ASOCIACIÓN
VENEZOLANA
DE COMPETENCIAS
MATEMÁTICAS

Olimpiada Juvenil de Matemática 2019

Canguro, Regional y Final

Problemas y Soluciones

José Heber Nieto Said
Rafael Sánchez Lamoneda

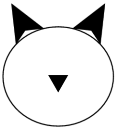
Índice general

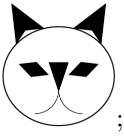
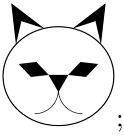
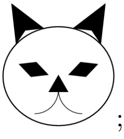
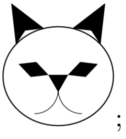
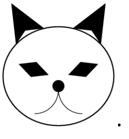
Capítulo 1

Prueba Canguro

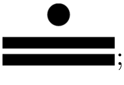
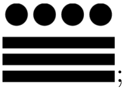
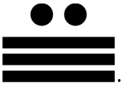
1.1. Prueba de Primer Año y Segundo Año

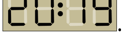
Problema 1. Carmen ha comenzado a dibujar un gato. Ella finaliza su dibujo agregando más tinta negra. ¿Cuál de las figuras siguientes puede ser su dibujo?



Ⓐ ; Ⓑ ; Ⓒ ; Ⓓ ; Ⓔ .

Problema 2. Los mayas escribían números con puntos y rayas. Un punto vale 1 y una raya 5. ¿Cómo escribían 17?

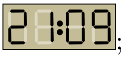
Ⓐ ; Ⓑ ; Ⓒ ; Ⓓ ; Ⓔ .

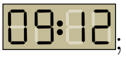
Problema 3. Un reloj digital muestra las 

. ¿Qué hora mostrará la próxima vez que use los mismos cuatro dígitos?

Ⓐ 

; Ⓑ 

; Ⓒ 

; Ⓓ 

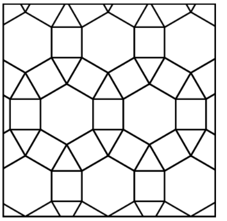
; Ⓔ 

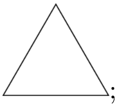
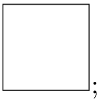
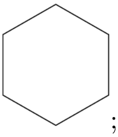
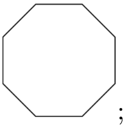
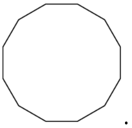
.

Problema 4. En una clase hay 14 niñas y 12 niños. Si la mitad de la clase se va a un paseo, ¿al menos cuántas niñas irán al paseo?

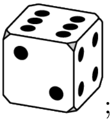
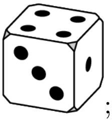
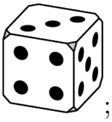
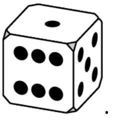
Ⓐ 5; Ⓑ 4; Ⓒ 3; Ⓓ 2; Ⓔ 1.

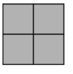
Problema 5. ¿Cuál de las figuras que se muestran abajo NO está contenida en el diseño de la derecha?

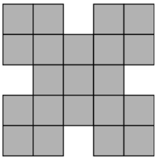


(A) ; (B) ; (C) ; (D) ; (E) .

Problema 6. La suma de los puntos en caras opuestas de un dado ordinario es 7. ¿Cuál de las siguientes figuras puede corresponder a un dado ordinario?

(A) ; (B) ; (C) ; (D) ; (E) .

Problema 7. Laura desea colorear un cuadrado 2×2  en la figura que se ve a la derecha. ¿De cuántas maneras puede elegir el cuadrado a colorear?



(A) 8; (B) 5; (C) 9; (D) 6; (E) 7.

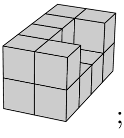
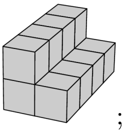
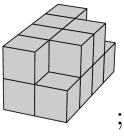
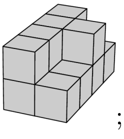
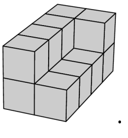
Problema 8. Los 6 enteros positivos impares más pequeños se escriben en las caras de un dado. Antonio lanza el dado tres veces y suma los resultados. ¿Cuál de los números siguientes NO puede ser la suma?

(A) 21; (B) 20; (C) 19; (D) 3; (E) 29.

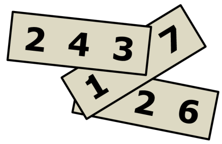
Problema 9. La suma de las edades de un grupo de canguros es 36 años. Dentro de dos años la suma de sus edades será 60 años. ¿Cuántos canguros hay en el grupo?

(A) 24; (B) 20; (C) 15; (D) 12; (E) 10.

Problema 10. Miguel pinta las siguientes construcciones, todas ellas hechas con cubos idénticos y con 8 cubos en la base. ¿Cuál de ellas necesita más pintura?

(A) ; (B) ; (C) ; (D) ; (E) .

Problema 11. En cada uno de tres trozos de papel se escribe un número entero de tres dígitos. Luego se disponen los trozos de papel de tal manera que dos de los dígitos quedan cubiertos, como se muestra en la figura. La suma de los tres números es 826. ¿Cuál es la suma de los dos dígitos cubiertos?

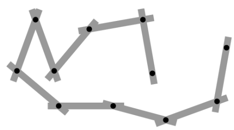


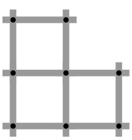
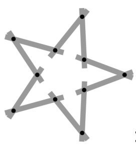
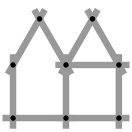
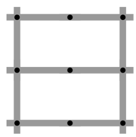
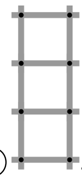
Ⓐ 7; Ⓑ 8; Ⓒ 9; Ⓓ 10; Ⓔ 11.

Problema 12. La rana Pili usualmente come 5 arañas por día. Pero cuando Pili está muy hambrienta, come 10 por día. Si comió 60 arañas en 9 días, ¿en cuántos de esos días estuvo muy hambrienta?

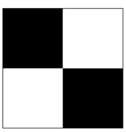
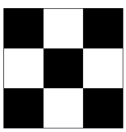
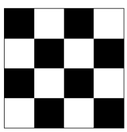
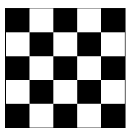
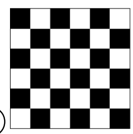
Ⓐ 1; Ⓑ 2; Ⓒ 3; Ⓓ 6; Ⓔ 9.

Problema 13. Pilar juega con un metro articulado que consta de diez segmentos de 10 cm cada uno, como muestra la figura. ¿Cuál de las siguientes figuras NO puede ser formada por Pilar?

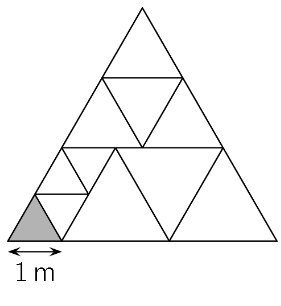


Ⓐ ; Ⓑ ; Ⓒ ; Ⓓ ; Ⓔ .

Problema 14. Cinco cuadrados iguales se dividen en cuadrados más pequeños. ¿En cual de los cuadrados el área negra es mayor?

Ⓐ ; Ⓑ ; Ⓒ ; Ⓓ ; Ⓔ .

Problema 15. Un triángulo grande se divide en triángulos equiláteros más pequeños, como muestra la figura. El lado del triángulo pequeño gris mide 1 m. ¿Cuál es el perímetro del triángulo grande?

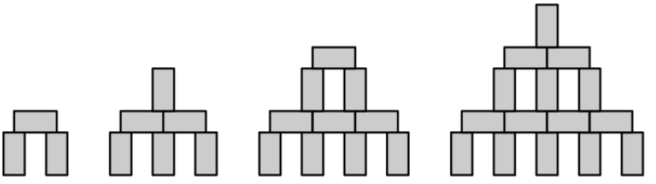


Ⓐ 15 m; Ⓑ 17 m; Ⓒ 18 m; Ⓓ 20 m; Ⓔ 21 m.

Problema 16. En el jardín de una bruja hay 30 animales: perros, gatos y ratones. La bruja convirtió 6 perros en gatos. Luego convirtió 5 gatos en ratones. Ahora en el jardín hay el mismo número de perros, gatos y ratones. ¿Cuántos gatos había al comienzo?

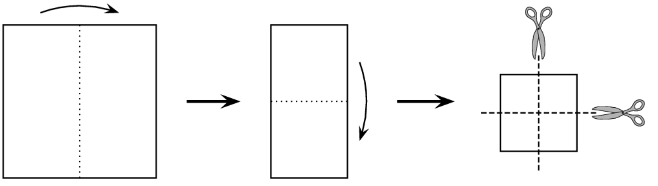
Ⓐ 4; Ⓑ 5; Ⓒ 9; Ⓓ 10; Ⓔ 11.

Problema 17. Con bloques de dimensiones 1cm $\times$ 1cm $\times$ 2cm se pueden construir torres como se muestra en la figura. ¿Qué altura tiene la torre que se puede construir de la misma manera con 28 bloques?



Ⓐ 11cm; Ⓑ 9cm; Ⓒ 17cm; Ⓓ 12cm; Ⓔ 14cm.

Problema 18. Berta plegó una hoja de papel dos veces y luego la cortó dos veces como se muestra en la figura. ¿Cuántas piezas de papel obtuvo?

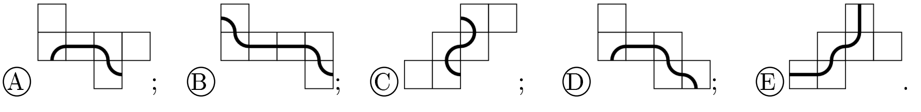


Ⓐ 6; Ⓑ 8; Ⓒ 9; Ⓓ 12; Ⓔ 16.

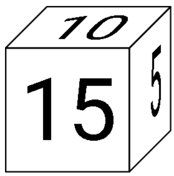
Problema 19. Eduardo, Darío y Lisandro dan un paseo juntos cada día. Si Eduardo no lleva sombrero, entonces Darío lleva sombrero. Si Darío no lleva sombrero, entonces Lisandro lleva sombrero. Hoy Darío no lleva sombrero. ¿Quienes llevan sombrero?

Ⓐ Sólo Eduardo; Ⓑ Sólo Lisandro; Ⓒ Ni Eduardo ni Lisandro;
Ⓓ Eduardo y Lisandro; Ⓔ No se puede determinar..

Problema 20. Cada una de las figuras siguientes muestra el desarrollo plano de un cubo. Sólo uno de los cubos resultantes tiene una línea cerrada sobre él. ¿Cuál es?

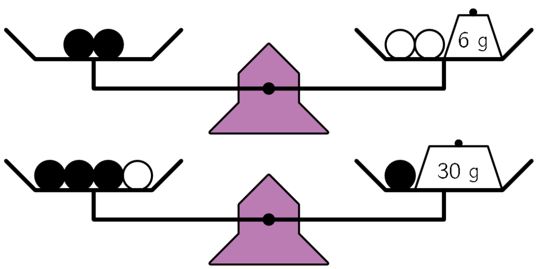


Problema 21. El cubo de la figura tiene un entero positivo escrito en cada cara. Los productos de cada par de números escritos en caras opuestas son los mismos. ¿Cuál es el menor valor posible de la suma de los 6 números escritos en las caras?



Ⓐ 36; Ⓑ 41; Ⓒ 37; Ⓓ 60; Ⓔ 44.

Problema 22. Seis esferas blancas idénticas y tres esferas negras idénticas se colocan en una balanza de platillos y se equilibran como muestran las figuras.



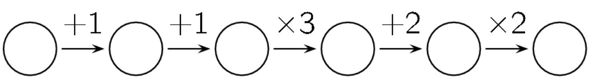
¿Cuál es el peso total de las nueve esferas?

Ⓐ 100 g; Ⓑ 99 g; Ⓒ 96 g; Ⓓ 94 g; Ⓔ 90 g.

Problema 23. Roberto hizo 5 afirmaciones A, B, C, D y E, de las cuales exactamente una es falsa. ¿Cuál es la falsa?

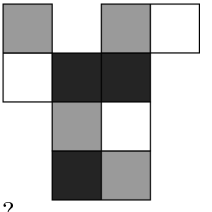
Ⓐ Mi hijo Basilio tiene 3 hermanas.; Ⓑ Mi hijo Basilio tiene 2 hermanos.;
Ⓒ Mi hija Ana tiene dos hermanos.; Ⓓ Mi hija Ana tiene dos hermanas.;
Ⓔ Yo tengo 5 hijos..

Problema 24. Benjamin escribe un número entero en el primer círculo y luego llena los 5 círculos restantes siguiendo las instrucciones.



