
Πολυτεχνείο Κρήτης
Σχολή ΗΜΜΥ
Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα Ι
Παράδοση 2ης εργασίας
Ημερομηνία Παράδοσης: 16 Μαΐου 2023
Μονάδες 100/1000

Ομάδα 55

	Φοιτητής
Επώνυμο	Πέτρου
Όνομα	Δημήτριος
A.M.	2018030070
Χρόνος Εκπόνησης	14 ώρες

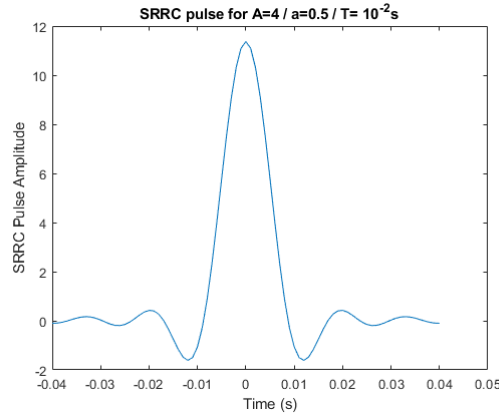
Μέρος Α

Ερώτημα Α1

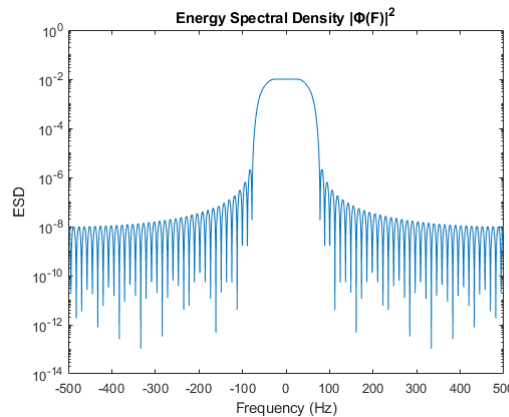
Να δημιουργήσετε παλμό SRRC $\phi(t)$ με τιμές $T = 10^{-2}$ sec, $\text{over} = 10$, $T_s = \frac{T}{\text{over}}$, $A = 4$, και $a = 0.5$.

Μέσω των συναρτήσεων `fftshift` και `fft`, να υπολογίσετε το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier της $\phi(t)$, $|\Phi(F)|$, σε N_f ισαπέχοντα σημεία στο διάστημα $[-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2})$. Να επιλέξετε το N_f αρκετά μεγάλο και να το διατηρήσετε σταθερό για όλη την άσκηση. Πιο συγκεκριμένα, το N_f θα πρέπει να είναι μεγαλύτερο από το μήκος της κυματομορφής $X(t)$, μετρημένο σε δείγματα. Για παράδειγμα, η τιμή $N_f = 2048$ είναι αρκετή για σχετικά μικρά N και over . Διαφορετικά, θα υπάρξει παραμόρφωση στις φασματικές πυκνότητες ισχύος. Να σχεδιάσετε τη φασματική πυκνότητα ενέργειας $|\Phi(F)|^2$ στον κατάλληλο άξονα συχνοτήτων με χρήση της εντολής `semilogy`.

Ο ζητούμενος SRRC παλμός δημιουργήθηκε χρησιμοποιώντας την συνάρτηση `srrc_pulse()` με βάση τις παραμέτρους που δίνονται ως: $T = 10^{-2}$ sec, $\text{over} = 10$, $A = 4$ και $a = 0.5$. Εκτελώντας την συνάρτηση και κάνοντας `plot` τα αποτελέσματα προκύπτει:



Στη συνέχεια με χρήση των συναρτήσεων `fft()` και `fftshift()` υπολογίστηκε ο μετασχηματισμός Fourier του παλμού καθώς και το μέτρο του μετασχηματισμού. Σύμφωνα με τον μετασχηματισμό υπολογίστηκε η φασματική πυκνότητα ενέργειας (EDS) και απεικονίστηκε σε ημιλογαριθμική κλίμακα με χρήση της `semilogy`:



