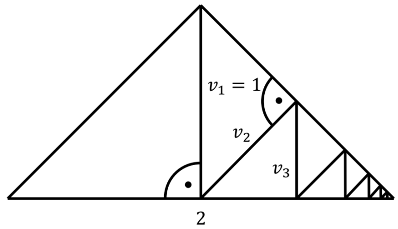
17 – Řady

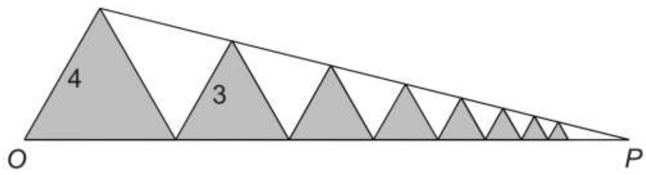
1) Určete součet s nekonečné geometrické řady $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$, kde pro všechna přirozená čísla n platí: $a_n = \frac{4^{n-1}}{2^{3n}}$. $\left[\frac{1}{4}\right]$

2) Lomená čára je složena z výšek nekonečně mnoha podobných pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků. Největší trojúhelník má velikost výšky $v_1 = 1$ a přeponu délky 2. 1) Určete druhý úsek v_2 lomené čáry. 2) Určete délku d celé lomené čáry, výraz usměrněte. 3) O kolik větší je součet délek všech lichých úseků než součet délek všech sudých úseků?



Výsledek nezaokrouhlujte. $[\frac{\sqrt{2}}{2}; 2 + \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2}]$

3) Mezi dvěma úsečkami je umístěno nekonečně mnoho rovnostranných trojúhelníků. Strana největšího trojúhelníku má délku 4 cm, strana druhého trojúhelníku 3 cm atd. Jaká je délka úsečky OP s přesností na mm?



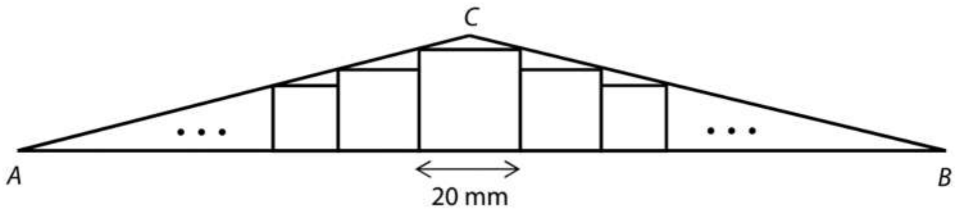
[160 mm]

4) Jsou dány dvě nekonečné řady: $a + a^2 + a^3 + a^4 + \cdots + a^n + \cdots$

$$b - b^2 + b^3 - b^4 + \cdots + (-1)^{n+1} b^n + \cdots$$

Uvažujme takové dvojice hodnot $a \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$ a $b \in (0; 1)$, pro něž mají obě řady stejný součet . A) Vypočtěte b, jestliže je $a = \frac{1}{6}$, B) Vyjádřete b v závislosti na a. C) Vypočtěte součet s, jestliže je $b = 2a$. $[\frac{1}{4}; \frac{a}{1-2a}; \frac{1}{3}]$

5) Do rovnoramenného trojúhelníku ABC je vepsáno nekonečně mnoho čtverců. Jedna strana každého čtverce leží na základně AB trojúhelníku. Čtverce se vzájemně dotýkají. Největší čtverec s délkou strany 20 mm je umístěn tak, že osa trojúhelníku je současně osou čtverce. Každé dva sousední čtverce mají jeden společný vrchol a délky jejich stran jsou v poměru 5:4. Vypočtěte v mm^2 obsah trojúhelníku ABC.
[2025]



6) V R řešte rovnici: $(2^x)^2 - \frac{32}{3} = 2^x + 2^{x-2} + 2^{x-4} + \cdots$ [2]

7) V < 0, 2π > řešte rovnici: $1 + \sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + \ldots.. = 2 \operatorname{tg} x$ $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$

8) V R řešte rovnici: $1 + log_2 \cos x + log_2^2 \cos x + \cdots = \frac{2}{3}$ $\left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right]$

9) Určete obor konvergence řady a potom vypočtěte součet řady:

$1 + cotg\, x + cotg^2 x + cotg^3 x + \cdots$ $\left[\left(\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi\right), s = \frac{1}{1 - cotg\, x}\right]$

10) Do rovnostranného kužele je vepsána koule o poloměru r. Nad ní je sestrojena nová koule, která se dotýká pláště kužele a předcházející koule atd. Určete součet povrchů a objemů všech koulí. [$9\pi r^2 : 2$, $18\pi r^3 : 13$]