05 - Rovnice a nerovnice s parametrem

Příklady:

Petáková: 21/1 a, b, d, 21/2, 3, 21/5 c, d, 21/6 a, d, 21/ 7 a, b, c, 21/8 a, 21/9, 10, 22/11, 15, 16, 17, 18, 19, 20 b, c.

Ve všech rovnicích a nerovnicích je x neznámá, není-li řečeno nic jiného

1) $\frac{b(x+2)-3(x-1)}{x+1} = 1$

2) $\frac{x}{5} - 1 = \frac{1-3x}{b+2}$

3) $x - \frac{2}{a^3} = \frac{1}{a^2}(4x+1)$

4) Pro které hodnoty parametrů má rovnice s neznámou x předepsaný kořen:
   $k(2x+3) = (k+2)(k+x), x \neq 0$

5) Určete všechny hodnoty parametru a, pro které má rovnice $\frac{a(x+2)-3(x-1)}{x+1} = 1$
   a) kladné řešení, b) záporné řešení, c) žádné řešení.

6) Najděte všechny hodnoty parametru c, pro které nemá soustava rovnic žádné řešení.
   $-4x + cy = 1 + c$
   $(6+c)x + 2y = 3 + c$

7) Najděte všechny hodnoty parametru a, pro které má soustava $(a+1)x - ay = 4$
   řešení splňující podmínku $x - y < 2$. $3x - 5y = a$

8) Určete parametr a tak, aby soustava měla oba kořeny kladné $x - y = 2$
   $ax + y = 4$

9) Určete parametr m tak, aby soustava měla řešení v daném kvadrantu $x + y = 2$,
   I. kvadrant $2x - 3y = m$

10) Pro které hodnoty parametru m má rovnice o neznámé x reálné kořeny?
    a) $mx^2 + 2x + m = 0$,
    b) $x^2 + mx + 9 = 0$.

11) Pro které hodnoty parametru t má daná rovnice reálné různé kořeny? $2tx^2 + tx + 1 = 0$.

12) Pro které hodnoty parametru m má daná kvadratická rovnice jeden kořen roven nule?
    Určete druhý kořen. $x^2 + 3x - 2m^2 + m + 3 = 0$

13) $p(x-1) \geq x - 2$

14) $p^2x + 4 > 16x + p$

15) $px^2 + (1-3p)x + 2p - 2 = 0$

16) $(x-p)(px-4) = 0$

17) $(x - \sqrt{p-1})(x+p) = 0$

18) $\frac{x+1}{x-p} = 2$

19) $|x| = \sqrt{p-1}$

20) $|x-1| = |p|$

21) $|x+1| = p$

22) $px - \frac{2}{p^2} = \frac{4x+1}{p}$

23) $x^2 + (p+2)x + p + 2 = 0$

24) $\frac{p^2 x}{x+2} = p - \frac{2}{x+2}$

25) $\sqrt{x^2+p} = x + p$

26) Přední kolo má obvod $\underline{m}$ decimetrů, zadní $\underline{n}$ decimetrů. Na jaké dráze vykoná přední kolo o 10 obrátek více, než zadní kolo?

27) V trojúhelníku o obvodu 30 cm je nejdelší strana o $\underline{d}$ cm delší než prostřední strana, která je také o $\underline{d}$ cm delší než nejkratší strana. Určete rozměry trojúhelníku a podmínky řešitelnosti úlohy.

28) $\frac{2x+a^2}{a+3} + \frac{2x-a^2}{a-3} = \frac{(a^2+4)x}{a^2-9}$

29) Je dána soustava dvou rovnic o neznámých x, y a s parametrem $\underline{m}$. Určete reálné $\underline{m}$ tak, aby soustava měla právě jedno řešení $y = (x-2)^2$

$$2x - y + m + 1 = 0$$

30) Pro které hodnoty parametru p má rovnice $8x^2 - 4x + 1 - p = 0$ (s neznámou x) dva různé reálné kořeny menší než 1?

31) Pro které hodnoty parametru a má rovnice $x^2 + (1 - a)x + 4 - a = 0$ (s neznámou x) dva různé reálné nenulové kořeny?

32) Pro které hodnoty parametru p má rovnice $5x^2 + x(4p - 10) + p^2 - p + 15 = 0$ (s neznámou x) dvojnásobný kořen?

