ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 2024

ΠΕΤΡΟΣ ΑΓΓΕΛΑΤΟΣ - 03108133

Θεμα 1

Ερώτημα 1

Θεώρημα: *Το $\mathcal{F}$ δεν είναι αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι $|2^{\mathbb{N}}| \leq |\mathcal{F}|$. Γνωρίζουμε ότι το $2^{\mathbb{N}}$ δεν είναι αριθμήσιμο άρα αν $|2^{\mathbb{N}}| \leq |\mathcal{F}|$ τότε και το $\mathcal{F}$ δεν είναι αριθμήσιμο.

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ένα προς ένα συνάρτηση $M : 2^{\mathbb{N}} \to \mathcal{F}$. Ορίζουμε την συνάρτηση αντιστοίχισης $M(S) = f_S$ όπου:

$$f_S(x) = \begin{cases} 1 \text{ if } x \in S \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$$

Θα δείξουμε ότι η M είναι ένα προς ένα, δηλαδή ότι $S_1 \neq S_2 \Rightarrow M(S_1) \neq M(S_2)$.

1. Έστω ότι υπήρχαν σύνολα $S_1, S_2 \in 2^{\mathbb{N}} : S_1 \neq S_2 \wedge M(S_1) = M(S_2)$
2. Από την υπόθεση ότι $S_1 \neq S_2$ υπάρχει $w \in \mathbb{N} : w \in S_1 \wedge w \not\in S_2$.
3. Από την υπόθεση ότι $M(S_1) = M(S_2)$ ισχύει ότι $\forall x \in \mathbb{N} : f_{S_1}(x) = f_{S_2}(x)$
4. Όμως $f_{S_1}(w) = 1$ και $f_{S_2}(w) = 0$
5. Άτοπο, άρα η M είναι ένα προς ένα.

□

Ερώτημα 2

Λήμμα 1: *Η σχέση E είναι ανακλαστική:* $\forall a \in \mathcal{F} : E(a, a)$

Απόδειξη. Έστω αυθαίρετο $a \in \mathcal{F}$ και $m = 0$. Ισχύει ότι $\forall n \geq m : a(n) = a(n)$. Άρα ισχύει ότι $E(a, a)$. □

Λήμμα 2: *Η σχέση E είναι συμμετρική:* $\forall a, b \in \mathcal{F} : E(a, b) \Leftrightarrow E(b, a)$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι $E(a, b) \Rightarrow E(b, a)$.
1. Έστω αυθαίρετα $a, b \in \mathcal{F}$.
2. Από την υπόθεση ότι $\mathrm{E}(a, b)$ ισχύει ότι $\exists m : \forall n \geq m : a(n) = b(n)$
3. Όμως το $=$ είναι συμμετρικό, άρα $\exists m : \forall n \geq m : b(n) = a(n)$
4. Άρα ισχύει ότι $E(b, a)$

□

Λήμμα 3: *Η σχέση E είναι μεταβατική:* $\forall a, b, c \in \mathcal{F} : E(a, b) \wedge E(b, c) \Rightarrow E(a, c)$

Απόδειξη.
1. Έστω αυθαίρετα $a, b, c \in \mathcal{F}$.
2. Από την υπόθεση ότι $\mathrm{E}(a, b)$ ισχύει ότι $\exists m_1 : \forall n \geq m_1 : a(n) = b(n)$
3. Από την υπόθεση ότι $\mathrm{E}(b, c)$ ισχύει ότι $\exists m_2 : \forall n \geq m_2 : b(n) = c(n)$
4. Θέτουμε $m = \max(m_1, m_2)$
5. Ισχύει ότι $\forall n \geq m : a(n) = b(n) \wedge b(n) = c(n)$
6. Όμως το $=$ είναι μεταβατικό άρα $\forall n \geq m : a(n) = c(n)$, άρα $E(a, c)$

□

Θεώρημα: *Η σχέση E είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\mathcal{F}$.*

Απόδειξη. Από τα λήμματα 1, 2, 3 έχουμε ότι η σχέση E είναι ανακλαστική, συμμετρική, και μεταβατική. Άρα είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\mathcal{F}$. □

