

---

# Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

## 3η Εργαστηριακή Άσκηση

---

Αβράαμ Αλέξανδρος - 2018030121

Πέτρου Δημήτριος - 2018030070

Σχοιναράκης Εμμανουήλ - 2014030233

Διδάσκων: Ζερβάκης Μιχαήλ

Εργαστηριακή Διδάσκουσα: Μοιρογιώργου Κωνσταντίνα

Χανιά, Νοέμβριος 2023

Πολυτεχνείο Κρήτης  
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών

## Abstract

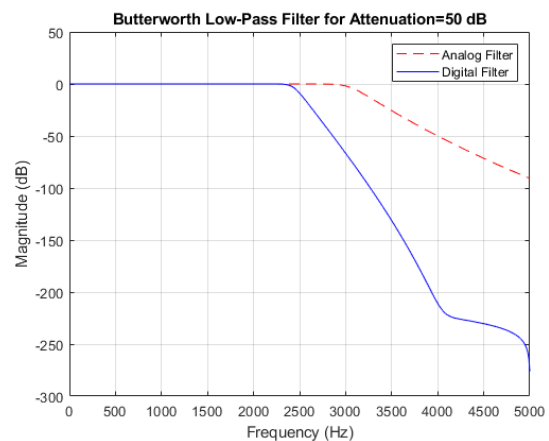
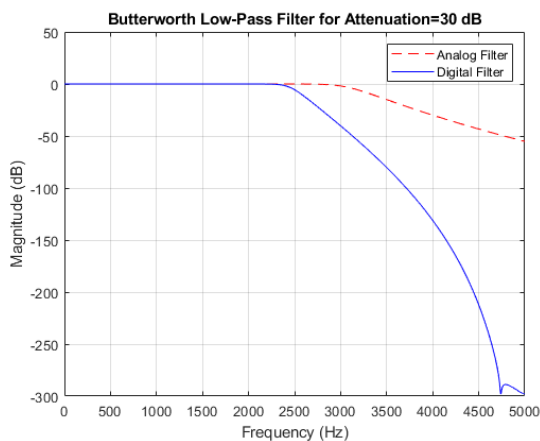
Η 3η εργαστηριακή άσκηση επικεντρώθηκε στην υλοποίηση IIR (Infinite Impulse Response) φίλτρων. Μελετήθηκαν δύο ειδών φίλτρα, ένα low-pass Butterworth φίλτρο και ένα highpass Chebyshev. Αφού προσομοιώθηκε η λειτουργία των δύο, εφαρμόστηκαν σε ένα τριγωνομετρικό σήμα προκειμένου να μελετηθεί περαιτέρω η συμπεριφορά τους ως μέρος ενός συστήματος.

## Άσκηση 1

Για την υλοποίηση του χαμηλοπερατού Butterworth φίλτρου χρησιμοποιήθηκαν οι συναρτήσεις `buttord`, `buttap`, `zp2tf`, `lp2lp`, `freqs`, `freqz`, `bilinear` της MATLAB. Δημιουργήθηκαν συνολικά δύο φίλτρα με attenuation **30dB** και **50dB** αντίστοιχα, με passband στα 0 έως 3 kHz, ripple στα 3dB και stopband στα 4 έως 5 kHz. Τα δύο φίλτρα υλοποιήθηκαν κατά κύριο λόγο με την συνάρτηση `buttord()` και μέσω αυτής υπολογίστηκαν οι τάξεις τους:

- **Attn=30dB**  $\Rightarrow$  13th order.
- **Attn=50dB**  $\Rightarrow$  21st order.

Η συνάρτηση `buttord()` δημιουργεί αναλογικά Butterworth φίλτρα. Χρησιμοποιώντας διγραμμικό μετασχηματισμό το αναλογικό φίλτρο μετατρέπεται σε ψηφιακό μέσω της συνάρτησης `bilinear()`. Προκειμένου η μετατροπή να είναι επιτυχής χρειάζεται αρχικά να κανονικοποιηθεί το αναλογικό φίλτρο μέσω της `lp2lp()`. Τα δύο φίλτρα αποτυπώνονται σε κοινό λογαριθμικό διάγραμμα dB με χρήση `plot()` για κάθε τιμή attenuation:



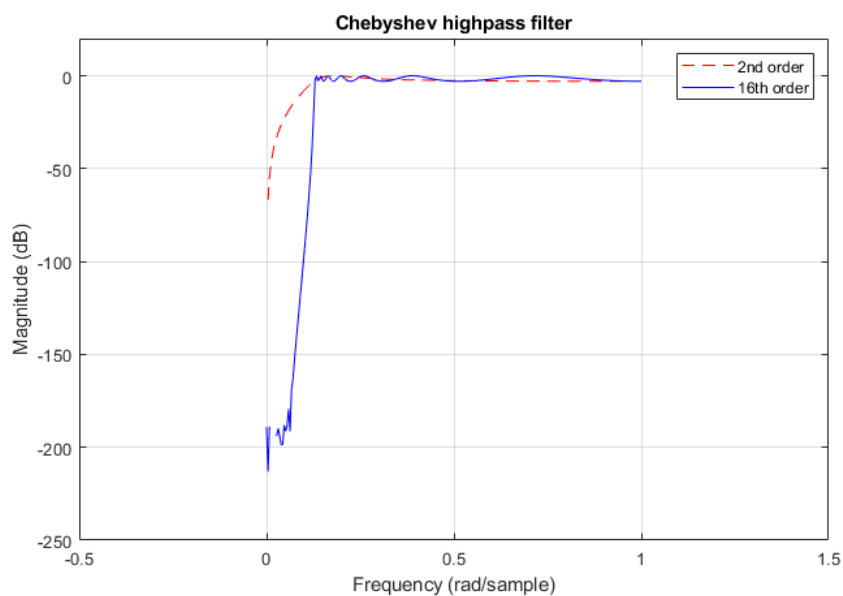
Ο οριζόντιος άξονας του γραφήματος παρουσιάζει 2048 δείγματα στο εύρος  $[0, \frac{f_s}{2}]$ . Το ψηφιακό φίλτρο καταφέρνει να μιμηθεί σε μεγάλο βαθμό την συμπεριφορά του αναλογικού χωρίς ωστόσο να εκλίνουν σφάλματα. Το αναλογικό φίλτρο παρουσιάζει σταθερά flat πλάτος χωρίς κυματώσεις για την περίπτωση των 30dB ενώ το ψηφιακό με τα ίδια χαρακτηριστικά ωστόσο παρουσιάζει σφάλματα aliasing και κβάντισης (εξού και η μικρή κυμάτωση κοντά στο τέλος της ζώνης stopband). Η μεταβολή του attenuation της ζώνης stopband σε 50dB επιφέρει αύξηση στην τάξη του αναλογικού φίλτρου με αποτέλεσμα η σχεδίαση του ψηφιακού να χρειάζεται κατ'επέκταση περισσότερους πόρους. Σε γενικές γραμμές η αύξηση του attenuation στο stopband αυξάνει την ακρίβεια του φίλτρου, οπότε ανεπιθύμητες συχνότητες καταστέλλονται ποιοτικότερα. Η αύξηση αυτή στην περίπτωση του ψηφιακού φίλτρου επιφέρει σημαντικότερο σφάλμα κβάντισης με παρουσία εντονότερης κυμάτωσης κοντά στο stopband.

## Άσκηση 2

Για την σχεδίαση του υπερπαρατοῦ φίλτρου Chebyshev χρησιμοποιήθηκαν οι συναρτήσεις `cheby1()`, `freqz()` της MATLAB. Δημιουργήθηκαν δύο highpass φίλτρα Chebyshev με τάξεις 2 και 16 αντίστοιχα. Κοινά χαρακτηριστικά και των δύο αποτελούν τα εξής:

- **Cutoff Frequency:**  $\omega_c = 2\text{rad/sec}$
- **Περίοδος δειγματοληψίας:**  $T_s = 0.2\text{s}$
- **Passband Ripple:**  $3\text{dB}$

Στο γράφημα παρακάτω αποτύπωνεται το πλάτος (σε dB) των αποκρίσεων συχνότητας των δύο φίλτρων για 256 δείγματα. Ο οριζόντιος άξονας του γραφήματος παρουσιάζει τα δείγματα της συχνότητας  $\omega$  στο εύρος  $[0, 1]$  διότι η αρίθμηση του άξονα αντιστοιχεί στα σημεία του μοναδιαίου κύκλου με γωνία  $\omega$  σε ψηφιακό φίλτρο. Το φίλτρο παραμένει ανεπηρέαστο από την συχνότητα δειγματοληψίας και αρκεί για να περιγραφεί η συμπεριφορά στην συχνότητα αποκοπής.



Το φίλτρο ανώτερης τάξης, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω προσφέρει αποτελεσματικότερη αποπομπή των ανεπιθύμητων συχνοτήτων, εξού και η πιο απότομη κλίση. Ωστόσο αυτό επιφέρει αύξηση της παρουσίας κυμάτων σε πιο ασταθές πλάτος.

## Άσκηση 3

Στην άσκηση 3 έγινε εφαρμογή των δύο φίλτρων που σχεδιάστηκαν σε δύο σήματα. Στις 2 περιπτώσεις υφίσταται δειγματοληψία 500 δειγμάτων σε συχνότητα 10kHz και 5Hz αντίστοιχα.

### Ερώτημα α

Για το σήμα:

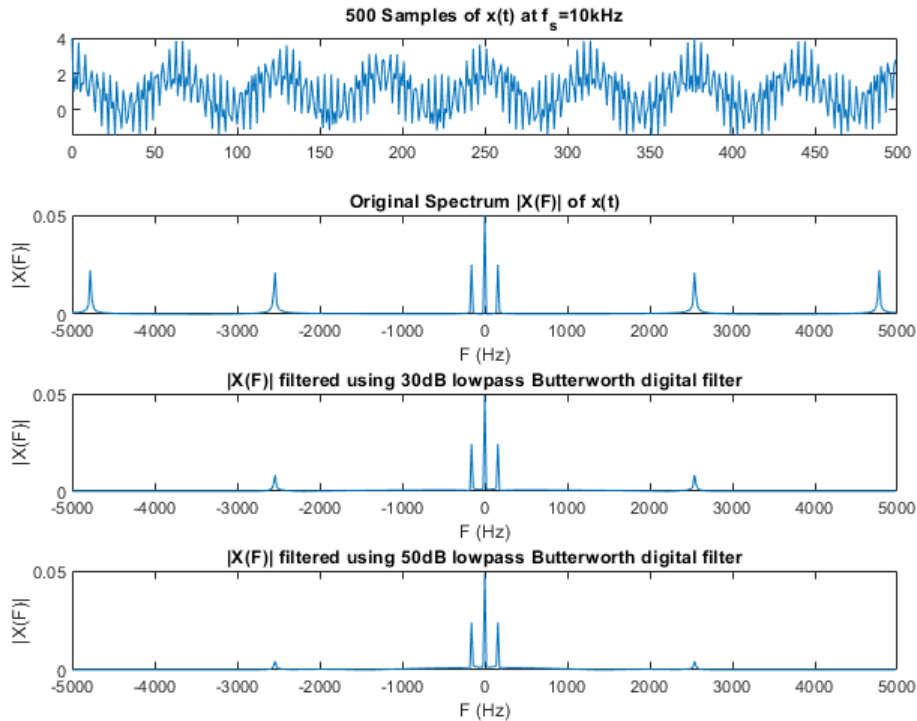
$$x(t) = 1 + \cos(1000t) + \cos(16000t) + \cos(30000t)$$

αναμένεται να παρατηρηθούν στο φάσμα λοβοί στις συχνότητες:

- $|f_0| = 0 \text{ kHz}$
- $|f_1| = \frac{1 \cdot 10^3}{2\pi} = 159.1 \text{ Hz}$
- $|f_2| = \frac{16 \cdot 10^3}{2\pi} = 2.546 \text{ kHz}$

- $|f_3| = \frac{30 \cdot 10^3}{2\pi} = 4.774 \text{ kHz}$

Το ψηφιακό χαμηλοπερατό φίλτρο Butterworth με attn=30dB και 50dB χρησιμοποιήθηκε για το φιλτράρισμα του παραπάνω σήματος αφού σε αυτό είχε εφαρμοστεί κατάλληλη δειγματοληψία. Παρακάτω απεικονίζονται τα γραφήματα του φάσματος του πριν και μετά το filtering με τα δύο φίλτρα Butterworth:



Όπως είχε προβλεφθεί το σήμα έχει λοβούς στις συχνότητες που αναφέρθηκαν παραπάνω. Με την εφαρμογή του φίλτρου, το οποίο βάσει προδιαγραφών έχει passband από 0-3kHz και stopband από 4-5kHz, παρατηρείται ότι οι λοβοί στις συχνότητες  $\pm 4.774 \text{ kHz}$  εξαλείφονται. Δεδομένης της διαφοράς της εξασθένησης μεταξύ των δύο φίλτρων παρατηρείται και στην πράξη διαφορά στο πλάτος του φάσματος κοντά στην ζώνη αποκοπής. Τεχνικά, η διαφορά αυτή θα είναι μια δεκάδα ή 20dB.

## Ερώτημα β

Χρησιμοποιώντας το υπερπερατό Chebyshev 16ης τάξης, φιλτράρεται το σήμα:

$$x(t) = 1 + \cos(1.5t) + \cos(5t)$$

Αναμένεται ότι το φάσμα του σήματος θα παρουσιάζει λοβούς στις συχνότητες:

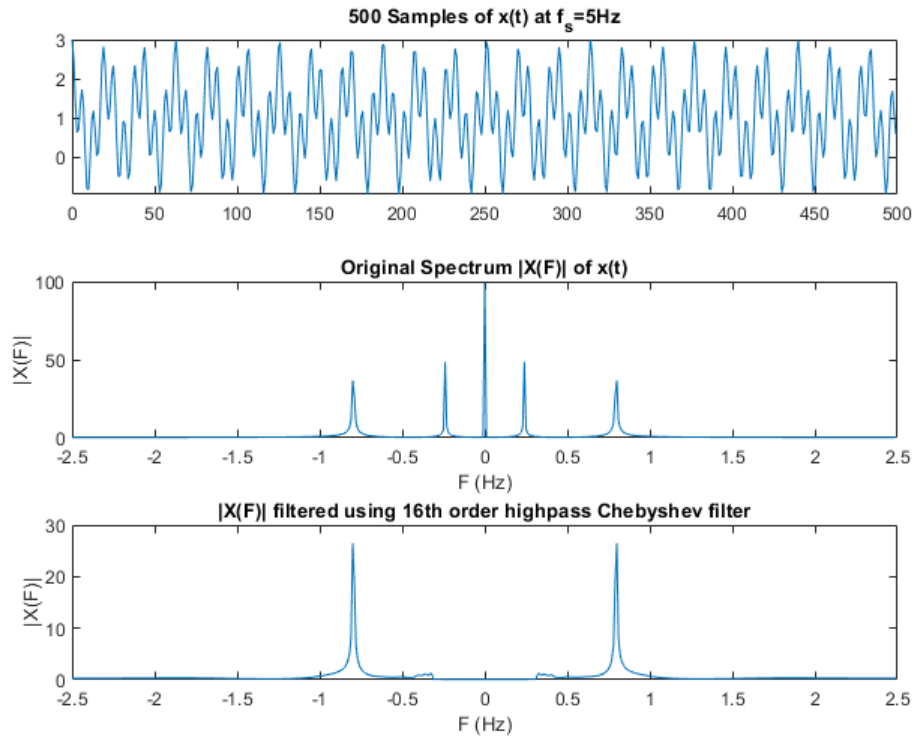
- $|f_0| = 0 \text{ Hz}$
- $|f_1| = \frac{1.5}{2\pi} = 0.238 \text{ Hz}$
- $|f_2| = \frac{5}{2\pi} = 0.795 \text{ Hz}$

Υπολογίζεται ότι το φίλτρο έχει συχνότητα αποκοπής ίση με:

$$F_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{2}{2\pi} = 0.319 \text{ Hz}$$

Το σήμα υφίσταται δειγματοληψία 500 δειγμάτων, αυτή τη φορά με συχνότητα  $f_s = 5 \text{ Hz}$ .

Το δείγμα του σήματος φιλτράρεται και πραγματοποιείται απεικόνιση του φάσματος του πριν και μετά:



Παρατηρείται ότι οι συχνότητες γύρω από το 0 και από τα  $\pm 0.238$  Hz αποκόπτονται και παραμένουν οι λοβοί στα  $\pm 0.795\text{Hz}$ . Δεδομένης της συχνότητας αποκοπής  $f_c$  που υπολογίστηκε παραπάνω, το φίλτρο λειτουργεί με τον ενδεδειγμένο τρόπο βάσει προδιαγραφών.