

06 – Iracionální rovnice a nerovnice

Příklady:

Petáková: 14/20 e, f, h, i, j, 14/21, 15/26 b, c, 15/27 c, d, e, f, 17/37, 23/4, 25/21

- 1) V oboru $\langle 0; 2\pi \rangle$ řešte: $\sqrt{\cos x + 3,5} = 2\sin \frac{2\pi}{3}$
- 2) Pro $x \in \mathcal{R}$ řešte: $\sqrt{5-x} = -1-x$
- 3) V oboru \mathcal{R} řešte: $\sqrt{6-x} = -x$
- 4) Přiřaďte k rovnici množinu všech řešení v oboru \mathcal{R} : $\sqrt{9x-27} = 3 \cdot \sqrt{x-3}$.
A) $\langle 3; \infty \rangle$, B) $\langle 3; \infty \rangle$, C) $\langle -\infty; 3 \rangle$, D) $\langle -\infty; 3 \rangle$, E) $\langle -3; 3 \rangle \cup \langle 3; \infty \rangle$

- 5) Vyřešte v \mathcal{R} : $\frac{x+1}{x-1} = \sqrt{x+1}$
- 6) Určete definiční obor funkce: $y = \sqrt{\log_2(3-x)}$
- 7) Určete definiční obor funkce: $y = \sqrt{\log \frac{x+3}{4-x}}$
- 8) Řešte rovnici: $\log_4 \sqrt{3x-1} = -0,25$
- 9) Upravte: $\frac{2\sqrt{x}\sqrt{x}}{\sqrt[3]{8x}} x^{\frac{1}{12}}$
- 10) Upravte výraz: $\frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{1+\frac{a-x}{x}} \cdot \frac{-x-(a-x)}{x^2} \cdot \left(\frac{a-x}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}$
- 11) Určete v \mathcal{R} všechna řešení rovnice: $\sqrt{7\sin x - 2} = -\sqrt{2}\cos x$
- 12) Zjednodušte a uveďte, kdy má výpočet smysl. $\frac{\sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x^{-5}}}}{\sqrt{\sqrt[3]{x}}}$
- 13) Zjednodušte výraz: $\sqrt{a\sqrt[3]{b}} : \sqrt[3]{b^{-1}\sqrt{a^3}}$
- 14) Vyřešte v \mathcal{R} : $x + \frac{x}{\sqrt{x}} - \sqrt{x^2+2x} = 0$
- 15) Řešte v \mathcal{R} : $x^{-1}\sqrt[3]{2^{3x-1}} - \sqrt[3]{8^{x-3}} = 0$
- 16) Upravte: $\frac{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{(a^2 - ab)^{\frac{3}{2}}} : \frac{a^{-\frac{2}{3}}\sqrt[3]{a-b}}{a\sqrt{a-b}\sqrt{b}}$
- 17) Pro libovolné reálné číslo a vypočtěte: $a^{-1} \left(1 + \frac{1}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} (1+a^2)^{\frac{1}{2}}$
- 18) Načrtněte graf funkce: $y = \frac{\sqrt{x^2+6x+9}}{x+3}$
- 19) Vyřešte v \mathcal{R} : $\sqrt{x^2+49} - 3\sqrt{x^2+49} = 0$
- 20) Vyřešte v \mathcal{R} : $x - 3\sqrt{x} - 4 \geq 0$
- 21) V \mathcal{R} řešte soustavu nerovnic: $\frac{1}{x} > 0$ a $\sqrt{\frac{3x-1}{x-2}} > 2$
- 22) Řešte v \mathcal{R} : $\sqrt{6+\sqrt{x}} = \sqrt{15-2\sqrt{x}}$
- 23) $\sqrt{x+3} - 4\sqrt{1-x} = 1 + \sqrt{x}$