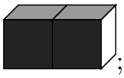
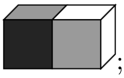
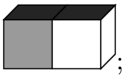
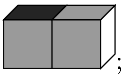
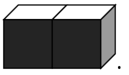
¿Cuántos de los seis números en los círculos son divisibles entre 3?

Ⓐ 1; Ⓑ tanto 1 como 2 son posibles; Ⓒ tanto 2 como 3 son posibles;
Ⓓ 2; Ⓔ tanto 3 como 4 son posibles.



Problema 25. Plegando la cartulina que se muestra a la derecha se arma una caja de dimensiones $2 \times 1 \times 1$.

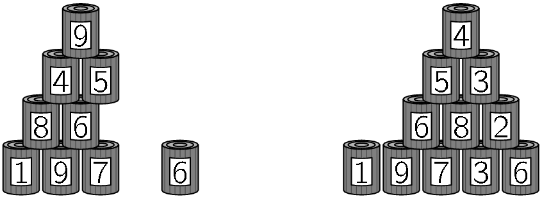
¿Cuál de las siguientes figuras NO corresponde a la caja armada?

(A) ; (B) ; (C) ; (D) ; (E) .

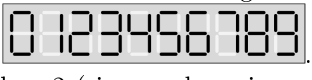
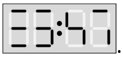
Problema 26. Emilia les tomó fotos a sus 8 primas. En cada foto aparecen exactamente 5 de sus primas, y cada prima aparece en 2 o en 3 fotos. ¿Cuántas fotos tomó Emilia?

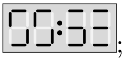
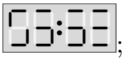
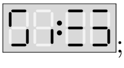
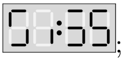
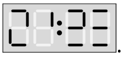
(A) 4; (B) 5; (C) 3; (D) 7; (E) 6.

Problema 27. José y Blas lanzan pelotas a dos pirámides idénticas de 15 latas. José tumbó 6 latas, totalizó 25 puntos y su pirámide quedó como se ve a la izquierda. Blas tumbó 4 latas y su pirámide quedó como se ve a la derecha. ¿Cuántos puntos logró Blas?



(A) 22; (B) 23; (C) 25; (D) 26; (E) 28.

Problema 28. Cada dígito de mi reloj digital se forma con 7 segmentos como máximo, así: . Pero desafortunadamente en cada conjunto de 7 segmentos hay 2 (siempre los mismos) que no encienden. En este momento mi reloj se ve así: . ¿Cómo se verá dentro de 3 horas y 45 minutos?

(A) ; (B) ; (C) ; (D) ; (E) .

Problema 29. Lino construyó un cubo de lado 4 usando 64 cubitos de lado 1, 32 de ellos blancos y los otros 32 negros. Él acomodó los cubitos de modo que la porción blanca de la superficie del cubo grande fuese lo mayor posible. ¿Qué fracción de esa superficie es blanca?

(A) $\frac{3}{4}$; (B) $\frac{1}{4}$; (C) $\frac{1}{2}$; (D) $\frac{2}{3}$; (E) $\frac{3}{8}$.

Problema 30. Leo tiene dos máquinas: una de ellas cambia 1 ficha blanca por 4 fichas rojas, mientras que la otra cambia 1 ficha roja por 3 fichas blancas. Inicialmente Leo tenía 4 fichas blancas y luego de 11 intercambios quedó con 31 fichas. ¿Cuántas de esas son rojas?

Ⓐ 21; Ⓑ 17; Ⓒ 14; Ⓓ 27; Ⓔ 11.

1.1.1. Soluciones

1. La respuesta correcta es la (D).

2. La respuesta correcta es la (E).

3. La respuesta correcta es la (C) (20:91 no es una hora válida).

4. La respuesta correcta es la (E). De los 26 alumnos van al paseo 13, y como sólo hay 12 niños debe ir al menos una niña.

5. Por simple inspección se ve que la respuesta correcta es la (D).

6. La respuesta correcta es la (B), pues en todas las demás hay dos caras adyacentes que suman 7.

7. La respuesta correcta es la (A).

8. La respuesta correcta es la (B), pues la suma de tres números impares es impar.

9. La respuesta correcta es la (D). En doa años la suma de edades aumentará en 24, luego hay 12 canguros.

10. La respuesta correcta es la (A), que requiere pintar 4 caras más que (B). Mientras que (C), (D) y (E) requiere pintar 2 caras más que (B).

11. La respuesta correcta es la (C). Los números cubiertos son ser 157 y 426.

12. La respuesta correcta es la (C). Si x representa el número de días en los que Pili estuvo muy hambrienta, entonces comió $10x + 5(9 - x) = 60$ arañas, de donde $x = 3$.

13. La respuesta correcta es la (E). Es fácil verificar que las otras cuatro opciones sí se pueden lograr.

14. La respuesta correcta es la (B), en la cual el área negra cubre 5/9 del cuadrado. En (A), (C) y (E) cubre la mitad, y en (D) cubre $13/25 < 5/9$.

15. La respuesta correcta es la (A) (el lado del triángulo grande mide 5 m).

16. La respuesta correcta es la (C). Al final hay 10 animales de cada clase, y como hay un gato más que al comienzo, inicialmente había 9 gatos.

17. La respuesta correcta es la (A). La quinta torre tendrá 21 bloques en 6 filas y la sexta 28 bloques en 7 filas, de las cuales, de los cuales 4 filas serán de altura 2 cm y 3 filas de altura 1 cm. Luego la altura de la torre será $4 \times 2 + 3 = 11$ cm.

18. La respuesta correcta es la (C). En la hoja desplegada quedarán dos cortes horizontales de lado a lado y dos cortes verticales, que la dividen en 9 partes.

19. La respuesta correcta es la (D). Como Darío no lleva sombrero, entonces Lisandro lleva sombrero. Y Eduardo también, pues si no entonces Darío llevaría sombrero.

20. La respuesta correcta es la (E). Las otras opciones dan lugar a curvas abiertas.

21. La respuesta correcta es la (B). El producto de los números en caras opuestas debe ser múltiplo de 15, 10 y 5, por lo tanto es al menos 30. Con ese valor los números en las caras opuestas de 15, 10 y 5 son 2, 3 y 6, y la suma de las caras es 41.

22. La respuesta correcta es la (E). Observe que si se retira una bola negra de cada platillo en la segunda figura, entonces dos bolas negras y una blanca se equilibran con 30 g. Luego 6 bolas negras y 3 blancas pesan 90 g.

23. La afirmación falsa es la (B). Como (A) y (B) son contradictorias, una de ellas debe ser falsa. Pero (B) y (C) también son contradictorias, luego una de ellas es falsa. En conclusión (A) es la falsa.

24. La respuesta correcta es la (D). Si el número en el primer círculo es n, en los siguientes estarán $n+1$, $n+2$, $3(n+2)$, $3(n+2)+2$ y $2(3(n+2)+2)$. Es claro que el cuarto es múltiplo de 3 pero ni el quinto ni el sexto lo son. Y de los tres primeros, uno y sólo uno es múltiplo de 3. Luego hay exactamente 2 múltiplos de 3.

25. La figura que no corresponde es la (E). En efecto, la cara lateral derecha debería ser blanca como en las demás opciones.

26. La respuesta correcta es la (A), 4 fotos. Con 3 fotos alguna prima aparecería menos de 2 veces, y con 5 fotos alguna aparecería más de 3 veces.

27. La respuesta correcta es la (D). Si la lata superior vale x puntos, entonces $x+4+3+8+2+3=25$, de donde $x=5$. Y Blas hizo $x+9+4+8=26$ puntos.

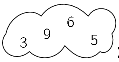
28. La respuesta correcta es la (B). Observando la imagen de la hora actual se deduce que los segmentos que no encienden son el vertical derecho superior y el vertical izquierdo inferior. La hora actual es 23:47, y dentro de 3 h 45 m serán las 03:32.

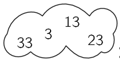
29. Para maximizar el área blanca deben colocarse 8 cubitos blancos en las esquinas (cada uno de ellos da 3 unidades de área blanca en la superficie) y los restantes 24 en las aristas (dando 2 unidades de área blanca cada uno), para un total de $8\times3+24\times2=72$ unidades de superficie blanca de un total de $4\times4\times6=96$, es decir $72/96=3/4$ de la superficie blanca, opción (A).

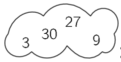
30. Sea x el número de veces que Leo usó la primera máquina. Entonces usó la segunda $11-x$ veces y al final quedaron $4-x+3(11-x)=37-4x$ fichas blancas y $4x-(11-x)=5x-11$ fichas rojas. El total de fichas es $37-4x+5x-11=x+26=31$, luego $x=5$ y quedaron $5\times5-11=14$ fichas rojas, opción (C).

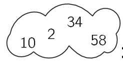
1.2. Prueba de Tercer Año

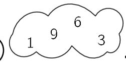
Problema 1. ¿Cuál de las nubes contiene cuatro números pares?

Ⓐ 

; Ⓑ 

; Ⓒ 

; Ⓓ 

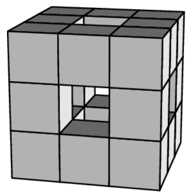
; Ⓔ 

.

Problema 2. ¿Cuántas horas hay en diez cuartos de hora?

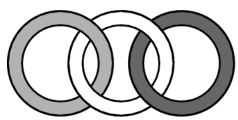
Ⓐ 40; Ⓑ 5 y media; Ⓒ 4; Ⓓ 3; Ⓔ 2 y media.

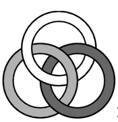
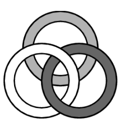
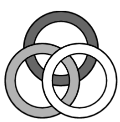
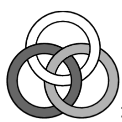
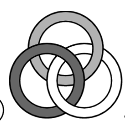
Problema 3. Un cubo de dimensiones $3 \times 3 \times 3$ se construye usando cubitos de tamaño $1 \times 1 \times 1$. Luego se van quitando cubitos de adelante hacia atrás, de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, como se muestra. ¿Cuántos cubitos $1 \times 1 \times 1$ quedan?



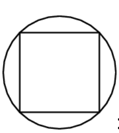
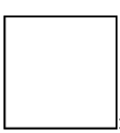
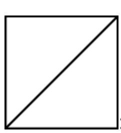
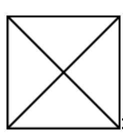
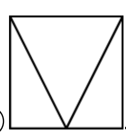
Ⓐ 15; Ⓑ 18; Ⓒ 20; Ⓓ 21; Ⓔ 22.

Problema 4. En la figura de la derecha se muestran tres anillos entrelazados. ¿Cuál de las siguientes figuras muestra los mismos tres anillos entrelazados de la misma manera?



Ⓐ ; Ⓑ ; Ⓒ ; Ⓓ ; Ⓔ .

Problema 5. ¿Cuál de los diagramas que aparecen abajo no se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma línea?

Ⓐ ; Ⓑ ; Ⓒ ; Ⓓ ; Ⓔ .

Problema 6. En una reunión de cinco amigos, cada uno le da una galleta a cada uno de los otros. Una vez que se repartieron las galletas, cada quien se comió solo las galletas que le dieron. Después de esto el número de galletas que les quedó es igual a la mitad de las que tenían al principio. ¿Cuántas galletas tenían al comenzar la reunión?

(A) 60; (B) 40; (C) 30; (D) 24; (E) 20.

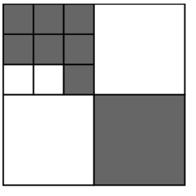
Problema 7. En una carrera, Luis llegó antes que Alfredo, Victor llegó después de Juan, Alfredo llegó antes que Juan y Eduardo llegó antes que Victor. ¿Quién llegó de último?

(A) Victor; (B) Alfredo; (C) Luis; (D) Juan; (E) Eduardo.

Problema 8. Julieta está leyendo un libro cuyas páginas están todas numeradas. En los números utilizados para numerar las páginas aparece el dígito 0 exactamente cinco veces y el dígito 9 exactamente seis veces. ¿Cuál es el número de la última página?

(A) 49; (B) 59; (C) 60; (D) 69; (E) 99.

Problema 9. El cuadrado más grande se ha dividido en cuadrados más pequeños, como se muestra en la figura ¿Qué fracción del cuadrado grande está coloreada de gris?

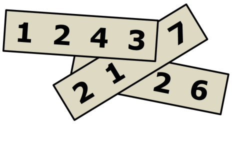


(A) $\frac{2}{3}$; (B) $\frac{2}{5}$; (C) $\frac{4}{7}$; (D) $\frac{4}{9}$; (E) $\frac{5}{12}$.

