1. (15 bodů) Náhodná veličina X má diskrétní rozdělení určené pravděpodobnostní funkcí $p_X(-1) = 0.4$, $p_X(1) = 0.6$. Náhodná veličina Y má spojité rozdělení s hustotou $f_Y(v) = \mathrm{e}^{-v}$ pro $v \in (0, \infty)$, $f_Y(v) = 0$ pro $v \in (-\infty, 0)$ a náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé.
a) Určete rozdělení náhodné veličiny $Z = X + Y$. *(9 bodů)*
b) Vypočtěte medián $q_Z(0.5)$ a střední hodnotu $\mathrm{E}Z$. *(6 bodů)*
(Návod: lze použít směs rozdělení, jehož jedna složka odpovídá situaci $X = -1$ a druhá $X = 1$.)

Řešení:

a) Náhodná veličina Y má distribuční funkci F_Y, kde

$$F_Y(u) = 0 \quad \text{pro } u \in (-\infty, 0),$$

$$F_Y(u) = \int_0^u \mathrm{e}^{-v}\mathrm{d}v = 1 - \mathrm{e}^{u} \quad \text{pro } u \in \langle 0, \infty),$$

$$F_Y(u) = \begin{cases} 0, & u \in (-\infty, 0), \\ 1 - \mathrm{e}^{-u}, & u \in \langle 0, \infty). \end{cases} \qquad (\spadesuit)$$

Pro distribuční funkci náhodné veličiny Z dostaneme vzorec

$$\begin{aligned} F_Z(u) &= P(X + Y \le u) = P(X = -1 \wedge Y \le u + 1) + P(X = 1 \wedge Y \le u - 1) = \\ &= p_X(-1)\, F_Y(u + 1) + p_X(1)\, F_Y(u - 1) = 0.4\, F_Y(u + 1) + 0.6\, F_Y(u - 1). \end{aligned}$$

Vyjádření distribuční funkce získáme ze vzorce ($\spadesuit$), když použijeme skutečnosti:
$u + 1 < 0 \Leftrightarrow u < -1, \qquad u - 1 < 0 \Leftrightarrow u < 1.$
$u \in (-\infty, -1):\ F_Y(u) = 0.4 \cdot 0 + 0.6 \cdot 0 = 0;$
$u \in \langle -1, 1):\ F_Y(u) = 0.4\,(1 - \mathrm{e}^{-u-1}) + 0.6 \cdot 0 = 0.4\,(1 - \mathrm{e}^{-u-1});$
$u \in \langle 1, \infty):\ F_Y(u) = 0.4\,(1 - \mathrm{e}^{-u-1}) + 0.6\,(1 - \mathrm{e}^{-u+1}) = 1 - \frac{1}{10}\,\mathrm{e}^{-u}\,(4\,\mathrm{e}^{-1} + 6\,\mathrm{e}^{1}).$

b) Náhodná veličina Z má spojité rozdělení. Je totiž

$$F_Z(-1-) = F_Z(-1+) = 0, \quad F_Z(1-) = F_Z(1+) = 0.4\,(1 - \mathrm{e}^{-2}) \doteq 0.3459\,.$$

Medián $q_Z(0.5) = w$ bude ležet v intervalu $(1, \infty)$ a jeho hodnotu dostaneme ze vzorce

$$F(q_Z(0.5)) = 0.5 \Rightarrow 1 - \frac{1}{10}\,\mathrm{e}^{-w}\,(4\,\mathrm{e}^{-1} + 6\,\mathrm{e}^{1}) = 0.5 \Rightarrow \mathrm{e}^{w} = \frac{4\,\mathrm{e}^{-1} + 6\,\mathrm{e}}{5} \Rightarrow q_z(0.5) = w \doteq \mathbf{1.2687}.$$

Střední hodnotu vypočteme pomocí vztahu $\mathrm{E}Z = \mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}X + \mathrm{E}Y$.

$$\begin{aligned} \mathrm{E}X &= \sum_u u\, p_X(u) = -1 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.6 = 0.2\,, \\ \mathrm{E}Y &= \int_{-\infty}^{\infty} u\, f_Y(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\infty} u\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \left[-u\,\mathrm{e}^{-u}\right]_{u=0}^{\infty} + \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \left[-\mathrm{e}^{-u}\right]_{u=0}^{\infty} = 1\,, \\ \mathrm{E}Z &= 0.2 + 1 = \mathbf{1.2}\,. \end{aligned}$$

Lze též počítat

$$\begin{aligned} \mathrm{E}Z &= \int_{-\infty}^{\infty} u\, F_Z'(u)\,\mathrm{d}u = 0 + \frac{4\,\mathrm{e}^{-1}}{10} \int_{-1}^{1} u\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u + \frac{4\,\mathrm{e}^{-1} + 6\,\mathrm{e}^{1}}{10} \int_1^{\infty} u\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \\ &= 0.4\,\mathrm{e}^{-1}(-2\,\mathrm{e}^{-1}) + \frac{4\,\mathrm{e}^{-1} + 6\,\mathrm{e}^{1}}{10}\,(2\,\mathrm{e}^{-1}) = 1.2\,. \end{aligned}$$

2. (15 bodů) Stejnou veličinu jsme měřili dvěma metodami, výsledky shrnuje tabulka.

metoda \ parametr	rozsah výběru	výběrový průměr	výběrová směrodatná odchylka
1.	10	40.7	8
2.	21	43.3	6

Posuďte na hladině významnosti 5 %, zda (a) rozptyly, (b) střední hodnoty obou metod lze považovat za stejné. *((a) 5 bodů, (b) 10 bodů)*

Řešení:

Testovací kritérium pro rovnost rozptylů $8^2/6^2 \doteq 1.78$ srovnáme s kvantily $q_{\mathrm{F}(9,20)}(0.975) \doteq 2.8$, $q_{\mathrm{F}(20,9)}(0.025) < 1$, rovnost rozptylů nezamítáme.