- 24) $1 + \sqrt{x} = \sqrt{x-m}$
- 25) $\frac{2\sqrt{x-9}}{3} + \frac{4\sqrt{x+3}}{5} = 2$
- 26) $\sqrt{7-2\sqrt{x}} = \sqrt{18-13\sqrt{x}}$
- 27) $\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = \sqrt{4x-7}$
- 28) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{4x-3} = \sqrt{2x+23} + \sqrt{4x-27}$
- 29) $2x^2 + \sqrt{2x^2 - 4x + 12} = 4x + 8$
- 30) $x^2 - 3x - 4 + 2\sqrt{x^2 - 3x + 4} = 0$
- 31) $\sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 3$
- 32) $\frac{\sqrt{x+13}+2}{\sqrt{x+13}-4} = 7$
- 33) $\sqrt{\frac{x+2}{x-3}} - \sqrt{\frac{x-3}{x+2}} = -\frac{5}{6}$
- 34) $\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = 2 - x$
- 35) $\sqrt{23 + \sqrt{2x - \sqrt{5x^2 - 21x + 22}}} = 5$
- 36) $\sqrt{x - 4a + 16} = 2\sqrt{x - 2a + 4} - \sqrt{x}$
- 37) $\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = x$
- 38) $\sqrt{2x-1} \leq x-2$
- 39) $\sqrt{x^2 - 3x - 10} < 8 - x$
- 40) $\sqrt{3x-x^2} < 4 - x$
- 41) $\sqrt{\frac{x-2}{1-2x}} > -1$
- 42) $\frac{x^2 - 13x + 40}{\sqrt{19x - x^2 - 78}} < 0$
- 43) $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-1}$
- 44) $3\sqrt{x} - \sqrt{x+3} > 1$
- 45) $\sqrt{4-x^2} + \frac{|x|}{x} \geq 0$
- 46) $\sqrt{1 - \sqrt{5 - 2x}} = \sqrt{x}$
- 47) $\sqrt{x^2 + 2} \geq 2 - x$
- 48) $1 + \sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2}} =$
- 49) $\sqrt{x+5} - \sqrt{x^2-7} = 0$

- 50) $x - 2\sqrt{x} - 3 = 0$
- 51) $\sqrt{x+9} = 2 + \sqrt{x-7}$
- 52) $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}} = x+1$
- 53) $\frac{x^3\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x^2-1}} - \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[3]{x}-1} = 12$
- 54) $\sqrt{x^2+x-12} < 6 -$
- 55) $\sqrt{x+7} + 1 > 2x$
- 56) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} \geq \sqrt{2-x}$
- 57) $4\sqrt{x^2-1} = 2x+2$
- 58) $\sqrt{x-2} - \sqrt{x+6} = -\sqrt{x+1}$
- 59) $\sqrt{x\sqrt{x}} - x + \sqrt{x} = x$
- 60) $\frac{5-3\sqrt{x}}{4\sqrt{x}-7} = \frac{6\sqrt{x}-11}{15-8\sqrt{x}}$
- 61) $\sqrt[3]{12-x} + \sqrt[3]{14+x} = 2$
- 62) $1 + \frac{x}{\sqrt{2x-3}} = \frac{2\sqrt{2x-3}}{x}$
- 63) $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+4}} = 1 -$
- 64) $\sqrt{x-13} + \sqrt{x+12} = 1$
- 65) $\sqrt{2x+9} = 2 + \sqrt{2x-7}$
- 66) $\sqrt[3]{x^3+2x^2+2x+3} = x+1$
- 67) $\sqrt{x^2-2\sqrt{x+4}} = 2-x$
- 68) $\sqrt{2+\sqrt{8-x^2}} + \sqrt{2-\sqrt{8-x^2}} = 2$
- 69) $\sqrt{x+20} \leq |x-10|$
- 70) $x-1 < \sqrt{x^2+17}$
- 71) $4\sqrt{\sqrt{x}-4} - \sqrt{x-4} = 4$
- 72) $\sqrt{x+1} = 3 - 2\sqrt{\sqrt{x}+1}$
- 73) $\sqrt{x-y} + 3\sqrt{x+y} = 14$
 $3\sqrt{x-y} + 2\sqrt{x+y} = 14$
- 74) $\sqrt{1+4x-x^2} = x-1$
- 75) $\sqrt{2x^2+3x+5} = x-1$
- 76) $1+x\sqrt{x^2+24} = (x+1)^2$
- 77) $\sqrt{2-x} + \frac{4}{\sqrt{2-x+3}} = 2$
- 78) $\frac{x-1}{1+\sqrt{x}} = 4 - \frac{1-\sqrt{x}}{2}$
- 79) $\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{3}}{x^2}$
- 80) $\sqrt{\frac{2x+6}{x+15}} = \sqrt{\frac{x+6}{x+8}}$
- 81) $\sqrt{3-x} + \frac{6}{\sqrt{3-x}} = \sqrt{9-5x}$