33) Určete parametr p tak, aby rovnice $x^2 + px - 6 = 0$ (s neznámou x) měla jeden kořen o 5 větší než druhý.

34) Pro které hodnoty parametru a má rovnice $4x^2 - 8ax - 6a + 9 = 0$ (s neznámou x) jeden kořen třikrát větší než druhý?

35) Určete, kdy rovnice $x^2 + ax + a + 1 = 0$ s reálným parametrem a má dva imaginární kořeny.

36) Určete, pro která c soustava rovnic s parametrem c nemá žádné řešení: $x + 4y + c = 0$

$$y^2 + 3x + 4y - 8 = 0$$

37) Určete, pro která p má rovnice $4x^2 + 4px + p^2 - 4 = 0$ jeden kořen menší než -1 a druhý kořen větší než 0,5.

38) Řešte soustavu rovnic s neznámými x, y a parametrem $t \in R$: $x + y = 2$

$$x + ty = -2$$

Určete, pro která t je řešením jediná dvojice kladných čísel.

39) $\frac{(p-2x)^2}{x^2+1} \geq 4$

40) $b^2 + bx = 1 + \frac{b}{x}$

41) $(b^2 - 1)x + \frac{1}{x} - 2b = 0$

42) $\sqrt{bx} = x$

43) $\sqrt{2bx} = -2$

44) Rovnice $ax^2 + 9x + c = 0$ má kořeny 1 a 2. Určete koeficienty a, c.

45) $\frac{k^2(x-1)}{kx-2} = 2$

46) $2ax^2 + ax + 1 = 0$

47) $x^2 - ax + 1 > 0$

48) $\frac{2-a}{a} = \frac{2}{x-1}$

49) $\frac{5}{2x-a} - \frac{3}{4-ax} = 0$

50) $(ax - b)^2 + (a - bx)^2 + 4abx = 2(a^2 + b^2)$

51) Řešte v R^2 soustavu rovnic s parametry $a, b \in R$:

a) $ax - y = 2$

$x + y = b$

52) Řešte v R nerovnici s parametrem $a \in R^+$: $(a^2 - 2a)x > 2 - a$

53) Určete všechny hodnoty reálného parametru a, pro které má nerovnice $x^2 + (a + 1)x + 0{,}5(5a - 7) > 0$ řešení pro všechna reálná x.

54) $2 - c \geq |x - 3|$

55) $|\frac{x}{p} - 1| \leq 2$

56) Proveďte diskusi počtu kořenů rovnice $\frac{x}{x-b} + \frac{1}{x+b} = \frac{7}{b^2-x^2}$ o neznámé $x \in R$ v závislosti na parametr $b \in R$.

57) Řešte v R^2 soustavu rovnic s parametrem $v \in R$: $x + (v - 1)y = 1 \wedge (v + 1)x + 3y = -1$

58) $\frac{a}{x} - \frac{1}{ax} = 1 - \frac{1}{a}$

59) $\frac{2}{a(x-3)} + \frac{3}{(a-1)(x+1)} = \frac{x-5}{a(x+1)(x-3)}$

60) $a^2x - a = b^2x - b$

61) $a + 1 = \frac{x(a-b)}{a}$

62) $\frac{x+a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{x-b}{a} + \frac{a}{b}$

63) $\frac{x+a}{x+1} = b$

64) $\frac{x+b}{x-a} + \frac{x+a}{x-b} = 2$

65) $\sqrt{x - a} = 3 - a$

66) $\sqrt{x^2 + a^2} = x + a$

67) $x + \sqrt{x^2 - x} = a$

68) $x(x + 2a) = \frac{(a^2+x)^2}{a} - a$

69) $(a^2 - 1)x^2 + 2ax + 1 = 0$

70) $ax^2 + 6a^2x + a = 0$

71) Řešte v R^2 soustavu rovnic s parametrem $a \in R: ax + y = a^2 \wedge x + ay = a^3$

72) Řešte v R^2 soustavu rovnic s parametrem $a \in R: x - 4ay = 1 \wedge 2ax - 2y = 1$

73) Řešte v R^2 soustavu rovnic s parametry $a, b \in R: ax + by = a^2 + b^2 \wedge bx + ay = a^2 + b^2$

---

74) Pro všechny hodnoty proměnné x platí: $(x + m)(x - 2) = x^2 + bx + 8$. Který zápis bude po dosazení vypočtených hodnot b, m pravdivý? A) $b = m + 2$, B) $b < m$, C) $b - 2m = 0$, D) $b > 0$, E) $b = 2 - m$

75) Z předpisu vyjádřete proměnnou x pro všechny reálné hodnoty parametru a, kde $a \neq 0{,}5$: $x - 2a = 2ax$

76) Je dána rovnice s neznámou $x \in \mathcal{R}$ a parametrem $a \in \mathcal{R}$: $a^2 - 1 = \frac{a+1}{x-2}$. Přiřaďte ke každé z uvedených hodnot parametru a odpovídající řešení dané rovnice: $a = 1$; $a = -1$; $a \in \mathcal{R} - \{-1; 1\}$. A) $\emptyset$, B) jednoprvková množina, C) $\mathcal{R}$, D) $\mathcal{R} - \{-1; 1\}$, E) $\mathcal{R} - \{2\}$.

77) V kvadratické rovnici $x^2 - kx - 9 = 0$ s reálným koeficientem k je jedním z kořenů $x = -3$. Vypočtěte druhý kořen.

78) Přiřaďte ke každé parametrické rovnici s neznámou $x \in \mathcal{R}$ a libovolnou hodnotou parametru p z intervalu $(4; \infty)$ odpovídající řešení: $4 - x^2 = p$; $\frac{p-4}{x} = 8 - 2p$; $|x| = p - 4$. A) právě jedno řešení, B) právě dva různé reálné kořeny, C) $\mathcal{R} - \{0\}$, D) $\mathcal{R}$, E) $\emptyset$.

79) Je dána rovnice s neznámou $x \in \mathcal{R}$ a parametrem $b \in \mathcal{R}$: $\mathrm{x}^2 + \mathrm{bx} - 2\mathrm{b} = 0$. Rozhodněte o každém z následujících tvrzení, zda je pravdivé, či nikoli. 1. Pro $b = 0$ je řešením rovnice prázdná množina. 2. Pro $b = 10^{25}$ má rovnice dva různé reálné kořeny. 3. Pro $b = -10^{25}$ má rovnice dva různé reálné kořeny.

80) Je dána rovnice $x^2 + 2 = p + 6x$ s neznámou $x \in \mathcal{R}$ a parametrem $p \in \mathcal{R}$. Určete všechny hodnoty parametru p, pro něž má rovnice alespoň jeden reálný kořen.

81) Je dána rovnice $3x^2 - 6x = ax^2 - 1$ s neznámou $x \in \mathcal{R}$ a parametrem $a \in \mathcal{R}$. Určete všechny hodnoty parametru a, pro něž má rovnice právě jedno řešení.

05 - Rovnice a nerovnice s parametrem

1) $b = 4$ nebo $b = -6$ nemá řešení, pro $b \neq 4$ a $b \neq -6$ je $x = \frac{2(b+1)}{4-b}$

2) $b = -2$ nemá smysl, $b = -17$ nemá řešení, ostatní $x = \frac{15+5b}{b+17}$

3) $a = 0$ nemá smysl, $a = 2$ nemá řešení, $a = -2$ nekonečně mnoho řešení, ostatní $x = \frac{1}{a(a-2)}$

4) $k \neq 0, 1, 2$

5) a) $-1 < a < 4$, b) $(-\infty, -6) \cup (-6, -1) \cup (4, \infty)$, c) $a = 4$, $a = -6$

6) $c = -4$

7) $(-\infty, -\frac{5}{2}) \cup (-\frac{2}{3}, \infty)$

8) $(-1, 2)$ 9) $\langle -6; 4 \rangle$ 10) a) $\langle -1; 1 \rangle$ b) $(-\infty, -6\rangle \cup \langle 6, \infty)$

11) $(-\infty, 0) \cup (8, \infty)$

12) $m = -1$ nebo $m = 3/2$, $x = -3$

13) $p = 1$ reálná čísla, $p < 1$ $\left(-\infty, \frac{p-2}{p-1}\right\rangle$, $p > 1 \left\langle \frac{p-2}{p-1}, \infty\right)$]

