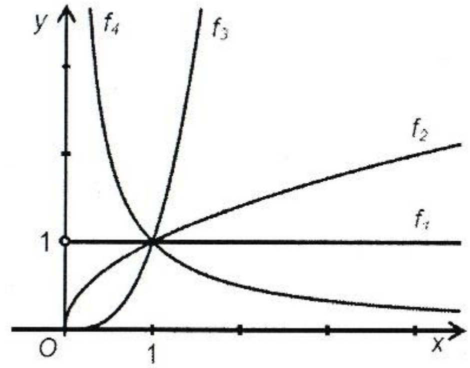
03 – Funkce polynomické a racionální

✓ 1) Reálná funkce f s reálnou proměnnou x je dána předpisem: $f(x) = 1 - \frac{1}{x+3}$. Určete průsečíky X, Y grafu funkce f s osami soustavy souřadnic. Sestrojte graf funkce f.

? 2) V $R \times R$ je dána funkce $f: y = 5 - 8x - 4x^2$. a) V intervalu $\langle -2;1 \rangle$ určete minimum funkce f. b) Určete maximum funkce f v jejím definičním oboru.

✓ 3) V prvním kvadrantu jsou zobrazeny grafy mocninných funkcí s předpisem $y = x^q$. U které z funkcí f_1 až f_4 má exponent q hodnotu z intervalu $(0; 1)$? (obr.)



? 4) Jsou dány funkce f a g s reálnou proměnnou x a reálným koeficientem b:

$f: y = b - x$

$g: y = x^2 - bx$

Určete všechny hodnoty koeficientu b, pro něž mají grafy obou funkcí právě jeden společný bod.

5) U každé funkce doplňte chybějící údaj. (tabulka)

Předpis funkce: $y = a^x$	f_I	f_{II}	f_{III}
Základ $a > 0$	$\frac{\sqrt{5}}{3}$		$\frac{9}{5}$
Hodnota proměnné x	-2	$\frac{1}{4}$	
Hodnota funkce y		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

6) Jsou dány funkce f a g s reálnou proměnnou x a nenulovým reálným koeficientem b:

$f: y = b - x$

$g: y = \frac{b}{x}$

Určete všechny hodnoty koeficientu b, pro něž mají grafy obou funkcí právě jeden společný bod.

7) Funkce s předpisem $f: y = \frac{1}{16}(x+4)^2$ je definována pro $x \in \langle -4; \infty)$. Doplňte tabulku.

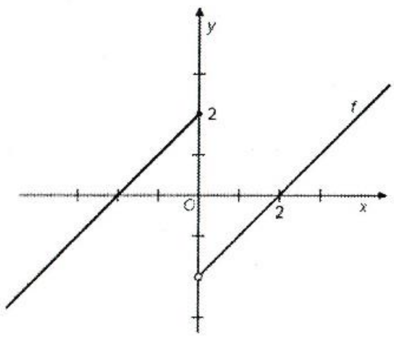
$x \geq -4$	0		4	
y	1	$\frac{1}{16}$		16

8) Určete obory hodnot funkcí: $f_1: y = |x+6| + x + 3$ ✓

? $f_2: y = |x+3| - |x+6|$

? $f_3: y = 3 - |x+6|$

✓ 9) V kartézské soustavě souřadnic Oxy je umístěn graf funkce f, jejíž definiční obor je $\mathcal{R}$. Hodnoty funkce g jsou druhými mocninami hodnot funkce f, tedy platí: $g: y = f^2(x)$. Jaký předpis má funkce g?



A) $y = x^2 + |4x - 4|$

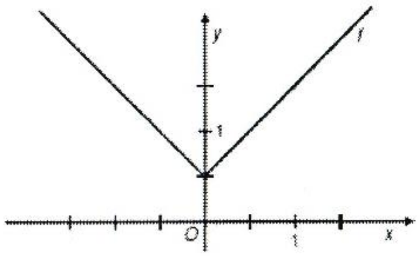
B) $y = x^2 - 4|x| + 4$

C) $y = |x-2|(x+2)$

D) $y = |x+2|(x-2)$

E) $y = |x^2 - 4x| + 4$

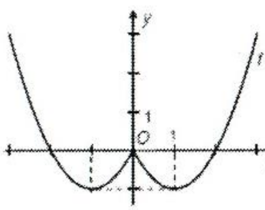
10) V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* je sestrojen graf funkce *f*. Hodnoty funkce *g* jsou převrácenými hodnotami funkce *f*, tedy platí: $g\colon y = \frac{1}{f(x)}$. Sestrojte graf funkce *g*.

