\cdot 4^k + r + 2\cdot 4^k - r = (q+2)4^k$ es múltiplo de 4^k y $2^n \equiv a_1a_2\dots a_kb_1'b_2'\dots b_k' \pmod{4^k}$ para $n \geq 2k$.

Ahora bien, alguno de los números $a_1a_2\dots a_kb_1b_2\dots b_k$ y $a_1a_2\dots a_kb_1'b_2'\dots b_k'$ no es múltiplo de 5 (pues su diferencia es $(2\cdot 4^k - r) - (4^k - r) = 4^k$ que no es múltiplo de 5). Pero 2 es raíz primitiva módulo potencias de 5, así que para alguno de ellos, digamos $a_1a_2\dots a_kb_1b_2\dots b_k$, existe un $n \geq 2k$ tal que $2^n \equiv a_1a_2\dots a_kb_1b_2\dots b_k \pmod{5^{2k}}$. Luego $2^n \equiv a_1a_2\dots a_kb_1b_2\dots b_k \pmod{10^{2k}}$ y listo.

Capítulo 7

Olimpiada Internacional de Matemática

ESTA sección está dedicada a la 57^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO) celebrada en Hong Kong, China, del 6 al 16 de julio con la participación de 560 jóvenes provenientes de 101 países de los cinco continentes. La delegación venezolana estuvo integrada por tres estudiantes, Wemp Pacheco del colegio Calicantina de Maracay, Iván Rodríguez del colegio Santiago de León de Caracas y Amanda Vanegas del colegio San Francisco de Asís, de Maracaibo. Wemp Pacheco ganó una medalla de bronce e Iván Rodríguez mención honorífica. El tutor de la delegación fue el Prof. José Heber Nieto, de La Universidad del Zulia y el jefe de la delegación el Prof. Rafael Sánchez Lamoneda, de la Universidad Central de Venezuela.

7.1. Problemas

Primer Día

Problema 1. El triángulo BCF es rectángulo en B. Sea A el punto de la recta CF tal que $FA = FB$ y F está entre A y C. Se elige el punto D de modo que $DA = DC$ y AC es bisectriz del ángulo $\angle DAB$. Se elige el punto E de modo que $EA = ED$ y AD es bisectriz del ángulo $\angle EAC$. Sea M el punto medio de CF. Sea X el punto tal que $AMXE$ es un paralelogramo (con $AM \parallel EX$ y $AE \parallel MX$). Demostrar que las rectas BD, FX, y ME son concurrentes.

Problema 2. Hallar todos los enteros positivos n para los que en cada casilla de un tablero $n \times n$ se puede escribir una de las letras I, M y O de manera que:

- en cada fila y en cada columna, un tercio de las casillas tiene I, un tercio tiene M y un tercio tiene O; y
- en cualquier línea diagonal compuesta por un número de casillas divisible por 3, exactamente un tercio de las casillas tienen I, un tercio tiene M y un tercio tiene O.

Nota: Las filas y las columnas del tablero $n \times n$ se numeran desde 1 hasta n , en su orden natural. Así, cada casilla corresponde a un par de enteros positivos (i, j) con $1 \le i, j \le n$. Para $n > 1$, el tablero tiene $4n - 2$ *líneas diagonales* de dos tipos. Una línea diagonal del primer tipo se compone de todas las casillas (i, j) para las que $i + j$ es una constante, mientras que una línea diagonal del segundo tipo se compone de todas las casillas (i, j) para las que $i - j$ es una constante.

Problema 3. Sea $P = A_1A_2 \dots A_k$ un polígono convexo en el plano. Los vértices A_1, A_2,..., A_k tienen coordenadas enteras y se encuentran sobre una circunferencia. Sea S el área de P. Sea n un entero positivo impar tal que los cuadrados de las longitudes de los lados de P son todos números enteros divisibles por n. Demostrar que $2S$ es un entero divisible por n.

Segundo Día

Problema 4. Un conjunto de números enteros positivos se llama *fragante* si contiene al menos dos elementos, y cada uno de sus elementos tiene algún factor primo en común con al menos uno de los elementos restantes. Sea $P(n) = n^2 + n + 1$. Determinar el menor número entero positivo b para el cual existe algún número entero no negativo a tal que el conjunto

$$\{P(a+1), P(a+2), \dots, P(a+b)\}$$

es fragante.

