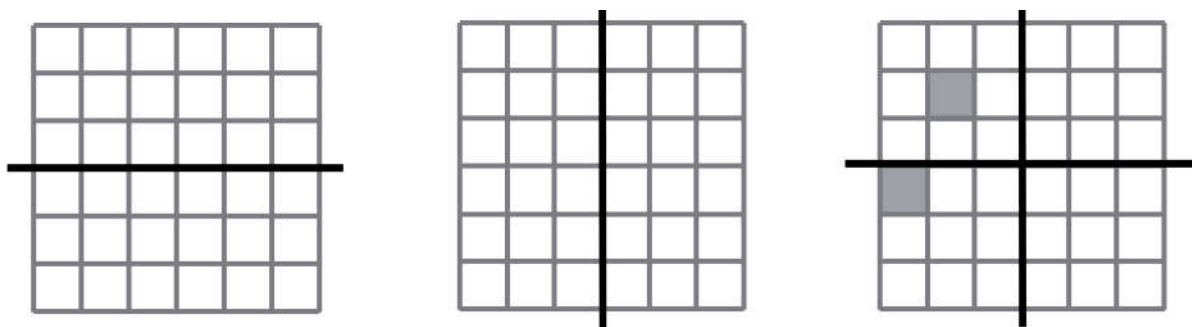


16 – Variace, permutace, kombinace

- 1) Značka automobilu se skládá ze šesti znaků. První tři znaky jsou některá z písmen ABCDEF a po nich následuje trojčíslí z číslic 0 až 9. (Znaky se mohou ve značce opakovat, takže existuje například značka ABA020.) Jaký maximální počet aut lze takto označit, když žádná dvě auta nesmí mít stejnou značku? [216 000]
- 2) Melodie bude mít 7 tónů, má začínat tónem C a končit tónem G. Třikrát se má použít tón A a dvakrát tón E. Kolik různých melodií je možné vytvořit?
- 3) V každém zápisu vznikne doplněním vhodné trojice číslic čtyřmístné číslo. Pro každý zápis určete počet všech různých sudých čtyřmístných čísel, která lze vytvořit. 1) *2**, 2) ***2, 3) 2***. [450, 900, 500]
- 4) Zjednodušte pro $n \in \mathbb{N}$: $\frac{2^{n+3}}{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}} =$ [8]
- 5) Vyjádřete kubický člen (tj. člen obsahující x^3) binomického rozvoje výrazu $(x + 0,5)^6$ s reálnou proměnnou x . $\left[\frac{5}{2}x^3\right]$
- 6) Vypočítejte absolutní člen (tj. člen neobsahující x) binomického rozvoje výrazu $\left(x + \frac{2}{x}\right)^6$ pro $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. [160]
- 7) Určete všechna $n \in \mathbb{N}$ taková, aby v binomickém rozvoji výrazu $\left(x + \frac{2}{x}\right)^n$, kde $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, existoval kvadratický člen (tj. aby byl u x^2 nenulový koeficient). [$n = 2k$]
- 8) Pětimístné přirozené číslo je sestaveno z pěti různých číslic. Uprostřed je vždy číslice 6. Všechny číslice jsou seřazeny sestupně, tedy od největší po nejmenší. (Daným podmínkám vyhovují např. čísla 97650 a 87631.) Kolik různých čísel je možné uvedeným způsobem sestavit? [45]
- 9) Číslo, které se čte stejně zleva i zprava, se nazývá palindrom. Uvažujme všechny pětimístné palindromy, které mají první číslici větší než druhou (např. 70 207, 21 112, 82 128 apod.). Kolik různých palindromů je možné uvedeným způsobem sestavit? [450]
- 10) Pětimístné číslo má ve svém zápise čtyřikrát stejnou nenulovou číslici a jednu větší číslici. Těmto podmínkám vyhovují např. čísla 31 111, 22 922 apod. 1) Určete, kolik čísel vyhovujících podmínkám zadání má ve svém zápise číslici 1. 2) Určete počet všech čísel vyhovujících podmínkám zadání. [40, 180]
- 11) Jaký je absolutní člen binomického rozvoje výrazu $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + x^2\right)^{15}$? $\left[\frac{15!}{12!3!}\right]$
- 12) V oboru \mathbb{N} řešte: $\binom{n+1}{n-1} = 90n$. [179]
- 13) Čtvercová síť má 6 x 6 polí. Uvažujme dělení čtvercové sítě na poloviny a čtvrtiny pouze způsoby uvedenými na obrázcích. Do čtvercové sítě se umístí dvě tmavá pole. Kolika způsoby je možné do čtvercové sítě umístit dvě tmavá pole tak, aby byla v téže polovině, ale nebyla ve stejné čtvrtině? [324]