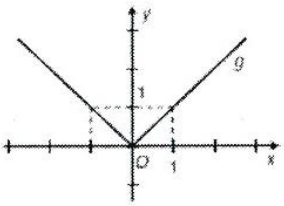


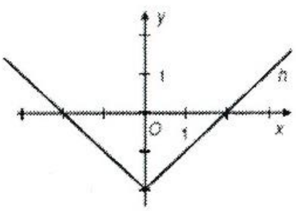
11) Předpis lineární lomené funkce je možné vyjádřit ve tvaru: $f\colon y = \frac{k}{x-m} + n$, kde *k*, *m*, *n* jsou reálná čísla a $k \neq 0$. Určete ke každé funkci odpovídající konstantu *k*.
$f_1\colon y = 1 - \frac{3}{x}$; $f_2\colon y = \frac{x-1}{x}$; $f_3\colon y = \frac{x-3}{x-1}$.

12) Pro kvadratickou funkci *f* platí: definiční obor je $D_f = \mathcal{R}$; obor hodnot je $H_f = (-\infty; 4\rangle$; $f_x \geq 0 \Leftrightarrow x \in \langle 0; 4\rangle$. Sestrojte graf funkce *f*. Zapište souřadnice vrcholu *V* grafu funkce *f*. Uveďte předpis funkce *f*.

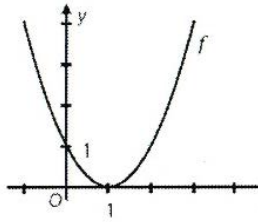
13) V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* jsou sestrojeny grafy funkcí *f*, *g*, *h*, které jsou definovány pro všechna $x \in \mathcal{R}$. Který z následujících vztahů platí pro všechna $x \in \mathcal{R}$? $f(x) = g(x) \cdot h(x), f(x) = g(x) + h(x), f(x) = g^2(x) - h(x)$,
$f(x) = |h(x) + 1| - 1, f(x) = |g(x) - 1| - 1$.

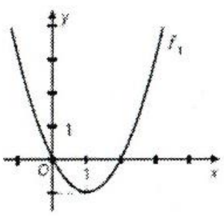


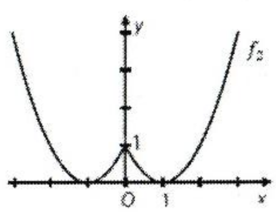




14) V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* je sestrojen graf funkce $f\colon y = (x-1)^2$ pro $x \in \mathcal{R}$. Posunutím grafu funkce *f* nebo posunutím a sjednocením jeho částí byly vytvořeny grafy funkcí f_1 a f_2. Zapište předpisy funkcí f_1 a f_2. Sestrojte graf funkce $f_3\colon y = |(x+2)^2 - 1|, x \in \mathcal{R}$.







15) Kvadratická funkce *f* je sudá, $f(1) = 1$ a graf funkce *f* má právě jeden společný bod s grafem funkce $g\colon y = cosx - 2$. Zapište předpis funkce *f*.

---

16) Zakreslete do soustavy souřadnic grafy funkcí: $f\colon y = \sqrt{x^2}$, $g\colon y = \frac{x^2+4x+4}{x+2}$,

$$h\colon y = (x+1)^2 - (x-2)^2, k\colon y = \frac{x^2-4}{x-2}, l\colon y = \sqrt{(x+2)^2}, m\colon y = 3 + \sqrt{x^2},$$

$$n\colon y = \left(\frac{\sqrt{x} - x}{1 - \sqrt{x}}\right)^2$$

17) Načrtněte graf funkce $f\colon y = 2|x-3| - |x+1|, x \in \langle 1; 5\rangle$.

18) Určete kvadratickou funkci, jejíž graf prochází body A, B, C: A[1, 4], B[2, 10], C[-1, -2].

19) Sestrojte grafy funkcí: $f{:}\, y = |-x^2 + 2x + 3|, g{:}\, y = -x^2 + 2|x| + 3,$
$h{:}\, y = x^2 + 3|x| + 1, j{:}\, y = -2x + |1 - x^2|, k{:}\, y = |x^2 - 5|x| + 6|$. Popište jejich vlastnosti.

