1. (15 bodů) Náhodný vektor (X, Y) má rozdělení dané následující tabulkou.

$Y \setminus X$	1	2	3
0	0.025	0.175	0.05
1	0.075	0.525	0.15

a) Určete marginální rozdělení pravděpodobnosti.

b) Určete střední hodnotu náhodného vektoru (X, Y).

c) Určete kovarianční matici náhodného vektoru (X, Y).

d) Jsou náhodné veličiny X, Y nezávislé? Zdůvodněte.

Řešení:

a)

t	1	2	3
$p_X(t)$	0.1	0.7	0.2

t	0	1
$p_Y(t)$	0.25	0.75

b) $(\mathrm{E}X, \mathrm{E}Y) = (2.1, 0.75)$.

c)

$$\Sigma_{X,Y} = \begin{pmatrix} \mathrm{D}X & \operatorname{cov}(X,Y) \\ \operatorname{cov}(X,Y) & \mathrm{D}Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.29 & 0 \\ 0 & 0.1875 \end{pmatrix}.$$

d) Jsou nezávislé.

2. (15 bodů) Výsledky dvou psychologických testů na stejném souboru 50 respondentů daly bodová hodnocení s realizacemi výběrových průměrů

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 60\,, \qquad \bar{\boldsymbol{y}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = 50$$

a výběrových směrodatných odchylek

$$s_{\boldsymbol{x}} = 11\,, \qquad s_{\boldsymbol{y}} = 15\,.$$

Dále jsme vypočítali

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i = 152\ 000\,.$$

Otestujte na hladině významnosti 5 %, zda výsledky těchto testů jsou nekorelované.

Řešení:

$$r_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_j\, y_j - \bar{\boldsymbol{x}}\,\bar{\boldsymbol{y}}}{s_{\boldsymbol{x}}\, s_{\boldsymbol{y}}} = \frac{50}{49} \cdot \frac{\frac{1}{50}\,152\ 000 - 60 \cdot 50}{11 \cdot 15} \doteq 0.247\,.$$

Hodnotu testovací statistiky

$$t = \frac{r_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}}} = \frac{0.247\sqrt{48}}{\sqrt{1-0.247^2}} \doteq 1.77\,.$$

porovnáme s kvantilem $q_{\mathrm{t}(48)}(0.975) \doteq 2.01$ a hypotézu, že veličiny jsou nekorelované, nezamítáme. Ke stejnému závěru bychom došli i při náhradě poměru $\frac{50}{49}$ jednotkou a použití kvantilu normálního rozdělení.

3. (15 bodů) Hráči házejí (regulérní) mincí; první hod provede rozhodčí, po něm Alice, pak Bob, dále se Alice a Bob pravidelně střídají, dokud jeden z nich nevyhraje. Alice vyhrává, pokud ona hodí líc a bezprostředně před tím padl také líc. Bob vyhrává, pokud on hodí rub. Rozhodněte, zda Alice i Bob mají v této hře stejnou šanci na výhru.

Řešení:

Můžeme rozlišit např. stavy

1 „vyhrála Alice“,

2 „vyhrál Bob“,

3 „házet bude Bob“,

4 „padl líc a házet bude Alice“,

5 „padl rub a házet bude Alice“,

6 „házet bude rozhodčí“.

Stav 6 se vyskytne pouze na začátku, místo toho můžeme za začátek řetězce považovat až situaci po prvním hodu, s počátečním rozdělením, v němž stavy 4 a 5 mají pravděpodobnost 1/2. I stav 5 se může vyskytnout pouze jednou na začátku.

Do absorpčních stavů 1, 2 se lze dostat z přechodných stavů 3, 4, příslušná část přechodového diagramu je symetrická. Na začátku se dostaneme do stavu 4 s pravděpodobností 1/2 (po jednom hodu) nebo do stavu 3 s pravděpodobností 1/2 (po dvou hodech). Hra je spravedlivá.