14) $p = 4$ $\emptyset$, $p = -4$ R, $p > 4$ nebo $p < -4$ $(\frac{1}{p+4}, \infty)$, ost. $(-\infty, \frac{1}{p+4})$

15) $p = 0\ x = 2, p = -1\ x = 2,\ ost.\ x = 2, x = \frac{p-1}{p}$

16) $p = 0\ x = 0, p = 2\ x = 2, p = -2\ x = -2, ost.\ x = p, x = \frac{4}{p}$

17) $p \in (-\infty; 1)\ \emptyset, ost.\ x = -p, x = \sqrt{p-1}$

18) $p = -1\ \emptyset, ost.\ x = 1 + 2p$

19) $p = 1\ x = 0, p > 1\ x = -\sqrt{p-1}, x = \sqrt{p-1}$

20) $p = 0\ x = 1, ost.\ x = 1 + p, x = 1 - p$

21) $p \in (-\infty; 0)\ \emptyset, p = 0\ x = -1, ost.\ x = p - 1, x = -p - 1$

22) $p = 0\ NS, p = 2\ \emptyset, p = -2\ \mathcal{R}, ost. \frac{1}{p(p-2)}$

23) $p = 2\ x = -2, p = -2\ x = 0, p \in (-2; 2)\ \emptyset, ost. \frac{-p-2\pm\sqrt{p^2-4}}{2}$

24) $p = 0\ \emptyset, p = 1\ \mathcal{R} - \{2\}, p = -1\ \emptyset, ost.\ x = \frac{2}{p}$

25) $p = 0\ x \in \langle 0; \infty), p \in (-\infty; -1)\ \emptyset, ost.\ x = \frac{1-p}{2}$

26) $\frac{10mn}{n-m}$; 27) $10, 10 + d, 10 - d, d < 5$

28) $a = \pm 3\ NS, a = 2\ \emptyset, ost. \frac{-6a^2}{(a-2)^2}$

29) $m = -6$; 30) $p \in (0{,}5; 5)$; 31) $a \in (-\infty; -5) \cup (3; 4) \cup (4; \infty)$

32) -10; -5; 33) ± 1; 34) -3; 1

35) $a \in \left(2 - 2\sqrt{2}; 2 + 2\sqrt{2}\right)$; 36) $c \in (-\infty; -8)$; 37) $p \in (0; 1)$

38) $t \in (-\infty; -1)$

39) $p = 0\ \emptyset, p \in (0; \infty)\ x \in \left(-\infty; \frac{p^2-4}{4p}\right\rangle, p \in (-\infty; 0)\ x \in \left\langle \frac{p^2-4}{4p}; \infty\right)$

40) $b = 0\ \emptyset, ost.\ x = -b, x = \frac{1}{b}$

41) $b = 1\ x = 0{,}5, b = -1\ x = -0{,}5, ost.\ x = \frac{1}{b-1}, x = \frac{1}{b+1}$

42) $b \leq 0\ x = 0, b > 0\ x = 0, x = b$;

43) $b \geq 0\ x = 0, b < 0\ x = 0, x = \frac{b}{2}$

44) $a = -3, c = -6;$

45) $k = 0\ \emptyset, k = 2\ \mathcal{R} - \{1\}, ost. \frac{k+2}{k}$

46) $a = 8\ x = -0{,}25, a \in \langle 0; 8)\ \emptyset, ost. \frac{-a \pm \sqrt{a^2-8a}}{4a}$

47) $a = 2\ \mathcal{R} - \{1\}, a = -2\ \mathcal{R} - \{-1\}, a \in (-2; 2)\ \mathcal{R}, ost. \left(-\infty; \frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right) \cup \left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}; \infty\right)$

48) $a = 0\ NS, a = 2\ \emptyset, ost.\ x = \frac{a+2}{2-a}$

49) $a = -1{,}2\ \emptyset, a = \pm 2\sqrt{2}\ \emptyset, ost. \frac{20+3a}{5a+6}$

50) $a = 0 \wedge b = 0\ \mathcal{R}, a \neq 0 \vee b \neq 0\ x = -1, x = 1$

51) $a = -1, b = -2\ \mathcal{R}; a = -1, b \neq -2\ \emptyset; a \neq -1\ x = \frac{b+2}{a+1}$

