1. (15 bodů) Nechť (X, Y) je diskrétní náhodný vektor takový, že $\mathrm{E}X = 1/2$ a nechť jeho tabulka sdružených pravděpodobností $p_{X,Y}$ je následující:

$p_{X,Y}(x,y)$:

x \ y	-1	0	1
0	a	$1/8$	$1/4$
1	$1/8$	b	$1/8$

kde $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Určete koeficienty a a b.
b) Spočítejte kovarianci $\mathrm{cov}(-2X + 7,\ 3Y - 100)$.
c) Jsou náhodné veličiny X a Y závislé či nezávislé? Zdůvodněte odpověď.
d) Určete rozdělení veličiny $Z = X - Y$.

Řešení:

(a)

$$\begin{aligned} 1/2 = \mathrm{E}X = 0 \cdot (a + 1/8 + 1/4) + 1 \cdot (1/8 + b + 1/8) = b + 1/4 \quad &\Longrightarrow \quad b = 1/4\,, \\ a = 1 - (3 \cdot 1/8 + 1/4 + b) \quad &\Longrightarrow \quad a = 1/8\,. \end{aligned}$$

Jiný postup: X má alternativní rozdělení s parametrem $p = \mathrm{E}X = 1/2$, takže

$$\begin{aligned} 1/2 &= P(X = 0) = a + 1/8 + 1/4\,, \\ 1/2 &= P(X = 1) = 1/8 + b + 1/8\,. \end{aligned}$$

Odtud plyne opět $a = 1/8$, $b = 1/4$.

(b)

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \underbrace{\mathrm{E}(XY)}_{0} - \underbrace{\mathrm{E}X}_{1/2}\,\underbrace{\mathrm{E}Y}_{1/8} = -1/16\,.$$

$$\mathrm{cov}(-2X + 7,\ 3Y - 100) = (-2) \cdot 3 \cdot \mathrm{cov}(X,Y) = 3/8\,.$$

(c) Závislé, dokonce korelované. Lze řešit i bez znalosti hodnot parametrů a a b:

	$\cdots$	1	p_X
0	$\cdots$	$1/4$	$1/2$
1	$\cdots$	$1/8$	$1/2$
p_Y	$\cdots$	$3/8$	

Protože např. $p_{X,Y}(0,1) = 1/4 \neq 1/2 \cdot 3/8 = p_X(0) \cdot p_Y(1)$, jsou X a Y závislé.

Jiný postup:

$$P(X = 0) = P(X = 1) = 1/2\,;$$

pokud by X a Y byly nezávislé, muselo by platit také

$$P(X = 0, Y = 1) = P(X = 1, Y = 1)\,,$$

ale to není splněno.

(d) Hodnoty z veličiny $Z = X - Y$ jsou pro jednotlivé případy uvedeny v tabulce:

$z(x,y) = x - y$:

x \ y	-1	0	1
0	1	0	-1
1	2	1	0

Pravděpodobnostní funkce p_Z vznikne sečtením pravděpodobností pro jednotlivé případy

$$p_Z(z) = P(X - Y = z) = \sum_{\substack{x-y=z \\ x,y\in\mathbb{R}}} \underbrace{P(X = x,\ Y = y)}_{p_{X,Y}(x,y)} = \begin{cases} \frac{1}{4}\,, & z = -1\,, \\ \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}\,, & z = 0\,, \\ a + b = \frac{3}{8}\,, & z = 1\,, \\ \frac{1}{8}\,, & z = 2\,, \\ 0\,, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Zde lze řešit i bez znalosti hodnot parametrů a a b, protože vždy platí

$$a + b = 1 - (3 \cdot 1/8 + 1/4) = 3/8\,.$$

2. (15 bodů) U $n = 20$ dorostenců jsme zaznamenávali, kolik metrů skočí do dálky (veličina X) a za kolik minut uplavou vzdálenost jednoho bazénu (veličina Y). Zjistili jsme tyto hodnoty

$$\overline{\boldsymbol{x}} = 5.7\ \text{ m}\,, \qquad \overline{\boldsymbol{y}} = 1.2\ \text{ min}\,,$$

$$\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 680\ \text{ m}^2\,, \qquad \sum_{i=1}^{20} y_i^2 = 50\ \text{ min}^2\,, \qquad \sum_{i=1}^{20} x_i\,y_i = 150\ \text{ m}\cdot\text{min}\,.$$

Otestujte na hladině významnosti 5 %, jestli veličiny X a Y jsou nekorelované. Uveďte předpoklady potřebné pro tento test.

