1. (15 bodů) Náhodná veličina $X$ má hustotu pravděpodobnosti danou funkcí

$$f_X(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{pokud } x \in (-\infty, 1)\,, \\ a\,x\,, & \text{pokud } x \in \langle 1, 3\rangle\,, \\ 0\,, & \text{pokud } x \in (3, \infty)\,. \end{cases}$$

   a) Určete neznámý parametr $a \in \mathbb{R}$. *(1 bod)*
   b) Určete distribuční funkci náhodné veličiny $X$. *(4 body)*
   c) Určete rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny $Y = X - 2$. *(3 body)*
   d) Určete rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny $Z = 2 \cdot X$. *(3 body)*
   e) Určete hodnotu pravděpodobnosti $P(X^2 \in \langle \frac{9}{4}, 4\rangle)$. *(4 body)*

**Řešení:**

a) $a = \frac{1}{4}$.

b)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{pokud } x \in (-\infty, 1)\,, \\ \frac{x^2-1}{8}\,, & \text{pokud } x \in \langle 1, 3)\,, \\ 1\,, & \text{pokud } x \in \langle 3, \infty)\,. \end{cases}$$

c)

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{pokud } x \in (-\infty, -1)\,, \\ \frac{x^2+4x+3}{8}\,, & \text{pokud } x \in \langle -1, 1)\,, \\ 1\,, & \text{pokud } x \in \langle 1, \infty)\,. \end{cases}$$

d)

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{pokud } x \in (-\infty, 2)\,, \\ \frac{x^2-4}{32}\,, & \text{pokud } x \in \langle 2, 6)\,, \\ 1\,, & \text{pokud } x \in \langle 6, \infty)\,. \end{cases}$$

e) $P(X^2 \in \langle \frac{9}{4}, 4\rangle) = \frac{7}{32}$.

2. (15 bodů) V urně jsou hrací kostky dvou druhů, pravděpodobnosti jejich výsledků udávají náhodné veličiny $X, Y$, jejichž rozdělení jsou daná tabulkou. Opakovaně jsme vytáhli kostku, hodili jí a vrátili ji zpět. Četnost výsledků udává tabulka. Odhadněte, kolik procent kostek v urně je prvního druhu.

| hodnota $t$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_X(t)$ | 1/9 | 2/9 | 1/9 | 2/9 | 1/9 | 2/9 |
| $p_Y(t)$ | 2/9 | 2/9 | 2/9 | 1/9 | 1/9 | 1/9 |
| četnost $n_t$ | 6 | 10 | 8 | 6 | 6 | 4 |

**Řešení:**

Podíl kostek prvního druhu označme $w \in \langle 0, 1\rangle$. Realizovali jsme směs $Z = \mathrm{Mix}_w(X, Y)$ s pravděpodobnostní funkcí $p_Z = w\, p_X + (1 - w)\, p_Y$:

| hodnota $t$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_Z(t)$ | $\frac{2-w}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{2-w}{9}$ | $\frac{1+w}{9}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1+w}{9}$ |

Metoda momentů:

Porovnáme střední hodnoty $\mathrm{E}X = 3\frac{2}{3} = \frac{11}{3}$, $\mathrm{E}Y = 3$, $\mathrm{E}Z = w\,\mathrm{E}X + (1-w)\,\mathrm{E}Y = 3 + \frac{2}{3}w$ s realizací výběrového průměru $\bar{\boldsymbol{z}} = \frac{128}{40} = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5} = 3 + \frac{2}{3}\widehat{w}$; výsledek $\widehat{w} = 0.3$ vyhovuje zadání.

Metoda maximální věrohodnosti:

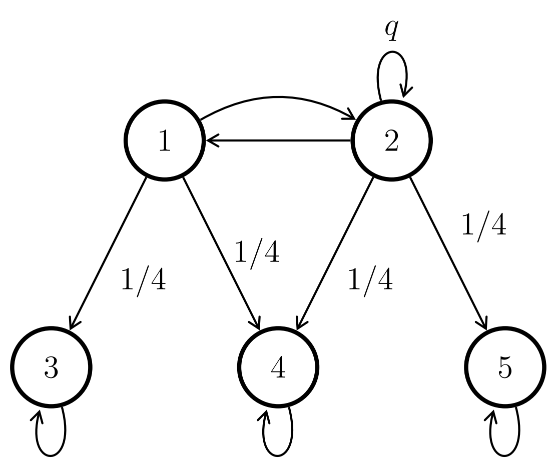
$$L(w) = \frac{1}{9^n} \cdot (2 - w)^{n_1+n_3} \cdot (1 + w)^{n_4+n_6} \cdot 2^{n_2} \cdot 1^{n_5}\,,$$
$$\ell(w) = \ln L(w) = (n_1 + n_3)\,\ln(2 - w) + (n_4 + n_6)\,\ln(1 + w) + c\,,$$