- 14) V rozvoji výrazu $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^n$ je součet prvních tří koeficientů 67. Určete z této podmínky absolutní člen rozvoje. [165]
- 15) V rozvoji $(1 + x)^n$ je třetí člen 84 a čtvrtý člen 280. Určete x, n . [$n = 7, x = 2$]
- 16) Určete člen, který obsahuje x^{14} v rozvoji výrazu $(1 - x^3)^9 \cdot (1 + x^2)^{10}$. [$8\,940\,x^{14}$]
- 17) V prostoru je 12 bodů obecně položených. Kolik čtyřstěnů je možno z těchto bodů jako vrcholů vytvořit? Kolik čtyřstěnů vytvoříme, leží-li 6 bodů v jedné rovině? [495, 480]
- 18) V kolika bodech se protíná devět přímk, z nichž čtyři jsou navzájem rovnoběžné? [30]
- 19) Určete počet všech trojúhelníků, z nichž žádné dva nejsou shodné, a přitom velikosti jejich stran jsou přirozená čísla z intervalu (10; 20). Kolik z nich je rovnostranných? Kolik z nich je rovnoramenných? Kolik z nich je pravoúhlých? [165, 9, 72, 0]
- 20) Dvě skupiny mají dohromady 26 prvků a 160 kombinací druhé třídy. Kolik je prvků v každé skupině? [15 a 11]
- 21) Kolik hráčů se zúčastnilo turnaje ve stolním tenisu, jestliže bylo odehráno 21 utkání a hráči hráli každý s každým jednou? [7]
- 22) K sestavení vlajky, která má být složena ze tří různobarevných vodorovných pruhů, jsou k dispozici barvy bílá, červená, modrá, zelená a žlutá. Urči a) počet vlajek, které můžeme z látek těchto barev sestavit, b) kolik z nich má modrý pruh, c) kolik jich má modrý pruh uprostřed, d) kolik jich nemá červený pruh uprostřed. [60, 36, 12, 48]
- 23) S připomínkami k navrhovanému zákonu chce vystoupit v parlamentu šest poslanců A, B, C, D, E, F. Urči počet a) všech možných pořadí jejich vystoupení, b) všech pořadí, v nichž vystupuje A po E, c) všech pořadí, v nichž vystupuje A ihned po E. [720, 360, 120]
- 24) Státní poznávací značka v nějakém státě je tvořena uspořádanou sedmicí, jejíž první tři členy jsou písmena vybíraná z 28 písmen a další 4 číslice. Urči, kolik poznávacích značek je ve státě k dispozici. [219 520 000]
- 25) Jméno a příjmení každého člověka bydlícího v městečku s 1500 obyvateli může začínat jedním ze 32 písmen. Dokaž, že aspoň dva obyvatelé městečka mají stejné iniciály. [1024]
- 26) Ze sedmi kuliček, z nichž jsou čtyři modré M (navzájem nerozlišitelné), jedna bílá B, jedna červená C a jedna zelená Z, máme vybrat a položit vedle sebe do řady pět kuliček. Urči, kolika způsoby to lze provést. [135]
- 27) Při výrobě určité součástky je třeba provést čtyři operace A, B, C, D, pro které platí následující podmínky: 1. Operace B nesmí být první a operace A nesmí být poslední. 2. Operaci C musíme provést dříve než operaci D. Kolika možnými způsoby je možno součástku vyrobit? [7]
- 28) Deseticiferné číslo má být sestaveno ze stejného počtu pětiek a nul. Vypočtěte, kolik různých lichých čísel lze uvedeným způsobem sestavit. [56]