1. (15 bodů) Náhodná veličina X má hustotu pravděpodobnosti danou funkcí

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 0)\,, \\ a\,x\,(1-x) & \text{pokud } x \in \langle 0, 1\rangle\,, \\ 0 & \text{pokud } x \in (1, \infty)\,. \end{cases}$$

   a) Určete neznámý parametr $a \in \mathbb{R}$.
   b) Určete distribuční funkci náhodné veličiny X.
   c) Určete rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny $Y = X - 1$.
   d) Určete rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny $Z = 3 \cdot X$.
   e) Určete hodnotu pravděpodobnosti $P(3 - 2X \in \langle 0, 2\rangle)$.

Řešení:

a) $a = 6$

b)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 0)\,, \\ 3x^2 - 2x^3 & \text{pokud } x \in \langle 0, 1)\,, \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 1, \infty)\,. \end{cases}$$

c)

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, -1)\,, \\ -2x^3 - 3x^2 + 1 & \text{pokud } x \in \langle -1, 0)\,, \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 0, \infty)\,. \end{cases}$$

d)

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 0)\,, \\ \dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{2}{27}x^3 & \text{pokud } x \in \langle 0, 3)\,, \\ 1 & \text{pokud } x \in \langle 3, \infty)\,. \end{cases}$$

e) $P(3 - 2X \in \langle 0, 2\rangle) = P\left(X \in \left\langle \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,.$

2. (15 bodů) Byly naměřeny následující četnosti hodnot náhodného vektoru (X, Y):

$X \diagdown Y$	a	b	c
1	0	5	15
2	5	5	20
3	5	20	25

Na hladině významnosti 5 % otestujte hypotézu, že náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé.

Řešení:

- H_0: X a Y jsou nezávislé
- H_1: X a Y jsou závislé
- naměřené hodnoty:

$X \diagdown Y$	a	b	c	n_X
1	0	5	15	20
2	5	5	20	30
3	5	20	25	50
n_Y	10	30	60	100

- očekávané hodnoty:

$X \diagdown Y$	a	b	c	n_X
1	**2**	6	12	20
2	**3**	9	18	30
3	5	15	30	50
n_Y	10	30	60	100

  Dvě tučně vyznačené teoretické četnosti jsou příliš malé, je nutno slučovat skupiny. To lze provést různými způsoby. Minimální úpravou je sloučení těchto dvou skupin do jedné, čímž klesne počet stupňů volnosti o 1, z 4 na 3.

- realizace statistiky:

$$0 + \frac{1}{6} + \frac{3}{4} + \frac{16}{9} + \frac{2}{9} + 0 + \frac{5}{3} + \frac{5}{6} = \frac{65}{12} \doteq 5.417\,.$$

- kvantil: $\chi^2_{(3)}(0.95) \doteq 7.81$; nulovou hypotézu nezamítáme.

3. (15 bodů) Pozorovali jsme následující posloupnost stavů Markovova řetězce: $(1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 2)$.

   a) Metodou maximální věrohodnosti odhadněte všechny prvky matice přechodu.

   b) Předpokládejme, že řetězec má parametry vypočtené v části a). Která z následujících posloupností stavů je nejvěrohodnějším pokračováním posloupnosti ze zadání?

   - $(1, 1, 1, 2)$,
   - $(1, 2, 1, 2)$,
   - $(2, 2, 2, 1)$.

c) Najděte všechna stacionární rozdělení pravděpodobností a rozhodněte, zda řetězec k některému z nich konverguje.

Řešení:

a) Maximálně věrohodný odhad podmíněných pravděpodobnosti (podmíněných výchozím stavem) odpovídá empirickému rozdělení, tedy relativním četnostem následujících stavů v dané posloupnosti,

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 3/8 & 5/8 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} .$$

(Můžeme připustit řetězec i s jinými stavy než $1, 2$, *ale přechody do nich se nevyskytly, a kdyby měly nenulovou pravděpodobnost, věrohodnost by se snížila.)*

b) Věrohodnosti jednotlivých pokračování (ze stavu 2) ve výše uvedeném modelu jsou po řadě $\frac{45}{1024}, \frac{25}{256} = \frac{100}{1024}, \frac{1}{16} = \frac{64}{1024}$, největší z nich je prostřední.

c) Řetězec je ergodický, konverguje k jedinému stacionárnímu rozdělení pravděpodobností, a to $\boldsymbol{p} = (4/9, 5/9)$.