ASOCIACIÓN VENEZOLANA DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS

Olimpiadas de Matemática 2020

OLIMPÍADA JUVENIL DE MATEMÁTICAS 2020

Problemas y Soluciones
Pruebas Regionales y Final Nacional

José Herber Nieto Sad

Rafael Sánchez Lamoneda

Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas
ACM

Olimpiada Juvenil de Matemática

Prueba Regional 2020

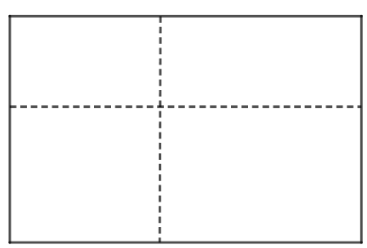
Problemas y Soluciones

1. Quinto Grado de Primaria

1. Para entrar a visitar un museo la maestra organizó a sus alumnos en grupos de tres. Claudia, Gabriela y Mónica observaron que ellas eran el séptimo trío contando desde el frente y el quinto contando desde el final. ¿Cuántos estudiantes había en total?

Ⓐ 24; Ⓑ 27; Ⓒ 30; Ⓓ 33; Ⓔ 36.

2. Un rectángulo de 24 cm de perímetro se divide mediante dos cortes rectilíneos y perpendiculares en cuatro rectángulos más pequeños. ¿Cuál es la suma de los perímetros de esos cuatro rectángulos?



Ⓐ 24 cm; Ⓑ 36 cm; Ⓒ 48 cm; Ⓓ 72 cm; Ⓔ 96 cm.

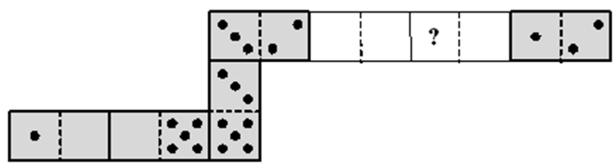
3. Pablo pensó un número, lo multiplicó por 3 y al resultado le sumó 4. El resultado lo dividió entre 8 y como resultado obtuvo 5. ¿Cuál fue el número pensado originalmente por Pablo?

Ⓐ 3; Ⓑ 5; Ⓒ 8; Ⓓ 12; Ⓔ Otro número.

4. Un cuadrado y un triángulo equilátero tienen un lado común. Si el área del cuadrado mide 49 cm^2, ¿cuánto mide el perímetro del triángulo?

Ⓐ 9 cm; Ⓑ 18 cm; Ⓒ 21 cm; Ⓓ 28 cm; Ⓔ 49 cm.

5. Juan colocó 7 fichas de dominó como se muestra en la figura. Los extremos en contacto de cada par de fichas contiguas tienen el mismo número de puntos. Inicialmente había en total 33 puntos en las fichas.



Pero la hermanita de Juan quitó dos fichas (las que se ven en blanco en la figura). ¿Cuántos puntos había en la posición marcada con el signo de interrogación?

6. Si se utilizaron 372 dígitos para mumerar todas las páginas de un libro, ¿cuántas páginas tiene el libro?

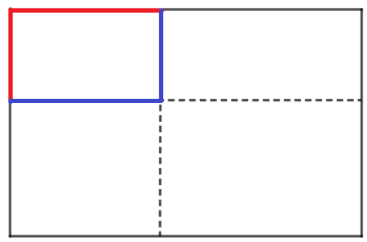
Nota: Las páginas de un libro se numeran consecutivamente a partir del 1. Algunas páginas, como la 7, requieren un solo dígito para numerarlas. Otras, como la 37, requieren dos dígitos. Y otras requieren más.

7. En una clase hay 10 alumnos, entre niñas y varones. La maestra reparte 41 caramelos entre las niñas. Cada niña recibe la misma cantidad de caramelos, y a la maestra le sobran 2 caramelos. ¿Cuántos varones hay en la clase?

Soluciones

1. Claudia, Gabriela y Mónica son el séptimo trío contando desde el frente, y debe haber cuatro tríos más para que ellas sean el quinto contando desde el final. Por lo tanto hay $7 + 4 = 11$ tríos, es decir $11 \times 3 = 33$ estudiantes (Opción D).

2. Cada uno de los cuatro rectángulos más pequeños tiene dos lados exteriores, en el borde del rectángulo grande, y dos interiores. La figura siguiente muestra los lados del rectángulo pequeño superior izquierdo, con sus lados exteriores en rojo y sus lados interiores en azul.

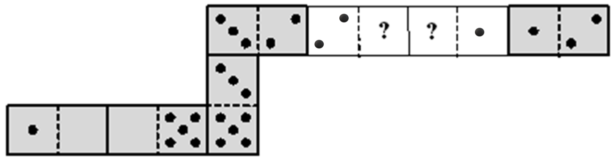


Es claro que si sumamos las longitudes de los lados exteriores de cada rectángulo pequeño obtendremos el perímetro del rectángulo grande, es decir 24 cm. Pero cada lado interior de un rectángulo pequeño es igual a su lado opuesto, que es exterior. Por lo tanto la suma de los dos lados interiores de cada rectángulo pequeño es igual a la suma de sus dos lados exteriores, y la suma de *todos* los lados interiores es igual a la suma de todos los lados exteriores, es decir 24 cm. Como la suma de los perímetros de los cuatro rectángulos pequeños es igual a la suma de todos sus lados, exteriores e interiores, esa suma debe ser 24 cm más 24 cm, es decir 48 cm (opción C).

3. Procedamos desde el final hacia el principio. Si Pablo dividió un número entre 8 y obtuvo 5 como resultado, el número que dividió era 40. Antes de sumar 4 para obtener 40 tenía 36. Y 36 es el resultado de multiplicar 12 por 3. Luego el número pensado por Pablo fue 12 (opción D). Verificación: $12 \times 3 = 36$, $36 + 4 = 40$, $40 \div 8 = 5$.

4. Si el área del cuadrado mide 49 cm^2, entonces su lado mide 7 cm (pues $7 \times 7 = 49$). Como el triángulo equilátero tiene un lado común con el cuadrado, el lado del triángulo equilátero también mide 7 cm, y su perímetro es $7 \times 3 = 21$ cm (opción C).

5. De las dos fichas que quitó la hermanita de Juan, observamos lo siguiente: (a) El extremo izquierdo de la ficha izquierda debe tener 2 puntos; (b) El extremo derecho de la ficha derecha debe tener un solo punto; (c) El extremo derecho de la ficha izquierda debe tener tantos puntos como el extremo izquierdo de la ficha derecha. La figura siguiente muestra lo que acabamos de decir. Observe que los dos signos de interrogación corresponden a la misma cantidad de puntos.



Si ahora contamos los puntos de todas las fichas obtenemos 25. Como inicialmente había en total 33 puntos, los 8 puntos que faltan corresponden a los dos signos de interrogación. Por lo tanto en cada signo de interrogación deben ir 4 puntos.