52) $a = 2\ \emptyset, a \in (0; 2)\ x \in \left(-\infty; -\frac{1}{a}\right), a \in (2, \infty)\ x \in \left(-\frac{1}{a}; \infty\right)$

53) $a \in (3; 5)$

54) $c < 2\ x \in \langle c+1; 5-c \rangle, c = 2\ x = 3, c > 2\ \emptyset$

55) $p = 0\ NS, p > 0\ x \in \langle -p; 3p \rangle, p < 0\ x \in \langle 3p; -p \rangle$

56) $b = 3\ x = -2, b = -9\ x = 4, b = 3{,}5\ x = -1, b \in (-9; 3)\ \emptyset, ost. \frac{-b-1 \pm \sqrt{b^2+6b-27}}{2}$

57) $v = 2\ \emptyset, v = -2\ [t, 1+3t], t \in \mathcal{R}, ost. \left[\frac{1}{2-v}; \frac{1}{v-2}\right]$

58) $a = 0\ NS, a = 1\ \mathcal{R} - \{0\}, a = -1\ \emptyset, ost.\ x = \frac{1}{a+1}$

59) $a = 0{,}25\ \emptyset, a = -1\ \emptyset, a = 0\ NS, a = 1\ NS, ost.\ x = \frac{2a+7}{4a-1}$

60) $a = b\ R, a = -b \neq 0\ \emptyset, a \neq -b \neq 0\ x = \frac{1}{a+b}$

61) $a = 0\ NS, a = b = -1\ \mathcal{R}, a = -1, b \neq a\ \emptyset, a \neq b \neq 0, x = \frac{a(a+1)}{a-b}$

62) $a = 0 \vee b = 0\ NS, a = b \neq 0\ \mathcal{R}, a \neq b \neq 0\ x = 0$

63) $a = 1 \wedge b = 1\ \mathcal{R} - \{-1\}, a \neq 1 \wedge b = 1\ \emptyset, a = 1 \wedge b \neq 1\ \emptyset, a \neq 1 \wedge b \neq 1\ x = \frac{b-a}{1-b}$

64) $a = b = 0\ \mathcal{R} - \{0\}, a = b \neq 0\ \emptyset, a = -b \neq 0\ \mathcal{R} - \{\pm a, \pm b\}, a \neq -b \neq 0\ x = \frac{a+b}{2}$

65) $a > 3\ \emptyset, a \leq 3\ x = a^2 - 5a + 9$

66) $a = 0\ x \in \langle 0; \infty), a > 0\ x = 0, a < 0\ \emptyset$

67) $a \in \langle 0; 0{,}5) \cup \langle 1; \infty)\ x = \frac{a^2}{2a-1}, ost.\ \emptyset$

68) $a = 0\ NS, a = 1\ \mathcal{R}, a \in (-\infty; -1)\ \emptyset, ost.\ x = \pm a\sqrt{a+1}$

69) $a = 1\ x = -0{,}5, a = -1\ x = 0{,}5, ost.\ x = \frac{1}{1-a}, x = \frac{-1}{a+1}$

70) $a = 0\ \mathcal{R}, a = \frac{1}{3}\ x = -1, a = -\frac{1}{3}\ x = 1,\ x \in \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right)\ \emptyset,$

$$ost.\ x = -3a \pm \sqrt{9a^2 - 1}$$

71) $a = 1\ [t; 1-t], t \in \mathcal{R}, a = -1\ [s; 1+s], s \in \mathcal{R}, ost. [0; a^2]$

72) $a = 0{,}5\ [1+2t; t], t \in \mathcal{R}, a = -0{,}5\ \emptyset, ost. \left[\frac{1}{2a+1}; \frac{-1}{4a+2}\right]$

73) $a = -b \neq 0\ \emptyset, a = b = 0\ [r, s], r, s \in \mathcal{R}, a = b \neq 0 [t; 2b-t], t \in \mathcal{R},$

$$a \neq \pm b \neq 0\ \left[\frac{a^2+b^2}{a+b}; \frac{a^2+b^2}{a+b}\right]$$

74) B, 75) $x = \frac{2a}{1-2a}$ 76) A, E, B 77) 3 78) E, A, B

79) NE, ANO, ANO 80) $p \in \langle -7; \infty)$ 81) -6; 3