Problema 5. En la pizarra está escrita la ecuación

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

que tiene 2016 factores lineales en cada lado. Determinar el menor valor posible de k para el cual pueden borrarse exactamente k de estos 4032 factores lineales, de modo que al menos quede un factor en cada lado y la ecuación que resulte no tenga soluciones reales.

Problema 6. Se tienen $n \ge 2$ segmentos en el plano tales que cada par de segmentos se intersecan en un punto interior a ambos, y no hay tres segmentos que tengan un punto en común. Mafalda debe elegir uno de los extremos de cada segmento y colocar sobre él una rana mirando hacia el otro extremo. Luego silbará $n - 1$ veces. En cada silbido, cada rana saltará inmediatamente hacia adelante hasta el siguiente punto de intersección sobre su segmento. Las ranas nunca cambian las direcciones de sus saltos. Mafalda quiere colocar las ranas de tal forma que nunca dos de ellas ocupen al mismo tiempo el mismo punto de intersección.

(a) Demostrar que si n es impar, Mafalda siempre puede lograr su objetivo.

(b) Demostrar que si n es par, Mafalda nunca logrará su objetivo.

7.2. Soluciones

1. Denotemos el ángulo $\angle DAC$ por θ, entonces

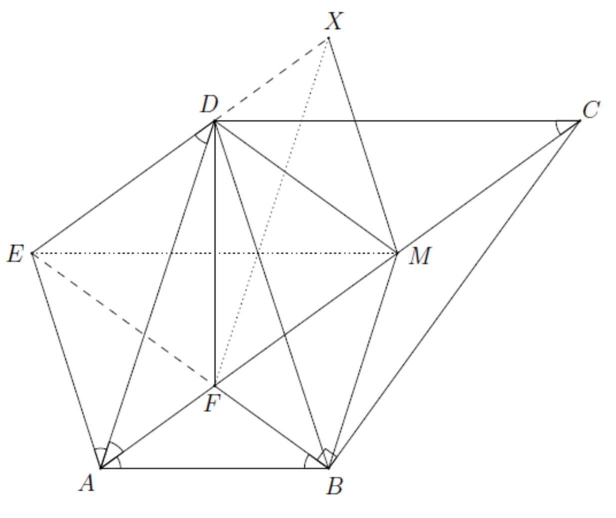
$$\angle FAB = \angle FBA = \angle DAC = \angle DCA = \angle EAD = \angle EDA = \theta.$$

Como $\angle FAB = \angle FBA = \angle DAC = \angle DCA = \angle EAD = \angle EDA = \theta$, entonces los triángulos ABF y ACD son congruentes, por tanto,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AF}{AD},$$

y en consecuencia los triángulos ABC y AFD son semejantes. Como $EA = ED$, entonces $\angle EAD = 180° - 2\theta$ y por tanto,

$$\angle AFD = \angle ABC = 90° + \theta = 180° - \frac{1}{2}\angle AED.$$



En consecuencia, F está en la circunferencia con centro en E y radio EA. En particular, $EF = EA = ED$. Como $\angle EFA = \angle EAF = 2\theta = \angle BFC$, los puntos B, F y E son colineales. Como $\angle EDA = \angle MAD$, tenemos que ED es paralela a AM y por tanto, E, D y X son colineales. Como M es el punto medio de CF y $\angle CBF = 90°$, entonces CF es un diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo CBF y M es su circuncentro, por tanto, $MF = MB$. Ahora bien, en los triángulos isósceles EFA y MFB, tenemos $\angle EFA = \angle MFB$ y $AF = BF$. Por tanto, ellos son congruentes. En consecuencia $BM = AE = XM$ y $BE = BF + FE = AF + FM = AM = EX$. Esto nos permite concluir que los triángulos EMB y EMX son congruentes. Por otra parte F está en EB, D está en EX y $EF = ED$, por tanto las rectas BD y XF son simétricas con respecto a la recta EM y podemos concluir que BD, EM y FX son concurrentes.

2. n puede ser cualquier múltiplo de 9.

