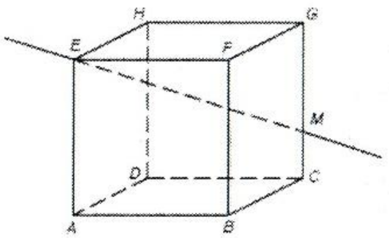
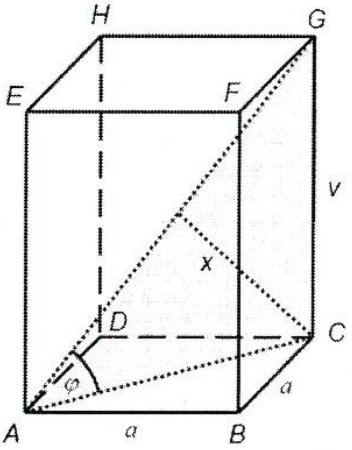
13 – Hranol, jehlan, kužel, válec, koule a její části

1) V nádobě tvaru válce o poloměru podstavy 5 cm sahá voda do výšky 20 cm. Ponořením ocelové krychle hladina stoupne o 4 cm. Kolik centimetrů měří hrana krychle? Údaj zaokrouhlete na jedno desetinné místo.
2) Bod M je vnitřním bodem hrany CG krychle ABCDEFGH. Na které přímce určené vrcholy krychle leží průsečík přímky EM s rovinou ABD?





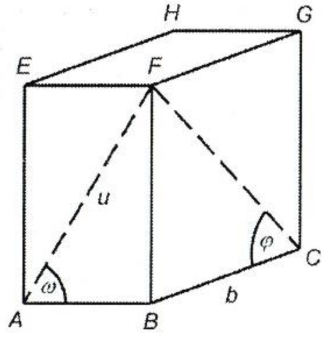
3) Kvádr ABCDEFGH se čtvercovou podstavou má podstavné hrany délky a, tělesová úhlopříčka AG svírá s podstavou úhel φ. Ve kterém zápisu jsou uvedeny oba správné vztahy pro výpočet výšky v kvádru a výpočet vzdálenosti x vrcholu C od tělesové úhlopříčky AG? A) $v = a\sqrt{2}.\,tg\ \varphi, x = a\sqrt{2}.\cos\varphi$,
B) $v = a\sqrt{2}.\,tg\ \varphi, x = a\sqrt{2}.\sin\varphi$,
C) $v = a\sqrt{2}.\,cos\ \varphi, x = a\sqrt{2}.\cos\varphi$,
D) $v = a\sqrt{2}.\,cos\ \varphi, x = a\sqrt{2}.\sin\varphi$, E) v žádném z uvedených
4) Vodní hladina nádrže by měla mít rozlohu 4000 m^2. Zatím je vytvořen pouze přesný model nádrže. Vejde se do něj 375 litrů vody a vodní hladina má rozlohu 2,5 m^2. Jaký objem má mít skutečná nádrž?

24 m^3

5) Každá z pěti hran trojbokého jehlanu má délku 1. Délka poslední hrany je $\frac{1}{2}$. Určete povrch jehlanu.

$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{15}}{8}$

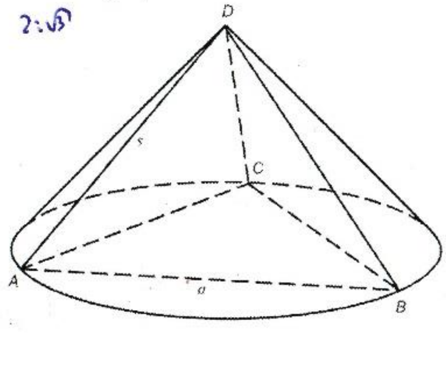
6) Jestliže se do vody ve válci ponoří koule o objemu 1 l, vytlačí sloupec vody vysoký 5 cm. Jaký objem má největší koule, která se do válce vejde?
7) Na povrchu kvádru ABCDEFGH jsou vyznačeny stěnové úhlopříčky v přední a boční stěně a úhly, které svírají s hranami dolní podstavy. Vyjádřete délku úhlopříčky u v závislosti na délce hrany b a velikostech úhlů ω a φ.



8) Čtyřboký jehlan má jednu boční hranu kolmou ke čtvercové podstavě. Pět z osmi hran má shodnou délku 1. Jaký je povrch pláště jehlanu?
9) Konzerva je tvaru válce, jehož podstava a plášť mají stejný obsah. Konzerva je uzavřena v co nejmenší papírové krabičce s čtvercovou podstavou. V jakém poměru bude výška krabičky a délka podstavné hrany, jestliže zanedbáváme tloušťku papíru?
10) Podstavu pravidelného trojbokého jehlanu ABCD tvoří rovnostranný trojúhelník ABC, plášť jehlanu je tvořen třemi rovnoramennými trojúhelníky se základnou a a ramenem délky s. Kužel, který je jehlanu opsán, má obsah pláště a obsah podstavy v poměru 2:1. Jaký je poměr délek boční a podstavné hrany jehlanu?

$2:\sqrt{3}$

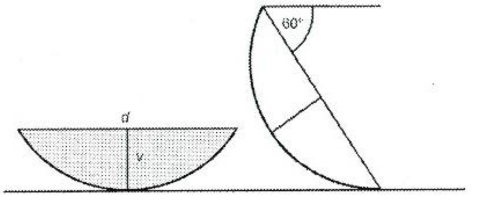
ToDo



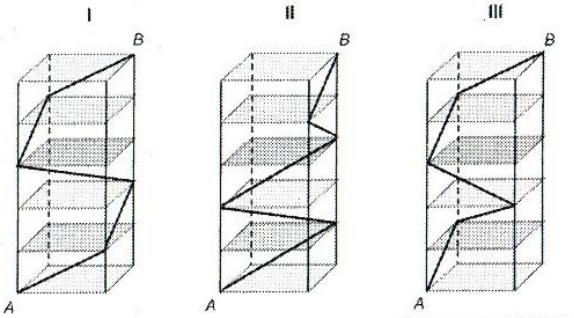
11) Kvádr zabírá na podložce plochu o velikosti $9\sqrt{2}$ dm^2 nebo $6\sqrt{2}$ dm^2 nebo 12 dm^2 v závislosti na způsobu

jeho umístění. Rozhodněte o každém tvrzení, zda je pravdivé, či nikoli. 1) Objem kvádru je 36 dm^3. 2) Nejkratší strana má délku $2\sqrt{2}$ dm.
3) Nejdelší stěnová úhlopříčka má délku $3\sqrt{3}$ dm.