$$114) \sqrt{x} - 3 \leq \frac{2}{\sqrt{x}-2}$$

$$115) 2 \leq \frac{2\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} < 4$$

$$116) x - y = 30 \wedge \sqrt{xy} = 36$$

$$117) x + y = 10 \wedge x + y - 2\sqrt{xy} = 4$$

$$118) x^2 + \sqrt{y} = 14 \wedge x^4 - \sqrt{y} = 6$$

$$119) \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3 \wedge xy = 4$$

$$120) \sqrt{2x+y} - \sqrt{5x-4y} = 1 \wedge 3\sqrt{2x+y} - 2\sqrt{5x-4y} = 8$$

$$121) \frac{6}{\sqrt{x}} + \frac{12}{\sqrt{y}} = 11 \wedge 24\sqrt{x} - 18\sqrt{y} = 7\sqrt{xy}$$

$$122) \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2} \wedge x + y = 5$$

$$123) x + y + \sqrt{x+y} = 20 \wedge x^2 + y^2 = 136$$

$$124) \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4 \wedge x + y = 28$$

$$125) x - y = \frac{7}{2}(\sqrt[3]{x^2y} - \sqrt[3]{xy^2}) \wedge \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 3$$

06 – Iracionální rovnice a nerovnice – výsledky

$$1) \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

$$2) -4$$

$$3) -3$$

$$4) \langle 3; \infty \rangle$$

$$5) -1; 3$$

$$6) (-\infty; 2)$$

$$7) \langle 0,5; 4 \rangle$$

$$8) 0,5$$

$$9) \sqrt{x}$$

$$10) \frac{1}{x}\sqrt{ax-x^2}$$

$$11) \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$12) x^{-\frac{1}{3}}$$

$$13) \sqrt{b}$$

$$14) 0,25$$

$$15) \frac{5}{3}$$

$$16) \frac{(a\sqrt{a}-b\sqrt{b})^2}{a-b}$$

$$17) \frac{|a|}{a}$$

$$19) \pm 4\sqrt{2}$$

$$20) \langle 16; \infty \rangle$$

$$21) (2; 7)$$

$$22) 9$$

- 82) $\sqrt{x+25} - 4 = \frac{\sqrt{x^2+25x+4}}{\sqrt{x+25}+4}$
- 83) $\frac{2-\sqrt{x}}{2-x} = \sqrt{\frac{2}{2-x}}$
- 84) $\sqrt{x^2+6} - \sqrt{x^2-6} = x\sqrt{2}$
- 85) $\sqrt{2x^2+5x} - \sqrt{2x^2+5x-10} = \sqrt{2}$
- 86) $\left(3 - \sqrt{\frac{x+4}{2-x}}\right)\left(2 + \sqrt{\frac{x+4}{2-x}}\right) - 6 = 0$
- 87) $\sqrt{x^2+4x} + \sqrt{x^2+4x+16} = \sqrt{2x^2+8x+16}$
- 88) $\sqrt{3x-5} + \sqrt{1-x} = \sqrt{2x} + \sqrt{3x-1}$
- 89) $\sqrt{1+x\sqrt{2x^2-8}} = x+1$
- 90) $\sqrt{x+\sqrt{x^2-4}} + \sqrt{x-\sqrt{x^2-4}} = x\sqrt{2}$
- 91) $\sqrt{x+3} = 1 + \sqrt{x-\sqrt{x-2}}$
- 92) $\sqrt{x\sqrt{x}-x} + \sqrt{x} = x$
- 93) $\sqrt{\frac{3}{x}} + \sqrt{\frac{3}{x}} = 1 - \sqrt{\frac{3}{x}}$
- 94) $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} - 6 = 0$
- 95) $\sqrt[3]{3x+28} - \sqrt[3]{3x-28} = 2$
- 96) $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} = 2 - \sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$
- 97) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}$
- 98) $\sqrt{x-3} + 6 = 5\sqrt[4]{x-3}$
- 99) $\sqrt{x+2} \leq 1 + \frac{x}{2}$
- 100) $\sqrt{2x+14} > x+3$
- 101) $\sqrt{x-2} + x > 4$
- 102) $\sqrt{x^2-4} \leq x+1$
- 103) $\sqrt{x^2-x-2} < x-3$
- 104) $\sqrt{1 - \frac{x+2}{x^2}} < \frac{2}{3}$
- 105) $\sqrt{x^2-7} > -1$
- 106) $(x^2-1)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0$
- 107) $\sqrt{x^2+1} > x-1$
- 108) $\sqrt{x^2-4x} > x-3$
- 109) $\sqrt{8+2x-x^2} > 6-3x$
- 110) $\sqrt{x-2} \leq \sqrt{x-4} + 1$
- 111) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+15} < 6$
- 112) $2 - \sqrt{1-x^2} > \sqrt{4-x^2}$
- 113) $\frac{\sqrt{x}-3}{x-2} > 0$

