1. (15 bodů) Rychlost aut v obci je omezena na 50 km/hod. Její skutečná hodnota je náhodná veličina X, která má normální rozdělení. Z naměřených hodnot vyplývá, že 45 % řidičů překročí rychlost 60 km/hod a 20 % řidičů překročí rychlost 70 km/hod.

   a) Určete parametry rozdělení. *(5 bodů)*

   b) Vypočtěte, kolik procent řidičů dodrží předepsané omezení rychlosti. *(5 bodů)*

   c) Nalezněte symetrický oboustranný interval spolehlivosti, ve kterém se vyskytuje rychlost auta s pravděpodobností $P_0 = 0.9$. *(5 bodů)*

Řešení:

a) Rychlost aut je náhodná veličina X, která má normální rozdělení $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Jeho parametry určíme z podmínek

$$\begin{aligned} P(X > 60) &= 1 - F_X(60) = 0.45\,,\\ P(X > 70) &= 1 - F_X(70) = 0.2\,. \end{aligned}$$

Odtud dostaneme

$$\begin{aligned} F_X(60) &= \Phi\left(\frac{60-\mu}{\sigma}\right) = 0.55\,,\\ F_X(70) &= \Phi\left(\frac{70-\mu}{\sigma}\right) = 0.8\,,\\ \frac{60-\mu}{\sigma} &= \Phi^{-1}(0.55) \doteq 0.126\,,\\ \frac{70-\mu}{\sigma} &= \Phi^{-1}(0.8) \doteq 0.842\,. \end{aligned}$$

Dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \mu + 0.126\,\sigma &\doteq 60\\ \mu + 0.842\,\sigma &\doteq 70 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &(0.842 - 0.126)\,\sigma \doteq 10 \Rightarrow \sigma \doteq \tfrac{10}{0.716} \doteq \mathbf{13.9665}\\ &\mu \doteq 60 - 0.126 \cdot 13.9665 \doteq \mathbf{58.24} \end{aligned}$$

b) Pro procento řidičů, kteří dodrží předepsanou rychlost, dostaneme

$$\begin{aligned} P(X \le 50) = F_X(50) = \Phi\left(\frac{50-\mu}{\sigma}\right) &\doteq \Phi\left(\frac{50-58.24}{13.9665}\right) \doteq\\ &\doteq \Phi(-0.59) \doteq 1 - \Phi(0.59) = 1 - 0.72235 \doteq \mathbf{0.2777}\,. \end{aligned}$$

Předepsanou rychlost dodrží zhruba 28 % řidičů.

c) Pro hledaný interval spolehlivosti $P(a < X < b) = 0.9$ dostaneme podmínky

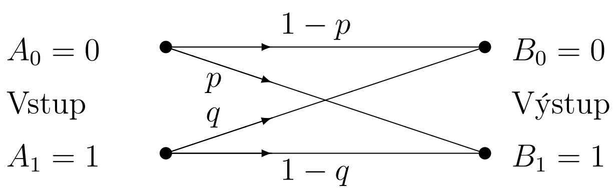
$$\begin{aligned} 0.95 = F_X(b) &\doteq \Phi\left(\frac{b-58.24}{13.9665}\right)\\ \frac{b-58.24}{13.9665} &\doteq 1.645\\ b &\doteq 58.24 + 1.645 \cdot 13.9665 \doteq \mathbf{81.21}\\ 0.05 = F_X(a) &\doteq \Phi\left(\frac{a-58.24}{13.9665}\right)\\ \frac{a-58.24}{13.9665} &= \Phi^{-1}(0.05) = -\Phi^{-1}(0.95) \doteq -1.645\\ a &\doteq 58.24 - 1.645 \cdot 13.9665 \doteq \mathbf{35.27}\,. \end{aligned}$$

Rychlost aut v obci se bude s 90% pravděpodobností pohybovat mezi 35 a 81 km/hod.

2. (15 bodů) Binárním informačním kanálem se šumem, který je znázorněn na obrázku, jsou vysílány znaky 0 a 1. Na základě pozorovaných četností znaků na vstupu a výstupu odhadněte parametry kanálu:

   a) parametr p metodou maximální věrohodnosti; *(8 bodů)*

   b) parametr q metodou momentů. *(7 bodů)*



četnosti	$B_0 = 0$	$B_1 = 1$
$A_0 = 0$	20	32
$A_1 = 1$	40	28

Řešení:

a) Označme X náhodnou veličinu, která odpovídá výstupu při vstupu $A_0 = 0$. Ta má diskrétní rozdělení, kde $X \in \{0, 1\}$ a pravděpodobnostní funkci p_X, kde $p_X(0) = 1-p$ a $p_X(1) = p,\ 0 \le p \le 1$. Odhad parametru p dostaneme metodou maximální věrohodnosti z realizace

