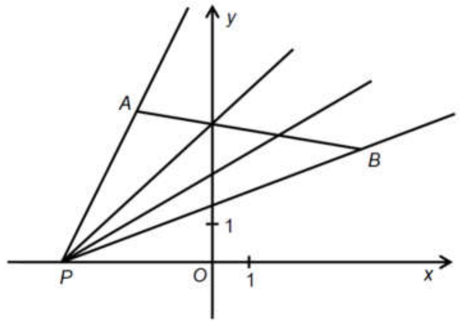
14 – Analytická geometrie v rovině a v prostoru

1) Krajním bodem úsečky AB je B [8; -3]. Body V, X rozdělují úsečku AB na třetiny. Doplňte chybějící souřadnice bodů A[a; 9] a V [2; v]. [-1, 5]

2) Zápisy dvou přímek p a q obsahují neznámé reálné číslo k. $p: (k-2)x - 3y = 0, q: kx + 5y - 3 = 0$. Pro které hodnoty jsou přímky p a q na sebe kolmé? Pro každou dvojici kolmých přímek p a q určete jejich průsečík. [5; -3; 3/10; 3/10; -9/34; 15/34]



3) Uvažujme všechny polopřímky s počátečním bodem P[-4; 0], které mají společný bod s úsečkou AB, A[-2; 4], B[4; 3]. Libovolná množina bodů X [x; y] roviny vyhovující rovnici $y = ax + b$ představuje některou z uvažovaných polopřímek, právě když jsou splněny podmínky (1–3): 1. Pro všechny hodnoty proměnné x platí $x \in \langle *; \infty)$. 2. Směrnice je z intervalu $\langle 0{,}375; *\rangle$. 3. Pro veličiny a, b platí $b = * \, a$. [-4; 2; 4]

4) Je dán pravidelný šestiúhelník ABCDEF se středem S a vektory $\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AF}$. Rozhodněte, zda jsou tvrzení pravdivá: $\overrightarrow{AS} = \vec{u} - \vec{v}, \overrightarrow{AD} = 2\vec{u} + 2\vec{v}, \overrightarrow{BD} = \vec{u} + 2\vec{v}$. [N, A, A]

5) Odchylka přímky $p: 6x + ty - t = 0$ od souřadné osy x je 60°. Určete hodnotu t v rovnici přímky p. [$\pm 2\sqrt{3}$]

6) V rovnoběžníku ABCD je dán střed souměrnosti S [2; 0] a vektory $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (5; -1)$ a $\vec{d} = \overrightarrow{AD} = (1; 3)$. Který z uvedených bodů je vrcholem tohoto rovnoběžníku? A) A[-3; -1], B) [5; -1], C) C [5; 1], D) D [-1; 1], E) žádný. [C]

7) Přímky p, q, r se protínají v bodě A [0; 3]. Přiřaďte ke každé přímce p, q, r její obecnou rovnici, jestliže platí: 1. Přímka p je samodružná v osové souměrnosti s osou o: $2x + y = 0$. 2. Přímka q je samodružná ve středové souměrnosti se středem S [4; 1]. 3. Přímka r je samodružná v posunutí o vektor $\vec{v} = (2; 4)$. A) $x + 2y - 6 = 0$, B) $x - 2y + 6 = 0$, C) $2x - y + 3 = 0$, D) $4x - 2y + 3 = 0$, E) $4x + y - 3 = 0$. [1B, 2A, 3C]

8) Přímka prochází body A [-25; 30] a B [-10; 10]. Přímka p je obrazem přímky q v posunutí určeném vektorem $\vec{u} = (-3; 4)$. Jaká je vzdálenost přímek p, q? A) větší než 5, B) 5, C) nenulová vzdálenost menší než 5, D) 0, E) Nelze určit, přímky jsou různoběžné. [D]

9) Přímky p, q jsou rovnoběžné. Platí: $p: 12x + 5y + 6 = 0$, $q: ax + 3y - 12 = 0$, kde a představuje reálné číslo. Určete vzdálenost přímek p, q. [2]