6. Para cada una de las primeras 9 páginas se necesita un solo dígito, lo que hace 9 dígitos para las páginas de la 1 a la 9. Cada una de las páginas de la 10 a la 99 requiere 2 dígitos, y como son 90 páginas esto hace $90 \times 2 = 180$ dígitos. Entonces de la página 1 a la 99 se utilizaron $9 + 180 = 189$ dígitos, y para llegar a 372 faltan $372 - 189 = 183$ dígitos. Cada página a partir de la 100 (y hasta la 999, si existiese) requiere 3 dígitos, y como $183 \div 3 = 61$, vemos que hay 61 páginas con números de 3 dígitos, que van de la 100 a la 160. Por lo tanto el libro tiene 160 páginas.

7. Si se divide 41 entre el número de niñas, se debe obtener 2 como resto. Pero si efectuamos las divisiones de 41 entre 1, 2, 3,..., 10 se obtienen los restos 0, 1, 2, 1, 1, 5, 6, 1, 5 y 1, respectivamente. El resto 2 se obtiene únicamente cuando se divide entre 3, luego el número de niñas es 3, y el de varones es $10 - 3 = 7$.

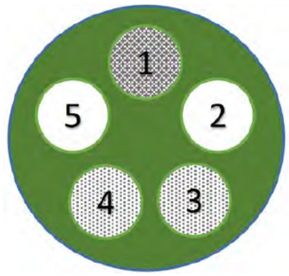
2. Sexto Grado de Primaria

1. Idéntico al Problema 2 de Quinto Grado.

2. Idéntico al Problema 3 de Quinto Grado.

3. Idéntico al Problema 4 de Quinto Grado.

4. El profesor Lisandro olvidó el código de cinco dígitos para abrir la puerta de su escuela. Los botones para marcar el código están etiquetados con los números 1, 2, 3, 4 y 5, como muestra la figura.



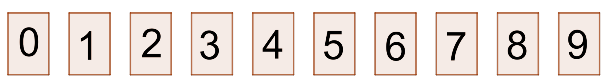
Lisandro puede ver que los botones 2 y 5 no se han usado y que los botones 3 y 4 han sido usados igual cantidad de veces, pero menos que el botón con el número 1. Además recordó que el código comienza por 1. ¿Cuál es la mayor cantidad de números diferentes de cinco cifras que tendría que comprobar Lisandro, para conseguir el código que le permita abrir la puerta?

Ⓐ 60; Ⓑ 40; Ⓒ 20; Ⓓ 12; Ⓔ 6.

5. Idéntico al Problema 5 de Quinto Grado.

6. Idéntico al Problema 7 de Quinto Grado.

7. Juan escribió los números desde el 0 hasta el 9 en 10 tarjetas y le dio tres tarjetas a Antonio, cuatro a Bruno y tres a Carlos.



Luego pidió a cada uno que calculase el producto de los números escritos en las tarjetas que recibió. Los resultados fueron: Antonio 0, Bruno 72 y Carlos 90. ¿Cuál es la suma de los números escritos en las tarjetas que recibió Antonio?

Soluciones

4. El código de cinco dígitos comienza por 1. Los 4 dígitos restantes solo pueden ser 1, 3 o 4. Como el 3 y el 4 deben aparecer el mismo número de veces, entonces aparecen una vez cada uno o dos veces cada uno. Pero la segunda alternativa no es posible, pues en ese caso los botones del 3 y el 4 estarían más gastados que el del 1. Por lo tanto entre los últimos 4 dígitos del código debe haber un 3, un 4 y dos unos. Ahora bien, para el 3 hay 4 posiciones posibles (la 2ª, la 3ª, la 4ª o la 5ª). Y una vez ubicado el 3, para el 4 nos quedan 3 posibilidades. Luego 3 y 4 se pueden ubicar de $4 \times 3 = 12$ maneras posibles, siendo los 3 dígitos restantes iguales a 1.

También es posible ver que son 12 códigos enunerándolos: 11134, 11143, 11314, 11341, 11413, 11431, 13114, 13141, 13411, 14113, 14131 y 14311. A Lisandro le basta probar con esos 12 códigos para abrir la puerta. Es posible que la puerta se abra con alguno de los primeros códigos ensayados, pero en el peor de los casos Lisandro tendrá que ensayar con 12 de ellos (opción D).

7. Como el producto de los números de Antonio es 0, Antonio debe haber recibido la tarjeta con el 0. Y como ni 72 ni 90 son divisibles entre 7, Antonio recibió también la tarjeta con el 7. Bruno no puede haber recibido el 8 porque entonces habría recibido a lo sumo 3 tarjetas: 8, 9 y 1. Y Carlos tampoco recibió el 8 pues 90 no es divisible entre 8. Luego el 8 lo recibió Antonio, sus tarjetas son 0, 7 y 8 y la suma de ellas es $0 + 7 + 8 = 15$.

3. Primer Año

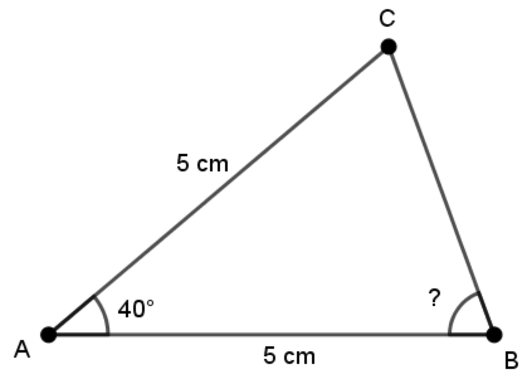
1. Un cuadrado y un pentágono regular tienen un lado común. Si el perímetro del pentágono mide 35 cm, ¿cuánto mide el área del cuadrado?

Ⓐ 28 cm^2; Ⓑ 35 cm^2; Ⓒ 49 cm^2; Ⓓ 140 cm^2; Ⓔ 1225 cm^2.

2. Una pelota de goma, al dejarla caer desde cierta altura sobre el piso, rebota hasta la mitad de esa altura. Si se deja caer desde una altura de 128 cm, ¿cuántos centímetros habrá recorrido la pelota al tocar el suelo por quinta vez, desde el momento en que se la dejó caer?

Ⓐ 248; Ⓑ 256; Ⓒ 324; Ⓓ 368; Ⓔ 640.

3. En el triángulo ABC se tiene que $AB = AC = 5cm$ y el ángulo $\angle BAC$ mide 40°.



¿Cuánto mide el ángulo $\angle ABC$?

Ⓐ 65°; Ⓑ 68°; Ⓒ 71°; Ⓓ 74°; Ⓔ Otro valor.

4. Jorge tiene cuatro cajas numeradas del 1 al 4 y cuatro pelotas numeradas del 1 al 4. Él desea colocar una pelota en cada caja, de modo que el número de cada pelota sea diferente al de la caja que la contiene. ¿De cuántas maneras diferentes puede hacerlo?

Ⓐ 6; Ⓑ 9; Ⓒ 12; Ⓓ 24; Ⓔ Otro valor.

5. Idéntico al Problema 7 de Sexto Grado.

6. Si se utilizaron 624 dígitos para mumerar todas las páginas de un libro, ¿cuántas páginas tiene el libro?

Nota: Las páginas de un libro se numeran consecutivamente a partir del 1. Algunas páginas, como la 7, requieren un solo dígito para numerarlas. Otras, como la 37, requieren dos dígitos. Y otras requieren más.

