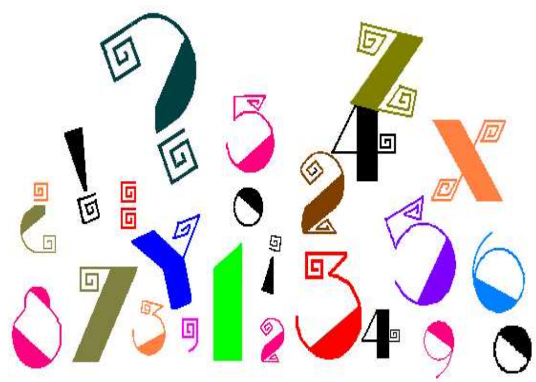
OLIMPIADA JUVENIL DE MATEMÁTICA

2017

Problemas y Soluciones

JOSÉ HEBER NIETO SAID, RAFAEL SÁNCHEZ LAMONEDA



COLECCIÓN ESTUDIOS
DIVULGACIÓN CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA

ACADEMIA DE CIENCIAS FÍSICAS,
MATEMÁTICAS Y Y NATURALES

José Heber Nieto Said. Venezolano de origen uruguayo, es egresado de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Buenos Aires, M.Sc. en Matemática y Dr. H.C. por la Universidad del Zulia (LUZ). Es profesor titular emérito de LUZ, donde fue Director del Departamento de Matemática y Computación, profesor de casi todas las materias dictadas por ese Departamento, proyectista de la Licenciatura en Computación y editor de revistas científicas. Ha escrito varios libros y artículos sobre diversos aspectos de la matemática. Es miembro de varias asociaciones académicas y profesionales (AMV, AVCM, MAA, AMS y CMS). En las olimpiadas matemáticas venezolanas ha participado desde hace más de quince años como entrenador, jefe o tutor de delegaciones, jurado y apoyo académico.

Rafael Sánchez Lamoneda. Venezolano. Profesor Titular de la Escuela de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UCV. Egresado del Instituto Pedagógico de Caracas, M.Sc. en Matemáticas de la Universidad Simón Bolívar y PhD en Matemáticas de Brandeis University, Massachusetts, USA. Ha escrito varios artículos sobre Algebra en revistas internacionales. Fue Jefe del Departamento de Matemáticas del Ivic y miembro de la Comisión de postgrado de ese Instituto y de la Escuela de Matemáticas de la UCV. Premio Erdös 2010, otorgado por la World Federation for National Mathematical Competitions. Premio al mejor trabajo en el área de Matemáticas otorgado por el Conicit en el año 1993. Ha trabajado en las Olimpiadas Matemáticas en Venezuela desde 1978, ha sido jefe o tutor de delegaciones del país en Olimpiadas de Matemáticas Internacionales desde 1981. Asesor de la Organización de Estados Ibero-americanos para la Educación la Ciencia y la Cultura, OEI, en el área de Matemáticas y Olimpiadas Matemáticas. Asesor en el área de Matemáticas de la Academia Venezolana de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales. Pertenece a la directiva de la Asociación Matemática Venezolana desde hace más de diez años. En la actualidad es el Presidente de la Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas, ACM.

OLIMPIADA JUVENIL DE MATEMÁTICA

(OJM, OMCC, 0IM, IMO)

2017

Problemas y Soluciones

JOSÉ HEBER NIETO SAID
RAFAEL SÁNCHEZ LAMONEDA

OLIMPIADA DE MATEMÁTICA 2017

COLECCIÓN ESTUDIOS

Hecho el Depósito de Ley
Deposito Legal: DC2019001588
ISBN: 978-980-6195-65-3

Diseño General: Antonio Machado-Allison

Diseño Carátula: Claudia Nieto y Antonio Machado-Allison

Olimpiada Juvenil de Matemáticas 2017

(OJM, OM, OMCC, OIM, IMO)

Problemas y Soluciones

José Heber Nieto Said
Rafael Sánchez Lamoneda

OLIMPIADA JUVENIL DE MATEMÁTICAS 2017

COLECCIÓN ESTUDIOS

Hecho el Depósito de Ley
Depósito Legal:
ISBN:

Diseño General: Antonio Machado-Allison

Diseño Carátula: Claudia Nieto y Antonio Machado-Allison

Índice general

Introducción

LAS Olimpiadas Matemáticas son competencias dirigidas principalmente a jóvenes de escuela elemental y secundaria. Actualmente esta actividad se ha extendido por todo el mundo debido a su gran efectividad en la popularización de las matemáticas y en la detección de jóvenes con talento para el estudio de esta ciencia.

Esta obra consta de siete capítulos. En los tres primeros se presentan los problemas y soluciones de nuestra Olimpiada Juvenil de Matemática, dedicando un capítulo a cada fase de la competencia: Prueba Canguro, Prueba Regional y Prueba Final.

El cuarto capítulo contiene los problemas y soluciones de la XXIII Olimpiada Matemática de Mayo, en la cual participamos (por correspondencia) con 10 alumnos en cada uno de los dos niveles de la competencia. Luis Martínez obtuvo una medalla de oro y Javier Mila de la Roca una medalla de plata. Además obtuvimos siete medallas de bronce y cuatro menciones honoríficas. Agradecemos a la Fundación Olimpiada Matemática Argentina, organizadores de esta competencia, por permitirnos publicar aquí los problemas y sus soluciones.

El quinto capítulo contiene los problemas y soluciones de la XIX Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe, celebrada en San Ignacio, El Salvador, del 14 al 22 de Junio. Nuestro equipo estuvo conformado por Juan Diego Guevara del colegio Bella Vista de Maracay y Francisco Molina de la Escuela Comunitaria de San Antonio de los Altos, estado Miranda. La tutora fue la profesora Laura Vielma, de la Academia Washington de Caracas y el jefe de delegación el prof. Rafael Sánchez, de la UCV. El joven Juan Diego Guevara obtuvo una mención honorífica.

El sexto capítulo contiene los problemas y soluciones de la XXXII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (OIM), celebrada en Puerto Iguazú, Argentina, del 15 al 23 de septiembre. En la misma nos representaron Amanda Vanegas, del colegio San Francisco de Asís de Maracaibo, y Laura Queipo, del colegio San Vicente de Paul, de Maracaibo. Amanda ganó medalla de plata y Laura medalla de bronce, para una actuación excelente de nuestro equipo. La delegación fue liderada por el profesor José H. Nieto y viajó sin tutor.

El séptimo capítulo contiene los problemas y soluciones de la 58^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO), celebrada en Río de Janeiro, Brasil del 12 al 23 de Julio. Asistimos con cinco estudiantes: Amanda Vanegas del colegio San Francisco de Asís de

Maracaibo, Laura Queipo, del colegio San Vicente de Paul, de Maracaibo, Wemp Pacheco, del colegio Calicantina de Maracay, Iván Rodríguez del colegio Santiago León de Caracas y Onice Aguilar, del colegio La Presentación de Mérida. Amanda Vanegas y Wemp Pacheco obtuvieron medallas de bronce y Laura Queipo e Iván Rodríguez, menciones honoríficas. El equipo logró la mayor puntuación en la historia de nuestras participaciones en esta competencia, al obtener entre todos 58 puntos. El tutor de la delegación fue el profesor José H. Nieto, de La Universidad del Zulia, y el jefe de delegación el prof. Rafael Sánchez, de la Escuela de Matemáticas de la UCV.

Asímismo participamos en la 4^a IGO (Olimpiada Iraní de Geometría). En esta competencia Amanda Vanegas obtuvo medalla de plata en el nivel avanzado, mientras que Francisco Molina, Juan Diego Guevara y Laura Queipo obtuvieron mención honorífica en los niveles elemental, intermedio y avanzado, respectivamente. Los problemas y soluciones de esta competencia pueden verse en urlhttps://igo-official.ir/events/4/.

Esperamos que este libro sea de gran utilidad tanto para profesores como para estudiantes, y que les permita conocer las matemáticas desde un punto de vista interesante y entretenido.

No queremos terminar esta introducción sin agradecer a nuestros patrocinadores, en especial a la *Fundación Empresas Polar*, a la *Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales*, a la *Facultad de Ciencias de la UCV* junto a la *Fundación Amigos de Ciencias*, a la *Universidad Simón Bolívar*, la *Universidad Rafael Urdaneta*, a *Acumuladores Duncan*, a la *Fundación I Love Venezuela*, a la *Fundación Alas de Venezuela de Santa Bárbara Airlines*, a la *Fundación Cultural del Colegio Emil Friedman*, a todos los exolímpicos que desde los lugares más apartados del mundo contribuyeron para poder llevar a nuestros equipos a las competencias internacionales, así como a todos los colegas que con su trabajo y esfuerzo, permiten que la Olimpiada Juvenil de Matemáticas sea una realidad.

Capítulo 1

Prueba Canguro

1.1. Prueba de Primer Año y Segundo Año

Problema 1. Cuatro cartas están en fila: $\boxed{2}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{7}$ ¿Cuál línea de cartas no podrás obtener, si solamente puedes intercambiar dos cartas?

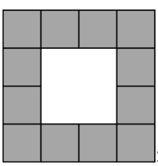
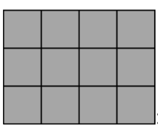
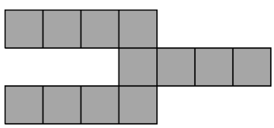
(A) $\boxed{2}\boxed{7}\boxed{1}\boxed{0}$; (B) $\boxed{0}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{7}$; (C) $\boxed{1}\boxed{0}\boxed{2}\boxed{7}$; (D) $\boxed{0}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{7}$; (E) $\boxed{2}\boxed{0}\boxed{7}\boxed{1}$

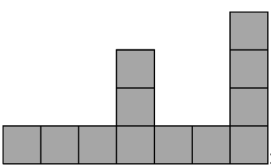
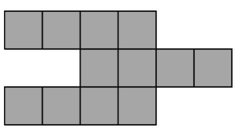
Problema 2. Una mosca tiene 6 patas, una araña tiene 8 patas. Juntas, 3 moscas y 2 arañas tienen tantas patas como 9 pollos y ...

(A) 2 gatos; (B) 3 gatos; (C) 4 gatos; (D) 5 gatos; (E) 6 gatos.

Problema 3. Alicia tiene 4 piezas con la siguiente forma: .

¿Cuál de las siguientes figuras Alicia no puede formar, a partir de estas cuatro piezas?

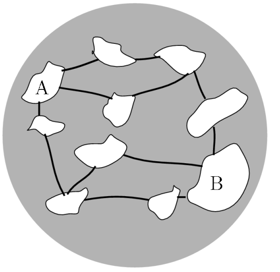
(A) ; (B) ; (C) 

(D) ; (E) 

Problema 4. Alex sabe que $1111 \times 1111 = 1234321$. ¿Cuánto es 1111×2222?

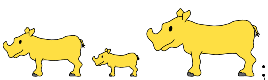
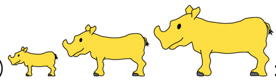
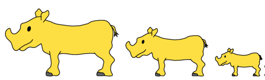
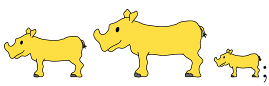
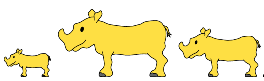
(A) 3456543; (B) 2345432; (C) 2234322; (D) 2468642; (E) 4321234.

Problema 5. En un planeta hay 10 islas y 12 puentes. Ahora mismo, se puede cruzar por todos los puentes. ¿Cuál es el número más pequeño de puentes que deben cerrarse para que no se pueda cruzar desde A hasta B?



(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4; (E) 5.

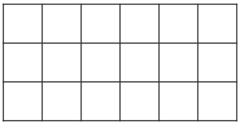
Problema 6. Juana, Carlos y Luis salen a caminar. Juana camina al frente, Carlos camina en el medio y Luis camina atrás. Juana pesa 500 kg más que Carlos. Carlos pesa 1000 kg menos que Luis. ¿Cuál de las siguientes ilustraciones presenta a Juana, Carlos y Luis en el orden correcto?

(A) ; (B) ; (C) ;
(D) ; (E) .

Problema 7. Un dado especial tiene un número en cada cara. La suma de los números que están en caras opuestas son iguales. Cinco de los números son: 5, 6, 9, 11 y 14. ¿Cuál es el número en la sexta cara?

(A) 4; (B) 7; (C) 8; (D) 13; (E) 15.

Problema 8. Martín quiere pintar las casillas cuadradas de un tablero rectangular de modo que $1/3$ de las casillas sean azules y la mitad de las casillas sean amarillas. El resto de las casillas se pintarán de rojo. ¿Cuántas casillas pintará Martín de rojo?

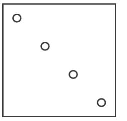


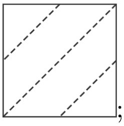
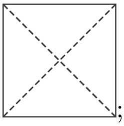
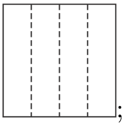
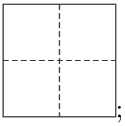
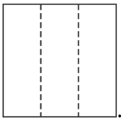
(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4; (E) 5.

Problema 9. Por cada dos problemas que Pedro resolvió en la Olimpiada, Nicolás resolvió tres. En total, Pedro y Nicolás resolvieron 30 problemas. ¿Cuántos problemas resolvió Nicolás más que Pedro?

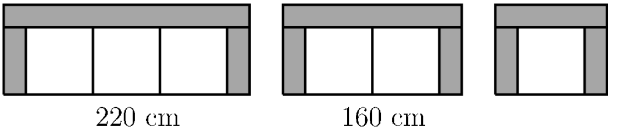
(A) 5; (B) 6; (C) 7; (D) 8; (E) 9.

Problema 10. Beto dobló una hoja de papel, tomó una máquina perforadora e hizo un solo orificio en el papel. La figura de la derecha muestra el papel, después de desdoblarlo. ¿Cuál de las siguientes ilustraciones muestra las líneas por las cuales Beto dobló el papel?



Ⓐ ; Ⓑ ; Ⓒ ; Ⓓ ; Ⓔ .

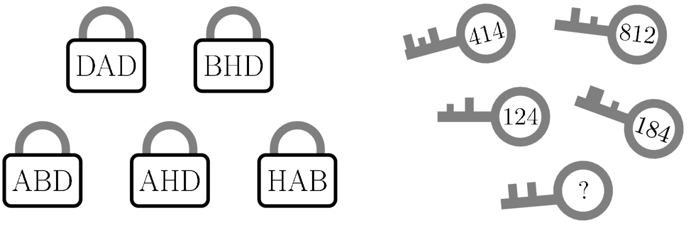
Problema 11. Una mueblería vende sofás de tres, dos y un puestos, construidos a partir de piezas idénticas, como muestra la figura. Incluyendo los posabrazos, el ancho del sofá de 3 puestos es 220 cm y el ancho del sofá de dos puestos es 160 cm.



¿Cuál es el ancho del sofá de un puesto?

Ⓐ 80 cm; Ⓑ 60 cm; Ⓒ 120 cm; Ⓓ 90 cm; Ⓔ 100 cm.

Problema 12. Cada llave, abre solamente un candado. El número en cada llave se refiere a las letras en su correspondiente candado.



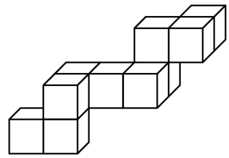
¿Cuál es el número escrito en la última llave?

Ⓐ 284; Ⓑ 823; Ⓒ 282; Ⓓ 824; Ⓔ 382.

Problema 13. Tomás escribe todos los enteros desde el 1 hasta el 20 en una fila y obtiene el número de 31 dígitos: 1234567891011121314151617181920. Luego, Tomás borra 24 de los 31 dígitos, de tal forma que el número que queda es lo más grande posible. ¿Qué número obtiene Tomás?

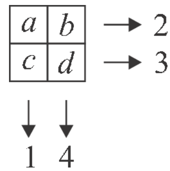
Ⓐ 9671819; Ⓑ 9567892; Ⓒ 9912345; Ⓓ 9781920; Ⓔ 9818192.

Problema 14. Mario quiere colocar la siguiente escultura en una caja. ¿Cuál de las siguientes cajas, es la más pequeña que Mario puede usar?



(A) $3 \times 3 \times 4$; (B) $3 \times 5 \times 5$; (C) $3 \times 4 \times 5$; (D) $4 \times 4 \times 4$; (E) $4 \times 4 \times 5$.

Problema 15. Cuando sumamos los números en cada fila y en cada columna, obtenemos los resultados que se muestran en la figura. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

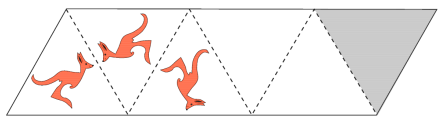


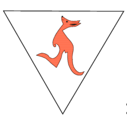
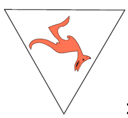
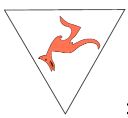
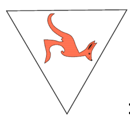
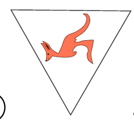
(A) $a = d$; (B) $b = c$; (C) $a > d$; (D) $c > b$; (E) $a < d$.

Problema 16. Pedro fue a caminar en las montañas por 5 días. Comenzó el lunes y su última caminata fue el viernes. Cada día caminó 2 km más que el día anterior, y en total caminó 70 km. ¿Qué distancia caminó Pedro el jueves?

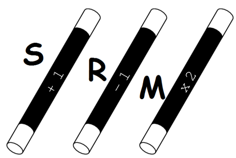
(A) 12 km; (B) 13 km; (C) 14 km; (D) 15 km; (E) 16 km.

Problema 17. El primer triángulo a la izquierda de la siguiente figura muestra un canguro. Las líneas a trazos actúan como espejos. Se muestran los dos primeros reflejos. ¿Cúal es el reflejo en el triángulo sombreado?



(A)  ; (B)  ; (C)  ; (D)  ; (E)  .

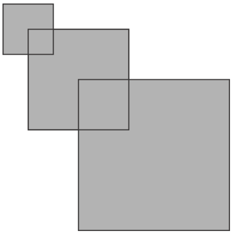
Problema 18. Boris tiene cierta cantidad de dinero y 3 varitas mágicas, llamadas S, R y M. La varita S, al tocar el dinero, le suma 10 Bs. La varita R en cambio resta 10 Bs y la varita M multiplica por 2 la cantidad de dinero.



Si Boris debe usar exactamente una vez cada varita, ¿en qué orden las debe usar para obtener, al final, la mayor cantidad posible de dinero?

(A) M, S, R; (B) S, M, R; (C) S, R, M; (D) M, R, S; (E) R, S, M.

Problema 19. Rafael tiene tres cuadrados. El lado del primero mide 2 cm. El lado del segundo mide 4 cm y uno de sus vértices está situado en el centro del primer cuadrado. El lado del tercer cuadrado mide 6 cm y uno de sus vértices está colocado en el centro del segundo cuadrado. ¿Cuál es el área de la figura completa?

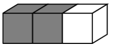


Ⓐ 32 cm^2; Ⓑ 51 cm^2; Ⓒ 27 cm^2; Ⓓ 16 cm^2; Ⓔ 6 cm^2.

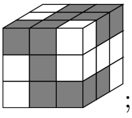
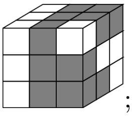
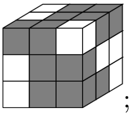
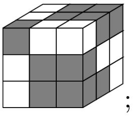
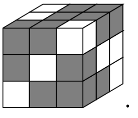
Problema 20. Cuatro jugadores anotaron goles en un partido de balonmano. Todos ellos anotaron un número distinto de goles. Entre los cuatro, Miguel fue el que menos goles anotó. Los otros tres jugadores anotaron 20 goles, en total. ¿Cuál es el número mayor de goles que Miguel pudo haber anotado?

Ⓐ 3; Ⓑ 2; Ⓒ 5; Ⓓ 4; Ⓔ 6.

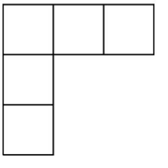
Problema 21. Una “barra” consiste en dos cubos grises y un cubo blanco pegados como se ilustra en la figura a la derecha.



¿Cuál de las siguientes figuras se puede construir con 9 barras?

Ⓐ  ; Ⓑ  ; Ⓒ  ; Ⓓ  ; Ⓔ  .

Problema 22. Cada uno de los números 1, 2, 3, 4 y 5 debe escribirse en una casilla diferente de la figura, de modo que si un número está justo debajo o justo a la derecha de otro número, tiene que ser mayor. ¿De cuántas formas se puede hacer eso?



Ⓐ 4; Ⓑ 3; Ⓒ 6; Ⓓ 5; Ⓔ 8.

Problema 23. Ocho canguros se paran en línea, como ilustra la siguiente figura.

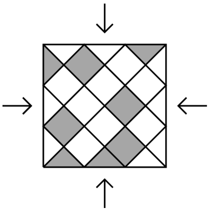
En algún momento dos canguros, uno al lado del otro y mirándose mutuamente, cambian de lugar brincando y ocupando el lugar del otro. De esta forma los canguros siguieron brincando, hasta ya no poder hacerlo más. ¿Cuántos intercambios fueron posibles?

Ⓐ 2; Ⓑ 10; Ⓒ 12; Ⓓ 13; Ⓔ 16.

Problema 24. Mónica tiene que escoger 5 números distintos. Ella tiene que multiplicar algunos por 2 y los otros por 3 con el objetivo de obtener el número menor de resultados distintos. ¿Cuál es el menor número de resultados diferentes que Mónica puede obtener?

(A) 3; (B) 5; (C) 2; (D) 4; (E) 1.

Problema 25. En la figura se puede observar una piso cuadrado, cubierto con baldosas triangulares (T) y cuadradas (C), algunas blancas y otras grises. ¿Cuál es el número mínimo de baldosas grises que es necesario intercambiar con baldosas blancas, para que al mirar desde cualquiera de las cuatro direcciones indicadas se vea el mismo patrón?



(A) 3 T y 1 C; (B) 1 T y 1 C; (C) 1 T y 3 C; (D) 3 T y 3 C; (E) 3 T y 2 C.

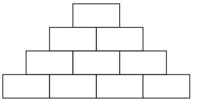
Problema 26. Una bolsa solamente contiene metras de color rojo o verde. Por cada 5 metras que se seleccionen, al menos una es roja. Por cada 6 metras que se seleccionen, al menos una es verde. ¿Cuál es el mayor número de metras que la bolsa puede contener?

(A) 11; (B) 10; (C) 9; (D) 8; (E) 7.

Problema 27. A Ana le gustan los números pares, a Berta le gustan los números divisibles entre 3 y a Celia le gustan los números divisibles entre 5. Cada una de ellas fue, por separado, a una canasta con 8 bolas numeradas y tomó todas las bolas con números de su gusto. Si Ana tomó bolas con números 32 y 52, Berta tomó bolas con números 24, 33 y 45 y Celia tomó bolas con números 20, 25 y 35. ¿En qué orden fueron ellas a la canasta?

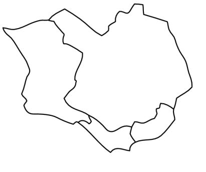
(A) Ana, Celia, Berta; (B) Celia, Berta, Ana; (C) Berta, Ana, Celia;
(D) Berta, Celia, Ana; (E) Celia, Ana, Berta.

Problema 28. Juan quiere escribir un número natural en cada caja del siguiente diagrama, de tal forma que cada número en una caja que no está en la fila del fondo sea la suma de los dos números inmediatamente debajo de él. ¿Cuál es el número más grande de números impares que Juan puede escribir?



(A) 4; (B) 6; (C) 5; (D) 8; (E) 7.

Problema 29. Julia tiene cuatro lápices de colores diferentes y los quiere usar, todos o sólo algunos, para pintar el mapa de una isla dividida en cuatro naciones, como muestra la figura. Dos naciones con una frontera común no pueden tener el mismo color. ¿De cuántas maneras puede Julia colorear el mapa?



(A) 12; (B) 24; (C) 18; (D) 48; (E) 36.

Problema 30. Un tablero de 6×6 tiene 36 casillas del mismo tamaño. En cada casilla hay una lámpara. Decimos que dos lámparas son vecinas si están en casillas que tienen un lado en común. Inicialmente, algunas lámparas están encendidas. En cada minuto toda lámpara que tiene al menos dos lámparas vecinas encendidas, se enciende. ¿Cuál es el número mínimo de lámparas que se debe encender inicialmente, para asegurarnos que en algún momento todas las lámparas estarán encendidas?

Ⓐ 6; Ⓑ 4; Ⓒ 7; Ⓓ 5; Ⓔ 8.

1.1.1. Soluciones

1. La respuesta correcta es la (B).

2. Tres moscas y dos arañas tienen $3 \times 6 + 2 \times 8 = 34$ patas. Nueve pollos tienen 18 patas. La diferencia $34 - 18 = 16$ es el número de patas de cuatro gatos, respuesta (C).

3. La respuesta correcta es la (E).

4. La respuesta correcta es la (D), 2468642, que se obtiene rápidamente observando que 1111×2222 es el foble de $1111 \times 2222 = 1234321$.

5. La respuesta correcta es la (D), 2, y se logra por ejemplo cortando el puente que sale de A hacia el sur y el que sale de B hacia el norte.

6. La respuesta correcta es la (A).

7. Entre los cinco números sólo hay dos pares con la misma suma, que son $9+11 = 6+14$. Luego el número que falta debe ser 15, para que con 5 sume 20. Respuesta (E).

8. Pintará $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ de las casillas, es decir $18/6 = 3$. Respuesta (C).

9. La respuesta correcta es la (B), 6 problemas.

10. La respuesta correcta es la (A).

11. La respuesta correcta es la (E). El ancho de un puesto sin posabrazos es la diferencia de los dos primeros, $220-160 = 60$ cm. Luego el ancho del sofá de un puesto es $160-60 = 100$ cm.