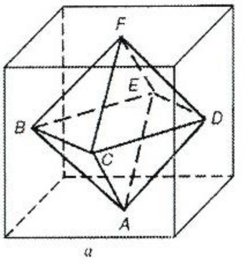
12) Umyvadlo má tvar kulové úseče s výškou 15 cm. Aby z umyvadla vytekla všechna voda, musí být nakloněno nejméně o 60°. Jaký je vnitřní průměr d nejširší části umyvadla vypočtený s přesností na mm? $30\sqrt{3}$



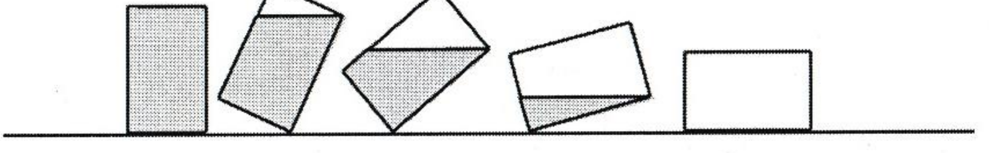
13) Ve Škole čar a kouzel v Bradavicích se každou hodinu mění nastavení chodby, která vede z místa A v přízemí do místa B v pátém patře. Patra mají čtvercový půdorys a jsou od sebe stejně vzdálena. Při kterém nastavení chodby je cesta mezi místy A a B nejkratší? A) pouze při nastavení I, B) pouze při nastavení II, C) pouze při nastavení III, D) při nastavení I a II, E) při nastavení I a III.



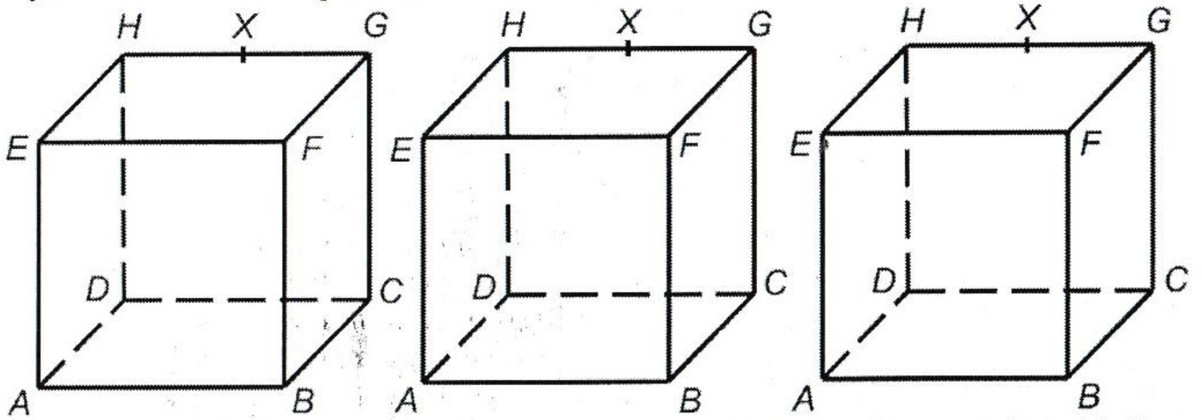
14) Středy stěn krychle s hranou a tvoří vrcholy pravidelného osmistěnu ABCDEF. Vyjádřete délku lomené čáry ABCDEF v závislosti na veličině a. Vypočtete, jakou část objemu krychle vyplní osmistěn, a výsledek vyjádřete zlomkem.



15) Pokud se válec naplněný kapalinou nakloní o 60°, polovina objemu válce se vyprázdní. V jakém poměru jsou poloměr r podstavy a výška v válce?



16) V jednotlivých krychlích v obrázku sestrojte: řez krychle rovinou krychle rovinou ABG, řez krychle rovinou CXE a průsečnici těchto rovin.

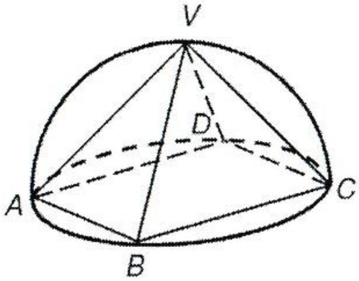


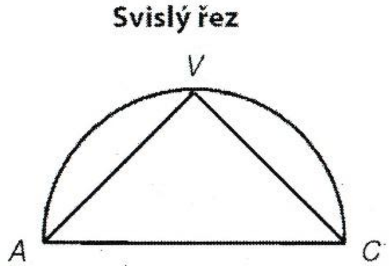
17) Nádoba tvaru válce má poloměr podstavy $r = 4$ cm. Nádoba je nakloněna tak, že hladina tvoří elipsu. Poměr délek hlavní a vedlejší poloosy elipsy je 2 : 1. Určete v cm délku vedlejší poloosy. Vypočtěte, o kolik stupňů je nádoba nakloněna.

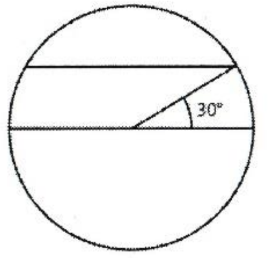
18) Bod X je střed hrany GH krychle ABCDEFGH. Určete odchylku φ přímek EX a CG. Sestrojte řez krychle rovinou, která obsahuje hranu EH a je rovnoběžná s přímkou XB.

19) Zeměkoule má poloměr přibližně 6 370 km. Spojnice středu zeměkoule s libovolným bodem na třicáté rovnoběžce svírá s pomyslnou rovinou rovníku úhel 30°. Jaký je obsah kulového pásu mezi rovníkem a třicátou rovnoběžkou?

20) Do polokoule je vepsán pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV. Vypočtěte, kolikrát vetší je objem polokoule než objem jehlanu.

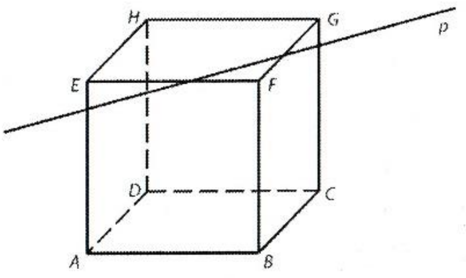




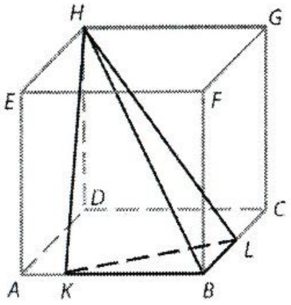


21) V kvádru ABCDEFGH je |AB| = |AD| = 4 cm, |AE| = 6 cm. V tělese vyznačte odchylku φ přímky BH od roviny ABF a vypočtete její velikost.

22) Přímka p leží v rovině EFG horní stěny krychle ABCDEFGH. Rovina σ je určena přímkou p a vrcholem D. Sestrojte řez krychle ABCDEFGH rovinou σ.



