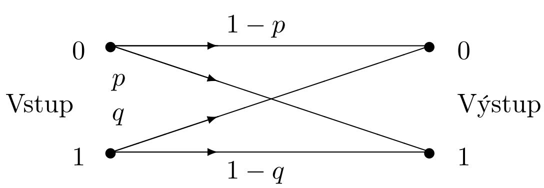
1. (15 bodů) Binárním informačním kanálem jsou zasílány symboly 0 a 1. Pravděpodobnost *vstupní* hodnoty pro symbol 0 je 0.6 a zjištěná pravděpodobnost *výstupní* hodnoty pro symbol 0 je 0.62.

   Pravděpodobnost, že vstupní symbol 0 bude chybně detekován jako 1, je $p = 0.2$.

   a) Jaká je pravděpodobnost q chybné detekce vstupního symbolu 1?

   b) Jaká je podmíněná pravděpodobnost, že byl vyslán symbol 0, jestliže byl symbol 0 detekován na výstupu?



Řešení:

Označme si jevy

$A_i =$ „vyslán znak i“,

$B_j =$ „přijat znak j“.

$$\left[P(B_0), \quad P(B_1)\right] = \left[P(A_0), \quad P(A_1)\right] \cdot \begin{bmatrix} P(B_0|A_0) & P(B_1|A_0) \\ P(B_0|A_1) & P(B_1|A_1) \end{bmatrix},$$

$$\left[P(A_0), \quad P(A_1)\right] = [0.6, \ 0.4],$$

$$\left[P(B_0), \quad P(B_1)\right] = [0.62, \ 0.38],$$

$$P(B_0|A_0) = 1 - p = 0.8, \qquad P(B_1|A_1) = 1 - q.$$

a)

$$\left[0.62, \quad 0.38\right] = \left[0.6, \quad 0.4\right] \cdot \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ q & 1-q \end{bmatrix},$$

$$0.62 = 0.6 \cdot 0.8 + 0.4 \cdot q,$$

$$q = (0.62 - 0.48)/0.4.$$

$$q = 0.35.$$

b) Z Bayesovy věty máme

$$P(A_0|B_0) = \frac{P(B_0|A_0) \cdot P(A_0)}{P(B_0)} = \frac{0.8 \cdot 0.6}{0.62} \doteq 0.774.$$

(Zde jsme vůbec nepotřebovali znalost parametru q.)

2. (15 bodů) Daný výrobek vyrábí dva různí výrobci. Tabulka zaznamenává volbu zákazníků v závislosti na výběru výrobce a jejich pohlaví:

	1. výrobce	2. výrobce
muži	40	10
ženy	20	30

   a) Otestujte na hladině 5 %, že zákazník volí výrobce nezávisle na tom, jestli je to muž, nebo žena.

   b) Otestujte na hladině 1 %, že při nákupu volí zákazník oba výrobce se stejnou pravděpodobností.

Řešení:

(a) Naměřené četnosti:

	1. výrobce	2. výrobce	$\sum$
muži	40	10	50
ženy	20	30	50
$\sum$	60	40	100

Teoretické četnosti:

	1. výrobce	2. výrobce	$\sum$
muži	30	20	50
ženy	30	20	50
$\sum$	60	40	

Hodnota statistiky: $t = \frac{(40-30)^2}{30} + \frac{(20-30)^2}{30} + \frac{(10-20)^2}{20} + \frac{(30-20)^2}{20} = \frac{20}{3} + 10 \doteq 16.7 > q_{\chi^2(1)}(0.95) \doteq 3.84\,,$
Zamítáme.

(b)

	1. výrobce	2. výrobce
empirické četnosti	60	40
teoretické četnosti	50	50

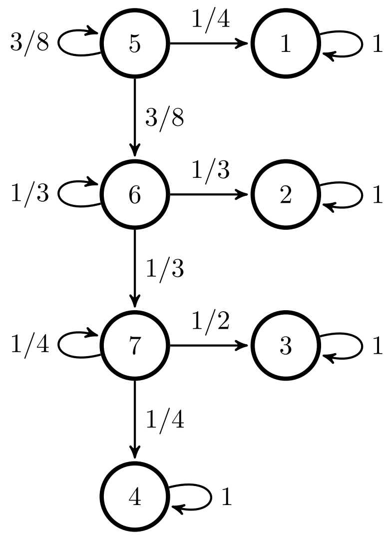
Hodnota statistiky: $t = \frac{(60-50)^2}{50} + \frac{(40-50)^2}{50} = 4 < q_{\chi^2(1)}(0.99) \doteq 6.63\,.$

Nezamítáme.