En efecto, primero demostremos que hay una tabla que cumple con las condiciones pedidas cuando n es múltiplo de 9. Para ello consideremos la siguiente tabla.

$$\begin{pmatrix} I & I & I & M & M & M & O & O & O \\ M & M & M & O & O & O & I & I & I \\ O & O & O & I & I & I & M & M & M \\ I & I & I & M & M & M & O & O & O \\ M & M & M & O & O & O & I & I & I \\ O & O & O & I & I & I & M & M & M \\ I & I & I & M & M & M & O & O & O \\ M & M & M & O & O & O & I & I & I \\ O & O & O & I & I & I & M & M & M \end{pmatrix} \tag{1}$$

Claramente esta tabla satisface las condiciones requeridas. Cuando $n = 9m$, con m un entero positivo, formaremos una table $n \times n$ usando $m\times$ copias d ela tabla (1). Como existen tres I, tres M y tres O, para cualesquiera nueve entradas consecutivas, entonces para cada tabla $n \times n$, en cada fila y en cada columna habrá el mismo número de cada letra. Además, toda diagonal de la tabla de tamaño n cuyo número de entradas sea múltiplo de 3, intersecta a cada copia de (1) en una diagonal cuyo número de entradas es divisible entre 3, este número podría ser también cero. Por tanto, todas estas diagonales de la tabla grande también contienen la misma cantidad de I, de M y de O.

Consideremos ahora cualquier tabla de tamaño n que cumpla con las condiciones pedidas. Como el número de entradas de cada fila debe ser un múltiplo de 3, tenemos que $n = 3m$, donde m es un número entero positivo. Dividamos toda la tabla $n \times n$ en $m \times m$ copias de bloques 3×3. Llamemos a cada entrada en el centro de cada uno de estos cuadrados 3×3 una *entrada principal*. También designemos por *línea principal*, a cada fila, columna o diagonal que contenga al menos una entrada principal. Calculemos el número de pares (l,c), donde l es una línea principal y c es una entrada en la línea l que contiene una letra M. Denotemos este número por N.

Por una parte, como cada línea principal contiene el mismo número de I, que M y que de O, entonces, cada fila y cada columna principal contiene a la letra M, m veces, como hay m filas principales y m columnas principales, tendremos $2m^2$ pares (l,c) . Para las diagonales principales en cualquiera de las direcciones, la cantidad de veces que se repetirá la letra es M es igual a

$$1+2+\cdots+(m-1)+m+(m-1)+\cdots+2+1=m^2,$$

y tendremos de nuevo $2m^2$ pares (l,c). Por tanto tendremos que $N=4m^2$.

Por otra parte, en la tabla completa, la cantidad de veces que se repite la letra M es igual a $3m^2$. Obsérvese que cada entrada de la tabla pertenece exactamente a 1 o a 4 líneas principales. Por tanto, $N \equiv 3m^2 \pmod 3$. En consecuencia, por el doble conteo que hemos hecho, debemos tener que $4m^2 \equiv 3m^2 \pmod 3$, por lo que 3 divide a m^2 y entonces m tiene que ser múltiplo de 3. Por tanto $n=3m=9k$, para algún entero positivo k.

3. Sea $P=A_1A_2\dots A_k$ y sea $A_{k+i}=A_i$ para $i\geq 1$. Por la fórmula de Gauss para el área de un polígono convexo del cual conocemos las coordenadas de sus vértices, como estas son números enteros, su área es la mitad de un número entero. Por tanto $2S$ es un entero. Demostraremos por inducción sobre $k\geq 3$ que $2S$ es divisible por n. Como n es impar, será suficiente considerar el caso en el cual $n=p^t$ donde p es un primo mayor que 2 y $t\geq 1$.

Supongamos que $k=3$, sean $\sqrt{na}$, $\sqrt{nb}$ y $\sqrt{nc}$ las longitudes de los lados de P, con a,b y c números enteros. Por la fórmula de Heron,

$$16S^2=n^2(2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2).$$

Por tanto $2S^2$ es divisible entre n^2 y como n es impar, entonces $2S$ es divisible entre n.

Supongamos ahora que $k\geq 4$. Si el cuadrado de la longitud de una de las diagonales de P es divisible entre n, entonces esta diagonal divide a P en dos polígonos más pequeños y por inducción terminamos la demostración. Por tanto, supongamos que ninguna de las longitudes de las diagonales elevada al cuadrado, es divisible entre n. Denotemos por $\nu_p(r)$ el exponente de p en la descomposición prima de r.