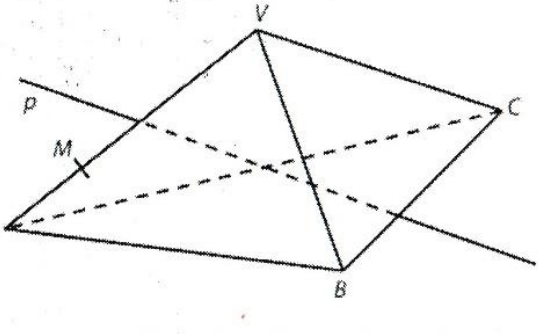
23) V krychli ABCDEFGH je bod L středem hrany BC a bod K leží ve čtvrtině hrany AB blíže k bodu A ($K \in AB \wedge |KB| = 3|AK|$). Objem tělesa KBLH je 2 cm^3. Jaký je objem krychle ABCDEFGH?



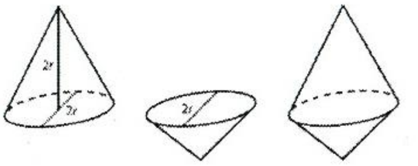
24) Délka hrany krychle ABCDEFGH je 4 cm. Vypočtěte vzdálenost d bodu A od přímky FH. Nezaokrouhlujte.

25) Je dán rotační válec a kvádr se čtvercovou podstavou. Obě tělesa mají stejnou výšku v a stejný obsah pláště S_{pl}. Objem válce je k-krát větší než objem pravidelného čtyřbokého hranolu. Jaká je hodnota násobku k?

26) V trojbokém jehlanu ABCV je na hraně AV umístěn bod M. Přímka p leží v rovině ABC. Sestrojte řez jehlanu ABCV rovinou pM.



27) Těleso se skládá ze dvou kuželů se společnou podstavou. V prvním kuželi je výška stejná jako průměr podstavy. Druhý kužel má poloviční objem, než je objem prvního kužele. Jaký je povrch tělesa?



28) Bazén tvaru kolmého hranolu se dnem tvaru rovnoramenného lichoběžníku o rozměrech základen lichoběžníku 10 m a 18 m a rameny 7 m je hluboký 2 m. Při jarním úklidu je třeba vybělit dno a stěny bazénu. Kolik m^2 je třeba vybělit? [164,42 m^2]

29) Váza tvaru válce je 28 cm vysoká. Její vnitřní průměr d = 1,1 dm. Kolik litrů vody se do ní vejde, jestliže tloušťka dna je 1,5 cm? [2,52 l]

30) Jakou hmotnost má 1 000 m měděného drátu o průměru 5 mm, pokud ρ = 8,8 g/cm^3 ? [172,8 kg]

31) Jehlan má podstavu tvaru obdélníku s rozměry a = 6 cm, b = 8 cm. Boční hrany jsou shodné a jejich délka h = 12,5 cm. Vypočítejte povrch jehlanu. [215,5 cm^2]

32) V krychli s délkou hrany 12 dm máme vepsaný jehlan s vrcholem ve středu horní stěny kostky. Vypočítejte objem a povrch tohoto jehlanu. [V = 576 dm^3; S = 466 dm^2]

33) Kolik litrů vzduchu je pod střechou hradní věže, která má tvar pravidelného šestibokého jehlanu s hranou podstavy délky 3,6 m a výškou 2,5 m, když počítáme, že podpůrné sloupy zabírají asi 7% objemu prostoru pod střechou? [26 095,1 l]

34) Rotační kužel a rotační válec mají stejný objem 180 cm^3 a stejnou výšku v = 15 cm. Které z těchto dvou těles má větší povrch? [rotační válec]

35) Čtyřicet stejných dopravních kuželů s průměrem podstavy d = 36 cm a výškou v = 46 cm máme natřít zvenčí oranžovou barvou (bez podstavy). Kolik korun zaplatíme za barvu, pokud na natření 1 m^2 potřebujeme 500 cm^3 barvy a 1l barvy stojí 8 Kč? [44,70 Kč]

36) Konvice vysoká 35 cm má tvar komolého jehlanu s délkou hrany spodní čtvercové podstavy a = 50 cm a s hranami horní obdélníkové podstavy $b1$ = 20 cm a $b2$ = 30 cm. Kolik litrů vody se do konvice vejde? [50,5 l]

37) Jáma tvaru komolého jehlanu s obdélníkovými podstavami je hluboká 2 m. Délka a šířka jámy je navrchu 3x1,5 m, dole 1x0,5 m. Na natření 1m^2 jámy je třeba 0,25 l zelené barvy. Kolik litrů barvy se na její natření použije, pokud natíráme pouze boční stěny a spodní podstavu? [3,3 l]

38) Michaela má ve své sbírce dvě vázy. První váza má tvar kužele s průměrem podstavy d = 20 cm; druhá váza má tvar komolého kužele s průměrem spodní podstavy d_1 = 25 cm a s průměrem horní podstavy d_2 = 15 cm. Do které vázy se vejde více vody, pokud výška obou váz je 0,5 m? [komolé]

39) Kolik procent objemu krychle, jejíž hrana je 6 m dlouhá, tvoří objem koule vepsané do této krychle? [52,4 %]

40) Kolik procent povrchu koule o poloměru 12 cm tvoří povrch krychle vepsané do této koule? [63,7 %]

41) Je dán komolý jehlan $ABCDEFGH$ se čtvercovými podstavami. Vypočítejte vzdálenost rovin $ABCD$ a $EFGH$, pokud znáš $|AC|$ = 13 cm, $|FH|$ = 9 cm a $|AG|$ = 15 cm. $\left[v' = 2\sqrt{26} = 10{,}2\text{ cm}\right]$

42) Je dán trojboký hranol $ABCDEF$ s podstavou pravoúhlého trojúhelníku s pravým úhlem při vrcholech C a F. Délky odvěsen jsou $|AC|$ = 8 m, $|BC|$ = 6 m a výška hranolu v = 15 m. Vypočítejte vzdálenost bodu E od bodu S a velikost úhlu $\varphi = |\sphericalangle BSE|$, pokud S je střed hrany AC. $\left[|ES| = \sqrt{277} = 16{,}6\,m;\ \varphi = |\sphericalangle BSE| = 64°19'\right]$

43) Je dána krychle $ABCDEFGH$ a na její hranách body $X \in EH$, $Y \in AB$, $Z \in GH$, přičemž platí $|EH| = |XH|$, $|AY| = |YB|$, $|ZH| = 3.|GZ|$. Vypočítejte úhel mezi přímkami AX a YZ. $[\varphi = 20°54']$

44) Je dána krychle $ABCDEFGH$, kde M je střed hrany AE a velikost hrany krychle je a. Vypočítej úhel přímek BH a BM. $[|\sphericalangle MBH| = 39°14']$

45) Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, $|AB| = a$, $|AV| = a$. Vypočítejte úhel dvou sousedních stěn jehlanu. $[\varphi = 109°30']$