12. La respuesta correcta es la (A), 284. Es claro que DAD es 414, y como HAB es el único que tiene A en el medio debe ser 812. Luego BHD es 284 y es la llave que falta.

13. Se debe dejat un número de 7 dígitos que sea lo más grande posible. Se borran los primeros 8 dígitos para que el número comience por 9. El segundo dígito debe ser 7 (no puede ser 8 ó 9 porque entonces no nos quedarían 7 dígitos). Borrando el 1 siguiente al 7 nos queda 9781920, respuesta (D).

14. La respuesta correcta es la (C).

15. La respuesta correcta es la (E). Como $a+b=2$ y $b+d=4$, restando resulta $a-d=-2$ y por lo tanto $a<d$. Además de $a+b=2$ y $a+c=1$ resulta $b-c=1$ y $b>c$ Luego la única opción verdadera es la (E).

16. La respuesta correcta es la (E). Si el miércoles caminó x km entonces en total caminó $5x=70$, de donde $x=14$ y el jueves caminó $14+2=16$ km.

17. La respuesta correcta es la (A).

18. Es intuitivamente claro que lo mejor para Boris es primero sumar, luego multiplicar y por último restar, respuesta (B). En efecto con ese orden si comienza con x termina con $2x+10$. Lo peor es restar, multiplicar y sumar, que produce $2x-10$. En cualquier otro orden finaliza con $2x$.

19. La suma de las áreas de los cuadrados es $2^2+4^2+6^2=56$ cm^2, pero hay que restar el área de las intersecciones ($1^2+2^2=5$ cm^2) para no sumarlas dos veces, luego la respuesta correcta es la (B), 51 cm^2. Otra forma: el área de la parte del cuadrado pequeño que está afuera del cuadrado medio es 3 cm^2, y el área de la parte del cuadrado medio que está afuera del cuadrado grande es 12 cm^2, luego la respuesta es $3+12+6^2=51$ cm^2.

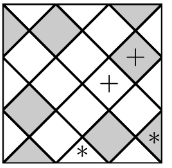
20. La respuesta correcta es la (D), 4, que se obtiene si por ejemplo si los otros jugadores hicieron 5, 7 y 8 goles. Miguel no puede haber anotado 5 goles o más, pues en ese caso la suma de los goles de los otros sería $\geq 6+7+8=21$, absurdo.

21. La respuesta correcta es la (C), que se puede armar con 9 barras paralelas que van de izquierda a derecha.

22. La respuesta correcta es la (C), de 6 maneras. Observe que el 1 debe ocupar la casilla superior izquierda y el 5 la inferior izquierda o la superior derecha. Una vez ubicados el 1 y el 5, hay 3 maneras de ubicar 2, 3 y 4.

23. La respuesta correcta es la (D), 13. Los canguros que miran a la derecha deben quedar a la derecha, y los que miran a la izquierda deben quedar a la izquierda. Es decir que los canguros 1, 2 y 3 deben cambiar de lugar con los canguros 4, 7 y 8 ($3\times 3=9$ cambios) y los canguros 5 y 6 deben cambiar de lugar con los canguros 7 y 8 ($2\times 2=4$ cambios), para un total de $9+4=13$ cambios.

24. La respuesta correcta es la (A), 3. Los números que se multipliquen por 2 darán resultados distintos, lo mismo que los que se multipliquen por 3. Como al menos 3 números se multiplican por el mismo factor, siempre habrá al menos tres resultados diferentes. Para ver que 3 es el mínimo, considere los números 1, 2, 3, 4 y 6. Si 1, 2 y 4 se multiplican por 3, y 3 y 6 se multiplican por 2, entonces los resultados diferentes serán 3, 6 y 12.



25. La respuesta correcta es la (B). Es claro que hay que intercambiar al menos dos baldosas triangulares y dos cuadradas. La figura muestra el resultado de intercambiar las baldosas triangulares marcadas con $*$ y las cuadradas marcadas con $+$.

26. La respuesta correcta es la (C), 9. En la bolsa hay a lo sumo 4 metras verdes rojas y 5 rojas.

27. Berta fue antes que Celia, pues de lo contrario Celia habría tomado el 45, y Celia antes que Ana, pues de lo contrario Ana habría tomado el 20. Respuesta (D).

28. La respuesta correcta es la (E). Observe que todos los números quedan determinados por los que se coloquen en las cuatro cajas de la base, y que sólo interesa si éstos son pares (P) o impares (I). Por simetría basta examinar los casos IIII, IIIP, IIPI, IIPP, IPIP, IPPP, PIPP y PPPP. La máxima cantidad de impares es 7 y se obtiene cuando la base es IIPI (las filas superiores serán entonces PII, IP, I).

29. Sean A, B, C y D las naciones, recorriendo la isla en sentido horario y comenzando por la más grande (que tiene frontera con las otras tres). El color de A se puede elegir de 4 maneras, luego el de B de 3 maneras (pues debe ser diferente al de A) y el de C de 2 maneras (pues debe ser diferente a los de A y B). Para D hay 2 posibilidades (cualquier color diferente a los de A y C). Luego hay $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$ maneras, respuesta (D).

30. La respuesta correcta es la (A), 6 casillas. Considere la región Ω formada por la unión de las casillas que tienen su lámpara encendida. Tomemos como unidad de medida el lado de cada casilla. Afirmamos que en cada paso el perímetro de Ω se mantiene igual o decrece. En efecto, si una casilla C se enciende y tenía exactamente 2 casillas vecinas encendidas, entonces el perímetro no cambia pues 2 segmentos unitarios se añaden al borde y 2 desaparecen. Si C tenía exactamente 3 casillas vecinas encendidas, entonces el perímetro disminuye en 2 (un segmentos unitario se añade al borde y 3 desaparecen) y si tenía 4 disminuye en 4. Si al final están todas las casillas encendidas, al comienzo el perímetro debió ser al menos $6 \times 4 = 24$. El menor número de casillas con ese perímetro de 6. Y efectivamente si inicialmente están encendidas las 6 casillas de una diagonal, es fácil verificar que luego de 5 rondas quedan todas encendidas.

1.2. Prueba de Tercer Año

Problema 1. ¿Qué hora es luego de 17 horas después de las 17:00?

Ⓐ 8:00; Ⓑ 10:00; Ⓒ 11:00; Ⓓ 12:00; Ⓔ 13:00.

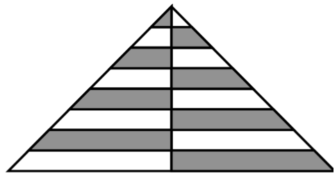
Problema 2. Un grupo de niñas están paradas alrededor de un círculo. María es la cuarta a la izquierda de Elena y la séptima a la derecha de Elena. ¿Cuántas niñas hay en el grupo?

Ⓐ 9; Ⓑ 10; Ⓒ 11; Ⓓ 12; Ⓔ 13.

Problema 3. ¿Qué número se debe restar a -17 para obtener -33?

Ⓐ 50; Ⓑ -50; Ⓒ 40; Ⓓ -16; Ⓔ 16.

Problema 4. En el diagrama se muestra un triángulo isósceles dividido en bandas de igual altura. El segmento vertical es la altura del triángulo. ¿Cuál fracción del área del triángulo representa la parte blanca?

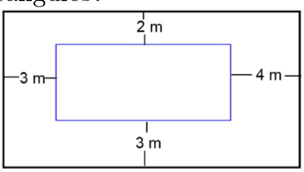


Ⓐ $3/4$; Ⓑ $1/3$; Ⓒ $2/3$; Ⓓ $1/2$; Ⓔ $2/5$.

Problema 5. ¿Cuál de las siguientes igualdades es la correcta?

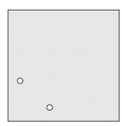
Ⓐ $\dfrac{4}{1} = 1{,}4$; Ⓑ $\dfrac{5}{2} = 2{,}5$; Ⓒ $\dfrac{6}{3} = 3{,}6$; Ⓓ $\dfrac{7}{4} = 4{,}7$; Ⓔ $\dfrac{8}{5} = 5{,}8$.

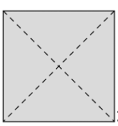
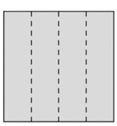
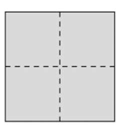
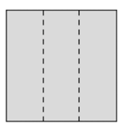
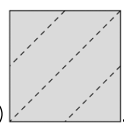
Problema 6. En el diagrama aparecen dos rectángulos cuyos lados correspondientes son paralelos. ¿Cuál es la diferencia entre las longitudes de los perímetros de los dos rectángulos?



Ⓐ 24 m; Ⓑ 21 m; Ⓒ 20 m; Ⓓ 16 m; Ⓔ 12 m.

Problema 7. Beto dobló un pedazo de papel dos veces y luego lo perforó haciéndole un hueco. Cuando lo desdobló, vió que el papel había quedado como se muestra en la figura. ¿Cómo había doblado Beto el papel?



Ⓐ ; Ⓑ ; Ⓒ ; Ⓓ ; Ⓔ .

Problema 8. La suma de tres números enteros positivos diferentes es igual a 7. ¿Cuál es el producto de estos tres números?

Ⓐ 10; Ⓑ 12; Ⓒ 8; Ⓓ 9; Ⓔ 5.

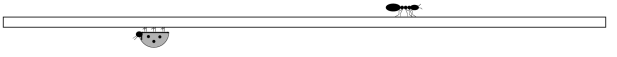
Problema 9. En el diagrama se muestran cuatro corazones solapados. Sus áreas son: 1 cm^2, 4 cm^2, 9 cm^2 y 16 cm^2. ¿Cuál es el área de la zona sombreada?

Ⓐ 9 cm^2; Ⓑ 10 cm^2; Ⓒ 11 cm^2; Ⓓ 12 cm^2; Ⓔ 13 cm^2.

Problema 10. Yvonne tiene 20 euros. Cada una de sus cuatro hermanas tiene 10 euros. ¿Cuántos euros tiene que darle Yvonne a cada una de sus hermanas de tal manera que las cinco tengan la misma cantidad de dinero?

Ⓐ 2; Ⓑ 4; Ⓒ 5; Ⓓ 8; Ⓔ 10.

Problema 11. La hormiga Ana recorrió los $\frac{2}{3}$ de un palo, comenzando desde el extremo izquierdo. El escarabajo Bruno recorrió $\frac{3}{4}$ del mismo palo pero comenzando por el extremo derecho. ¿Cuál es la fracción del palo que separa a Ana de Bruno?

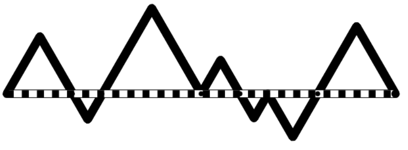


Ⓐ $\dfrac{3}{8}$; Ⓑ $\dfrac{1}{12}$; Ⓒ $\dfrac{5}{7}$; Ⓓ $\dfrac{1}{2}$; Ⓔ $\dfrac{5}{12}$.

Problema 12. Un sexto de la audiencia de una obra de teatro para niños eran adultos. Dos quintos de los niños eran varones. ¿Cuál fracción de la audiencia representaban las niñas?

Ⓐ $\dfrac{1}{2}$; Ⓑ $\dfrac{1}{3}$; Ⓒ $\dfrac{1}{4}$; Ⓓ $\dfrac{1}{5}$; Ⓔ $\dfrac{2}{5}$.

Problema 13. En el diagrama la línea punteada y el camino negro forman siete triángulos equiláteros. La longitud de la línea punteada es 20. ¿Cuál es la longitud del camino negro?



Ⓐ 25; Ⓑ 30; Ⓒ 35; Ⓓ 40; Ⓔ 45.

Problema 14. Las edades de las cuatro primas Ema, Inés, Rita y Sonia son 3, 8, 12 y 14, aunque no necesariamente en ese orden. Ema es más joven que Rita. La suma de las edades de Sonia y Ema es divisible entre 5. La suma de las edades de Sonia y Rita también es divisible entre 5. ¿Cuál es la edad de Inés?

(A) 12; (B) 3; (C) 14; (D) 5; (E) 8.

Problema 15. Este año más de 800 corredores participaron en la carrera "Salto del Canguro". Exactamente el 35 % de los corredores eran mujeres y hubo 252 hombres más que mujeres. ¿Cuántos participantes hubo en total?

(A) 802; (B) 810; (C) 822; (D) 824; (E) 840.

Problema 16. Rita quiere escribir un número en cada una de las casillas del diagrama que se muestra. Ya ha escrito dos números. Ella quiere que la suma de todos los números sea igual a 35, que la suma de los números en las primeras tres casillas sea igual a 22 y que la suma de los números en las últimas tres casillas sea igual a 25. ¿Cuál es el producto de los números que Rita debe escribir en las casillas grises?

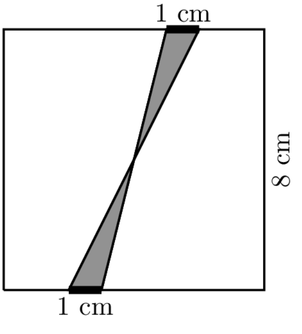
(A) 108; (B) 0; (C) 48; (D) 39; (E) 63.

Problema 17. Simón quiere cortar un pedazo de hilo en nueve trozos iguales, y marca los puntos donde hará los cortes. Bárbara quiere cortar el mismo pedazo de hilo en ocho trozos iguales y también marca los puntos por donde hará los cortes. Luego Carlos corta el hilo por cada uno de los puntos que Simón y Bárbara habían marcado. ¿Cuántos trozos de hilo obtuvo Carlos?

(A) 16; (B) 19; (C) 15; (D) 18; (E) 17.

Problema 18. Se marcan dos segmentos de longitud 1 cm cada uno sobre lados opuestos de un cuadrado con lados de longitud 8 cm. Luego se unen los extremos de estos segmentos como se muestra en la figura. ¿Cuál es el área de la región sombreada, en cm^2?

(A) 2; (B) 4; (C) 6.4; (D) 8; (E) 10.



Problema 19. Tito quiere preparar un horario para salir a trotar en la semana. El quiere trotar exactamente dos veces por semana y los mismos días cada semana. No quiere trotar dos días consecutivos. ¿Cuántos horarios diferentes puede elaborar?

(A) 16; (B) 14; (C) 12; (D) 10; (E) 8.

Problema 20. Emily quiere escribir un número en cada una de las casillas de un tablero 3×3 de tal manera que la suma de los números de dos casillas que compartan un lado sea siempre la misma. Ella ya ha escrito dos números en el tablero, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la suma de todos los números escritos en la tabla?

2		
		3

Ⓐ 18; Ⓑ 20; Ⓒ 21; Ⓓ 22; Ⓔ 23.

Problema 21. Las medidas en grados de los ángulos de un triángulo están dadas por tres números enteros diferentes. ¿Cuál es el valor mínimo posible para la suma del menor y el mayor de los ángulos?

Ⓐ 61°; Ⓑ 90°; Ⓒ 91°; Ⓓ 120°; Ⓔ 121°.

Problema 22. Diana tiene nueve números: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Ella le suma 2 a algunos de ellos y 5 a los otros. ¿Cuál es el menor número de resultados distintos que puede obtener?

Ⓐ 9; Ⓑ 8; Ⓒ 7; Ⓓ 6; Ⓔ 5.

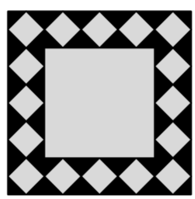
Problema 23. Diez canguros están parados en fila como se muestra en la figura. En un cierto momento dos de ellos, que son vecinos en la fila y que se miran de frente, saltan e intercambian sus posiciones. Esto se repitió hasta que no fue posible hacerlo más. ¿Cuántos intercambios de posición se hicieron en total?

Ⓐ 15; Ⓑ 16; Ⓒ 18; Ⓓ 20; Ⓔ 21.

Problema 24. Los autobuses que van del aeropuerto al centro de la ciudad salen cada 3 minutos. Un carro sale del aeropuerto al centro a la misma hora que uno de los autobuses, siguiendo la misma ruta. Si a un autobús le toma 60 minutos en ir desde el aeropuerto hasta el centro de la ciudad y al carro 35 minutos en hacer el mismo recorrido, ¿cuántos autobuses pasará el carro en su camino al centro, sin contar al que partió con él?

Ⓐ 8; Ⓑ 9; Ⓒ 10; Ⓓ 11; Ⓔ 13.

Problema 25. Ofelia tiene un mantel como el que se muestra en la figura. ¿Qué porcentaje del mantel es negro?

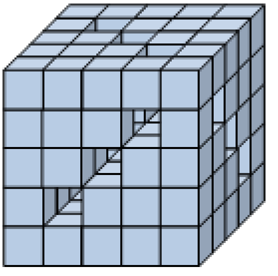


Ⓐ 36; Ⓑ 32; Ⓒ 25; Ⓓ 24; Ⓔ 16.

Problema 26. En la sucesión que comienza con los números 2, 3, 6, 8, 8, cada término se obtiene de la siguiente manera: los dos primeros son 2 y 3 y del tercero en adelante el término que correponde se calcula multiplicando los dos anteriores y tomando sólo el dígito de las unidades. ¿Cuál es el término de lugar 2017 en la sucesión?

Ⓐ 3; Ⓑ 8; Ⓒ 2; Ⓓ 6; Ⓔ 4.

Problema 27. Miguel tiene 125 cubos pequeños. Pega algunos de ellos para formar un cubo grande con nueve túneles que atraviesan el cubo completamente, como se muestra en la figura. ¿Cuántos cubos pequeños le sobraron?

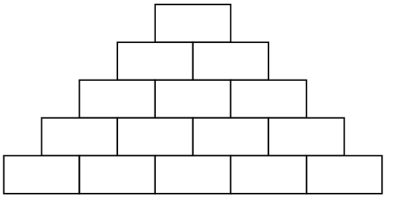


Ⓐ 52; Ⓑ 45; Ⓒ 42; Ⓓ 39; Ⓔ 36.

Problema 28. Dos corredores se entrenan en una pista circular de 720 metros. Corren en direcciones opuestas y a velocidad constante. El primer corredor tarda cuatro minutos en dar una vuelta mientras que el segundo tarda cinco minutos. ¿Cuántos metros ha recorrido el segundo corredor entre dos cruces consecutivos de ellos?

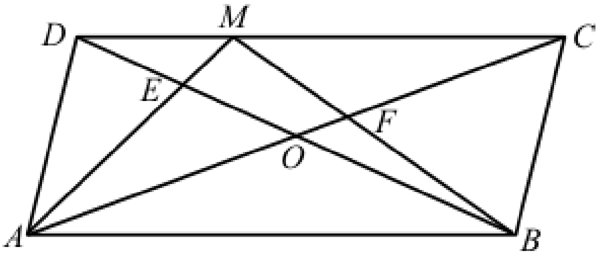
Ⓐ 355; Ⓑ 350; Ⓒ 340; Ⓓ 330; Ⓔ 320.

Problema 29. Sara quiere escribir un entero positivo en cada una de las casillas de la figura que se muestra. Para hacerlo sigue el siguiente algoritmo: En la fila de abajo escribe números cualesquiera. Luego en cada casilla, a partir de la segunda fila, de abajo hacia arriba, coloca la suma de los números que están en las dos casillas inmediatamente debajo de ella. ¿Cuál es la mayor cantidad de números impares que Sara puede escribir?



Ⓐ 5; Ⓑ 7; Ⓒ 8; Ⓓ 10; Ⓔ 11.

Problema 30. La figura muestra un paralelogramo $ABCD$ de área S. El punto O es la intersección de las diagonales AC y BD. Sobre el lado DC se marca el punto M. AM y BD se intersectan en el punto E y BM y AC se intersectan en el punto F. La suma de las áreas de los triángulos AED y BFC es $\frac{1}{3}S$.



¿Cuál es el área del cuadrilátero $EOFM$, en términos de S?

Ⓐ $\frac{1}{12}S$; Ⓑ $\frac{1}{6}S$; Ⓒ $\frac{1}{14}S$; Ⓓ $\frac{1}{8}S$; Ⓔ $\frac{1}{10}S$.

1.2.1. Soluciones

1. $17 + 17 = 34 = 24 + 10$, luego la respuesta es la (B), 10:00.

2. A la derecha de Elena, hasta María, hay 7 niñas. A la izquierda de Elena, hasta la anterior a María, hay 3 niñas. Luego hay en total $1 + 7 + 3 = 11$ niñas, respuesta (C).

3. $-17 - 16 = -33$, luego la respuesta correcta es la (E).

4. La simetría respecto a la altura del triángulo muestra que las áreas blanca y gris son iguales. Luego la respuesta correcta es la (D), $1/2$.

5. La respuesta correcta es la (B).

6. $(2 + 3 + 3 + 4) \times 2 = 24$, respuesta (A).

7. La respuesta correcta es la (E).

8. Los números sólo pueden ser 1, 2 y 4. Luego su producto es 8, respuesta (C).

9. $16 - 9 + 4 - 1 = 10$ cm^2, respuesta (B).

10. Entre las 5 hermanas tienen $20 + 10 \times 4 = 60$ euros. Si se reparten de modo que todas tengan lo mismo le tocarían 12 euros a cada una. Luego Yvonne debe darle 2 euros a cada una de sus hermanas, respuesta (A).

11. $\frac{2}{3} - (1 - \frac{3}{4}) = \frac{5}{12}$, respuesta (E).

12. $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{2}$, respuesta (A).

13. Por cada segmento punteado hay dos segmentos negros de su misma longitud, luego la respuesta es la (D), $20 \times 2 = 40$.

14. Las sumas de edades que son divisibles entre 5 son $3 + 12$ y $8 + 12$, luego las edades de Sonia, Ema y Etita son 12, 3 y 8, respectivamente, y la de Inés es 14, respuesta (C).

15. Si participaron m mujeres entonces participaron $m + 252$ hombres, y $2m + 252$ corredores en total. Se cumple $m = \frac{35}{100}(2m + 252)$, de donde $100m = 35(2m + 252)$,

$30m = 35 \cdot 252$ y $m = 35 \cdot 252/30 = 294$. Luego el total de corredores fue $2 \times 294 + 252 = 840$, respuesta (E).

16. Sean x, y, z los números que faltan, de izquierda a derecha. Entonces $3+x+y+z+4 = 35$, $3+x+y = 22$, $y+z+4 = 25$, de donde $x+y+z = 28$, $x+y = 19$, $y+z = 21$ y se obtiene que $z = 9$, $y = 12$, $x = 7$ y $xz = 7 \times 9 = 63$. La respuesta correcta es la (E).

17. La respuesta correcta es la (A), 16. Simón marcó 8 puntos y Bárbara 7, que hacen 15 puntos diferentes. Luego al cortar se obtienen

18. La región sombreada se compone de dos triángulos, cada uno de base 1 cm, cuyas alturas h_1 y h_2 suman 8 cm. Luego el área buscada es $1 \cdot h_1/2 + 1 \cdot h_2/2 = (h_1 + h_2)/2 = 4$ cm^2, respuesta (B).

19. La respuesta correcta es la (B). Una vez escogido un día, el otro se puede escoger de 4 maneras. Esto da $7 \times 4 = 28$ posibilidades, pero cada una está contada dos veces, luego la respuesta es 14.

20. Si a la derecha del 2 se escribe x, a la derecha de esa x debe ir un 2, y debajo de ese 2 otra x. Luego $x = 3$ y el tablero sólo contendrá números 2 y 3 en casillas alternadas, y la suma será $2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 22$. La respuesta correcta es la (D).

21. Sean $\alpha < \beta < \gamma$ los ángulos del triángulo. Como $\alpha + \gamma = 180° - \beta$, el mínimo de $\alpha + \gamma$ se alcanza cuando β sea máximo. Como $\beta < (\beta + \gamma)/2 < 180°/2 = 90°$ y β es entero, el máximo es 89° y se alcanza para el triángulo de ángulos 1°, 89° y 90°. Luego el mínimo de $\alpha + \gamma$ es 91°, respuesta (C).

22. Se los posibles resultados obtenidos por Diana hay 6 que se pueden obtener de dos maneras, a saber $4+2 = 1+5$, $4+5 = 7+2$, $5+2 = 2+5$, $5+5 = 8+2$, $6+2 = 3+5$ y $6+5 = 9+2$. Pero de las dos sumas en que aparece 4 como primer sumando sólo podemos elegir una, y lo mismo con las que tienen a 5 o a 6 como primer sumando. es decir que a lo sumo se pueden obtener 3 resultados repetidos, y por lo tanto el mínimo número de resultados diferentes es $9 - 3 = 6$. La respuesta correcta es la (D).

23. Representemos con D a los canguros que miran hacia la derecha y con I a los que miran hacia la izquierda. La configuración inicial es DDDIIDDDII. Es claro que mientras haya alguna D a la izquierda de alguna I, quedan saltos posibles. Los saltos finalizan cuando todas las I queden a la izquierda y todas las D a la derecha. Para ello cada una de las primeras tres D debe saltar sobre las cuatro I que tiene a su derecha (12 saltos), y cada una de las otras tres D debe saltar sobre las dos I que tiene a su derecha (6 saltos), para un total de 18 saltos. La respuesta correcta es la (C).

24. La respuesta correcta es la (A), 8 buses. El carro pasará a los buses que salieron antes que él y tengan hora de llegada posterior a la suya. Esos son los buses que salieron 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21 y 24 minutos antes que el carro.

25. La respuesta correcta es la (B), 32 %. Tomemos como unidad la diagonal de los cuadraditos blancos pequeños. Hay 16 de esos cuadraditos y cada uno está inscripto en un cuadrado de lado 1, del cual ocupa la mitad del área. Luego el área negra es $16/2 = 8$, y el área del mantel es $5^2 = 25$. El porcentaje buscado es entonces $8 \times 100/25 = 32\,\%$.