Ερώτημα 3

Θεώρημα 1: *Κάθε κλάση ισοδυναμίας $\mathcal{E}_f$ είναι αριθμήσιμη.*

Απόδειξη. Ορίζουμε μία απαρίθμηση του συνόλου $\mathcal{E}_f$ με εποχές όπου η i-οστή εποχή περιέχει τις συνάρτησεις $g \in \mathcal{E}_f$ που το ελάχιστο σημείο από το οποίο και μετά είναι αυτόσημες με την f ισούται με i.

$$S_i = \left\{ g \in \mathcal{E}_f : \underset{i}{\operatorname{argmin}}\{\forall n \geq i : f(i) = g(i)\} \right\}$$

Ακεί να δείξουμε ότι κάθε εποχή έχει πεπερασμένα στοιχεία και ότι κάθε στοιχείο του συνόλου $\mathcal{E}_f$ αντίστοιχεί σε κάποια εποχή. □

Λήμμα: *Κάθε εποχή S_i είναι πεπερασμένη*

Απόδειξη. Μία αυθαίρετη εποχή i περιέχει συναρτήσεις οι οποίες διαφέρουν με την f σε το πολύ i σημεία. Άρα κάθε εποχή περιέχει το πολύ 2^i συναρτήσεις. □

Λήμμα: *Κάθε συνάρτηση $g \in \mathcal{E}_f$ ανήκει σε κάποια εποχή*

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι $\exists m : \forall n \geq m : f(n) = g(n)$. Άρα το σύνολο $\{i \in [0, m] : \forall n \geq i : f(i) = g(i)\}$ είναι μη κενό και πεπερασμένο, άρα έχει ελάχιστο στοιχείο $i_{\min}$. Άρα η συνάρτηση g θα απαριθμηθεί στην εποχή $S_{i_{\min}}$. □

Θεώρημα 2: *Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας $\mathcal{F}/E$ δεν είναι αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Έστω προς άτοπο ότι το $\mathcal{F}/E$ είναι αριθμήσιμο. Κάθε συνάρτηση $g \in \mathcal{F}$ θα ανήκει σε κάποια κλάση ισοδυναμίας $\mathcal{E}_f$ η οποία εμφανίζεται σε κάποια θέση i της απαρίθμησης. Όμως και κάθε κλάση ισοδυναμίας είναι αριθμήσιμη άρα η συνάρτηση g θα εμφανίζεται σε κάποια θέση j της απαρίθμησής της. Αντιστοιχούμε σε κάθε συνάρτηση $g \in \mathcal{F}$ το ζεύγος (i, j). Όμως το σύνολο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο, άρα και το σύνολο $\mathcal{F}$ είναι αριθμήσιμο. Άτοπο, άρα $\mathcal{F}/E$ δεν είναι αριθμήσιμο. □

Ερώτημα 4

Οι κρατούμενοι προτού παραταχθούν πρέπει να συμφωνήσουν και να απομνημονεύσουν τον αντιπρόσωπο f για κάθε κλάση ισοδυναμίας του $\mathcal{F}$. Επίσης συμφωνούν ότι το πράσινο καπέλο αντιστοιχεί στην τιμή 0 και το κόκκινο καπέλο στην τιμή 1.

Έστω ότι φρουροί φορούν καπέλα στους κρατούμενους σύμφωνα με μία αυθαίρετη συνάρτηση $h \in \mathcal{F}$. Την ημέρα που παρατάσσονται ο i-οστός κρατούμενος παρατηρεί τα $h(x)$ για $x > i$ και κατασκευάζει την συνάρτηση

$$g_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq i \\ h(x) & \text{otherwise} \end{cases}$$

Στη συνέχεια υπολογίζει τον αντιπρόσωπο f της κλάσης ισοδυναμίας στην οποία ανήκει η g_i και μαντεύει ότι το καπέλο που φοράει έχει χρώμα $f(i)$.

Παρατηρούμε ότι κάθε συνάρτηση g_i αλλά και η συνάρτηση h ανήκει στην ίδια κλάση ισοδυναμίας. Από τον ορισμό της κλάσης ισοδυναμίας ισχύει ότι $\exists m : \forall n \geq m : f(n) = h(n)$. Άρα κάθε κρατούμενος με ΑΜ $\geq m$ θα μαντέψει σωστά το καπέλο του και θα απελευθερωθούν.

