1. (18 bodů) Náhodná veličina X má rozdělení pravděpodobnosti určené distribuční funkcí F_X, kde

$$F_X(u) = \begin{cases} 0, & u < 0, \\ \dfrac{u^2}{8}, & 0 \le u < \dfrac{1}{2}, \\ u - \dfrac{7}{32}, & \dfrac{1}{2} \le u < 1, \\ 1, & u \ge 1. \end{cases}$$

a) Vyjádřete náhodnou veličinu X jako směs spojité náhodné veličiny U a diskrétní náhodné veličiny V, popište jejich rozdělení. *(8 bodů)*

b) Rozdělení všech tří náhodných veličin znázorněte grafem. *(4 body)*

c) Napište vzorec pro výpočet střední hodnoty směsi dvou náhodných veličin a podle něj vypočtěte střední hodnotu $\mathrm{E}X$. *(4 body)*

d) Platí obdobný vzorec jako v c) pro výpočet rozptylu směsi náhodných věličin? *(2 body)*

Řešení:

a) Náhodná veličina $X = \mathrm{Mix}_{(\alpha,1-\alpha)}(U, V)$, tedy platí

$$F_X(u) = \alpha F_U(u) + (1-\alpha)F_V(u), \qquad u \in \mathbb{R},\ 0 \le \alpha \le 1.$$

Náhodná veličina X není spojitá v bodech $\frac{1}{2}$ a 1,

$$P(X = \tfrac{1}{2}) = F_X(\tfrac{1}{2}+) - F_X(\tfrac{1}{2}-) = \frac{1}{2} - \frac{7}{32} - \frac{1}{32} = \frac{1}{4}\,,$$
$$P(X = 1) = F_X(1+) - F_X(1-) = 1 - \left(1 - \frac{7}{32}\right) = \frac{7}{32}\,.$$
$$P(X = \tfrac{1}{2}) + P(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{7}{32} = \frac{15}{32} \implies$$
$$1 - \alpha = \mathbf{\frac{15}{32}}\,, \qquad \alpha = \mathbf{\frac{17}{32}}\,.$$

Pro diskrétní složku V směsi dostaneme pravděpodobnostní funkci

$$p_V(u) = (1-\alpha)^{-1} P(X = u) = \frac{32}{15}\, P(X = u)\,,$$

u	$\frac{1}{2}$	1
$P(X = u)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{32}$
p_V	$\frac{8}{15}$	$\frac{7}{15}$

Distribuční funkci spojité složky U směsi dostaneme po odečtení skoků v bodech $\frac{1}{2}$ a 1 a po následném vynásobení faktorem $\alpha^{-1} = \frac{32}{17}$. Dostaneme:

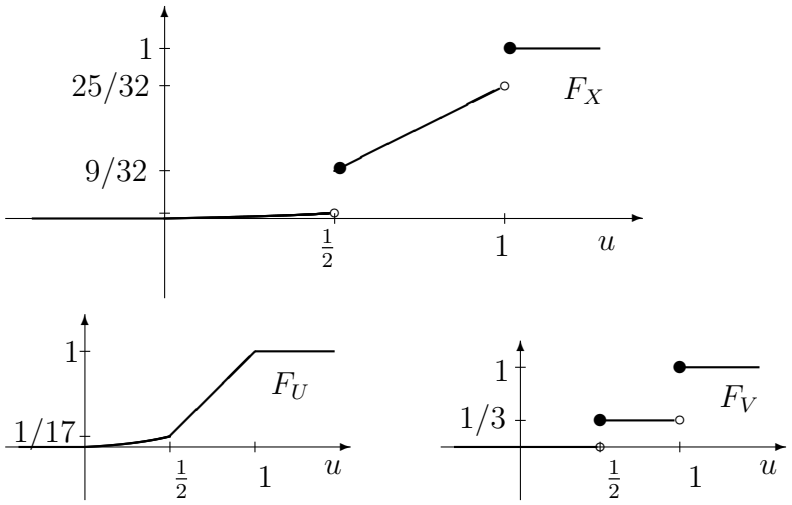
$u < 0:\ F_U(u) = 0\,;$

$0 \le u < \frac{1}{2}:\ F_U(u) = \frac{32}{17}\, F_X(u) = \frac{32}{17} \cdot \frac{u^2}{8} = \mathbf{\frac{4}{17}\, u^2}\,;$