Problema 10. Andrés separó algunas manzanas en seis montones iguales. Boris separó la misma cantidad de manzanas en cinco montones iguales y observó que cada uno de sus montones tenía dos manzanas más que cada montón de Andrés. ¿Cuántas manzanas tiene Andrés?

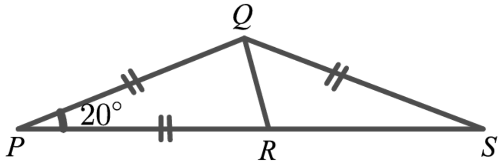
(A) 60; (B) 65; (C) 70; (D) 75; (E) 80.

Problema 11. En cada uno de tres trozos de papel, se escriben números enteros de cuatro dígitos. Luego se disponen los trozos de papel de tal manera que tres dígitos quedan cubiertos, como se muestra en la figura. La suma de los tres números enteros de cuatro dígitos es igual a 10126. ¿Cuáles son los tres dígitos cubiertos?



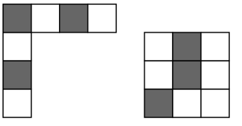
(A) 4, 5 y 7; (B) 4, 6 y 7; (C) 5, 6 y 7; (D) 4, 5 y 6; (E) 3, 5 y 6.

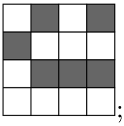
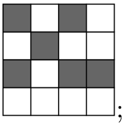
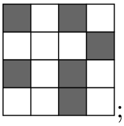
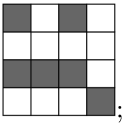
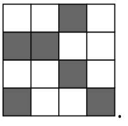
Problema 12. En la figura, $PQ = PR = QS$ y el ángulo $\angle QPR = 20°$. ¿Cuál es la medida del ángulo $\angle RQS$?



Ⓐ 50°; Ⓑ 75°; Ⓒ 60°; Ⓓ 70°; Ⓔ 65°.

Problema 13. Combinando las dos piezas que se muestran a la derecha, ¿cuál de los azulejos de tamaño 4×4 que se muestran abajo no se puede formar?



Ⓐ ; Ⓑ ; Ⓒ ; Ⓓ ; Ⓔ .

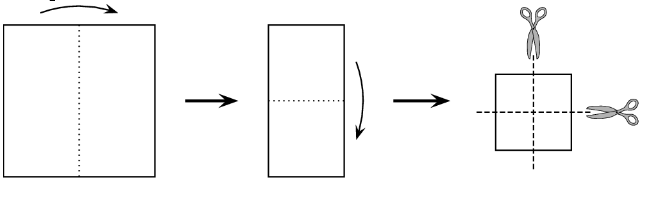
Problema 14. Ana, Bella, Clara, Dora y Elsa se encuentran en una fiesta y dan la mano exactamente una vez a cada una de las que ya conocen. Ana dió su mano una vez, Bella dos veces, Clara tres veces y Dora lo hizo cuatro veces. ¿Cuántas veces dió la mano Elsa?

Ⓐ 1; Ⓑ 2; Ⓒ 3; Ⓓ 4; Ⓔ 0.

Problema 15. Juana está jugando baloncesto. Después de una serie de 20 tiros, Juana había anotado 55 % de las veces. Cinco disparos más tarde, su tasa de aciertos aumentó al 56 %. Cuántas veces acertó en los últimos cinco intentos?

Ⓐ 3; Ⓑ 5; Ⓒ 2; Ⓓ 4; Ⓔ 1.

Problema 16. Carla dobló dos veces una hoja cuadrada de papel exactamente por la mitad y luego la cortó dos veces por la mitad, como muestra la figura. ¿Cuántas de las piezas que obtuvo son cuadradas?

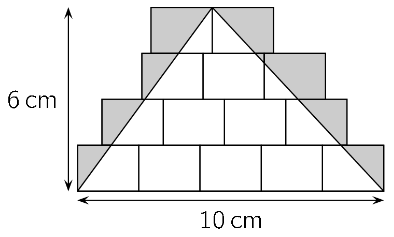


Ⓐ 3; Ⓑ 4; Ⓒ 5; Ⓓ 6; Ⓔ 8.

Problema 17. Miguel tiene perros, vacas, gatos y canguros como mascotas. Le dice a Elena que tiene en total 24 mascotas y que $\frac{1}{8}$ de ellas son perros, $\frac{3}{4}$ NO son vacas y $\frac{2}{3}$ NO son gatos. ¿Cuántos canguros tiene?

(A) 7; (B) 8; (C) 5; (D) 6; (E) 4.

Problema 18. Se dibujan en el suelo varios rectángulos iguales. Sobre ellos se dibuja un triángulo de base 10 cm y altura 6 cm, como se muestra en la figura y luego se sombrea la región dentro de los rectángulos que queda fuera del triángulo. ¿Cuál es el área de la región sombreada?

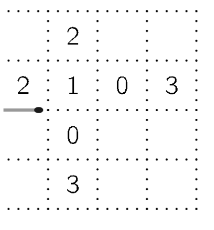


(A) 10 cm^2.; (B) 21 cm^2.; (C) 12 cm^2.; (D) 15 cm^2.; (E) 14 cm^2..

Problema 19. Julio tiene dos velas de forma cilíndrica con altura y diámetro diferentes. La primera vela tarda 6 horas en consumirse, mientras que la segunda tarda 8 horas. Él enciende las dos velas a la vez y tres horas más tarde ambas tienen la misma altura. ¿Cuál es la razón entre sus alturas iniciales?

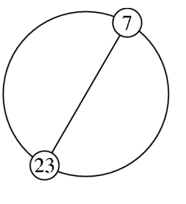
(A) 4 : 3; (B) 3 : 5; (C) 8 : 5; (D) 5 : 4; (E) 7 : 3.

Problema 20. Elena quiere hacer un camino con cerillas usando la menor cantidad posible de ellas. Ella coloca cada cerilla sobre la pieza de papel, a lo largo de las líneas punteadas, como la que se muestra. Su camino se regresa al extremo izquierdo de la cerilla original. Los números mostrados en algunas de las casillas son iguales al número de cerillas alrededor de cada casilla. ¿Cuántas cerillas hay en este camino?



(A) 12; (B) 14; (C) 20; (D) 18; (E) 16.

Problema 21. Se disponen, sobre una circunferencia e igualmente espaciados, los números de 1 a n. Los números 7 y 23 son extremos de un diámetro, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el valor de n?

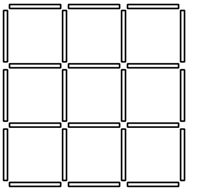


(A) 30; (B) 32; (C) 34; (D) 36; (E) 38.

Problema 22. Luis gastó todo su dinero al comprar 50 botellas de gaseosa por 1 Euro cada una. Luego vendió a un mismo precio, más alto, cada botella. Después de haber vendido 40 botellas tenía 10 euros más que los que tenía al principio y entonces terminó de vender las que le quedaban. ¿Cuánto dinero tiene Luis luego de haber vendido todas las gaseosas?

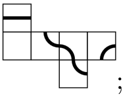
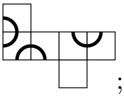
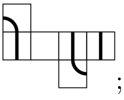
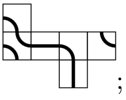
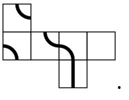
Ⓐ 70 Euros; Ⓑ 80 Euros; Ⓒ 100 Euros; Ⓓ 90 Euros; Ⓔ 75 Euros.

Problema 23. Natalia tiene varios palos de longitud 1. Los palos están coloreados bien sea de azul, rojo, amarillo o verde. Ella quiere construir una cuadrícula, 3×3, como se muestra en la figura, de tal manera que cada cuadrado 1×1 en la cuadrícula tenga cada lado de un color diferente. ¿Cuál es el menor número de palos de color verde que ella podría usar?



Ⓐ 4; Ⓑ 5; Ⓒ 3; Ⓓ 7; Ⓔ 6.

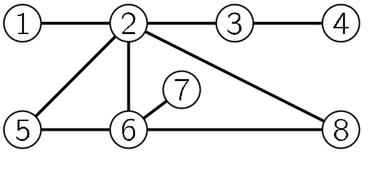
Problema 24. Una hormiga quisiera caminar a lo largo de una línea marcada sobre la superficie de un cubo, hasta regresar al punto de partida. ¿Con cuál de las siguientes figuras se podrá armar un cubo de tal manera que la hormiga pueda realizar el viaje?

Ⓐ  ; Ⓑ  ; Ⓒ  ; Ⓓ  ; Ⓔ  .

Problema 25. Elisa tenía un gran bolsa con 60 chocolates. El lunes se comió la décima parte de ellos. El martes se comió la novena parte de lo que quedaba, el miércoles la octava parte de lo que le quedó el martes, luego el jueves se comió la séptima parte de lo que quedaba en la bolsa y así continuó hasta que se comió la mitad de lo que le quedaba en la bolsa. ¿Cuántos chocolates le quedaron?

Ⓐ 1; Ⓑ 2; Ⓒ 3; Ⓓ 4; Ⓔ 6.

Problema 26. Pedro pintó cada uno de los ocho círculos en la figura de rojo, amarillo o azul, de tal manera que dos de ellos unidos por una línea, no tienen el mismo color. Dos de los círculos tienen necesariamente el mismo color, ¿cuáles son?



Ⓐ 5 y 8; Ⓑ 1 y 6; Ⓒ 2 y 7; Ⓓ 4 y 5; Ⓔ 3 y 6.

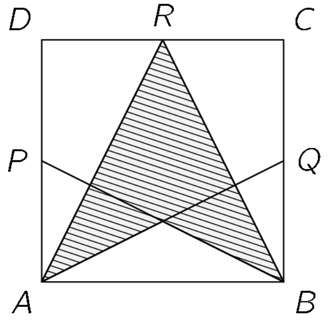
Problema 27. Ria y Flora compararon sus ahorros y encontraron que la razón entre ellos era de 5 : 3. Luego de eso Ria compró una tableta por 160 Euros y la razón entre sus ahorros cambió a 3 : 5. ¿Cuántos Euros tenía Ria antes de comprar la tableta?

Ⓐ 400; Ⓑ 420; Ⓒ 200; Ⓓ 250; Ⓔ 192.

Problema 28. En un torneo de ajedrez participan varios equipos, cada uno con tres jugadores. Cada jugador de cada equipo juega exactamente una sola vez contra cada uno de los miembros de los otros equipos. Por la forma como está organizado el torneo, no se pueden jugar más de 250 juegos en total. ¿Cuál es la mayor cantidad de equipos que pueden participar en el torneo?

Ⓐ 11; Ⓑ 7; Ⓒ 10; Ⓓ 8; Ⓔ 9.

Problema 29. En la figura se muestra un cuadrado $ABCD$ con P, Q y R los puntos medios de los lados DA, BC y CD, respectivamente. ¿Qué fracción del cuadrado está sombreada?



Ⓐ $\frac{3}{8}$; Ⓑ $\frac{3}{4}$; Ⓒ $\frac{5}{8}$; Ⓓ $\frac{1}{2}$; Ⓔ $\frac{7}{16}$.

Problema 30. Un tren está compuesto por 18 vagones. Hay 700 pasajeros viajando en el tren. En cualquier cadena de cinco vagones consecutivos, hay en total 199 pasajeros. ¿Cuántos pasajeros hay en los dos vagones del medio?

Ⓐ 103; Ⓑ 78; Ⓒ 96; Ⓓ 70; Ⓔ 77.

1.2.1. Soluciones

1. La respuesta correcta es la (D).

2. La respuesta correcta es la (E).

3. El cubo completo tiene $3^5 = 27$ cubitos, se quitan 7 y quedan 20, opción (C).

4. La respuesta correcta es la (E), lo que puede verse girando el anillo negro un poco en sentido horario.

5. La respuesta correcta es la (D), para todos los demás se puede.

6. La respuesta correcta es la (B). Cada amigo comió 4 galletas , en total 20. Luego al principio había 40.

7. La respuesta correcta es la (A), Víctor, pues cada uno de los demás llegó antes que algún otro.

8. La respuesta correcta es la (B). El 0 debe aparecer en las páginas 10, 20, 30, 40 y 50. Y el 9 en las páginas 9, 19, 29, 39, 49 y 59.

9. El cuadrado gris grande es $\frac{1}{4}$ del total, y cada cuadradito gris pequeño es $\frac{1}{9}$ de $\frac{1}{4}$, es decir $\frac{1}{36}$ del total . Luego el área sombreada es $\frac{1}{4}+\frac{7}{36}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$ del total, opción (D).