? 20) Určete D_f, H_f a všechny vlastnosti funkce $f{:}\, y = \frac{3x+5}{x+1}, g{:}\, y = \frac{x^2-2x}{x^2-x-2}, h{:}\, y = \frac{2}{|x+1|},$
$j{:}\, y = \frac{(x+1)^2}{x^2+x}, k{:}\, y = \left|\frac{3}{x-3} + 2\right|, l{:}\, y = \frac{1}{|x|-3}, m{:}\, y = \frac{|x|+3}{x+3}, n{:}\, y = |x| + \frac{x+1}{|x+1|},$
$o{:}\, y = |x+2| + \frac{|x|}{x}, p{:}\, y = \frac{2+x}{2-|x|}$. Sestrojte graf funkce.

21) Určete definiční obory funkcí a sestrojte jejich grafy: $f{:}\, y = \sqrt{-x}, g{:}\, y = \sqrt{2-x} - 3$.

22) Určete definiční obory funkcí a sestrojte jejich grafy: $f{:}\, y = \frac{1}{(x+2)^2} - 1,$

$$g{:}\, y = 1 + \sqrt{x-4}, h{:}\, y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}, j{:}\, y = \frac{1}{(|x|-1)^2} + 1,$$

$$k{:}\, y = \sqrt{\frac{x+3}{x^2+5x+6}}, l{:}\, y = \left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[6]{x}}\right)^3, m{:}\, y = \left(\frac{\sqrt[3]{x^5} \cdot x}{\sqrt{\sqrt[3]{x^4}}}\right)^{\frac{1}{2}}, n{:}\, y = \sqrt[4]{\left(\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x^3}}\right)^3},$$

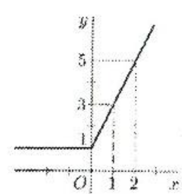
$$o{:}\, y = \left(\frac{\sqrt[4]{x^5}}{\sqrt{\sqrt{x}}}\right)^2, p{:}\, y = \sqrt{2x - |2x-4|}.$$

23) Určete definiční obor funkce: $y = \frac{3x-2}{x^2 - 3x - 10} + \sqrt{2x-6}$.

24) K dané funkci sestavte předpis pro funkci inverzní. Grafy obou funkcí zakreslete do téže soustavy souřadnic: $f{:}\, y = 2x - 4, x \in \langle 0; 6\rangle, g{:}\, y = -\frac{3}{x}, x \neq 0,$
$h{:}\, y = x^2, x \in \langle 0; \infty), j{:}\, y = 1 - \sqrt{x-2}, k{:}\, y = 2^x - 3$.

25) Řešte graficky v R: $3 - |x-1| = m, |x+2| - |x-1| \leq 4$.

26) Na obrázku je graf funkce: $a) y = |x| - x + 1, b) y = x - |x|,$
$c) y = x + |x| + 1, d) y = 2x + |x| - 1, e) y = 2x - |x|$.



27) Vrchol paraboly, která je grafem funkce $f{:}\, y = -2x^2 - 8x + 7$, je středem úsečky, jejímž jedním krajním bodem je počátek soustavy souřadnic a druhým krajním bodem bod:
$A[-4; 25], B[30; -4], C[-2; 15], D[15; -2], E[-4; 30]$.

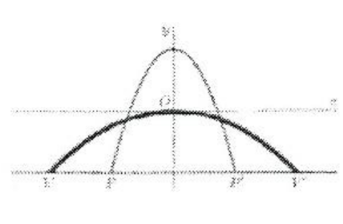
28) Jestliže funkce $f{:}\, y = \frac{1}{1-x}, x \in R - \{0; 1\}$, potom funkce $g{:}\, y = f(f(x))$ je dána předpisem: A) $y = \frac{1}{1-x}$, B) $y = \frac{x}{1-x}$, C) $y = \frac{x-1}{x}$, D) $y = 1 - x$, E) $y = 1 + x$.

29) Oborem hodnot funkce $f{:}\, y = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{2-x}$ je množina: A) $(-1; \infty)$, B) $\langle 1; \infty)$, C) $(-\infty; 0\rangle$, D) $(-\infty; 1\rangle$, E) $(-\infty; -1\rangle$.