Εφόσον το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας δεν είναι αριθμήσιμο ο κάθε κρατούμενος θα πρέπει να απομνημονεύσει μη αριθμήσιμο όγκο πληροφορίας.

Θέμα 2

Ερώτημα 1

Ορίζουμε εποχές E_i όπου κάθε εποχή περιέχει όλες τις συμβολοσειρές με μήκος i. Κάθε εποχή είναι πεπερασμένη επειδή υπάρχουν 2^i διαφορετικες συμβολοσειρές.

$$E_i = \{x \in \{0,1\}^* : |x| = i\}$$

Συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε μία διαδικασία απαρίθμησης του E_S ως εξής:

```
let i ← 0
while true
    for x in E_i:
        if A_S(x) = 1:
            yield x
    i ← i + 1
```

Και ομοίως για το σύνολο $E_{\overline{S}}$ ως εξής:

```
let i ← 0
while true
    for x in E_i:
        if A_S(x) = 0:
            yield x
    i ← i + 1
```

Ερώτημα 2

Ορίζουμε ως $P(i)$ το i-οστό στοιχείο που απαριθμεί μία διαδικασία απαρίθμησης P. Ο υπολογισμός κάποιου $P(i)$ γίνεται σε πεπερασμένα βήματα. Κάθε στοιχείο x ανήκει είτε στο σύνολο S είτε στο $\overline{S}$. Άρα για κάθε στοιχείο x θα υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός k τέτοιος ώστε $E_S(k) = x \vee E_{\overline{S}}(k) = x$. Συνεπώς μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μαντείο $A_S(x)$ ως εξής:

```
As(x):
let i ← 0
while true:
    if E_S(i) = x:
        return 1
    if E_S̄(i) = x:
        return 0
    i ← i + 1
```

Θέμα 3

Σημείωση: Υποθέτουμε ότι όταν λέμε "υπάρχουν δύο μουσικοί" εννοούμε δύο διαφορετικοί μουσικοί. Στην περίπτωση που θέλουμε να εννοούμε δύο μουσικούς που θα μπορούσαν να είναι και ο ίδιος μπορούμε να αγνοήσουμε τον όρο $m_1 \neq m_2$ στις παρακάτω προτάσεις.

1. Το ελάχιστο πλήθος οργάνων που παίζει κάποιος μουσικός είναι δύο.
$$\forall m(M(m) \Rightarrow \exists i_1 \exists i_2(i_1 \neq i_2 \wedge I(i_1) \wedge I(i_2) \wedge P(m, i_1) \wedge P(m, i_2)))$$
2. Υπάρχουν δύο μουσικοί που δεν συμπαθεί ο ένας τον άλλο και υπάρχει όργανο που παίζουν και οι δύο.
$$\begin{aligned}\exists m_1 \exists m_2(\quad & m_1 \neq m_2 \wedge M(m_1) \wedge M(m_2) \wedge \neg L(m_1, m_2) \\ & \wedge \exists i(I(i) \wedge P(m_1, i) \wedge P(m_2, i)))\end{aligned}$$
3. Αν δύο μουσικοί παίζουν ακριβώς τα ίδια όργανα, τότε συμπαθεί ο ένας τον άλλο.
$$\begin{aligned}\forall m_1 \forall m_2(\quad & m_1 \neq m_2 \wedge M(m_1) \wedge M(m_2) \\ & \wedge \forall i(I(i) \Rightarrow P(m_1, i) \Leftrightarrow P(m_2, i)) \Rightarrow L(m_1, m_2))\end{aligned}$$
4. Υπάρχουν δύο μουσικοί που συμπαθεί ο ένας τον άλλο και υπάρχει ένα όργανο που παίζουν και οι δύο, αλλά δεν παίζουν ακριβώς τα ίδια όργανα.
$$\begin{aligned}\exists m_1 \exists m_2(\quad & m_1 \neq m_2 \wedge M(m_1) \wedge M(m_2) \wedge L(m_1, m_2) \\ & \wedge \exists i(I(i) \wedge P(m_1, i) \wedge P(m_2, i)) \\ & \wedge \exists i(I(i) \wedge P(m_1, i) \Leftrightarrow \neg P(m_2, i)))\end{aligned}$$
5. Αν ένας μουσικός παίζει όλα τα όργανα, εκτός ίσως από ένα, τότε τον συμπαθούν όλοι οι άλλοι μουσικοί.
$$\begin{aligned}&\forall m_1(\\ &\quad (M(m_1) \wedge \forall i_1 \forall i_2(I(i_1) \wedge I(i_2) \wedge i_1 \neq i_2 \Rightarrow P(m_1, i_1) \vee P(m_1, i_2))) \\ &\quad \Rightarrow \forall m_2(M(m_2) \wedge m_1 \neq m_2 \Rightarrow L(m_2, m_1)))\end{aligned}$$