10) Jsou dány body A [0; 12], B [36; 0]. Dopočítejte souřadnice bodů X [x; 0] a Y[0; y] ležících na ose o úsečky AB. [[16; 0], [0; -48]]

11) Přímky $p: 3x + y + 6 = 0$ a $q: ax + 5y - 6 = 0$ se protínají na souřadnicové ose x. Určete hodnotu koeficientu a. [-3]

12) Je dáno těžiště T [3; 4] a strana $AB = \{[2t; 4 + t]; t \in \langle -1; 3 \rangle\}$ trojúhelníku ABC. Jaké souřadnice má vrchol C? [5; 2]

13) Jaká je velikost libovolného vektoru $\vec{v} = (3; y; y)$, který je kolmý k vektoru $\vec{w} = (-3; -y; 2y)$? A) $|\vec{v}| = 3\sqrt{3}$; B) $|\vec{v}| = 3\sqrt{6}$; C) $|\vec{v}| = 6\sqrt{3}$; D) $|\vec{v}| = 9\sqrt{6}$; E) nelze jednoznačně určit. [A]

14) V trojúhelníku ABC s těžištěm T platí: $\overrightarrow{AT} = (5; 1), T[3; 4], C\ [5; 2]$. Vypočtěte souřadnice zbývajících vrcholů A, B trojúhelníku ABC. [[-2; 3], [6; 7]]

15) Tři přímky p, q, r jsou vzájemně rovnoběžné. Přímka p prochází body A[3;-1] a B[4; 1], $q: ax - 2y + 3 = 0, a \in R, r: y = bx - 1, b \in R$. Jaký je součet $a + b$? [6]

16) Jsou dány body A [1; 3], B [-2; 4], C [-2; -3]. Dokažte, že body A, B, C jsou vrcholy trojúhelníku. Napište obecné rovnice přímek těžnice t_a , výšky v_b a osy úsečky AC. Vypočítejte délky stran tohoto trojúhelníku. Určete velikost jeho nejmenšího úhlu.
[$5x - 6y + 13 = 0, x + 2y - 6 = 0, 2x + 4y + 1 = 0, 3\sqrt{5}, \sqrt{10}, 7, 26°33'$]