Demostremos que $\nu_p(A_1A_m^2)>\nu_p(A_1A_{m+1}^2)$ para $2\leq m\leq k-1$. En efecto. Si $m=2$, entonces como $n=p^t$ y n no divide al cuadrado de la longitud de ninguna diagonal, entonces $\nu_p(A_1A_2^2)\geq t>\nu_p(A_1A_3^2)$. Supongamos que $\nu_p(A_1A_2^2)>\nu_p(A_1A_3^2)>\dots\nu_p(A_1A_m^2)$ con $3\leq m\leq k-1$. Por hipótesis de inducción y aplicando el teorema de Tolomeo al cuadrilátero cíclico $A_1A_{m-1}A_mA_{m+1}$ tenemos que

$$A_1A_{m+1}\times A_{m-1}A_m+A_1A_{m-1}\times A_mA_{m+1}=A_1A_m\times A_{m+1},$$

lo cual se puede reescribir como

$$\begin{aligned} A_1A_{m+1}^2\times A_{m-1}A_m^2 &= A_1A_{m-1}^2\times A_mA_{m+1}^2+A_1A_m^2\times A_{m-1}A_{m+1}^2\\ &\quad -2A_1A_{m-1}\times A_mA_{m+1}\times A_1A_m\times A_{m-1}A_{m+1}. \end{aligned} \tag{1}$$

Como los cuadrados de los lados del polígono P son divisibles por p, entonces

$2A_1A_{m-1} \times A_mA_{m+1} \times A_1A_m \times A_{m-1}A_{m+1}$ es un entero. Consideremos el exponente de p en cada término de la ecuación (1). Por la hipótesis de inducción tenemos que, $\nu_p(A_1A_{m-1}^2) > \nu_p(A_1A_m^2)$. También tenemos $\nu_p(A_1A_{m+1}^2) \geq t > \nu_p(A_{m-1}A_{m+1}^2)$. Por tanto

$$\nu_p(A_1A_{m-1}^2 \times A_mA_{m+1}^2) > \nu_p(A_1A_m^2 \times A_{m-1}A_{m+1}^2). \tag{2}$$

Pero esta desigualdad implica que, $\nu_p(A_1A_{m-1}^2 \times A_mA_{m+1}^2 \times A_1A_m^2 \times A_{m-1}A_{m+1}^2) = \nu_p(A_1A_{m-1}^2 \times A_mA_{m+1}^2) + \nu_p(A_1A_m^2 \times A_{m-1}A_{m+1}^2) > 2\nu_p(A_1A_m^2 \times A_{m-1}A_{m+1}^2)$.

$$\nu_p(2A_1A_{m-1} \times A_mA_{m+1} \times A_1A_m \times A_{m-1}A_{m+1}) > \nu_p(A_1A_m^2 \times A_{m-1}A_{m+1}^2). \tag{3}$$

Entonces por (1), (2) y (3) podemos concluir que

$$\nu_p(A_1A_{m+1}^2 \times A_{m-1}A_m^2) = \nu_p(A_1A_m^2 \times A_{m-1}Am + 1^2).$$

Como $\nu_p(A_{m-1}A_m^2) \geq t > \nu_p(A_{m-1}A_{m+1}^2)$, tenemos que $\nu_p(A_1A_{m+1}^2) < \nu_p(A_1A_m^2)$ y por inducción $\nu_p(A_1A_m^2) > \nu_p(A_1A_{m+1}^2)$ para $2 \leq m \leq k-1$.

En consecuencia se satisface la siguiente cadena de desigualdades

$$t > \nu_p(A_1A_3^2) > \nu_p(A_1A_4^2) \ldots \nu_p(A_1A_k^2) \geq t.$$

Pero esto es una contradicción y en consecuencia hemos demostrado por inducción que n divide a $2S$.

4. En lo que sigue denotaremos el máximo común divisor de dos números enteros m y n por (m,n). Tenemos las siguientes observaciones:

(i) Para todo n, $P(n) = n^2 + n + 1$ es impar.

(ii) Para todo n $P(n)$ y $P(n+1)$ son primos relativos, es decir,

$$(P(n), P(n+1) = 1.$$

En efecto,

$$(P(n), P(n+1)) = (n^2+n+1, n^2+3n+3) = (n^2+n+1, 2n+2).$$

Como n^2+n+1 es impar para todo n, entonces $(n^2+n+1, 2n+2) = (n^2+n+1, n+1)$, pero $(n^2+n+1, n+1) = (1, n+1) = 1$ y por tanto, $(P(n), P(n+1)) = 1$.

(iii) $(P(n), P(n+2)) = 1$ para todo $n \not\equiv 2(\mod 7)$ y $(P(n), P(n+2)) = 7$ para $n \equiv 2(\mod 7)$. En efecto, como $(2n+7)P(n) - (2n-1)P(n+2) = 14$ y como $P(n)$ es impar para todo n, entonces $(P(n), P(n+2))$ debe ser un divisor de 7. Ahora basta con verificar lo afirmado para $n \equiv 0, 1, \ldots 6(\mod 7)$.