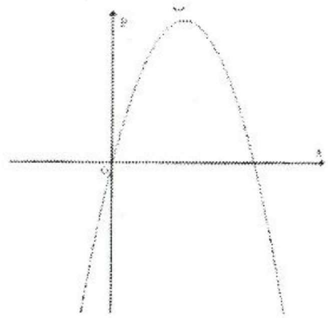
30) Jsou dány funkce $f{:}\, y = \frac{1}{2}x + 1$ a $g{:}\, y = 3x + 6$. Sestavte předpisy pro funkce f^{-1} a g^{-1} inverzní k funkcím *f*, *g* a v téže soustavě souřadnic *Oxy* sestrojte grafy všech čtyř funkcí. Vypočtěte délky úhlopříček čtyřúhelníku, který je ohraničen grafy funkcí f, g, f^{-1}, g^{-1}.

31) Je dána funkce $f{:}\, y = \frac{2(x^2-x)}{x^2+2x-3}$. Určete definiční obor a obor hodnot funkce *f* a sestrojte její graf. Napište předpis pro inverzní funkci f^{-1}, určete její definiční obor a obor hodnot.

32) Pěší lávka nad dálnicí má tvar části paraboly znázorněné na obrázku tučnou čarou. Její vrchol je 8 m nad povrchem dálnice. Oblouk podpírající lávku má rovněž tvar paraboly. Tato parabola je grafem funkce $y = -\frac{1}{4}x^2 + 8$ v soustavě souřadnic *Oxy*, vyznačené v obrázku s jednotkami délky 1 m



na obou osách. Vrchol podpěrného oblouku je 16 m nad povrchem dálnice. Vstupy na lávku V, V' jsou od pat oblouku P, P' vzdáleny 8 m. Určete funkci, jejímž grafem v uvažované soustavě souřadnic je část paraboly znázorňující lávku.



33)Pro nepřímou úměrnost f platí $f(3) = f(2) - 3$. Určete její předpis.

34)Vyberte předpis kvadratické funkce, jejíž graf je na obrázku: a) $y = -x^2 + 4x$, b) $y = -x^2 - 4x$, c) $y = x^2 + 4x$, d) $y = x^2 - 4$.

35)Určete, ve kterém bodě nabývá funkce $y = x^2 - 6x + 2$ extrému. O jaký extrém se jedná, jakou má hodnotu? Určete obor hodnot.

36)Graf kvadratické funkce je klesající v intervalu $(-\infty; 0)$ a rostoucí v $(0; \infty)$, prochází body $[-2; 6]$ a $[1; 0]$. Určete předpis funkce.

37) Jirka má k dispozici 100 metrů pletiva a jeho úkolem je oplotit 3 strany obdélníku. Čtvrtá strana bude tvořena částí sousedova plotu, který je dostatečně dlouhý. Napište, jak závisí obsah S na délce jedné ze dvou stran x, které přiléhají k sousedově parcele. Určete, pro které x bude obsah S maximální. Tento maximální obsah vypočtěte.

38) Honza plánuje vyrábět určité výrobky. Chce je prodávat za 52 Kč za kus, tedy za x výrobků získá příjmy $p = 52x$. Honza odhaduje, že náklady lze popsat funkcí $n = 1000 + 2x + 0{,}1x^2$, kde x je počet výrobků. Zisk z určíme jako rozdíl příjmů a nákladů. Napište funkci pro zisk. Při jakém počtu výrobků dosáhne Honza maximálního zisku? Jaký bude tento maximální zisk? Předpokládáme, že prodá vše, co vyrobí.

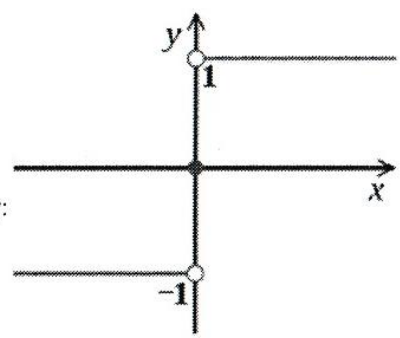
39) Načrtněte graf funkce $f: y = x^2.sgn(x + 2), g: y = (x - 2).sgn(x - 1)$