Παρατίθεται ο κώδικας που υλοποιεί την δημιουργία του παλμού και τον υπολογισμό της EDS:

```
1 //partA123.m
2 ...
3 %Constants of the case
4 T = 10.^-2;
5 over = 10;
6 Ts = T/over;
7 A = 4;
8 a = 0.5;
9
10 [fi, t] = srrc_pulse(T, over, A, a);
11 figure(1);
12 plot(t, fi, 'DisplayName', 'a=0.5');
13 title('SRRC pulse for A=4 / a=0.5 / T= 10^{-2}s');
14 xlabel('Time (s)');
15 ylabel('SRRC Pulse Amplitude');
16
17 %Constants of the case
18 Fs = 1/Ts;
19 Nf = 2048;
20
21 %Defining the frequencies with equal distances
22 F = (-Fs/2):(Fs/Nf):(Fs/2 - Fs/Nf);
23
24 %Perform Fourier transform using fft()
25 %and use fftshift to rearrange it
26 ft = fftshift(fft(fi,Nf)*Ts);
27
28 %Calculate the energy density spectrum of the Fourier transform
29 spect = abs(ft).^2;
30
31 figure(2)
32 semilogy(F, spect);
33 title('Energy Spectral Density |\Phi(F)|^2');
34 xlabel('Frequency (Hz)');
35 ylabel('ESD');
36 ...
```

Ερώτημα A2

Να δημιουργήσετε ακολουθία $N = 100$ ανεξάρτητων και ισοπίθανων bits $\{b_0, \dots, b_{N-1}\}$. Χρησιμοποιώντας την απεικόνιση

$$0 \longrightarrow +1,$$

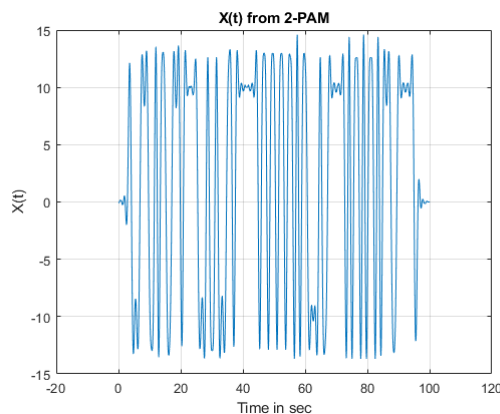
$$1 \longrightarrow -1,$$

να απεικονίσετε τα bits σε σύμβολα X_n , για $n = 0, \dots, N-1$. Να κατασκευάσετε την κυματομορφή

$$X(t) = \sum_{n=0}^{N-1} X_n \phi(t - nT).$$

Η δημιουργία της ακολουθίας των 100 bits έγινε με χρήση των συναρτήσεων `randn()` και `sign()`.

Η κωδικοποίηση των bits στο ζητούμενο format έγινε μέσω της συνάρτησης `bits_to_2PAM`. Το αποτέλεσμα της απεικόνισης είναι:



Παρατίθεται ο κώδικας που υλοποιεί την `bits_to_2PAM`:

```
1 //bits_to_2PAM.m
2 function [array] = bits_to_2PAM(b)
3
4     for i = 1:length(b)
5         if b(i) == 0
6             array(i) = 1;
7         else
8             array(i) = -1;
9         end
10    end
11 end
```

Παρατίθεται ο κώδικας που υλοποιεί την δημιουργία και απεικόνιση των bits:

```
1 //partA123.m
2 ...
3 N = 100;
4 %Create n bits series
5 b = (sign(randn(N,1))+1)/2;
6
7 %Encode the bits to the required standard
8 Xn = bits_to_2PAM(b);
9 %Time of
10 T_plot = 0:Ts:N-Ts;
11
12 %Calculate Xdelta and the convolution with the pulse
```

```

13 X_delta=1/Ts*upsample(Xn,over);
14 X_delta_conv =conv(X_delta,fi)*Ts;
15
16 %Define the convolute time vector
17 t_conv = linspace(T_plot(1)+t(1), T_plot(end)+t(end),length(X_delta_conv));
18
19 figure(3)
20 plot(t_conv,X_delta_conv)
21 title('X(t) from 2-PAM');
22 xlabel('Time in sec');
23 ylabel('X(t)');
24 grid on
25 ...