Odhad rozptylu původního rozdělení vychází

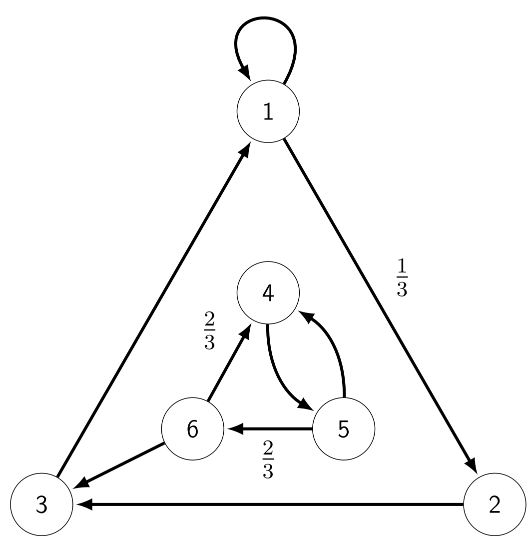
$$s^2 = \frac{9 \cdot 8^2 + 20 \cdot 6^2}{29} \doteq 44.69\,,$$

testovací kritérium pro rovnost středních hodnot

$$\frac{-2.6}{\sqrt{44.69}\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{21}}} \doteq -1.012\,,$$

porovnáme s $\pm q_{\mathrm{t}(29)}(0.975) \doteq \pm 2.05$, rovnost středních hodnot nezamítáme.

3. (15 bodů) Markovův řetězec je dán přechodovým diagramem:



A. Určete pravděpodobnosti přechodů, v diagramu neuvedené. *(2 body)*

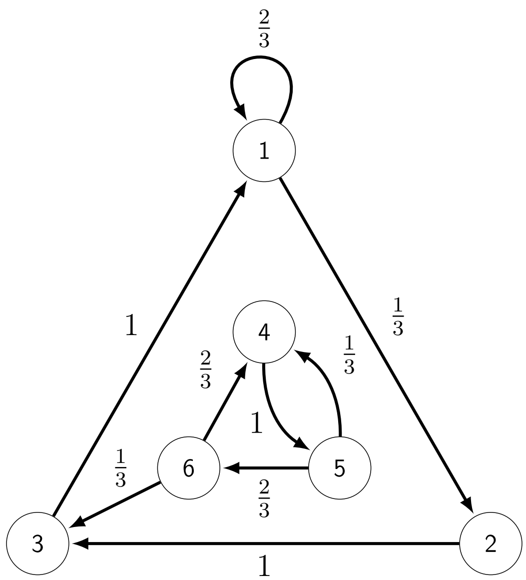
B. Klasifikujte všechny stavy. *(2 body)*

C. Odhadněte stav ve výchozím čase t, víte-li, že v čase $t + 3$ byl řetězec ve stavu 3. *(3 body)*

D. Odhadněte rozdělení pravděpodobností stavů po 21 042 krocích, jestliže začínáme ve stavu 4. *(6 bodů)*

E. Jak se úloha D změní, jestliže začínáme ve stavu 5, resp. 1? *(2 body)*

Řešení:

A. 

B. **Stavy 4, 5, 6 jsou přechodné, stavy 1, 2, 3 jsou trvalé neperiodické (ergodické) a tvoří jedinou komponentu.**

C. Můžeme vypočítat matici $\boldsymbol{P}^3$ a v jejím třetím sloupci vybrat největší prvek, nebo rovnou propočítat možné cesty; nenulové pravděpodobnosti mají pouze následující:

$$p_{13}^{(3)} = \frac{2}{9}, \quad p_{33}^{(3)} = \frac{1}{3}, \quad p_{43}^{(3)} = \frac{2}{9}\,.$$

Nejvěrohodnější je, že stav v čase t byl 3.

D. Pravděpodobnosti po daném počtu kroků budou blízké asymptotickým. Ty jsou pro přechodné stavy nulové a pro ergodickou komponentu $\{1,2,3\}$ konvergují k jedinému stacionárnímu rozdělení pravděpodobností $\boldsymbol{p}$. To lze získat řešením soustavy lineárních rovnic

$$\boldsymbol{p}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{p}\,.$$

Z poslední rovnice nebo úvahy plyne, že stavy 2 a 3 musí mít stejné stacionární pravděpodobnosti (po 2 vždy následuje 3, před 3 vždy předchází 2), takže stačí hledat řešení ve tvaru $\boldsymbol{p} = (1-2b, b, b)$. Dostaneme $b = \frac{1}{5}$. Asymptotické rozdělení pravděpodobností všech původních stavů je $\left(\boldsymbol{\frac{3}{5}}, \boldsymbol{\frac{1}{5}}, \boldsymbol{\frac{1}{5}}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}\right)$.

E. Rozdíly by byly nepatrné, vždy se nalézáme velmi blízko jediného stacionárního rozdělení.