1. (15 bodů) Náhodný vektor (X, Y) má následující parametry:
$\mathrm{E}X = 20,\ \sigma_X = 6,\ \mathrm{E}Y = 15,\ \sigma_Y = 9,\ \varrho(X, Y) = 0.6$ (korelace).

   a) Stanovte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny $Z = 2X - 3Y + 5$. *(4+9 bodů)*

   b) Rozhodněte, zda jsou náhodné veličiny X a Z závislé či nezávislé, a své tvrzení zdůvodněte. *(2 body)*

Řešení:

Ze vzorce pro koeficient korelace dostaneme

$$\varrho(X,Y) = \frac{\mathrm{E}XY - \mathrm{E}X \cdot \mathrm{E}Y}{\sigma_X \sigma_Y} \Rightarrow 0.6 = \frac{\mathrm{E}XY - 20 \cdot 15}{6 \cdot 9} \Rightarrow 0.6 \cdot 54 = \mathrm{E}XY - 300\,,$$
$$\mathrm{E}XY = 32.4 + 300 = 332.4\,.$$

a) Z vlastností střední hodnoty dostaneme

$$\mathrm{E}Z = \mathrm{E}(2X - 3Y + 5) = 2\mathrm{E}X - 3\mathrm{E}Y + 5 = 2 \cdot 20 - 3 \cdot 15 + 5 = 40 - 45 + 5 = \mathbf{0}\,.$$

Pro rozptyl dostaneme

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}Z &= \mathrm{D}(2X - 3Y + 5) = \mathrm{D}(2X - 3Y) = \mathrm{E}(2X - 3Y)^2 - (\mathrm{E}(2X - 3Y))^2 = \\
&= \mathrm{E}(4X^2 - 12XY + 9Y^2) - \big(4(\mathrm{E}X)^2 - 12\mathrm{E}X \cdot \mathrm{E}Y + 9(\mathrm{E}Y)^2\big) = \\
&= 4\left(\mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2\right) - 12\left(\mathrm{E}XY - \mathrm{E}X \cdot \mathrm{E}Y\right) + 9\left(\mathrm{E}Y^2 - (\mathrm{E}Y)^2\right) = \\
&= 4 \cdot 6^2 - 12(332.4 - 20 \cdot 15) + 9 \cdot 9^2 = 4 \cdot 36 - 12 \cdot 32.4 + 9 \cdot 81 = \mathbf{484.2}\,.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X, Z) &= \mathrm{E}(XZ) - \mathrm{E}X \cdot \mathrm{E}Z = \mathrm{E}\big(X(2X - 3Y + 5)\big) - 20 \cdot 0 = \mathrm{E}(2X^2 - 3XY + 5X) = \\
&= 2\left(\mathrm{D}X + (\mathrm{E}X)^2\right) - 3\mathrm{E}XY + 5\mathrm{E}X = 2(36 + 20^2) - 3 \cdot 332.4 + 5 \cdot 20 = \mathbf{-25.2}\,.
\end{aligned}$$

Protože je koeficient kovariance $\operatorname{cov}(X, Z) \neq 0$, musí být náhodné veličiny X a Z **závislé**. Lze argumentovat i jinak, např. nenulovou korelací, nebo najít intervaly I, J takové, že jevy $X^{-1}(I)$, $Z^{-1}(J)$ jsou závislé.

2. (15 bodů) Dvě diskrétní náhodné veličiny X, Y mají pravděpodobnostní funkce dané tabulkou. Náhodná veličina Z je jejich směsí, $Z = \mathrm{Mix}_c(X, Y)$, kde $c \in \langle 0, 1\rangle$ je neznámý koeficient. Realizace náhodného výběru s rozdělením, které má náhodná veličina Z, dala četnosti výsledků n_t, uvedené v tabulce.

hodnota t	1	2	3	4
$p_X(t)$	0.3	0.1	0.4	0.2
$p_Y(t)$	0.1	0.2	0.6	0.1
četnost n_t	20	20	45	15

   a) Metodou momentů odhadněte koeficient c. *(7 bodů)*

   b) Pro odhad parametru c z části a) otestujte shodu odhadnutého rozdělení veličiny Z s naměřenými hodnotami na hladině významnosti $\alpha = 5\,\%$. *(8 bodů)*

Řešení:

a) Z definice směsi máme pro parametr c nutnou podmínku $0 \le c \le 1$. Pro střední hodnoty máme

$$\begin{aligned} \mathrm{E}X &= 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.4 + 4 \cdot 0.2 = 2.5\,, \\ \mathrm{E}Y &= 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.6 + 4 \cdot 0.1 = 2.7\,, \\ \mathrm{E}Z &= c \cdot \mathrm{E}X + (1-c) \cdot \mathrm{E}Y = 2.7 - 0.2 \cdot c\,. \end{aligned}$$

Rozsah výběru je $n = 100$, hodnota realizace výběrového průměru

$$\bar{\boldsymbol{z}} = \frac{1 \cdot 20 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 45 + 4 \cdot 15}{100} = \frac{255}{100} = 2.55\,.$$