Θέμα 4

Ερώτημα α.1

Έστω ένα σύμπαν έξι στοιχείων $U = \{a, b, c, d, e, f\}$. Για να αληθεύει η πρόταση ψ αρκεί να μην αληθεύει η φ_1. Για να μην αληθεύει η φ_1 αρκεί να υπάρχει κάποιο στοιχείο που να μην σχετίζεται με κανένα στοιχείο διαφορετικό από εκείνο. Για παράδειγμα η παρακάτω ερμηνεία όπου τα κενά μπορεί να πάρουν οποιαδήποτε τιμή:

P	a	b	c	d	e	f
a						
b	F					
c	F					
d	F					
e	F					
f	F					

Για να μην αληθεύει η πρόταση ψ αρκεί να μην αληθεύει η φ_4. Για να μην αληθεύει η φ_4 αρκεί να υπάρχουν δύο διαφορετικά στοιχεία που σχετίζονται και προς τις δύο κατευθύνσεις. Για παράδειγμα η παρακάτω ερμηνεία όπου τα κενά μπορεί να πάρουν οποιαδήποτε τιμή:

P	a	b	c	d	e	f
a		T				
b	T					
c						
d						
e						
f						

Ερώτημα α.2

Αρκεί να δείξουμε ότι $\exists x \exists y (P(x,y) \wedge P(y,x) \wedge x \neq y)$ υποθέτοντας ότι ισχύει ότι $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$. Έστω ένα αυθαίρετο στοιχείο του σύμπαντος $x \in U$ και μία ακολουθία $S : S_n \in U$ για την οποία ισχύει ότι

$$(S_0 = x) \wedge \forall n \in \mathbb{N} : (S_n \neq S_{n+1} \wedge P(S_n, S_{n+1}))$$

Μία τέτοια ακολουθία υπάρχει γιατί $S_n \in U$ και από φ_1 υπάρχει επόμενο στοιχείο.

Λήμμα: $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}^+ : P(S_n, S_{n+k})$

Απόδειξη. Έστω αυθαίρετο $a \in \mathbb{N}$. Θα το δείξουμε ότι ισχύει η πρόταση με επαγωγή στο k.

- Για $k = 1$ έχουμε $P(S_a, S_{a+1})$ που ισχύει από τον ορισμό του S.
- Έστω ότι ισχύει $P(S_a, S_{a+k})$. Από τον ορισμό του S ισχύει ότι $P(S_{a+k}, S_{a+k+1})$ και από φ_3 έχουμε ότι $P(S_a, S_{a+k+1})$.

□

Λήμμα: $\exists a, b \in [0, |U|] : a \neq b \wedge S_a = S_b$

Απόδειξη. Από την αρχή του περιστερώνα. □

Χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω ότι $a < b$. Λόγω του ορισμού της S δεν μπορεί να ισχύει ότι $b = a + 1$. Άρα $b = a + \kappa$ όπου $\kappa \geq 2$.

Από τον ορισμό της S έχουμε ότι $P(S_a, S_{a+1})$ και από το προηγούμενο λήμμα έχουμε ότι $P(S_{a+1}, S_{a+\kappa})$. Όμως $S_{a+\kappa} = S_b = S_a$ άρα $P(S_{a+1}, S_a)$.