```

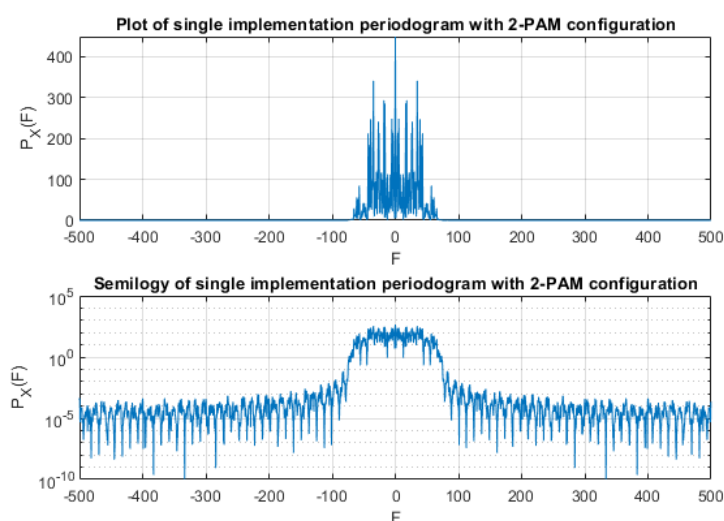
Ερώτημα Α3

Με χρήση των συναρτήσεων `fft` και `fftshift` να υπολογίσετε το περιοδόγραμμα μίας υλοποίησης της $X(t)$

$$P_X(F) = \frac{|\mathcal{F}[X(t)]|^2}{T_{\text{total}}},$$

όπου T_{total} είναι ο **συνολικός χρόνος διάρκειας** της $X(t)$ σε sec. Να σχεδιάσετε το $P_X(F)$ με χρήση `plot` και `semilogy`. Να επαναλάβετε για διάφορες υλοποιήσεις της ακολουθίας bits $\{b_0, \dots, b_{N-1}\}$, ώστε να αποκτήσετε μία καλή εικόνα σχετικά με το πώς μοιάζει το περιοδόγραμμα υλοποιήσεων της $X(t)$. Να εκτιμήσετε τη φασματική πυκνότητα ισχύος υπολογίζοντας αριθμητικές μέσες τιμές πάνω σε K (ενδεικτικά, $K = 500$) υλοποιήσεις περιοδογραμμάτων. Να σχεδιάσετε σε κοινό `semilogy` την εκτίμηση και τη θεωρητική φασματική πυκνότητα ισχύος.

Στο πρώτο σκέλος του ερωτήματος Α3 υλοποιείται η απεικόνιση ενός περιοδογράμματος μιας υλοποίησης του $X(t)$. Ο υπολογισμός του $P_X(F)$ γίνεται μέσω του παραπάνω τύπου. Το αποτέλεσμα της απεικόνισης σε `plot` και `semilogy` φαίνεται παρακάτω:



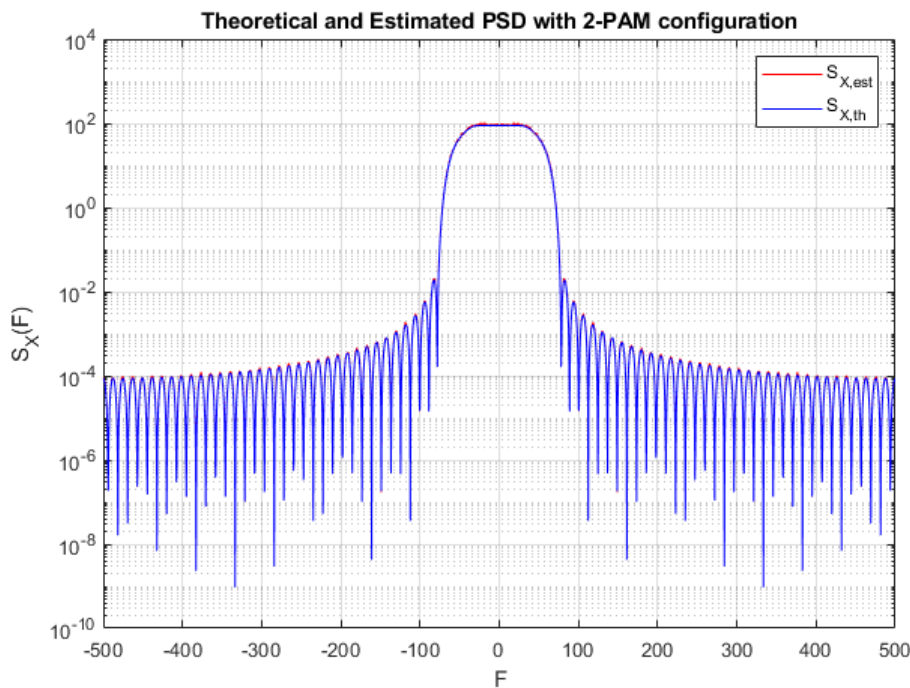
Ο κώδικας που υλοποιεί την απεικόνιση είναι:

```
1 //partA123.m
2 ...
3 t_all = length(t_conv)*T;
4 %Calculate the fourier transform of X inside the
5 %Periodogram of single implementation of X
6 PxF= ((abs(fftshift(fft(X_delta_conv,Nf))).^2)*Ts)/t_all;
7
8 %plot
9 figure(4);
10 subplot(2,1,1)
11 plot(F,PxF)
12 title('Plot of single implementation periodogram with 2-PAM configuration');
13 xlabel('F');
14 ylabel('P_X(F)')
15 grid on;
16
17 %semilogy
18 subplot(2,1,2)
19 semilogy(F, PxF);
20 title('Semilogy of single implementation periodogram with 2-PAM configuration');
21 xlabel('F');
22 ylabel('P_X(F)')
23 grid on;
24 ...
```