(iv) $(P(n), P(n+3)) = 1$ para todo $n \not\equiv 1(\mod 3)$ y 3 divide a $(P(n), P(n+3))$ para $n \equiv 1(\mod 3)$. En efecto, como $(n+5)P(n) - (n-1)P(n+3) = 18$ y por ser $P(n)$ impar, deducimos que $(P(n), P(n+3))$ es un divisor de 9. Al igual que en el caso anterior basta con verificar los casos $n \equiv 0, 1, 2(\mod 3)$ directamente.

Supongamos ahora que existe un conjunto fragante con menos de 6 elementos. Podemos suponer que contiene exactamente 5 elementos $P(a), P(a+1), \ldots, P(a+4)$ pues el argumento dado a continuación también sirve con menos elementos. Consideremos $P(a+2)$, de (ii), él es primo relativo con $P(a+1)$ y $P(a+3)$. Asumamos sin pérdida de generalidad que $(P(a), P(a+2)) > 1$. Entonces por (iii), tendremos que $a \equiv 2(\mod 7)$. Pero entonces $a+1 \equiv 3(\mod 7)$ y de nuevo por (iii), $(P(a+1), P(a+3)) = 1$. Por la definición de conjunto fragante, para que $\{P(a), P(a+1), \ldots, P(a+4)\}$ lo sea, debe ocurrir que $(P(a), P(a+3)) > 1$ y $(P(a+1), P(a+4)) > 1$. Por (iv) esto ocurre solamente cuando a y $a+1$ son congruentes a $1 \mod 3$, lo cual es una contradicción.

Ahora para finalizar construiremos un conjunto fragante con 6 elementos. Por el Teorema Chino del Resto, podemos encontrar un entero positivo a tal que

$$a \equiv 7 \mod 19, \quad a+1 \equiv 2 \mod 7, \quad a+2 \equiv 1 \mod 3.$$

Por ejemplo, tomamos $a = 197$. De (iii), tanto $P(a+1)$ como $P(a+3)$ son divisibles por 7. Por (iv) $P(a+2)$ y $P(a+5)$ son divisibles por 3. Solo queda comprobar que $P(a)$ y $P(a+4)$ son divisibles por 19, pero esto se deduce porque 19 divide a $P(7) = 57$ y 19 divide a $P(11) = 133$. Por tanto, el conjunto $\{P(a), P(a+1), \ldots, P(a+5)\}$ es fragante y la menor cantidad posible de elementos para un conjunto fragante es 6.

5. Como hay 2016 factores lineales comunes en ambos miembros de la ecuación, necesitaremos borrar al menos 2016 factores. Demostraremos que la ecuación resultante no tendrá raíces reales si del lado izquierdo borramos todos los factores de la forma $(x-k)$, con $k \equiv 2, 3 \mod 4$, y del lado derecho borramos todos los factores de la forma $(x-m)$, con $m \equiv 0, 1 \mod 4$. Por tanto, será suficiente demostrar que ningún número real x satisface la ecuación

$$\prod_{j=0}^{503}(x-4j-1)(x-4j-4) = \prod_{j=0}^{503}(x-4j-2)(x-4j-3). \tag{7.1}$$

Caso 1. Veamos primero que para x entero y $x = 1, 2, \ldots 2016$, no hay solución.

En este caso el miembro izquierdo es igual a cero, mientras que el miembro derecho es distinto de cero. Por tanto x no puede satisfacer la ecuación (1).

Caso 2. Supongamos que x es un número real y $4k+1 < x < 4k+2$ o $4k+3 < x < 4k+4$ para algún $k = 0, 1, 2 \ldots, 503$ y veamos que tampoco es posible para x con estas condiciones ser solución de la ecuación (1). Para $j = 0, 1, 2, \ldots, 503$ con $j \neq k$, el producto $(x-4j-1)(x-4j-4)$ siempre es positivo, pero para $j = k$, el producto

$(x-4k-1)(x-4k-4)$ es negativo. Por tanto el lado izquierdo de (1) es negativo. Por otra parte el producto $(x-4j-2)(x-4j-3)$ en el miembro derecho es positivo y entonces el lado derecho de la ecuación (1) es positivo y esto es una contradicción.