10. Si m es el número de manzanas, entonces $\frac{m}{5}=\frac{m}{6}+2$, de donde $m=60$, opción (A).

11. La respuesta correcta es la (C). La suma de los tres números 1243, $21a7$ y $bc26$ da 10126, luego en las unidades nos llevamos 1, $a=5$ para obtener 2 en las decenas y nos llevamos 1, $c=7$ para obtener 1 en las centenas y nos llevamos 1, y finalmente $b=6$.

12. La respuesta correcta es la (C). PQS es isósceles, luego $\angle QSP=20°$ y $\angle PQS=140°$. PQR también es isósceles, luego $\angle PQR=\angle PRQ=(180°-20°)/2=80°$ y finalmente $\angle RQS=\angle PQS-\angle PQR=140°-80°=60°$.

13. La respuesta correcta es la (E). Basta verificar que los otros cuatro sí se pueden formar.

14. La respuesta correcta es la (B). Dora le dió la mano a las otras cuatro y en particular a Ana, que no le dió la mano a nadie más. Luego Clara le dió la mano a Bella, Dora y Elsa. Bella ya le dió la mano a Dora y Clara, y por lo tanto a nadie más. Entonces Elsa debe haberles dado la mano a Dora y Clara.

15. La respuesta correcta es la (A). El 55 % de 20 tiros son 11 aciertos, y el 56 % de 25 son 14. Luego de los últimos 5 tiros Juana acertó 3.

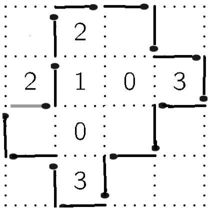
16. La respuesta correcta es la (C). Si se marcan los cortes y se despliega la hoja se verán dos límeas horizontales y dos verticales que dejan un cuadrado en el centro y uno en cada una de las esquinas, para un total de 5 cuadrados.

17. La respuesta correcta es la (A). De los 24 animales, 3 son perros. Además 18 no son vacas y 16 no son gatos, es decir que hay 6 vacas y 8 gatos. Luego hay $24-3-6-8=7$ canguros.

18. La respuesta correcta es la (C). Cada rectángulo mide 2 cm de ancho por 1,5 cm de altura, luego su área es 3 cm^2 y en total los 14 Cada rectángulos cubren 42 cm^2. El área del triángulo es $\frac{10\cdot 6}{2}=30$ cm^2, luego el área de la región sombreada es $42-30=12$ cm^2.

19. Sean p y s las alturas iniciales de la primera y la segunda velas, respectivamente. A las 3 horas se consumió la mitad de la primera vela, luego su altura es $\frac{1}{2}p$. Y se consumieron $\frac{3}{8}$ de la segunda vela, por lo cual quedan $\frac{5}{8}$ y su altura es $\frac{5}{8}s$. Igualando $\frac{1}{2}p=\frac{5}{8}s$ resulta $\frac{p}{s}=\frac{5}{4}$, opción (D).

20. La respuesta correcta es la (E), 16.



21. La respuesta correcta es la (B). Los números del 7 al 22 (que son 16) son la mitad del total, que debe ser entonces 32.

22. La respuesta correcta es la (E). Al principio tenía 50 E, que gastó en 50 botellas. Luego de haber vendido 40 botellas tenía 60 E, por lo tanto vendió cada botella a 1,5 E cada una. Las 10 últimas le proporcionaron 15 E más, por lo cual terminó con 75 E.

23. La respuesta correcta es la (B). Cuatro palos verdes no son suficientes, pues cada uno podría ser lado de a lo sumo dos cuadrados 1×1, y quedaría un cuadrado sin lado verde. Cimco sí son suficientes, como puede verse colocando tres que separen la primera fila de la segunda y otros dos verticales separando los cuadrados de la tercer fila (el resto de la coloración es fácil de completar).

24. La respuesta correcta es la (D). Las demás opciones dejan líneas con extremos libres.

25. $60 \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = 6$. La respuesta correcta es la (E).

26. Son 5 y 8, ya que ambos deben tener color diferente a los de 2 y 6. Opción (A).

27. La respuesta correcta es la (D). Si r y f representan los ahorros de Ria y Flora, entonces $r/f = 5/3$ y $(r - 160)/f = 3/5$, de donde $(r - 160)/r = (3/5)^2 = 9/25$, $16r = 160 \cdot 25$ y $r = 250$.

28. La respuesta correcta es la (B). Cada par de equipos se enfrentan en $3 \times 3 = 9$ juegos, luego con n equipos debe haber $p(n) = 9\binom{n}{3} = 9n(n-1)/2$ juegos. Como $p(7) = 189$ y $p(8) = 252 > 250$, el máximo es 7.

29. Sea S la intersección de AQ y BP, es decir el centro del rectángulo $ABQP$. El área del $\triangle ABS$ es $\frac{1}{4}$ de la de $ABQP$, es decir $\frac{1}{8}$ de la del cuadrado. Y el área del $\triangle ABR$ es $\frac{1}{2}$ de la del cuadrado. Luego el área sombreada es $\frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ de la del cuadrado, opción (A).

30. Numeremos los vagones del 1 al 18. Si sumanos el número de pasajeros en los vagones 1 al 5 con los que hay en los vagones 6 al 10, 9 al 13 y 14 al 18 obtenemos $199 \times 4 = 796$. Pero en esa suma los pasajeros de los vagones 9 y 10 (que son los del medio) están contados dos veces. Por lo tanto en esos dos vagones hay $796 - 700 = 96$ pasajeros, opción (C).

1.3. Prueba de Cuarto Año y Quinto Año

Problema 1. $20 \times 19 + 20 + 19 =$

Ⓐ 389; Ⓑ 399; Ⓒ 409; Ⓓ 419; Ⓔ 429.

Problema 2. Un tren eléctrico de juguete tarda exactamente 1 minuto y 11 segundos en dar una vuelta completa en su circuito. ¿Cuánto tarda en dar seis vueltas?

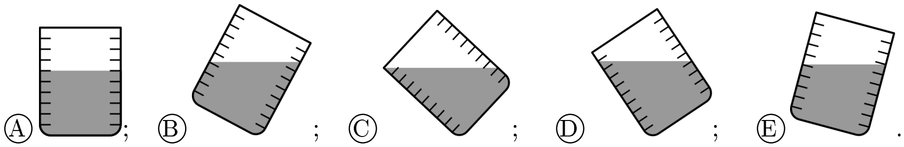
Ⓐ 7 minutos 16 segundos; Ⓑ 6 minutos 56 segundos; Ⓒ 7 minutos 26 segundos; Ⓓ 7 minutos 36 segundos; Ⓔ 7 minutos 6 segundos.

Problema 3. Un peluquero desea escribir la palabra CORTE en una pizarra de tal manera que un cliente, mirando el reflejo de la pizarra en el espejo, lea la palabra correctamente. ¿Qué debe escribir el peluquero en la pizarra?

Problema 4. ¿Cuántas sumas de puntos diferentes se pueden obtener si se lanzan simultáneamente tres dados estándar?

Ⓐ 14; Ⓑ 18; Ⓒ 15; Ⓓ 17; Ⓔ 16.

Problema 5. Se vierte agua en cinco vasos idénticos. Cuatro de ellos contienen la misma cantidad de agua. ¿Cuál es el que contiene una cantidad de agua diferente?



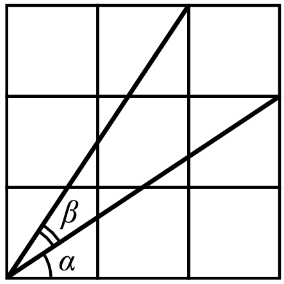
Problema 6. Un parque tiene cinco portones. Mónica desea entrar por uno de ellos y salir por uno diferente. ¿De cuántas maneras distintas puede hacerlo?

Ⓐ 25; Ⓑ 20; Ⓒ 16; Ⓓ 15; Ⓔ 10.

Problema 7. Los pesos en kilogramos de tres canguros son tres números enteros diferentes. El peso total de los tres es 97 kg. ¿Cuánto puede pesar, como máximo, el más liviano de los tres canguros?

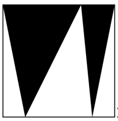
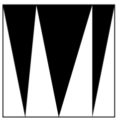
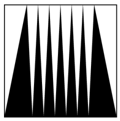
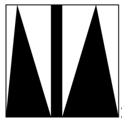
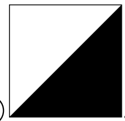
Ⓐ 31 kg; Ⓑ 33 kg; Ⓒ 30 kg; Ⓓ 32 kg; Ⓔ 1 kg.

Problema 8. Los nueve cuadrados de la figura son iguales. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera para los ángulos marcados en la figura?

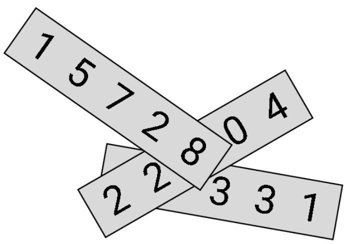


Ⓐ $\alpha = \beta$; Ⓑ $2\alpha + \beta = 90°$; Ⓒ $\alpha + \beta = 60°$; Ⓓ $2\beta + \alpha = 90°$; Ⓔ $\alpha + \beta = 45°$.

Problema 9. Dentro de cada cuadrado unitario se ha sombreado una parte. ¿En cuál de los cuadrados el área total sombreada es mayor?

Ⓐ ; Ⓑ ; Ⓒ ; Ⓓ ; Ⓔ .

Problema 10. En cada una de tres tiras de papel se ha escrito un número de cinco dígitos. La suma de los tres números es 57263. Tres de los dígitos no se ven. ¿Cuáles son esos tres dígitos?



Ⓐ 1, 2 y 9; Ⓑ 2, 4 y 9; Ⓒ 2, 7 y 8; Ⓓ 5, 7 y 8; Ⓔ 0, 2 y 2.

Problema 11. Un cuadrado tiene vértices A, B, C y D, etiquetados en sentido horario. Un triángulo equilátero tiene vértices A, E y C, etiquetados en sentido horario. ¿Cuánto mide, en grados, el ángulo CBE?

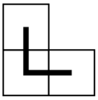
Ⓐ 30; Ⓑ 45; Ⓒ 135; Ⓓ 145; Ⓔ 150.

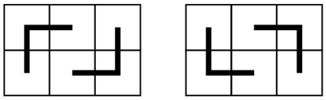
Problema 12. Los números a, b, c y d son enteros positivos diferentes elegidos del 1 al 10. ¿Cuál es el menor valor posible de $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$?

Ⓐ $\frac{2}{10}$; Ⓑ $\frac{3}{19}$; Ⓒ $\frac{14}{45}$; Ⓓ $\frac{29}{90}$; Ⓔ $\frac{25}{72}$.

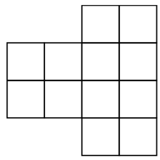
Problema 13. La bandera de Canguria es un rectángulo con altura y ancho en la razón 3 : 5. La bandera está dividida en cuatro rectángulos de igual área como muestra la figura. ¿Cuál es la razón entre la altura y el ancho del rectángulo blanco?

Ⓐ 1 : 3; Ⓑ 1 : 4; Ⓒ 2 : 7; Ⓓ 3 : 10; Ⓔ 4 : 15.

Problema 14. Un rectángulo de 3×2 puede cubrirse exactamente con dos figuras en forma de L  de dos maneras diferentes, como se muestra:



¿De cuántas maneras diferentes puede cubrirse la figura de la derecha con figuras en forma de L?



Ⓐ 1; Ⓑ 2; Ⓒ 3; Ⓓ 4; Ⓔ 48.

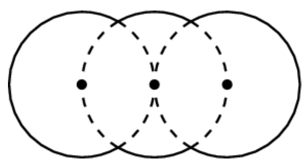
Problema 15. En el triatlón hay que recorrer un trayecto nadando, otro corriendo y otro en bicicleta. En bicleta se deben recorrer tres cuartos de la distancia total. Corriendo se debe recorrer la quinta parte. Nadando se deben recorrer 2 km. ¿Cuál es la distancia total a recorrer en el triatlón, en km?

Ⓐ 40; Ⓑ 60; Ⓒ 20; Ⓓ 38; Ⓔ 10.

Problema 16. Se desea preparar jugo diluyendo un concentrado en agua, en la razón de 1:7 en volumen. El concentrado se encuentra en una botella de 1 litro, que está llena hasta la mitad. ¿Qué fracción de ese concentrado se debe usar para obtener 2 litros de jugo?

Ⓐ $\frac{1}{4}$; Ⓑ $\frac{2}{7}$; Ⓒ $\frac{1}{2}$; Ⓓ $\frac{4}{7}$; Ⓔ Todo el concentrado..