Στη συνέχεια με τη χρήση μιας for δημιουργήθηκαν πολλαπλές απεικονίσεις περιοδοδιαγραμμάτων ($K=500$) με σκοπό την εκτίμηση της φασματικής πυκνότητας ισχύος. Η θεωρητική φασματική πυκνότητα ισχύος της $X(t)$ υπολογίστηκε μέσω της μαθηματικής σχέσης:

$$S_X(F) = \frac{\sigma_X^2}{T} |\Phi(F)|^2.$$

Η απεικόνιση που προέκυψε είναι η εξής:



Παρατίθεται ο κώδικας που υλοποιεί τον υπολογισμό της θεωρητικής φασματικής πυκνότητας ισχύος και της προσομοίωσης πολλαπλών υλοποιήσεων περιοδογραμμάτων:

```
1 //partA123.m
2 ...
3 %Sx theoretical
4 Sx_th = (var(X_delta_conv)/T).*(spect);
5
6 %Periodgrams of multiple implementations of X
7 PxF_lots_of = zeros(K,Nf);
8
9 K = 500;
10
11 for k = 1:K
12     b=(sign(randn(N,1))+1)/2;
13     XR = bits_to_2PAM(b);
14     X_deltaR=1/Ts*upsample(XR,over);
15     X_delta_convR= conv(X_deltaR,fi)*Ts;
16     PxF=((abs(fftshift(fft(X_delta_convR,Nf))))).^2)./t_all;
17     PxF_lots_of(k,:)=PxF;
18 end
19
20 %Sx estimated
21 Sx_est = sum(PxF_lots_of,1)*Ts./K;
22
23 figure(5);
24 semilogy(F,Sx_est,'r',F,Sx_th,'b')
25 title('Theoretical and Estimated PSD with 2-PAM configuration');
26 xlabel('F');
27 ylabel('S_X(F)');
28 legend('S_{X,est} ', 'S_{X,th}')
29 grid on;
30 ...
```

Όσο αυξάνετε το K και το N , θα πρέπει η προσέγγιση να γίνεται καλύτερη. Συμβαίνει αυτό στα πειράματά σας? Αν ναι, μπορείτε να εξηγήσετε το φαινόμενο?

Με αύξηση του αριθμού των παραγόμενων υλοποιήσεων η ακρίβεια της προσέγγισης αυξάνεται, γεγονός που ήταν αναμενόμενο αφού η μεταβολή αυτή επιφέρει αύξηση του αριθμού των δειγμάτων. Τα περισσότερα δείγματα τείνουν προς τη μέση τιμή καλύτερα.

Ερώτημα A4

Χρησιμοποιώντας την απεικόνιση

$$00 \longrightarrow +3$$

$$01 \longrightarrow +1$$

$$11 \longrightarrow -1$$

$$10 \longrightarrow -3$$

να κατασκευάσετε την ακολουθία 4-PAM X_n , για $n = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1$. Παρατηρήστε ότι, αν τα bits είναι ισοπίθانا, τότε και τα σύμβολα X_n είναι ισοπίθانا! Να κατασκευάσετε την κυματομορφή

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} X_n \phi(t - nT)$$

χρησιμοποιώντας την ίδια περίοδο T με το ερώτημα A.2.

