1. (15 bodů) Náhodná veličina X má rozdělení pravděpodobnosti dané distribuční funkcí:

$$F_X(x) \;=\; \begin{cases} 0\,, & \text{pokud } \; x \in (-\infty, -1)\,, \\ 0.2\,, & \text{pokud } \; x \in \langle -1, 0)\,, \\ 0.3\,x + 0.4\,, & \text{pokud } \; x \in \langle 0, 1)\,, \\ 1\,, & \text{pokud } \; x \in \langle 1, \infty)\,. \end{cases}$$

Určete rozklad rozdělení na diskrétní a spojitou složku.

2. (15 bodů) Ve dvou topných sezónách jsme měřili spotřebu plynu na topení v m^3/měsíc:

sezóna	říjen	listopad	prosinec	leden	únor	březen	duben
2017/18	44	76	151	185	180	169	58
2018/19	49	66	141	180	190	159	43

Na hladině významnosti 5 % posuďte hypotézu, že spotřeba v obou letech byla stejná, a uveďte předpoklady.

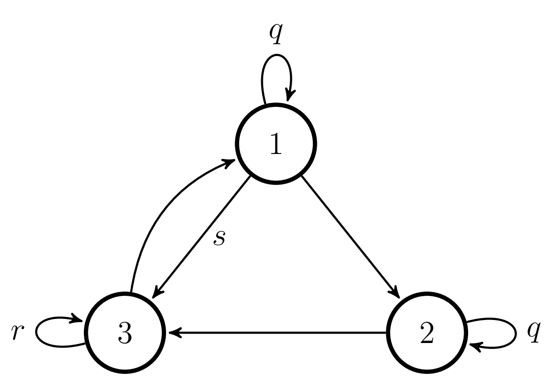
Řešení:

sezóna	říjen	listopad	prosinec	leden	únor	březen	duben
2017/18	44	76	151	185	180	169	58
2018/19	49	66	141	180	190	159	43
rozdíl $\varDelta$	-5	10	10	5	-10	10	15

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\delta}} &= 5\,, \\ s_{\boldsymbol{\delta}} &\doteq 9.129\,, \\ t &= \frac{\bar{\boldsymbol{\delta}}}{s_{\boldsymbol{\delta}}}\sqrt{7} \doteq 1.45\,. \end{aligned}$$

Porovnáme s $q_{\mathrm{t}(6)}(0.975) \doteq 2.45$ a nulovou hypotézu nezamítáme.

3. (15 bodů) Předpokládáme Markovův řetězec s parametry q, r, s dle obrázku.



Pozorovali jsme následující posloupnost stavů:
$(1, 2, 3, 3, 1, 3, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 1, 1, 1, 3, 1, 2, 3)$.

a) Metodou maximální věrohodnosti odhadněte všechny parametry. *(12 bodů)*

b) Posuďte, zda tento řetězec má nějaká stacionární rozdělení pravděpodobností; pokud ano, kolik jich je a zda řetězec k některému z nich konverguje. *(3 body)*

Řešení:

a)

$$\begin{aligned} L(q,r,s) &= q^5 \cdot (1-q-s)^3 \cdot (1-q)^3 \cdot s^2 \cdot r^2 \cdot (1-r)^4\,, \\ s &= \frac{2}{5}\,(1-q)\,, \\ q &= \frac{5}{13}\,, \\ s &= \frac{16}{65}\,, \\ r &= \frac{1}{3}\,. \end{aligned}$$

b) Řetězec je ergodický, konverguje k jedinému stacionárnímu rozdělení pravděpodobností.