46) Je dána krychle $ABCDEFGH$. Zjistěte, zda roviny DBH a ACF jsou na sebe kolmé. [A]

47) Je dán pravidelný šestiboký jehlan $ABCDEFV$, kde $|AB| = a$, $|AV| = 2a$ a bod M je středem hrany AV. Vypočítejte vzdálenost bodu M od přímky DV. $\left[d = \frac{\sqrt{3}}{2}a\right]$

48) Je dán kvádr $ABCDEFGH$. Vypočítejte vzdálenost přímky AC od přímky FH a objem kvádru, pokud $|AG| = 5$, $|AC| = 3$, $|AH| = 2\sqrt{5}$. $\left[c = 4;\ V = 8\sqrt{5} = 17{,}9\right]$

49) Je dána krychle $ABCDEFGH$, kde $|AB| = a = 5$ cm, bod M je středem hrany EF, bod K je středem hrany CD. Vypočítejte vzdálenost rovin BMG a HAK. $\left[d = \frac{5\sqrt{6}}{3} = 4{,}08\ \text{cm}\right]$

50) Je dán pravidelný 4-boký jehlan $ABCDV$, kde $|AB| = a = 4$ cm, $|AV| = b = 6$ cm. Vypočítejte úhel roviny BCV a ABC. $[\varphi = 69°18']$

51) Je dán pravidelný čtyřstěn $ABCD$, $|AB| = a$. Urči vzdálenost přímek, na kterých leží protilehlé hrany čtyřstěnu. $\left[d = \frac{\sqrt{2}}{2}a\right]$

52) Na hranách krychle ABCDEFGH jsou dány tři body $K \in AE$, $L \in BF$, $M \in GH$. Sestrojte řez krychle rovinou KLM.

53) Středy všech hran krychle ABCDEFGH o hraně a určují polopravidelný mnohostěn. Sestrojte ho, určete, kolik má stěn a jaké mnohoúhelníky jsou jeho stěny. Vypočítejte objem polopravidelného mnohostěnu. $\left[\frac{5}{6}a^3\right]$

54) Do nálevky tvaru rovnostranného rotačního kužele o poloměru podstavy r je nalito množství vody rovnající se polovině objemu nálevky. Určete výšku hladiny vody od ústí nálevky. $\left[\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\sqrt[3]{4}r\right]$

55) Rovnostrannému rotačnímu kuželi o straně s je opsána koule a vepsána koule. Vypočítejte poměr objemů obou koulí. $[8:1]$

56) Obsahy tří stěn kvádru, které mají společný právě jeden vrchol, jsou S_1, S_2, S_3. Vypočítejte objem V kvádru. $\left[\sqrt{S_1S_2S_3}\right]$

57) V krychli označíme K, L, M středy tří hran, které vycházejí z jednoho jejího vrcholu. Rovina KLM dělí krychli na dvě části. Určete poměr objemů obou částí. $[1:47]$

58) V krychli ABCDEFGH o hraně a označme K střed stěny ABCD a L střed stěny BCGF. Určete obsah S trojúhelníku KLB. $\left[\frac{1}{8}\sqrt{3}a^2\right]$

59) V krychli ABCDEFGH o hraně a označme P střed hrany EH. Určete obsah S trojúhelníku BCP. $\left[\frac{1}{2}\sqrt{2}a^2\right]$

60) Pravidelný čtyřboký jehlan má úhlopříčku podstavy velikosti $4\sqrt{2}$ cm a boční hranu velikosti $2\sqrt{5}$ cm. Určete jeho objem V a povrch S. $\left[\frac{32}{3}\sqrt{3}\ \text{cm}^3; 48\ \text{cm}^2\right]$

61) Podstavou čtyřbokého jehlanu je stěna krychle o hraně a. Jeho vrchol je jeden z vrcholů protější stěny této krychle. Určete povrch S jehlanu. $\left[a^2(2+\sqrt{2})\right]$

62) V krychli ABCDEFGH o hraně a je bod K střed hrany AE, bod M střed hrany BC a bod N střed hrany CG. Sestrojte řez krychle rovinou KMN a určete jeho obsah. $\left[\frac{3}{4}\sqrt{3}a^2\right]$

63) Určete středový úhel α kruhové výseče, do které se rozvine plášť rovnostranného rotačního kužele o poloměru podstavy r. [π]

64) Určete výšku v a objem V pravidelného čtyřstěnu ABCD o hraně a. $\left[v = \frac{1}{3}\sqrt{6}a; \mathrm{V} = \frac{1}{12}\sqrt{2}a^3\right]$

65) Krychle a koule mají stejný objem. Určete poměr jejich povrchů. $\left[\sqrt[3]{6} : \sqrt[3]{\pi}\right]$

66) Krychle a koule mají stejný povrch. Určete poměr jejich objemů. $\left[\sqrt{\pi} : \sqrt{6}\right]$

67) Do pravidelného čtyřbokého hranolu, který má hranu a a výšku $2a$, je vepsán rotační válec. Určete poměr povrchů obou těles. $[4 : \pi]$

68) Do krychle je vepsán válec. Určete poměr povrchů obou těles. $[4 : \pi]$

69) Pravidelnému čtyřbokému hranolu je opsán rotační válec. Určete poměr objemů obou těles. $[2 : \pi]$

70) Kvádru o hranách velikosti 2 cm, 3 cm, 4 cm jsou opsány tři válce tak, že protější stěny kvádru jsou vepsány do podstav válců. Určete poměr objemů všech tří opsaných válců. $[26 : 25 : 30]$

71) Určete objem V a povrch S pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu, jehož jedna podstava má hranu velikosti 10 m, druhá 8 m a odchylka bočních stěn od podstavy je 45°. $\left[\mathrm{V} = \frac{244}{3}\ \mathrm{m}^3; \mathrm{S} = \left(164 + 36\sqrt{2}\right)\mathrm{m}^2\right]$

72) Obdélník o stranách a, b ($a \neq b$) je rozvinutým pláštěm dvou různých válců. Vypočítejte jejich objemy a povrchy. $\left[\frac{a^2b}{4\pi}, \frac{ab^2}{4\pi}, \frac{a(a+2\pi b)}{2\pi}, \frac{b(b+2\pi a)}{2\pi}\right]$

73) Vypočítejte objem V a povrch S krychle vepsané do koule o poloměru r. $\left[\mathrm{V} = \frac{8}{9}\sqrt{3}r^3, \mathrm{S} = 8r^2\right]$

74) Do koule o poloměru r jsou vepsány dva shodné rotační kužele se společnou podstavou o poloměru r. Vypočítejte poměr povrchu sjednocení obou kuželů a povrchu koule. $\left[\sqrt{2} : 2\right]$

75) Do koule o poloměru r jsou vepsány dva shodné rotační kužele se společnou podstavou o poloměru r. Vypočítejte poměr objemu sjednocení obou kuželů a objemu koule. $[1 : 2]$