26. La respuesta correcta es la (C). Los primeros términos de la sucesión son 2, 3, 6, 8, 8, 4, 2, 8, 6, 8 y como se repite la secuencia 6, 8 se ve que la sucesión es periódica a partir del tercer término, con el período 6, 8, 8, 4, 2, 8. En particular todos los términos en lugares que sean múltiplos de 6 son 4. Como $2017 = 6 \cdot 336 + 1$, en el lugar 2017 hay un 2.

27. La respuesta correcta es la (D), 39. Cada túnel ocupa el espacio de 5 cubitos. Pero cada túnel intersecta en un cubito a otros dos, por lo cual esos tres túneles ocupan el espacio de 13 cubitos, y los 9 túneles el espacio de 39 cubitos.

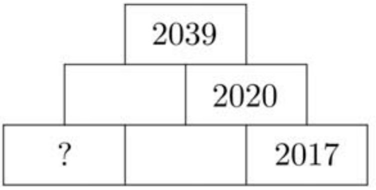
28. La respuesta correcta es la (E), 320 m. La velocidad del primer corredor es $v_1 = 720/4 = 180$ m/min, y la del segundo $v_2 = 720/5 = 144$ m/min. Si entre dos encuentros consecutivos transcurren t minutos, entonces $v_1 t + v_2 t = 180t + 144t = 720$, de donde $t = 720/324 = 20/9$ min. La distancia recorrida por el segundo corredor en ese tiempo es $v_2 t = 144 \cdot 20/9 = 320$ m.

29. La respuesta correcta es la (D), 10. Observe que todos los números quedan determinados por los que se coloquen en las cinco cajas de la base, y que sólo interesa si éstos son pares (P) o impares (I). Examinando las posibles distribuciones en la base (que se reducen por simetría) se ve que el máximo de impares es 10, y se alcanza para las bases IIPII, IPIIP y PIIPI.

30. La respuesta correcta es la (D), $S/12$. Como $[DEM]+[MFC] = [DAM]+[MBC]-[DAE]-[BFC] = \frac{S}{2} - \frac{S}{3} = \frac{S}{6}$, $[EOFM] = [DOC] - [DEM] - [MFC] = \frac{S}{4} - \frac{S}{6} = \frac{S}{12}$.

1.3. Prueba de Cuarto Año y Quinto Año

Problema 1. En este diagrama cada número es la suma de los dos números que están debajo de él. ¿Qué número debe ir en la casilla marcada con el signo de interrogación?



(A) 15; (B) 16; (C) 17; (D) 18; (E) 19.

Problema 2. Pedro escribió la palabra CANGURO en una placa de vidrio transparente. así: 

. ¿Qué verá si voltea la placa alrededor de su borde derecho y luego la gira media vuelta alrededor de su centro?

Ⓐ ; Ⓑ ; Ⓒ ; Ⓓ ; Ⓔ .

Problema 3. Angela hizo una decoración con estrellas grises y blancas superpuestas. Las áreas de las estrellas son 1 cm^2, 4 cm^2, 9 cm^2 y 16 cm^2. ¿Cuál es el área total de la región gris visible?

Ⓐ 12 cm^2; Ⓑ 13 cm^2; Ⓒ 9 cm^2; Ⓓ 11 cm^2; Ⓔ 10 cm^2.

Problema 4. María tiene 24 monedas. Cada una de sus tres hermanas tiene 12 monedas. ¿Cuántas monedas debe darle María a cada una de sus hermanas para que las cuatro tengan la misma cantidad?

Ⓐ 2; Ⓑ 1; Ⓒ 4; Ⓓ 3; Ⓔ 6.

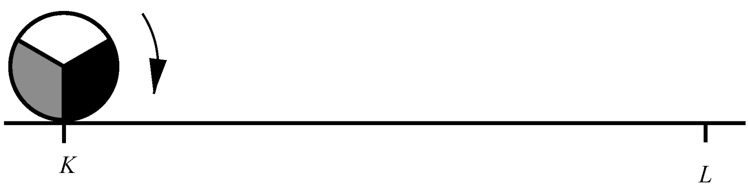
Problema 5. ¿Cuál de las siguientes figuras muestra la trayectoria del punto medio de la rueda cuando ésta recorre la curva en zig-zag que se muestra?

Ⓐ ; Ⓑ ; Ⓒ ;
Ⓓ ; Ⓔ .

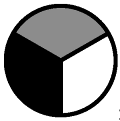
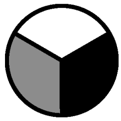
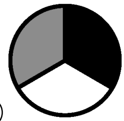
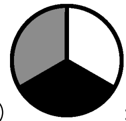
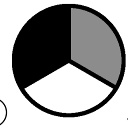
Problema 6. Varias muchachas hicieron una ronda. Antonia era la quinta a la izquierda de Bianca y la octava a la derecha de Bianca. ¿Cuántas muchachas había en el grupo?

Ⓐ 13; Ⓑ 15; Ⓒ 11; Ⓓ 14; Ⓔ 12.

Problema 7. Un disco circular de radio 1 rueda sobre una recta desde el punto K hasta el punto L, siendo $\overline{KL} = 11\pi$ (ver figura).



¿Cómo se ve el disco en su posición final en L?

Ⓐ ; Ⓑ ; Ⓒ ; Ⓓ ; Ⓔ .

Problema 8. Martín juega ajedrez. Esta temporada ha jugado 15 partidas, de las cuales ha ganado 9. Aún le quedan 5 partidas por jugar. Si gana las 5, ¿cuál será su porcentaje de éxitos?

Ⓐ 60 %; Ⓑ 65 %; Ⓒ 70 %; Ⓓ 75 %; Ⓔ 80 %.

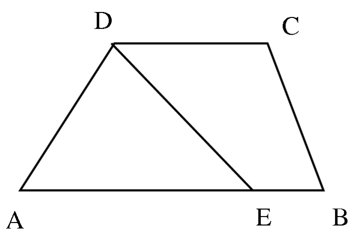
Problema 9. La octava parte de los invitados a una boda eran niños. Tres séptimos de los invitados adultos eran hombres. ¿Qué fracción de los invitados eran mujeres adultas?

Ⓐ $\frac{1}{3}$; Ⓑ $\frac{1}{2}$; Ⓒ $\frac{1}{5}$; Ⓓ $\frac{3}{7}$; Ⓔ $\frac{1}{7}$.

Problema 10. Mi profesor de matemática tiene una caja con botones de colores. En la caja hay 203 botones rojos, 117 blancos y 28 azules. Los alumnos hacen una fila y van tomando un botón cada uno, sin mirar. ¿Al menos cuántos alumnos deben haber tomado un botón, para poder asegurar que al menos tres botones de un mismo color han sido extraídos de la caja?

Ⓐ 7; Ⓑ 6; Ⓒ 3; Ⓓ 28; Ⓔ 203.

Problema 11. Un trapecio $ABCD$ tiene bases AB paralela a CD, con $\overline{AB} = 50$ y $\overline{CD} = 20$. E es un punto en AB con la propiedad de que el segmento DE divide al trapecio en dos partes de igual área (ver figura). Calcule la longitud $\overline{AE}$.

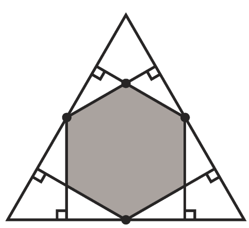


Ⓐ 25; Ⓑ 45; Ⓒ 30; Ⓓ 40; Ⓔ 35.

Problema 12. ¿Cuántos números naturales A tienen la propiedad de que uno y sólo uno de los números A y $A + 20$ tiene 4 dígitos?

Ⓐ 40; Ⓑ 39; Ⓒ 38; Ⓓ 20; Ⓔ 19.

Problema 13. Desde los puntos medios de los lados de un triángulo equilátero se trazan perpendiculares a los otros dos lados (ver figura). ¿Qué fracción del área del triángulo inicial queda cubierta por el hexágono resultante?



Ⓐ $\frac{1}{3}$; Ⓑ $\frac{2}{5}$; Ⓒ $\frac{4}{9}$; Ⓓ $\frac{1}{2}$; Ⓔ $\frac{2}{3}$.

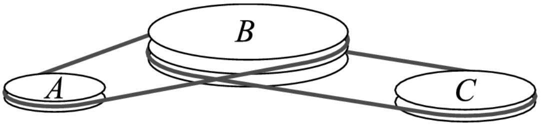
Problema 14. La suma de los cuadrados de tres enteros positivos consecutivos es 770. ¿Cuál es el mayor de esos enteros?

Ⓐ 15; Ⓑ 16; Ⓒ 17; Ⓓ 18; Ⓔ 19.

Problema 15. Tycho desea preparar un programa de entrenamiento para los próximos meses. Él desea entrenar tres días a la semana, que sean los mismos cada semana, pero no quiere entrenar dos días consecutivos. ¿Cuántos programas posibles tiene para escoger?

Ⓐ 10; Ⓑ 35; Ⓒ 6; Ⓓ 9; Ⓔ 7.

Problema 16. Un sistema de correas tiene tres ruedas A, B y C, que giran sin deslizar. B da 4 vueltas completas mientras A da 5 vueltas completas, y C da 7 vueltas completas mientras B da 6 vueltas completas.



Sabiendo que el perímetro de C es 30 cm, halle el perímetro de A.

Ⓐ 27 cm; Ⓑ 31 cm; Ⓒ 29 cm; Ⓓ 30 cm; Ⓔ 28 cm.

Problema 17. Cuatro hermanos tienen alturas diferentes. Tobías es más bajo que Víctor en la misma cantidad de centímetros en que él es más alto que Peter. Oscar es más bajo que Peter también en esa misma cantidad de centímetros. Tobías mide 184 cm y la altura promedio de los cuatro hermanos es 178 cm. ¿Cuánto mide Oscar?

Ⓐ 160 cm; Ⓑ 166 cm; Ⓒ 172 cm; Ⓓ 184 cm; Ⓔ 190 cm.

Problema 18. Durante nuestras vacaciones llovió 7 veces. Si llovía en la mañana, estaba soleado en la tarde, y si llovía en la tarde, estaba soleado en la mañana. Hubo 5 mañanas soleadas y 6 tardes soleadas. ¿Cuántos días, como mínimo, duraron nuestras vacaciones?

Ⓐ 11; Ⓑ 9; Ⓒ 10; Ⓓ 7; Ⓔ 8.

Problema 19. Jenny decidió escribir números en cada casilla de un tablero de 3×3 de modo que las sumas en cada uno de los cuatro cuadrados 2×2 sea la misma. En tres esquinas ya escribió tres números como muestra la figura. ¿Qué número debe escribir en la cuarta esquina marcada con "?"?

3		1
2		?

Ⓐ 5; Ⓑ 0; Ⓒ 4; Ⓓ 1; Ⓔ imposible determinarlo.

Problema 20. Siete números naturales a, b, c, d, e, f y g se escriben en fila. La suma de todos ellos es 2017, y cualquier par de números vecinos difieren en 1 o en -1. ¿Cuál de los números puede ser igual a 286?

Ⓐ sólo b o f; Ⓑ sólo c o e; Ⓒ sólo d; Ⓓ sólo a o g; Ⓔ cualquiera.

Problema 21. Las edades de cuatro niños son enteros diferentes menores que 18. Si el producto de sus edades es 882, ¿cuál es la suma de sus edades?

Ⓐ 33; Ⓑ 25; Ⓒ 31; Ⓓ 23; Ⓔ 27.

Problema 22. En las caras de un dado aparecen los números -3, -2, -1, 0, 1 y 2. Si el dado se lanza dos veces y los resultados se multiplican, ¿cuál es la probabilidad de que el producto sea negativo?

Ⓐ $\frac{1}{2}$; Ⓑ $\frac{1}{4}$; Ⓒ $\frac{11}{36}$; Ⓓ $\frac{1}{3}$; Ⓔ $\frac{13}{36}$.

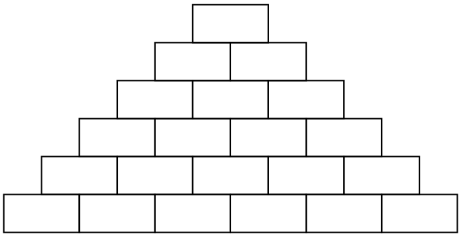
Problema 23. Un número de dos dígitos tiene dígitos a y b. Repitiendo este par de dígitos tres veces se obtiene un número de seis dígitos. Este nuevo número es siempre divisible entre:

Ⓐ 2; Ⓑ 5; Ⓒ 7; Ⓓ 9; Ⓔ 11.

Problema 24. Mi amigo desea usar una clave especial de siete dígitos. Cada dígito debe aparecer en la clave tantas veces como indica su valor, y los dígitos iguales deben ser consecutivos. Por ejemplo 4444333 o 1666666. ¿Cuántas claves hay que cumplan las condiciones exigidas?

Ⓐ 13; Ⓑ 12; Ⓒ 10; Ⓓ 7; Ⓔ 6.

Problema 25. Paul escribió un número natural en cada casilla del diagrama, de modo que cada número es la suma de los dos números que están inmediatamente debajo de él. ¿A lo sumo cuántos números impares escribió Paul?



Ⓐ 13; Ⓑ 14; Ⓒ 15; Ⓓ 16; Ⓔ 17.

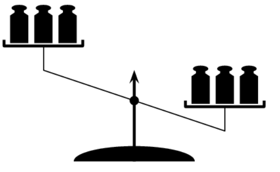
Problema 26. Liza sumó las medidas de los ángulos de un polígono convexo, pero olvidó sumar uno de elllos. Si obtuvo como resultado 2017°, ¿cuánto medía el ángulo que olvidó sumar?

Ⓐ 127°; Ⓑ 53°; Ⓒ 143°; Ⓓ 37°; Ⓔ 97°.

Problema 27. Hay 30 personas dispuestas en círculo, todos mirando hacia el centro. A la voz de "Girar" algunos giran un cuarto de vuelta hacia su izquierda, y los demás un cuarto de vuelta hacia su derecha. Las personas que quedan enfrentadas dicen "Hola". Hubo 10 personas en esa situación. Luego a la voz de "Voltear" todos dan media vuelta. De nuevo, aquellos que quedan enfrentados dicen "Hola". ¿Cuántas personas dijeron "Hola" en esta segunda ocasión?

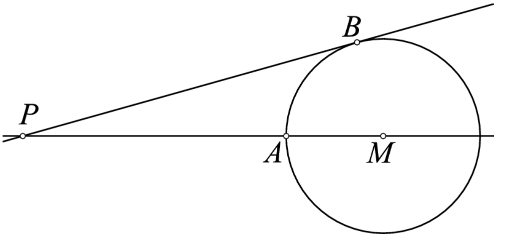
Ⓐ 20; Ⓑ 8; Ⓒ 15; Ⓓ 10; Ⓔ imposible determinarlo.

Problema 28. En una balanza de platillos se colocan al azar tres pesas diferentes en cada platillo. El resultado se muestra en la figura. Las pesas son de 101, 102, 103, 104, 105 y 106 gramos. ¿Cuál es la probabilidad de que la pesa de 106 gramos esté en el platillo más pesado (o sea en el de la derecha)?



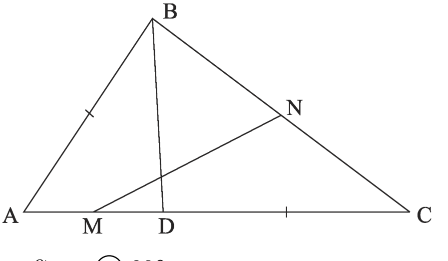
Ⓐ 75 %; Ⓑ 100 %; Ⓒ 90 %; Ⓓ 95 %; Ⓔ 80 %.

Problema 29. A y B son puntos de la circunferencia con centro M. PB es tangente a la circunferencia en B. Las distancias $\overline{PA}$ y $\overline{MB}$ son enteras, y $\overline{PB} = \overline{PA} + 6$. ¿Cuántos valores posibles hay para $\overline{MB}$?



Ⓐ 0; Ⓑ 2; Ⓒ 4; Ⓓ 6; Ⓔ 8.

Problema 30. El punto D se escoge en el lado AC del triángulo ABC de modo que $\overline{DC} = \overline{AB}$. Si M y N son los puntos medios de los segmentos AD y BC, respectivamente, y $\angle NMC = \alpha$, entonces $\angle BAC$ es igual a:



Ⓐ 2α; Ⓑ $90° - \alpha$; Ⓒ $45° + \alpha$; Ⓓ $90° - \frac{\alpha}{2}$; Ⓔ $60°$.

1.3.1. Soluciones

1. La respuesta correcta es la (B). A la izquierda del 2017 debe ir un 3, y a la izquierda del 2020 debe ir 19, luego en la casilla pedida debe ir $19 - 3 = 16$.

2. La respuesta correcta es la (C).

3. $16 - 9 + 4 - 1 = 10$ cm^2, respuesta (E).

4. Entre las 4 hermanas tienen $24 + 3 \times 12 = 60$ monedas. Si se reparten de modo que todas tengan lo mismo le tocarían 15 monedas a cada una. Luego María debe darle 3 monedas a cada una de sus hermanas, respuesta (D).

5. La respuesta correcta es la (B).

6. La respuesta correcta es la (A). A la derecha de Bianca, hasta Antonia, hay 8 niñas. A la izquierda de Bianca, hasta la anterior a Antonia, hay 4 niñas. Luego en total hay $1 + 8 + 4 = 13$ niñas.

7. Al llegar al punto L el disco habrá dado 5 vueltas y media y se vetá como en (E).

8. Habrá jugado $15 + 5 = 20$ partidas y ganado $9 + 5 = 14$, para un porcentaje del $14 \cdot 100/20 = 70\,\%$, respuesta (C).

9. los adultos eran $7/8$, y de éstos las mujeres eran $4/7$, luego la fracción pedida es $\frac{4}{7} \cdot \frac{7}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, respuesta (B).

10. La respuesta correcta es la (A). Seis alumnos no son suficientes, pues dos de ellos pueden haber tomado un botón blanco, otros dos un botón rojo y los dos restantes un botón azul. Pero si pasan siete alumnos necesariamente debe haber tres de ellos que tomaron botones del mismo color.

11. La respuesta correcta es la (E). Si la altura del trapecio $ABCD$ es h, entonces su área es $[ABCD] = (AB + CD)\frac{h}{2} = 35h$, y $[AED] = AE\frac{h}{2}$. La condición del problema equivale a $[AED] = \frac{1}{2}[ABCD]$, es decir a $AE\frac{h}{2} = 35\frac{h}{2}$, de donde $AE = 35$.

12. Los números con esa propiedad son 980,981,..., 999 y 9980, 9981,..., 9999, en total 40, respuesta (A).

13. La respuesta correcta es la (D). Si se trazan tres segmentos que unan los puntos medios de los lados, el triángulo queda dividido en cuatro triángulos equiláteros de lado mitad que el original. El hexágono cubre uno de estos triángulos (el central) y un tercio de cada uno de los otros tres, es decir dos triángulos pequeños cuya área es la mitad del grande.

14. La respuesta correcta es la (C). Si los enteros son $x - 1$, x y $x + 1$, entonces de $(x - 1)^2 + x^2 + (x + 1)^2 = 770$ resulta $3x^2 = 768$, $x^2 = 256$, $x = 16$ y el mayor es $x + 1 = 17$.

15. Si se numeran los días de la semana del 1 al 7, los posibles planes son 1 3 5, 1 3 6, 1 4 6, 2 4 6, 2 4 7, 2 5 7 y 3 5 7. La respuesta correcta es la (E), 7.

16. Si a, b y c son los perímetros de las poleas A, B y C, respectivamente, entonces $4b = 5a$ y $7c = 6b$, de donde $a = \frac{4}{5}b = \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{6}c = \frac{4 \cdot 7 \cdot 30}{5 \cdot 6} = 28$, respuesta (E).

17. Las alturas de los cuatro hermanos forman una progresión aritmética. Si d es la diferencia entre las alturas de Tobías y Víctor, entonces la alturas de Víctor, Peter y Oscar son respectivamente $184+d$, $184-d$ y $184-2d$. El promedio es $(4\cdot 184-2d)/4 = 184-d/2$, que igualado a 178 da $d = 12$. Luego la altura de Oscar es $184-2\cdot 12 = 160$ cm, respuesta (A).

18. La respuesta correcta es la (B), 9 días. Durante los 7 días que llovió hubo a lo sumo 7 mañanas o tardes soleadas. Para llegar a 11 (5 mañanas y 6 tardes) se necesitan al menos dos días con sol mañana y tarde. Con 9 días se logra: 3 días con mañana soleada y tarde lluviosa, 4 días con mañana lluviosa y tarde soleada, 2 días con mañana y tarde soleadas.

19. La respuesta correcta es la (B). Sea x el número que va en la cuarta esquina. Como la suma en cada cuadrado 2×2 es la misma, la suma de los cuadrados que contienen a 3 y x menos la suma de los cuadrados que contienen a 1 y 2 es 0. Pero eso es $3+x-1-2 = x$, luego $x = 0$.

20. La respuesta correcta es la (D). Como números consecutivos tienen diferente paridad, y la suma 2017 es impar, entonces debe haber cuatro pares (a, c, e y g) y tres impares (b, d, f). Si fuese $c = 286$ entonces la suma sería a lo sumo $288+287+286+287+288+289+290 = 2015$. Luego $c \neq 286$ y por simetría $e \neq 286$. las únicas posibilidades que quedan para el 286 son a y g, y efectivamente $286 + 287 + 288 + 289 + 288 + 289 + 290 = 2017$ y simétricamente $290 + 289 + 288 + 289 + 288 + 287 + 286 = 2017$.

21. La respuesta correcta es la (C). Como $882 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7^2$ las edades sólo pueden ser 7, 14, 1 y 9 y su suma es 31.

22. Para que el producto sea negativo debe salir un número negativo en el primer lanzamiento y uno positivo en el segundo ($2 \times 3 = 6$ posibilidades) o viceversa (otras 6 posibilidades). Luego la probabilidad es $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$, respuesta (D).

23. La respuesta correcta es la (C). El número de 6 dígitos es $101010a + 10101b = 7\cdot 1443(10a+b)$ que siempre es múltiplo de 7. Dándole valores particulares a a y b puede obtenerse números que no son divisibles entre las otras opciones.

24. Los códigos posibles son 7777777, 6666661, 1666666, 5555522, 2255555, 4444333, 3334444, 4444221, 4444122, 1224444, 2214444, 1444422 y 2244441. La respuesta correcta es la (A), 13.

25. La respuesta correcta es la (B), 14. Como en los problemas 28 de 1º y 2º y 29 de 3º, los números quedan determinados por los que se coloquen en la base, y sólo interesa si éstos son pares (P) o impares (I). Examinando las posibles distribuciones en la base (que se reducen por simetría) se ve que el máximo de impares es 14, y se alcanza por ejemplo poniendo IIPIIP en la base.

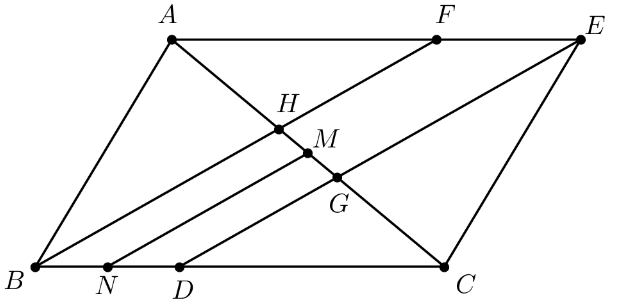
26. La respuesta correcta es la (C). La suma de los ángulos de un polígono de n lados es $(n-2)180^\circ$. Como $11\cdot 180 = 1980 < 2017 < 12\cdot 180 = 2160$, el ángulo que faltó sumar mide $2160^\circ - 2017^\circ = 143^\circ$.

27. La respuesta correcta es la (D). Luego de la voz de "girar" cada persona queda mirando a su derecha o a su izquierda, y la podemos representar mediante una letra D o I. Si el círculo se recorre en sentido horario, cada vez que encontremos una I seguida de una D tendremos dos personas que se dicen "Hola". El número de esos pares ID es igual al número de bloques de I's consecutivas. Luego de que todos den media vuelta, se dirán "Hola" los buevos pares ID, que son los que antes eran DI, y son tantos como el número de bloques de D's consecutivas. Pero es claro que hay tantos bloques de I's como de D's, por lo tanto se volverán a decir "Hola" 10 personas.

28. La respuesta correcta es la (E). Las 5 pesas pesan 621 gr. Hay $\binom{6}{3} = 20$ subconjuntos de 3 pesas. Si uno de esos conjunto pesa más de 310,5 gr, su complemento pesa menos de 310,5 gr, por lo tanto hay exactamente 10 posibles conjuntos de pesas para el platillo derecho. De ellos, los únicos que no contienen la pesa de 106 gr son $\{102, 104, 105\}$ y $\{103, 104, 105\}$. Luego la pesa de 106 gr está en 8 de 10 conjuntos posibles, es decir en el 80 %.

29. La respuesta correcta es la (D). Sea $r = MA = MB$. Entonces $(PA+6)^2 = PB^2 = PM^2 - MB^2 = (PA+r)^2 - r^2$, de donde $12PA + 36 = 2rPA$ y $PA(r-6) = 18$. Luego $r-6$ es un divisor positivo de 18, es decir que puede ser 1, 2, 3, 6, 7 o 18, y r puede ser 7, 8, 9, 12, 13 o 24, 6 valores.