Řešení:

Předpokládáme nezávislá měření náhodného vektoru (X, Y) s dvourozměrným normálním rozdělením. K testování použijeme výběrový koeficient korelace $R(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ a testovou statistiku

$$T = \frac{R(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})\sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - R^2(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})}}\,,$$

která má (za předpokladu nulové hypotézy $\mathbf{H}_0:\ \varrho(X, Y) = 0$) Studentovo rozdělení $\mathrm{t}(n-2)$, kde n je rozsah výběru. Realizaci $r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ výběrového koeficientu korelace $R(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ vypočteme ze vzorce

$$r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{\boldsymbol{x}} \cdot \overline{\boldsymbol{y}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{\boldsymbol{x}}^2\right) \cdot \left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 - \overline{\boldsymbol{y}}^2\right)}} = \frac{\frac{150}{20} - 5.7 \cdot 1.2}{\sqrt{\left(\frac{680}{20} - 5.7^2\right) \cdot \left(\frac{50}{20} - 1.2^2\right)}} \doteq 0.52\,.$$

$$t = \frac{r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - r^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}} = \frac{0.52\sqrt{18}}{\sqrt{1 - 0.52^2}} \doteq 2.58.$$

Z tabulek nalezneme kvantil

$$q_{\mathrm{t}(n-2)}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = q_{\mathrm{t}(18)}(0.975) \doteq 2.1\,.$$

Protože

$$|t| \doteq 2.58 > 2.1 \doteq q_{\mathrm{t}(18)}(0.975)\,,$$

hypotézu **ZAMÍTÁME**.

3. (15 bodů) Alice, Bob a Cyril hrají následující hru: Začíná Alice; hodí kostkou a výsledek je interpretován následovně:

- 6 ... hází znovu,
- 1 ... vyhrává,
- 2, 4 ... pokračuje Bob,
- 3, 5 ... pokračuje Cyril.

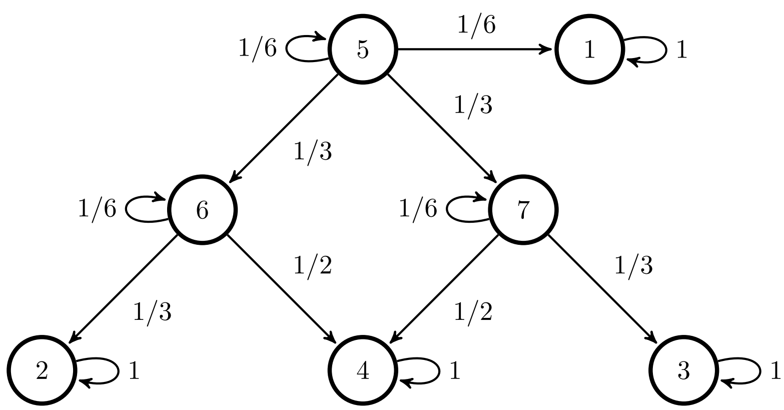
Vybraný chlapec (pokud Alice již nevyhrála) hodí kostkou a výsledek je interpretován následovně:

- 6 ... hází znovu,
- 2, 4 ... vyhrává,
- 1, 3, 5 ... hra končí nerozhodně.

Jaká je pravděpodobnost výsledků hry?

Řešení:

Absorpční stavy:
1 vyhrává Alice,
2 vyhrává Bob,
3 vyhrává Cyril,
4 nerozhodně;
přechodné stavy:
5 hází Alice,
6 hází Bob,
7 hází Cyril.



