1. (15 bodů) Dvojrozměrný náhodný vektor (X, Y) má pravděpodobnosti hodnot dané tabulkou:

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	$1/8$	$1/8$	$3/16$
0	$1/16$	$1/8$	$1/16$
1	$3/16$	$1/16$	$1/16$

a) Vypočtěte pravděpodobnost $P(X \cdot Y \geq 0)$. *(3 body)*

b) Určete marginální pravděpodobnostní funkce p_X a p_Y. *(3 body)*

c) Pro veličinu $Z = X^2 + Y^2$ určete pravděpodobnostní funkci p_Z a střední hodnotu EZ. *(3+3 body)*

d) Jsou náhodné veličiny X a Y závislé či nezávislé? Pokud jsou X a Y závislé, určete sdruženou pravděpodobnostní funkci pro nezávislé veličiny X' a Y', které mají stejné pravděpodobnostní funkce jako X a Y (tj. $p_X = p_{X'}$ a $p_Y = p_{Y'}$). *(3 body)*

Řešení:

a) Podmínku $XY \geq 0$ nesplňují pouze dvojice $(-1, 1)$ a $(1, -1)$, je tedy

$$P(X \cdot Y \geq 0) = 1 - P(X \cdot Y < 0) = 1 - 3/16 - 3/16 = 10/16 = \mathbf{5/8}\,.$$

b) Marginální pravděpodobnostní funkce

$X \backslash Y$	-1	0	1	p_X
-1	$1/8$	$1/8$	$3/16$	**7/16**
0	$1/16$	$1/8$	$1/16$	**4/16**
1	$3/16$	$1/16$	$1/16$	**5/16**
p_Y	**6/16**	**5/16**	**5/16**	

c) Veličina Z má hodnoty $\{0, 1, 2\}$ a její pravděpodobnostní funkce je

$$p_Z(i) = \begin{cases} 1/8\,, & i = 0\,, \\ 1/8 + 1/16 + 1/16 + 1/16 = 5/16\,, & i = 1\,, \\ 1/8 + 3/16 + 3/16 + 1/16 = 9/16\,, & i = 2\,, \\ 0\,, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Střední hodnotu EZ vypočteme jako

$$\mathrm{E}Z = 0 \cdot 1/8 + 1 \cdot 5/16 + 2 \cdot 9/16 = 23/16 = \mathbf{1.4375}\,.$$

d) Protože je $p_{X,Y}(-1,-1) = 1/8 \neq 6/16 \cdot 7/16 = p_X(-1)\, p_Y(-1)$, jsou náhodné veličiny X a Y závislé.

$X' \backslash Y'$	-1	0	1	$p_{X'}$
-1	**42/256**	**35/256**	**35/256**	$7/16$
0	**24/256**	**20/256**	**20/256**	$4/16$
1	**30/256**	**25/256**	**25/256**	$5/16$
$p_{Y'}$	$6/16$	$5/16$	$5/16$	

2. (15 bodů) Náhodná veličina X má obor hodnot $\langle 0, 1\rangle$ a hustotu pravděpodobnosti

$$f_X(x) = \begin{cases} (k+1)\,x^k\,, & 0 \le x \le 1\,, \\ 0\,, & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde k je parametr z intervalu $\langle 0, +\infty)$. V experimentu byly získány následující výsledky

$$0.2, \quad 0.4, \quad 0.5, \quad 0.7, \quad 0.8, \quad 0.8, \quad 0.9, \quad 0.9\,.$$

Odhadněte hodnotu parametru k.

Řešení:

Metoda momentů:

$$\mathrm{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (k+1)\,x^{k+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{k+1}{k+2}\,x^{k+2}\right]_{x=0}^1 = \frac{k+1}{k+2}\,.$$

Hodnota realizace výběrového průměru je

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \frac{0.2+0.4+0.5+0.7+0.8+0.8+0.9+0.9}{8} = \frac{5.2}{8} = 0.65\,.$$

Jejich srovnáním dostáváme

$$0.65 = \overline{x} = \mathrm{E}X = \frac{k+1}{k+2} = 1 - \frac{1}{k+2}\,,$$

takže výsledek je

$$k = 2 - \frac{1}{1-0.65} \doteq \mathbf{0.8571}\,.$$

Metoda maximální věrohodnosti:
Pro soubor měření $(x_1, \ldots, x_n)$ a funkci věrohodnosti máme

$$\Lambda(k) = \prod_{i=1}^n f_X(x_i; k) = (k+1)^n \prod_{i=1}^n x_i^k\,,$$

$$\lambda(k) = \ln(\Lambda(k)) = n\ln(k+1) + k\ln\left(\prod_{i=1}^n x_i\right),$$

$$\lambda'(k) = \frac{n}{k+1} + \ln\left(\prod_{i=1}^n x_i\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = -1 - \frac{n}{\ln(\prod_{i=1}^n x_i)}\,.$$