7. Un ladrón robó un saco de naranjas. Durante la huída, al saltar una valla perdió la mitad de las naranjas más media naranja. Luego, perseguido por un perro, abandonó la mitad de las naranjas que le quedaban menos media naranja. Luego tropezó y se le cayeron la mitad de las naranjas que le quedaban más media naranja. Si al final le quedaron dos docenas de naranjas, ¿cuántas naranjas contenía originalmente el saco?

Soluciones

1. Si el perímetro del pentágono regular es 35 cm, entonces su lado mide $35 \div 5 = 7$ cm. Como el cuadrado tiene un lado común con el pentágono, el lado del cuadrado mide 7 cm y su área es $7 \times 7 = 49$ cm^2 (opción C).

2. Desde que se deja caer la pelota hasta que toca el piso, recorre 128 cm. Entonces rebota hasta una altura de $128/2 = 64$ cm, y vuelve a caer 64 cm hasta tocar el piso. Luego sube 32 cm y desciende 32 cm, sube 16 cm y desciende 16 cm, sube 8 cm y desciende 8 cm, tocando el suelo por quinta vez. En total recorrió $128 + 64 + 64 + 32 + 32 + 16 + 16 + 8 + 8 = 368$ cm (opción D).

3. Como $AB = AC$ el triángulo ABC es isósceles, y por lo tanto $\angle ABC =$

$\angle ACB$. Y como los tres ángulos de un triángulo suman 180° se tiene $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180°$, es decir $2\angle ABC + 40° = 180°$, de donde $2\angle ABC = 140°$ y $\angle ABC = 70°$. Como ninguna de las primeras cuatro opciones es 70°, la opción correcta es la E (Otro valor).

4. Representemos cada distribución escribiendo los números de las pelotas que van a las cajas 1, 2, 3 y 4, en ese orden. Por ejemplo 4123 significa que la pelota 4 se puso en la caja 1, la pelota 1 se puso en la caja 2, la pelota 2 se puso en la caja 3 y la pelota 3 se puso en la caja 4. Entonces debemos contar las ordenaciones de los números 1, 2, 3 y 4 tales que el primero no sea 1, el segundo no sea 2, el tercero no sea 3 y el cuarto no sea 4. Las podemos escribir en orden creciente, poniendo en cada posición el número más pequeño que cumpla las condiciones. Así obtenemos 2143, 2341, 2413, 3142, 3412, 3421, 4123, 4312 y 4321. En total son 9 (opción B).

6. Para cada una de las primeras 9 páginas se necesita un solo dígito, lo que hace 9 dígitos. Cada una de las páginas de la 10 a la 99 requiere 2 dígitos, y como son 90 páginas esto hace $90 \times 2 = 180$ dígitos. Cada páginas de la 100 a la 200 requiere 3 dígitos, y como son 101 páginas esto hace $101 \times 3 = 303$ dígitos. O sea que para las primeras 200 páginas se utilizan $9 + 180 + 303 = 492$ dígitos. Nos quedan $624 - 492 = 132$ dígitos, que dan para $132 \div 3 = 44$ páginas, que serían de la 201 a la 244. Por lo tanto el libro tiene 244 páginas.

7. Procedamos desde el final hacia el principio. El ladrón terminó con 24 naranjas. Si antes de tropezar tenía x naranjas, luego de tropezar perdió $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2}$ naranjas, y le quedaron $x - \frac{x+1}{2} = \frac{x-1}{2}$. Como este número debe ser 24, se tiene que $x - 1 = 2 \times 24 = 48$ y $x = 49$. Análogamente, si antes del episodio del perro tenía y naranjas, luego perdió $\frac{y}{2} - \frac{1}{2} = \frac{y-1}{2}$ naranjas, y le quedaron $y - \frac{y-1}{2} = \frac{y+1}{2}$. Este número es 49, por lo tanto $y + 1 = 2 \times 49 = 98$ y $y = 97$. Y si antes de saltar la valla tenía z naranjas, entonces al saltar perdió $\frac{z+1}{2}$ y le quedaron $\frac{z-1}{2} = 97$, de donde $z-1 = 2\times 97 = 194$ y $z = 195$. Es decir que el saco contenía originalmente 195 naranjas.

Nota: El primer paso se puede hacer sin álgebra, por tanteo: el ladrón debía tener aproximadamente el doble de 24, o sea 48 naranjas. Pero con 48 no da, pues habría perdido 24 naranjas y media y le quedarían 23 y media. Pero si tenía 49 entonces perdió 24 y media más media, es decir 25 naranjas, y le quedaron 24. Del mismo modo se halla que antes del episodio del perro tenía 97 y al comienzo tenía 195.

4. Segundo Año

1. Idéntico al Problema 1 de Primer Año.

2. Idéntico al Problema 2 de Primer Año.

3. Idéntico al Problema 4 de Sexto Grado.

4. Idéntico al Problema 3 de Primer Año.

5. Idéntico al Problema 6 de Primer Año.

6. Idéntico al Problema 7 de Primer Año.

7. Sea $s(n)$ la suma de los dígitos de un entero positivo n, por ejemplo $s(374) = 3 + 7 + 4 = 14$. Halle el valor de

$$s(1) + s(2) + s(3) + \cdots + s(2019) + s(2020).$$

Soluciones

7. Como $s(0) = 0$, la suma $s(1) + s(2) + s(3) + \cdots + s(999)$ es igual a $s(0)+s(1)+s(2)+\cdots+s(999)$. Escribamos cada número del 0 al 100 con tres dígitos, agregando ceros iniciales si es necesario (por ejemplo 0 lo escribimos 000, 5 lo escribimos 005, 37 lo escribimos 037, etc., lo cual obviamente no afecta la suma de dígitos). Si observamos los dígitos de las unidades de los números del 0 al 999, vemos que son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y esta secuencia se repite 100 veces. Es decir que cada dígito del 0 al 9 aparece en las unidades la misma cantidad de veces, a saber 100. Lo mismo ocurre en la decenas, pues aparecen 10 ceros, luego 10 unos,..., 10 nueves y todo se vuelve a repetir 10 veces. Y en las centenas aparecen 100 ceros, luego 100 unos, 100 doses,..., 100 nueves. Es decir que

$$s(0)+s(1)+s(2)+\cdots+s(999)=3\cdot 100(0+1+2+\cdots+9)=300\cdot 45=13500.$$

La suma $s(1000)+s(1001)+s(1002)+\cdots+s(1999)$ difiere de la anterior en los 1000 unos que aparecen en las unidades de mil, luego

$$s(1000)+s(1001)+s(1002)+\cdots+s(1999)=13500+1000=14500.$$

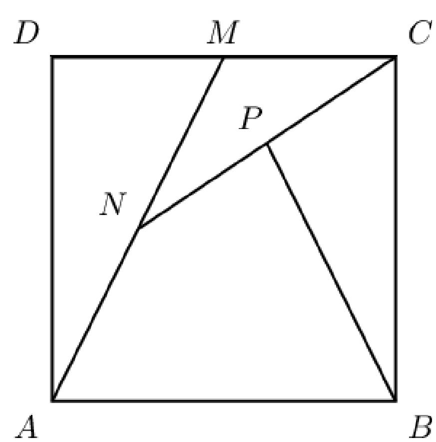
Finalmente nos queda por calcular $s(2000)+s(2001)+\cdots+s(2020)$, que se puede evaluar término a término o bien observando que el 2 aparece 21 veces en las unidades de mil, una vez en las decenas y dos veces en las unidades, sumando $24\cdot 2=48$; el 1 aparece 10 veces en las decenas y 2 veces en las unidades, sumando 12, y cada dígito del 3 al 9 aparece 2 veces en las unidades, sumando $2(3+4+5+6+7+8+9)=2\cdot 42=84$. Por lo tanto

$$s(1)+s(2)+\cdots+s(2020)=13500+14500+48+12+84=28144.$$

5. Tercer Año

1. Idéntico al Problema 2 de Primer Año.

2. $ABCD$ es un cuadrado de área 16 cm^2. Sean M el punto medio del segmento CD, N el punto medio del segmento AM y P el punto medio del segmento NC.