30. La respuesta correcta es la (A). Sea $\beta = \angle CBA$. Sea E el simétrico de B respecto a M. Entonces $ABCE$ es un paralelogramo y $\angle BCE = 180° - \beta$. Como $DC = AB = CE$ el triángulo DCE es isósceles y $\angle CDE = (180° - \angle BCE)/2 = \beta/2$, es decir que DE es paralela a la bisectriz BH de $\angle CBA$. Si G es la intersección de DE con AC, entonces BH y EG son simétricas respecto a M y en particular M es punto medio de HG. Entonces NM es paralela media del trapecio $BDGH$ y $\angle CNM = \angle CBH = \beta/2$.



Capítulo 2

Prueba Regional

La prueba regional de la OJM consta de cuatro problemas, que se valoran en una escala de 1 a 7. Los participantes disponen de tres horas y media para resolverlos.

2.1. Prueba de Primer Año

Problema 1. Las cuatro palabras codificadas

$$\otimes \bullet \boxtimes\square \qquad \blacktriangle\bigstar \bullet \oplus \qquad \otimes\square\triangledown\bigstar \qquad \blacktriangle\square\lozenge\square$$

son, en algún orden,

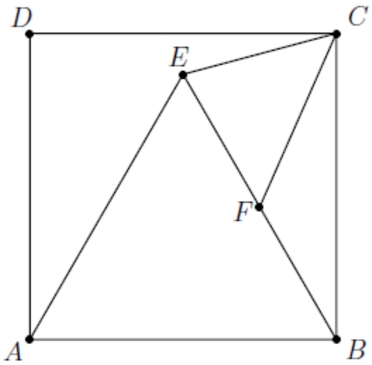
BATE   BECA   MASA   MIEL.

Descifre el mensaje $\oplus\square \quad \blacktriangle\square\triangledown \bullet \blacktriangle\square\triangledown\bigstar \boxtimes \square \quad \bigstar\lozenge \quad \otimes \bullet \oplus \oplus\square$.

Problema 2. En un curso 15 niñas y 10 varones presentaron un examen. El promedio general de notas de la clase fue 16. Si el promedio de las niñas fue 18, ¿cuál fue el promedio de los varones?

Problema 3. Juana escribió los primeros n números naturales: 1, 2, 3, 4, 5,…, n. De esa lista suprimió los cuadrados perfectos, es decir 1, 4, 9, 16, 25,…. Si le quedaron exactamente 2017 números en la lista, ¿cuál es el valor de n?

Problema 4. $ABCD$ es un cuadrado de 12 cm de lado. El triángulo ABE es equilátero y F es el punto medio de BE. Halle el área del triángulo CEF.



2.1.1. Soluciones

1. $\blacktriangle\square\Diamond\square$ es MASA pues es la única palabra con dos letras iguales. Luego $\square$ es A, $\blacktriangle$ es M y $\Diamond$ es S. La otra palabra que termina en A es BECA, que debe ser $\otimes\bullet\boxtimes\square$. Luego $\otimes$ es B, $\boxtimes$ es C y $\bullet$ es E. La otra palabra que comienza con M es MIEL, que debe ser $\blacktriangle\bigstar\bullet\oplus$. Luego $\bigstar$ es I y $\oplus$ es L. Finalmente $\otimes\square\triangledown\bigstar$ es BATE y $\triangledown$ es T. Los símbolos $\square\otimes\boxtimes\bullet\bigstar\oplus\blacktriangle\Diamond\triangledown$ son, respectivamente, ABCEILMST y el mensaje es
LA MATEMATICA ES BELLA.

2. La suma de calificaciones de las niñas fue $18{\cdot}15 = 270$. Si llamamos v al promedio de los varones, entonces la suma de calificaciones de ellos fue $10v$. Entonces $(10v+270)/25 = 16$, de donde $10v + 270 = 400$, $10v = 130$ y $v = 13$.

3. Es claro que $n > 2017$. El mayor cuadrado perfecto menor que 2017 es $44^2 = 1936$, y los siguientes son $45^2 = 2025$ y $46^2 = 2116$. Si $2017 < n < 2025$ quedan $n-44 < 1981$. Si $2025 \le n < 2116$ entonces quedan $n - 45$, y planteando $n - 45 = 2017$ resulta $n = 2062$, que es la respuesta.

4. La distancia de E a BC es $12/2 = 6$ cm, luego $[BCE] = 12 \cdot 6/2 = 36$ cm^2. Como los triángulos EFC y FBC tienen la misma altura desde C y $EF = FB$, tienen igual área, luego $[CEF]$ es la mitad de $[BCE]$, es decir que $[CEF] = 18$ cm^2.

2.2. Prueba de Segundo Año

Problema 1. Idéntico al Problema 2 de Primer Año (ver pág. 29).

Problema 2. Idéntico al Problema 4 de Primer Año (ver pág. 29).

Problema 3. El alfabeto del lenguaje *dana* tiene una sola vocal (la A) y dos consonantes (la D y la N). Cualquier sucesión de una o más letras es una palabra, excepto las que tienen dos o más consonantes consecutivas. Por ejemplo D, ADA, DAAN y NADA son palabras, pero ANNA no lo es.

a) ¿Cuántas palabras de 4 letras tiene este lenguaje?

b) ¿Cuántas palabras de 6 letras tiene este lenguaje?

Problema 4. Halle todos los cuadrados perfectos formados por 4 dígitos menores que 9, tales que si cada dígito se incrementa en una unidad, se obtiene otro cuadrado perfecto.

2.2.1. Soluciones

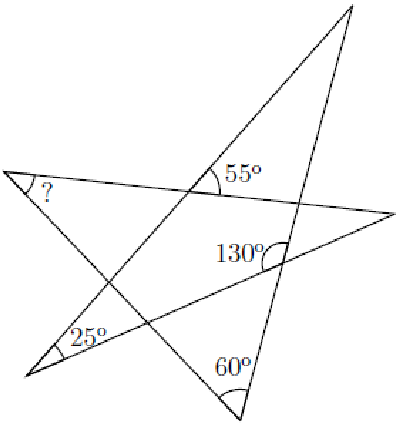
3. Sea p_n el número de palabras de n letras. Entonces $p_1 = 3$ (pues hay 3 palabras de una letra: A, D y N) y $p_2 = 5$ (pues hay 5 palabras de dos letras: AA, AD, AN, DA y NA). Si $n \geq 3$ y queremos formar una palabra de n letras, si la primera es A las restantes son cualquier palabra de $n-1$ letras. En cambio si la primera es D o N la segunda debe ser A, y las restantes son cualquier palabra de $n-2$ letras. Luego $p_n = p_{n-1} + 2p_{n-2}$. Así resulta $p_3 = 5+2\cdot 3 = 11$, $p_4 = 11+2\cdot 5 = 21$, $p_5 = 21+2\cdot 11 = 43$ y $p_6 = 43+2\cdot 21 = 85$. Luego hay 21 palabras de 4 letras y 85 de 6 letras.

Solución alternativa: Este problema también se puede resolver escribiendo todas las palabras, por ejemplo las de 4 letras son AAAA, AAAD, AAAN, AADA, AANA, ADAA, ADAD, ADAN, ANAA, ANAD, ANAN, DAAA, DAAD, DAAN, DADA, DANA, NAAA, NAAD, NAAN, NADA, NANA.

4. Si $N = n^2$ tiene la propiedad, y M es el número que se obtiene incrementando en una unidad cada dígito de N, entonces $M - N = 1111$. Si $M = m^2$, entonces $m^2 - n^2 = M - N = 1111$, o sea $(m+n)(m-n) = 11 \cdot 101$. Si $m - n = 1$, $m + n = 1111$, entonces $n = 555$ y $N = 555^2$ tendría 6 cifras. Luego $m-n = 11$ y $m+n = 101$, de donde $n = 45$, $m = 56$ y $N = 45^2 = 2025$. Verificación: $M = 3136 = 56^2$.

2.3. Prueba de Tercer Año

Problema 1. La figura muestra una estrella pentagonal en la cual se han indicado las medidas de algunos ángulos. ¿Cuánto mide el ángulo marcado con el signo de interrogación?



Problema 2. Si a y b son números reales tales que $2^a = 3$ y $9^b = 32$, determine el valor numérico del producto ab.

Problema 3. Idéntico al Problema 4 de Segundo Año (ver pág. 31).

Problema 4. En una reunión hay seis niñas: Ana, Berta, Clara, Dora, Elena y Flora. Ana tiene una sola amiga en esa reunión, Berta tiene dos amigas, Clara tiene tres, Dora tiene cuatro y Elena tiene cinco. ¿Cuántas amigas tiene Flora?

2.3.1. Soluciones

1. Sea x el ángulo buscado y pongamos $y = \angle AMC$, $z = \angle AND = \angle BNE$. Como $\angle NPC = 130°$ es ángulo exterior del $\triangle NPB$, se tiene $z+60° = 130°$, de donde $z = 70°$. Entonces en el $\triangle DNM$ se tiene $y+z+25° = 180°$, de donde $y = 180° - 25° - 70° = 85°$. Finalmente, en el $\triangle AMR$ se tiene $x+y+55° = 180°$, de donde $x = 180° - 85° - 55° = 40°$.

Solución alternativa: La suma de los ángulos en los vértices de una estrella pentagonal es $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}+\hat{E} = 180°$ (eso se puede probar de varias maneras, sumando ángulos de triángulos). Observando el $\triangle DPC$ se tiene $\hat{C} = 180° - 25° - 130° = 25°$. Observando el $\triangle RDE$ se tiene $\hat{E} = 55° - 25° = 30°$. Luego $\hat{A} + 60° + 25° + +25° + 30° = 180°$, de donde $\hat{A} = 40°$.

2. Elevando al cuadrado $2^a = 3$ se obtiene $(2^a)^2 = 3^2$, es decir $2^{2a} = 9$, luego $(2^{2a})^b = 9^b = 32$, o $2^{2ab} = 32 = 2^5$, de donde $2ab = 5$ y $ab = 5/2$.

Solución alternativa: $a = \log_2 3$, $b = \log_9 32 = \log_9 2^5 = 5\log_9 2 = \frac{5}{\log_2 9} = \frac{5}{\log_2 3^2} = \frac{5}{2\log_2 3} = \frac{5}{2a}$, de donde $ab = \frac{5}{2}$.

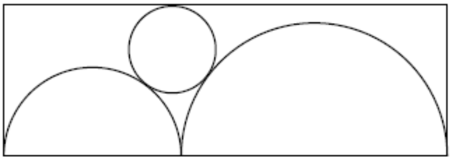
4. Elena es amiga de todas las otras niñas. Por lo tanto la única amiga de Ana tiene que ser Elena. Dora tiene cuatro amigas, que deben ser todas las demás excepto Ana. Luego Berta es amiga de Elena y Dora, y de nadie más. Clara es amiga de tres, entre las cuales no están Ana ni Berta, luego Clara es amiga Dora, Elena y Flora. Luego Flora tiene tres amigas: Elena, Dora y Clara.

2.4. Prueba de Cuarto Año

Problema 1. Idéntico al Problema 4 de Tercer Año (ver pág. 32).

Problema 2. Halle todas las secuencias de cinco números enteros consecutivos, ordenados de menor a mayor, tales que la suma de los cuadrados de los tres primeros sea igual a la suma de los cuadrados de los dos últimos.

Problema 3. En un rectángulo están inscriptas dos semicircunferencias de radios 2 cm y 3 cm, respectivamente, y una circunferencia de radio 1 cm, como muestra la figura.



¿Cuál es el área del rectángulo?

Problema 4. Halle todos los números que son simultáneamente términos de las progresiones aritméticas 11, 28, 45,. . . , 2017 y 16, 39, 62,. . . , 2017.

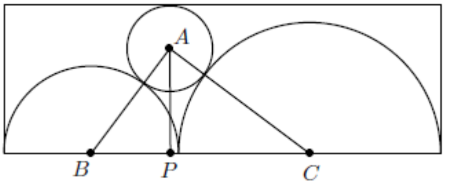
2.4.1. Soluciones

2. Hay que plantear la ecuación

$$(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2 + (x+3)^2,$$

la cual se transforma en $x^2 - 10x - 11 = 0$. Las soluciones son $x_1 = -1$ y $x_2 = 11$, dando las secuencias -2, -1, 0, 1, 2 y 10, 11, 12, 13, 14.

3. Sea A el centro de la circunferencia de radio 1 cm y sean B y C los centros de las semicircunferencias de radios 2 cm y 3 cm, respectivamente. Entonces $AB = 2 + 1 = 3$ cm, $AC = 3 + 1 = 4$ cm y $BC = 2 + 3 = 5$ cm. El triángulo rectángulo con catetos 3 cm y 4 cm, por Pitágoras, tiene hipotenusa $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ cm. Luego el $\triangle ABC$ es rectángulo en A y su área es $3 \cdot 4/2 = 6$ cm^2. Por otra parte si P es el pie de la altura desde A, el área del $\triangle ABC$ se puede calcular también como $PA \cdot BC/2$, luego $PA \cdot 5/2 = 6$ y $PA = \frac{12}{5}$ cm. Luego la altura del rectángulo es $PA + 1 = \frac{12}{5} + 1 = \frac{17}{5}$ cm, y como su base mide $4 + 6 = 10$ cm, su área es 34 cm^2.



4. El término general de la primera progresión es $a_n = 11 + 17n$ y el de la segunda es $b_m = 16 + 23m$. Debemos buscar los valores de n y m tales que $11 + 17n = 16 + 23m$. Observemos que la primera coincidencia es $62 = 11+17\cdot 3 = 16+23\cdot 2$, luego $11+17n = 16+23m$ se puede escribir como $62+17(n-3) = 62+23(m-2)$, o sea $17(n-3) = 23(m-2)$. Luego 23 divide a $n-3$, es decir que $n = 3 + 23t$ y $a_n = 11 + 17(3 + 23t) = 62 + 391t$. Dando valores a t se obtienen los términos comunes a ambas progresiones: 62, 453, 844, 1235, 1626 y 2017.

2.5. Prueba de Quinto Año

Problema 1. (a) ¿Cuántos enteros entre 1000 y 9999 tienen sus cuatro dígitos distintos?
(b) ¿Cuántos de ellos son pares?

Problema 2. Idéntico al Problema 2 de Cuarto Año (ver pág. 33).

Problema 3. Idéntico al Problema 3 de Cuarto Año (ver pág. 33).

Problema 4. Idéntico al Problema 4 de Cuarto Año (ver pág. 33).

2.5.1. Soluciones

1. (a) Para el primer dígito hay 9 posibilidades (1, 2,. . . , 9). Para el segundo también 9 (cualquier dígito diferente del primero). Para el tercero hay 8 posibilidades (cualquier dígito diferente del primero y el segundo) y para el cuarto 7. Eso da $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ números.

(b) Si el dígito de las unidades es 0, hay 9 posibilidades para el primer dígito, 8 para el segundo y 7 para el tercero, que dan $9\cdot 8\cdot 7 = 504$ números. Si el dígito de las unidades es 2, 4, 6 u 8, hay 8 posibilidades para el primer dígito, 8 para el segundo y 7 para el tercero, que dan otros $4\cdot 8\cdot 8\cdot 7 = 1792$ números. En total hay $504+1792 = 2296$ números.

Capítulo 3

Prueba Final OJM 2017

La prueba final de la OJM 2017 se realizó el sábado 9 de junio. La prueba constó de cuatro problemas, cada uno de ellos con un valor de 7 puntos. Los participantes dispusieron de tres horas y media para resolverlos.

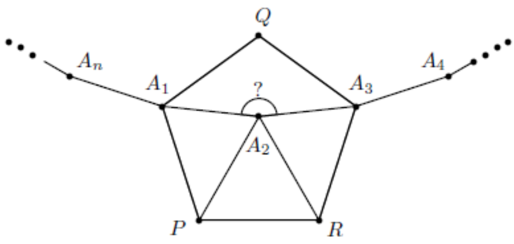
3.1. Prueba de Primer Año

Problema 1. Ana, Berta y Claudia son hermanas. Una de ellas es veraz (siempre dice la verdad), otra es embustera (siempre miente) y otra es normal (a veces dice la verdad y a veces miente). Un día una de ellas dijo: “Yo siempre miento”. Otra le respondió: “Eso es falso. La que siempre miente es Ana”. Y la que no había hablado dijo: “La que siempre dice la verdad es Clara”. Diga los nombres de las hermanas en el orden en que hablaron, y diga qué es cada una de ellas (veraz, embustera o normal).

Problema 2. Un profesor de matemática tiene tres secciones: la A con 16 alumnos, la B con 24 y la C con 30. Luego de aplicar un mismo examen a las tres secciones observó que el promedio de la sección B fue un punto superior al promedio de la sección A, pero un punto inferior al promedio de la sección C. Si el promedio general de todos los alumnos fue 14,2 ¿cuál fue el promedio de cada sección?

Problema 3. Digamos que un entero positivo es *chévere* si los restos que se obtienen al dividirlo entre 1, 2, 3 y 4 son todos diferentes. Por ejemplo 35 es chévere, porque dividido entre 1 deja resto 0, entre 2 deja resto 1, entre 3 deja resto 2 y entre 4 deja resto 3. ¿Cuántos enteros chéveres hay entre 1 y 10000?

Problema 4. En la figura, PA_1QA_3R es un pentágono regular y PA_2R es un triángulo equilátero.



(a) Calcule la medida del ángulo $\angle A_1A_2A_3$.

(b) Si se toma A_4 de modo que $A_3A_4 = A_2A_3$ y $\angle A_2A_3A_4 = \angle A_1A_2A_3$, y luego A_5 (no visible en la figura) de modo que $A_4A_5 = A_3A_4$ y $\angle A_3A_4A_5 = \angle A_2A_3A_4$, y así sucesivamente, se forma un polígono regular $A_1A_2A_3A_4 \dots A_n$ que termina cerrando en A_1. Determine el valor de n, es decir el número de vértices de ese polígono.

3.1.1. Soluciones

1. La primera no puede ser veraz (pues estaría mintiendo) ni embustera (pues estaría diciendo la verdad), luego es normal, y en esta ocasión mintió. La segunda al decir "Eso es falso" dice la verdad, luego es veraz, y la embustera se llama Ana. La tercera debe ser Ana, es mentirosa y por lo tanto la veraz no es Claudia, sino Berta. En conclusión primero habló Claudia (normal), luego Berta (veraz) y finalmente Ana (mentirosa).

2. Sean a, b y c los promedios de las secciones A, B y C, respectivamente. Entonces las sumas de notas de estas secciones son $S_a = 16a$, $S_b = 24b$ y $S_c = 30c$, respectivamente. El promedio general fue $(S_a + S_b + S_c)/70 = 14,2$ de donde $16a + 24b + 30c = 70 \cdot 14,2 = 994$. Como $a = b - 1$ y $c = b + 1$, nos queda $70b + 14 = 994$, de donde $70b = 980$ y $b = 980/70 = 14$. Luego el promedio de la sección B fue 14, el de la A fue 13 y el de la C fue 15.

3. Si n es chévere, como n dividido entre 1 deja resto 0, entonces n entre 2 no puede dejar resto 0 y por lo tanto debe dejar resto 1. Entonces n entre 3 no puede dejar resto 0 ni 1, luego la única posibilidad que le queda es dejar resto 2. Análogamente n entre 4 deja resto 3. Recíprocamente si n entre 2 deja resto 1, entre 3 deja resto 2 y entre 4 deja resto 3, entonces n es chévere. Esto ocurre si y sólo si $n + 1$ es múltiplo de 2, 3 y 4. Esto equivale a decir que $n + 1$ es múltiplo de $\text{mcm}(2, 3, 4) = 12$. Entre 2 y 10001 hay $\lfloor 100001/12 \rfloor = 833$ múltiplos de 12, luego esa es la cantidad de enteros chévere entre 1 y 10000.

Nota: También es aceptable caracterizar los números chévere haciendo listas de los naturales que entre 2 dejan resto 1, de los que entre 3 dejan resto 2 y de los que entre 4 dejan resto 3, y buscando las coincidencias. Las listas comienzan así:

1		3		5		7		9	**11**		13		15		17		19		21		**23**		25	
	2			5			8		**11**			14			17			20			**23**			26
		3				7			**11**				15				19				**23**			

Ahora hay que observar que las coincidencias 11, 23, 35,... se repiten periódicamente de 12 en 12, y terminar calculando el número de estas coincidencias.

4. (a) Cada ángulo interno de un pentágono regular mide $180(5-2)/5 = 108°$ (esto se puede ver dividiendo el pentágono en tres triángulos y sumando todos los ángulos). Entonces como $\angle PRA_2 = 60°$ resulta $\angle A_2RA_3 = 108° - 60° = 48°$. Y como $A_2R = PR = RA_3$, el $\triangle A_2RA_3$ es isósceles y $\angle RA_2A_3 = (180° - \angle A_2RA_3)/2 = 66°$. Análogamente $\angle A_1A_2P = 66°$ y por lo tanto $\angle A_1A_2A_3 = 360° - \angle A_1A_2P - \angle PA_2R - \angle RA_2A_3 = 360° - 66° - 60° - 66° = 168°$.

(b) $180(n-2)/n = 168$, de donde $180n - 360 = 168n$, $12n = 360$ y $n = 30$.

3.2. Prueba de Segundo Año

Problema 1. Idéntico al Problema 2 de Primer Año (ver pág. 35).

Problema 2. En la pizarra está escrito el número 1. Ana y Beto juegan alternadamente, comenzando por Ana, de la manera siguiente: cada jugador, en su turno, debe sustituir el número x escrito en la pizarra por un entero y tal que $x < y \leq 3x$. El primer jugador que escriba el 1000 o un número mayor, gana. Determine si alguno de los jugadores puede asegurarse la victoria, y explique cómo debe jugar para lograrlo.

Problema 3. Digamos que un entero positivo es *chévere* si los restos que se obtienen al dividirlo entre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 son todos diferentes. ¿Cuántos enteros *chévere* hay entre 1 y 100000?

Problema 4. Idéntico al Problema 4 de Primer Año (ver pág. 35).

3.2.1. Soluciones

2. Primero observemos que el que escriba un número desde el 334 hasta el 999 pierde, pues el otro puede responder 1000. Entonces el que logre escribir 333 gana, pues el otro deberá escribir un número del 334 al 999. Ahora el que escriba un número desde el 111 hasta el 332 pierde, pues el otro puede responder 333. Entonces el que logre escribir 110 gana. Análogamente el que escriba un número desde el 37 hasta el 109 pierde, el que escriba 36 gana, el que escriba del 12 al 35 pierde, el que escriba 11 gana, el que escriba del 4 al 10 pierde y el que escriba 3 gana.

Por lo tanto Ana tiene una estrategia ganadora, que consiste en escribir 3 y luego, cada vez que tenga el turno, seguir con 11, 36, 110, 333 y 1000.

Solución alternativa: También se puede «adivinar» que Ana debe comenzar escribiendo 3. Luego Beto debe escribir un número del 4 al 9, y Ana escribe 11. Beto debe escribir un número del 12 al 33, a lo cual Ana responde con 36. Ahora Beto debe escribir un número del 37 al 108. Ana escribe 110. Beto debe escribir un número del 111 al 330. Ana escribe 333. Beto debe escribir un número del 334 al 999. Ana escribe 1000 y gana.

3. Supongamos que n es chévere. Como n dividido entre 1 deja resto 0, entonces n entre 2 no puede dejar resto 0 y por lo tanto debe dejar resto 1. Ahora n entre 3 no puede dejar resto 0 ni 1, luego la única posibilidad que le queda es dejar resto 2. Continuando del mismo modo resulta que n entre k deja resto $k-1$ para $k = 1, 2, \ldots, 9$. Recíprocamente si n entre k deja resto $k-1$ para $k = 1, 2, \ldots, 9$ entonces n es chévere. Esto ocurre si y sólo si $n+1$ es múltiplo de 1, 2, ..., 9, es decir si y sólo si $n+1$ es múltiplo del mínimo común múltiplo de esos números, que es $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$. Por lo tanto los números chévere son los de la forma $2520t-1$, para t entero positivo. La condición $1 \le 2520t-1 \le 100000$ equivale a $1 \le t \le 100001/2520$ o $1 \le t \le 39$, es decir que hay 39 enteros chévere entre 1 y 100000.

3.3. Prueba de Tercer Año

Problema 1. Idéntico al Problema 2 de Segundo Año (ver pág. 37).

Problema 2. Sea a_1, a_2, a_3,... una sucesión de números enteros tal que cada término a partir del tercero es igual a la suma de los dos precedentes, es decir que $a_3 = a_1 + a_2$, $a_4 = a_2 + a_3$, $a_5 = a_3 + a_4$, etc. Si $a_{10} = 2017$ y $a_4 = 117$, ¿cuál es el valor de a_1?

Problema 3. Idéntico al Problema 3 de Segundo Año (ver pág. 37).

Problema 4. Idéntico al Problema 4 de Primer Año (ver pág. 35).

3.3.1. Soluciones

2. Se tiene $a_6 = a_5 + a_4 = a_5 + 117$, $a_7 = a_6 + a_5 = (a_5 + 117) + a_5 = 2a_5 + 117$, $a_8 = a_7 + a_6 = (2a_5 + 117) + (a_5 + 117) = 3a_5 + 234$, $a_9 = a_8 + a_7 = (3a_5 + 234) + (2a_5 + 117) = 5a_5 + 351$, $a_{10} = a_9 + a_8 = (5a_5 + 351) + (3a_5 + 234) = 8a_5 + 585$. Como $a_{10} = 2017$, resulta $8a_5 + 585 = 2017$, de donde $8a_5 = 2017 - 585 = 1432$ y $a_5 = 179$. Ahora como $a_5 = a_4 + a_3$, resulta $a_3 = a_5 - a_4 = 179 - 117 = 62$. Análogamente $a_2 = a_4 - a_3 = 117 - 62 = 55$ y finalmente $a_1 = a_3 - a_2 = 62 - 55 = 7$.

Alternativamente se puede obtener $8a_3 + 1521 = 2017$, de donde $a_3 = 62$, $a_2 = 117 - 62 = 55$ y $a_1 = 62 - 55 = 7$.