Matice přechodu, fundamentální matice a její použití:

$$\boldsymbol{P} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{array}\right),$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

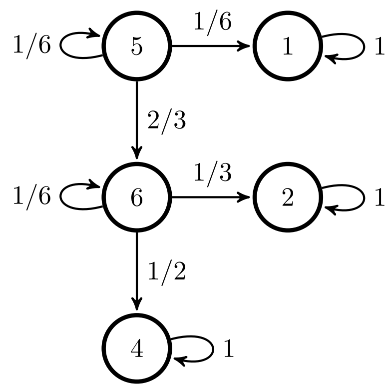
$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & \frac{12}{25} & \frac{12}{25} \\ 0 & \frac{6}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{5} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{25} & \frac{4}{25} & \frac{12}{25} \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

První řádek odpovídá počátečnímu stavu 5 a dává pravděpodobnosti výsledků $(\frac{1}{5}, \frac{4}{25}, \frac{4}{25}, \frac{12}{25})$ (výhra Alice, Boba, Cyrila, nerozhodný výsledek).

Jiný postup: Jelikož role Boba a Cyrila jsou stejné, můžeme je sloučit a výslednou pravděpodobnost jejich výhry vydělit pro každého dvěma. Dostaneme jednodušší Markovův řetězec:

Absorpční stavy:
1 vyhrává Alice,
2 vyhrává Bob nebo Cyril,
4 nerozhodně;
přechodné stavy:
5 hází Alice,
6 hází Bob nebo Cyril.



Matice přechodu, fundamentální matice a její použití:

$$\boldsymbol{P} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{6} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{array}\right),$$

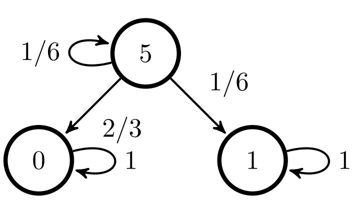
$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & \frac{24}{25} \\ 0 & \frac{6}{5} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{8}{25} & \frac{12}{25} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

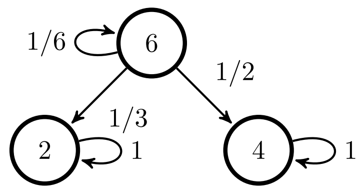
První řádek odpovídá počátečnímu stavu 5 a dává pravděpodobnosti výsledků (výhra Alice, Boba nebo Cyrila, nerozhodný výsledek); Bob, stejně jako Cyril, vyhrává s pravděpodobností $\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{25} = \frac{4}{25}$.

Jiný postup: Z pohledu Alice vypadá hra následovně (0 značí jakýkoli jiný výsledek než výhra Alice):



Snadno zjistíme (i součtem geometrické řady nebo z poměru pravděpodobností přechodu z 5 do 1, resp. 0), že končíme v 1 s pravděpodobností 1/5.

S pravděpodobností 4/5 ve hře pokračuje Bob nebo Cyril a jejich podmínky (tedy i pravděpodobnosti výsledků) jsou stejné. Z pohledu Boba, pokud dostane příležitost (což nastane s pravděpodobností 2/5), vypadá hra následovně:



Ze stavu 6 končí ve stavu 2 s pravděpodobností 2/5, ve stavu 4 s pravděpodobností 3/5. Celkově to znamená výsledek 2 (výhra Boba) s pravděpodobností $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$, totéž pro stav 3 (výhra Cyrila), stav 4 (remíza) s pravděpodobností $2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{25}$. Mohli jsme také využít jednotkový součet všech asymptotických pravděpodobností.

4. (5 bodů) Vystrašenému cestovateli se zdá příliš velká pravděpodobnost $1 : 10^6$, že v letadle, kterým poletí, by mohla být bomba. Někdo mu poradil, ať si tam vezme bombu, že pravděpodobnost dvou bomb v jednom letadle je jen $1 : 10^{12}$. Odhlédněme od problémů realizace této rady a vysvětlete pomocí teorie pravděpodobnosti, v čem je rada chybná.

Řešení:

Stejně jako autor rady, výskyty obou bomb považujeme za nezávislé (pomíjíme možnost, že náš cestovatel je sám terorista). Podmíněná pravděpodobnost výskytu druhé bomby za předpokladu, že jedna už v letadle je, je stále $1 : 10^6$. A to je také správný odhad, když víme, že jev, kterým podmiňujeme, nastal.

Pozor! Nesprávné je vysvětlení, že *v nyní platném modelu s podmíněnou pravděpodobností* nejsou výskyty bomb nezávislé. Nezávislé jsou už proto, že v tomto modelu je výskyt jedné z bomb jev jistý, a ten je nezávislý na všech ostatních jevech.