¿Cuál es el área del cuadrilátero $ANPB$?

Ⓐ 6 cm^2; Ⓑ 7 cm^2; Ⓒ 8 cm^2; Ⓓ 9 cm^2; Ⓔ 10 cm^2.

3. Un número se llama *favorito* si tiene exactamente cinco dígitos, los cuales solo pueden ser iguales a 1, 2, 3 o 4, y además cada par de dígitos vecinos son diferentes. Por ejemplo 12121 y 32414 son números *favoritos*, pero ni 32241 ni 35142 lo son. ¿Cuántos números *favoritos* hay?

Ⓐ 48; Ⓑ 128; Ⓒ 243; Ⓓ 324; Ⓔ otro valor.

4. Arturo tiene dos tarjetas. De cada lado de cada una de ellas está escrito un número diferente. Si las dos tarjetas se colocan sobre la mesa, la suma de los números en las caras visibles solo puede ser 36, 41, 50 o 55. Si las tarjetas se colocan sobre la mesa mostrando los números 25 y 30, ¿cuál es el producto de los dos números no visibles?

Ⓐ 275; Ⓑ 330; Ⓒ 550; Ⓓ 625; Ⓔ otro valor.

5. Un número entero positivo es *capicúa* si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda, como por ejemplo 42724. ¿Cuál es el menor número capicúa de cinco dígitos que es múltiplo de 9?

6. Si x e y son números reales tales que $2^x = \sqrt{3}$ y $9^y = 256$, ¿cuál es el valor del producto xy?

7. Juan tiene un libro con páginas numeradas del 1 al 100 . Su hermanita María arrancó algunas hojas consecutivas del libro. Si la suma de los números de las páginas arrancadas es 57, ¿cuántas hojas arrancó María?

Nota: Cada hoja tiene dos páginas impresas, una por cada lado. La primera hoja del libro tiene la página 1 por delante y la página 2 por detrás, la segunda hoja tiene la página 3 por delante y la página 4 por detrás, y así sucesivamente.

Soluciones

2. El lado del cuadrado $ABCD$ debe medir 4 cm. El área del triángulo ADM es $|ADM| = AD \cdot DM/2 = 4 \cdot 2/2 = 4$ cm^2. Como N es el punto medio de AM se tiene $|CMN| = \frac{1}{2}|CMA| = \frac{1}{2}(2 \cdot 4/2) = 2$ cm^2. Y $|BCP| = \frac{1}{2}|BCN| = \frac{1}{2}(4 \cdot 3/2) = 3$ cm^2. Finalmente

$$|ANPB| = |ABCD| - |ADM| - |CMN| - |BCP| = 16 - 4 - 2 - 3 = 7 \text{ cm}^2.$$

La opción correcta es la B.

3. El primer dígito de un número favorito se puede elegir de 4 maneras (1, 2, 3 o 4). Una vez elegido el primer dígito, el segundo se puede elegir de 3 maneras (pues debe ser diferente al primero). Análogamente el tercero, el cuarto y el quinto se pueden elegir de 3 maneras cada uno. Luego hay $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 324$ números favoritos (opción D).

4. Si el número al otro lado del 25 es x y el número al otro lado del 30 es y, entonces $x + y$, $25 + y$ y $30 + x$ son 36, 41 y 50 (en algún orden). Sumando resulta $(x+y)+(25+y)+(30+x) = 36+41+50$, es decir $55+2(x+y) = 127$, de donde $x + y = 36$. Por lo tanto $25 + y$ y $30 + x$ son 41 y 50, en algún orden. Si $25 + y = 50$ entonces $y = 25$ y se repetiría el 25. Luego debe ser $25 + y = 41$ y $30 + x = 50$, de donde $y = 16$, $x = 20$ y $xy = 320$. Como ninguna de las primeras cuatro opciones es 320, la opción correcta es la E (otro valor).

5. Los menores números capicúas de cinco dígitos son 10001, 10101, 10201, 10301, 10401, 10501, 10601, 10701, 10801 y 10901. De éstos, por el criterio de divisibilidad entre 9 se ve que el único que es múltiplo de 9 es el 10701 (ya que $1 + 0 + 7 + 0 + 1 = 9$). La respuesta es 10701.

6. Elevando a la cuarta potencia ambos miembros de $2^x = \sqrt{3}$ se obtiene $(2^x)^4 = (\sqrt{3})^4$, o sea $2^{4x} = 9$. Elevando ahora a la y se obtiene $(2^{4x})^y = 9^y$, de donde $2^{4xy} = 256$. Como $256 = 2^8$, resulta que $4xy = 8$ y $xy = 2$.

7. Supongamos que María arrancó k hojas y que el número de la primera página de la primera hoja arrancada es a. Observe que a debe ser impar. Entonces la última página arrancada es la $a+2k-1$, y la suma de los números de las páginas arrancadas es $(a+a+2k-1)(2k)/2 = (2a+2k-1)k$. De acuerdo con el enunciado este número es igual a 57, es decir que $(2a + 2k - 1)k = 57$ y k debe ser un divisor de 57, menor que 57 pues $2a + 2k - 1 \geq 3$. Como $57 = 3 \cdot 19$, k solo puede ser 1, 3 o 19. Si $k = 1$ entonces $2a + 2 - 1 = 57$, de donde $a = 28$, lo cual es imposible pues a es impar. Si $k = 19$ entonces $(2a + 2 \cdot 19 - 1) \cdot 19 = 57$, de donde $2a + 37 = 3$ y a sería negativo, lo que también es imposible. La única posibilidad que queda es $k = 3$. Entonces $(2a + 2 \cdot 3 - 1) \cdot 3 = 57$, de donde $2a + 5 = 19$ y $a = 7$. En conclusión María arrancó 3 hojas, y los números de páginas en ellas son 7, 8, 9, 10, 11 y 12, que efectivamente suman 57, verificando así la condición.

6. Cuarto Año

1. Idéntico al Problema 2 de Tercer Año.

2. La proposición

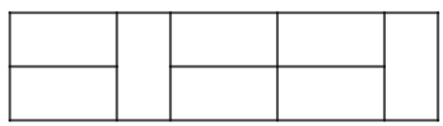
“Si p es un número primo, entonces 24 divide a $p^2 - 1$”

es verdadera:

Ⓐ Nunca; Ⓑ Siempre; Ⓒ Solo si $p = 7$; Ⓓ Solo si $p \geq 5$; Ⓔ Solo si $p < 10$.

3. ¿De cuántas maneras se puede cubrir un rectángulo de 2×8 con 8 dominós de 2×1?

