

Coherent states L-6.20

Πέτρος Πετρίδης

Α.Π.Θ.

Ιούνιος 2022



Χαμιλτονιανή αρμονικού ταλαντωτή.

Η χαμιλτονιανή κβαντικού αρμονικού ταλαντωτή σε 1D είναι:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V} \\ &= \left(-\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + \sqrt{\frac{m}{2}} \omega_0 x\right) \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + \sqrt{\frac{m}{2}} \omega_0 x\right) + \frac{\hbar \omega_0}{2} \\ &= \hbar \omega_0 \left[\left(-i \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega_0}} \hat{p} + \sqrt{\frac{m}{2\hbar}} \sqrt{\omega_0} x\right) \left(i \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega_0}} \hat{p} + \sqrt{\frac{m}{2\hbar}} \sqrt{\omega_0} x\right) + \frac{1}{2} \right]\end{aligned}$$

Ορίζονται οι τελεστές δημιουργείας και καταστροφής:

$$\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega_0}} (-i\hat{p} + m\omega_0 x)$$

και

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega_0}} (i\hat{p} + m\omega_0 x)$$

άρα:

$$\hat{H} = \hbar \omega_0 \left(\hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \right)$$

Ορισμός coherent states.

Coherent state είναι το κβαντομηχανικό αντίστοιχο του μονοχρωματικού κλασικού ηλεκτρομαγνητικού κύματος και συμβολίζεται ως $|\alpha\rangle$ και είναι ίσο με:

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$

Όπου $|n\rangle$ οι ιδιοκαταστάσεις του αρμονικού ταλαντωτή.

Χρονική εξέλιξη coherent states.

Για αρμονικό ταλαντωτή $E_n = \hbar\omega_0(n + 1/2)$.

$$|\alpha, t\rangle = T(t)|\alpha\rangle = e^{-iE_n t/\hbar}|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\omega_0(n+1/2)t} \frac{a^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

όπου $|n\rangle = \left(\frac{m\omega_0}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}x\right) e^{-\frac{m\omega_0}{2\hbar}x^2}$
οι ιδιοκαταστάσεις του αρμονικού ταλαντωτή.

Πολύνομα Hermite:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

όπου ισχύει:

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x), n \geq 2$$

Υπολογισμός των μέτρων συναρτήσεως του χρόνου.

Θεώρηση $m = \hbar = \omega_o = k = 1$:

$$|a, t\rangle = e^{-|a|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i(n+1/2)t} \frac{a^n}{\sqrt{n!}} \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Σύμφωνα με την εκφώνηση:

$$E_a = |a|^2 + 1/2$$

$$\text{Οπότε } |a|^2 = E_a - 1/2.$$

Κώδικας.

```
from numpy import *  
import numpy as np , matplotlib.pyplot as plt, math
```

Ορισμός σταθερών:

```
sqpi=np.sqrt(np.pi) #ρίζα π  
E=3.0; alpha=np.sqrt(E-0.5) #|α|  
factr=np.exp(0.5*alpha*alpha); nmax=20
```

Ορισμός συνάρτησης που υπολογίζει τα πολυώνυμα Hermite:

```
def Hermite(x,n):  
    if (n==0): #Μηδενικού βαθμού  
        p=1.0  
    elif (n==1): #Πρώτου βαθμού  
        p=2*x  
    else: #Βαθμού >=2  
        p0=1  
        p1=2*x  
        for i in range(1,n):  
            p2=2*x*p1-2*i*p0  
            p0=p1  
            p1=p2  
            p=p2  
    return p
```

Κώδικας.

$$|a, t\rangle = e^{-|a|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i(n+1/2)t} \frac{a^n}{\sqrt{n!}} \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

```
def glauber(x,t,nmax):
    Reterm=0.0
    Imterm=0.0

    factr=np.exp(-0.5*alpha*alpha) #exp(-|α|^2/2)

    for n in range(0,nmax+1):
        fact=np.sqrt(1.0/(math.factorial(n)*sqpi*(2**n))) #1/ρ[ζα[2^n * n! * ρ[ζα(n)]] = c2
        psin=fact*Hermite(x,n)*np.exp(-0.5*x*x) #c2 * Hn(x) * exp(-x^2/2)

        den=np.sqrt(math.factorial(n)) # ρ[ζα(n!)]

        num=factr*(alpha**n)*psin #c1 * a^n * c2 * Hn(x) * exp(-x^2/2)

        #To exp[-i(n+1/2)t]=cos(n+1/2)t -isin(n+1/2)t
        Reterm+=num*(np.cos((n+0.5)*t))/den
        Imterm+=num*(np.sin((n+0.5)*t))/den

    #|Ψ|^2=Re^2+Im^2
    phi=Reterm*Reterm+Imterm*Imterm
    return phi
```

Κώδικας.

Η συνάρτηση `animate`, δέχεται την παράμετρο `t`, που είναι κάποια χρονική στιγμή και υπολογίζει την πιθανότητα του $|a,t\rangle$, για κάθε θέση `x` από τον array `xx`.

```
#plot  $|\Psi|^2$  για δεδομένα x & t
def animate(t):
    y=glauber(xx,t,nmax)
    s=str(t)
    plt.plot(xx,y,label=s)
    leg=plt.legend(loc="best",ncol=4,mode="expand",shadow=True)

fig=plt.figure()
ax=fig.add_subplot(111,autoscale_on=True,xlim=(-6,6),ylim=(0,1.5))
ax.grid()

plt.title(f"Glauber states at different times, nmax=%d" %nmax)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("$|\psi(x,t)|^2$")

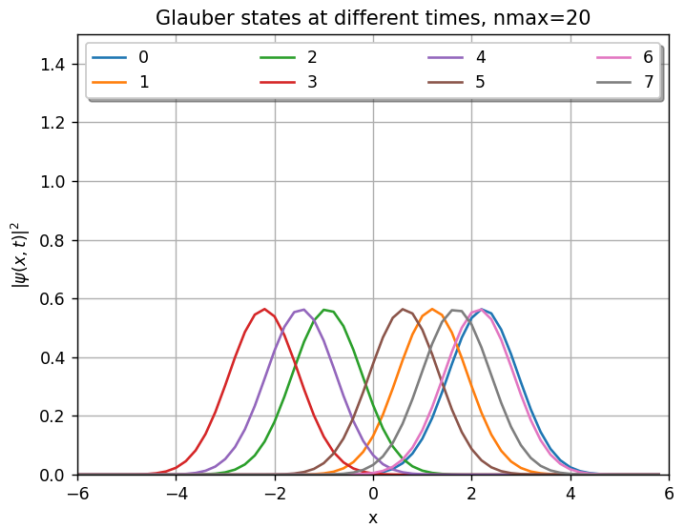
xx=np.arange(-6.0,6.0,0.2)

for t in np.arange(0,8,1):
    animate(t)

plt.show()
```


Πιθανότητα για $n_{\max}=20$, $t \in [0, 7]$ seconds.

Με τον έλεγχο των πιθανοτήτων φαίνεται και η ταλάντωση της πιθανότητας γύρω από την "θέση ισορροπίας" $x=0$.



Τέλος παρουσίασης.