17) Na přímce $p: x - 2y + 14 = 0$ určete bod A, který má od přímky $q: 3x + 4y + 12 = 0$ vzdálenost 3. [-5; 4,5], [-11; 1,5]
18) Průsečíkem A přímek $a: 2x + 7y - 8 = 0$ a $b: x + 2y - 1 = 0$ a bodem B [2; -3] veďte přímku m. Napište její rovnici. Určete směrnici přímky m a úhel φ, který svírá přímka m s kladnou poloosou x. $[x + y + 1 = 0, k = -1, \varphi = 135°]$
19) Napište obecnou rovnici přímky, která prochází průsečíkem přímek $p: x - 2y + 5 = 0$ a $q: 5x + 3y - 1 = 0$ a je kolmá k přímce $r: 3x - 2y + 5 = 0$. $[2x + 3y - 4 = 0]$
20) Najděte obecné rovnice přímek, které procházejí bodem A [2; 3] a mají od bodu B [0; -1] vzdálenost 4. $[y - 3 = 0, 4x + 3y - 17 = 0]$
21) Napište rovnici přímky, která prochází bodem A [1; 2] a svírá s kladnou poloosou x úhel o velikosti a) 30°, b) 90°. $[\sqrt{3}x - 3y + 6 - \sqrt{3} = 0, x = 1]$
22) Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC, je-li A [-1; 2], B [3; 5], C [4; -3]. [17,5]
23) Jsou dány body A [-5; -6], B [11; 2], C [3; 4]. Určete, zda bod K [-1; 3] je vnitřním bodem trojúhelníku ABC. [ne]
24) Jsou dány body A [2; -4], B [-2; -2], C [0; 3]. Určete souřadnice středu kružnice opsané trojúhelníku ABC. $[\frac{31}{24}; -\frac{10}{24}]$
25) Napište obecnou rovnici přímky p, která prochází bodem M [4; 6]. Dva dané body A [-6; 10], B [10; -6] mají od přímky p stejnou vzdálenost. $[x + y - 10 = 0, 2x - y - 2 = 0]$
26) Napište rovnici přímky, která prochází bodem A [2; -5] rovnoběžně s přímkou $b: x = 1 - 2t, y = -2 + t, t \in R$. Vypočtěte vzdálenost rovnoběžek a, b. $[x + 2y + 8 = 0;\ \sqrt{5}]$
27) Napište parametrickou rovnici přímky, která prochází bodem A [4; –1; 9] a je rovnoběžná a) s osou x, b) s osou y, c) s osou z
[a) $x = 4 + t; y = -1; z = 9$; b) $x = 4; y = -1 + t; z = 9$; c) $x = 4; y = -1; z = 9+t$]
28) Napište parametrickou rovnici přímky p, která prochází bodem A [2; –1; 2] kolmo k rovině $\pi: x - y + z + 13 = 0$. $[p: x = 2 + t; y = -1 - t; z = 2 + t; t \in R]$
29) Napište parametrickou a obecnou rovnici roviny $\rho = ABC$, A [–4; 0; 2], B [–2; 1; 1], C [1; –3; –2]. [parametrická rovnice: $x = -4 + 2t + 3s$; $y = t - 4s$; $z = 2 - t - 3s$; $s, t \in R$ obecná rovnice: $7x - 3y + 11z + 6 = 0$]
30) Napište obecnou rovnici roviny α, která prochází bodem A [2; 1; 4] a je rovnoběžná s rovinou β: $x - 2y + 5z + d = 0$. $[\alpha : x - 2y + 5z - 20 = 0]$
31) Napište obecnou rovnici roviny σ, která prochází bodem A [1; 2; 0] a je kolmá na přímku $p: x = 3 - t; y = 4 + 2t; z = 1 - 2t; t \in R$. $[\sigma : x - 2y + 2z + 3 = 0]$
32) V prostoru E_3 je umístěn pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ tak, že D [0; 0; 0], A [4; 0; 0], B [4; 4; 0], V [2; 2; 6]. Napište obecnou rovnici roviny BCV. $[BCV : 3y + z - 12 = 0]$
33) Najděte vektor $\boldsymbol{u}$, který je kolmý na vektor $\boldsymbol{v} = (3;4)$ a jehož velikost je 15. $[\boldsymbol{u}_1 = (12; -9); \boldsymbol{u}_2 = (-12; 9)]$
34) Dokažte, že trojúhelník ABC, A [16; 1; –2], B [–9; 1; –2], C [0; 1; 10], je pravoúhlý. Vypočítejte jeho obvod, obsah a velikosti vnitřních úhlů. [Skalární součin vektorů $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow$ABC je pravoúhlý; $o = 60$; $S = 150$; $\alpha = 36°52'$; $\beta = 53°08'$; $\gamma = 90°$]
35) Jsou dány body A [0; 1; 2], B [1; 2; 0], C [2; 0; 1]. a) Dokažte, že body A, B, C tvoří trojúhelník. b) Vypočítejte velikost vnitřního úhlu α. c) Vypočítejte délku těžnice na stranu a a souřadnice těžiště T. d) Vypočítejte obvod trojúhelníku ABC. e) Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC. [$\alpha = 60°, \frac{3\sqrt{2}}{2}, [1;1;1], 3\sqrt{6}, \frac{3\sqrt{3}}{2}$]
36) Určete vzdálenost bodu od roviny: A [-1; 6; 8] $\alpha: x + y + z = 0$ $\left[\frac{13}{\sqrt{3}}\right]$

37) Určete vzájemnou polohu přímek, vypočítejte úhel mezi nimi a urči průsečík (pokud existuje):

a) $p: 2x - y + 3 = 0, q: 3x - 4y + 5 = 0,$ $\left[26°34';\ \left[-\frac{7}{5}; \frac{1}{5}\right]\right]$

b) $p: \{x = 1 + 4t; y = -t\}, q: \{x = 3 - 12s; y = -2 + 3s\}$ [||]

c) $p: \{x = 2 - t; y = 1 + t; z = -2 - t\}, q: \{x = 1 + s;\ y = s; z = 5 + s\},$ $[70°32']$

d) $p: \{x = 1 - t; y = 2 + t; z = -6 - 2t\}, q: \{x = 4 + s; y = -1 - s; z = 2s\}$ [=]