También se puede poner $a_1 = x$, $a_2 = y$ e ir calculando sucesivamente $a_3 = x + y$, $a_4 = x + 2y$, $a_5 = 2x + 3y$, $a_6 = 3x + 5y$, $a_7 = 5x + 8y$, $a_8 = 8x + 13y$, $a_9 = 13x + 21y$,

$a_{10} = 21x + 34y$. Ahora $a_{10} = 2017$ y $a_4 = 117$ nos dan el sistema $21x + 34y = 2017$, $x + 2y = 117$, de donde se obtiene $4x = 2017 - 17 \cdot 117 = 28$ y $x = 4$.

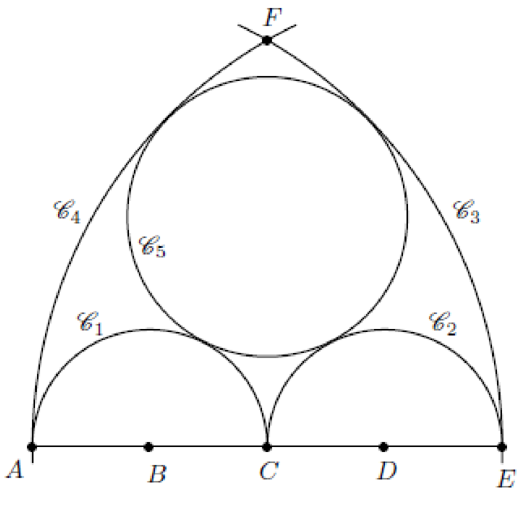
3.4. Prueba de Cuarto Año

Problema 1. Idéntico al Problema 2 de Tercer Año (ver pág. 38).

Problema 2. Cada una de las 2017 personas que viven en una isla es *honesta*, y siempre dice la verdad, o es *embustera*, y siempre miente. Más de mil isleños van a un banquete y se sientan alrededor de una mesa redonda. Cada uno de ellos dice "De las dos personas que tengo como vecinas, una es honesta y la otra embustera". ¿Cuál es el máximo número de personas honestas que puede haber en la isla?

Problema 3. Sea $S(n)$ la suma de los dígitos del entero n. Halle el menor entero positivo n tal que $S(n)$ y $S(n+1)$ sean, ambos, múltiplos de 13.

Problema 4. A, B, C, D y E son puntos alineados tales que $AB = BC = CD = DE = 1$ cm. $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son semicircunferencias de radio 1 cm y centros B y D, respectivamente. $\mathscr{C}_3$ y $\mathscr{C}_4$ son circunferencias de radio 4 cm y centros A y E, respectivamente, que se cortan en F. Determine el radio de la circunferencia $\mathscr{C}_5$ que es tangente exteriormente a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ e interiormente a $\mathscr{C}_3$ y $\mathscr{C}_4$.

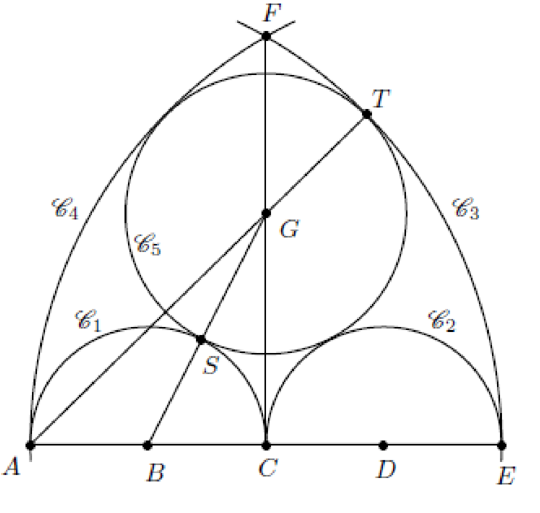


3.4.1. Soluciones

2. Si en el banquete son todos embusteros, puede haber a lo sumo tantos honestos como los que no asistieron al banquete, que como máximo son 1016. Si en el banquete hay un honesto, uno de sus vecinos es honesto y los comensales se deben suceder en el orden HHEHHEHHE... es decir que debe haber k embusteros y $2k$ honestos en la mesa, con $3k > 1000$, es decir $k \geq 334$. Como máximo hay entonces $2k + (2017 - 3k) = 2017 - k \leq 2017 - 334 = 1683$ honestos. Este máximo se alcanza con 334 embusteros y 668 honestos en la mesa y 1015 honestos que no asistieron al banquete.

3. Es claro que para eso n debe terminar en 9. Luego $n = a10^k + \underbrace{99\ldots9}_{k\ 9's}$, donde a no termina en 9, y $S(n) = S(a) + 9k$. Además $n + 1 = (a + 1)10^k$ y $S(n + 1) = S(a + 1) = S(a) + 1$. Como $S(n)$ y $S(n + 1)$ deben ser ambos múltiplos de 13, su diferencia $S(n) - S(n+1) = S(a) + 9k - (S(a) + 1) = 9k - 1$ debe ser múltiplo de 13. El menor k para el cual esto ocurre es 3 $(9 \cdot 3 - 1 = 26)$, es decir que n debe terminar en al menos 3 nueves. Y el menor a que no termina en 9 cuyos dígitos suman uno menos que un múltiplo de 13, es 48. Luego el número buscado es 48999.

4. Sea G el centro de $\mathscr{C}_5$ y r su radio. Como $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_5$ son tangentes, sus centros B y G y el punto de tangencia S están alineados y $BG = BS + SG = 1 + r$. Como el triángulo BCG es rectángulo en C, por Pitágoras $BG^2 = BC^2 + CG^2$, es decir que $CG^2 = BG^2 - BC^2 = (1 + r)^2 - 1 = r^2 + 2r$. Como el triángulo ACG también es rectángulo en C, por Pitágoras $AG^2 = AC^2 + CG^2 = 4 + r^2 + 2r$. Como $\mathscr{C}_3$ y $\mathscr{C}_5$ son tangentes, sus centros A y G y el punto de tangencia T están alineados y $AG+GT = AT$, es decir que $\sqrt{r^2 + 2r + 4} + r = 4$. Por lo tanto $\sqrt{r^2 + 2r + 4} = 4 - r$ y elevando ambos miembros al cuadrado resulta $r^2 + 2r + 4 = 16 - 8r + r^2$, es decir $10r = 12$, de donde $r = 1{,}2$ cm.



3.5. Prueba de Quinto Año

Problema 1. Idéntico al Problema 2 de Cuarto Año (ver pág. 39).

Problema 2. Ramón escribió un entero positivo n de dos dígitos. Luego intercambió las posiciones de los dígitos de n y obtuvo un entero k. Luego dibujó un triángulo rectángulo con catetos $(n+k)/2$ y $(n-k)/2$. Si la hipotenusa de ese triángulo mide $\sqrt{2017}$, ¿qué valores tienen n y k?

Problema 3. Idéntico al Problema 4 de Cuarto Año (ver pág. 39).

Problema 4. Halle todas las soluciones reales (x, y) del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2^x + 2^y &= 5\sqrt{2}, \\ 4^x + 4^y &= 34. \end{aligned}$$

3.5.1. Soluciones

2. Por Pitágoras

$$\left(\frac{n+k}{2}\right)^2 + \left(\frac{n-k}{2}\right)^2 = 2017,$$

de donde $(n+k)^2 + (n-k)^2 = 2017 \cdot 4$, y simplificando

$$n^2 + k^2 = 2017 \cdot 2.$$

Si los dígitos de n son a y b entonces $n = 10a + b$ y $k = 10b + a$, de donde

$$n^2 + k^2 = (10a + b)^2 + (10b + a)^2 = 101(a^2 + b^2) + 40ab.$$

Por lo tanto

$$101(a^2 + b^2) + 40ab = 4034.$$

De aquí resulta que $a^2 + b^2$ es par, pero a y b no pueden ser ambos pares pues el miembro izquierdo sería múltiplo de 4 y el derecho no. Luego a y b son ambos impares. Además el dígito de las unidades de $a^2 + b^2$ debe ser 4. Esto deja sólo dos posibilidades para el par a, b: 3 y 5 ó 5 y 7.

$$101(5^2 + 7^2) + 40 \cdot 5 \cdot 7 = 7474 + 1400 \neq 4034,$$

luego 57 y 75 no cumplen.

$$101(3^2 + 5^2) + 40 \cdot 3 \cdot 5 = 3434 + 600 = 4034,$$

luego n y k son 35 y 53.

4. Pongamos $u = 2^x$, $v = 2^y$. El sistema queda

$$
\begin{aligned}
u + v &= 5\sqrt{2}, \\
u^2 + v^2 &= 34.
\end{aligned}
$$

Sustituyendo $v = 5\sqrt{2} - u$ en la segunda ecuación queda $u^2 + (5\sqrt{2} - u)^2 = 34$, y desarrollando $2u^2 - 10\sqrt{2}u + 50 = 34$, y simplificando $u^2 - 5\sqrt{2}u + 8 = 0$. Las raíces de esta ecuación de segundo grado son $(5\sqrt{2} \pm \sqrt{18})/2 = (5\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2})/2$, o sea $u_1 = 4\sqrt{2} = 2^{5/2}$, $u_2 = \sqrt{2} = 2^{1/2}$. A estos valores les corresponden $v_1 = 5\sqrt{2} - u_1 = \sqrt{2}$ y $v_2 = 5\sqrt{2} - u_2 = 4\sqrt{2}$. Finalmente, de $u = 2^x$ salen $x_1 = 5/2$, $x_2 = 1/2$, y de $v = 2^y$ salen $y_1 = 1/2$, $y_2 = 5/2$. Es decir que las soluciones del sistema son $(5/2, 1/2)$ y $(1/2, 5/2)$.

Capítulo 4

Olimpiada de Mayo

La Olimpiada de Mayo es una competencia matemática internacional coordinada por la Olimpiada Matemática Argentina (OMA). Consiste en una prueba escrita de 3 horas de duración y consta de dos niveles: el primer nivel es para jóvenes que no hayan cumplido 13 años hasta el 31 de diciembre del año anterior a la prueba, y el segundo nivel es para jóvenes que no hayan cumplido 15 años hasta el 31 de Diciembre del año anterior a la prueba. Cada país participante envía las diez mejores pruebas de cada nivel a la Argentina para ser puntuadas junto con las de los demás países y premiadas por OMA.

4.1. Problemas del Primer Nivel

Problema 1. A cada número de tres dígitos Matías le sumó el número que se obtiene invirtiendo sus dígitos. Por ejemplo, al número 927 le sumó el 729. Calcular en cuántos casos el resultado de la suma de Matías es un número con todos sus dígitos impares.

Problema 2. ¿Es posible pintar 33 casillas de un tablero de 9×9 de forma que cada fila y cada columna del tablero tenga como máximo 4 casillas pintadas, pero si además pintamos cualquier otra casilla aparece alguna fila o columna que tiene 5 casillas pintadas?

Problema 3. Sea $ABCD$ un rombo de lados $AB = BC = CD = DA = 13$. Sobre el lado AB se construye el rombo $BAFE$, exterior al $ABCD$ y tal que el lado AF es paralelo a la diagonal BD del $ABCD$. Si el área del $BAFE$ es igual a 65, calcular el área del $ABCD$.

Problema 4. Sea n un entero par mayor que 2. Sobre los vértices de un polígono regular de n lados se pueden colocar fichas rojas o azules. Dos jugadores A y B juegan alternándose turnos del siguiente modo: cada jugador, en su turno, elige dos vértices que no tengan fichas y coloca en uno de ellos una ficha roja y en el otro una ficha azul. El objetivo de A es conseguir que haya tres vértices consecutivos con fichas del mismo color. El objetivo de B es impedir que esto suceda. Al comienzo del juego no hay fichas en ninguno de los vértices. Demostrar que independientemente de quien empiece a jugar, el jugador B siempre podrá conseguir su objetivo.

Problema 5. Diremos que dos números enteros positivos a y b forman una *pareja adecuada* si $a+b$ divide a ab (su suma divide a su producto). Hallar 24 números enteros positivos que se puedan distribuir en 12 parejas adecuadas, y de modo que cada número entero figure en una sola pareja y el mayor de los 24 números sea lo menor posible.

4.2. Soluciones del Primer Nivel

1. Dado el número $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ supongamos que su suma con $\overline{cba}$ tiene todos sus dígitos impares. Para que el dígito de las unidades en la suma sea impar, $a + c$ debe ser impar, es decir que a y c deben ser de diferente paridad. Para que el dígito de las decenas sea impar, debe haber acarreo desde las unidades hacia las decenas, es decir que $a+c \geq 11$ o sea $c \geq 11-a$. Y para que el dígito de las centenas sea impar, no debe haber acarreo de las decenas hacia las centenas, es decir que $2b + 1 \leq 9$. Luego $0 \leq b \leq 4$. Es decir que hay 5 posibilidades para b. Las posibilidades para a y c son las siguientes:

$a = 2$, c impar y $c \geq 11 - 2 = 9$, de donde $c = 9$.

$a = 3$, c par y $c \geq 11 - 3 = 8$, de donde $c = 8$.

$a = 4$, c impar y $c \geq 11 - 4 = 7$, de donde $c = 7$ o 9.

$a = 5$, c par y $c \geq 11 - 5 = 6$ de donde $c = 6$ u 8.

$a = 6$, c impar y $c \geq 11 - 6 = 5$, de donde $c = 5$, 7 o 9.

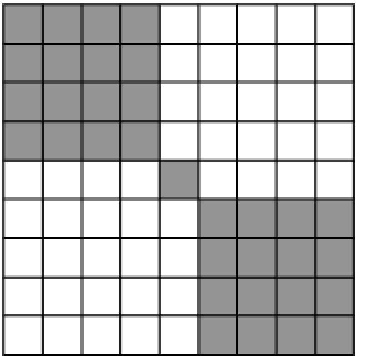
$a = 7$, c par y $c \geq 11 - 7 = 4$, de donde $c = 4$, 6 u 8.

$a = 8$, c impar y $c \geq 11 - 8 = 3$, de donde $c = 3$, 5, 7 o 9.

$a = 9$, c par y $c \geq 11 - 9 = 2$, de donde $c = 2$, 4, 6 u 8.

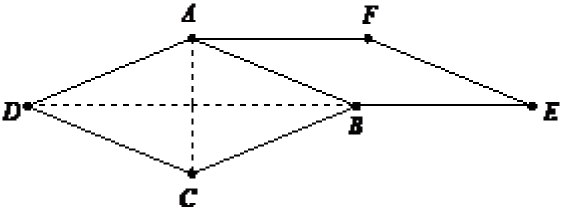
Es decir que hay 20 pares posibles (a, c) que combinados con los 5 posibles valores de b dan 100 números.

2. La respuesta es sí, para lo cual basta el siguiente ejemplo (hay otros):



Si pintamos cualquier otra casilla de las cuatro primeras filas aparece una fila con 5 casillas pintadas. Análogamente, para las cuatro primeras columnas, las cuatro últimas filas y las cuatro últimas columnas. Con esto se cubren todas las casillas no pintadas.

3. Sean O el punto de intersección de AC y BD y $d = AO$. Calculando el área del $BAFE$ como base por altura tenemos $[BAFE] = BE \cdot d = 65$, es decir $13d = 65$, de donde $d = 5$. En el triángulo AOB, $B == \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$. Luego $[ABCD] = AC \cdot BD/2 = 10 \cdot 24/2 = 120$.



4. Numeremos los vértices del polígono desde 1 hasta $n = 2k$. Se forman entonces k parejas de vértices consecutivos numerados con (1,2), (3,4),..., $(2i-1, 2i)$,..., $(2k-1, 2k)$. Si B consigue impedir que haya una pareja $(2i-1, 2i)$ con fichas del mismo color, habrá impedido que A consiga su objetivo.

Si es B quien empieza a jugar, coloca sus fichas (una roja y la otra azul) en dos vértices consecutivos $(2i-1, 2i)$.

Si A, en su turno, elige otra pareja de vértices consecutivos para colocar sus fichas, B continúa jugando con la misma estrategia.

Si A coloca sus fichas en vértices de parejas distintas, B en su turno elige los dos vértices que completan esas parejas, colocando una ficha del color distinto al que previamente haya usado A. De esta forma, se colocan todas las fichas sobre los vértices de modo que cada pareja del tipo $(2i-1, 2i)$ está ocupada por fichas de distinto color, de modo que a A le resultará imposible cumplir su objetivo.

5. Primero veamos algunas propiedades de las parejas adecuadas. Sean a y b tales que $a+b$ divide a ab, y sea $d = \text{mcd}(a,b)$. Entonces $a = da'$, $b = db'$, con a' y b' coprimos. Tenemos $a+b = d(a'+b')$ y $ab = d^2a'b'$; además $a'+b'$ es coprimo con a' y b'. Luego, $a+b = d(a'+b')$ divide a $ab = d^2a'b'$; si y sólo si $a'+b'$ divide a d.

Para generar las parejas adecuadas (a,b) partimos de los pares de números coprimos (a',b') y los multiplicamos por $a'+b'$ y sus múltiplos.

Para $a'=1$ y $b'=2$ obtenemos (3,6), (6,12), (9,18), (12,24), (15,30), (18,36), (21,42), (24,48), (27,54),...

Para $a'=2$ y $b'=3$ obtenemos (4,12), (8,24), (12,36), (16, 48), (20,60),...

Para $a'=1$ y $b'=4$ obtenemos (5,20), (10,40), (15,60),...

Para $a'=1$ y $b'=5$ obtenemos (6,30), (12,60),...

Para $a'=1$ y $b'=6$ obtenemos (7,42), (14,84),...

Para $a'=1$ y $b'=7$ obtenemos (8,56),...

Para $a'=2$ y $b'=3$ obtenemos (10,15), (20,30), (30,45), (40,60),...

Para $a'=2$ y $b'=5$ obtenemos (14,35), (28,70),...

Para $a'=2$ y $b'=7$ obtenemos (18,63),...

Para $a'=3$ y $b'=4$ obtenemos (21,28), (42,56),...

Para $a'=3$ y $b'=5$ obtenemos (24,40), (48,80),...

Para $a'=3$ y $b'=7$ obtenemos (30,70),...

Para $a'=4$ y $b'=5$ obtenemos (36,45), (72,90),...

Para $a'=5$ y $b'=6$ obtenemos (55,66),...

Vemos que los primeros (menores) 24 números que intervienen en alguna pareja adecuada en la que ambos números están entre los 24 menores son: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 28, 30, 35, 36, 40, 42, 45, 48. El mayor número es 48. Veamos que es posible formar las 12 parejas con estos 24 números sin repeticiones: (3,6); (4,12); (5,20); (7,42); (8,24); (9,18); (10,40); (14,35); (15,30); (16,48); (21,28); (36,45).

4.3. Problemas del Segundo Nivel

Problema 1. Decimos que un número entero positivo es *ascendente* si sus cifras leídas de izquierda a derecha están en orden estrictamente creciente. Por ejemplo, 458 es ascendente y 2339 no lo es. Hallar el mayor número ascendente que es múltiplo de 56.

Problema 2. Varios números reales diferentes están escritos en el pizarrón. Si a, b, c son tres de estos números, distintos entre sí, al menos una de las sumas $a+b$, $b+c$, $c+a$ también es uno de los números del pizarrón. ¿Cuál es la mayor cantidad de números que pueden estar escritos en el pizarrón?

Problema 3. En un cuadrilátero $ABCD$ se cumple que $\angle ABC = \angle ADC = 90°$ y $\angle BCD$ es obtuso. En el interior del cuadrilátero se ubica el punto P tal que $BCDP$ es un paralelogramo. La recta AP corta al lado BC en M. Además $BM = 2$, $MC = 5$ y $CD = 3$. Determinar la longitud de AM.

Problema 4. Consideramos todos los números de 7 dígitos que se obtienen permutando de todas las maneras posibles los dígitos de 1234567. ¿Cuántos de ellos son divisibles entre 7?

Problema 5. Ababa juega con una palabra formada por las letras de su nombre y se ha puesto ciertas reglas: Si encuentra una A seguida inmediatamente de una B las puede sustituir por BAA. Si encuentra dos B consecutivas las puede borrar. Si encuentra tres A consecutivas las puede borrar. Ababa empieza con la palabra ABABABAABAAB. Con las reglas anteriores, ¿cuántas letras tiene la palabra más corta a la que puede llegar? ¿Por qué no puede llegar a una palabra más corta?

4.4. Soluciones del Segundo Nivel

1. Una forma de simplificar el trabajo es observar que 56 es 7 por 8, luego basta probar con números que terminen en dígito par, tales que el número formado por los dos últimos dígitos sea múltiplo de 4 y el formado por los últimos tres dígitos sea múltiplo de 8.

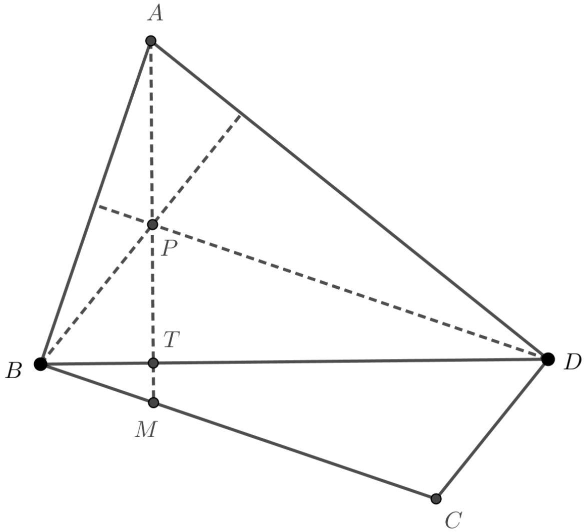
Si el último dígito es 8 los dos últimos dígitos deben ser 28, 48 o 68. Pero los únicos ascendentes termnados en 28 son 28 y 128 que no son múltiplos de 56. Terminados en 48 debemos examinar son 48 y 248, que no cumplen. Terminados en 68 debemos examinar los terminados en 168 y 568. En 168, 168 es el único y es múltiplo de 56 (56 por 3), pero debemos ver si hay alguno más grande. En 568 hay varias posibilidades, que de mayor a menor son 1234568, 234568, 134568, 124568, 123568, 34568,... Probando divisibilidad entre 56 encontramos que 1234568 y 234568 no son divisibles, pero 134568 sí (56 por 2403). Es claro que cualquier número ascendente terminado en 2, 4 o 6 es menor que 134568, y entonces éste es el mayor.

2. La respuesta es 7. Un ejemplo con 7 números es -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3. Sea A un conjunto con la propiedad del enunciado. Afirmamos que contiene a lo sumo 3 números positivos. Esto es claro si A tiene 0, 1 o 2 números positivos. De modo que sean u y v los dos números positivos más grandes en A, con $u > v$, y sea x otro número positivo dado. Aplicamos la hipótesis a la terna x, u, v. Se sabe que una de las sumas $u + v$, $u + x$, $v + x$ está en A. No puede ser $u + v$ ni $u + x$ porque ambos son mayores que u. Luego $v + x \in A$, y como $v + x$ es mayor que el segundo elemento más grande v, es igual a u. Ahora $v+x = u$ implica que todo número positivo en A distinto de u y v es igual a $u-v$. De aquí sigue la afirmación.

Análogamente, A contiene a lo sumo 3 números negativos. Tomando en cuenta la posibilidad de tener un cero, concluimos que A contiene a lo sumo 7 números.

3. En el paralelogramo $BCDP$ sea $\alpha = \angle CBP = \angle PDC$. Entonces $\angle BCD = 180° - \alpha$, y en el cuadrilátero $ABCD$, $\angle BAD = \alpha$.

Notemos ahora que $\angle PBA = 90° - \alpha$ y concluimos que BP es perpendicular a AD. Análogamente podemos demostrar que DP es perpendicular a AB. Por lo tanto, P es el ortocentro del triángulo ABD y en consecuencia AP es perpendicular a BD.



En el paralelogramo $BCDP$ tenemos que $BM = 2$ y $PD = BC = 7$. Sea T el punto de intersección de BD y AM. Es claro que los triángulos BTM y DTP son semejantes y están en la relación de 2 a 7. Sea $MT = 2k$ y $TP = 7k$. En los triángulos TBM y TBP, por el Teorema de Pitágoras tenemos $BT^2 = 2^2 - (2k)^2 = 3^2 - (7k)^2$, de donde se obtiene $k = 1/3$. Por lo tanto $PM = 9k = 3$, es decir, $PM = PB$ y esto implica que P está en la mediatriz de BM, con lo cual P es el punto medio de AM. Luego $AM = 2(PM) = 6$.

4. Sea A el conjunto de los números de 7 dígitos que se obtienen permutando de todas las maneras posibles los dígitos de 1234567. A tiene 7! elementos. Dado n en A, sea el número que se obtiene incrementando en 1 cada dígito de n (por ejemplo $f(5247136) = 6358247$) y sea $g(n)$ el número que resulta al reemplazar el único 8 de $f(n)$ por 1 (es decir que $f(5247136) = 6351247$). Es claro que para cada $n \in A$ los números n, $g(n)$, $g(n)^2$, $g(n)^3$, $g(n)^4$, $g(n)^5$ y $g(n)^6$ son diferentes, y que A es la unión disjunta de $7!/7 = 6!$ grupos de 7 números de esa forma. Ahora veamos que de esos 7 números uno y sólo uno es divisible entre 7.

Primero observemos que $f(n) - n = 1111111 = 7 \cdot 158730 + 1$, y que $g(n) - f(n)$ es divisible entre 7 (pues es $-7 \cdot 10^k$ para algún k entre 0 y 6). Luego $g(n) - n$ deja resto 1 al dividirlo entre 7. Por lo tanto los 7 números n, $g(n)$, $g(n)^2$, $g(n)^3$, $g(n)^4$, $g(n)^5$ y $g(n)^6$ al dividirlos entre 7 dejan todos los restos posibles del 0 al 6, y solo uno de ellos deja resto 0 (es divisible entre 7). Por lo tanto la cantidad de elementos de A divisibles entre 7 es $6! = 720$.

