1. (15 bodů)

$X \setminus Y$	-1	1	Σ
-1	a	b	e
1	c	d	$1/2$
Σ	f	$1/2$	

Jaké hodnoty by mohly mít koeficienty a, b, c, d, e, f v tabulce sdruženého rozdělení náhodných veličin X (svisle) a Y (vodorovně), aby měly následující korelace?

a) 0,
b) 1/2,
c) 1,
d) 3/2,
e) $-2/3$.

Řešení:
Vždy $e = f = 1/2$.

a) $a = b = c = d = 1/4$,
b) $a = d = 3/8$, $b = c = 1/8$,
c) $a = d = 1/2$, $b = c = 0$,
d) Nelze.
e) $a = d = 1/12$, $b = c = 5/12$,

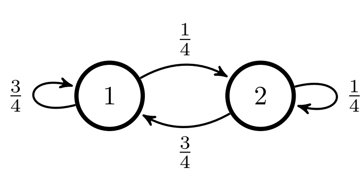
2. (15 bodů) Průměrná hmotnost v populaci je 80 kg se směrodatnou odchylkou 15 kg. Na každého připadají zavazadla s průměrnou hmotností 20 kg a směrodatnou odchylkou 5 kg. Letadlo pojme 100 cestujících. Jak musí být letadlo dimenzováno, aby při plném obsazení byla povolená celková hmotnost cestujících a zavazadel překročena s pravděpodobností nejvýše 0.001? Uveďte použité předpoklady a posuďte jejich adekvátnost.

Řešení:
Na jednoho cestujícího a jeho zavazadla připadá 100 kg s rozptylem 250 kg^2 a směrodatnou odchylkou $\sqrt{250} \doteq 15.81$ kg. (Sčítají se rozptyly, nikoli směrodatné odchylky.) Při použití centrální limitní věty má celková hmotnost rozdělení přibližně $\mathrm{N}(10\ 000, 25\ 000)$, s použitím kvantilu $\Phi^{-1}(0.999) \doteq 3.09$ dostáváme mez

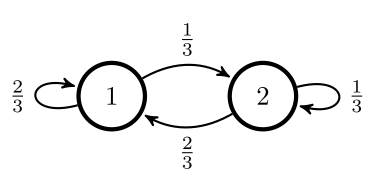
$$10\ 000 + 3.09\sqrt{25\ 000} \doteq 10\ 489 \text{ kg}\ .$$

Předpoklad existence rozptylu je oprávněný, ale nezávislost je problematická (může najednou cestovat družstvo zápasníků sumo apod.).

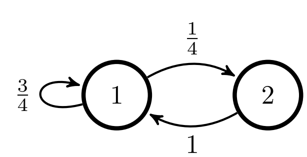
3. (15 bodů) Který z následujících tří Markovových řetězců mohl nejspíše vygenerovat pozorovanou posloupnost stavů
$(1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 1)$?



A



B



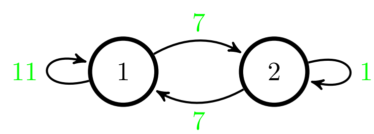
C

Pro řetězec B vyberte nejpravděpodobnější z následujících pokračování ze stavu 1:

a) $(2, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1)$,
b) $(2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2)$,
c) $(2, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1)$.

Řešení:

Četnosti přechodů:

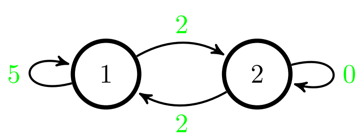


Řetězec C vylučujeme, nemůže dát stav 2 dvakrát za sebou. Pro zbývající dostáváme věrohodnosti

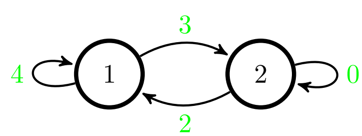
$$L_A = \left(\frac{3}{4}\right)^{18} \left(\frac{1}{4}\right)^{8} = \frac{3^{18}}{4^{26}} \doteq 8.6 \cdot 10^{-8}\,,$$
$$L_B = \left(\frac{2}{3}\right)^{18} \left(\frac{1}{3}\right)^{8} = \frac{2^{18}}{3^{26}} \doteq 1 \cdot 10^{-7}\,,$$

nejvěrohodnější je řetězec B.

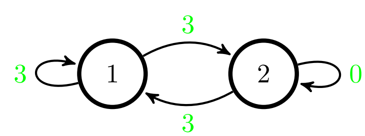
Četnosti přechodů pro jednotlivá pokračování:



1.



2.



3.

Pravděpodobnosti:

$$L_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{7} \left(\frac{1}{3}\right)^{2},$$
$$L_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{6} \left(\frac{1}{3}\right)^{3},$$
$$L_3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{6} \left(\frac{1}{3}\right)^{3},$$

nejpravděpodobnější je pokračování 1.

4. (5 bodů) Náhodné veličiny X, Y splňují nerovnost středních hodnot: $\mathrm{E}X \leq \mathrm{E}Y$. Je možné, aby medián X byl větší než medián Y? Svoji odpověď zdůvodněte (v případě kladné odpovědi nejlépe příkladem).

Řešení:

Možné to je, např.

$$p_X(1) = 1/3\,, \quad p_X(3) = 2/3\,, \qquad p_Y(2) = 2/3\,, \quad p_Y(4) = 1/3\,,$$
$$\mathrm{E}X = 7/3\,, \qquad \mathrm{E}Y = 8/3\,,$$
$$q_X(1/2) = 3\,, \qquad q_Y(1/2) = 2\,.$$