38) Určete vzájemnou polohu přímky a roviny, vypočítejte úhel mezi nimi a urči průsečík (pokud existuje): a) $\leftrightarrow p = AB, A[3; -1; 4], B[4; -1; 2], \beta: 2x - y + 3z - 7 = 0,$

b) $\leftrightarrow p = CD, C[13; 1; 4], D[11; -2; 2], \beta: x + 2y - 4z + 1 = 0,$

c) $\leftrightarrow p = XY, X[2; 1; 3], Y[0; 5; 5], \beta: \{x = 1 + 4t - s; y = 2t - s; z = 1 - 3t + s\},$

d) $p: \{x = -1 + 2t; y = 3 + 4t; z = 3t\}, \beta: 3x - 3y + 2z - 5 = 0$

e) $p: \{x = 2 - t; y = -5 + 3t; z = 7 + 2t\}, \beta: \{x = t; y = -7 + t + 3s; z = t + s\}$

[a) $28°34', [6; -1; -2]$; b) p leží v β; c) $30°, [4; -3; 1]$]; d) ||, e) $20°55', [5; -14; 1]$]

39) Určete vzájemnou polohu rovin, vypočítejte úhel mezi nimi a určete průsečnici (pokud existuje) : a) $\alpha: 2x - 5y + 4z - 10 = 0, \beta: x - y - z - 2 = 0,$

b) $\alpha = \leftrightarrow ABC: A[0; -1; 0], B[2; 3; 7], C[-4; 0; -1],$

$\beta: \{x = 1 + t + s; y = 2 - t + 2s; z = 2t - 3s\},$

c) $\alpha: \{x = 1 + t + s;\ y = t - s; z = s\}, \beta: x - y - 2z - 1 = 0.$

[a) $75°02', \{x = 3t, y = -2 + 2t, z = t, t \in R\}$;

b) $70°51', \left\{x = -\frac{36}{8}\frac{4}{1} + \frac{56}{27}t; y = \frac{73}{8\ 1} - \frac{5}{27}t; z = t; t \in R\right\}$; c) =]

40)Určete vzájemnou polohu tří rovin:

a) $x + y + z = 0; 2x + y + 3z - 18 = 0; 3x + 2y + 4z - 12 = 0$ [3 || průsečnice]

b) $2x + y - z - 2 = 0; x - 2y - z + 1 = 0; x + y + z - 7 = 0$ [P[3;0;4]]

c) $x + 2y + 3z - 10 = 0; 2x - y - z + 5 = 0; x + 7y + 10z - 35 = 0$ [1 průsečnice]

d) $4x + 12y - 8z + 7 = 0;\ -2x - 6y + 4z - 3 = 0; x + 3y - 2z + 1 = 0$ [|| roviny]

41) Vypočítejte vzdálenost přímek p: $3x - 4y - 20 = 0$ a q: $6x - 8y + 25 = 0$. [6,5]

42) Vypočítejte vzdálenost přímky p: $\{x = 2t - 1; y = 1 - t; z = 2 + 3t; t \in R\}$ od roviny ρ: $x + 5y + z - 3 = 0$. $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

43) Vypočítejte vzdálenost rovin α: $2x + y + 3z + 1 = 0$ a β: $6x + 3y + 9z + 5 = 0$. $\left[\frac{\sqrt{14}}{21}\right]$

44) Napište obecnou rovnici přímky, která prochází bodem M [15; –3] a průsečíkem přímek p: $3x - 5y + 12 = 0$ a q: $5x + 2y - 42 = 0$. [$p: x + y - 12 = 0$]