5. En la palabra ABABABAABAAB sustituimos las dos primeras letras y obtenemos la palabra BAAABABAABAAB, luego las tres A se borran BBABAABAAB las dos B también, ABAABAAB, las dos primeras las sustituimos, BAAAABAAB; ahora las tres A se eliminan BABAAB y se sustituye AB. Se obtiene BBAAAAB, se borran las dos B y las tres A y se obtiene AB.

Ahora veremos que esta es la palabra más corta a la que se puede llegar. Como hay cinco B en la palabra inicial y solamente se pueden borrar dos B que estén juntas, siempre quedará al menos una B al final. Solo falta probar que es imposible deshacerse de todas las A. Para ello construiremos un invariante. Comencemos por anotar las longitudes de las rachas de A's, es decir las cantidades de A's seguidas, separadas por B's, de izquierda a derecha. Por ejemplo para ABABABAABAAB esas longitudes son 1, 1, 1, 2, 2. Ahora pongamos un signo $+$ o $-$ a cada número según que la racha correspondiente tenga a la derecha una cantidad par o impar de B's, respectivamente, y sumemos. En nuestro caso la suma da $-1+1-1+2-2=-1$, Afirmamos que esa suma, tomada módulo 3, es invariante bajo las operaciones permitidas.

Obviamente no cambia si se suprimen tres A's consecutivas. Tampoco si se suprimen dos B's consecutivas, pues los signos de las rachas no cambian, y en caso de que se unan dos rachas, como sus números son del mismo signo, se suman y nos da el número de la nueva racha unida. Finalmente cuando se cambia AB por BAA, la racha a la izquierda de la B disminuye en una A y la que está a la derecha aumenta en dos, pero esos números son de signo diferente, y por tanto la suma varía en $-1-2$ o en $+1+2$, que módulo 3 son cero.

Como la palabra inicial tiene invariante -1 y B lo tiene 0, es imposible llegar de la inicial a B y la palabra más corta a la que se puede llegar tiene dos letras.

Capítulo 5

Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe

La XIX Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe tuvo lugar en San Ignacio, El Salvador, del 14 al 22 de Junio. Participaron trece países: Colombia, Costa Rica, Cuba, El Salvador, Guatemala, Honduras, Jamaica, México, Nicaragua, Panamá, Puerto Rico, República Dominicana y Venezuela.

Venezuela participó con una delegación integrada por los estudiantes Juan Diego Guevara Lugo, del colegio Bella Vista, Maracay, y Francisco Javier Molina, de la Escuela Comunitaria San Antonio, Estado Miranda. Juan Diego Guevara obtuvo mención honorífica. El jefe de la delegación fue el profesor Rafael Sánchez Lamoneda y la tutora la profesora Laura Vielma.

5.1. Problemas

Primer Día

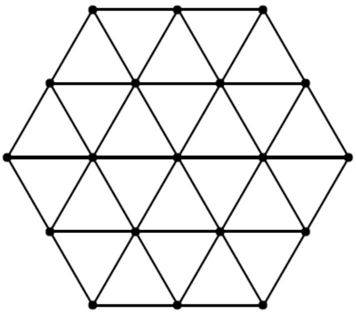
Problema 1. En la figura, se muestra una malla hexagonal formada por triangulitos equiláteros. Gabriel y Arnoldo toman turnos para jugar de la siguiente manera. En su turno, cada jugador colorea un segmento, incluidos sus extremos, de acuerdo a las siguientes reglas:

(i) Los extremos del segmento deben coincidir con los vértices de algunos de los triangulitos.

(ii) El segmento debe estar formado por uno o varios lados de algunos de los triangulitos.

(III) El segmento no puede tener puntos en común con ninguno de los segmentos coloreados anteriormente.

Pierde el jugador que en su turno no pueda colorear ningún segmento. Si Gabriel juega primero, determine cuál de los jugadores tiene una estrategia ganadora y descríbala.



Problema 2. Una pareja (a, b) de enteros positivos con $a < 391$ es *respetable* si $\text{mcm}(a, b) > \text{mcm}(a, 391)$. Determine el valor mínimo que toma b entre todas las posibles parejas respetables (a, b).

Problema 3. Dado un triángulo ABC sea D el pie de la altura desde A y ℓ la recta que pasa por los puntos medios de AC y BC. Sea E ls reflexión del punto D respecto a ℓ. Demuestre que el circuncentro del triángulo ABC está sobre la recta AE.

Segundo Día

Problema 4. Sea ABC un triángulo rectángulo en B. Sea B' la reflexión de B con respecto a la recta AC, y M el punto medio de AC. Se prolonga BM más allá de M hasta un punto D de modo que $BD = AC$. Demuestre que $B'C$ es la bisectriz del ángulo $\angle MB'D$.

Problema 5. Susana y Brenda juegan a escribir polinomios, tomando turnos iniciando por Susana.

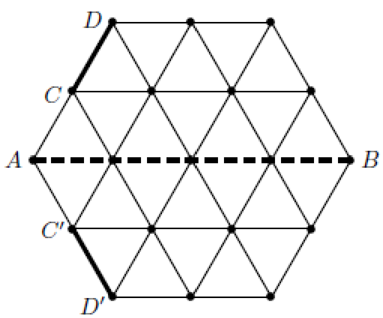
- En el turno de preparación (turno 0), Susana elige un entero positivo n_0 y escribe el polinomio $P_0(x) = n_0$.
- Luego, en el turno 1, Brenda elige un entero positivo n_1 distinto de n_0 y escribe uno de los dos polinomios $P_1(x) = n_1x - P_0(x)$ o bien $P_1(x) = n_1x + P_0(x)$.
- En general, en el turno k la jugadora correspondiente elige un entero positivo n_k distinto de todos los anteriores y escribe uno de los dos polinomios $P_k(x) = n_kx^k + P_{k-1}(x)$ o bien $P_k(x) = n_kx^k - P_{k-1}(x)$.

Gana quien escribe un polinomio que tenga por lo menos una raíz entera. Determine qué jugadora tiene una estrategia ganadora y describa dicha estrategia.

Problema 6. Sea $k > 1$ un entero. Inicialmente la rana Tita se encuentra situada sobre el punto k de la recta numérica. En un movimiento, si Tita se encuentra sobre el punto n, entonces salta al punto $f(n) + g(n)$, donde $f(n)$ y $g(n)$ son el mayor y el menor número primo (ambos positivos) que dividen a n, respectivamente. Determine todos los valores de k para los cuales Tita puede visitar una cantidad infinita de puntos diferentes de la recta numérica.

5.2. Soluciones

1. Gabriel una tiene estrategia ganadora. En su primer movimiento Gabriel traza una de las diagonales del hexágono más grande, por ejemplo el segmento AB. Nótese que AB divide la figura en dos partes simétricas, a uno y otro lado de AB, de modo que todo segmento que tenga un extremo en la primera parte y el otro extremo en la segunda parte, debe intersectar al segmento AB. Como el problema no permite esto, entonces los jugadores deben elegir segmentos con sus dos extremos en el mismo semiplano con respecto a AB. Ahora bien, cada vez que Arnoldo elige un segmento CD, Gabriel eligirá el segmento $C'D'$ reflejado de CD con respecto a AB. Este movimiento es permitido pues si Arnoldo pudo elegir el segmento CD, por simetría Gabriel podrá colorear el $C'D'$. Pero debe llegar un momento en el que ya no haya segmentos válidos que colorear, y como Gabriel siempre puede colorear un segmento después de Arnoldo, Arnoldo no puede ganar. Por lo tanto Gabriel gana si sigue esta estrategia.



2. Sea (a, b) una pareja respetable; podemos suponer que $b < 391$. Si $\mathrm{mcd}(a, 391) = 1$ entonces $\mathrm{mcm}(a, 391) = 391a > ab \geq \mathrm{mcm}(a, b)$, lo cual contradice el hecho de que (a, b) es respetable, y por lo tanto $\mathrm{mcd}(a, 391) > 1$. De este modo hay dos casos: $a = 17k$ o $a = 23k$ con k entero positivo.

- $a = 17k$: en este caso $k < 23$ debido a que $a < 391$. Entonces $\text{mcm}(k, 23) = 23k$ ya que 23 y k no tienen factores en común. De aquí que

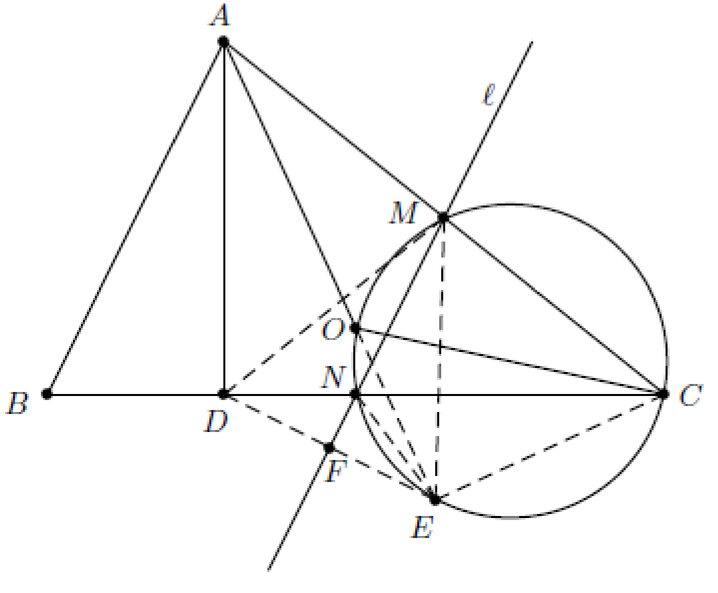
$$17kb \geq \text{mcm}(17k, b) > \text{mcm}(17k, 391) = 17 \cdot \text{mcm}(k, 23) = 391k,$$

  de donde $17kb > 391k$ y obtenemos que $b > 23$.

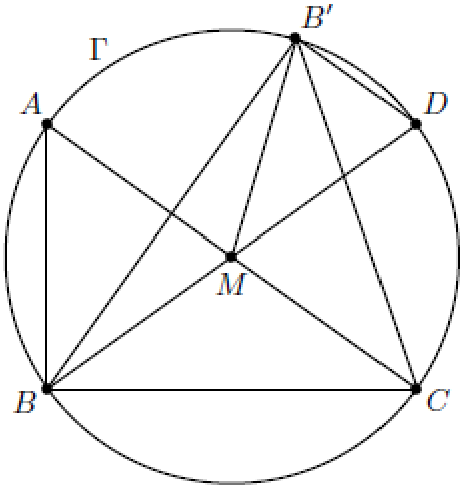
- $a = 23k$: argumentos similares muestran que $b > 17$.

Por lo tanto si (a, b) es respetable entonces $b > 17$, y sólo falta verificar si existe a tal que $(a, 18)$ es respetable. Como $\text{mcm}(23, 18) = 414 > 391 = \text{mcm}(23, 391)$, obtenemos que el mínimo valor de b es 18.

3. Sean M y N los puntos de corte de ℓ, con los lados AC y BC respectivamente. Al ser MN base media, $\angle ABD = \angle MNC$ y por opuesto al vértice, $\angle FND = \angle MNC$. Por simetría $MF \perp DE$, y por definición $AD \perp BD$; entonces por el criterio AA, los triángulos ABD y DNF son semejantes, de donde $\angle BAD = \angle NDF = \alpha$, y nuevamente por simetría $\angle NEF = \alpha$. Además $\angle NEM = \angle NDM$. Como el triángulo DMC es isósceles (ya que ADC es rectángulo y por ende M es su circuncentro), $\angle NDM = \angle CDM = \angle DCM$, es decir que el cuadrilátero $NECM$ es cíclico. Por otro lado, un resultado muy conocido es que $OM \perp AC$ y $ON \perp BC$, entonces $\angle ONC + \angle OMC = 180°$, lo que implica que el cuadrilátero $OMCN$ también es cíclico.



4. Observe que, por ser ABC rectángulo en B, M es el centro del circuncírculo Γ de ABC. Y como $BD = AC$ resulta que $MB = MA = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BD$ y M también es punto medio de BD, es decir que D está sobre Γ.



Por simetría $\angle MB'C = \angle MBC$ y por ángulos inscriptos $\angle MBC = \angle DBC = \angle DB'C$, de donde $\angle MB'C \angle DB'C$.

Nota: En realidad la prueba anterior funciona sólo si $AB < BC$, condición que debió ser incluida en el enunciado. En efecto, si $AB = BC$ entonces $B' = D$ y $\angle MB'D$ no está definido. Y si $AB > BC$ entonces $B'C$ *no es* la bisectriz del ángulo $\angle MB'D$, sino su bisectriz exterior.

5. Susana tiene una estrategia ganadora. En primer lugar, es obvio que en el primer turno debe elegir $n_0 = 1$ (pues si elige otro número, Brenda puede responder escribiendo $P_1(x) = x - n_0$). Luego, si Brenda elige el polinomio $P_1(x) = n_1x - 1$, Susana puede responder eligiendo $n_2 = n_1 - 1$ y el polinomio $P_2(x) = (n_1 - 1)x^2 - P_1(x) = (n_1 - 1)x^2 - n_1x + 1$ que tiene como raíz al número 1. Si Brenda elige el polinomio $P_1(x) = n_1x + 1$, Susana responde eligiendo $n_2 = n_1 + 1$, y el polinomio $P_2(x) = (n_1 + 1)x^2 - P_1(x) = (n_1 + 1)x^2 - n_1x - 1$ que tiene como raíz al número 1. Esta estrategia solamente falla en el caso en que Brenda haya elegido $n_1 = 2$ y escrito el polinomio $P_1(x) = 2x - 1$ (pues entonces Susana no puede elegir $n_1 - 1 = 1$ pues ya fue elegido antes). No obstante en este caso, Susana puede elegir $n_2 = 3$ y escribir el polinomio $P_2(x) = 3x^2 + 2x - 1$ que tiene como raíz al número -1. De esta manera, Susana gana en su segundo turno.

6. Para todos los valores enteros de $k > 1$ la rana solo podrá visitar una cantidad finita de puntos diferentes. Considere el conjunto:

$$M_k = \{\{a_n\} : a_{n+1} = f(a_n) + g(a_n), a_0 = k\}$$

Nótese que, escoger el entero $k > 1$ donde la rana comenzará a saltar, equivale a escoger el conjunto M_k, que contiene la sucesión que identifica los saltos. Probemos que la sucesión definida por M_k es eventualmente periódica para todo $k > 1$. Debemos demostrar que existen enteros positivos diferentes ℓ y t tales que $a_\ell = a_t$. Procedamos por inducción fuerte sobre k. Si el conjunto escogido fue M_2 entonces $a_1 = 4$, entonces $a_n = 4$ para todo $n > 0$. Asumamos que escoger los conjuntos $M_2, M_3, \ldots, M_k$ termina nuestro problema, o sea sus sucesiones correspondientes son eventualmente periódicas. Demostremos que escoger el conjunto M_{k+1} también concluye la demostración. En este caso $a_0 = k + 1$. Para cierto $N > 0$, diremos que el número a_N es excelente si $a_N \leq k + 1 = a_0$. Basta probar que existe $m > 0$ tal que a_m es excelente; en efecto, si $m > 0$ es tal que $a_m = a_0$ queda demostrado, pues $\{a_n\}$ sería periódica a partir de m, en otro caso $a_m \leq k$. Basta entonces definir la sucesión $b_0 = a_m$ y para cada $n > 0$, $b_{n+1} = f(b_n) + g(b_n)$. Entonces $\{b_n\}$ está en M_{a_m} y este conjunto concluye el problema. Veamos entonces dos casos:

Caso 1: Si $k + 1$ es un número compuesto, entonces

$$a_1 = f(k+1) + g(k+1) < \frac{k+1}{2} + \frac{k+1}{2} = k + 1 \Rightarrow a_1 \leq k,$$

por tanto a_1 es excelente y queda demostrado.

Caso 2: Asumamos ahora que $k+1$ es primo. Esto implica que $a_1 = f(k+1)+g(k+1) = 2(k+1)$. Por tanto $a_2 = f(2k+2) + g(2k+2) = (k+1) + 2 = k+3$.

- Si $k+3$ es compuesto entonces $a_3 < k+3$. Si a_3 es excelente queda probado. De otro modo $a_3 = k+2$. Como $k+1$ es primo entonces $k+2$ es compuesto. Esto implica que $a_4 < k+2$, de donde concluimos que a_4 es excelente y hemos terminado.

- Supongamos que $k+3$ es primo. Entonces $a_3 = f(k+3) + g(k+3) = 2k+6$. Este número es claramente compuesto, luego $a_4 = f(2k+6) + g(2k+6) = (k+3) + 2 = k+5$. Como $k+1 > 3$, y $k+1$ y $k+3$ son primos, forzosamente $k+5$ es compuesto, pues este número es divisible por 3. Esto implica que $a_5 < k+5$, de donde $a_5 \leq k+4$. Si a_5 es excelente o $a_5 = a_2$ el problema queda resuelto. Igualmente, si $a_5 = k+2$, que es compuesto, entonces $a_6 < k+2$, entonces a_6 es excelente y la conclusión es inmediata. En otro caso $a_5 = k+4$. Como k debe ser par se sigue que:

  $$a_6 = f(k+4) + g(k+4) \leq \left(\frac{k}{2} + 2\right) + 2 < k+3$$

  de donde concluimos que a_6 es excelente o $a_6 = k+2$; en el primer caso acabamos, sino $a_6 = k+2$ y por tanto a_7 es excelente, y queda demostrado.

Capítulo 6

Olimpiada Iberoamericana de Matemática

La XXXII Olimpiada Iberoamericana de Matemática tuvo lugar en Puerto Iguazú, Argentina, del 15 al 23 de septiembre de 2017. En la misma participaron 22 países: Argentina, Bolivia, Brasil, Chile, Colombia, Costa Rica, Cuba, Ecuador, El Salvador, España, Guatemala, Honduras, México, Nicaragua, Panamá, Paraguay, Perú, Portugal, Puerto Rico, República Dominicana, Uruguay y Venezuela. Venezuela participó con una delegación integrada por Amanda Vanegas, del Colegio San Francisco de Asís, y Laura Queipo, del Colegio San Vicente de Paúl, ambos de Maracaibo, Estado Zulia. Amanda Vanegas obtuvo medalla de plata y Laura Queipò medalla de bronce. La delegación fue liderada por el profesor José Heber Nieto Said.

6.1. Problemas

Primer Día

Problema 1. Para cada entero positivo n sea $S(n)$ la suma de sus dígitos. Decimos que n tiene la propiedad P si los términos de la sucesión infinita n, $S(n)$, $S(S(n))$, $S(S(S(n)))$,... son todos pares, y decimos que n tiene la propiedad I si los términos de esta sucesión son todos impares. Demostrar que entre todos los enteros positivos n tales que $1 \leq n \leq 2017$ son más los que tienen la propiedad I que los que tienen la propiedad P.

Problema 2. Sean ABC un triángulo acutángulo y Γ su circunferencia circunscrita. Sea D un punto en el segmento BC, distinto de B y de C, y sea M el punto medio de AD. La recta perpendicular a AB que pasa por D corta a AB en E y a G en F, con el punto

D entre E y F. Las rectas FC y EM se cortan en el punto X. Si $\angle DAE = \angle AFE$, demostrar que la recta AX es tangente a Γ.

Problema 3. Consideramos las configuraciones de números enteros

$$\begin{array}{ccccc} a_{1,1} & & & & \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & & \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ a_{2017,1} & a_{2017,2} & a_{2017,3} & \cdots & a_{2017,2017} \end{array}$$

con $a_{i,j} = a_{i+1,j} + a_{i+1,j+1}$ para todos los i, j tales que $1 \le j \le i \le 2016$. Determinar la máxima cantidad de enteros impares que puede contener una tal configuración.

Segundo Día

Problema 4. Sean ABC un triángulo acutángulo con $AC > AB$ y O su circuncentro. Sea D un punto en el segmento BC tal que O está en el interior del triángulo ADC y $\angle DAO + \angle ADB = \angle ADC$. Llamamos P y Q a los circuncentros de los triángulos ABD y ACD respectivamente y M al punto de intersección de las rectas BP y CQ. Demostrar que las rectas AM, PQ y BC son concurrentes.

Problema 5. Dado un entero positivo n, se escriben todos sus divisores enteros positivos en un pizarrón. Ana y Beto juegan el siguiente juego: Por turnos, cada uno va a pintar uno de esos divisores de rojo o azul. Pueden elegir el color que deseen en cada turno, pero solo pueden pintar números que no hayan sido pintados con anterioridad. El juego termina cuando todos los números han sido pintados. Si el producto de los números pintados de rojo es un cuadrado perfecto, o si no hay ningún número pintado de rojo, gana Ana; de lo contrario, gana Beto. Si Ana tiene el primer turno, determinar para cada n quién tiene estrategia ganadora.

Problema 6. Sean $n > 2$ un entero positivo par y $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ números reales tales que $a_{k+1} - a_k \le 1$ para todo k con $1 \le k \le n-1$. Sea A el conjunto de pares (i, j) con $1 \le i < j \le n$ y $j - i$ par, y sea B el conjunto de pares (i, j) con $1 \le i < j \le n$ y $j - i$ impar. Demostrar que

$$\prod_{(i,j)\in A} (a_j - a_i) > \prod_{(i,j)\in B} (a_j - a_i).$$

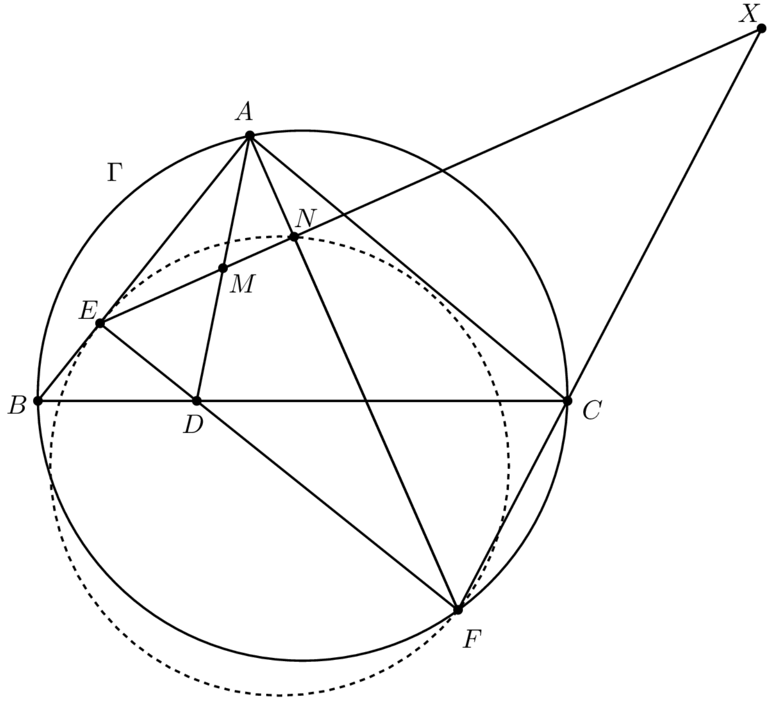
6.2. Soluciones

1. (Solución de Laura Queipo) Digamos que un número es *normal* si no tiene ninguna de las dos propiedades. Si $1 \le n \le 2017$ entonces $1 \le S(n) \le 28$. De los números n

tales que $1 \leq n \leq 9$ o $20 \leq n \leq 27$, es claro que los pares tienen la propiedad P y los impares la I. Si $10 \leq n \leq 19$ entonces n es normal, ya que n y $S(n)$ tienen diferente paridad. Con $S(n) = 1$ solo hay cuatro números: 1, 10, 100 y 1000. De ellos, 1 tiene la propiedad I y los otros tres son normales. Si $S(n) = 28$ entonces $n = 1999$, que es normal. Si $10 \leq S(n) \leq 19$ entonces $S(n)$, y por lo tanto n, es normal. Para los n tales que $2 \leq S(n) \leq 9$ o $20 \leq S(n) \leq 27$ afirmamos que, si n tiene la propiedad P, entonces $n+1$ tiene la propiedad I. En efecto, al ser n par es $S(n+1) = S(n)+1$ impar, y como $3 \leq S(n+1) \leq 9$ o $21 \leq S(n+1) \leq 27$, $S(n+1)$ (y por lo tanto $n+1$) tiene la propiedad I. Por lo tanto en ese rango hay al menos tantos números con la propiedad I como con la propiedad P, y como el 1 tiene la propiedad I, éstos son más numerosos.

Nota: En realidad hay exactamente un número más con la propiedad I que con la propiedad P.

2. (Solución de Amanda Vanegas) Sea N la intersección de AF con EM. Como AED es un triángulo rectángulo, el punto medio M de la hipotenusa AD es el circuncentro del triángulo y se tiene $MA = MD = ME$, $\angle MDE = \angle MED$ y $\angle MEA = \angle MAE$.



