1. (18 bodů) Náhodný vektor (X, Y) má rozdělení dané následující tabulkou.

$Y \setminus X$	0	1	2
0	0.3	0	0.2
1	0.2	0.2	0.1

a) Určete marginální rozdělení pravděpodobnosti.

b) Určete střední hodnotu (X, Y).

c) Určete kovarianční matici (X, Y).

d) Jsou náhodné veličiny nezávislé? Zdůvodněte.

Řešení:

t	0	1	2
$p_X(t)$	0.5	0.2	0.3

t	0	1
$p_Y(t)$	0.5	0.5

$$\mathrm{E}(X) = 0.8\,, \qquad \mathrm{E}(Y) = 0.5\,, \qquad \Sigma_{X,Y} = \begin{pmatrix} \mathrm{D}(X) & \mathrm{cov}(X,Y) \\ \mathrm{cov}(X,Y) & \mathrm{D}(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.76 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{pmatrix}.$$

Jedná se o závislé veličiny, které ale mají nulovou kovarianci.

2. (18 bodů) Z 15 měření stále stejného napětí dvěma voltmetry nám vyšly výběrové průměry 6.15 V a 6.32 V, výběrové směrodatné odchylky 0.3 V a 0.4 V. Posuďte na hladině významnosti 1 %, zda střední hodnota údajů těchto voltmetrů může být stejná. Uveďte použité předpoklady.

Řešení:

Nejdříve posoudíme hypotézu o rovnosti rozptylů. Vypočítáme poměr výběrových rozptylů

$$t = \frac{0.4^2}{0.3^2} \doteq 1.778$$

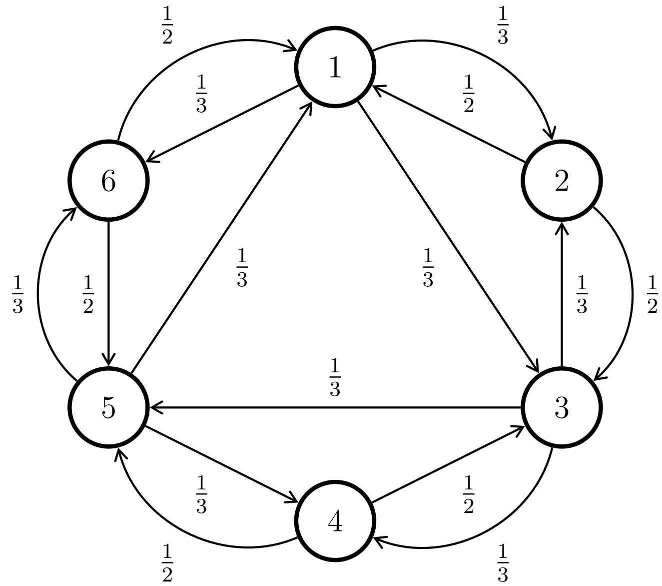
a porovnáme s kvantilem $q_{\mathrm{F}(14,14)}(0.995) \doteq 4.30$, hypotézu nezamítáme.

Dále vypočítáme testovací statistiku

$$t = \frac{6.15 - 6.32}{\sqrt{\frac{0.3^2+0.4^2}{2}}\sqrt{\frac{2}{15}}} \doteq -1.317\,,$$

kterou porovnáme s kvantilem $q_{\mathrm{t}(28)}(0.005) = -q_{\mathrm{t}(28)}(0.995) \doteq -2.76$, hypotézu nezamítáme. Vycházíme z předpokladu, že chyby jednotlivých měření jsou nezávislé a mají všechny normální rozdělení se stejným rozptylem a uvedenými středními hodnotami.

3. (14 bodů) Markovův řetězec je dán diagramem, pro každý uzel jsou všechny možné (tj. vyznačené) cesty stejně pravděpodobné.



a) Najděte pravděpodobnosti stavů po dvou krocích, jestliže počáteční rozdělení pravděpodobností stavů bylo $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0)$.

b) Klasifikujte všechny stavy i celý řetězec.

c) Najděte všechny uzavřené množiny stavů.

d) Najděte všechna stacionární rozdělení pravděpodobností a rozhodněte, zda řetězec k některému z nich konverguje. *Návod: Můžete využít symetrie.*

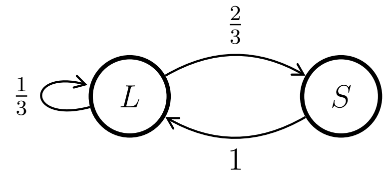
Řešení:

a) Pokud by počáteční stav byl 1, rozdělení pravděpodobností po dvou krocích by bylo $(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{5}{18}, 0)$. Pokud by počáteční stav byl 3, rozdělení pravděpodobností po dvou krocích by bylo dáno jen posunutím předchozího výsledku, $(\frac{5}{18}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9})$. Hledané rozdělení je váženým (zde aritmetickým) průměrem předchozích dvou případů $(\frac{11}{36}, \frac{1}{18}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{18})$.

b) Všechny stavy jsou trvalé neperiodické, tedy ergodické; celý řetězec je nerozložitelný, ergodický.

c) Množina všech stavů a prázdná množina.

d) Jelikož řetězec je ergodický, konverguje k jedinému stacionárnímu rozdělení pravděpodobností. V něm, díky symetrii, budou mít všechny sudé stavy stejnou pravděpodobnost, stejně tak i všechny liché stavy. Najdeme je jako stacionární rozdělení pravděpodobností zjednodušeného řetězce, v němž rozlišujeme jen stavy sudé (S) a liché (L),



$$\frac{p(S)}{p(L)} = \frac{2}{3}\,, \qquad p(L) = \frac{3}{5}\,, \qquad p(S) = \frac{2}{5}\,,$$

což pro původní značení znamená rozdělení pravděpodobností $(\frac{1}{5}, \frac{2}{15}, \frac{1}{5}, \frac{2}{15}, \frac{1}{5}, \frac{2}{15})$.