45) Napište obecnou rovnici přímky, která prochází bodem A [3;–2] tak, že s přímkou p: $\sqrt{3}\,x - y + 1 = 0$ svírá úhel α = 30°. $[p_1: x - 3 = 0; p_2: x - \sqrt{3}\,y - 2\sqrt{3} - 3 = 0]$

46) V souměrnosti určené rovinou β: $x - 2y + 3z - 21 = 0$ určete obraz bodu A [1; 0; 2]. $[A'[3; -4; 8]]$

47) Dvě strany rovnoběžníku jsou dány rovnicemi $8x + 3y + 1 = 0$, $2x + y - 1 = 0$ a úhlopříčka rovnicí $3x + 2y + 3 = 0$. Vypočítejte souřadnice vrcholů rovnoběžníku.

$[A\ [-2;\ 5];\ B\ [1; -3];\ C\ [5; -9];\ D\ [8; -17]]$

48) Jsou dány dva vrcholy trojúhelníku ABC, A [–10; 2], B [6; 4] a průsečík jeho výšek V [5; 2]. Určete souřadnice bodu C. $[C\ [6\ ; -6]]$

49) Jsou dány vrcholy čtyřstěnu A [6; 0; 0], B [0; 5; 0], C [5; 6; 0], D [2; 3; 8]. Určete úhel přímek AB, CD a úhel roviny ABD s přímkou CD. $[\alpha = 87°35';\ \beta = 25°45']$

50) Určete hodnotu parametru $m \in$ R tak, aby přímka $x = 2 + mt$, $y = -1 + t$, $t \in$ R, procházela bodem $A[-4, 1]$. $[-3]$

51) Vypočtěte hodnoty parametrů $a \in$ R, $b \in$ R tak, aby dané body $A[2a + 3,\ 3b - 9]$, $B[5a - 4,\ 5b + 7]$ byly souměrně sdružené podle osy y. $\left[\frac{1}{7}; -8\right]$

52) Určete hodnoty parametrů $a \in$ R, $b \in$ R tak, aby přímka o rovnici $3x - 2y - 1 = 0$ byla osou úsečky AB, kde $A[a; 3]$, $B[4; b]$. $[-2; -1]$

53) Určete hodnoty parametrů $a \in$ R, $c \in$ R tak, aby přímka o rovnici $ax - 2y + c = 0$ byla osou úsečky AB, kde $A[1; 5]$, $B[-3; 3]$. $[-4; 4]$

54) Určete všechny hodnoty parametru $m \in$ R tak, aby se přímky p: $x - 2y + m = 0$ a q: $3x + 5y - 2 = 0$ protínaly v 1. kvadrantu. $\left[m \in \left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{5}\right)\right]$

55) Určete hodnotu parametru $b \in$ R tak, aby přímka p o rovnici $2x - (b + 2)y + 1 = 0$ a přímka q: $x = 1 + bt$, $y = -1 - 4t$, $t \in$ R, byly navzájem kolmé. $[b = 2 \vee b = -4]$

56) Určete hodnoty parametrů $b \in$ R, $c \in$ R tak, aby přímka o rovnici $2x + by + 1 = 0$ a přímka AB, kde $A[-3; c]$, $B[2; -1]$, byly totožné. $[b = 5 \wedge c = 1]$

57) Určete hodnotu parametru $m \in$ R tak, aby přímky p: $3x + 2y - 1 = 0$, q : $x = -1 + t$, $y = -3 + t$, $t \in$ R, r: $4x - 3y + m = 0$ měly právě jeden společný bod. $[-7]$

58) Zjistěte, zda přímka $2x - 3y - 3 = 0$ a úsečka $x = -2 + 5t$, $y = 2 - t$, $t \in \langle 0; 1\rangle$, mají společný bod. V kladném případě určete jeho souřadnice. $[3; 1]$

59) Zjistěte, zda polopřímky $x = 1 + t$, $y = -2 + 3t$, $t \in \langle 0, \infty)$ a $x = 2 + s$, $y = -1 + 5s$, $s \in \langle 0, \infty)$, mají společný bod. V kladném případě určete jeho souřadnice. $[3; 4]$