Reálné signum je definováno následujícím způsobem:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & : \quad x < 0 \\ 0 & : \quad x = 0 \\ 1 & : \quad x > 0 \end{cases}$$

Libovolné číslo lze tedy vyjádřit jako součin znaménka a absolutní hodnoty:

$$x = \operatorname{sgn}(x) \cdot |x|$$

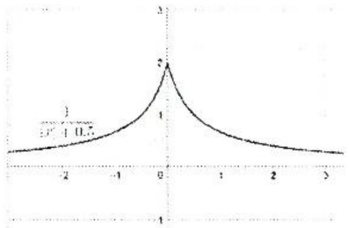


40) Zjistěte, zda číslo je celé a) $\frac{[\pi]+\left[-\frac{10}{11}\right]+[10^{-5}]}{[\sqrt{5}]}$, b) $\frac{[\sqrt[3]{10}]+\left[-\frac{22}{7}\right]}{[20^{-2}]-[\pi^2]}$

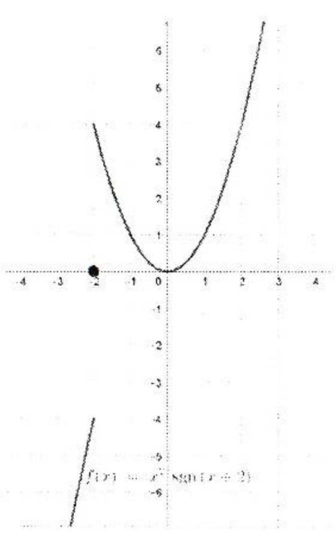
41)Vyšetřete průběh funkcí $f: y = \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{2} + 2, g: y = \frac{x^2}{2x+4}$. Zakreslete graf.

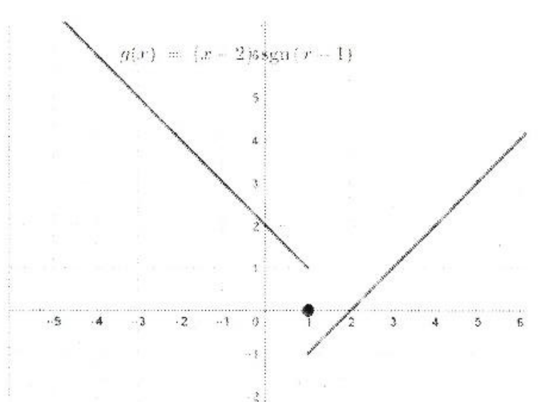
03 – Funkce polynomické a racionální

1) [-2;0], [0;$\frac{2}{3}$],
2) a) [1;-7]
   b) [-1;9]
3) f_2
4) b = -1
5) $\frac{9}{5}, \frac{9}{16}, 0$
6) b = 0, b = 4
7) -3, 4, 12
8) $\langle -3; \infty), \langle -3; 3\rangle, (-\infty; 3\rangle$
9) B
10)



11) -3, -1, -2
12) V[2;4], $y = -x^2 + 4x$
13) A
14) f_1: $y = x^2 - 2x, f_2 = x^2 - 2|x| + 1$
15) $y = 2x^2 - 1$
18) $y = x^2 + 3x$
23) $D = \langle 3; 5) \cup (5; \infty)$
24) $y = \frac{x}{2} + 2, x \in \langle -4; 8\rangle, y = -\frac{3}{x}, y = \sqrt{x}, x \in \langle 0; \infty), y = (1-x)^2 + 2, x \in (-\infty; 1\rangle,$
    $y = log_2(x + 3), x \in (-3; \infty).$
25) $m > 3, 0$ $řešení, m = 3, x = 1, m < 3, x_1 = 4 - m, x_2 = m - 2;\ R$
26) C, 27) E, 28) C, 29) D
30) $f^{-1} = 2x - 2, g^{-1} = \frac{x}{3} - 2, \sqrt{50}, \sqrt{8}$
31) $y = \frac{3x}{2-x}, D = R - \{-3; 1\}, H = R - \left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$
32) $y = -\frac{1}{32}x^2, x \in \langle -16; 16\rangle$
33) $y = \frac{18}{x}$
34) A
35) min [3;-7], $\langle -7; \infty)$
36) $y = 2x^2 - 2$
37) $x = 25\ m, S = 1250\ m^2$
38) 250, 5 250
39)





40) Ano, ne