Ερώτημα β.1

Αν υποθέσουμε ότι το σύμπαν πρόκειται για έναν κατευθυνόμενο γράφο τότε η πρόταση λέει:

Αν για κάθε ζεύγος διαφορετικών κορυφών υπάρχει μεταξύ τους ακμή προς τη μία ή την άλλη κατεύθυνση τότε υπάρχει κάποια κορυφή στην οποία συνδέεται κάθε άλλη κορυφή είτε απευθείας είτε μέσω κάποιας ενδιάμεσης κορυφής.

Ερώτημα β.2

Θεώρημα: *Ο φ αληθηθεύει σε κάθε ερμηνεία με πεπερασμένο σύμπαν.*

Απόδειξη. Θα εργαστούμε επαγωγικά με επαγωγή στον πληθάριθμο του σύμπαντος. Για χάρην συντομίας στην απόδειξη όταν ένα στοιχείο x του σύμπαντος έχει την ιδιότητα $\forall y (x \neq y \Rightarrow P(y,x) \vee \exists z (P(y,z) \wedge P(z,x)))$ θα λέμε ότι το x είναι κομβικό στοιχείο.

Βάση επαγωγής

Έστω ένα σύμπαν με ένα στοιχείο a. Τότε με αντικατάσαση των ποσοδεικτών έχουμε:

$$\varphi = (a \neq a \to P(a,a) \vee P(a,a)) \to (a \neq a \to P(a,a) \vee (P(a,a) \wedge P(a,a)))$$

Όμως $a \neq a \equiv F$ και από ιδιότητα συνεπαγωγής $F \rightarrow T \equiv T$, άρα ο φ ισχύει σε κάθε σύμπαν με ένα στοιχείο.

Επαγωγικό βήμα

a. Έστω αυθαίρετο σύμπαν $U = U' \cup \{s\}$ με $s \notin U'$, $|U'| = n$ και $|U| = n+1$.
b. Έστω ότι $\forall x \forall y (x \neq y \Rightarrow P(x,y) \vee P(y,x)))$.
c. Από επαγωγική υπόθεση και (b) υπάρχει κομβικό στοιχείο $t \in U'$ για το οποίο ισχύει ότι:

$$\forall y (y \neq s \wedge y \neq t \Rightarrow P(y,t) \vee \exists z (z \neq s \wedge P(y,z) \wedge P(z,t))))$$

d. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει κομβικό στοιχείο του U.

Περίπτωση A $P(s,t) \vee \exists z (P(s,z) \wedge P(z,t))$. Θα δείξουμε ότι το t είναι κομβικό στοιχείο του U.

1. Ισχύει ότι $\forall y (t \neq y \Rightarrow P(y,t) \vee \exists z (P(y,z) \wedge P(z,t))))$ από (c) και υπόθεση περίπτωσης A.
2. Άρα το t είναι κομβικό στοιχείο του U.

Περίπτωση B $\neg P(s,t) \wedge \forall z (\neg P(s,z) \vee \neg P(z,t))$. Θα δείξουμε ότι το s είναι κομβικό στοιχείο του U.

1. Έστω αυθαίρετο στοιχείο $y \neq s$.
2. Περίπτωση $y = t$
    2.1. Ισχύει ότι $\neg P(s,y)$ από υπόθεση περίπτωσης B και (2).
    2.2. Ισχύει ότι $P(y,s)$ από (b), (1) και (2.1).
3. Περίπτωση $y \neq t$
    3.1. Ισχύει ότι $P(y,t) \vee \exists w (w \neq s \wedge P(y,w) \wedge P(w,t)))$ από (c), (1), και (3)
    3.2. Περίπτωση $P(y,t)$
        3.2.1. Ισχύει ότι $\neg P(s,y)$ από υπόθεση περίπτωσης B και $P(y,t)$
            3.2.1.1. Ισχύει ότι $P(y,s)$ από (b) και (1)
    3.3. Περίπτωση $\exists w (w \neq s \wedge P(y,w) \wedge P(w,t))$
        3.3.1. Ισχύει ότι $\neg P(s,w)$ από υπόθεση περίπτωσης B και $P(w,t)$.
        3.3.2. Ισχύει ότι $P(w,s)$ από (b) και $w \neq s$.
        3.3.3. Ισχύει ότι $\exists w (P(y,w) \wedge P(w,s))$ από (3.3) και (3.3.2)
4. Ισχύει ότι το s είναι κομβικό στοιχείο του U από (1), (2) και (3).

