18 – Posloupnosti

1) Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je určena vzorcem $a_n = \frac{300\,n}{n^2+1}$. a) Kolik členů posloupnosti je větších než $\frac{3}{5}$? b) Vypočtěte limitu a_n pro $n \to \infty$. [499; 0]

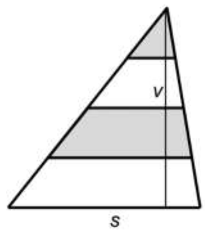
2) Nekonečná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $n \in N$, je určena prvním členem $a_1 = 0$ a rekurentním vztahem: $a_{n+1} = q.a_n + 4$. 1) Vyjádřete další tři členy a_2, a_3, a_4 v závisloati na veličinách a_1, q a výrazy upravte tak, aby neobsahovaly závorky. 2) Určete všechny reálné hodnoty q, pro něž je posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$konvergentní. 3) Pro $q = -\frac{1}{2}$ vypočtěte $\lim_{n\to\infty} a_n$. $[4, 4q+4, 4q^2+4q+4;\ (-1;1); \frac{8}{3}]$

3) Nekonečná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $n \in N$, je určena prvním členem $a_1 = 2$ a rekurentním vztahem: $a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n}$. 1) Určete další tři členy posloupnosti. 2) Členy se periodicky opakují. Vypočtěte součet prvních padesáti členů (s_{50}). 3) Jaký by musel být první člen a_1, aby byl třetí člen nulový ($a_3 = 0$)? $[\frac{1}{2};\ -1; 2; 26{,}5; \text{nemá řešení}]$

4) V rostoucí aritmetické posloupnosti je součet prvních dvaceti členů s lichým pořadím ($a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{39}$) o 60 menší než součet prvních dvaceti členů se sudým pořadím ($a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{40}$). Jaká je diference *d* posloupnosti? [3]

5) Pro $k \in R$ je dána uspořádaná trojice: $\left[\frac{k-1}{2}; \frac{k+1}{3}; \frac{2k+1}{6}\right]$. Vypočtěte, pro kterou hodnotu *k* tvoří uspořádaná trojice aritmetickou posloupnost. [6]

6) Obvod trojúhelníku je *o*. Trojúhelník je rozdělen třemi úsečkami rovnoběžnými se stranou na čtyři rovinné útvary (jeden trojúhelník a tři lichoběžníky). Velikosti výšek jsou ve všech útvarech shodné ($= \frac{v}{4}$). Obvody (o_1, o_2, o_3, o_4) jednotlivých útvarů tvoří rostoucí posloupnost. Jaký je rekurentní vztah pro členy této posloupnosti, kde $n \in \{1; 2; 3\}$?



A) $o_1 = \frac{3}{8}o, o_{n+1} = o_n + \frac{1}{4}s$, B) $o_1 = \frac{1}{8}o, o_{n+1} = 2o_n$, C) $o_1 = \frac{1}{4}o, o_{n+1} = o_n + \frac{1}{2}s$, D) $o_1 = \frac{1}{4}o, o_{n+1} = \frac{n+1}{n}o_n$, E) žádný z uvedených. [C]

7) V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q platí $a_n = 2^{10-2n}$. . Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (1-3), zda je pravdivé, či nikoli. 1) $a_5 = 0$, 2) $a_6 = q$, 3) $s = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots < 2^9$. [N, A, A]

8) V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ $\frac{a_8}{a_2} = 64$. Vypočtěte $\frac{a_7}{a_3}$. [16]

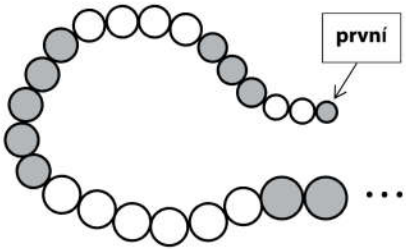
9) Pro vnitřní úhel α obecného trojúhelníku ABC platí, že hodnoty $\sin\alpha, tg\,\alpha, \frac{1}{\cos\alpha}$ tvoří tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Jaký je kvocient této posloupnosti? $[\sqrt{2}]$

10) Určete k prvním dvěma členům každé z uvedených posloupností následující člen, jestliže $a \in$ R \ {0}. a) Aritmetická posloupnost: $-a; \frac{a}{2}$; b) Geometrická posloupnost: $-\frac{a}{2}; a$; c) Geometrická posloupnost: $\frac{1}{2}; -a$. $[2a; -2a; 2a^2]$

11) V aritmetické posloupnosti platí: $a_3 + a_4 = a_5;\ a_3 = 8$. Které z následujících tvrzení je nepravdivé? A) $a_1 + a_2 + a_3 = 0$, B) $a_2 + a_3 + a_4 = 24$, C) $a_2 + a_3 = 8$, D) $a_2 + a_3 < a_4$, E) $a_4 + a_5 < a_6$. [E]

12) V geometrické posloupnosti platí: $a_1 + a_2 = 4, a_3 - a_1 = -16$. Do kterého z uvedených intervalů patří kvocient q posloupnosti? A) $\langle -8; -6)$, B) $\langle -6; -4)$, C) $\langle -4; -2)$, D) $\langle -2; 0)$, E) $\langle 0; 8\rangle$. [C]