- 23) 1
- 24) $m > -1 \emptyset, \text{ost.} \left(\frac{1+m}{2}\right)^2$
- 25) 9
- 26) 1
- 27) 2
- 28) 13
- 29) $1 \pm \sqrt{3}$
- 30) 0; 3
- 31) $\langle 2; \infty \rangle$
- 32) 12
- 33) -6
- 34) $1; \frac{5}{3}$
- 35) 2; 3
- 36) $\frac{a^2}{4}$
- 37) $a = 0 \ x = 0; a \geq 2 \ x = 2\sqrt{a-1}$
- 38) $\langle 5; \infty \rangle$
- 39) $\left(-\infty; -2\right) \cup \left\langle 5; \frac{74}{13} \right\rangle$
- 40) $\langle 0; 3 \rangle$
- 41) $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$
- 42) $(6; 8)$
- 43) $\langle 1; \infty \rangle$
- 44) $(1; \infty)$
- 45) $\langle -\sqrt{3}; 0 \rangle \cup (0; 2)$
- 46) \emptyset
- 47) $\langle 0,5; \infty \rangle$
- 48) 1,25
- 49) -3; 4
- 50) 9
- 51) 16
- 52) 0; 5
- 53) -27; 64
- 54) $\left(-\infty; -4\right) \cup \left\langle 3; \frac{48}{13} \right\rangle$
- 55) $\left(-7; \frac{9}{4}\right)$
- 56) 2
- 57) $-1; \frac{5}{3}$
- 58) 3
- 59) 0; 1; 4
- 60) 4
- 61) -15; 13

- 62) \emptyset
- 63) 0
- 64) \emptyset
- 65) 8
- 66) -2; 1
- 67) \emptyset
- 68) ± 2
- 69) $\langle -20; 5 \rangle \cup \langle 16; \infty \rangle$
- 70) R
- 71) 20
- 72) 0
- 73) $[10; 6]$
- 74) 3
- 75) \emptyset
- 76) 0; 5
- 77) 2
- 78) 81
- 79) $\pm 0,5$
- 80) 6
- 81) -3
- 82) 11
- 83) $0; \frac{16}{9}$
- 84) $\sqrt{6}$
- 85) -4,5; 2
- 86) -4; -1
- 87) -4; 0
- 88) \emptyset
- 89) 6
- 90) 2
- 91) $6; \frac{22}{9}$
- 92) 0; 1; 4
- 93) 27
- 94) -8; 27
- 95) -12; 12
- 96) 0
- 97) 1; 3
- 98) 19; 84
- 99) $\{-2\} \cup \langle 2; \infty \rangle$
- 100) $\langle -7; 1 \rangle$
- 101) $(3; \infty)$
- 102) $\langle 2; \infty \rangle$
- 103) \emptyset
- 104) $(-1,2; -1) \cup \langle 2; 3 \rangle$

- 105) $(-\infty; -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}; \infty)$
 106) $(-\infty; -1) \cup (2; \infty)$
 107) \mathbb{R}
 108) $(-\infty; 0) \cup (4,5; \infty)$
 109) $(1; 4)$
 110) $(\frac{17}{4}; \infty)$
 111) $(-3; 1)$
 112) $(-1; -\frac{\sqrt{15}}{4}) \cup (\frac{\sqrt{15}}{4}; 1)$
 113) $(0; 2) \cup (9; \infty)$
 114) $(0; 1) \cup (4; 16)$
 115) $(\frac{1}{4}; \frac{4}{9})$
 116) $[54; 24]; [-24; -54]$
 117) $[9; 1]; [1; 9]$
 118) $[-2; 100]; [2; 100]$
 119) $[4; 1]; [1; 4]$
 120) $[13; 10]$
 121) $[4; \frac{9}{4}]$
 122) $[4; 1]; [1; 4]$
 123) $[6; 10]; [10; 6]$
 124) $[27; 1]; [1; 27]$
 125) $[-27; -216]; [216; 27]$