Problema 17. Se forma una figura con tres circunferencias iguales de radio R que tienen sus centros alineados. La circunferencia del medio pasa por los centros de las otras dos. ¿Cuál es el perímetro de la figura (indicado con trazo continuo)?



Ⓐ $\frac{10\pi R}{3}$; Ⓑ $\frac{5\pi R}{3}$; Ⓒ $\frac{2\pi R\sqrt{3}}{3}$; Ⓓ $2\pi R\sqrt{3}$; Ⓔ $4\pi R$.

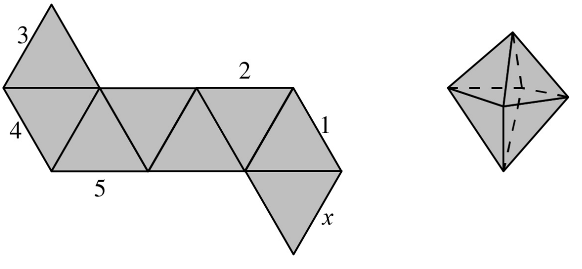
Problema 18. La suma de los 7 dígitos del número telefónico $\overline{aaabbbb}$ es el número de dos dígitos $\overline{ab}$. ¿Cuál es el valor de la suma $a+b$?

Ⓐ 8; Ⓑ 9; Ⓒ 10; Ⓓ 11; Ⓔ 12.

Problema 19. 60 manzanas y 60 peras se empacan en varias cajas de manera que todas las cajas contengan el mismo número de manzanas, pero no haya dos cajas que contengan el mismo número de peras. ¿Cuál es el mayor número posible de cajas que se pueden empacar de esa manera?

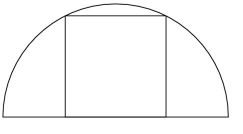
Ⓐ 20; Ⓑ 15; Ⓒ 12; Ⓓ 10; Ⓔ 6.

Problema 20. El diagrama muestra el desarrollo plano de un octaedro. Cuando se pliega para formar el octaedro, ¿cuál de los segmentos etiquetados coincidirá con el segmento marcado con la x?



Ⓐ 1; Ⓑ 2; Ⓒ 3; Ⓓ 4; Ⓔ 5.

Problema 21. Un cuadrado tiene dos de sus vértices en una semicircunferencia y los otros dos en el diámetro de la misma, como muestra la figura. El radio de la semicircunferencia es 1 cm. ¿Cuál es el área del cuadrado?



Ⓐ $\frac{\pi}{4}$ cm^2; Ⓑ $\frac{4}{5}$ cm^2; Ⓒ 1 cm^2; Ⓓ $\frac{4}{3}$ cm^2; Ⓔ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ cm^2.

Problema 22. Dos puntos están marcados en un disco que rota alrededor de su centro. Uno de los puntos está 3 cm más alejado del centro del disco que el otro y se mueve a una velocidad constante que es 2.5 veces la del otro punto. ¿Cuál es la distancia del centro del disco al punto más alejado?

Ⓐ 10 cm; Ⓑ 9 cm; Ⓒ 8 cm; Ⓓ 6 cm; Ⓔ 5 cm.

Problema 23. Los enteros del 1 al 99 se escriben en orden ascendente uno a continuación del otro, sin espacios, y luego la secuencia de dígitos se divide en tripletas:

123456789101112 . . . 979899 → (123)(456)(789)(101)(112) . . . (979)(899).

¿Cuál de las siguientes **no es** una de las tripletas?

Ⓐ (222); Ⓑ (444); Ⓒ (464); Ⓓ (646); Ⓔ (888).

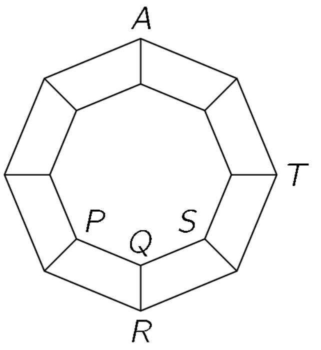
Problema 24. ¿Cuántos planos pasan por exactamente tres vértices de un cubo dado?

Ⓐ 1; Ⓑ 2; Ⓒ 4; Ⓓ 8; Ⓔ 12.

Problema 25. Los enteros positivos a, b y c tienen tres dígitos cada uno, y para cada entero el primer dígito es el mismo que el último. Además $b = 2a + 1$ y $c = 2b + 1$. ¿Cuántas posibilidades hay para el entero a?

Ⓐ 3; Ⓑ más de 3; Ⓒ 0; Ⓓ 1; Ⓔ 2.

Problema 26. La figura muestra un grafo que tiene 16 vértices y algunos segmentos que los conectan. Una hormiga se halla en el vértice A. En cada movimiento ella camina a lo largo de un segmento hasta alguno de los vértices vecinos. ¿A cuál de los vértices P, Q, R, S, T puede llegar la hormiga luego de 2019 movimientos?



Ⓐ sólo a Q; Ⓑ sólo a P, R o S; Ⓒ sólo a P, R, S o T;
Ⓓ sólo a T; Ⓔ todos son posibles.

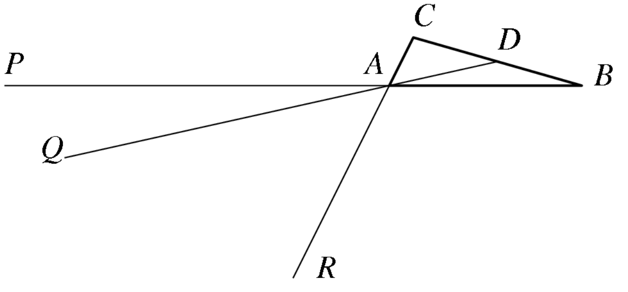
Problema 27. En cada vértice de un cuadrado se escribe un entero positivo. Si dos números se hallan en vértices adyacentes, uno de ellos debe ser múltiplo del otro. Si en cambio se hallan en vértices diagonalmente opuestos, ninguno de los dos es múltiplo del otro. ¿Cuál es el menor valor posible de la suma de los cuatro números?

Ⓐ 12; Ⓑ 24; Ⓒ 30; Ⓓ 35; Ⓔ 60.

Problema 28. ¿Cuál es el mínimo número de elementos que hay que suprimir del conjunto $\{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$ para que el producto de los elementos restantes sea un cuadrado perfecto?

Ⓐ 1; Ⓑ 2; Ⓒ 3; Ⓓ 4; Ⓔ 5.

Problema 29. Dado el triángulo ABC de área S, sea D el punto medio de BC. Tome puntos P, Q y R en las rectas AB, AD y AC, respectivamente, de manera que $AP = 2 \cdot AB$, $AQ = 3 \cdot AD$ y $AR = 4 \cdot AC$.



¿Cuál es el área del triángulo PQR?

Ⓐ S; Ⓑ $2S$; Ⓒ $3S$; Ⓓ $\frac{1}{2}S$; Ⓔ 0 (o sea que P, Q y R son colineales)..

Problema 30. ¿Cuántos números de cuatro dígitos hay con la propiedad de que, si se suprime uno cualquiera de sus dígitos, resulta un número de tres dígitos que es un divisor del número original?

Ⓐ 5; Ⓑ 9; Ⓒ 14; Ⓓ 19; Ⓔ 23.

1.3.1. Soluciones

1. La respuesta correcta es la (D).

2. Tarda 6 minutos y 66 segundos, es decir 7 minutos y 6 segundos, opción (E).

3. La respuesta correcta es la (C).

4. Se pueden obtener desde 3 hasta 18 puntos, que son 16 valores diferentes. Opción (E).

5. La respuesta correcta es la (D). La suma de las longitudes dadas por las marcas laterales es $9 + 4 = 13$ para la opción (D), mientras que para las demás es 12.

6. Puede elegir el portón de entrada de 5 maneras y el de salida de 4 maneras, para un total de $5 \times 4 = 20$ maneras. Opción (B).

7. El más liviano puede pesar 31 kg y los otros dos 32 kg y 34 kg. Si el más liviano pesa 32 kg o más entonces los otros dos deberían pesar al menos 33 kg y 34 kg, para un total de 99 kg o más. Luego la respuesta correcta es la (A).

8. Sea O el vértice inferior izquierdo. Las dos líneas oblicuas son simétricas respecto a la diagonal del cuadrado grande que pasa por O, luego de los tres ángulos que se forman con vértice O, el que falta por marcar es también α, y entonces $2\alpha + \beta = 90°$, opción (B).

9. La respuesta correcta es la (D). En las demás opciones el área sombreada es la mitad de la del cuadrado, pero en (D) es mayor (sería igual si en vez del rectángulo se pone un triángulo de la misma base y altura).

10. La respuesta correcta es la (A). De la suma de las decenas no hay acarreo, luego el dígito de las centenas oculto debe ser 2, para obtener 2 en la suma y nos llevamos 1. El dígito oculto de las unidades de 1000 debe ser 9, para obtener 7 en la suma y nos llevamos 1. Y el dígito oculto de las unidades de 10000 debe ser 1.

11. $\angle BCE = 60° - 45° = 15°$, $\angle BEC = 30°$, luego $\angle CBE = 180° - 15° - 30° = 135°$, opción (C).

12. La respuesta correcta es la (C). Para minimizar la expresión debemos tomar los denominadores grandes y los numeradores pequeños, luego hay dos candidatos: $\frac{1}{10} + \frac{2}{9} = \frac{29}{90}$ y $\frac{1}{9} + \frac{2}{10} = \frac{14}{45}$, de los cuales $\frac{14}{45}$ es el menor.

13. Si la altura de la bandera es 3 unidades entonces el ancho es 5 y su área es 15. El rectángulo blanco tiene altura 1 y su área es 15/4, luego su razón altura/ancho es 4/15. Opción (E).

14. Sólo de dos maneras, opción (B). Los dos cuadrados de la columna izquierda deben cubrirse con una misma ficha, lo cual puede hacerse de dos maneras, y uUna vez cubiertos, hay una sola manera de completar el cubrimiento.

15. Nadando se deben recorrer 2 km que son $1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$ del total, luego el total es 40 km, opción (A).

16. La respuesta correcta es la (C). Para obtener 2 litros de jugo se necesita $\frac{1}{4}$ litro de jugo, o sea la mitad de medio litro.

17. La respuesta correcta es la (A). El trazo continio se forma con $\frac{2}{3}$ de la circunferencia izquierda, $\frac{1}{3}$ de la circunferencia central y $\frac{2}{3}$ de la circunferencia derecha, luego su longitud es $\frac{5}{3} \cdot 2\pi R = \frac{10\pi R}{3}$.

18. Se tiene que $3a + 4b = 10a + b$, luego $3b = 7a$, lo que sólo puede cumplirse si $a = 3$ y $b = 7$. Luego $a + b = 10$, opción (C).

19. La respuesta correcta es la (D). No puede haber más de 11 cajas, pues entonces el número de peras sería al menos $0+1+2+3+\cdots+11 = 66$. Pero el número de cajas debe ser un divisor de 60, luego el máximo es 10, que puede lograrsecolocando 6 manzanas en cada caja y las peras por ejemplo en número de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 15.

20. La respuesta correcta es la (E). El segmento sin etiquetar adyacente a x se une con el otro segmento sin etiquetar adyacente a él, y luego x debe unirse con 5.

21. La respuesta correcta es la (B). Si el lado del cuadrado mide x entonces por Pitágoras $1^2 = x^2 + (\frac{x}{2})^2 = \frac{5}{4}x^2$, de donde el área pedida es $x^2 = \frac{4}{5}$.

22. La respuesta correcta es la (E). Si la distancia buscada es x entonces $\frac{x}{x-3} = 2{,}5$, de donde $x = 5$.

23. La respuesta correcta es la (B). Esto se puede hacer por fuerza bruta, escribiendo todas las tripletas, o bien observando que a partir de la cuarta las tripletas son alternadamente de dos tipos: aquellas cuyos dos primeros dígitos forman un número que deja resto 1 al dividirlo entre 3, y que tienen aquellas cuyos dos últimos dígitos forman un número divisible entre 3. El 444 no es de ninguno de esos dos tipos (las otras opciones son del primer tipo).

24. La respuesta correcta es la (D). Son los planos que pasan por los tres vértices adyacentes a uno dado. Como el cubo tiene 8 vértices, hay ese mismo número de planos.

25. La respuesta correcta es la (E). Como $c = 2b + 1 = 2(2a + 1) + 1 = 4a + 3$, el primer dígito de a sólo puede ser 1 o 2. Pero si es 2 entonces el último dígito de c sería 1 y el primero también, lo cual no es posible. Así que a es de la forma $\overline{1x1}$, y b debe terminar (y comenzar) con 3. Luego x debe ser 5, 6, 7, 8 o 9. Probando cada uno de ellos se encuentra que sólo 8 y 9 sirven. Es decir que hay dos soluciones: $a = 181$, $b = 363$, $c = 727$ y $a = 191$, $b = 383$, $c = 767$.