La figura muestra una de las formas de hacerlo:



Ⓐ 8; Ⓑ 16; Ⓒ 24; Ⓓ 34; Ⓔ otro valor.

4. Idéntico al Problema 6 de Tercer Año.

5. ¿Cuál es el menor valor entero de k, tal que la ecuación $2x^2 + 3x + k = 0$ no tiene raíces reales?

6. Sea ABC un triángulo rectángulo en B. Sea D un punto en la hipotenusa AC tal que $AD = 9$ cm y $DC = 16$ cm. Si BD es perpendicular a AC, ¿cuál es el área, en cm^2, del triángulo ABC?

7. Sea f una función definida sobre el conjunto de los números enteros tal que $f(n+1) = 2f(n) + 1$ para todo número entero n. Si $f(3) = 75$, ¿cuál es el valor de $f(6) - f(1)$?

Soluciones

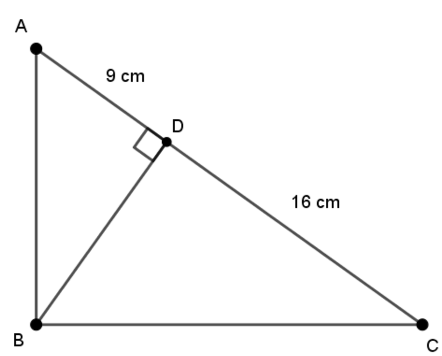
2. Si $p = 2$ la proposición no es cierta pues $2^2 - 1 = 3$ no es divisible entre 24. Si $p = 3$ la proposición no es cierta pues $3^2 - 1 = 8$ no es divisible entre 24. Si $p \geq 5$ entonces p es impar y entonces $p - 1$ y $p + 1$ son dos enteros pares consecutivos, por lo tanto uno de ellos es divisible entre 4 y su producto

$(p-1)(p+1) = p^2 - 1$ es divisible entre 8. Además uno de los tres enteros consecutivos $p-1$, p y $p+1$ debe ser divisible entre 3, pero no puede ser p pues el único primo divisible entre 3 es el mismo 3. Luego $p-1$ o $p+1$ es divisible entre 3. Se sigue que $(p-1)(p+1) = p^2 - 1$ es divisible entre 3, y como también es divisible entre 8, debe ser divisible entre 24. Es decir que la proposición es cierta solo si $p \geq 5$ (opción D).

3. Sea c_n el número de maneras diferentes de cubrir un rectángulo de $2 \times n$ con n dominós de 2×1. Es claro que $c_1 = 1$, y $c_2 = 2$ pues el cuadrado de 2×2 se puede cubrir con dos dominós colocados horizontalmente o con dos colocados verticalmente. Si $n > 2$, cuadriculemos el rectángulo de $2 \times n$ como un tablero con casillas cuadradas de lado 1. Observemos que los dos cuadraditos del extremo derecho se pueden cubrir con un dominó vertical, quedando por cubrir un rectángulo de $2 \times (n-1)$, que se puede cubrir de c_{n-1} maneras. Pero también se pueden cubrir con dos dominós colocados horizontalmente, quedando por cubrir un rectángulo de $2 \times (n-2)$, que se puede cubrir de c_{n-2} maneras. Por lo tanto $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$. Esta relación permite calcular sucesivamente c_3, c_4, etc. En efecto, $c_3 = c_2 + c_1 = 2 + 1 = 3$, $c_4 = c_3 + c_2 = 3 + 2 = 5$, $c_5 = c_4 + c_3 = 5 + 3 = 8$, $c_6 = c_5 + c_4 = 8 + 5 = 13$, $c_7 = c_6 + c_5 = 13 + 8 = 21$, $c_8 = c_7 + c_6 = 21 + 13 = 34$. Por lo tanto el rectángulo de 2×8 se puede cubrir de 34 maneras (opción D).

5. La ecuación $2x^2 + 3x + k = 0$ no tiene raíces reales si y solo si su discriminante $D = 3^2 - 4 \cdot 2k = 9 - 8k$ es negativo. Pero $D < 0$ si y solo si $k > 9/8$ y el menor k tal que $k > 9/8$ es $k = 2$. La respuesta es 2.

6. Los triángulos ADB y BDC son semejantes, ya que ambos son rectángulos y $\angle ABD = 90° - \angle BAD = \angle BCD$.



Por lo tanto $\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{DC}$, o sea $\frac{9}{BD} = \frac{BD}{16}$, de donde $BD^2 = 9 \cdot 16$ y $BD = 3 \cdot 4 = 12$. Luego el área, en cm^2, del triángulo ABC es

$$\frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{(9+16) \cdot 12}{2} = 150.$$

7. Por un lado $f(4) = 2f(3) + 1 = 2 \cdot 75 + 1 = 151$, $f(5) = 2f(4) + 1 = 303$ y $f(6) = 2f(5) + 1 = 607$. Por otra parte de $f(n+1) = 2f(n) + 1$ se obtiene $f(n) = (f(n+1) - 1)/2$, por lo tanto $f(2) = (75-1)/2 = 37$ y $f(1) = (37-1)/2 = 18$. Finalmente $f(6) - f(1) = 607 - 18 = 589$.

Solución alternativa: Si $f(1) = a$ entonces $f(2) = 2f(1) + 1 = 2a + 1$ y $f(3) = 2f(2) + 1 = 4a + 3$. Como $f(3) = 75$ resulta $4a + 3 = 75$, de donde $4a = 72$ y $a = 18$. Luego $f(4) = 2f(3) + 1 = 151$, $f(5) = 2f(4) + 1 = 303$, $f(6) = 2f(5) + 1 = 607$. Finalmente $f(6) - f(1) = 607 - 18 = 589$.

7. Quinto Año

1. Idéntico al Problema 2 de Tercer Año.

2. Idéntico al Problema 2 de Cuarto Año.

3. Idéntico al Problema 3 de Cuarto Año.

4. Idéntico al Problema 4 de Cuarto Año.

5. ¿Cuál es el menor valor entero de k, tal que la ecuación $2x^2 + 7x + k = 0$ no tiene raíces reales?

6. Idéntico al Problema 6 de Cuarto Año.

7. Sea f una función definida sobre el conjunto de los números enteros tal que $f(n+1) = 2f(n) + 1$ para todo número entero n. Si $f(4) = 111$, ¿cuál es el valor de $f(1) + f(8)$?

Soluciones

5. La ecuación $2x^2 + 7x + k = 0$ no tiene raíces reales si y solo si su discriminante $D = 7^2 - 4 \cdot 2k = 49 - 8k$ es negativo. Pero $D < 0$ si y solo si $k > 49/8$ y el menor k tal que $k > 49/8$ es $k = 7$. La respuesta es 7.

7. Por un lado $f(5) = 2f(4) + 1 = 223$, $f(6) = 447$, $f(7) = 895$ y $f(8) = 1791$. Por otra parte de $f(n+1) = 2f(n)+1$ se obtiene $f(n) = (f(n+1)-1)/2$, por lo tanto $f(3) = 55$, $f(2) = 27$, $f(1) = 13$ y $f(1) + f(8) = 1804$.

También se puede resolver mediante un procedimiento análogo al de la solución alternativa dada para el Problema 7 de Cuarto Año.

Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas
ACM

Olimpiada Juvenil de Matemática

Prueba Final Nacional 2020

Problemas y Soluciones

Problema 1 de 5° grado

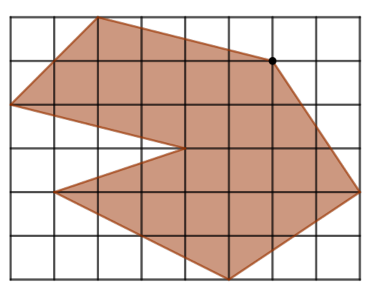
. En la suma que se ve a la derecha las letras A, B y C representan dígitos diferentes de cero. ¿Cuál es el valor de cada una de ellas?

$$\begin{array}{cr} & ABC \\ + & BCB \\ \hline & CB4 \end{array}$$

Solución: $A = 3$, $B = 5$, $C = 9$. En la segunda columna B y C suman B, pero como C no puede ser 0, debe ser $C = 9$, y debe haber acarreo (llevada) de la tercera columna a la segunda. Ahora para que $C + B$ termine en 4 debe ser $B = 5$. Y como de la segunda columna también hay acarreo, debe ser $A = 3$ para que se cumpla $1 + 3 + 5 = 9$.

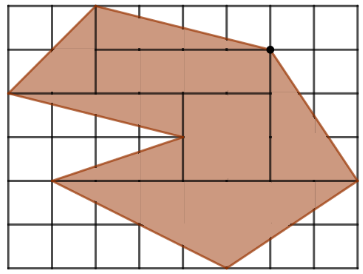
Problema 2 de 5° y 6° grados

Cada cuadrito de la cuadrícula mide 1 cm de lado.



¿Cuál es el área de la región sombreada?

Solución: La región sombreada se puede dividir en triángulos, rectángulos y un cuadrado como indica la figura siguiente:



La suma de las áreas de las partes es

$$= \frac{2\times 2}{2} + \frac{1\times 4}{2} + 1\times 4 + \frac{1\times 4}{2} + 2\times 2 + \frac{1\times 3}{2} + \frac{2\times 3}{2} + \frac{7\times 2}{2}$$
$$= 2 + 2 + 4 + 2 + 4 + \frac{3}{2} + 3 + 7 = 25,5.$$

La respuesta es 25,5 cm^2.

Nota: También se puede calcular primero el área del complemento y luego restarla del área del rectángulo.

Problema 3 de 5° y 6° grados y 2 de 1er y 2do años.

Escriba un número en cada casilla vacía de la tabla siguiente:

12							2020

de modo que cada número, a partir del tercero, sea la suma de los dos anteriores.

Solución: Hagamos un ensayo colocando como segundo número el 100. Entonces tendríamos 12, 100, 112, 212, 324, 536, 860, 1396. Esto muestra que debemos poner como segundo un número más grande. Ahora observemos que si incrementamos el segundo número en x, el tercero también se incrementa en x, el cuarto se incrementa en $2x$, el quinto en $3x$, el sexto en $5x$, el séptimo en $8x$ y el octavo en $13x$. Como $2020 - 1396 = 624$, si se divide esa diferencia entre 13 se tiene $624/13 = 48$ y por tanto incrementamdo 100 en 48 obtenemos lo que queremos: 12, 148, 160, 308, 468, 776, 1244, 2020. Si en el primer ensayo nos pasamos es similar, por ejemplo si como segundo número ponemos 200, tendremos 12, 200, 212, 412, 624, 1036, 1660, 2696. Nos pasamos por $2696 - 2020 = 676$, luego $676/13 = 52$ y restando 52 a 200 tenemos 148, como antes.

Problema 4 de 5° y 6° grados

En una caja hay 100 pelotas. Algunas son azules, otras amarillas y otras rojas. Se sabe que las amarillas son más que el doble de las azules; que tres veces las azules son más que 4 veces las rojas y que 3 veces las rojas son más que las amarillas. ¿Cuántas pelotas hay de cada color?

Solución: Representemos mediante a, m y r el número de pelotas azules, amarillas y rojas, respectivamente. Entonces $m > 2a$, $3a > 4r$, $3r > m$. Luego $a > 4r/3$ y $m > 2a > 8r/3$, de donde $100 - r = a + m > 12r/3 = 4r$, y $r < 20$. Pero también $m + a < 3r + 3r/2 = 9r/2$, $m + a + r < 11r/2$ y $r > 200/11$, $r > 18$. Luego $r = 19$. Como $a > 4r/3 = 76/3 > 25$, debe ser $a \geq 26$. Con $a = 26$ y $r = 19$ debe ser $m = 100 - 19 - 26 = 55$, y se cumplen todas las condiciones. Si $a \geq 27$ entonces $m > 2a \geq 54$, de donde $m \geq 55$ y $r + a + m$ se pasaría de 100. Luego la solución es $r = 19$, $a = 26$ y $m = 55$.

Problema 1 de 6° grado

En la siguiente multiplicación:

$$\begin{array}{rcccc}
 & & 1 & \mathrm{A} & \mathrm{B} \\
\times & & & 2 & \mathrm{C} \\
\hline
 & & \mathrm{D} & \mathrm{E} & \mathrm{C} \\
 & \mathrm{B} & 4 & \mathrm{E} & \\
\hline
 & 4 & \mathrm{B} & 2 & \mathrm{C}
\end{array}$$

cada letra representa un dígito. Letras iguales representan dígitos iguales, y letras diferentes representan dígitos diferentes. ¿Cuál es el valor de cada letra?

Solución: $A = 7$, $B = 3$, $C =$, $D = 8$ y $E = 6$. Como $1AB \times 2 = B4E$, B debe ser 2 o 3. Pero como el resultado es $4B2C$, debe ser $B = 3$. Y entonces de $1A3 \times 2 = 34E$ salen $E = 6$ y $A = 7$. Ahora como $173 \times C = D6C$, sale $C = 5$ y $D = 8$.

Problema 1 de 1er y 2do años.

Sea ABC un triángulo con $\angle BAC = 80°$. Los puntos D, E y F están en los lados BC, AC y AB, respectivamente. Si $CE = CD$ y $BF = BD$, calcule la medida de $\angle EDF$.

Solución: BDF y CDE son isósceles, luego $\angle BDF = \angle BFD$ y $\angle CDE =$

$\angle CED$. Entonces

$$\begin{aligned}
\angle EDF &= 180^\circ - \angle BDF - \angle CDE \\
&= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle BDF + \angle BFD) - \frac{1}{2}(\angle CDE + \angle CED) \\
&= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ABC) - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ACB) \\
&= \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC) \\
&= \frac{1}{2}(180^\circ - 80^\circ) = \frac{1}{2} \cdot 100^\circ = 50^\circ.
\end{aligned}$$

Problema 3 de 1er y 2do años.

3. En la pizarra están escritos varios números entre los cuales está el 2020. El promedio de todos los números escritos es 1051. Si el 2020 se borra de la pizarra, el promedio de los números que quedan baja a 1000. ¿Cuántos números había originalmente en la pizarra?