76) Střed stěny krychle je společným vrcholem dvou rotačních kuželů. Podstava prvního kužele je opsána a podstava druhého kužele je vepsána protější stěně krychle. Určete poměr objemů kuželů. $[2 : 1]$

77) Vypočítejte poměr objemů krychle kouli vepsané a krychle této kouli opsané. $\left[\sqrt{3} : 9\right]$

78) Zmenšíme-li poloměr podstavy kužele o polovinu a jeho výšku zvětšíme o 20 %, o kolik procent se zmenší jeho objem? [70 %]

79) Vypočítejte objem V tělesa, které vznikne rotací čtverce o straně a kolem jeho úhlopříčky. $\left[\frac{1}{6}\sqrt{2}\pi a^3\right]$

80) Do polokoule o poloměru r je vepsána krychle tak, že jedna její stěna leží v podstavě polokoule a zbývající vrcholy na kulovém vrchlíku. Určete hranu a krychle. $\left[a = \frac{1}{3}\sqrt{6}r\right]$

81) Vypočtěte hranu a krychle vepsané do rovnostranného kužele ($s = 2r$). $\left[a = \frac{\sqrt{6}r}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right]$

82) Do koule o poloměru r je vepsán rovnostranný rotační válec a rovnostranný rotační kužel (viz obrázek osového řezu). Vyjádřete objem V_v válce pomocí objemu V_s koule a objemu V_k kužele. $\left[\mathrm{V_v} = \sqrt{\mathrm{V_s}.\mathrm{V_k}}\right]$

83) Do koule o poloměru r je vepsán válec rovnostranný rotační a rovnostranný rotační kužel. Vyjádřete povrch S_v válce pomocí povrchu S_s koule a povrchu S_k kužele. $\left[S_V = \sqrt{S_S . S_K}\right]$

84) Dva rotační válce o poloměrech podstav r_1, r_2 mají stejný objem. Určete poměr obsahů jejich plášťů. $[r_2 : r_1]$

85) Rovnostrannému rotačnímu kuželi je opsána a vepsána koule. Určete poměr povrchů obou koulí. $[1:4]$

86) Jsou dány dva souosé rotační kužele takové, že vrchol jednoho kužele je středem podstavy druhého kužele. Jestliže poloměry jejich podstav jsou r_1, r_2, určete poloměr r kružnice, ve které se protínají jejich pláště. $\left[r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}\right]$

87) Určete poměr obsahů plášťů dvou rotačních válců o poloměrech podstav r_1, r_2, a výškách v_1, v_2, pro které platí $r_1 : r_2 = v_1 : v_2$. $[r_1^2 : r_2^2]$

88) Určete poměr obsahů plášťů dvou rotačních kuželů o poloměrech podstav r_1, r_2, a výškách v_1, v_2, pro které platí $r_1 : r_2 = v_1 : v_2$. $[r_1^2 : r_2^2]$

89) Kouli o poloměru r je opsán rotační kužel o výšce v = 4r. Vypočítejte objem kužele pomocí objemu V koule. $[2V]$

90) Určete poměr povrchů tří těles, která vzniknou rotací pravoúhlého trojúhelníku ABC o přeponě c a odvěsnách a, b, kolem jeho stran.
$[S_a : S_b : S_c = bc(b+c) : ac(a+c) : ab(a+b)]$

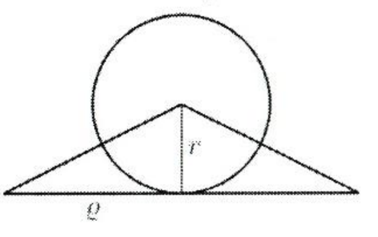
91) Určete poměr objemů tří těles, která vzniknou rotací pravoúhlého trojúhelníku ABC o přeponě c a odvěsnách a, b, kolem jeho stran. $\left[V_a : V_b : V_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}\right]$

92) Kružnici o poloměru r je opsán čtverec a rovnostranný trojúhelník tak, že mají společnou osu o souměrnosti kolmou na jejich stranu (viz obrázek). Při otáčení kolem osy o vzniká rotační válec, rotační kužel a koule. Určete poměr povrchů a poměr objemů všech tří těles. $[9:6:4]$

93) Určete poměr poloměrů tří koulí, z nichž první je krychli o hraně a opsána a druhá je krychli vepsána, třetí koule se dotýká všech hran krychle. $[\sqrt{3} : 1 : \sqrt{2}]$

94) Ukažte, že povrch koule, která se dotýká všech hran krychle o hraně a, je roven rozdílu povrchů koulí této krychli opsané a vepsané. $[S_o = 3\pi a^2, S_v = \pi a^2, S = 2\pi a^2]$

95) Střed koule o poloměru r je vrcholem rotačního kužele, jehož podstava se koule dotýká. Určete poloměr ρ podstavy kužele, je-li objem koule a kužele stejný. $[\rho = 2r]$



96) Střed koule o poloměru r je vrcholem rotačního kužele, jehož podstava se koule dotýká. Určete poloměr ρ podstavy kužele, je-li povrch koule a kužele stejný. $\left[\rho = \frac{4}{3} r\right]$

97) Pravidelný trojboký jehlan ABCV je vepsaný do polokoule o poloměru r tak, že jeho podstava ABC je vepsaná hraničnímu kruhu polokoule. Určete objem jehlanu. $\left[\frac{1}{4}\sqrt{3} r^3\right]$

98) Kouli je opsána a vepsána krychle (viz obrázek osového řezu). Vypočítejte poloměr r koule, je-li dán rozdíl S povrchů obou krychlí. $\left[R = \frac{1}{4}\sqrt{S}\right]$

99) Do koule o poloměru r jsou vepsány dva rotační kužele se společnou podstavou (viz obrázek osového řezu). Určete objem sjednocení kuželů, jestliže poměr jejich výšek je 1 : 3. $\left[V = \frac{1}{2}\pi r^3\right]$

100) Do koule o poloměru r jsou vepsány dva rotační kužele se společnou podstavou (viz obrázek z úlohy 99). Určete povrch sjednocení kuželů, jestliže poměr jejich výšek je 1 : 3. $\left[S = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 3)\pi r^2\right]$

101) Do rotačního kužele je vepsán rotační válec o poloviční výšce. Určete poměr jejich objemů. [3 : 8]

102) Vypočtěte poměr objemu krychle ABCDEFGH a objemu jehlanu ABCF. [6 : 1]

103) Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku s ramenem a kolem jeho přepony. $\left[\frac{\pi a^3}{3\sqrt{2}}\right]$

104) V jaké výšce je odříznuta špička pravidelného čtyřbokého jehlanu rovinou rovnoběžnou s podstavou, zbude-li těleso s polovičním objemem? Výška jehlanu je 50 cm. [10,3 cm]