$\frac{1}{2} \le u < 1:\ F_U(u) = \frac{32}{17}\left(F_X(u) - P(X = \frac{1}{2})\right) = \frac{32}{17}\left(u - \frac{7}{32} - \frac{1}{4}\right) = \dfrac{\mathbf{32\,u - 15}}{\mathbf{17}}$;

$u \ge 1:\ F_U(u) = 1\,.$

b)



c) Pro střední hodnotu směsi $X = \mathrm{Mix}_{(\alpha,1-\alpha)}(U, V)$ dvou náhodných veličin U a V platí vzorec

$$\mathrm{E}X = \alpha \mathrm{E}U + (1-\alpha)\mathrm{E}V\,.$$

Pro střední hodnotu náhodné veličiny X dostaneme vztah

$$\mathrm{E}X = \frac{17}{32}\,\mathrm{E}U + \frac{15}{32}\,\mathrm{E}V\,. \qquad (\spadesuit)$$

Potom je

$$\mathrm{E}U = \int_{-\infty}^{\infty} u\,F_U'(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{8}{17}\,u^2\,\mathrm{d}u + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{32}{17}\,u\,\mathrm{d}u = \frac{8}{17}\left[\frac{u^3}{3}\right]_{u=0}^{\frac{1}{2}} + \frac{32}{17}\left[\frac{u^2}{2}\right]_{u=\frac{1}{2}}^{1} =$$
$$= \frac{1}{51} + \frac{16}{17} - \frac{4}{17} = \frac{37}{51}\,;$$
$$\mathrm{E}V = \sum_u u\,p_V(u) = \frac{1}{2}\,p_V\left(\frac{1}{2}\right) + 1 \cdot p_V(1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{15} + \frac{7}{15} = \frac{11}{15}\,.$$

Po dosazení do vzorce ($\spadesuit$) dostaneme pro střední hodnotu

$$\mathrm{E}X = \frac{17}{32}\cdot\frac{37}{51} + \frac{15}{32}\cdot\frac{11}{15} = \frac{37}{96} + \frac{11}{32} = \mathbf{\frac{35}{48}} \doteq \mathbf{0.7292}\,.$$

d) Pro výpočet rozptylu směsi obdobný vzorec neplatí (jen podstatně složitější).

2. (18 bodů) Datový soubor (3, 2, 1.5, 0.5, 1, 1.5, 2.5, 4) je posloupností realizací náhodné veličiny X, která má normální rozdělení $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

   a) Stanovte horní 95% intervalový odhad střední hodnoty μ. *(9 bodů)*

b) Stanovte symetrický 95% intervalový odhad rozptylu σ^2. *(9 bodů)*

Řešení:

Pro daný soubor máme $n = 8$,

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{8} \cdot 16 = 2\,,$$
$$(n-1)s_{\boldsymbol{x}}^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{\boldsymbol{x}})^2 = 9\,,$$
$$s_{\boldsymbol{x}}^2 = \frac{9}{7} \doteq 1.2857\,,$$
$$s_{\boldsymbol{x}} = \frac{3}{\sqrt{7}} \doteq 1.1339\,.$$

a) Statistika

$$\frac{\mu - \overline{\boldsymbol{X}}}{\sqrt{S_{\boldsymbol{X}}^2}}\sqrt{n}$$

má rozdělení t(7), intervalový odhad je

$$\bar{\boldsymbol{x}} + \frac{s_{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{n}}\, q_{\mathrm{t}(7)}(0.95) \doteq 2 + \frac{1.1339}{\sqrt{8}}\, 1.89 \doteq \mathbf{2.758}\,.$$