Άρα σε κάθε περίπτωση το U έχει κομβικό στοιχείο. □

Θέμα 5

Ορίζουμε αρχικά την συνάρτηση για $W = 0$. Επειδή όλα τα w_i είναι θετικά υπάρχει μόνο ένα υποσύνολο του $S : w(S) = 0$, το κενό σύνολο.

$$C(k,0) = 1$$

Στη συνέχεια ορίσουμε τη συνάρτηση για $k = 1$. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν μόνο δύο υποσύνολα του S, το κενό σύνολο και το μονοσύνολο $\{w_1\}$ με $w(\emptyset) = 0$ και $w(\{w_1\}) = w_1$ αντίστοιχα. Συνεπώς

$$C(1,W) = \begin{cases} 1 \text{ if } W = 0 \vee W = w_1 \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$$

Τέλος, ορίζουμε την αναδρομή σχέση. Το πλήθος των υποσυνόλων του $\{w_1, ..., w_k\}$ που έχουν άθροισμα W είναι το πλήθως των υποσυνόλων χωρίς το w_k που έχουν άθροισμα W και το πλήθος των υποσυνόλων χωρίς το w_k που έχουν άθροισμα $W - w_k$, όταν η διαφορά δεν είναι αρνητική.

$$C(k,W) = C(k-1,W) + \begin{cases} 0 & \text{if } W < w_k \\ C(k-1, W-w_k) & \text{otherwise} \end{cases}$$

Θέμα 6

Μεγαλύτερη αλυσίδα

Θεώρημα: *Κάθε αλυσίδα του* $\left(2^S, \subseteq\right)$ *έχει μήκος το πολύ* $|S| + 1$

Απόδειξη.

1. Έστω μία αυθαίρετη αλυσίδα $C = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$ του $\left(2^S, \subseteq\right)$ με $|C| = n$.
2. Έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $X_1 \subset X_2 \subset ... \subset X_n$.
3. Έστω προς άτοπο ότι $n > |S| + 1$
4. Ισχύει ότι $|X_i| \geq i - 1$ από επαγωγή στο i.
    1. Για $i = 1$ ισχύει από τον ορισμό του πληθάριθμου
    2. Αν $|X_i| \geq i - 1$ τότε $X_i \subset X_{i+1} \Rightarrow |X_i| < |X_{i+1}| \Rightarrow |X_{i+1}| \geq i$
5. Ισχύει ότι $|X_n| > |S|$ επειδή $|X_n| \geq n - 1$ και $n > |S| + 1$.
6. Ισχύει ότι $|X_n| \leq |S|$ επειδή $X_n \in 2^S$ και άρα $X_n \subseteq S$
7. Άτοπο

□

Θεώρημα: *Υπάρχει αλυσίδα του* $\left(2^S, \subseteq\right)$ *με μήκος* $|S| + 1$

Απόδειξη. Θεωρούμε μία απαρίθμηση $x_1, x_2, ..., x_n$ του S. Ορίζουμε μία ακολουθία υποσυνόλων αναδρομικά.

$$s(n) = \begin{cases} \emptyset & \text{if } n = 0 \\ s(n-1) \cup x_n & \text{otherwise} \end{cases}$$

Ισχύει ότι $i < j \Rightarrow s(i) \subset s(j)$. Άρα υπάρχει αλυσίδα $C = \{s(0), s(1), ..., s(n)\}$ μήκους $n + 1$. □

Μεγαλύτερη αντιαλυσίδα

Μία αντιαλυσίδα θα αποτελείται από υποσύνολα του 2^S τα οποία δεν έχουν σχέση υποσυνόλου. Για να υπολογίσουμε τη μέγιστη αντιαλυσίδα μπορούμε να υπολογίσουμε το πλήθος των υποσυνόλων του 2^S για κάθε δυνατό μέγεθος. Αν $|S| = n$ τότε υπάρχουν $\binom{n}{k}$ υποσύνολα μεγέθους k. Η ποσότητα αυτή μεγιστοποιείται για $k = \frac{n}{2}$ άρα η μεγαλύτερη αντιαλυσίδα θα έχει μέγεθος