3. (15 bodů) Alice, Bob a Cyril se strefují míčem do koše. Kdo se první strefí, vyhrává. Po každém neúspěšném hodu hráč hodí mincí a padne-li líc, hází na koš znovu. Jakmile padne rub, přijde na řadu další hráč za stejných podmínek (jeden hod zaručený, další hody, dokud mu padá líc). Začíná Alice; pokud neuspěje, hází Bob; v případě jeho neúspěchu Cyril; pokud tomu padne rub, hra končí nerozhodně. Alice se strefí s pravděpodobností 1/4, Bob s pravděpodobností 1/3, Cyril s pravděpodobností 1/2. Jaká je pravděpodobnost výsledků hry?

Řešení:

Absorpční stavy:
1 vyhrává Alice,
2 vyhrává Bob,
3 vyhrává Cyril,
4 nerozhodně;
přechodné stavy:
5 hází Alice,
6 hází Bob,
7 hází Cyril.



Matice přechodu, fundamentální matice a její použití:

$$\boldsymbol{P} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{D} & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{array}\right),$$

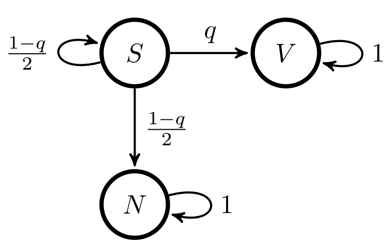
$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

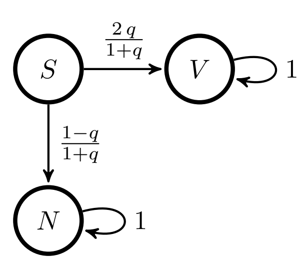
$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

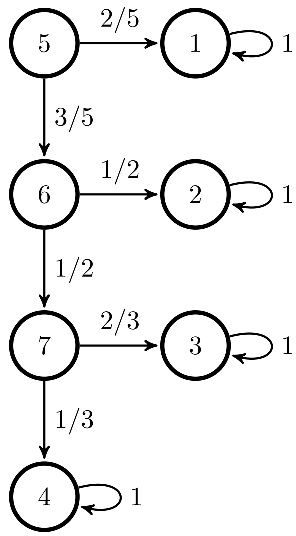
První řádek odpovídá počátečnímu stavu 5 a dává pravděpodobnosti výsledků $(\frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10})$ (výhra Alice, Boba, Cyrila, nerozhodný výsledek).

Jednodušší řešení dostaneme, pokud vyřešíme situaci jednoho hráče (s pravděpodobností zásahu koše q; obr. vlevo) a považujeme ji za jediný krok (který z počátečního stavu S jde na výhru V s pravděpodobností $\frac{2q}{1+q}$ nebo nevyhrává, N, s pravděpodobností $\frac{1-q}{1+q}$; obr. vpravo).





Po náhradě pro všechny hráče dostáváme jednoduchý přechodový diagram, ze kterého lze všechny hledané pravděpodobnosti snadno najít jako pravděpodobnosti jediné cesty z počátečního stavu 5:



V tomto zjednodušení by k řešení stačily i výpočty založené na podmíněné pravděpodobnosti (že Alice nevyhraje atd.).

4. (5 bodů) V které z následujících úloh byste parametry modelu rozdělení hledali metodou momentů, resp. metodou maximální věrohodnosti?

   a) Rozdělení poloh průmyslového robotu v náhodně voleném čase.

   b) Rozdělení příčin výpadku internetového spojení.

   c) Rozdělení nejvyššího dokončeného vzdělání v populaci.

Řešení:

a) Metoda momentů; typicky se jedná o náhodný vektor, který nemá ani spojité ani diskrétní rozdělení, i jednotlivé složky mají smíšené rozdělení (kvůli zastavení).

b) Metoda maximální věrohodnosti; uvažujeme jen konečně mnoho příčin, které nemají přirozené číselné hodnoty.

c) Metoda maximální věrohodnosti. I kdybychom vzdělání vyjadřovali číselně, těžko bychom obhájili, že má význam pracovat s jeho střední hodnotou, rozptylem apod.