Srovnáním dostáváme

$$\begin{aligned} 2.7 - 0.2 \cdot c = \mathrm{E}Z = \bar{\boldsymbol{z}} &= 2.55\,, \\ c = \frac{3}{4} &= \mathbf{0.75}\,. \end{aligned}$$

b) Po dosazení $c = \frac{3}{4}$ dostáváme pro $p_Z(t) = \frac{3}{4}\,p_X(t) + \frac{1}{4}\,p_Y(t)$ následující hodnoty:

hodnota t	1	2	3	4
$p_X(t)$	0.3	0.1	0.4	0.2
$p_Y(t)$	0.1	0.2	0.6	0.1
$p_Z(t) = \frac{3}{4}\,p_X(t) + \frac{1}{4}\,p_Y(t)$	0.25	0.125	0.45	0.175
teoretická četnost $n\,p_Z(t)$	25	12.5	45	17.5
empirická četnost n_t	20	20	45	15

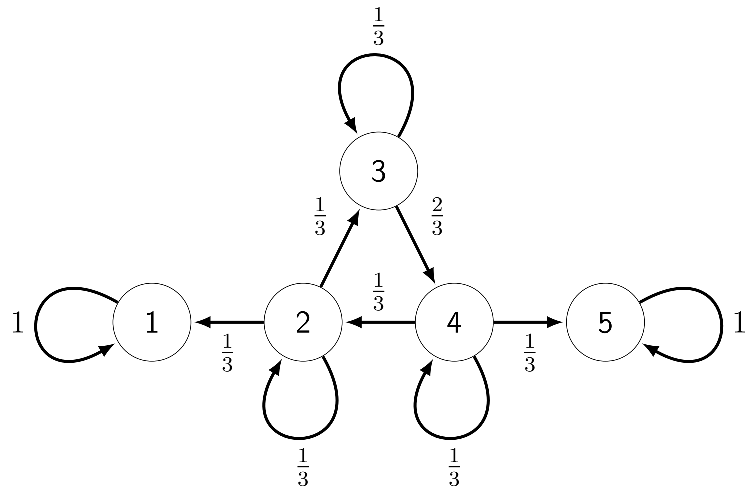
Nulová hypotéza:
$\mathbf{H}_0$: veličina Z má rozdělení $(p_Z(1), p_Z(2), p_Z(3), p_Z(4)) = (0.25, 0.125, 0.45, 0.175)$,
alternativní hypotéza:
$\mathbf{H}_1$: veličina Z má rozdělení $(p_Z(1), p_Z(2), p_Z(3), p_Z(4))$ jiné než $(0.25, 0.125, 0.45, 0.175)$.

Realizaci testovací statistiky

$$t = \underbrace{\frac{(20-25)^2}{25}}_{1} + \underbrace{\frac{(20-12.5)^2}{12.5}}_{4.5} + \underbrace{\frac{(45-45)^2}{45}}_{0} + \underbrace{\frac{(15-17.5)^2}{17.5}}_{\frac{5}{14} \doteq 0.357} \doteq \mathbf{5.857}$$

porovnáme s kvantilem $\mathbf{q}_{\chi(\mathbf{3})}(\mathbf{0.95}) \doteq \mathbf{7.82}$ a hypotézu **nezamítáme**.

3. (15 bodů) Markovův řetězec je dán přechodovým diagramem:



A. Klasifikujte všechny stavy. *(2 body)*

B. Stanovte rozdělení pravděpodobností stavů po třech krocích, jestliže začínáme ve stavu 3. *(3 body)*

C. Odhadněte rozdělení pravděpodobností stavů po 10 001 krocích, jestliže začínáme ve stavu 3. *(6 bodů)*

D. Jak se úloha C změní, jestliže začínáme ve stavu 4, resp. 2? *(4 body)*

Řešení:

A. **Stavy** $2, 3, 4$ **jsou přechodné, stavy** $1, 5$ **absorpční.**

B.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p}(0) &= (0, 0, 1, 0, 0)\ , \\
\boldsymbol{p}(1) &= \left(0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)\ , \\
\boldsymbol{p}(2) &= \left(0, \frac{2}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right)\ , \\
\boldsymbol{p}(3) &= \left(\boldsymbol{\frac{2}{27}}, \boldsymbol{\frac{2}{9}}, \boldsymbol{\frac{1}{9}}, \boldsymbol{\frac{2}{9}}, \boldsymbol{\frac{10}{27}}\right).
\end{aligned}$$

C. Po permutaci stavů $(1, 5, 2, 3, 4)$ má daný Markovův řetězec matici přechodu

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\
0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix}\ ,$$

$$\boldsymbol{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ , \qquad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\ , \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Fundamentální matice je

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

Matice

$$\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

udává asymptotické pravděpodobnosti dosažení absorpčních stavů z přechodných. Její druhý řádek odpovídá zadání, že začínáme ve stavu 3. Pravděpodobnosti po 10 001 krocích budou blízké asymptotickým. Asymptotické rozdělení pravděpodobností všech původních stavů je $\left(\boldsymbol{\frac{1}{3}}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\frac{2}{3}}\right)$. Viz též bod D.

D. Ze stavu 3 lze odejít jen přes stav 4, takže je jedno, v kterém z nich začneme. Pro stav 2 je výsledek jiný, $\left(\boldsymbol{\frac{2}{3}}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\frac{1}{3}}\right)$; je určen prvním řádkem matice $\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{R}$.

Pro hledání asymptotického rozdělení pravděpodobností jsme stavy 3 a 4 nemuseli rozlišovat a mohli jsme vyšetřovat jednodušší Markovův řetězec: