Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

2η Εργαστηριακή Άσκηση

Αβράαμ Αλέξανδρος - 2018030121

Πέτρου Δημήτριος - 2018030070

Σχοιναράκης Εμμανουήλ - 2014030233

Διδάσκων: Ζερβάκης Μιχαήλ

Εργαστηριακή Διδάσκουσα: Μοιρογιώργου Κωνσταντίνα

Χανιά, Νοέμβριος 2023

Πολυτεχνείο Κρήτης
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών

Abstract

Η 2η εργαστηριακή άσκηση περιέχει αντικειμένα που εξοικειώνουν τον φοιτητή με τον μετασχηματισμό Z καθώς και με τις αποκρίσεις στο πεδίο της συχνότητας. Εξετάστηκαν συναρτήσεις μεταφοράς και παρατήρηκε η συμπεριφορά συστημάτων σε σχέση με την υπάρξη πόλων και μηδενικών σε αυτές. Τέλος, υπήρξε ενασχόληση με την ανάλυση σε απλά κλάσματα συναρτήσεων μεταφοράς με σύνθετους όρους.

Άσκηση 1

Ερώτημα α

Το σύστημα της άσκησης δέχεται στην είσοδο του ένα αναλογικό σήμα $x_a(t)$ το οποίο και ψηφιοποιεί. Στη συνέχεια το ψηφιακό πλέον σήμα περνά μέσα από 2 φίλτρα με συναρτήσεις μεταφοράς $G_1(z)$ και $G_2(z)$ αντίστοιχα ενώ τελικά επαναφέρεται στο αναλογικό σήμα $y_a(t)$ από έναν κατάλληλο converter.

Για το σήμα εξόδου ισχύει η σχέση:

$$y(n) = g_2(n)(g_1(n) \cdot x(n)) = g_1(n) \cdot g_2(n) \cdot x(n)$$

Για τον μετασχηματισμό Z ισχύει:

$$Y(z) = G_1(z) \cdot G_2(z) \cdot X(z) \Rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = G_1(z) \cdot G_2(z)$$

Επομένως:

$$H(z) = G_1(z) \cdot G_2(z)$$

Θα πρέπει να υπολογίσουμε την $G_1(z)$ δεδομένης της εξίσωσης διαφορών του G_1:

$$k(n) = 0.9k(n-1) + 0.2x(n) \Rightarrow G_1(z) = \frac{0.2}{1 - 0.9z^{-1}} = \frac{0.2z}{z - 0.9}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς H(z) υπολογίζεται ως:

$$H(z) = G_1(z) \cdot G_2(z) = \frac{0.2z}{z - 0.9} \frac{1}{z + 0.2}$$

Επομένως:

$$\mathbf{H(z)} = \frac{\mathbf{0.2z}}{\mathbf{(z - 0.9)(z + 0.2)}}$$

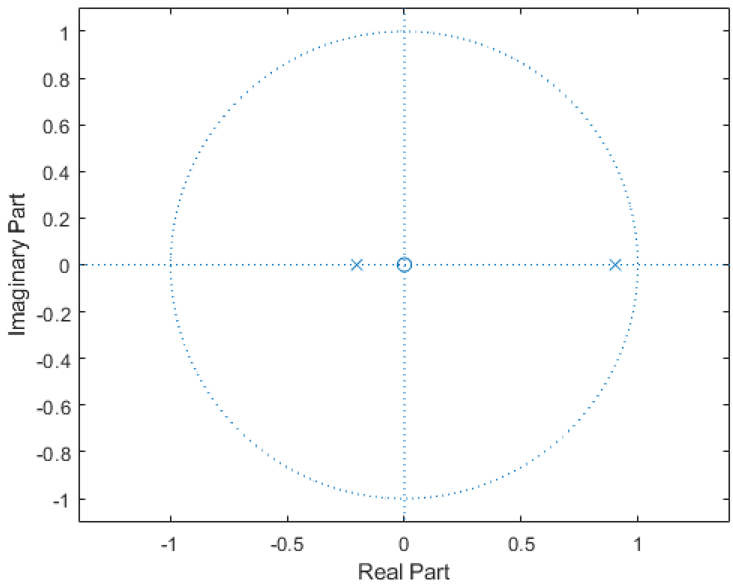
Σχηματίζουμε την εξίσωση διαφορών δεδομένης της τροποποιημένης H(z):

$$H(z) = \frac{0 + 0.2z^{-1}}{1 - 0.7z^{-1} - 0.18z^{-2}}$$

$$\text{Εξ. διαφορών: } \mathbf{y(n) = 0.7y(n-1) + 0.18y(n-2) + 0.2x(n-1)}$$

Ερώτημα β

Χρησιμοποιώντας την MATLAB σχεδιάστηκαν τα μηδενικά και οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς του ερωτήματος α μέσω των συναρτήσεων `tf()` και `zplane()`:



Παρατηρείται, όπως αναμενόταν, πως η H(z) εμφανίζει:

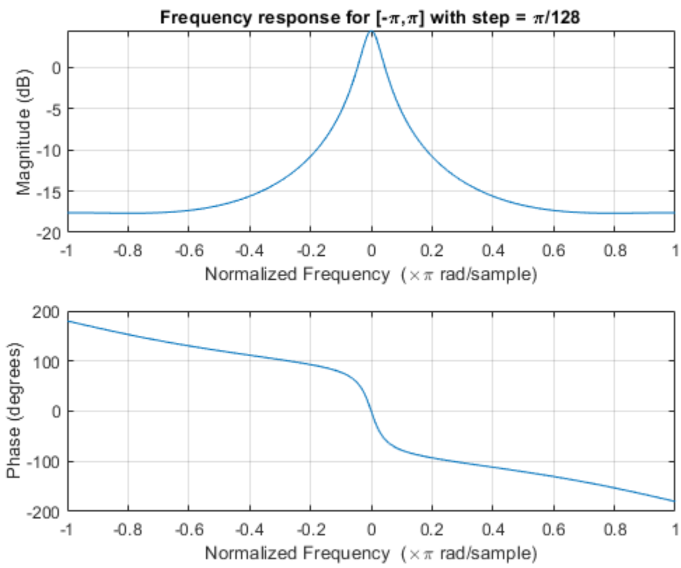
- **μηδενικό** στο 0.
- **πόλους** στο 0.9 και στο -0.2

Ερώτημα γ

Το σύστημα είναι αιτιατό με δεξιόπλευρη περιοχή σύγκλισης και εφόσον οι πόλοι του περιέχονται στον μοναδιαίο κύκλο είναι και **ευσταθές**.

Ερώτημα δ

Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση `freqz()` της MATLAB σχεδιάστηκε η απόκριση συχνότητας του συστήματος στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ με βήμα $\pi/128$:



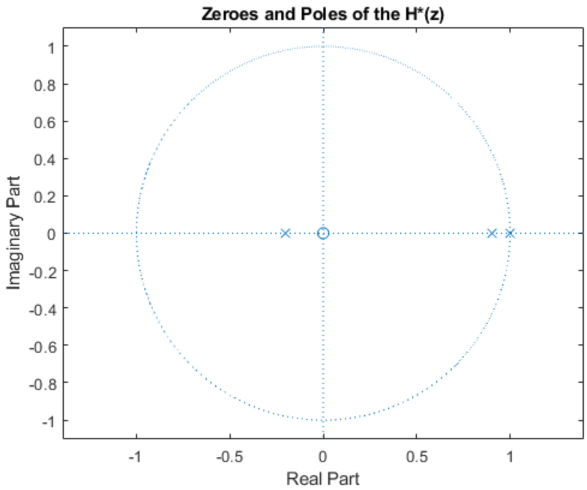
Τα μηδενικά και οι πόλοι επηρεάζουν την απόκριση συχνότητας ανάλογα την απόσταση τους από ορισμένες περιοχές αναφοράς. Όσο πιο κοντά βρίσκονται οι πόλοι στον μοναδιαίο κύκλο, τόσο μεγαλύτερη ενίσχυση συχνοτήτων της H(F) συμβαίνει. Αντιθέτως όσο πιο κοντά τα μηδενικά βρίσκονται στο μηδέν τόσο μικρότερη ενίσχυση συχνότητας επιτυγχάνεται. Επιπλέον η φάση επηρεάζεται και από τα μηδενικά κι από τους πόλλους αφού αποτελεί άθροισμα των επιμέρους φάσεων που προσδίδει το εκάστοτε σημείο αναφοράς. Με άλλα λόγια, η φάση μειώνεται με την προσθήκη πόλου ενώ τείνει να αυξάνεται με την προσθήκη μηδενικού (δηλ. παράλληλα με τους πόλους $\varphi = 0$, αντιπαράλληληλα $|\varphi| = \pi$).