Po dosazení $n = 8$ a

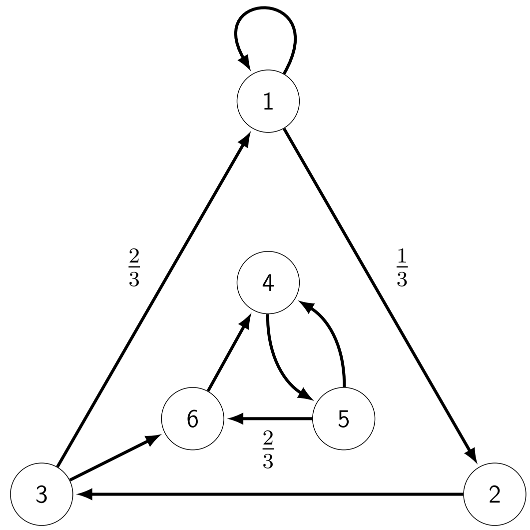
$$\ln\left(\prod_{i=1}^n x_i\right) = \ln(0.2\cdot 0.4\cdot 0.5\cdot 0.7\cdot 0.8\cdot 0.8\cdot 0.9\cdot 0.9) = \ln(0.0145152) \doteq -4.232558903$$

dostaneme

$$k \doteq -1 + \frac{8}{4.232558903} \doteq \mathbf{0.89}\,.$$

Funkce λ je nezáporná a spojitá na uzavřené množině $\langle 0, +\infty\rangle$. V intervalu $(0, 0.89)$ je λ' evidentně kladná a v intervalu $(0.89, +\infty)$ je λ' zase záporná. Dále, $\lambda(0) = 0$, takže v bodě $k = 0.89$ je skutečně věrohodnost maximální.

3. (15 bodů) Markovův řetězec je dán přechodovým diagramem:



A. Určete pravděpodobnosti přechodů, v diagramu neuvedené. *(2 body)*

B. Klasifikujte všechny stavy. *(2 body)*

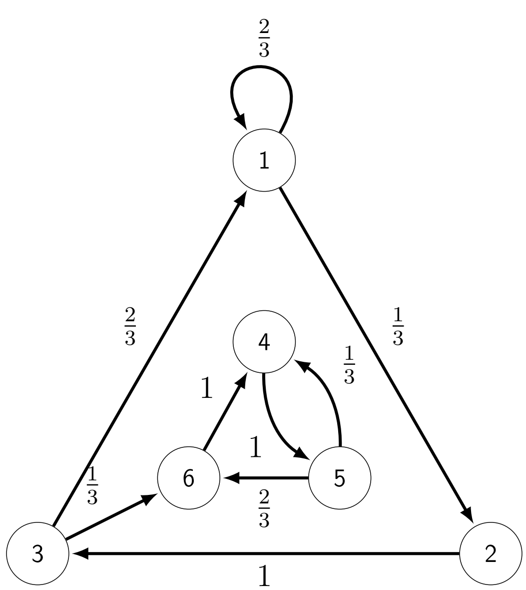
C. Odhadněte stav ve výchozím čase t, víte-li, že v čase $t + 3$ byl řetězec ve stavu 6. *(3 body)*

D. Odhadněte rozdělení pravděpodobností stavů po 21 042 krocích, jestliže začínáme ve stavu 1. *(6 bodů)*

E. Jak se úloha D změní, jestliže začínáme ve stavu 2, resp. 4? *(2 body)*

Řešení:

A.



B. **Stavy 1, 2, 3 jsou přechodné, stavy 4, 5, 6 jsou trvalé neperiodické (ergodické) a tvoří jedinou komponentu.**

C. Můžeme vypočítat matici $\boldsymbol{P}^3$ a v jejím třetím sloupci vybrat největší prvek, nebo rovnou propočítat možné cesty; nenulové pravděpodobnosti mají pouze následující:

$$p_{16}^{(3)} = \frac{1}{9}, \quad p_{56}^{(3)} = \frac{2}{9}, \quad p_{66}^{(3)} = \frac{2}{3}\,.$$

Nejvěrohodnější je, že stav v čase t byl 6.

D. Pravděpodobnosti po daném počtu kroků budou blízké asymptotickým. Ty jsou pro přechodné stavy nulové a pro ergodickou komponentu $\{4, 5, 6\}$ konvergují k jedinému stacionárnímu rozdělení pravděpodobností $\boldsymbol{p}$. To lze získat řešením soustavy lineárních rovnic

$$\boldsymbol{p} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{p}\,.$$

Stavy 4 a 5 musí mít stejné stacionární pravděpodobnosti (po 4 vždy následuje 5, před 5 vždy předchází 4), takže stačí hledat řešení ve tvaru $\boldsymbol{p} = (a, a, 1 - 2a)$. Dostaneme $a = \frac{3}{8}$. Asymptotické rozdělení pravděpodobností všech původních stavů je $\left(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}},\right)$.

E. Rozdíly by byly nepatrné, vždy se nalézáme velmi blízko jediného stacionárního rozdělení.