105) Jakou celkovou hmotnost mají skruže ve studni, která má vnitřní průměr 80 cm, skruže jsou 10 cm silné a sahají ode dna do výšky 5 m. Hustota betonu je 2400 kg.m^{-3}. [3 393 kg]

106) Umyvadlo má tvar kulového pásu, který zbude po oddělení úseče z polokulové plochy. Spodní průměr je 30 cm, horní 50 cm a výška 20 cm. Hladina vody je ve $\frac{3}{4}$ výšky umyvadla. Kolik litrů vody je v umyvadle? [21,2 l]

107) Dřevěný sloup má tvar pravidelného trojbokého hranolu, váží 150 kg a je vysoký 160 cm (hustota dřeva je 150 kg.m^{-3}). Jedna plechovka barvy postačí na nátěr plochy 5 m^2. Pro dva nátěry sloupu je třeba koupit: a) 1 plechovku, b) 2 plechovky, c) 3 plechovky, d) aspoň 4 plechovky. [c]

108) Sloup vysoký 20 m je ve $\frac{3}{4}$ připevněn osmi lany, jejichž délka je 25 m. Konce lan jsou od sebe stejně vzdálené. Jaká je tato vzdálenost? [cca 15 m]

109) Nádrž o objemu 50 l plníme benzínem hadicí, která má vnitřní průměr 20 mm. Je-li rychlost proudu v hadici 10 m.s^{-1}, za jak dlouho nádrž naplníme? [16 s]

110) Jakou plochu na Zemi zaujímá mírný pás, rozprostírá-li se od 23°27′do 66°23′severní šířky a poloměr Země je 6 378 km? [132 473 222 km^2]

111) Dutá polokoule má vnitřní průměr 56 cm. Kolik litrů vody obsahuje, je-li hladina vody ve výšce 10 cm? [7,75 l]

112) Z jaké výšky je vidět povrch Země o rozloze 200 000 km^2? [5 km]

113) Sestrojte řez jehlanu ABCV rovinou ρ, která je určena vnitřním bodem X úsečky AV a přímkou p, která leží v rovině dolní podstavy ABC a je rovnoběžná s hranou BC.

114) Sestrojte průsečík přímky XY s rovinou zadní stěny krychle ABCDEFGH. Bod X je uvnitř hrany EH, bod Y je uvnitř hrany BF.

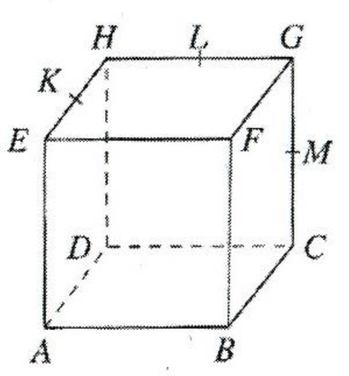
115) Sestrojte průsečík přímky XY s rovinou dolní podstavy jehlanu ABCV. Bod X leží na hraně AV, bod Y je ve stěně BCV.

116) Sestrojte řez jehlanu ABCDEV rovinou, která je určena bodem X na hraně DV a přímkou p roviny ABV. Přímka p je rovnoběžná s hranou AB.

117) Vypočtěte odchylku přímek AK, FK v krychli ABCDEFGH, kde K je střed HG. [63°26′]

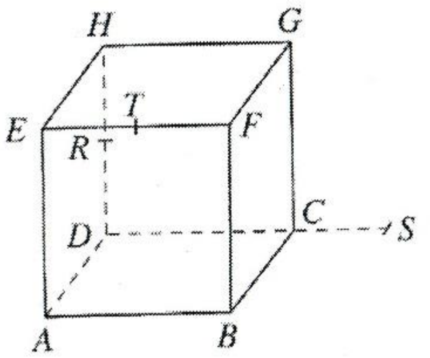
118) V pravidelném trojbokém jehlanu s podstavnou hranou délky a je odchylka boční stěny od roviny podstavy $\alpha = 60°$. Určete: a) délku boční hrany b b) její odchylku od roviny podstavy $\left[\frac{\sqrt{21}}{6}a; 40°54'\right]$

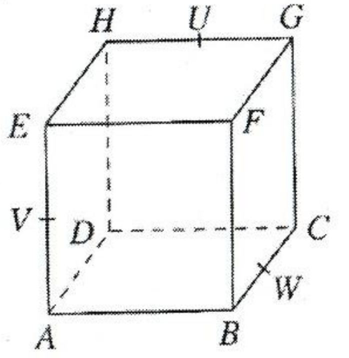
119) Sestrojte řez krychle ABCDEFGH rovinou KLM.



120) Sestrojte řez krychle ABCDEFGH rovinou RST.

121) Sestrojte řez krychle ABCDEFGH rovinou UVW.





122) V krychli ABCDEFGH vypočtěte odchylku přímky FS a roviny ACH, kde S je střed podstavy ABCD. [70,6°]

123) V krychli je odchylka tělesové úhlopříčky a roviny stěny krychle a) menší než 45°, b) 45°, c) v intervalu (45°; 60°), d) 90°. [a]

124) V pravidelném čtyřbokém jehlanu ABCDV, kde |AB| = |AV| = a, je odchylka sousedních bočních stěn: a) větší než 100° b) v intervalu (90°;100°⟩ c) 90° d) menší než 90° [a]

125) V krychli ABCDEFGH, kde |AB| = a = 3, vypočtěte vzdálenost bodu C od roviny DBG. $[\sqrt{3}]$

126) V kvádru ABCDEFGH, kde |AB| = |AD| = 2, |AE| = 4, vypočtěte vzdálenost bodu E od roviny HFA. [4/3]

127) Vypočtěte vzdálenost bodu E od tělesové úhlopříčky BH v krychli ABCDEFGH o hraně a. $\left[a\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$

128) Je umístěna krychle ABCDEFGH s délkou hrany 4 cm a bod X(X ∈→FE ∧ X ∉ EF ∧ |EX| = 2 cm). Sestrojte průsečíky přímky XC s rovinou BFD a s povrchem krychle.

129) Je umístěna krychle ABCDEFGH s hranou délky 4 cm a body X, Y, Z (X je střed AB, Y ∈ BF ∧ |BY| = 3 cm, Z ∈ →DH ∧ Z ∉ DH ∧ |HZ| = 1 cm). Sestrojte řez krychle rovinou XYZ.

130) Je umístěn pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV (podstavná hrana 4 cm, tělesová výška 6 cm), střed jeho podstavy je S, a body P, Q, R (P je střed DV, Q ∈ → DA ∧ |QA| = |DA|, |RS| = 1,8 cm ∧ R ∈ SV). Sestrojte řez jehlanu rovinou PQR.