u	0	1
četnost	20	32

Pro věrohodnostní funkci dostaneme vzorec

$$L(p) = p_X(0)^{20}\, p_X(1)^{32} = (1-p)^{20}\, p^{32},\ 0 \le p \le 1.$$

Protože je $L(0) = L(1) = 0$ a $L(p) > 0$ pro $p \in (0, 1)$, bude mít věrohodnostní funkce maximum ve stacionárním bodě. Pro něj dostaneme rovnici

$$L'(p) = -20\,(1-p)^{19}\, p^{32} + 32\,(1-p)^{20}\, p^{31} =$$
$$= (1-p)^{19}\, p^{31}\left(-20\,p + 32\,(1-p)\right) = (1-p)^{19}\, p^{31}\,(32 - 52\,p) = 0,\ 0 < p < 1 \Rightarrow$$
$$32 - 52\,p = 0 \Rightarrow p = \frac{32}{52} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{13}} \doteq \mathbf{0.6154}\,.$$

Protože je $0 < p \doteq 0.6154 < 1$, je tato hodnota použitelným odhadem parametru p.

b) Označme Y náhodnou veličinu, která odpovídá výstupu při vstupu $A_1 = 1$. Ta má diskrétní rozdělení, kde $Y \in \{0, 1\}$ a pravděpodobnostní funkci p_Y, kde $p_Y(0) = q$ a $p_Y(1) = 1-q,\ 0 \le q \le 1$. Odhad parametru q dostaneme metodou momentů z realizace

u	0	1
četnost	40	28

Pro náhodnou veličinu Y dostaneme

$$\mathrm{E}Y = 0 \cdot p_Y(0) + 1 \cdot p_Y(1) = 1 - q\,, \qquad m_1(Y) = \frac{1}{68}\,(0 \cdot 40 + 1 \cdot 28) = \frac{28}{68}\,.$$

Z rovnice $\mathrm{E}Y = m_1(Y)$ dostaneme pro odhad parametru q hodnotu

$$1 - q = \frac{28}{68} \Rightarrow q = \frac{40}{68} = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{17}} \doteq \mathbf{0.5882}.$$

Protože je $0 < q \doteq 0.5882 < 1$, je tato hodnota použitelným odhadem parametru q.

3. (15 bodů) Markovův řetězec má matici přechodu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

A. Oklasifikujte všechny stavy. *(2 body)*

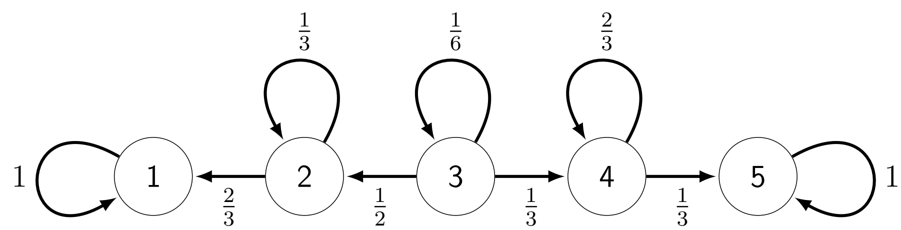
B. Stanovte všechny uzavřené množiny stavů. *(2 body)*

C. Stanovte rozdělení pravděpodobností stavů po třech krocích, jestliže začínáme ve stavu 3. *(4 body)*

D. Odhadněte rozdělení pravděpodobností stavů po 10 000 krocích, jestliže začínáme ve stavu 3. *(7 bodů)*

Řešení:

A. Nakreslíme si přechodový graf:



Stavy $2, 3, 4$ **jsou přechodné, stavy** $1, 5$ **absorpční.**

B. $\{\emptyset, \{\mathbf{1}\}, \{\mathbf{5}\}, \{\mathbf{1}, \mathbf{5}\}\}$.

C.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}(0) &= (0, 0, 1, 0, 0)\ , \\ \boldsymbol{p}(1) &= \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, 0\right)\ , \\ \boldsymbol{p}(2) &= \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{36}, \frac{5}{18}, \frac{1}{9}\right)\ , \\ \boldsymbol{p}(3) &= \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{72}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{216}}, \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{36}}, \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{54}}\right)\ . \end{aligned}$$

D. Permutací stavů $(1, 5, 2, 3, 4)$ dostaneme matici přechodu ve tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_2 & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Fundamentální matice je

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ \frac{9}{10} & \frac{6}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Matice

$$\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

udává asymptotické pravděpodobnosti dosažení absorpčních stavů z přechodných. Její druhý řádek odpovídá zadání, že začínáme ve stavu 3. Pravděpodobnosti po 10 000 krocích budou blízké asymptotickým. Asymptotické rozdělení pravděpodobností všech původních stavů je $\left(\boldsymbol{\frac{3}{5}}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\frac{2}{5}}\right)$.

K tomuto výsledku jsme mohli snáze dospět tak, že stav 3 opustíme do stavu 2 nebo 4, s pravděpodobnostmi v poměru $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$, tedy po řadě $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{5}$. Poté s podmíněnou pravděpodobností 1 skončíme v příslušném absorpčním stavu, 1, resp. 5.