Solución: Si en la pizarra había n números y la suma de todos ellos es S, entonces $S/n = 1051$ y $S = 1051n$. Luego de quitar el 2020 la suma se reduce a $S-2020 = 1051n-2020$, y el promedio será $(1051n-2020)/(n-1) = 1000$. Luego $1051n - 2020 = 1000(n-1)$, de donde $51n = 1020$ y $n = 20$.

Problema 4 de 1er año.

Cada una de las cuatro amigas Ana, Berta, Claudia y Dora, o bien es *veraz* y siempre dice la verdad, o bien es *mentirosa*, y siempre miente. Una tarde se reunieron y Ana dijo "Las cuatro somos mentirosas", Berta dijo "Las cuatro somos veraces", Claudia dijo "Dos de nosotras somos veraces y las otras dos mentirosas" y Dora dijo "Solo una de nosotras es veraz". ¿Qué es cada una de ellas, veraz o mentirosa?

Solución: Si Ana fuese veraz no podría haber dicho lo que dijo, luego es mentirosa. Luego Berta también miente. Claudia y Dora no pueden ser ambas veraces, pues hacen afirmaciones contradictorias. Luego a lo sumo una es veraz, y Claudia es mentirosa. Y entonces Dora es veraz, pues de lo contrario todas serían mentirosas y Ana habría dicho la verdad. En conclusión, Ana, Berta y Claudia son mentirosas y Dora es veraz.

Problema 4 de 2do año.

Alberto, Bruno y Carlos juegan al ping-pong con el sistema "el que pierde sale", es decir que en cada juego participan dos de ellos y el tercero descansa, y en el juego siguiente el ganador se enfrenta al que descansó, mientras el perdedor descansa, y así sucesivamente. Cuando terminan de jugar comprueban que Alberto participó en 14 juegos, Bruno participó en 12 juegos y Carlos participó en 8 juegos. ¿Quién perdió el sexto juego?

Solución: Observemos que $14 + 12 + 8 = 34$, y que a esa suma cada juego contribuye en 2 unidades (pues participan dos jugadores). Luego hubo $34/2 = 17$ juegos. Alguien que haya participado en el primer juego, si pierde todos los juegos entonces descansa en el 2, juega en el 3, descansa en el 4, juega en el 5 y así sucesivamente, es decir que participa en los juegos 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 y 17, es decir en 9 juegos. Y si gana algunos juegos el número de participaciones aumenta. Luego Carlos no participó en el juego 1, y para completar 8 participaciones debe haber participado en los juegos 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 y 16, perdiendo en todos (pues si hubiese ganado alguno su número de participaciones habría sido al menos 9). Por lo tanto el que perdió el sexto juego (y todos los demás juegos pares) fue Carlos.

Problema 1 de 3er año.

La edad de José es 16 años más que la suma de las edades de Carlota y Rafael y el cuadrado de la edad de José es 1632 más que el cuadrado de la suma de las edades de Carlota y Rafael. Determine la suma de las edades de Carlota, José y Rafael.

Solución: $j = c + r + 16$, de donde $j - c - r = 16$ y $j^2 = (c + r)^2 + 1632$, de donde $j^2 - (c + r)^2 = 1632$ y $(j + c + r)(j - c - r) = 1632$. Por lo tanto $j + c + r = 1632/16 = 102$.

Solución alternativa: De $j = c + r + 16$ y $j^2 = (c + r)^2 + 1632$ se sigue $(c+r+16)^2 = (c+r)^2+1632$, de donde $(c+r)^2+32(c+r)+256 = (c+r)^2+1632$ y $2(c+r)+16 = 102$. Por lo tanto $j+c+r = c+r+16+c+r = 2(c+r)+16 = 102$.

Problema 2 de 3er año.

En el triángulo ABC se tiene $\angle BAC = 140°$. Sean D un punto en el lado AB y E un punto en el lado BC tales que $BD = DE = EA = AC$. Calcule la medida de $\angle ABC$.

Solución: Sea $\beta = \angle ABC$. Entonces $\angle ACB = 180° - \angle BAC - \beta = 40° - \beta$. Como BDE, DEA y EAC son isósceles se tiene que $\angle DEB = \beta$, $\angle EAD = \angle EDA = 2\beta$, $\angle EAC = 140° - 2\beta$, y sumando los ángulos del EAC se tiene que $140° - 2\beta + 2(40° - \beta) = 180°$, de donde $40° - 4\beta = 0°$ y $\beta = 10°$.

Problema 3 de 3er año y 1 de 4to año.

Halle el menor entero positivo n tal que la suma de los dígitos de n y la suma de los dígitos de $n+1$ sean, ambas, múltiplos de 7.

Solución: Sea $S(n)$ la suma de los dígitos de n. Si n no termina en 9, $S(n)$ y $S(n+1)$ difieren en 1 y no pueden ser ambos múltiplos de 7. Entonces n debe terminar en 9. Si n termina en k nueves entonces $S(n) - S(n+1) = 9k - 1$ y para que éste número sea múltiplo de 7 debe ser $k \equiv 4 \pmod{7}$. Es decir que k es el menos 4. Pongamos $n = a9999$ con $0 < a < 9$. Entonces $S(n) = a + 36$ que es múltiplo de 7 para $a = 6$. Por lo tanto la respuesta es 69999.

Solución alternativa: El valor $k = 4$ también se puede hallar probando sucesivamente con números terminados en 9, 99 y 999 y verificando que $S(n) - S(n+1)$ no es divisible entre 7. Se finaliza como antes probando para números terminados en 9999.

Problema 4 de 3er año y 2 de 4to y 5to años.

Usando solamente los dígitos 1, 2 y 3, ¿cuántos números de quince dígitos se pueden formar tales que cualquier par de dígitos vecinos difieran en 1? (un ejemplo de estos números es 212123232123212).

Solución: Si una secuencia comienza con 2, entonces en la segunda posición estará 1 o 3, en la tercera un 2, en la cuarta 1 o 3, y así sucesivamente. Es decir que en cada posición impar habrá un 2, y en cada una de las 7 posiciones pares (2, 4, 6, 8, 10, 12 y 14) un 1 o un 3. Por lo tanto hay $2^7 = 128$ de estas sucesiones. Si una secuencia comienza con 1, entonces en la segunda posición estará un 2, en la tercera 1 o 3, en la cuarta 2, y así sucesivamente. Es decir que en cada posición par habrá un 2, y en cada una de las 7 posiciones impares 3, 5, 7, 9, 11, 13 y 15 un 1 o un 3. Por lo tanto hay $2^7 = 128$ de estas sucesiones. El mismo razonamiento muestra que hay $2^7 = 128$ secuencias que comienzan con 3, y por lo tanto el total de secuencias buscado es $128 \times 3 = 384$.

Problema 3 de 4to y 5to años.

Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes enteros. Si $p(1)$ y $p(0)$ son impares, demuestre que $p(x) = 0$ no tiene soluciones enteras.