Caso 3. Supongamos x es un número real y que $x < 1$ 0 $x > 2016$ 0 $4k < x < 4k+1$, para algún $k = 0, 1, \ldots, 503$. La ecuación (1) puede reescribirse como

$$1 = \prod_{j=0}^{503} \frac{(x-4j-1)(x-4j-4)}{(x-4j-2)(x-4j-3)} = \prod_{j=0}^{503} \left(1 - \frac{2}{(x-4j-2)(x-4j-3)}\right).$$

Entonces por la suposición sobre x, tenemos que para $0 \le j \le 503$, el producto $(x-4j-2)(x-4j-3) > 2$. Esto implica que cada factor del producto está entre 0 y 1, y por tanto, el producto es menor que 1, lo cual es de nuevo una contradicción.

Caso 4. Supongamos finalmente que x es un número real y que $4k+2 < x < 4k+3$ para algún $k = 0, 1, \ldots, 503$. Reescribamos la ecuación (1) como

$$\begin{aligned} 1 &= \tfrac{x-1}{x-2} \cdot \tfrac{x-2016}{x-2015} \prod_{j=1}^{503} \tfrac{(x-4j)(x-4j-1)}{(x-4j+1)(x-4j-2)} \\ &= \tfrac{x-1}{x-2} \cdot \tfrac{x-2016}{x-2015} \prod_{j=1}^{503} \left(1 + \tfrac{2}{(x-4j+1)(x-4j-2)}\right). \end{aligned}$$

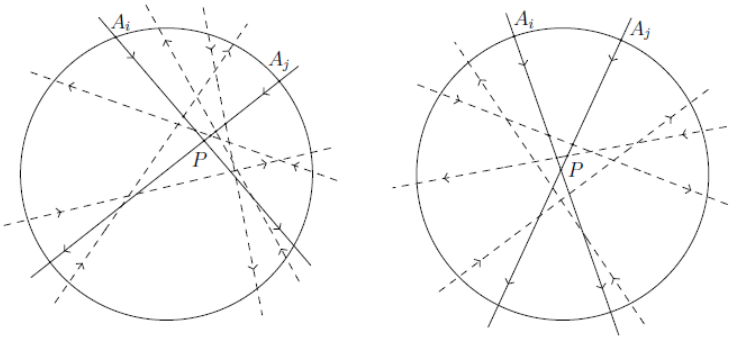
Por lo que hemos supuesto sobre x, entonces $\frac{x-1}{x-2}$ y $\frac{x-2016}{x-2015}$ son ambos mayores que 1. También por lo supuesto sobre x, cada término del producto también es mayor que 1. Por tanto, el lado derecho es mayor que 1 y esto de nuevo es una contradicción.

De los cuatro casos se concluye que la ecuación (1) no tiene raíces reales y el número mínimo de factores lineales que debemos borrar es 2016.

6. Consideremos un disco grande que contenga a todos los segmentos. Extendamos cada segmento a una recta ℓ_i que corte al disco es dos puntos distintos A_i y B_i.

(a) Cuando n es impar, recorramos la circunferencia del disco y marquemos cada punto de intersección A_i y B_i con las etiquetas *adentro* y *afuera* de manera alternada. Como cada par de rectas se intersectan en el disco, hay exactamente $n-1$ puntos entre A_i y B_i, para cualquier $1 \le i \le n$ elegido. Como n es impar, entonces o bien A_i está marcado con la etiqueta *adentro* y B_i con la etiqueta *afuera*, o al revés. Supongamos que Mafalda pone la rana en el extremo de cada segmento que está más cerca de la etiqueta *adentro* en la recta correspondiente. Demostraremos que las ranas sobre ℓ_i y ℓ_j no se encuentran nunca en un mismo punto, para cualquier pareja i, j que se elija.

En efecto, sin pérdida de generalidad podemos suponer que las ranas comienzan en A_i y A_j respectivamente. Llamemos P al punto de intersección de ℓ_i con ℓ_j. Nótese que al ser n impar e ir etiquetando los puntos con las etiquetas *adentro* y *afuera* de manera alternada, habrá un número impar de puntos en el arco A_iB_i. Cada uno de estos puntos pertenece a una recta ℓ_k. Cada una de estas rectas debe intersectar exactamente uno de los segmentos A_iP y A_jP, teniéndose un número impar de intersecciones. En el caso de las otras rectas, ellas pueden intersectar ambos segmentos A_iP y A_jP o ninguno de ellos. Por tanto, el número total de puntos de intersección sobre los segmentos A_iP y A_jP sin contar a P, es impar. Si las ranas llegasen al punto P al mismo tiempo, entonces habría la misma cantidad de intersecciones sobre A_iP y A_jP, lo cual dará un número par de intersecciones y esto es una contradicción.