131) Je umístěna krychle ABCDEFGH s hranou délky 4 cm a body K, L, M (K ∈ DH ∧ |DK| = 1 cm, L ∈ → CG ∧ L ∉ CG ∧ |LG| = 2 cm, M ∈ GH ∧ |MG| = 3 cm). Sestrojte průsečnici rovin ρ a σ, je-li ρ ∥ ↔BCD ∧ K ∈ ρ, σ = ↔ FLM. Označte ji p.

132) Je umístěna krychle ABCDEFGH s hranou délky 4 cm, K je střed hrany DH. Určete odchylku ↔ CK a ↔ BH konstrukčně i výpočtem. [39,23°]

133) Je umístěn pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV (podstavná hrana 4 cm, tělesová výška 6 cm), U je střed AB, Y je střed BC, X střed DV. Určete odchylku ↔ UY a ↔ CX konstrukčně i výpočtem. [35,26°]

134) Je umístěna krychle ABCDEFGH s hranou délky 4 cm, N je střed hrany CG. Vypočítejte velikost odchylky ↔ AN a ↔ HEF. [18,43°]

135) Je umístěn pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV (podstavná hrana 4 cm, tělesová výška 6 cm), Q je střed hrany BV, P střed hrany DV. Vypočítejte velikost odchylky ↔ ACQ a ↔ ACP. [90°]

136) Podstavou kolmého hranolu ABCDEFGH je lichoběžník ABCD. Jedna z jeho základen má velikost $2a$ cm, zbývající tři strany délku a cm, $a \in R^+$. Velikost bočních hran je také a cm. a) Pomocí proměnné a určete vzorec pro výpočet objemu a povrchu tohoto tělesa. b) Je-li objem tohoto hranolu 1 300 cm^3, jaký je jeho povrch?

$$\left[V = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^3; S = \frac{3\sqrt{3}+10}{2}a^2; a = 10\ cm; S = 759{,}8\ cm^2\right]$$

137) Všechny stěny rovnoběžnostěnu ABCDEFGH jsou shodné kosočtverce (strana je 30 cm, vnitřní úhel 60°). Boční hrana svírá s rovinou podstavy úhel $\varepsilon = 60°$. Vypočítejte objem tohoto tělesa. [$20\ 250\ cm^3$]

138) Podstavou čtyřbokého jehlanu ABCDV je obdélník, délky jeho stran jsou v poměru $\sqrt{2} : 1$. Řez jehlanu rovinou ACV je rovnostranný trojúhelník o obsahu S = 20, 78 cm^2. Vypočítejte objem tohoto jehlanu. [$44{,}8\ cm^3$]

139) Velikost boční hrany pravidelného čtyřbokého jehlanu ABCDV je dvojnásobkem velikosti výšky tohoto tělesa. Středem boční hrany je vedena rovina rovnoběžná s podstavou. Čtvercový řez A'B'C'D' je tak podstavou jehlanu A'B'C'D'V a současně i jednou z podstav komolého jehlanu ABCDA'B'C'D'. Zjistěte, kolikrát je objem komolého jehlanu větší než objem jehlanu A'B'C'D'V. [$7x$]

140) Poměr obsahu pláště rotačního válce k obsahu jeho podstavy je 7 : 6. Úhlopříčka osového řezu válce má délku 50 cm. Určete objem tohoto tělesa (výsledek zapište jako násobek π). [$8064\ \pi\ cm^3$]

141) Pláštěm rotačního kužele je čtvrtkruh o poloměru s = 20 cm. Určete objem tohoto tělesa. [$507\ cm^3$]

142) Poloměry podstav rotačního komolého kužele jsou 2 cm a 4 cm, obsah pláště je 75 % povrchu tělesa. Vypočítejte jeho objem. [$287{,}3\ cm^3$]

143) Kulová plocha je rozdělena rovinným řezem na dva vrchlíky, jejichž obsahy jsou 125 π cm^2 a 500 π cm^2. Obsah řezu vyjádřete jako násobek π. [$100\ \pi\ cm^2$]

144) Kulová plocha, její poloměr je 26 cm, je rozdělena rovinným řezem na dva vrchlíky. Obsah řezu je 100 π cm^2. Určete obsah obou vrchlíků, vyjádřete jej jako násobek π. [$104\ \pi\ cm^2$]

145) Kulová vrstva je částí koule o poloměru 12 cm, přitom je středově souměrná podle středu koule S. Obsah kulového pásu, který tvoří část hranice této kulové vrstvy, je roven polovině povrchu koule. Vypočítejte objem kulové vrstvy. Výsledek vyjádřete jako násobek π.

146) Povrch krychle a objem krychle jsou vyjádřeny stejným číslem v dm^2, resp. v dm^3. Vypočtěte délku hrany krychle. [6]

147) Objem kvádru je 3600 cm^3. Určete délku nejkratší hrany, víte-li, že obsahy jistých tří stěn kvádru mají poměr 3:4:5. [$12\ cm$]

148) V rotačním kuželu o objemu 1280 cm^3 svírá strana kužele s rovinou podstavy úhel 60°. Vypočtěte poloměr podstavy. [8,9 cm]

149) Rotační kužel s výškou 50 cm byl rozříznut rovinou rovnoběžnou s podstavou tak, že vznikly rotační kužel a komolý kužel stejných objemů. Vypočtěte, jak vysoký je komolý kužel. [10,3 cm]

150) Předpokládejme, že Země je koule o poloměru 6378 km. Vypočtěte, jakou část povrchu Země je vidět z výšky h = 100 km. [0,77% povrchu Země]

151) Z 27 rtuťových kuliček o poloměru 1 mm vznikla jedna kulička. a) Vypočtěte poloměr vzniklé kuličky. b) Kolikrát menší je povrch vzniklé kuličky ve srovnání s povrchem původních 27 kuliček? [3 mm, 3x]

152) Z koule o poloměru r byla odříznuta kulová úseč. Výška kulové úseče je $\frac{r}{2}$. Zjistěte, jakou část z objemu koule tvoří objem odříznuté kulové úseče. [16%]

153) V pravidelném trojbokém jehlanu jsou boční hrany navzájem kolmé, velikost podstavné hrany je 30 cm. Určete objem jehlanu. [1591 cm^2]

154) Objem pravidelného trojbokého jehlanu je 1000 cm^3, odchylka boční hrany od výšky jehlanu je $\alpha = 18°$. Určete velikost boční hrany. [29,4 m]

155) Určete objem tělesa vzniklého rotací trojúhelníku ABC kolem strany BC, je-li dáno: $b = 25$ cm, $\alpha = 78°$, $\gamma = 48°$. [10 922 cm^3]

156) Rotační kužel má výšku $v = 6$ cm, jeho plášť má číselně tolik m^2, kolik m^3 má jeho objem. Určete velikost úhlu při vrcholu osového řezu kužele. [60°]