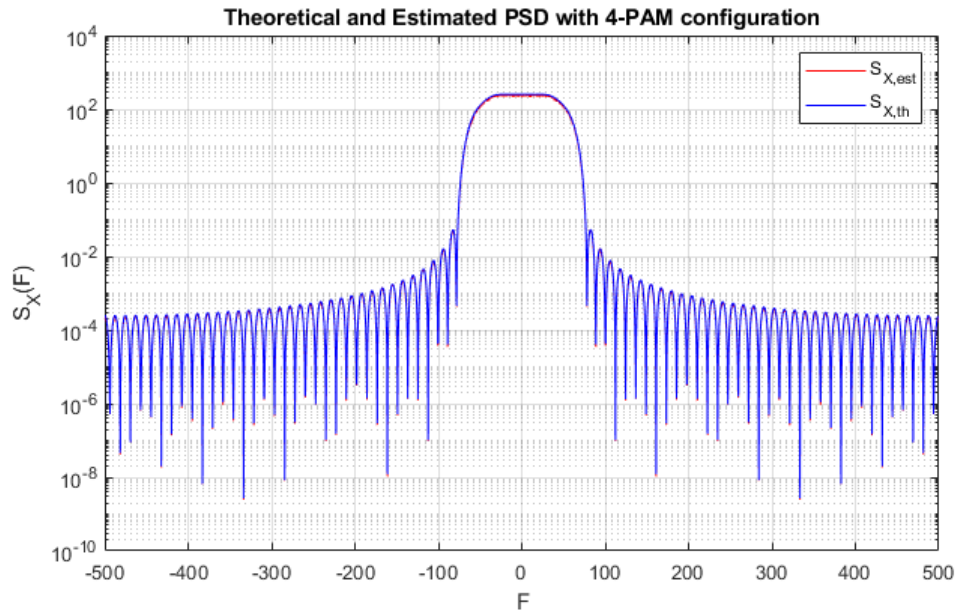
Να υπολογίσετε το περιοδόγραμμα και να εκτιμήσετε τη φασματική πυκνότητα ισχύος μέσω αριθμητικών μέσων τιμών υλοποιήσεων περιοδογραμμάτων της $X(t)$. Να σχεδιάσετε την πειραματική και την θεωρητική φασματική πυκνότητα ισχύος στο ίδιο semilogy. Τι παρατηρείτε;

Πώς συγκρίνεται, ως προς το εύρος φάσματος και ως προς το μέγιστο πλάτος τιμών, η φασματική πυκνότητα ισχύος της $X(t)$ σε σχέση με αυτή της $X(t)$ του βήματος A.2? Μπορείτε να εξηγήσετε τα αποτελέσματα της σύγκρισης?

Η υλοποίηση της ζητούμενης κωδικοποίησης 4-PAM της ακολουθίας των bits έγινε μέσω της συνάρτησης `bits_to_4PAM()`. Παρατίθεται ο κώδικας που την υλοποιεί:

```
1 //bits_to_4PAM.m
2 function [array] = bits_to_4PAM(b)
3
4 %every time we check a pair of numbers
5 for k=1:2:length(b)
6     if b(k)==0 && b(k+1)==0
7         array(k) = 3;
8     elseif(b(k)==0 && b(k+1)==1)
9         array(k)=1;
10    elseif(b(k)==1 && b(k+1)==1)
11        array(k)=-1;
12    elseif(b(k)==1 && b(k+1)==0)
13        array(k)=-3;
14    else
15        disp('Error')
16        return
17    end
18 end
19 end
```

Με παρόμοιο τρόπο όπως στο ερώτημα A3 αλλά χρησιμοποιώντας τη νέα κωδικοποίηση των bits 4-PAM υπολογίστηκαν η θεωρητική και η προσεγγιστική φασματική πυκνότητα ισχύος. Η προσεγγιστική PDF υπολογίστηκε μέσω 500 υλοποιήσεων περιοδογραμμάτων:



Ο υπολογισμός και η απεικόνιση υλοποιείται από τον παρακάτω κώδικα:

```

1 //partA4.m
2 ...
3 K = 500;
4 N = 100;
5
6 %Create n bits series
7 b = (sign(randn(N,1))+1)/2;
8
9 %Encode the bits to the required standard
10 X = bits_to_4PAM(b);
11 X_delta=1/Ts*upsample(X,over);
12 T_plot = 0:Ts:N/2-Ts;
13 X_delta_conv =conv(X_delta,fi)*Ts;
14 t_conv = linspace(T_plot(1)+t(1), T_plot(end)+t(end),length(X_delta_conv));
15
16 t_all = length(t_conv)*T;
17
18 %Calculate the fourier transform of X
19 XF=fftshift(fft(X_delta_conv,Nf))*Ts;
20
21 %Periodgram of single implementation of X
22 PxF= (abs(XF).^2)/t_all;
23
24 %Sx theoretical
25 Sx_th = (var(X_delta_conv)/T).*(spect);
26
27 %Periodgrams of multiple implementations of X
28 PxF_lots_of = zeros(K,Nf);
29
30 for k = 1:K
31     b=(sign(randn(N,1))+1)/2;
32     X4 = bits_to_4PAM(b);
33     X4_delta =1/Ts*upsample(X4,over);
34     X4_delta_conv = conv(X4_delta,fi)*Ts;
35     XF4=fftshift(fft(X4_delta_conv,Nf));
36     PxF_lots_of(k,:)=(abs(XF4).^2)./t_all;
37 end
38