(b) Cuando n es par, consideremos que Mafalda coloca las ranas de cualquier manera y marca cada uno de los puntos A_i o B_i con las etiquetas *adentro* y *afuera* de acuerdo a las direcciones en las cuales saltan las ranas. Como n es par debe haber dos puntos vecinos A_i y A_j marcados ambos con la etiqueta *adentro*. Sea P la intersección de los segmentos A_iB_i y A_jB_j. Entonces cualquier otro segmento que intersecte a uno de los segmentos A_iP y A_jP también deberá intersectar al otro, y por tanto, el número de intersecciones sobre A_iP y sobre A_jP será igual. Por tanto las ranas que comienzan en A_i y en A_j se encontrarán en P.

Premiación de las Olimpiadas Matemáticas del 2016

Final Nacional de la Olimpiada Juvenil de Matemáticas

Primer Año

Medallas de Oro

Nombre	Instituto	Estado
Elliot Larez	Los Próceres	Bolívar
Javier Rodríguez	Santiago de León	Caracas

Medallas de Plata

Helena Benatar	Moral y Luces	Caracas
Isabella Bolívar	Academia Merici	Caracas
Lucía Sáez	Integral El Ávila	Caracas
Diego Stecca	Las Colinas	Lara

Medallas de Bronce

Sarah Cardozo	Los Campitos	Caracas
Ana Paula de Sousa	San Pedro	Lara
María Fuenmayor	Escuela Bella Vista	Zulia
Yargen González	Cristo Rey Santa Mónica	Caracas
Fabiola Jaén	Las Colinas	Lara
Jesus Ortega	Joseph J. Thomson	Zulia
Leonardo Sobrecueva	Integral El Ávila	Caracas

Menciones de Honor

Ricardo Graffe	El Peñón	Caracas
Catherine Savini	Instituto Andes	Caracas

Segundo Año

Medallas de Oro

Christopher Ferazzoli	Olga Bayones	Carabobo
Daniel Núñez	Escuela Bella Vista	Zulia
José Alberto Ortíz Seba	San José Maristas	Aragua

Medallas de Plata

Juan Diego Guevara	Bella Vista	Aragua
Diego Maciel	Hipocampitos	Miranda
Bernardo Patiño	Independencia	Lara
Sabrina Queipo	San Vicente de Paul	Zulia

Medallas de Bronce

Vanessa Ayala	Los Campitos	Caracas
David Bitar	Escuela Bella Vista	Zulia
Juan Maroso	Escuela Bella Vista	Zulia
Bárbara Palacios	Integral El Ávila	Caracas
Jatniel Sánchez	Siso Martínez	Lara

Tercer Año

Medallas de Oro

Pablo Ramírez	Escuela Comunitaria	Miranda

Medallas de Plata

Roberto Patiño	Emil Friedman	Caracas
Román Rodríguez	Monte Carmelo	Bolívar

Medallas de Bronce

Martín Fernández	Colegio Cumbres	Caracas
José Hernao	Liceo Los Robles	Zulia
Alejandro Maris	Colegio Madison	Caracas
Kimberly Rodríguez	Escuela Bella Vista	Zulia
Alejandro Troconis	IEA El Peñón	Caracas

Cuarto Año

Medallas de Oro

Ónice Aguilar	La Presentación	Mérida
José Mendez	Colegio Cumbres	Caracas
Amanda Vanegas	San Francisco de Asis	Zulia

Medallas de Plata

Javier Pulido	Hipocampitos	Miranda
Laura Queipo	San Vicente de Paul	Zulia
Sohrab Vafa	Inst. Educ. Aragua	Aragua

Medallas de Bronce

Cristian Inojosa	Loyola Gumilla	Bolívar
Harrison Maestu	Adolfo Valbuena	Carabobo
Alberto Matute	Academia Washington	Caracas
Miguel Melo	Hipocampitos	Miranda
Iván Rodríguez	Santiago de León	Caracas

Menciones de Honor

Jesús Figueroa	Monte Carmelo	Bolívar
Jesús Lares	Angel de la Guarda	Guárico
Leonardo Manrique	Adolfo Valbuena	Carabobo
Carynes Romero	U. E. Simón Bolívar	Monagas
Jayka Tisminezky	Escuela Bella Vista	Zulia