Como $\angle AEN = \angle DAE = \angle AFE = \angle AFN$, por ángulo semiinscrito AB es tangente en

E al circuncírculo del $\triangle EFN$. Luego

$$AE^2 = AN \cdot AF. \tag{1}$$

Además $\angle ENF = \angle BEF = 90°$, es decir que $AF \perp EX$. Análogamente $\angle FEN = 90° - \angle AEM = 90° - \angle DAE = 90° - \angle AFE = \angle EAN$, luego EF es tangente en E al circuncírculo Ω_2 del $\triangle EAN$ y

$$FE^2 = FN \cdot AF. \tag{2}$$

Como $\angle AED = \angle FEA = 90°$ y $\angle DAE = \angle AFE$, se tiene $AED \sim FEA$ y $AE/EF = ED/AE$, de donde

$$AE^2 = EF \cdot ED. \tag{3}$$

De (1) y (3) resulta $AN \cdot AF = EF \cdot ED$, y como por (2) $FE^2 = FN \cdot AF$, multiplicando miembro a miembro y simplificando resulta

$$AN \cdot FE = ED \cdot FN. \tag{4}$$

3. Consideremos el problema general para un arreglo con n filas y n números $a_{n,1}$, $a_{n,2}$,… $a_{n,n}$ en la base. Sea $M(n)$ el número máximo de impares que se pueden obtener. Para contar el número de impares podemos trabajar módulo 2, es decir que podemos suponer que los $a_{i,j}$ son 0 ó 1 y que $a_{i,j} \equiv a_{i+1,j} + a_{i+1,j+1} \pmod{2}$.

Es fácil ver que la sucesión $M(1)$, $M(2)$, $M(3)$,… comienza 1, 2, 4, 7, 10, 14,…. Estos valores máximos se pueden obtener por ejemplo así:

```
                                          1
                               0          0 1
                      1        1 1        1 1 0
            1         1 0      1 0 1      1 0 1 1
     0      0 1       0 1 1    0 1 1 0    0 1 1 0 1
1    1 1    1 1 0     1 1 0 1  1 1 0 1 1  1 1 0 1 1 0
```

Observamos que si $n \equiv 0, 2 \pmod{3}$ entonces $M(n) = n(n+1)/3$, mientras que si $n \equiv 1 \pmod{3}$ entonces $M(n) = n(n+1)/3 + 1/3$. Es decir que para estos casos

$$M(n) = \left\lceil \frac{n(n+1)}{3} \right\rceil. \tag{*}$$

Probaremos por inducción que (*) efectivamente se cumple para todo $n \geq 1$.

En primer lugar mostraremos por inducción que el valor dado por (*) efectivamente se puede alcanzar poniendo 1 1 0 1 1 0… en la base del arreglo. Para $n = 1$, 2 y 3 es cierto; supongamos que $n > 3$ y que (*) es cierto para $1, 2, \ldots, n-1$. .

Si $n = 3k$ entonces habrá $2k$ unos en la base. En la línea por encima de la base tendremos $0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1 \cdots$, con $2k-1$ unos. Y en la línea siguiente 1 0 1 1 0 1 …, con

$2k-1$ unos. En total las tres líneas inferiores tienen $6k-2=2n-2$ unos. Análogamente si $n=3k+2$ habrá $2k+2$ unos en la base y $2k$ unos en cada una de las dos líneas siguientes, para un total de $6k+2=2n-2$ unos. Y si $n=3k+1$ entonces habrá $2k+1$ unos en la base, $2k$ en la línea siguiente y $2k-1$ en la siguiente, para un total de $6k=2n-2$ unos.

Como la cuarta línea contando desde la base vuelve a tener el patrón 1 1 0 1 1 0..., por hipótesis inductiva en esa línea y las que están por encima de ella habrá $\lceil (n-3)(n-2)/3 \rceil$ unos, y en total

$$\left\lceil \frac{(n-3)(n-2)}{3} \right\rceil + 2n-2 = \left\lceil \frac{1}{3}(n^2-5n+6+6n-6) \right\rceil = \left\lceil \frac{n(n+1)}{3} \right\rceil.$$

Por lo tanto $M(n) \geq \left\lceil \frac{n(n+1)}{3} \right\rceil$.

A continuación probaremos, también por inducción, que el número de unos $U(n)$ en cualquier triángulo con n líneas es a lo sumo $\left\lceil \frac{n(n+1)}{3} \right\rceil$. Eso es cierto para $n=1$, 2 y 3. Supongamos $n>3$ y que el resultado es cierto para $1,2,\dots,n-1$. Sea r la cantidad de unos en la base del triángulo. Ahora observemos que $a_{n-1,j}=1$ si o bien $a_{n,j}=0$ y $a_{n,j+1}=1$ o bien $a_{n,j}=1$ y $a_{n,j+1}=0$. Y como cada 0 en la base puede dar lugar a lo sumo a dos unos en la línes $n-1$, y en la base hay $n-r$ ceros, es claro que en la línea $n-1$ puede haber a lo sumo $2(n-r)$ unos. Y entre la base y la línea $n-1$ puede haber a lo sumo $r+2(n-r)=2n-r$ unos.

Consideremos tres casos:

Caso 1) $n \equiv 0 \pmod 3$. Si $r \leq 2n/3$ entonces

$$U(n) \leq \frac{2n}{3} + \frac{(n-1)n}{3} = \frac{n(n+1)}{3}$$

y listo. Si en cambio $r \geq 2n/3+1$ entonces, como entre las líneas n y $n-1$ hay a lo sumo $2n-r$ unos, se tiene que

$$\begin{aligned} U(n) &\leq 2n-r+\left\lceil \frac{(n-2)(n-1)}{3} \right\rceil \\ &\leq 2n-\frac{2n}{3}-1+\frac{(n-2)(n-1)+1}{3} = \frac{n(n+1)}{3} \end{aligned}$$

y listo.

Caso 2) $n \equiv 1 \pmod 3$. Si $r \leq (2n+1)/3$ entonces

$$U(n) \leq \frac{2n+1}{3} + \frac{(n-1)n}{3} = \frac{n(n+1)+1}{3} = \left\lceil \frac{n(n+1)}{3} \right\rceil$$

y listo. Si en cambio $r \geq (2n+1)/3+1$ entonces

$$\begin{aligned} U(n) &\leq 2n - r + \left\lceil \frac{(n-2)(n-1)}{3} \right\rceil \\ &\leq 2n - \frac{2n+1}{3} - 1 + \frac{(n-2)(n-1)}{3} = \frac{n(n+1)-2}{3} < \left\lceil \frac{n(n+1)}{3} \right\rceil \end{aligned}$$

y listo.

Caso 3) $n \equiv 2 \pmod 3$. Si $r \leq (2n-1)/3$ entonces

$$U(n) \leq \frac{2n-1}{3} + \left\lceil \frac{(n-1)n}{3} \right\rceil = \frac{2n-1}{3} + \frac{(n-1)n+1}{3} = \frac{n(n+1)+1}{3}$$

y listo. Si en cambio $r \geq (2n-1)/3+1$ entonces

$$\begin{aligned} U(n) &\leq 2n - r + \frac{(n-2)(n-1)}{3} \\ &\leq 2n - \frac{2n-1}{3} - 1 + \frac{(n-2)(n-1)}{3} = \frac{n(n+1)}{3} \end{aligned}$$

y listo.

Finalmente, para $n = 2017$ se tiene

$$M(2017) = \left\lceil \frac{2017 \cdot 2018}{3} \right\rceil = 1356769.$$

4. Dado que P es el circuncentro del triángulo ABD, en el triángulo APB tenemos que

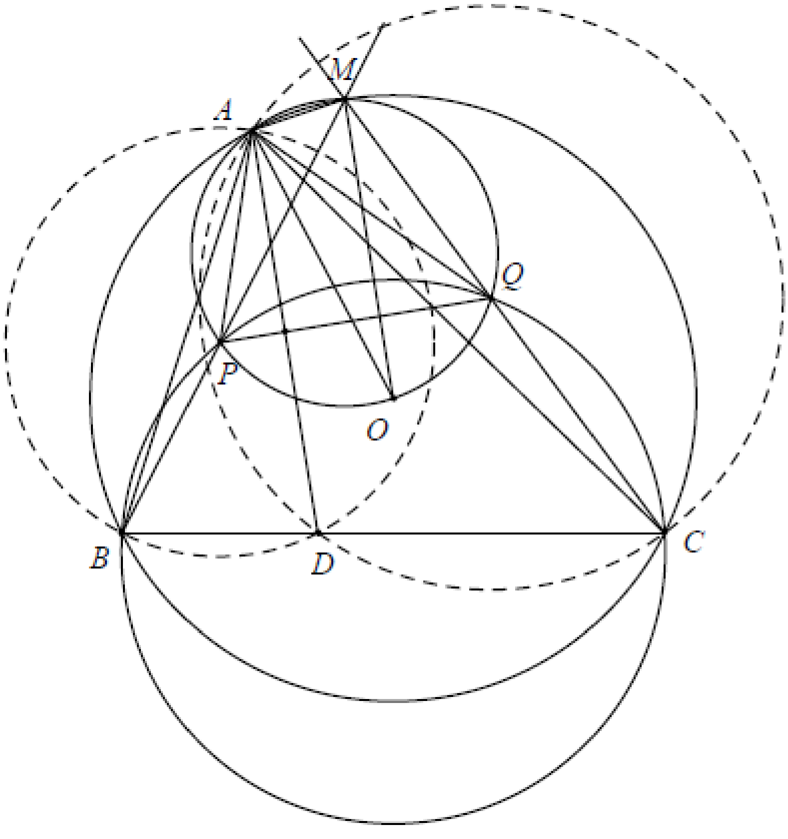
$$\angle PBA = \angle PAB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle APB) = 90^\circ - \angle ADB.$$

Análogamente, como Q es el circuncentro del triángulo ACD resulta que

$$\angle QCA = \angle ADC - 90^\circ = 90^\circ - \angle ADB.$$

De esto último se tiene que $\angle PBA = \angle QCA$, de donde el cuadrilátero $AMBC$ es cíclico. Notemos que $\angle APM = 2\angle PBA = 2\angle QCA = \angle AQM$ (por ser $\angle AQM$ ángulo exterior del $\triangle ACQ$), de donde se deduce que el cuadrilátero $AMQP$ es cíclico. Por hipótesis y por ser P el centro de la circunferencia por A, D y B se tiene que

$$\angle DAO = \angle ADC - \angle ADB = (180^\circ - \angle ADB) - \angle ADB = 180^\circ - \angle APB = \angle APM.$$



Por otra parte, como O es el centro de la circunferencia por A, B, C y M vale que

$$\angle AOM = 2\angle ABM = 2\angle ABP = 180^\circ - \angle APB = \angle APM = \angle DAO,$$

de donde $AD \parallel MO$. Como P y Q son los circuncentros de los triángulos ABD y ACD respectivamente, PQ es la mediatriz de AD, luego $PQ \perp AD$ de donde $PQ \perp MO$. Pero MO es circunradio de la circunferencia por MBC, entonces PQ y BC son antiparalelas y el cuadrilátero $BPQC$ es cíclico.

Finalmente, como los cuadriláteros $AMCB$, $APQM$ y $BPQC$ son cíclicos y cada par de circunferencias determinadas se cortan en dos puntos, los ejes radicales de cada par de ellas concurren, o sea que las rectas AM, PQ y BC concurren.

5. Si n es un cuadrado perfecto entonces Ana tiene estrategia ganadora. En efecto, en su primer turno, Ana pinta el número $k = \sqrt{n}$ de azul. Como los divisores de n distintos de $\sqrt{n}$ se pueden agrupar en pares disjuntos de la forma $\{d, n/d\}$, siempre que Beto pinte un dívisor de n Ana puede responder pintando del mismo color el otro divisor del par correspondiente. Al terminar el juego los dos divisores de cada par $\{d, n/d\}$ serán del mismo color y el producto de los divisores de cada par pintado de rojo será $n = k^2$. Al multiplicar todos los números rojos se obtendrá una potencia de n, digamos $n^s = (k^s)^2$, que será un cuadrado perfecto, y gana Ana.

Si n no es un cuadrado perfecto entonces la cantidad $d(n)$ de divisores de n es par, luego la última jugada será de Beto. Supongamos que el último divisor d que le quede para pintar a Beto no sea un cuadrado perfecto. Entonces si el producto de los divisores rojos hasta ese momento es un cuadrado perfecto, Beto pinta d de rojo, y en caso contrario lo pinta de azul, ganando. Sea $q(n)$ la cantidad de divisores de n que son cuadrados perfectos. Si $d(n) > 2q(n)$ entonces Beto puede asegurarse de que en su última jugada no le quede un un cuadrado perfecto: basta que escoja cuadrados perfectos mientras haya (no importa de qué color los pinte). De este modo Beto gana. La desigualdad $d(n) > 2q(n)$ se verifica si n no es cuadrado perfecto ni potencia de primo. En efecto, sea p un divisor primo de n cuyo exponente en la factorización en primos de n es i, con i impar. Entonces los divisores de n se pueden distribuir en en pares disjuntos de la forma $\{p^j m, p^{i-j} m\}$. En cada par el exponente de p es impar para al menos uno de los dos números, entonces a lo sumo uno de los dos números de cada par es un cuadrado perfecto. Más aún, como n no es potencia de primo, n tiene algún otro divisor primo $q \neq p$. Luego ninguno de los números del par $\{q, p^i q\}$ es un cuadrado perfecto, y concluimos que $d(n) > 2q(n)$.

De esta manera, si n no es cuadrado perfecto ni potencia de primo, gana Beto.

Solo nos queda por analizar el caso en que n es una potencia impar de primo. Notemos que en este caso $n = p^i$ para algún i impar y la condición de victoria de Ana se reduce a que la cantidad de números entre p, p^3,..., p^i (las potencias impares de p que dividen a n) pintados de rojo sean una cantidad par.

Si $n = p$ primo entonces gana Ana pintando en su primera jugada a p de azul.

Veamos que si $n = p^i$ con $i \geq 3$ impar, gana Beto. La estrategia usa una idea parecida a la mostrada antes, en donde Beto consigue ser el último jugador en pintar un divisor de n que no es cuadrado perfecto. El problema es que ahora Beto no puede jugar de forma tan descuidada como antes. La estrategia de Beto va a depender del valor de i módulo 4.

Si $i \equiv 3 \pmod 4$, digamos $i = 4k + 3$, entonces son $2k + 2$ las potencias impares de p que dividen a ti, y $2k + 2$ las potencias pares de p que dividen a n. La estrategia de Beto es jugar siempre en el mismo tipo de potencia de p que Ana (par o impar). Como $2k + 2$ es par, entonces Beto siempre puede jugar de esta manera, y además se garantiza pintar la última potencia impar de p, ganando. Si $i \equiv 1 \pmod 4$, digamos $i = 4k + 1$, entonces son $2k + 1$ las potencias impares de p que dividen a n, y también $2k + 1$ las potencias pares. La estrategia de Beto es, en su primera jugada, jugar en una potencia de p de tipo opuesto a la que haya elegido Ana en su primer turno; de esta manera deja sin pintar una cantidad par $(2k)$ de potencias de p de cada tipo. Ahora Beto juega como en el caso anterior y se asegura pintar la última potencia de p impar, ganando.

En conclusión, Ana gana si n es un cuadrado perfecto o un primo y Beto gana en caso contrario.

6. (Solución de Amanda Vanegas) Lo demostraremos por inducción. Para cada n sean

$$P_n = \prod_{(i,j)\in A} (a_j - a_i), \quad Q_n = \prod_{(i,j)\in B} (a_j - a_i).$$

Para $n = 4$ (paso base) se tiene $P_4 = (a_3 - a_1)(a_4 - a_2)$ y $Q_4 = (a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_3)(a_4 - a_1)$. Pongamos $\alpha = a_2 - a_1$, $\beta = a_3 - a_2$, $\gamma = a_4 - a_3$. Entonces $0 < \alpha, \beta, \gamma \leq 1$,

$$P_4 = (\alpha + \beta)(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \beta^2 + \alpha\gamma + \beta\gamma,$$

$$\begin{aligned} Q_4 &= \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) = \alpha^2\beta\gamma + \alpha\beta^2\gamma + \alpha\beta\gamma^2 \\ &\leq \beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta < P_4 \end{aligned}$$

y se cumple.

Supongamos ahora que n es par y $P_n > Q_n$. Entonces

$$\begin{aligned} P_{n+2} &= P_n \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \text{ impar}}}^{n-1} (a_{n+1} - a_i) \prod_{\substack{i=2 \\ i \text{ par}}}^{n} (a_{n+2} - a_i) \\ &= P_n \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \text{ impar}}}^{n-1} (a_{n+1} - a_i)(a_{n+2} - a_{i+1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{n+2} &= Q_n \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \text{ impar}}}^{n+1} (a_{n+2} - a_i) \prod_{\substack{i=2 \\ i \text{ par}}}^{n} (a_{n+1} - a_i) \\ &= Q_n \cdot (a_{n+2} - a_{n+1}) \prod_{\substack{i=1 \\ i \text{ impar}}}^{n-1} (a_{n+2} - a_i)(a_{n+1} - a_{i+1}) \\ &\leq Q_n \cdot (a_{n+2} - a_{n+1}) \prod_{\substack{i=1 \\ i \text{ impar}}}^{n-1} (a_{n+2} - a_i)(a_{n+1} - a_{i+1}), \end{aligned}$$

puesto que $0 < a_{n+2} - a_{n+1} \leq 1$.

Ahora para completar la inducción basta probar que

$$(a_{n+2} - a_i)(a_{n+1} - a_{i+1}) < (a_{n+1} - a_i)(a_{n+2} - a_{i+1}),$$

o sea que

$$-a_{n+2}a_{i+1} - a_i a_{n+1} < -a_{n+1}a_{i+1} - a_i a_{n+2},$$

que equivale a

$$(a_{n+2} - a_{n+1})(a_{i+1} - a_i) > 0,$$

lo cuel es cierto.

Capítulo 7

Olimpiada Internacional de Matemática

ESTA sección está dedicada a la 58^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO) celebrada en Río de Janeiro, Brasil, del 12 al 23 de Julio, con la participación de 615 jóvenes provenientes de 111 países de los cinco continentes. La delegación venezolana estuvo integrada por cinco estudiantes, Wemp Pacheco Rodríguez del colegio Calicantina, Maracay, medalla de bronce por segundo año consecutivo, Amanda Vanegas Ledesma, colegio San Francisco de Asís, Maracaibo, medalla de bronce, Laura Queipo Morales, colegio San Vicente de Paul, Maracaibo, mención honorífica, Iván Rodríguez Avolio, colegio Santiago León de Caracas, mención honorífica y Onice Aguilar Valecillos, colegio La Presentación, Mérida. El tutor de la delegación fue el profesor José Heber Nieto Said de La Universidad del Zulia y el jefe de la delegación el profesor Rafael Sánchez Lamoneda, de la Universidad Central de Venezuela. La delegación obtuvo la mayor puntuación entre todas las 24 IMO a las que hemos asistido. Los resultados de la competencia se pueden ver en `http://imo-official.org`

7.1. Problemas

Primer Día

Problema 1. Para cada entero $a_0 > 1$, se define la sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots$ tal que para cada $n \geqslant 0$:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{si } \sqrt{a_n} \text{ es entero,} \\ a_n + 3 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Determinar todos los valores de a_0 para los que existe un número A tal que $a_n = A$ para infinitos valores de n.

Problema 2. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Determinar todas las funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que, para cualesquiera números reales x e y,

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy).$$

Problema 3. Un conejo invisible y un cazador juegan como sigue en el plano euclídeo. El punto de partida A_0 del conejo, y el punto de partida B_0 del cazador son el mismo. Después de $n-1$ rondas del juego, el conejo se encuentra en el punto A_{n-1} y el cazador se encuentra en el punto B_{n-1}. En la n-ésima ronda del juego, ocurren tres hechos en el siguiente orden:

(i) El conejo se mueve de forma invisible a un punto A_n tal que la distancia entre A_{n-1} y A_n es exactamente 1.

(ii) Un dispositivo de rastreo reporta un punto P_n al cazador. La única información segura que da el dispositivo al cazador es que la distancia entre P_n y A_n es menor o igual que 1.

(iii) El cazador se mueve de forma visible a un punto B_n tal que la distancia entre B_{n-1} y B_n es exactamente 1.

¿Es siempre posible que, cualquiera que sea la manera en que se mueva el conejo y cualesquiera que sean los puntos que reporte el dispositivo de rastreo, el cazador pueda escoger sus movimientos de modo que después de 10^9 rondas el cazador pueda garantizar que la distancia entre él mismo y el conejo sea menor o igual que 100?

Segundo Día

Problema 4. Sean R y S puntos distintos sobre la circunferencia Ω tales que RS no es un diámetro de Ω. Sea ℓ la recta tangente a Ω en R. El punto T es tal que S es el punto medio del segmento RT. El punto J se elige en el menor arco RS de Ω de manera que Γ, la circunferencia circunscrita al triángulo JST, intersecta a ℓ en dos puntos distintos. Sea A el punto común de Γ y ℓ más cercano a R. La recta AJ corta por segunda vez a Ω en K. Demostrar que la recta KT es tangente a Γ.

Problema 5. Sea $N \geqslant 2$ un entero dado. Los $N(N+1)$ jugadores de un grupo de futbolistas, todos de distinta estatura, se colocan en fila. El técnico desea quitar $N(N-1)$ jugadores de esta fila, de modo que la fila resultante formada por los $2N$ jugadores restantes satisfaga las N condiciones siguientes:

(1) Que no quede nadie ubicado entre los dos jugadores más altos.

(2) Que no quede nadie ubicado entre el tercer jugador más alto y el cuarto jugador más alto.

$\vdots$

(N) Que no quede nadie ubicado entre los dos jugadores de menor estatura.

Demostrar que esto siempre es posible.

Problema 6. Un par ordenado (x, y) de enteros es *un punto primitivo* si el máximo común divisor de x e y es 1. Dado un conjunto finito S de puntos primitivos, demostrar que existen un entero positivo n y enteros a_0, a_1, ..., a_n tales que, para cada (x, y) de S, se cumple:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

7.2. Soluciones

1. Demostraremos que los valores de a_0 que satisfacen lo pedido son los múltiplos de 3. En efecto, como a_{n+1} solo depende de a_n, si $a_n = a_m$ para $n \neq m$, entonces la sucesión sería periódica. Por tanto, buscaremos los valores de a_0 para los cuales la sucesión sea periódica. Analizaremos los términos de la sucesión por sus restos módulo 3.

(1) Supongamos que $a_n \equiv -1 \pmod{3}$. Como los cuadrados dejan resto 0 o 1 módulo 3, entonces $\sqrt{a_n}$ no es un entero y en consecuencia, $a_{n+1} = a_n + 3 \equiv -1 \pmod{3}$ y por tanto, para $m > n$ se cumple que $a_m \equiv -1 \pmod{3}$ y a_m no es un cuadrado perfecto. Esto implica que a partir de a_n ningún término es cuadrado perfecto y además $a_{m+1} > a_m$, si $m > n$, por tanto, la sucesión no puede ser periódica. En consecuencia si $a_0 \equiv -1 \pmod{3}$, entonces la sucesión no es periódica.

(2) Supongamos que $a_n \not\equiv -1 \pmod{3}$ y $a_n \leq 9$, entonces $a_n \in \{3, 4, 6, 7, 9\}$. Si $a_n = 4$, entonces $a_{n+1} = 2 \equiv -1 \pmod{3}$ y la sucesión no es periódica. Si $a_n = 7$, entonces $a_{n+1} = 10$, $a_{n+2} = 13$, $a_{n+3} = 16$, $a_{n+4} = 4$ y $a_{n+5} = 2$ y de nuevo la sucesión no será periódica. Si $a_n \in \{3, 6, 9\}$, entonces a partir de cierto momento la sucesión será, $3, 6, 9, 3, 6, 9, \ldots$ y tendremos la periodicidad buscada.

Supongamos que $a_n \not\equiv -1 \pmod{3}$ y $a_n > 9$. Demostremos que existe un índice $m > n$ tal que $a_m < a_n$. En efecto. Sea t^2 el mayor cuadrado perfecto menor que a_n. Como $a_n > 9$, t es al menos igual a 3. El primer cuadrado en la sucesión $a_n, a_n + 3, a_n + 6, \ldots$, será uno de los siguientes, $(t + 1)^2$, o $(t + 2)^2$ o $(t + 3)^2$, por tanto, existe un índice $m > n$ tal que $a_n \leq t + 3 < t^2 < a_n$, como afirmamos.

(3) Si $a_n \equiv 0 \pmod{3}$, entonces existe un índice $m > n$ tal que $a_m = 3$. En efecto. Observemos primero que por la definición de la sucesión, a un múltiplo de 3 lo sigue siempre otro múltiplo de 3. Si $a_n \in \{3, 6, 9\}$, ya vimos que la sucesión seguirá eventualmente el patrón periódico, $3, 6, 9, 3, 6, 9, \ldots$. Si $a_n > 9$, sea j el índice tal

que a_j es igual al mínimo del conjunto $\{a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$. Debe cumplirse que $a_j \leq 9$, pues en caso contrario, por lo demostrado en (2) aplicado a a_j existiría un $m > j$ tal que $a_m > a_j$ y eso contradice la minimalidad de a_j. Por tanto $a_j \in \{3, 6, 9\}$ y tenemos la periodicidad buscada.

(4) Si $a_n \equiv 1 \pmod 3$, demostremos que existe un índice $m > n$ tal que $a_m \equiv -1 \pmod 3$ y por (2) no habrá periodicidad. En efecto. En la sucesión, si un término es igual a 4, el siguiente es $2 \equiv -1 \pmod 3$, por tanto, no habrá periodicidad. Si $a_n = 7$ para algún n, entonces los términos que siguen en la sucesión son $10, 13, 16, 4, 2, \ldots$ y de nuevo no habrá periodicidad. Para $a_n \geq 10$ tomemos de nuevo un índice $j > n$ tal que $a_j = min\{a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$. Por la definición de la sucesión, ningún término de este conjunto es múltiplo de 3. Como $a_j \equiv 1 \pmod 3$, por lo demostrado en (2), $a_j \leq 9$. En consecuencia, $a_j \in \{4, 7\}$ y la sucesión no será periódica.

