

1. (15 bodů) Náhodná veličina X má hustotu tvaru $f_X(x) = \begin{cases} a(1-x)^2 & 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$
- Určete parametr a .
 - Určete distribuční funkci F_X .
 - Určete střední hodnotu $E(X^2)$.

Řešení:

a)

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \int_0^1 a(1-x)^2 dx = a \left[-\frac{(1-x)^3}{3} \right]_{x=0}^1 = \frac{a}{3} \implies a = 3.$$

b)

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - (1-x)^3, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

c)

$$E(X^2) = \int_0^1 3x^2(1-x)^2 dx = 3 \int_0^1 x^2 - 2x^3 + x^4 dx = 3(1/3 - 1/2 + 1/5) = 1/10.$$

2. (15 bodů) Na hladině významnosti 5 % otestujte hypotézu, že následující data pocházejí z binomického rozdělení $\text{Bi}(3, 0.4)$.

hodnota	0	1	2	3
četnost	18	40	30	12

Řešení:

$$p_i := P(X = i) = \binom{3}{i} 0.4^i \cdot 0.6^{3-i}.$$

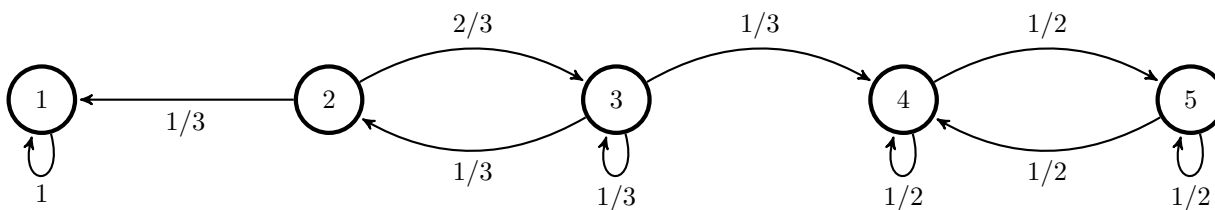
hodnota	0	1	2	3
n_i	18	40	30	12
p_i	0.216	0.432	0.288	0.064
np_i	21.6	43.2	28.8	6.4

Teoretické četnosti jsou ≥ 5 , takže nemusíme slučovat.

$$t = \frac{(18 - 21.6)^2}{21.6} + \frac{(40 - 43.2)^2}{43.2} + \frac{(30 - 28.8)^2}{28.8} + \frac{(12 - 6.4)^2}{6.4} \doteq 5.79 < q_{\chi^2(3)}(0.95) \doteq 7.81.$$

Nezamítáme.

3. (15 bodů)



Pro Markovův řetězec na obrázku:

- a) Klasifikujte všechny stavy.
- b) Vyjmenujte všechny uzavřené množiny stavů.
- c) Najděte stacionární rozdělení pravděpodobností a posuďte, zda řetězec k některému z nich konverguje.
- d) Začneme ve stavu 3. Určete pravděpodobnosti stavů po 2 krocích.

Řešení:

- a) Stavy 2, 3 jsou přechodné, 1, 4, 5 trvalé, 1 je absorpční, žádný není periodický.
- b) \emptyset , $\{1\}$, $\{4, 5\}$, $\{1, 4, 5\}$.
- c) $(q, 0, 0, \frac{1-q}{2}, \frac{1-q}{2})$, $q \in \langle 0, 1 \rangle$, neboli $(1 - 2r, 0, 0, r, r)$, $r \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$; konverguje vždy k jednomu z nich.
- d) $(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \frac{5}{18}, \frac{1}{6})$.

4. (5 bodů) Mohou existovat náhodné veličiny, které jsou nezávislé a korelované? Mohou existovat náhodné veličiny, které jsou nekorelované a závislé? Kde je to možné, uveďte příklad.

Řešení:

Nezávislé jsou vždy nekorelované, obrácená implikace neplatí. Např. pro rovnoměrné rozdělení na kružnici jsou kartézské souřadnice bodů nekorelované, ale závislé.