kde $c$ je konstanta nezávislá na $w$. Lokální maximum nastává pro $\widehat{w}$ takové, že

$$0 = \frac{\partial}{\partial \widehat{w}}\ell(\widehat{w}) = -\frac{n_1 + n_3}{2 - \widehat{w}} + \frac{n_4 + n_6}{1 + \widehat{w}} = \frac{-14}{2 - \widehat{w}} + \frac{10}{1 + \widehat{w}}\,,$$
$$\widehat{w} = \frac{1}{4} \in \langle 0, 1\rangle\,,$$

což je i globální maximum věrohodnosti.

3. (15 bodů) Markovův řetězec je dán diagramem. Počáteční stav je 1.




a) Doplňte v diagramu chybějící pravděpodobnosti přechodu. *(1 bod)*

b) Jakých hodnot může nabývat parametr $q$? *(1 bod)*

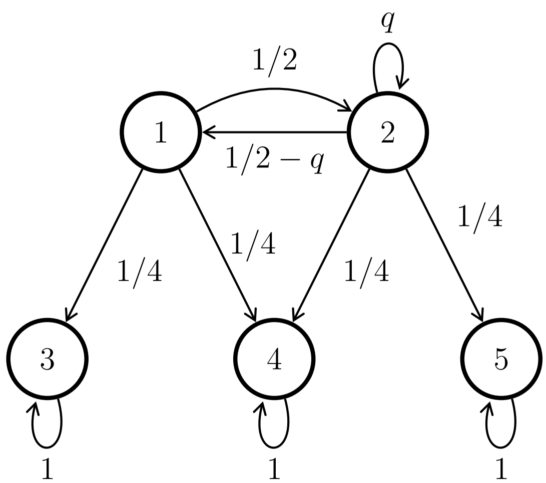
c) Klasifikujte všechny stavy i celý řetězec. *(3 body)*

d) Najděte všechny uzavřené množiny stavů. *(2 body)*

e) Najděte pravděpodobnosti stavů po dvou krocích v závislosti na parametru $q$. *(2 body)*

f) Najděte asymptotické rozdělení pravděpodobností v závislosti na parametru $q$. *(6 bodů)*

**Řešení:**

a) 


b) $q \in \langle 0, 1/2 \rangle$ .

c) Stavy $1, 2$ jsou přechodné, $3, 4, 5$ absorpční; celý řetězec je rozložitelný, má 3 komponenty, $\{3\}$, $\{4\}$ a $\{5\}$.

d) $\{3,4,5\}$, $\{3,4\}$, $\{3,5\}$, $\{4,5\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\emptyset$.

e) $(\frac{1}{4} - \frac{q}{2}, \frac{q}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8})$.

f) Po permutaci stavů $(3, 4, 5, 1, 2)$ je matice přechodu

$$\boldsymbol{P} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} - q & q \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{array}\right) ,$$

kde první tři stavy jsou absorpční, zbývající dva přechodné,

$$\boldsymbol{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \qquad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} , \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - q & q \end{pmatrix} ,$$

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ q - \frac{1}{2} & 1 - q \end{pmatrix}^{-1} = \frac{4}{3 - 2\,q} \begin{pmatrix} 1 - q & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - q & 1 \end{pmatrix} ,$$

$$\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{R} = \frac{1}{3 - 2\,q} \begin{pmatrix} 1 - q & \frac{3}{2} - q & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - q & \frac{3}{2} - q & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1 - q}{3 - 2\,q} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2(3 - 2\,q)} \\ \dfrac{\frac{1}{2} - q}{3 - 2\,q} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3 - 2\,q} \end{pmatrix} ,$$

kde první řádek udává hledané asymptotické pravděpodobnosti absorpčních stavů. Asymptotické pravděpodobnosti všech původních stavů jsou

$$\left(0, 0, \frac{1-q}{3-2\,q}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2(3-2\,q)}\right) \, .$$