60) Čtverec $ABCD$ má střed $S[-3, -2]$ a vrchol $A[1, -3]$. Určete souřadnice ostatních vrcholů čtverce. $[B[-2, 2], C[-7, -1], D[-4, -6]]$

61) V rovnoramenném trojúhelníku ABC se základnou AB, kde $A[2, -1]$, $B[4, 3]$, leží vrchol C na přímce $x + y - 1 = 0$. Určete souřadnice vrcholu C. $[C[-3, 4]]$

62) Na ose x určete všechny body X, jejichž vzdálenost od bodu $A[2, 3]$ je rovna 5.
$[X_1[6, 0], X_2[-2, 0]]$

63) Na přímce p: $x - 2y + 1 = 0$ určete všechny body, které mají od bodu $A[1, 1]$ vzdálenost $d = \sqrt{5}$. $[[-1, 0]\ a\ [3, 2]]$

64) Určete hodnoty parametru a tak, aby těžnice t_a trojúhelníku ABC, kde $A[a, 3]$, $B[4, -1]$, $C[-2, -3]$, měla délku $\sqrt{26}$. $[a = 2 \vee a = 0]$

65) Určete rovnici osy úhlu AVB: $V[1, 2]$, $A[4, 6]$, $B[6, 2]$. $[x - 2y + 3 = 0]$

66) Určete rovnice os souměrnosti daných různoběžek p: $2x + y - 1 = 0$ a q : $x + 2y - 3 = 0$.
$[x - y + 2 = 0, 3x + 3y - 4 = 0]$

67) Určete rovnice os souměrnosti různoběžek p: $x + 3y + 5 = 0$ a q : $x = 1 + t$, $y = -1 - 3t$, $t \in$ R.
$[2x - 2y - 7 = 0, 4x + 4y + 3 = 0]$

68) Určete hodnoty parametrů $a \in$ R, $b \in$ R tak, aby přímka o rovnici $x + 4y - 14 = 0$ byla osou úsečky AB, kde $A[1, -1]$, $B[a, b]$. $[a = 3 \wedge b = 7]$

69) Určete reálné číslo m tak, aby přímka p o rovnicích $x = 2 + mt$, $y = 1 - t$, $z = 2 - 3t$, $t \in$ R, protínala přímku q o rovnicích $x = 1 - t'$, $y = -2 + 3t'$, $z = 2 - t'$, $t' \in$ R. $\left[-\frac{19}{3}\right]$

70) Napište obecnou rovnici roviny, která prochází body $A[-2, 3, 6]$, $B[1, 0, -5]$ a je rovnoběžná s osou y. $[11x + 3z + 4 = 0]$

71) Napište obecnou rovnici roviny, která prochází bodem $A[5, -1, 2]$ a je kolmá k přímce AB, $B[3, 2, -1]$. $[2x - 3y + 3z - 19 = 0]$

72) Napište obecnou rovnici roviny, která prochází body $A[4, 0, 0]$, $B[0, 5, 0]$ a $C[2, 2, 1]$.
$[5x + 4y + 2z - 20 = 0]$

73) Napište parametrické rovnice roviny, která prochází body $A[4, 3, -11]$, $B[-1, 2, 4]$ a $C[-2, 2, 2]$. $[x = 4 + 5u + 6v, y = 3 + u + v, z = -11 - 15u - 13v]$

74) Určete reálné číslo a tak, aby přímka o rovnicích $x = 1 + 4t$, $y = -2 + 3t$, $z = t$ byla rovnoběžná s rovinou $ax + 3y - 5z = 0$. $[a = -1]$

75) Určete reálná čísla a, b tak, aby rovina $ax + by + 6z - 7 = 0$ byla kolmá k přímce o rovnicích $x = 2 + 2t$, $y = -5 - 4t$, $z = -1 + 3t$. $[a = 4, b = -8]$

76) Vypočtěte souřadnice průsečíku P přímky p s rovinou ρ. Přímka p je kolmá k rovině ρ o rovnici $x + 2y + 3z - 30 = 0$ a prochází bodem $A[3, 1, -1]$. $[P[5, 5, 5]]$