157) Do koule, která má povrch S = 200 cm^2, je vepsán rotační kužel, jehož úhel při vrcholu má velikost $\varphi = 48°44'$. Určete objem kužele. [62,34 cm^2]

158) Určete objem a povrch komolého rotačního kužele, jehož jedna podstava má poloměr $r_1 = 35$ cm, odchylka strany od roviny podstavy je 60° a druhá podstava má poloměr rovný délce strany kužele. [54 724 cm^3, 9 830 cm^2]

159) Komolý rotační kužel má podstavy o poloměrech $r_1 = 8$ cm, $r_2 = 4$ cm a výšku $v = 5$ cm. Jaký je objem kužele, z něhož komolý kužel vznikl? [670,22 cm^3]

160) Komolý rotační kužel o poloměrech $r^1 = 10$ cm, $r^2 = 4$ cm a výšce $v = 27$ cm, byl rozdělen dvěma rovinami rovnoběžnými s podstavami na tři stejně vysoké části. Vypočítejte objemy vzniklých částí. [732 π cm^3, 444 π cm^3, 228 π cm^3]

161) Povrch komolého rotačního kužele o straně $s = 13$ cm je S = 510 π cm2. Určete poloměry podstav, je-li jejich rozdíl 10 cm. [15cm, 5cm]

162) Určete objem pravidelného čtyřbokého jehlanu, jehož podstavná hrana má velikost 8,25 cm a odchylka boční hrany od roviny podstavy se rovná 52°36′. [173,2 cm^3, 122,4 cm^3]

163) Pravidelný osmiboký jehlan má objem 84 dm^3, odchylku boční hrany od roviny podstavy 30°45′. Určete velikost podstavné hrany a výšky jehlanu. [54,6 cm, 32,5 cm]

164) Povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu je 360 cm^2, jeho objem 400 cm^3. Určete délku hrany podstavy a výšku tělesa. [10 cm, 12 cm nebo $4\sqrt{5}$ cm, 15 cm]

165) Poměr pláště rotačního válce k jeho podstavě je 5:3. Úhlopříčka osového řezu se rovná 36 cm. Vypočítejte objem válce. [12008 ???]

166) Do podstavy rovnostranného válce je vepsán pravidelný osmiúhelník, jehož strana má velikost $a = 10$ cm. Jak velký je objem válce? [14 014 cm^3]

167) Délky stěnových úhlopříček kvádru jsou v poměru $\sqrt{10}:\sqrt{17}:5$. Určete rozměry kvádru, je-li jeho objem 96 cm^3. [2 cm, 6 cm, 8 cm]

168) Dřevěný sloup tvaru rotačního válce o průměru 0,3 m a výšce 3 m byl opracován do tvaru pravidelného osmibokého hranolu. Jakou hmotnost má upravený sloup, je-li hustota dřeva $\rho = 800$ kg.m-3? O kolik procent se zmenšil objem původního sloupu při této úpravě? [153 kg, 10 %]

169) Tělesová úhlopříčka kvádru má délku 140 cm. Obsahy tří stěn, které procházejí týmž vrcholem kvádru, jsou v poměru 3:2:1. Určete délku stran kvádru.[40 cm, 60 cm, 120 cm]

170) Povrch kvádru je 78 cm^2, součet jeho rozměrů 13 cm. Vypočtěte jeho objem, tvoří-li rozměry kvádru tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. [27 cm^3]

171) Podstava kolmého hranolu je pravoúhlý trojúhelník, jehož odvěsny mají délky v poměru 3:4. Výška hranolu je o 2 cm menší než větší odvěsna podstavy a povrch hranolu je 468 cm^2. Vypočtěte objem hranolu. [9 cm, 12 cm, 15 cm, $v = 10$ cm, V = 540 cm^3]

172) Určete povrch a objem rotačního válce, který je vepsán do koule o poloměru $r = 5$ cm, jestliže se plošný obsah pláště válce rovná součtu obsahů obou jeho podstav. [$S = 80\pi$ cm^2, $V = 40\pi\sqrt{5}$ cm^3]
173) Dva rovnostranné válce mají objemy v poměru 8 : 27. V jakém poměru jsou jejich povrchy? [4 : 9]
174) Do rotačního kužele je vepsán rotační válec, jehož výška se rovná polovině výšky kužele. Určete poměr objemů obou těles. [8:3]
175) Určete poměr objemů tří válců opsaných kvádru o rozměrech $a = 2$ cm, $b = 3$ cm, $c = 4$ cm. [25:26:30]
176) Určete hustotu koule, která plave na vodě ponořená do tří pětin svého průměru.[648 kg.m^{-3}
177) Jakou tloušťku stěny musí mít dutá měděná koule o hmotnosti 1 kg, aby se vznášela ve vodě? ($\rho = 8900$ kg.m-3) [2,5 mm]
178) Dutá zinková koule o průměru 20 cm se ponoří ve vodě do tří čtvrtin svého průměru. Jaká je tloušťka stěny?($\rho = 7200$ kg.m^{-3}) [3,6 mm]
179) Kulová úseč má objem 850 cm^3 a výšku 5 cm. Určete poloměr koule, jejíž částí je daná úseč. [12,5 mm]
180) Dutá polokoule má vnitřní průměr $d = 28$ cm. Kolik litrů vody je v ní, naplní-li ji voda do výšky 10 cm? [3,35 l]
181) Kolik litrů vody se vejde do duté kulové úseče, je-li poloměr podstavy úseče 30 cm a výška úseče 15 cm? [23 l]
182) Určete objem kulové vrstvy, která vznikne z polokoule o poloměru $r = 5$ cm odříznutím úseče o výšce $v = 1,5$ cm. [230 cm^3]
183) Ze dvou koulí o poloměrech $r_1 = 1$ cm a $r_2 = 5$ cm je ulita jedna koule. Určete její poloměr a povrch. [5 cm, 316 cm^3]
184) Určete velikost středového úhlu, který přísluší vrchlíku, jehož obsah je pětinou povrchu koule. [106°15′]
185) Z koule o poloměru $r = 8$ cm je oddělena úseč, jejíž výška je třetina průměru koule. Určete povrch kulové úseče. [446,81 cm^2]
186) Určete povrch a objem kulové úseče, je-li poloměr koule 5 cm a poloměr řezu 3 cm. [60 cm^2 a 15 cm^3 nebo 311 cm^2 a 509 cm^3]
187) Nádoba tvaru polokoule je zcela naplněna vodou. a) Nakloníme-li ji o úhel $\alpha = \pi/6$, vyteče z ní jisté množství vody. Kolik procent obsahu plochy vnitřku nádoby bude smáčet zbývající voda? b) Nakloníme-li ji o úhel $\alpha = \pi/6$, vyteče z ní 11 litrů vody. Kolik litrů vody v ní zůstane? [50%, 5 litrů]