2. Demostremos que son tres las funciones que satisfacen la ecuación

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy). \tag{*}$$

A saber $x \mapsto 0$, $x \mapsto x - 1$ y $x \mapsto 1 - x$.

Es fácil verificar que estas tres funciones satisfacen la ecuación (*). Demostremos que son las únicas. Observemos primero que $f(x)$ es solución si y solo si $-f(x)$ es solución, por tanto, sin pérdida de generalidad supongamos que $f(0) \leq 0$.

Debemos demostrar que $f(x) = 0$ o bien $f(x) = x - 1$, para todo número real x.

Dado $x \neq 1$ fijo, podemos elegir un número real y tal que

$$x + y = xy \Leftrightarrow y = \frac{x}{x-1}.$$

En consecuencia, si $x \neq 1$ la ecuación (*) nos da:

$$f\left(f(x) \cdot f\left(\frac{x}{x-1}\right)\right) = 0. \tag{1}$$

En particular, haciendo $x = 0$ en (1), tenemos que $(f(0))^2$ es un cero de la función f, es decir existe al menos un número real, r, tal que $f(r) = 0$, a saber, $r = (f(0))^2$. Podemos escribir entonces,

$$f\left((f(0))^2\right) = 0. \tag{2}$$

Como $f(0) \leq 0$ debemos analizar dos casos.

Caso 1. $f(0) = 0$.

Haciendo $y = 0$ en (*) obtenemos

$$f\left(f(x)f(0)\right) + f(x) = f(0),$$

o bien para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(0) + f(x) = f(0).$$

De donde, $x \in \mathbb{R}$, se tiene que $f(x) = 0$

Caso 2. $f(0) < 0$.

Demostremos que:

$$f(1) = 0,\ f(a) = 0 \Rightarrow a = 1 \text{ y } f(0) = -1. \tag{3}$$

En efecto. Necesitamos demostrar que 1 es el único cero de f. Por (2) f tiene al menos un cero, $(f(0))^2$. Sea $(f(0))^2 = a$. Si $a \neq 1$, entonces haciendo $x = a$ en (1) tenemos que:

$$f\left(f(a) \cdot f\left(\frac{a}{a-1}\right)\right) = 0.$$

Por tanto, $f(0) = 0$, lo cual es una contradicción. Entonces de (2) podemos concluir que $(f(0))^2 = 1$. Como hemos supuesto que $f(0) < 0$, entonces $f(0) = -1$. Hemos demostrado entonces que 1 es el único cero de la función f y que $f(0) = -1$.

Hagamos ahora $y = 1$ en (*), entonces

$$f\left(f(x)f(1)\right) + f(x+1) = f(x) \Leftrightarrow f(0) + f(x+1) = f(x) \Leftrightarrow f(x+1) = f(x) + 1,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Ahora por inducción obtenemos que para todo $n \in \mathbb{Z}$ y para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x+n) = f(x) + n. \tag{4}$$

Demostremos que f es inyectiva. En efecto, supongamos que $f(a) = f(b)$ con $a \neq b$. Por (4), para todo $N \in \mathbb{Z}$,

$$f(a+N+1) = f(a) + N + 1 = f(b) + N + 1 = f(b+N) + 1.$$

Elijamos un entero $N < -b$, entonces existen números reales x_0 e y_0, tal que $x_0 + y_0 = a + N + 1$ y $x_0 y_0 = b + N$, pues al ser $N < -b$ la ecuación cuadrática

$$t^2 - (a+N+1)t + b + N = 0$$

tiene solución en $\mathbb{R}$, ya que su discriminante $(a+N+1)^2 - 4(b+N) \geq 0$.

Como $a \neq b$, tenemos que tanto x_0 como y_0 son diferentes de 1. Poniendo ahora x_0 e y_0 en (*) y por (4) y (3) obtenemos:

$$\begin{aligned} f\left(f(x_0)f(y_0)\right) + f(a+N+1) = f(b+N) &\Leftrightarrow f\left(f(x_0)f(y_0)\right) + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow f\left(f(x_0)f(y_0) + 1\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow f(x_0)f(y_0) = 0. \end{aligned}$$

Pero, por lo demostrado anteriormente, ambos $f(x_0)$ y $f(y_0)$ son distintos de cero, llegando a una contradicción, por tanto, f es inyectiva.

Ahora para cualquier número real t, hagamos $x = t$ e $y = -t$ en (*) para obtener:

$$f\left(f(t)f(-t)\right) + f(0) = f\left(-t^2\right),$$

de donde por (3),

$$f\left(f(t)f(-t)\right) = f\left(-t^2\right) + 1,$$

y por (4)

$$f\left(f(t)f(-t)\right) = f\left(-t^2 + 1\right).$$

Pero como f es inyectiva, nos queda que

$$f(t)f(-t) = -t^2 + 1.$$

Análogamente si ponemos $x = t$ e $y = 1 - t$ en (*), llegamos a que

$$f(t)f(1-t) = t(1-t).$$

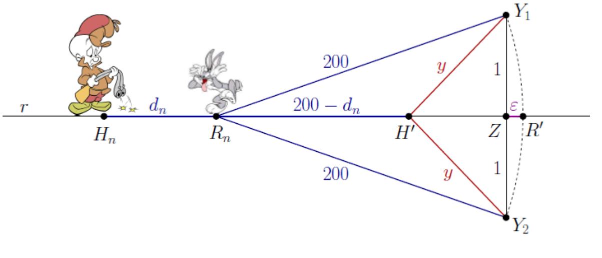
Pero como por (4), sabemos que $f(1-t) = 1 + f(-t)$, juntamos todos esto y llegamos a que para todo número real t, $f(t) = t - 1$, como queríamos demostrar.

3. Demostremos que el cazador no tiene una estrategia que le permita lograr su objetivo, sin importar cómo se mueva el conejo, o dónde estén ubicados los puntos P_n que indica el dispositivo de rastreo. Es decir, el cazador no tiene una estrategia que le garantice que la distancia entre él y el conejo es menor que 100 en 10^9 rondas.

Sea d_n la distancia entre el cazador y el conejo luego de n rondas. Es claro que si $d_n \geq 100$ para cualquier $n < 10^9$, el conejo habrá ganado, pues para ello solo necesita alejarse en línea recta del cazador, y la distancia entre ellos se mantendrá en 100 o más unidades de allí en adelante.

Demostremos ahora que, mientras $d_n < 100$, sin importar la estrategia que siga el cazador, el conejo tiene una manera de aumentar d_n^2 en al menos $\frac{1}{2}$ cada 200 rondas. De esta forma, d_n^2 llegará a ser 10^4 en menos de $2 \cdot 10^4 \cdot 200 = 4 \cdot 10^6 > 10^9$ rondas, y el conejo gana.

Supongamos que el cazador se encuentra en el punto B_n y el conejo en el punto A_n. Supongamos además que en este momento el conejo le revela su posición al cazador (esto nos permite ignorar cualquier información previa que nos de el dispositivo de rastreo). Sea r la recta B_nA_n, e Y_1, Y_2 puntos que están a distancia 1 unidad de la recta r y a 200 unidades de A_n, como muestra la figura.



El plan del conejo ahora es simplemente elegir uno de los dos puntos, Y_1 o Y_2 y saltar 200 veces en línea recta hacia este. Como todos los saltos están a una distancia de 1 unidad de r, es posible que todos los avisos del dispositivo de rastreo se mantengan sobre r. En particular, en este caso, el cazador no tiene manera de saber cual de los dos puntos eligió el conejo.

¿Qué puede hacer el cazador con la información que le dan los puntos P_n emitidos por el dispositivo de rastreo? Si su estrategia le dice que se desplace en línea recta hacia la derecha en 200 rondas, llegará al punto B' indicado en la figura. ¡Observe que el cazador no tiene una mejor estrategia! En efecto, luego de estas 200 rondas siempre terminará en un punto a la izquierda de B'. Si la estrategia lo lleva a un punto por encima de la recta r, él terminará aún más lejos de Y_2, y si su estrategia lo lleva a un punto por debajo de r, terminaría aún más lejos de Y_1. En otras palabras, sin importar cual estrategia siga, luego de estas 200 rondas, nunca podrá asegurar que su distancia al conejo será menor que $B'Y_1 = B'Y_2$.

Llamemos $y = B'Y_1 = B'Y_2$. Para estimar y^2, sea Z el punto medio del segmento Y_1Y_2, sea A' un punto 200 unidades a la derecha de A_n y definamos $\epsilon = ZA'$, (obsérvese que $B'A' = d_n$). Entonces

$$y^2 = 1 + (B'Z)^2 = 1 + (d_n - \epsilon)^2,$$

donde

$$\epsilon = 200 - A_nZ = 200 - \sqrt{200^2 - 1} = \frac{1}{200 + \sqrt{200^2 - 1}} > \frac{1}{400}.$$

En particular, $\epsilon^2 + 1 = 400\epsilon$, por tanto,

$$y^2 = d_n^2 - 2\epsilon d_n + \epsilon^2 + 1 = d_n^2 + \epsilon(400 - 2d_n).$$

Como $\epsilon > \frac{1}{400}$ y hemos supuesto que $d_n < 100$, entonces

$$\epsilon(400 - 2d_n) > 1 + 200\epsilon > \frac{1}{2},$$

y por tanto,

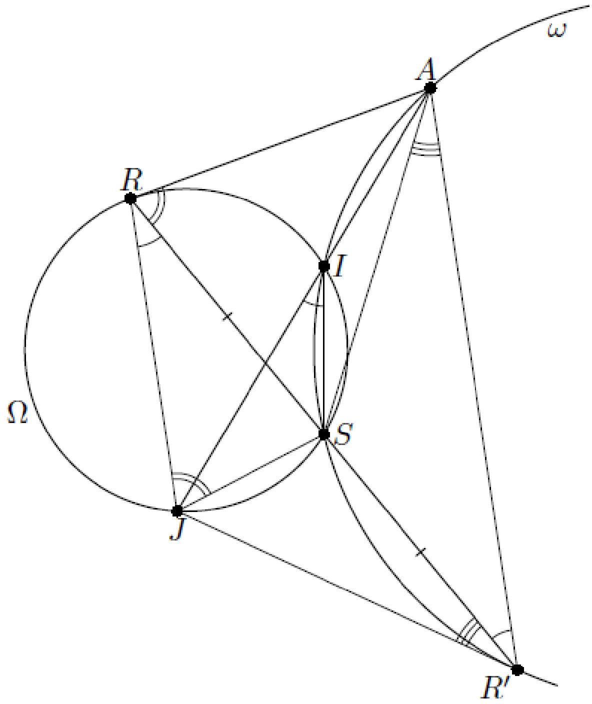
$$y^2 = d_n^2 + \epsilon(400 - 2d_n) > d_n^2 + 1 + 200\epsilon > d_n^2 + \frac{1}{2}.$$

En consecuencia, al seguir las pistas dadas por el dispositivo de rastreo, sin importar lo que el cazador haga, el conejo puede poner una distancia d_{n+200} entre él y el cazador, tal que $d_{n+200}^2 > d_n^2 + \frac{1}{2}$ y el conejo gana.

4. En las circunferencias Ω y Γ se cumple que $\angle KRS = \angle KJS = \angle ATS$. Por otra parte, como RA es tangente a Ω, entonces $\angle SKR = \angle SRA = \angle TRA$. Por tanto ,los triángulos ART y SKR son semejantes y

$$\frac{TR}{RK} = \frac{AT}{SR} = \frac{AT}{ST},$$

y como $\angle ATS = \angle KRT$, entonces los triángulos AST y TKR son semejantes. En consecuencia, $\angle SAT = \angle RTK$ y KT es tangente a γ en T.



5. Dividamos primero en N grupos, por estatura, el grupo de los $N(N+1)$ jugadores. Es importante observar que no hay dos jugadores con la misma estatura. El primer grupo G_1, lo conformarán los $N+1$ jugadores más altos. El grupo G_2 estará integrado por los siguientes $N+1$ jugadores más altos y así sucesivamente, hasta llegar al grupo G_N, de los $N+1$ jugadores más bajos.

Vamos pasando revista en la fila original de izquierda a derecha y nos detenemos cuando encontremos los primeros dos jugadores (consecutivos o no), que estén en un mismo grupo, digamos, G_i. Como hay N grupos, esto sucederá a lo sumo, al llegar a la persona que ocupa el lugar $N+1$ en la fila original. Elijamos a estos dos jugadores del grupo G_i, y quitemos a los restantes del grupo G_i de toda la fila original y a todos los que había en la fila hasta llegar al lugar donde conseguimos al segundo miembro del grupo G_i. Las únicas personas que podrían estar entre los dos jugadores elegidos, por altura, son del grupo G_i, y ya los eliminamos, y por posición también los quitamos, al eliminar a todos los de la fila hasta llegar al lugar donde detuvimos la revisión.

Ahora nos quedan $N-1$ grupos (todos los originales menos G_i). Como cada uno de estos grupos perdió a lo sumo una persona en la primera revisión, cada uno tendría al menos N miembros en la fila que quedó luego de la primera revisión.

Volvemos ahora a pasar revista de izquierda a derecha en la nueva fila, y repetimos el proceso anterior, eligiendo a los dos siguientes jugadores que están en un mismo grupo y eliminando al resto de jugadores de este grupo y a todos los vistos hasta ese momento.

Ahora tenemos dos pares de jugadores con las condiciones pedidas, pues los del segundo grupo tampoco podrán tener a alguien que los separe, por las mismas razones que no los tienen los dos seleccionados en la primera revisión. Ahora nos quedan $N-2$ grupos con al menos $N-1$ jugadores cada uno.

Repetimos este proceso N veces y entonces llegamos a tener dos jugadores de cada grupo, para un total de $2N$ jugadores. Además la condición sobre las alturas está garantizada por la agrupación inicial y la eliminación de todos los miembros de un grupo, menos los dos seleccionados de ese grupo y al pasar revista de izquierda a derecha, se garantiza que cada pareja de un mismo grupo quedarán juntos sin otro jugador en el medio que los separe.

6. Comencemos observando que la expresión $f(x,y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \ldots a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n$, es un polinomio homogeneo en x e y de grado n. Si encontramos un polinomio homogeneo $f(x,y)$ de grado n y tal que $f(x,y) = \pm 1$, habremos resuelto el problema, pues entonces $f^2(x,y) = 1$.

Enumeremos los puntos de S como $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$. Si dos cualesquiera de ellos, (x_i,y_i) y (x_j,y_j) son colineales con el origen, entonces la condición de ser primitivos implica que $(x_j,y_j) = (-x_i,-y_i)$. En este caso por la homogeneidad de $f(x,y)$, tenemos entonces que $f(x_j,y_j) = \pm f(x_i,y_i)$. Por tanto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que en S no hay dos puntos colineales con el origen.

Consideremos ahora los polinomios homogeneos $l_i(x,y) = y_ix - x_iy$ y definamos

$$g_i(x,y) = \Pi_{j\neq i} l_j(x,y).$$

Como no hay dos puntos en S colineales con el origen, entonces $l_i(x,y) = 0$ si y solo si $j = i$. En consecuencia $g_i(x_j,y_j) = 0$ para todo $j \neq i$.

Definamos $a_i = g_i(x_i,y_i) = \Pi_{j\neq i} l_j(x_i,y_i)$. Entonces $a_i \neq 0$ pues $l_j(x_i,y_i) \neq 0$ si y solo si $j \neq i$.

Como S tiene n elementos, entonces $g_i(x,y)$ tiene grado $n-1$ y por lo que hemos dicho antes $g_i(x,y)$ satisface

1. $g_i(x_j,y_j) = 0$, si $j \neq i$
2. $g_i(x_i,y_i) = a_i$.

Afirmamos que para cualquier $N \geq n-1$, existe un polinomio de grado N con las dos propiedades anteriores. En efecto, como $(x_i,y_i) \in S$ es un punto primitivo, existen enteros a y b tales que $ax_i + by_i = 1$, por tanto, existe un polinomio de grado 1, $I_i(x,y) = ax + by$ tal que $I_i(x_i,y_i) = 1$. Entonces el polinomio $I_i(x,y)^{N-(n-1)}g_i(x,y)$ tiene grado N y satisface las dos propiedades anteriores.

Podemos ahora reducir el problema a la siguiente afirmación: *Para cada entero positivo a, existe un polinomio homogeneo $f_a(x,y)$ con coeficientes enteros, de grado al menos 1, tal que $f_a(x,y) \equiv 1 \pmod{a}$, para todo punto primitivo (x,y).*

En efecto, sea a el mínimo común múltiplo de los números a_i $(1 \leq i \leq n)$. Tomemos el polinomio f_a y elijamos alguna potencia $f_a(x,y)^k$ que tenga grado al menos $n-1$ y restémosle múltiplos apropiados de los polinomios g_i definidos antes, para obtener el polinomio que queremos.

Demostremos ahora la afirmación que hemos hecho. Consideremos pre¿imero el caso en el cual a es la potencia de un primo $(a = p^k)$. Entonces podemos hacer la siguiente elección:

- $f_a(x,y) = \left(x^{p-1} + y^{p-1}\right)^{\phi(a)}$, si p es impar.
- $f_a(x,y) = \left(x^2 + xy + y^2\right)^{\phi(a)}$, si p es par.

Supongamos ahora que a es cualquier entero positivo, y sea $a = q_1 q_2 \cdots q_k$, donde los q_i son potencias de primos y primos relativos dos a dos. Para cada q_i sea f_{q_i} el polinomio que acabos de construir cuando a es una potencia de un primo, y sean F_{q_i} potencias de ellos de manera que todos tengan el mismo grado. Observemos que:

$$\frac{a}{q_i} F_{q_i}(x,y) \equiv \frac{a}{q_i} \pmod{a},$$

para cualquier punto primitivo (x,y).

Por el lema de Bézout, existe una combinación lineal de los $\frac{a}{q_i}$ que es igual a 1. Por tanto, existe una combinación lineal de los F_{q_i} tal que $F_{q_i}(x,y) \equiv 1 \pmod{a}$ para cualquier punto primitivo (x,y), y este polinomio es homogeneo porque todos los F_{q_i} tienen el mismo grado. Esto termina la demostración.

Premiación de las Olimpiadas Matemáticas del 2017

Final Nacional de la Olimpiada Juvenil de Matemáticas

Primer Año

Medallas de Oro

Victoria Consalvo	Academia Merici	Caracas
Francisco Molina	E. C. San Antonio	Miranda
Augusto Subero	Simon Bolivar (Apucito)	Carabobo

Medallas de Plata

David Brito	Juan XXIII	Carabobo
Ricardo Carrillo	Alfredo Armas Alfonso	Zulia
Andres Chacón	Iberoamericano	Bolivar
Clarissa Fernández	Escuela Bella Vista	Zulia
Mariangeles Mavarez	Mara	Zulia
Gabriel Méndez	Iberoamericano	Bolívar

Medallas de Bronce

Maria Abad	N. Sra. de Lourdes	Carabobo
Sabrina Ferrer	Escuela Bella Vista	Zulia
Sofía Graterón	Academia Merici	Caracas
Luis Hernández	Las Colinas	Lara
Marielv Mavarez	Mara	Zulia
Eduardo Mendt	Liceo Los Robles	Zulia
Fanny Muñoz	Instituto Andes	Caracas
Carlos Ramírez	Río Claro	Lara

Menciones de Honor

Ricardo Espinoza	Población Flotante	Anzoátegui
Isaac Guerrero	Internacional Río Caura	Bolívar
Carlos Jerak	San José Maristas	Aragua
Loreine Mijares	Escuela Bella Vista	Zulia
Rosalba Orozco	San Juan Bautista	Guárico
Emmanuel Ramírez	Instituto Alfa	Mérida

Segundo Año

Medallas de Oro

Elliot Larez	Los Próceres	Bolívar
Manuel Rocha	Santiago de Leon	Caracas

Medallas de Plata

Luis Negrón	Escuela Bella Vista	Zulia
Jesús Ortega	Joseph John Thomson	Zulia
Santiago Pinto	Colegio Calasanz	Carabobo
Marcos Pollini	Paidea	Mérida

Medallas de Bronce

Andrea Abate	Hipocampitos	Miranda
Isabella Bolivar	Academia Merici	Caracas
Ana de Sousa	San Pedro	Lara
Diego Stecca	Las Colinas	Lara

Tercer Año

Medallas de Oro

Juan Guevara	Bella Vista	Aragua

Medallas de Plata

Andrés Saab	Bellas Artes	Zulia

Medallas de Bronce

Omar Hatem	Angel de la Guarda	Portuguesa
Luis Martínez	Iberoamericano	Bolivar
Liliana Nóbrega	I.E.A.	Caracas
Sabrina Queipo	San Vicente de Paul	Zulia
Adolfo Vivas	Juan XXIII	Falcón

Menciones de Honor

Moisés Blanco	Monte Carmelo	Bolívar
Alon Blum	Moral y Luces	Caracas
Donato Caraballo	N. Sra. de la Paz	Anzoátegui
Andrés Cisneros	Belagua de Guatire	Miranda
Luis Indriago	Las Colinas	Lara
Rosalinda Méndez	Santa María Goretti	Miranda

Cuarto Año

Medallas de Oro

Kimberly Rodríguez	Escuela Bella Vista	Zulia
Román Rodríguez	Monte Carmelo	Bolívar
Alejandro Troconis	I.E.A. El Peñón	Caracas

Medallas de Plata

Alejandro Maris	Colegio Madison	Caracas
Roberto Patiño	Emil Friedman	Caracas
Pablo Ramírez	E. C. San Antonio	Miranda

Medallas de Bronce

Néstor Duarte	Hipocampitos	Miranda
Rubén Duarte	Nuestra Señora de La Paz	Anzoátegui
Valeria Garrido	Monte Carmelo	Bolivar
Oriana Pintos	Alberto Muller Rojas	Caracas
Arturo Poleo	San Vicente de Paul	Lara
José Rosa	I.E.A.	Caracas

Menciones de Honor

Samuel Mendoza	Emil Friedman	Caracas
Vicente Mirabal	San Pedro	Lara

Quinto Año

Medallas de Oro

Iván Rodríguez	Santiago de León	Caracas

Medallas de Plata

Alberto Matute	Academia Washington	Caracas
Laura Queipo	San Vicente de Paul	Zulia

Medallas de Bronce

Santiago González	I.E.A.	Caracas
Gristian Inojosa	Loyola Gumilla	Bolívar
Miguel Melo	Hipocampitos	Miranda
Amanda Vanegas	San Francisco de Asís	Zulia
Sebastian Velásquez	Valle Alto	Miranda

Menciones de Honor

Harrison Maestu	Adolfo Valbuena	Carabobo
José Méndez	Colegio Cumbres	Caracas
Javier Pulido	Hipocampitos	Miranda

Premios Especiales

Iván Rodríguez (Santiago de León, Caracas)

Premio de la Fundación Empresas Polar a la mejor prueba.

Pablo Ramírez (E. C. San Antonio, Miranda)

Premio UNEXPO a la respuesta más creativa.

Laura Queipo (San Vicente de Paul, Zulia)

Premio Darío Durán a la mejor respuesta de geometría.

Prof. José Alberto Infante (Caracas)

Premio Profesor Eduardo Contreras al mejor Coordinador de la OJM 2017.

Olimpiada de Mayo 2017

Nivel I

Medallas de Plata

Javier Mila de la Roca

Medallas de Bronce

Isaac Guerrero
Ricardo Carrillo
Jesús Duarte
Daniel Echeverría

Menciones de Honor

Rodrigo Olmos
Corina Sandoval
Fernando Urrea
David Coll

Nivel II

Medallas de Oro

Luis Martínez

Medallas de Bronce

Andrea Abate
Yargen González
Santiago Flores

Olimpiada Centroamericana y del Caribe 2017

Juan Diego Guevara	Mención de Honor

Olimpiada Iberoamericana 2017

Amanda Vanegas	Plata
Laura Queipo	Bronce

Olimpiada Internacional (IMO) 2017

Wemp Pacheco	Bronce
Amanda Vanegas	Bronce
Laura Queipo	Mención de Honor
Iván Rodríguez	Mención de Honor

Olimpiada Juvenil de Matemáticas 2014

Comité Organizador Nacional

Rafael Sánchez Lamoneda (Presidente)
Laura Vielma Herrero (Coordinadora Nacional)
José Heber Nieto Said (Coordinador Académico)
Saturnino Fermín Reyes (Coordinador Administrativo)
Sophia Taylor, Estefanía Ordaz, Diego Peña,
Rubmary Rojas, Mauricio Marcano (Colaboradores)

Coordinadores Regionales

Prof. Luis Alberto Rodríguez (Anzoátegui)
Prof. Jesús Acosta (Aragua)
Prof. Mary Acosta (Bolívar)
Prof. José Alberto Infante (Capital)
Prof. Mirba Romero (Carabobo)
Prof. Addy Goitía (Falcón)
Prof. Carlos Lira (Guárico)
Prof. Víctor Carucí (Lara)
Prof. Olga Porras (Mérida)
Prof. Lisandro Alvarado (Miranda)
Prof. Yelenny Guanipa (Monagas)
Prof. Grace Rivero (Nueva Esparta)
Prof. Evelio Castillo (Portuguesa)
Prof. Luisa López (Sucre)
Prof. Jonathan Riveros (Táchira)
Prof. Johan Goyo (Yaracuy)
Prof. José Heber Nieto Said (Zulia)

Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas

ASOCIACIÓN MATEMÁTICA VENEZOLANA

ACADEMIA DE CIENCIAS FÍSICAS, MATEMÁTICAS Y NATURALES

Association Le Kangourou des Mathématiques Kangourou sans frontiéres

Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas
UCV. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Ofic. 331
Los Chaguaramos, Caracas 1020. Venezuela. Telefax: 212.6051512
email:asomatemat8@gmail.com. Página Web:www.acfiman.org