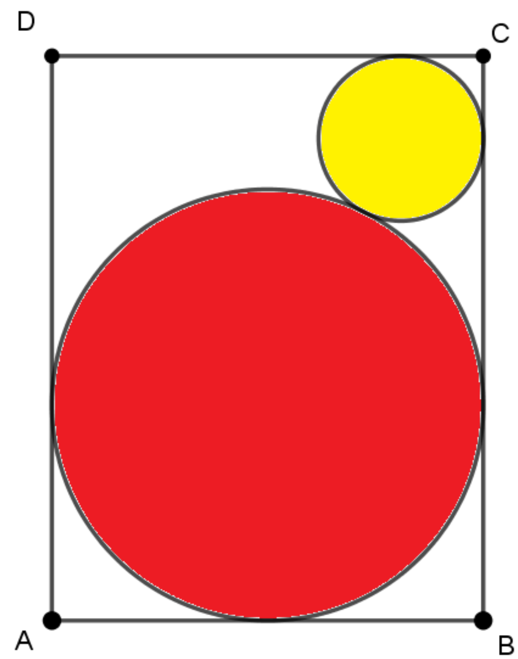
Solución: Supongamos por absurdo que $p(k) = 0$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Como $p(x) - p(1) = (x-1)q(x)$ para cierto $q \in \mathbb{Z}[x]$, se tiene que $-p(1) = p(k) - p(1) = (k-1)q(k)$, y como $p(1)$ es impar también debe ser impar $k-1$ y por lo tanto k es par. Pero $p(x) - p(0) = xt(x)$ para cierto $t \in \mathbb{Z}[x]$, luego $-p(0) = kt(k)$ y $p(0)$ sería par, una contradicción.

Solución alternativa 1: Pongamos $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$. Si $p(k) = 0$ para algún $k \in \mathbb{Z}$ entonces k divide a a_0, y como a_0 es impar, k debe ser impar y $k-1$ es par. Como $p(x) - p(1) = (x-1)q(x)$ para cierto $q \in \mathbb{Z}[x]$, se tiene que $-p(1) = p(k) - p(1) = (k-1)q(k)$ y entonces $k-1$ divide a $p(1)$. Por lo tanto $p(1)$ sería par, absurdo.

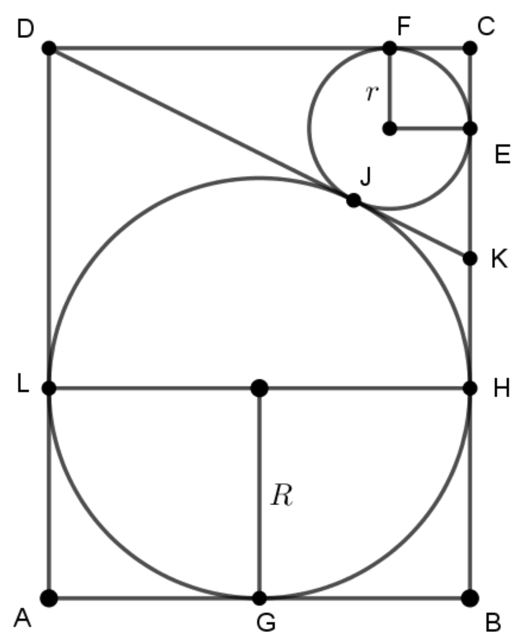
Solución alternativa 2: Se tiene que $p(1) \equiv p(0) \equiv 1 \pmod 2$. Supongamos por absurdo que $p(k) = 0$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Si k es par, entonces $k \equiv 0 \pmod 2$ y $0 = p(k) \equiv p(0) \pmod 2$, absurdo. Si en cambio k es impar, entonces $k \equiv 1 \pmod 2$ y $0 = p(k) \equiv p(1) \pmod 2$, absurdo.

Problema 4 de 4to y 5to años.

$ABCD$ es un rectángulo. El círculo rojo es tangente a los lados DA, AB y BC. El círculo amarillo es tangente al círculo rojo y a los lados BC y CD. La tangente común a ambos círculos en su punto de contacto pasa por D. Si el área del círculo amarillo es 1 cm^2, ¿cuál es el área del círculo rojo?



Solución: Sea R el radio del círculo rojo y r el radio del círculo amarillo.



Es claro que $DC = AB = 2R$ y $FC = r$, luego $DF = DC - FC = 2R - r$. Además $DF = DJ$ (segmentos de tangente desde D al círculo pequeño) y $DJ = DL$ (segmentos de tangente desde D al círculo grande). Luego $DL = 2R - r$ y $DA = DL + LA = 3R - r$. Análogamente $KE = KJ = KH$, y como $CH = CE + 2 \cdot EK = r + 2 \cdot EK = DL = 2R - r$, de donde $JK = EK = R - r$. Por lo tanto $CK = CE + EK = r + R - r = R$ y $DK = DJ + JK = 2R - r + R - r = 3R - 2r$. Ahora por Pitágoras en DCK se tiene $DK^2 = DC^2 + CK^2$, es decir $(3R - 2r)^2 = (4R)^2 + R^2$, $9R^2 - 12Rr + 4r^2 = 5R^2$, $4R^2 - 12Rr + 4r^2 = 0$, $R^2 - 3Rr + r^2 = 0$, $(R - \frac{3}{2}r)^2 - \frac{5}{4}r^2 = 0$, y resulta

$$R - \frac{3}{2}r = \frac{\sqrt{5}}{2}r,$$

de donde

$$R = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}r,$$

y por lo tanto el área del círculo rojo es

$$\pi R^2 = \pi \frac{(3 + \sqrt{5})^2}{4} r^2 = \frac{8 + 6\sqrt{5}}{4} = \frac{4 + 3\sqrt{5}}{2}.$$

Nota: En la prueba, por error, no se incluyó en el enunciado la condición sobre la tangente común. Por lo tanto el área del círculo rojo no podía determinarse. El problema se anuló, pero a los estudiantes que se dieron cuenta de que los datos eran insuficientes para determinar lo pedido se les otorgaron dos puntos.

Problema 1 de 5to año.

¿Para cuáles enteros positivos n el número $3^n + 4n - 1$ es un cuadrado perfecto?

Solución: $3^1 + 4 \cdot 1 - 1 = 6$ no es cuadrado perfecto, pero $3^2 + 4 \cdot 2 - 1 = 16 = 4^2$ sí lo es. Veamos que $3^n + 4n - 1$ no es cuadrado perfecto si $n > 2$.

Si $n = 2k + 1$ es impar entonces

$$3^n + 4n - 1 = 3 \cdot 9^k + 4(2k + 1) - 1 \equiv 3 \cdot 1 - 1 \equiv 2 \pmod{4}$$

no es cuadrado perfecto, pues éstos sólo pueden ser congruentes con 0 ó 1 módulo 4.

Si en cambio $n = 2k$ es par, entonces

$$3^n + 4n - 1 = 3^{2k} + 4(2k) - 1 = (3^k)^2 + 8k - 1 > (3^k)^2.$$

Pero por otra parte, para $k > 1$, se tiene

$$(3^k + 1)^2 = (3^k)^2 + 2 \cdot 3^k + 1 > (3^k)^2 + 8k - 1.$$

En efecto, para eso basta ver que $2 \cdot 3^k > 8k - 2$, lo cual se verifica para $k = 2$ (queda $18 > 16$) y con más razón para $k > 2$, pues al pasar de k a $k+1$ el miembro izquierdo se triplica (aumentando al menos en 36) mientras que el derecho sólo aumenta en 8. Entonces $(3^k)^2 < 3^n + 4n - 1 < (3^k + 1)^2$ y $3^n + 4n - 1$ no es cuadrado perfecto por estar comprendido entre dos cuadrados perfectos consecutivos.