Quinto Año

Medallas de Oro

Wemp Pacheco	Calicantina	Aragua

Medallas de Plata

Juan Cabrera	Santiago de León	Caracas
Ignacio Muñoz	Santiago de León	Caracas
Luciano Salvetti	Emil Friedman	Caracas

Medallas de Bronce

Johann Bastardo	Iberoamericano	Bolivar
Franklin Bello	Iberoamericano	Bolivar
Samuel Meza	Loyola Gumilla	Bolivar
Aldo Pierini	Ntra. Sra. de Chiquinquirá	Zulia
Rodolfo Rivas	Juan XXIII	Carabobo
Rubén Sucre	San Ignacio	Caracas

Menciones de Honor

Sofía Fleitas	Los Caminos	Portuguesa
José Pérez	Cecilio Acosta	Apure

Premios Especiales

Ónice Aguilar (La Presentación, Mérida)

Premio de la Fundación Empresas Polar a la mejor prueba.

Pablo Ramírez (Escuela Comunitaria, Miranda)

Premio UNEXPO a la respuesta más creativa.

Premio de Honor al Mérito por haber participado en todos los niveles de las OJM:

Johann Bastardo, Franklin Bello, Wemp Pacheco.

Premio Profesor Eduardo Contreras OJM 2016: Iván Rodríguez (Caracas).

Olimpiada de Mayo 2016

Nivel I

Medallas de Plata

Alan Yu Chen
Francisco Molina Tirado
Victoria Eugenia Consalvo Quevedo

Medallas de Bronce

María Victoria García Fernández
Santiago Flores
Francisco Miguel Cortez Torres
María Laura Isea García

Nivel II

Medallas de Bronce

Marien Alejandra Solis Alcega
Román David Rodríguez Ordaz

Menciones de Honor

Juan Diego Guevara Lugo
Yargen Daniel González Salcedo
José Alberto Ortiz Seba
Oriana Pintos Caguaripano
Diego Alejandro Maciel De Lima
Andrea Valentina Ojeda Vizcarrondo

Olimpiada Centroamericana y del Caribe 2016

José Alberto Ortiz Seba	Mención de Honor
Juan Diego Guevara Lugo	Mención de Honor

Olimpiada Iberoamericana 2016

Wemp Pacheco	Medalla de Plata
Iván Rodríguez	Medalla de Bronce

Olimpiada Internacional (IMO) 2016

Wemp Pacheco	Medalla de Bronce
Iván Rodríguez	Mención de Honor

Olimpiada Juvenil de Matemáticas 2016

Comité Organizador Nacional

Rafael Sánchez Lamoneda (Presidente)
Laura Vielma Herrero (Coordinadora Nacional)
José Heber Nieto Said (Coordinador Académico)
Saturnino Fermín Reyes (Coordinador Administrativo)
Sophia Taylor, Estefanía Ordaz, Diego Peña,
Rubmary Rojas, Mauricio Marcano (Colaboradores)

Coordinadores Regionales

Prof. Luis Alberto Rodríguez (Anzoátegui)
Prof. Rafael Antonio Valdez Tovar (Apure)
Prof. Jesús Acosta (Aragua)
Prof. Mary Acosta (Bolívar)
Prof. José Alberto Infante (Capital)
Prof. Mirba Romero (Carabobo)
Prof. Sonia Chacón (Cojedes)
Prof. Addy Goitía (Falcón)
Prof. Carlos Lira (Guárico)
Prof. Víctor Carruci (Lara)
Prof. Olga Porras (Mérida)
Prof. Lisandro Alvarado (Miranda)
Prof. Yelenny Guanipa (Monagas)
Prof. Grace Rivero (Nueva Esparta)
Prof. Evelio Castillo (Portuguesa)
Prof. Luisa López (Sucre)
Prof. Jonathan Riveros (Táchira)
Prof. Ramón Blanco (Trujillo)
Prof. Larry Mendoza (Vargas)
Prof. Johan Goyo (Yaracuy)
Prof. José Heber Nieto Said (Zulia)

Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas

ASOCIACIÓN MATEMÁTICA VENEZOLANA

ACADEMIA DE CIENCIAS FÍSICAS, MATEMÁTICAS Y NATURALES

Association Le Kangourou des Mathématiques Kangourou sans frontiéres

Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas
UCV. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Ofic. 331
Los Chaguaramos, Caracas 1020. Venezuela. Telefax: 212.6051512
email:asomatemat8@gmail.com. Página Web:www.acfiman.org