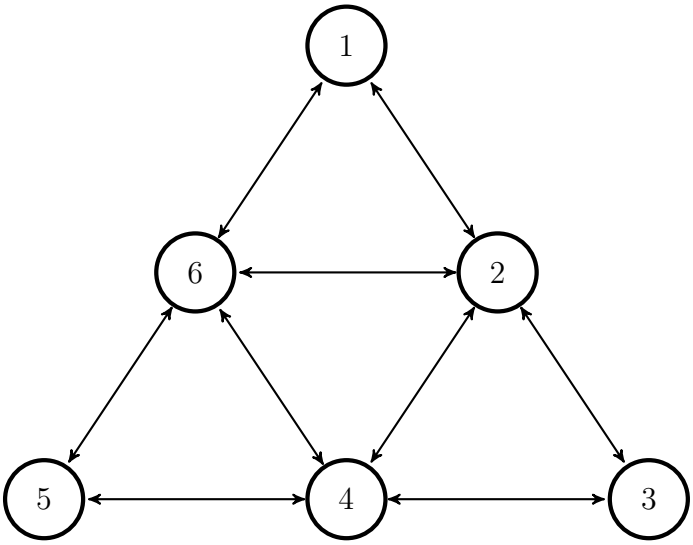
b) Statistika

$$T = \frac{(n-1)S_{\boldsymbol{X}}^2}{\sigma^2}$$

má rozdělení $\chi^2(7)$. Pro 95% interval spolehlivosti dostaneme nerovnosti

$$q_{\chi^2(7)}(0.025) < T < q_{\chi^2(7)}(0.975)\,,$$
$$1.69 < \frac{9}{\sigma^2} < 16.01\,,$$
$$\frac{9}{16.01} < \sigma^2 < \frac{9}{1.69}\,,$$
$$\mathbf{0.562 < \sigma^2 < 5.325}\ .$$

3. (14 bodů) Markovův řetězec je dán obrázkem; pro každý stav platí, že všechny hrany z něj vycházející mají stejnou pravděpodobnost.



A. Vypočtěte pravděpodobnost přechodu ze stavu 1 do stavu 4 v právě třech krocích. *(3 body)*

B. Oklasifikujte všechny stavy. *(2 body)*

C. Stanovte všechny komponenty. *(2 body)*

D. Konverguje rozdělení stavů ke stacionárnímu? Za jakých podmínek? Odůvodněte. *(3 body)*

E. Stanovte rozdělení pravděpodobností stavů po 1000 krocích, pokud jsme vyšli ze stavu 1. *(4 body)*

(Můžete kreslit do zadání.)

Řešení:

A. Např. cesta 1234 má pravděpodobnost

$$p_{12}\, p_{23}\, p_{34} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{16}\,.$$

Cesty 1234, 1264, 1654, 1624 dávají celkovou pravděpodobnost

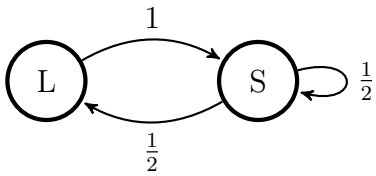
$$\frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{16}}\,.$$

B. Všechny stavy jsou ergodické (trvalé neperiodické).

C. Všechny stavy tvoří jedinou komponentu.

D. Tento Markovův řetězec je ergodický (nerozložitelný, s ergodickými stavy), takže vždy konverguje k jedinému stacionárnímu rozdělení pravděpodobností.

E. Přibližným výsledkem je stacionární rozdělení. Můžeme je najít jako levý vlastní vektor matice přechodu (řádu 6×6), odpovídající vlastnímu číslu 1. Díky symetrii bude pravděpodobnost stejná pro všechny liché stavy $(1, 3, 5)$, řekněme c, a pro všechny sudé stavy $(2, 4, 6)$, $\frac{1}{3} - c$. Pro přechod mezi lichými (L) a sudými (S) stavy dostáváme pravděpodobnost lichých stavů $\ell = 3c$, pravděpodobnost sudých stavů $s = 3\left(\frac{1}{3} - c\right)$ a jednodušší graf na obrázku.



Z něj nebo z rovnice

$$(\ell, s) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = (\ell, s)$$

vyplývá $\ell = 3c = \frac{1}{3}$, $s = 3\left(\frac{1}{3} - c\right) = \frac{2}{3}$, $c = \frac{1}{9}$ a stacionární rozdělení je

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}\right).$$