26. Los vértices se pueden pintar de rojo y azul de modo que cualquier par de vértices adyacentes sean de diferente color. Si A es rojo, entonces en un número par de movimientos sólo se puede llegar a otro vértice rojo, y en un número impar sólo se puede llegar a otro vértice azul. Como P, R, S y T son rojos, en 2019 movimientos no se puede llegar a ninguno de ellos. Pero es fácil ver que sí se puede llegar a Q, que es azul. La respuesta correcta es la (A).

27. El menor valor se obtiene escribiendo 2 y 3 en un par de vértices opuestos y 12 y 18 en el otro par, para una suma de 35, opción (D).

28. La respuesta correcta es la (B). Evidentemente hay que suprimir el 70, pues el factor 7 sólo aparece en ese número. El producto de los números restantes es $2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}5{\cdot}6{\cdot}8{\cdot}{\cdot}9{\cdot}10^8 = 2^{15}3^4 5^9$ y suprimiendo el 10 queda $2^{14}3^4 5^8$ que es un cuadrado perfecto.

29. $[PQR] = [APQ]+[AQR]-[APR] = 2{\cdot}3[ABD]+3{\cdot}4[DCA]-2{\cdot}4S = 3\frac{S}{2}+12\frac{S}{2}-8S = S$, opción (A).

30. La respuesta correcta es la (C). Si $\overline{abcd}$ tiene la propiedad pedida entonces $\overline{abc}$ divide a $\overline{abcd} - 10\overline{abc} = d$, de donde $d = 0$. Análogamente $\overline{abd}$ divide a $\overline{abcd}$, es decir que $\overline{ab0}$

divide a $\overline{abc0}$, luego $\overline{ab}$ divide a $\overline{abc}$ y a $\overline{abc} - 10\overline{ab} = c$, de donde $c = 0$. También $\overline{a00}$ divide a $\overline{ab00}$, es decir que a divide a $\overline{ab}$, luego a divide a $\overline{ab} - 10a = b$. Finalmente $\overline{b00}$ divide a $\overline{ab00}$, es decir que b divide a $\overline{ab}$, de donde b divide a $10a$ y tenemos las soluciones 1100, 1200, 1500, 2200, 2400, 3300, 3600, 4400, 4800, 5500, 6600, 7700, 8800 y 9900, 14 en total.

Capítulo 2

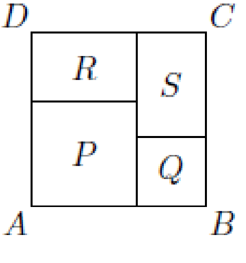
Prueba Regional

La Prueba Regional de la OJM se aplica en cada uno de los estados participantes. Consta de cuatro problemas, que se valoran en una escala de 1 a 7. Los participantes disponen de tres horas y media para resolverlos. Los ganadores son premiados con diplomas y medallas de oro, plata y bronce. Los ganadores de oro clasifican para participar en la Prueba Final Nacional de la OJM.

2.1. Prueba de Primer Año

Problema 1. Ana y Berta tienen cada una cierto número de naranjas. Si Ana le da 2 naranjas a Berta, ambas quedan con el mismo número de naranjas. Si en cambio Berta le da dos naranjas a Ana, Ana queda con el doble de naranjas que Berta. ¿Cuántas naranjas tiene cada una? **Problema 2.** El cuadrado $ABCD$ está dividido en dos cuadrados P y

Q y dos rectángulos R y S, como muestra la figura. Si el perímetro del rectángulo R es 18 cm, ¿cuál es el área del cuadrado $ABCD$?



Problema 3. Un número natural n tiene cuatro dígitos, cuyo producto es 140. ¿Puede n ser múltiplo de 3?

Problema 4. En una isla hay 2019 habitantes. Cada uno de ellos o bien es honesto y siempre dice la verdad, o bien es mentiroso y siempre miente. Un día se sientan todos alrededor de una gran mesa redonda y cada uno de ellos dice: "Uno de mis vecinos es honesto y el otro es mentiroso". Si se sabe que al menos uno de ellos es honesto, ¿cuántos mentirosos hay?

2.1.1. Soluciones

1. Sea a el número de naranjas de Ana y b el de Berta. Entonces

$$a - 2 = b + 2, \tag{1}$$
$$a + 2 = 2(b - 2). \tag{2}$$

De (1) se despeja $a = b + 4$ y sustituyendo en (2) resulta $b + 6 = 2b - 4$, de donde $b = 10$ y $a = 10 + 4 = 16$.

2. Si el ancho de R mide x y su altura mide y, entonces el lado de P es x y el lado del cuadrado $ABCD$ es $x + y$. Pero el perímetro de P es $2x + 2y = 18$, luego $x + y = 9$ y el área de $ABCD$ es $9^2 = 81$ cm^2.

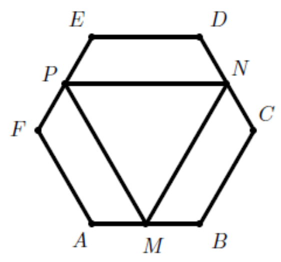
3. No. Como $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$, los cuatro dígitos deben ser (en algún orden) 1, 4, 5 y 7 o 2, 2, 5 y 7. En el primer caso $1 + 4 + 5 + 7 = 17$ y en el segundo $2 + 2 + 5 + 7 = 16$. Como ni 17 ni 16 son múltiplos de 3, n no puede ser múltiplo de 3.

4. Consideremos un honesto y asignémosle el número 1. Asignemos el número 2 al vecino honesto de 1, y continuemos numerando a los isleños en la misma dirección con 3, 4,... hasta llegar al 2019, que será el vecino mentiroso de 1. Como 2 es honesto y 1 también, entonces 3 es mentiroso. Como 3 es mentiroso y 2 es honesto, 4 debe ser honesto (pues si fuese mentiroso, 3 estaría diciendo la verdad). Ahora 5 debe ser honesto, 6 mentiroso, 7 honesto,... y se ve que que todos los múltiplos de 3 son mentirosos y los demás honestos. Luego hay $2019/3 = 673$ mentirosos.

2.2. Prueba de Segundo Año

Problema 1. Dentro de 6 años, mi edad será el triple de la de mi hijo. Y dentro de 22 años, mi edad será el doble de la de mi hijo. ¿Cuántos años tengo actualmente?

Problema 2. Un hexágono regular con vértices A, B, C, D, E y F tiene área 48 cm^2. Si M es el punto medio del segmento AB, N es el punto medio del segmento CD y P es el punto medio del segmento EF, ¿cuál es el área del triángulo MNP?



Problema 3. Idéntico al Problema 3 de Primer Año (ver pág. 27).

Problema 4. Idéntico al Problema 4 de Primer Año (ver pág. 27).

2.2.1. Soluciones

1. Sea p la edad del padre y h la edad del hijo. Entonces

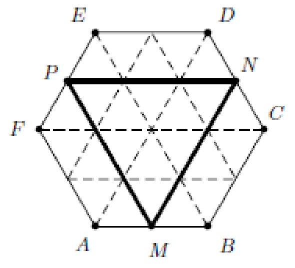
$$p + 6 = 3(h + 6), \tag{1}$$

$$p + 22 = 2(h + 22). \tag{2}$$

Restando miembro a miembro la segunda ecuación de la primera se obtiene $6 - 22 = h + 18 - 44$, de donde $h = 10$. Sustituyendo este valor en (1) resulta $p + 6 = 3(10 + 6) = 48$, de donde $p = 42$.

El valor de p podría hallarse también sin determinar primero el de h, multiplicando (1) por 2 y (2) por 3 y restando miembro a miembro para obtener $p + 66 - 12 = 3 \cdot 2 \cdot 22 - 2 \cdot 3 \cdot 6$, de donde $p + 54 = 132 - 36$ y $p = 42$.

2. El hexágono se puede dividir en 6 triángulos equiláteros de 8 cm^2 de área cada uno. Y cada uno de esos 6 triángulos se puede dividir en 4 triangulitos equiláteros de 2 cm^2 de área cada uno, generando una triangulación del hexágono en 24 triangulitos equiláteros. El triángulo MNP ocupa exactamente 9 de esos triangulitos y por lo tanto su área es $9 \times 2 = 18$ cm^2 (alternativamente 9/24 del área del hexágono, o sea $\frac{9}{24} \cdot 48 = 18$ cm^2).



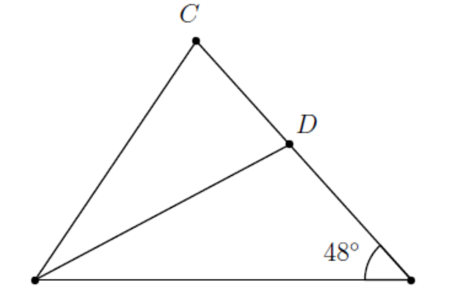
Solución alternativa 1: El hexágono se puede dividir en 6 triángulos equiláteros de área 8 cm^2 cada uno. Sea a el lado de cada uno de esos triángulos. El triángulo MNP también es equilátero y su lado mide $\frac{3}{2}a$, ya que por ejemplo el segmento PN corta a tres de los 6 triángulos en segmentos de longitud $a/2$, por ser paralelas medias de cada uno de ellos. Luego el área del MNP es $(\frac{3}{2})^2 \cdot 8 = 18$ cm^2.

Solución alternativa 2: El hexágono se puede dividir en 6 triángulos equiláteros de área 8 cm^2 cada uno. Sea a el lado de cada uno de esos triángulos. El trapecio $PNDE$ tiene bases $PN = \frac{3}{2}a$ (ya que el segmento PN corta a tres de los 6 triángulos en segmentos de longitud $a/2$, por ser paralelas medias de cada uno de ellos) y $DE = a$. Además su altura es $h/2$, la mitad de la altura h de los triángulos. Luego su área es $\frac{1}{2}(\frac{3}{2}a + a)\frac{h}{2} = \frac{5}{4}\frac{ah}{2} = \frac{5}{4} \cdot 8 = 10$ cm^2. El área del MNP es la diferencia entre el área delhexágono y la de tres de estos trapecios, es decir $48 - 4 \cdot 10 = 18$ cm^2.

2.3. Prueba de Tercer Año

Problema 1. Idéntico al Problema 1 de Segundo Año (ver pág. 27).

Problema 2. Sea ABC un triángulo y AD la bisectriz de $\angle CAB$ (con D en el lado BC). Si $AD = AC$ y $\angle ABC = 48°$, halle los ángulos $\angle BCA$ y $\angle CAB$.



Problema 3. En una lista se escriben, en orden creciente, los números naturales que son múltiplos de 3 o de 5. La lista comienza así: 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20,... ¿Qué número ocupa el lugar 2019?

Problema 4. Si la edad de Berta se escribe a continuación de la edad de Ana, se obtiene un número de cuatro dígitos que es un cuadrado perfecto. Si se hace lo mismo dentro de 11 años, se obtendrá también un cuadrado perfecto. ¿Qué edades tienen Ana y Berta?

2.3.1. Soluciones

2. Como $AD = AC$ el triángulo ACD es isósceles y $\gamma = \angle BCA = \angle DCA = \angle CDA$. Luego $\angle BAC = 2\angle DAC = 2(180^\circ - 2\gamma)$. Ahora como $\angle BCA + \angle BAC + \angle ABC = 180^\circ$, resulta

$$\gamma + 2(180^\circ - 2\gamma) + 48^\circ = 180^\circ,$$

de donde $3\gamma = 228^\circ$ y $\gamma = 76^\circ$. Finalmente $\angle CAB = 180^\circ - 76^\circ - 48^\circ =^5 6\circ$.

3. Del 1 al n hay $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ múltiplos de 3, $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ múltiplos de 5 y $\lfloor \frac{n}{15} \rfloor$ múltiplos de ambos, luego el número de los que son múltiplos de 3 o de 5 es

$$\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \lfloor \frac{n}{5} \rfloor - \lfloor \frac{n}{15} \rfloor.$$

Como la expresión anterior es aproximadamente $\frac{n}{3} + \frac{n}{5} - \frac{n}{15} = \frac{7}{15}n$, igualando esto a 2019 se obtiene $n \approx \frac{2019 \times 15}{7} \approx 4326$. Ahora bien,

$$\lfloor \frac{4326}{3} \rfloor + \lfloor \frac{4326}{5} \rfloor - \lfloor \frac{4326}{15} \rfloor = 1442 + 865 - 288 = 2019$$

y 4326 es múltiplo de 3, la respuesta es 4326.