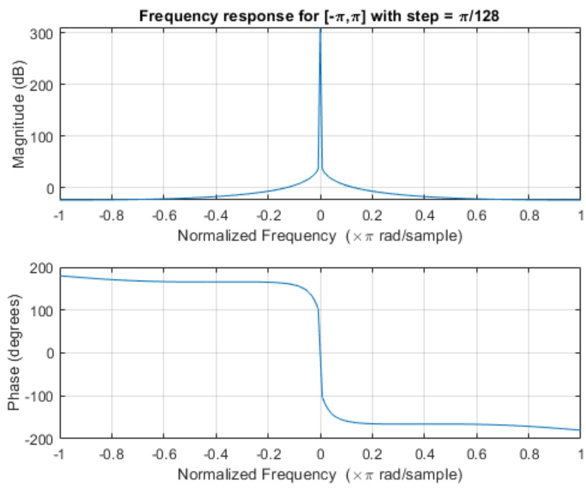
Ερώτημα ε

Για την προσθήκη πόλου στο z=1 τροποποιήθηκε ο παρονομαστής της συνάρτησης μεταφοράς:

$$H(z) = \frac{0.2z}{(z-0.9)(z+0.2)(z-1)} = \frac{0.2z}{z^3 - 1.7z^2 + 0.52z + 0.18}$$

Σχεδιάζοντας την απόκριση συχνότητας του συστήματος καθώς και τους πόλους-μηδενικά λαμβάνονται τα παρακάτω αποτελέσματα:





Με την προσθήκη πόλου στο z=1 το σύστημα χάνει την ευστάθειά του, ενώ το πλάτος της απόκρισης συχνότητας έχει απότομη ενίσχυση κοντά στην μηδενική συχνότητα. Η φάση στην ίδια περιοχή παρουσιάζει πιο απότομη βύθιση. Αυτό συμβαίνει, καθώς όπως αναφέρθηκε παραπάνω όσο πιο κοντά βρίσκονται οι πόλοι στον μοναδιαίο κύκλο τόσο μεγαλύτερη ενίσχυση συχνότητα παρατηρείται στη συνάρτηση μεταφοράς.

Άσκηση 2

Ερώτημα α

Δεδομένης της συνάρτησης μεταφοράς:

$$H(z) = \frac{4 - 3.5z^{-1}}{1 - 2.5z^{-1} + z^{-2}} \text{ , με } |z| > 2$$

υπολογίστηκε, χρησιμοποιώντας την MATLAB, η αναλυτική έκφραση που προκύπτει από την ανάλυση σε απλά κλάσματα της H(z). Πιο συγκεκριμένα χρησιμοποιήθηκε αρχικά η συνάρτηση `residuez()` για την εύρεση των μηδενικών και των πόλων της H, η οποία παρουσιάζει:

- μηδενικά **στο 3 και στο 1**
- πόλους **στο 2 και στο -0.5**

Χρησιμοποιώντας την εντολή `syms` δημιουργήθηκε η μεταβλητή `z` και μοντελοποιήθηκε στη συνέχεια η συνάρτηση μεταφοράς του ερωτήματος β στην μορφή απλών κλασμάτων χρησιμοποιώντας τους πόλους και τα μηδενικά που υπολογίστηκαν από την `residuez()`. Η συνάρτηση μεταφοράς πήρε την μορφή:

$$H(z) = \frac{3}{1 - 2z^{-1}} + \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

Με την εκτέλεση του κώδικα στη MATLAB χρησιμοποιώντας την εντολή `pretty()` λαμβάνεται το εικονιζόμενο αποτελέσμα για την ανάλυση απλών κλασμάτων:

```
Partial Fraction Expansion:
    3        1
- ----- - -------
  2         1
  - - 1   --- - 1
  z       2 z
```

Ερώτημα β

Ο θεωρητικός υπολογισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού Z βασίζεται στον κάτωθι κανόνα:

$$\frac{b}{1 - az^{-1}} \overset{\hat{Z}}{\rightleftharpoons} b \cdot a^n \cdot u[n]$$

Δεδομένου αυτού και της ανάλυσης απλών κλασμάτων υπολογίζεται ότι:

$$H(z) = \frac{3}{1 - 2z^{-1}} + \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} \overset{\hat{Z}}{\rightleftharpoons} 3 \cdot 2^n \cdot u[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u[n] \xrightarrow{n>0,\, u[n]=1} 3 \cdot 2^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Συγκρίνοντας το αποτέλεσμα με αυτό της `iztrans()` της MATLAB επιβεβαίωνεται ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z είναι σωστός.