1. (15 bodů) Náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F_X(x) = \begin{cases} 0\,, & x < -1\,, \\ 0.1 \cdot x + 0.1\,, & x \in \langle -1, 0)\,, \\ 0.05 \cdot x + 0.2\,, & x \in \langle 0, 2)\,, \\ 1\,, & x \geq 2\,. \end{cases}$$

   a) Vyjádřete X jako směs diskrétní náhodné veličiny D a spojité náhodné veličiny S. Popište jejich rozdělení.

   b) Určete pravděpodobnost $P(0 \leq X \leq 1)$.

Řešení:

$X = \mathrm{Mix}_c(D, S)$, nespojitosti F_X jsou v hodnotách $X = 0$ a $X = 2$;

$$c = P(X = 0) + P(X = 2) = (0.2 - 0.1) + (1 - 0.3) = 0.8$$

a) Diskrétní část: $p_D(i) = \frac{1}{c} \cdot P(X = i) = \begin{cases} \frac{1}{8}\,, & i = 0\,, \\ \frac{7}{8}\,, & i = 2\,, \\ 0\,, & \text{jinak.} \end{cases}$

Spojitá část: $f_S(t) = \frac{1}{1-c} F'_X(t) = \begin{cases} 5 \cdot 0.1 = 0.5\,, & t \in \langle -1, 0)\,, \\ 5 \cdot 0.05 = 0.25\,, & t \in \langle 0, 2)\,, \\ 0\,, & \text{jinak.} \end{cases}$

b) $P(0 \leq X \leq 1) = F_X(1) - F_X(0_-) = 0.25 - 0.1 = 0.15\,.$

2. (15 bodů) Měřili jsme výšku dětí ve věku deseti let. U 21 chlapců jsme naměřili průměrnou výšku 139.1 cm a výběrovou směrodatnou odchylku 2.5 cm. U 21 děvčat jsme naměřili průměrnou výšku 140.3 cm a výběrovou směrodatnou odchylku 3.1 cm.

   Otestujte na hladině významnosti 5 %, že chlapci jsou v průměru stejně vysocí jako děvčata.

   Uveďte použité předpoklady a posuďte jejich přiměřenost. (Předpoklad o rovnosti rozptylů testovat nemusíte.)

Řešení:

Předpokládáme, že veličiny

X = „výška daného chlapce“,
Y = „výška dané dívky“

jsou *nezávislé* s normálními rozděleními po řadě $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ s $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Jednotlivá měření $X_1, \ldots, X_m$, $Y_1, \ldots, Y_n$ považujeme *všechna navzájem za nezávislá*, což můžeme.

X	Y
$m = 21$	$n = 21$
$\overline{\boldsymbol{x}} = 139.1$ cm	$\overline{\boldsymbol{y}} = 140.3$ cm
$s_{\boldsymbol{x}} = 2.5$ cm	$s_{\boldsymbol{y}} = 3.1$ cm

Test stejného rozptylu (pokud by byl potřeba):

Realizace testovací statistiky je

$$t' = \frac{s_{\boldsymbol{x}}^2}{s_{\boldsymbol{y}}^2} = \frac{2.5^2}{3.1^2} \doteq 0.65\,,$$

hodnoty kvantilů

$$q_{\mathrm{F}(m-1,n-1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = q_{\mathrm{F}(20,20)}(0.025) = \frac{1}{q_{\mathrm{F}(20,20)}(0.975)} \doteq \frac{1}{2.46} \doteq 0.41\,,$$
$$q_{\mathrm{F}(m-1,n-1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = q_{\mathrm{F}(20,20)}(0.975) \doteq 2.46\,.$$

Protože
$$t' \doteq 0.65 \in \left\langle 0.41,\ 2.46 \right\rangle,$$
hypotézu, že X *a* Y *mají stejný rozptyl*, **NEZAMÍTÁME**.

Test rovnosti středních hodnot se stejným neznámým rozptylem:

Předpokládáme $\sigma_1 = \sigma_2$.

Budeme testovat nulovou hypotézu
$$\mathbf{H}_0:\ \mu_1 = \mu_2$$
proti alternativní hypotéze
$$\mathbf{H}_1:\ \mu_1 \neq \mu_2\,.$$

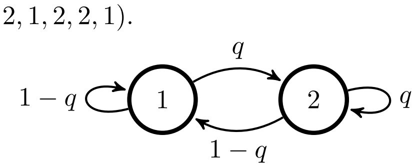
Testovací statistika je
$$T = \frac{\overline{\boldsymbol{X}} - \overline{\boldsymbol{Y}}}{S\sqrt{1/n + 1/n}} = \frac{\overline{\boldsymbol{X}} - \overline{\boldsymbol{Y}}}{\sqrt{S^2_{\boldsymbol{X}} + S^2_{\boldsymbol{Y}}}}\sqrt{n}\,.$$

Po dosazení máme
$$t = \frac{\overline{\boldsymbol{x}} - \overline{\boldsymbol{y}}}{\sqrt{s^2_{\boldsymbol{x}} + s^2_{\boldsymbol{y}}}}\sqrt{n} = \frac{139.1 - 140.3}{\sqrt{2.5^2 + 3.1^2}}\sqrt{21} \doteq -1.38\,.$$

Hodnota kvantilu je
$$q_{t(n+n-2)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = q_{t(40)}(0.975) \doteq 2.02\,.$$

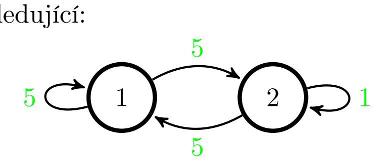
Protože
$$q_{t(40)}(0.975) \doteq 2.02 > 1.38 \doteq |t|\,,$$
hypotézu $\mathbf{H}_0$ **NEZAMÍTÁME**.

3. (15 bodů) V Markovově řetězci dle obrázku odhadněte parametr q na základě pozorované posloupnosti stavů $(1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1)$.

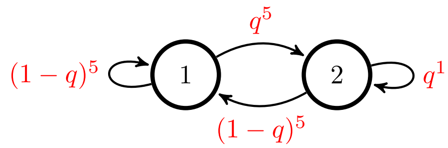


Řešení:

Počty přechodů v datech jsou následující:



Pravděpodobnost každého přechodu umocníme na jeho četnost



a všechny vynásobíme; dostaneme věrohodnost

$$
\begin{aligned}
L(q) &= q^6\,(1-q)^{10}\,,\\
\ell(q) &= 6\,\ln q + 10\,\ln(1-q)\,,\\
0 = \ell'(q) &= \frac{6}{q} - \frac{10}{1-q}\,,\\
q &= \frac{6}{16} = \frac{3}{8}\,.
\end{aligned}
$$

4. (5 bodů) Nezávislé náhodné veličiny X, Y splňují nerovnost středních hodnot: $\mathrm{E}X \leq \mathrm{E}Y$. Je možné, aby pravděpodobnost jevu $X > Y$ byla větší než 1/2? Svoji odpověď zdůvodněte (v případě kladné odpovědi nejlépe příkladem).

Řešení:

Možné to je, např.

$$
\begin{aligned}
p_X(0) &= 1/3\,, \quad p_X(4) = 2/3\,, & Y &= 3\,,\\
\mathrm{E}X &= 8/3\,, & \mathrm{E}Y &= 3\,,\\
P(X > Y) &= 2/3\,.
\end{aligned}
$$