Solución alternativa: Del 1 al 15 se tienen 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, es decir 7 números. del 16 al 30 otros 7: 18, 20, 21, 24, 25, 27, 30. Se observa un patrón: cada 15 números hay 7 del tipo pedido. Como $2019 = 7 \cdot 288 + 3$, vemos que en el puesto $7 \cdot 288 = 2016$ está el número $288 \cdot 15 = 4320$, al cual siguen 4323, 4325 y 4326. Luego la respuesta es 4326.

4. Sean a y b las edades de Ana y de Berta, respectivamente. Entonces para ciertos enteros positivos u y v se tiene

$$100a + b = u^2, \tag{1}$$

$$100(a + 11) + b + 11 = v^2. \tag{2}$$

Restando la primera ecuación de la segunda resulta $1111 = v^2 - u^2$, es decir

$$(v + u)(v - u) = 101 \cdot 11.$$

Como 11 y 101 son primos, y como $v + u > v - u$, se ve que sólo hay dos casos posibles:

Caso 1) $v + u = 1111$, $v - u = 1$. Pero en este caso sumando se obtiene $2v = 1112$, de donde $v = 556$ y v^2 tendría más de 4 dígitos, por lo cual se descarta.

Caso 2) $v + u = 101$, $v - u = 11$. En este caso sumando se obtiene $2v = 112$, de donde $v = 56$ y $u = 101 - v = 45$. Como $45^2 = 2025$, concluimos que $a = 20$ y $b = 25$. Verificación: dentro de 11 años se tendrá $3136 = 56^2$.

2.4. Prueba de Cuarto y Quinto Año

Problema 1. Sea $N = 8^{67} \cdot 25^{97}$.

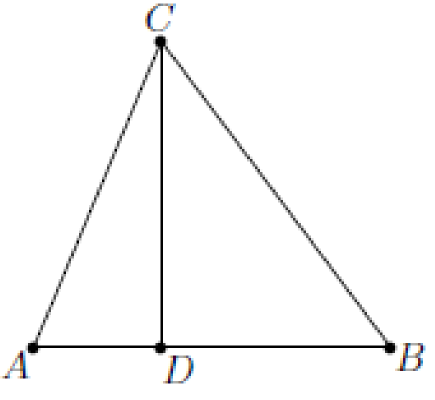
(a) ¿En cuántos ceros termina N?

(b) ¿Cuánto es la suma de todos los dígitos de N?

Problema 2. Idéntico al Problema 3 de Tercer Año (ver pág. 29).

Problema 3. Idéntico al Problema 4 de Tercer Año (ver pág. 29).

Problema 4. Sea ABC un triángulo con $AB = 14$ cm, $BC = 15$ cm y $CA = 13$ cm. Sea CD la altura desde C sobre el lado AB. Determine el área del triángulo ACD.



2.4.1. Soluciones

1.

$$8^{67} \cdot 25^{97} = 2^{3\cdot67} \cdot 5^{2\cdot97} = 2^{201} \cdot 5^{194} = 2^7 \cdot 2^{194} \cdot 5^{194} = 128 \cdot 10^{194},$$

luego N termina en 194 ceros y la suma de sus dígitos es $1+2+8 = 11$ (ya que los demás son 0).

4. Sean $x = AD$ y $h = DC$. Entonces $DB = 14-x$. Aplicando Pitágoras a los triángulos CAD y CBD se obtiene:

$$x^2 + h^2 = 13^2, \quad (1)$$

$$(14-x)^2 + h^2 = 15^2. \quad (2)$$

Restando (1) a (2) resulta $14^2 - 28x = 15^2 - 13^2$, de donde $28x = 196 - 225 + 169 = 140$ y $x = 5$. Entonces de (1) se tiene $h^2 = 13^2 - h^2 = 169 - 25 = 144$ y $h = 12$. Finalmente el área del ACD es $5 \cdot 12/2 = 30$ cm^2.

Solución alternativa: Sea $s = (BC+CA+AB)/2 = (15+13+14)/2 = 21$. Por la fórmula de Heron el área del triángulo ABC es

$$[ABC] = \sqrt{s(s-14)(s-15)(s-13)} = \sqrt{21 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 8} = 84.$$

Pero si h es la altura del ABC entonces $[ABC] = AB \cdot h/2$, de donde $h = 2 \cdot 84/14 = 12$. Aplicando ahora Pitágoras al triángulos CAD se obtiene

$$AD = \sqrt{AC^2 - h^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5$$

y finalmente $[ACD] = AD \cdot h/2 = 5 \cdot 12/2 = 30$ cm^2.

Capítulo 3

Prueba Final OJM 2019

La prueba final de la OJM 2019 se realizó el 8 de junio. En esta prueba compiten los ganadores de medalla de oro de todos los estados participantes. La prueba consta de cuatro problemas, cada uno de ellos con un valor de 7 puntos. Los participantes dispusieron de tres horas y media para resolverlos. Los ganadores son premiados con medallas de oro, plata y bronce, menciones honoríficas y varios premios especiales.

3.1. Prueba de Primer Año

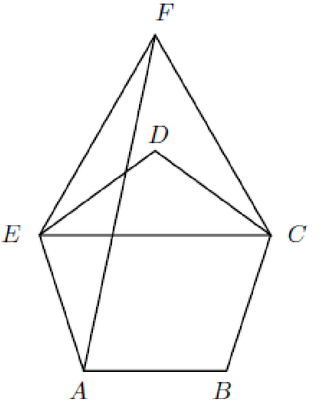
Problema 1. A la derecha se muestra la suma de un entero de cuatro dígitos $ABCB$ con otro de tres dígitos, CBC. Cada una de las letras A, B y C representa un dígito diferente de cero. El dígito de las unidades del resultado es 4. ¿Cuál es el valor de cada letra?

$$\begin{array}{rr} & ABCB \\ + & CBC \\ \hline & CCC4 \end{array}$$

Problema 2. Un colegio tiene más de 700 alumnos pero menos de 900. Exactamente el 67 % de los alumnos son varones, y de ellos las tres cuartas partes estudian francés. Del total de alumnos del colegio (varones y niñas), los que estudian francés son el 63 %. ¿Cuántas alumnas estudian francés?

Problema 3. Un mago llama a un voluntario del público y le entrega 3 cajas idénticas, 3 bolas blancas, 3 bolas rojas y 3 etiquetas: BB, RR y BR. El voluntario debe colocar, sin que el mago vea, dos bolas blancas en una caja, dos bolas rojas en otra y una blanca y una roja en la restante. Además debe pegar cada etiqueta en una caja diferente, pero de modo que ninguna etiqueta describa correctamente el contenido de su caja (por ejemplo la caja con etiqueta BB no puede contener dos bolas blancas). Una vez hecho esto el mago anuncia que seleccionará una de las cajas y pedirá que le muestren una sola de las bolas que contiene. Con esa información, él se compromete a adivinar el contenido de cada caja. ¿Podrá hacerlo siempre? En caso afirmativo, explique cómo lo logra.

Problema 4. En la figura, $ABCDE$ es un pentágono regular y ECF es un triángulo equilátero. Determine las medidas de los ángulos del triángulo AEF.



3.1.1. Soluciones

1. Si en la columna de las unidades (a la derecha) no hubiese acarreo, entonces $B+C=4$ y la suma de la columna de las decenas sería $C=C+B=4$, por lo tanto $C=4$ y $B=0$, lo cual no es posible. Luego $B+C=14$ y en la columna de las decenas $C+B+1=15$, de donde $C=5$ y $B=9$. Finalmente en la columna de la izquierda $A+1=C$, de donde $A=4$. Verificación: $4959+595=5554$.

2. Si el total de alumnos es n, entonces $700<n<900$ y $67n/100$ debe ser un número entero (el número de varones). Luego 100 divide a n, y n debe ser 800. Los varones son entonces $67\times 8=536$, y de ellos $\frac{3}{4}536=402$ estudian francés. El total de los estudiantes de francés es $0{,}63\times 800=504$, luego las alumnas que estudian francés son $504-402=102$.

3. Sí puede. El mago debe seleccionar la caja con etiqueta BR. Si le muestran una bola blanca, entonces la otra en la caja debe ser también blanca (de otro modo la etiqueta BR sería correcta). Ahora la caja con etiqueta BB no puede contener una blanca y otra roja, pues en ese caso la caja RR sólo podría contener dos rojas, y su etiqueta sería correcta. Luego la caja BB contiene dos bolas rojas y la caja RR contiene una blanca y una roja. Si le bola que le muestran es en cambio roja, el mago razona simétricamente: la otra bola en la caja BR debe ser también roja (de otro modo la etiqueta BR sería correcta); la caja con etiqueta RR no puede contener una blanca y otra roja, pues en ese caso la caja BB sólo podría contener dos blancas, y su etiqueta sería correcta. Luego la caja RR contiene dos bolas blancas y la caja BB contiene una blanca y una roja.

4. Los ángulos internos de un pentágono regular miden $108°$, y como ABC es isósceles entonces $\angle BAC = \angle BCA = (180° - 108°)/2 = 36°$. Como $AB \parallel EC$ se tiene $\angle ACE = 36°$ y $\angle ACF = \angle ACE + \angle ECF = 36° + 60° = 96°$. Pero $AC = EC = FC$, luego ACF es isósceles y $\angle CAF = \angle CFA = (180° - 96°)/2 = 42°$. Por lo tanto $\angle AFE = 60° - 42° = 18°$, $\angle AEF = \angle AEC + \angle CEF = 72° + 60° = 132°$ y $\angle EAF = 180° - 18° - 132° = 30°$.

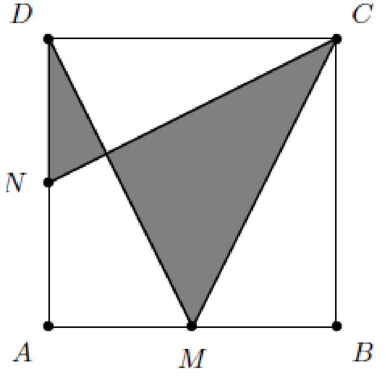
3.2. Prueba de Segundo Año

Problema 1. Idéntico al Problema 1 de Primer Año (ver pág. 33).

Problema 2. Idéntico al Problema 3 de Primer Año (ver pág. 33).

Problema 3. Ana, Berta y Claudia fueron a un huerto y cada una recogió cierta cantidad de naranjas. Las contaron y vieron que en total tenían 108 naranjas, pero no todas recogieron la misma cantidad. Entonces Ana le dio a Berta la mitad de sus naranjas, luego Berta le dio a Claudia la quinta parte de sus naranjas (incluidas las que le dio Ana), y finalmente Claudia le dio a Ana la séptima parte de sus naranjas (incluidas las que le dio Berta). Luego de esto, las tres quedaron con el mismo número de naranjas. ¿Cuántas naranjas recogió cada una?

Problema 4. $ABCD$ es un cuadrado de lado 10 cm, M es el punto medio del lado AB y N es el punto medio del lado AD. Calcule el área de la región sombreada.



3.2.1. Soluciones

3. Sean a, b y c las naranjas que recogieron Ana, Berta y Claudia, respectivamente. Entonces $a + b + c = 108$, y al final quedarán con 36 naranjas cada una. Cuando Ana le da a Berta la mitad de sus naranjas, Ana queda con $a/2$ naranjas y Berta con $b + a/2$. Luego Berta le da a Claudia la quinta parte de sus naranjas y Berta queda con $\frac{4}{5}(b+a/2)$

y Claudia con $c + b/5 + a/10$. Finalmente Claudia le dio a Ana la séptima parte de sus naranjas, Claudia queda con $\frac{6}{7}(c+b/5+a/10)$ y Ana con $a/2+\frac{1}{7}(c+b/5+a/10)$. Tenemos así el sistema

$$\begin{aligned} a+b+c &= 108 \\ \frac{4}{5}b+\frac{2}{5}a &= 36 \\ \frac{6}{7}c+\frac{6}{35}b+\frac{3}{35}a &= 36 \end{aligned}$$

(la cantidad final de naranjas de Ana no es necesario ponerla pues es consecuencia de las otras ecuaciones). Eliminando denominadores queda

$$\begin{aligned} a+b+c &= 108 \\ 2b+a &= 90 \\ 10c+2b+a &= 420 \end{aligned}$$

Luego $10c = 420 - 90 = 330$, de donde $c = 33$. $a + b = 108 - 33 = 75$, $b = 90 - 75 = 15$ y $a = 60$.

Solución alternativa: Numeremos con 1 el momento inicial, con 2 el que se produce luego de que Ana le da la mitad de sus naranjas a Berta, con 3 el que sigue a que Berta le da a Claudia la quinta parte de sus naranjas, y con 4 el final después que Claudia le dio a Ana la séptima parte de sus naranjas. Representemos por (a_i, b_i, c_i) las cantidades de naranjas que tienen Ana, Berta y Claudia en el momento i. Entonces $(a_4, b_4, c_4) = (36, 36, 36)$. Cuando Claudia le dio a Ana la séptima parte de sus naranjas, Claudia quedó con 36, por lo cual $\frac{6}{7}c_3 = c_4 = 36$ y $c_3 = 42$. Claudia le dio a Ana $42 - 36 = 6$, luego $a_3 = 36 - 6 = 30$. Es decir que $(a_3, b_3, c_3) = (30, 36, 42)$. Cuando Berta le dio a Claudia la quinta parte de sus naranjas, Berta quedó con 36, es decir que $\frac{4}{5}b_2 = b_3 = 36$ y $b_2 = 45$. Berta dio $45 - 36 = 9$ naranjas y $c2 = 42 - 9 = 33$, o sea que $(a_2, b_2, c_2) = (30, 45, 33)$. Y cuando Ana le dio a Berta la mitad de sus naranjas, Ana quedó con 30, es decir que $\frac{1}{2}a_1 = a_2 = 30$ y $a_2 = 60$. Ana dio 30, luego Berta tenía $45 - 30 = 15$ y $(a_1, b_1, c_1) = (60, 15, 33)$.

4. Sea P la intersección de DM y CN. Como los triángulos NDC y MAD son congruentes, comparando ángulos se ve que $DM \perp CN$ y los triángulos NDC, NPD y DPC son semejantes. Luego $NP/PD = ND/DC = 1/2$ y $DP/PC = ND/DC = 1/2$, de donde $NP = \frac{1}{4}PC$ y $NP = \frac{1}{5}NC$. Como el área de NDC es $[NDC] = 5\times 10/2 = 25$ cm^2, resulta que $[NPD] = \frac{1}{5}[NDC] = 25/5 = 5$ cm^2 y $[DPC] = [NDC] - [NPD] = 25 - 5 = 20$ cm^2. Como $[CDM] = 10\times 10/2 = 50$ cm^2, entonces $[PMC] = [CDM] - [DPC] = 50 - 20 = 30$ cm^2 y finalmente el área sombreada es $[NPD] + [PMC] = 35$ cm^2.

3.3. Prueba de Tercer Año

Problema 1. Halle el menor entero positivo que sea múltiplo de 3 tal que, si se multiplican todos sus dígitos, el resultado es 882.

Problema 2. Ana y Bruno ponen las 28 fichas de un juego de dominó sobre la mesa y juegan del siguiente modo: Primero Ana escoge una de las fichas sobre la mesa, la retira y anota en una pizarra el número de puntos en cada mitad de la misma (por ejemplo si tomó la ficha blanco-tres entonces anota un 0 y un 3). Luego Bruno hace lo mismo y continúan así, alternándose. El juego finaliza cuando cada dígito del 0 al 6 haya sido escrito al menos una vez en la pizarra. El ganador es el que hizo la última jugada. Determine si alguno de los dos jugadores puede asegurarse la victoria, haga lo que haga el otro.

Problema 3. Idéntico al Problema 3 de Segundo Año (ver pág. 35).

Problema 4. Idéntico al Problema 4 de Segundo Año (ver pág. 35).

3.3.1. Soluciones

1. Como $882 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$, los dígitos del número buscado deben ser o bien 2, 3, 3, 7, 7 y cero o más unos, o bien 3, 6, 7, 7 y cero o más unos, o bien 2, 7, 7, 9 y cero o más unos. En el primer caso, como $2 + 3 + 3 + 7 + 7 = 22$, para que sea múltiplo de 3 habría que agregar al menos dos unos, y el menor sería 1123377. En el segundo caso, como $3 + 6 + 7 + 7 = 23$ para que sea múltiplo de 3 es suficiente agregar un uno, y el menor sería 13677. En el tercer caso, como $2+7+7+9 = 25$ para que sea múltiplo de 3 habría que agregar al menos dos unos, y el menor sería 112779. En conclusión, el menor es 13677.

2. Bruno puede asegurarse la victoria. Es claro que si un jugador debe escoger ficha y sólo quedan uno o dos dígitos que no han sido escritos, entonces puede ganar escogiendo una ficha con ese o esos dígitos. Luego cada jugador debe jugar procurando que queden al menos tres dígitos no escritos. Cuando queden tres dígitos sin escribir, ambos deben tratar de escoger fichas cuyos dos números estén entre los cuatro ya escritos. Pero con cuatro dígitos a, b, c y d hay 10 fichas, a saber aa, ab, ac, ad, bb, bc, bd, cc, cd y dd. Como este número es par y Ana comienza, Bruno puede asegurarse tomar la última de esas 10 fichas. Esto obliga a Ana en la jugada siguiente, a escribir al menos uno de los otros tres dígitos, con lo cual Bruno gana en su siguiente jugada.

3.4. Prueba de Cuarto Año

Problema 1. Idéntico al Problema 1 de Tercer Año (ver pág. 37).

Problema 2. Halle todas las soluciones reales del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 4^x + y &= -2019, \\ 17 \cdot 2^x + 2y &= -4030. \end{aligned}$$

Problema 3. Lisandro tiene un montón con 2019 piedras. Él divide el montón en dos montones, cada uno con al menos una piedra, multiplica los números de piedras en cada uno de los dos nuevos montones y anota el resultado en un papel. A continuación escoge un montón que tenga más de una piedra y hace la misma operación: lo divide en dos montones con al menos una piedra cada uno, multiplica los números de piedras en los dos nuevos montones y escribe el resultado en el papel. Continúa de esta manera hasta que todos los montones que queden contengan sólo una piedra cada uno. En ese momento suma todos los números que escribió. ¿Es posible determinar el valor de esa suma? Si es posible, halle su valor.

Problema 4. Sea ABC un triángulo equilátero. Sean M y N los puntos medios de AB y BC. Sea P en el exterior de ABC, tal que APC es isósceles y rectángulo en P. Las rectas PM y AN se intersecan en I. Probar que CI es la bisectriz de $\angle ACM$.

3.4.1. Soluciones

2. Multiplicando la primera ecuación por 2 y restándole la segunda queda $2 \cdot 4^x - 17 \cdot 2^x = -8$. Sea $u = 2^x$. Entonces nos queda $2u^2 - 17u + 8 = 0$, ecuación de segundo grado que tiene raíces

$$\frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8}}{4} = \frac{17 \pm \sqrt{225}}{4} = \frac{17 \pm 15}{4}.$$

Las raíces son entonces $u_1 = 32/4 = 8$ y $u_2 = 1/2$, que nos dan $x_1 = 3$ y $x_2 = -1$. Los valores correspondientes de y son $y_1 = -2019 - 4^3 = -2073$ y $y_2 = -2019 - 4^{-1} = -frac80774$.

3. Representemos cada piedra mediante un punto. Cada vez que se divide un montón en dos, tracemos una línea desde cada piedra de una de las partes a cada piedra de la otra parte. El número de líneas trazadas es el producto de los tamaños de las partes y es el número que se anota en el papel. Como cada par de piedras es separado en algún momento al dividir un montón, y esto ocurre una sola vez, al final tendremos una línea uniendo cada par de piedras. El número de líneas final será entonces $2019 \cdot 2018/2 = 2037171$, y será igual a la suma de los productos anotados.

Solución alternativa: Si se comienza con un montón de sólo 2 piedras, se realiza una sola operación dividiéndolo en dos montones de 1 piedra cada uno, se anota $1 \times 1 = 1$ y listo.

Si se comienza con 3 piedras, se divide primero en un montón de 2 piedras y otro de 1 y se anota $2 \times 1 = 2$. Luego se divide el montón de 2 piedras en dos montones de 1 piedra y se anota $1 \times 1 = 1$. Ahora la suma es $2 + 1 = 3$.

Para 4 piedras hay dos formas de proceder: se puede dividir el montón en uno de 3 y otro de 1, luego el de 3 en 2 y 1 y finalmente el de 2 en 1 y 1. En este caso la suma es $3 \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times 1 = 6$. O bien se divide el montón de 4 piedras en 2 y 2, luego uno de los de 2 en 1 y 1 y finalmente el otro de 2 en 1 y 1. En este caso la suma es $2 \times 2 + 1 \times 1 + 1 \times 1 = 6$. En ambos casos la suma es 6.

Para 5 piedras podemos dividir en 4 y 1, escribiendo $4 \times 1 = 4$, y luego aplicarle el proceso ya descripto al montón de 4, para obtener una suma de $4 + 6 = 10$. O bien dividirlo en 2 y 3, escribir $2 \times 3 = 6$ y aplicar luego los procesos ya descriptos a los montones de 2 y 3, para obtener finalmente una suma de $6 + 3 + 1 = 10$.

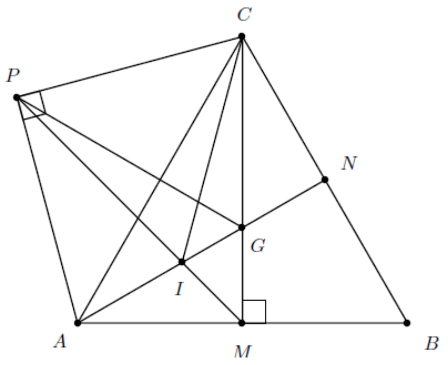
Vemos que aparentemente el resultado no depende de cómo se hagan las divisiones sino solamente del número inicial de piedras. Además los resultados obtenidos para $n = 2, 3, 4, 5$ son los números triangulares 1, 3, 6, 10. Conjeturamos entonces que, para n piedras, el resultado de la suma será $n(n-1)/2$. Probemos ahora este resultado por inducción. Para $n = 2, 3, 4, 5$ se cumple. Si $n > 5$ y el montón se divide en dos partes a y $n - a$, se escribirá $a(n - a)$ y habrá que sumarle los productos que resulten al operar con los montones de a y $n - a$ piedras, que por hipótesis inductiva serán $\frac{1}{2}a(a-1)$ y $\frac{1}{2}(n-a)(n-a-1)$. Así el resultado final será

$$
\begin{aligned}
&a(n-a) + \frac{1}{2}a(a-1) + \frac{1}{2}(n-a)(n-a-1) \\
&= \frac{1}{2}a(n-a) + \frac{1}{2}a(a-1) + \frac{1}{2}a(n-a) + \frac{1}{2}(n-a)(n-a-1) \\
&= \frac{1}{2}a(n-1) + \frac{1}{2}(n-1)(n-a) = \frac{1}{2}n(n-1).
\end{aligned}
$$

lo que completa la inducción.

Para $n = 2019$ la respuesta es entonces $2019 \cdot 2018/2 = 2037171$.

4. es cíclico, pues $\angle CPA = \angle AMC = 90°$. Entonces, $\angle CPM = \angle CPI = \angle CAM = 60°$. Sea G la intersección de CM y AN. Entonces $\angle CGN = 60°$ y $\angle CGI = 120°$. Por esto, $CPIG$ es cíclico. GP es la mediatriz de AC, luego $\angle CPG = \frac{1}{2}\angle CPA = 45°$. Entonces $\angle CIG = \angle CPG = 45°$. Luego $\angle GCI = 180° - 120° - 45° = 15°$ y como $\angle ACM = 30°$, CI es la bisectriz de $\angle ACM$.



3.5. Prueba de Quinto Año

Problema 1. Amanda escribió un entero positivo de cuatro dígitos A. Laura escribió un dígito x a la izquierda de A y otro dígito y a la derecha de A, obteniendo un número de seis dígitos L. Luego Iván dividió L entre A y obtuvo cociente 21 y resto 0 (la división dio exacta). Determine los valores de A y L.

Problema 2. Idéntico al Problema 2 de Cuarto Año (ver pág. 38).

Problema 3. Idéntico al Problema 3 de Cuarto Año (ver pág. 38).

Problema 4. Idéntico al Problema 4 de Cuarto Año (ver pág. 38).

3.5.1. Soluciones

1. $L = 10^6x + 10A + y = 21A$, luego $10^6x + y = 11A$. Por el criterio de divisibilidad entre 11 debe ser $x = y$ (o bien: $10^6x+y = 10^6x+x+y-x = 100001x+y-x = 9091\cdot 11x+y-x$, de donde $11 \mid y-x$ y $y = x$). Es decir que $100001x = 11A$, y dividiendo entre 11 resulta $A = 9091x$. Como A tiene cuatro dígitos debe ser $x = 1$, luego $A = 9091$ y $L = 190911$.