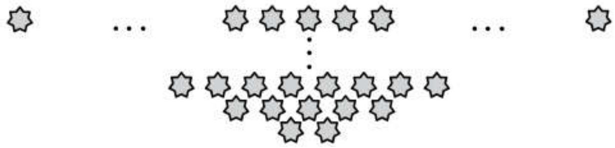
13) V Kocourkově vydláždili cestu od radnice kulatými dlaždicemi. První den položili jednu dlaždici s průměrem 51 cm, druhý den dvě dlaždice s průměrem 52 cm, další den tři dlaždice s průměrem 53 cm atd. Až do konce pokračovali podle stejného pravidla. Každý den položili o 1 dlaždici více než v předešlém dni a zároveň se průměr dlaždic zvětšil o 1 cm. Poslední den položili největší počet dlaždic, a to s průměrem 130 cm. A) Vypočtěte, kolik dlaždic na cestě mělo průměr 130 cm. B) Vypočtěte, kolika dlaždicemi v Kocourkově vydláždili celou cestu. C) Vypočtěte průměr dlaždice, která byla položena na cestě jako tisící v pořadí.



[80, 3240, 95 cm]

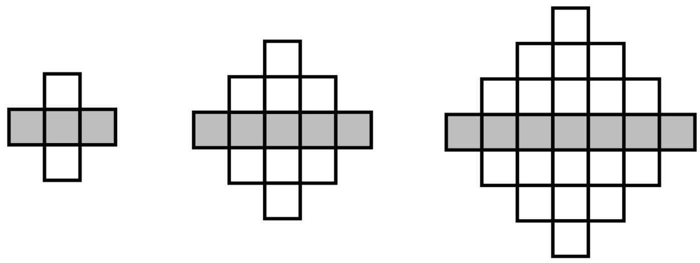
14) Existuje takové $x \in R$, že čísla $x - \sqrt{6}$; $\sqrt{x}$; $x + \sqrt{6}$ tvoří tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Jaký je kvocient q této posloupnosti? [$\sqrt{3} + \sqrt{2}$]

15) Hvězdičky jsou v obrazci umístěny v řadách nad sebou. Počty hvězdiček v jednotlivých řadách tvoří konečnou aritmetickou posloupnost. V nejkratší řadě jsou dvě hvězdičky. Počet hvězdiček v nejdelší řadě je o 99 větší než počet všech řad. Kolik hvězdiček obsahuje celý obrazec? [3775]

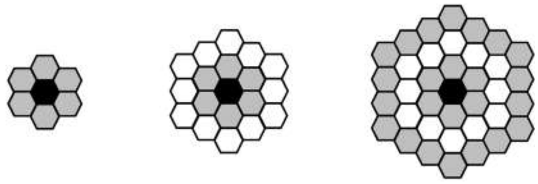


16) Posloupnost obsahuje n po sobě jdoucích celých čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$, z nichž nejmenší je a_1. Platí: $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n$, kde $n \in N$. Pro $n = 15$ vypočtěte a_1. Určete n, jestliže je $a_1 = -20$. Vyjádřete a_1 v závislosti na n a uveďte množinu všech n, pro něž daná posloupnost existuje. $\left[-6, 43, a_1 = \frac{3-n}{2}\right]$

17) Ornament se skládá ze shodných čtverců. Tmavé čtverce jsou umístěny v nejdelší vodorovné řadě. První ornament je sestaven z 5 čtverců, druhý obdobně sestavený ornament je ze 13 čtverců a třetí z 25 čtverců. Z kolika čtverců se skládá obdobně sestavený ornament, který má v nejdelší řadě 39 tmavých čtverců? [761]



18) Dlažba kolem stožáru na vlajku (černý otvor) vytváří pravidelné tmavé a světlé prstence. (Všechny dlažební kostky jsou shodné pravidelné šestiboké hranoly.) Kolik prstenců je vytvořeno z 1 260 dlaždic? [20]



19) Pro $n \in N$ řešte rovnici: $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{4080}{2^{n+4}}$ [8]

20) Rozhodněte, zda posloupnost je konvergentní a určete její limitu: $\left(\frac{n^2+4n-1}{2n^2-n+3}\right)_{n=1}^{\infty}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

21) Určete desátý člen aritmetické posloupnosti, ve které $a_2 + a_3 = 9$ a $a_2 . a_3 = 14$.[-33, 42]

22) Posloupnost je dána rekurentně. Vypočítejte prvních šest členů posloupnosti, odhadněte vzorec pro n-tý člen a dokažte jeho správnost: $a_1 = 1, a_2 = 3, a_n = 4\,a_{n-1} - 3\,a_{n-2}$.

23) Rozhodněte, zda posloupnost $\left(\frac{n+1}{2n-3}\right)$ je rostoucí, klesající, zdola omezená, shora omezená, omezená. [klesající od 2. členu, omezená]

24) Délky hran kvádru tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Jak jsou veliké, měří-li jejich součet 24 cm a objem kvádru je 312 cm^3? [3, 8, 13]

25) Strany pravoúhlého trojúhelníku tvoří aritmetickou posloupnost. Určete velikosti stran trojúhelníku, víte-li, že poloměr kružnice trojúhelníku vepsané je 7 cm. [21 cm, 28 cm, 35 cm]

26) Vypočtěte velikosti vnitřních úhlů šestiúhelníku, tvoří-li tyto velikosti aritmetickou posloupnost a nejmenší je 70°. [70°, 90°,..]