```

```

39 %Sx estimated
40 Sx_est = sum(PxF_lots_of,1)*Ts./K;
41
42
43 %semilogy of Sx_est and Sx_th
44 figure(6)
45 semilogy(F,Sx_est,'r',F,Sx_th,'b')
46 title('Theoretical and Estimated PSD with 4-PAM configuration');
47 xlabel('F');
48 ylabel('S_X(F)');
49 legend('S_{X,est} ', 'S_{X,th}')
50 grid on;

```

Στο διάγραμμα των φασματικών πυκνοτήτων ισχύος 4-PAM παρατηρείται μεγαλύτερο μέγιστο πλάτος φάσματος σε σχέση με αυτό της κωδικοποίησης με 2-PAM και ελάχιστα λιγότερες διακυμάνσεις. Ποιοτικά η προσέγγιση είναι εξίσου καλή ενώ το εύρος φάσματος παραμένει το ίδιο όπως ορίζεται κι από τον θεωρητικό τύπο $BW = \frac{1+a}{2T}$ για σταθερή περίοδο T .

Ερώτημα A5

Να επαναλάβετε το βήμα A.3, θέτοντας περίοδο συμβόλου $T' = 2T$ (να διατηρήσετε την περίοδο δειγματοληψίας T_s ίση με αυτή των προηγούμενων βημάτων, άρα, θα πρέπει να διπλασιάσετε την παράμετρο over). Τι παρατηρείτε σχετικά με το εύρος φάσματος των κυματομορφών σε αυτή την περίπτωση σε σχέση με αυτό των κυματομορφών του βήματος A.3? Μπορείτε να εξηγήσετε το φαινόμενο?

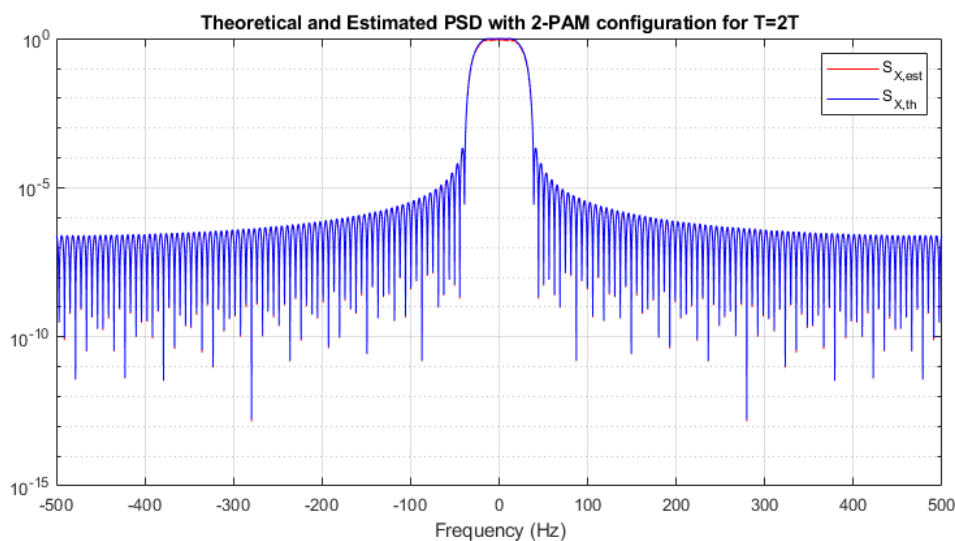
Στο ερώτημα αυτό η υλοποίηση της προσομοίωσης δεν διαφοροποιείται τεχνικά από τα ερωτήματα A3 και A4. Η περίοδος πλέον είναι διπλάσια και με σκοπό η περίοδος δειγματοληψίας να παραμείνει σταθερή, διπλάσιο είναι και το over:

```

1 //partA5.m
2 %Specify the constants of the case
3 T = 2*(10 ^ (-2));
4 over = 2*10;
5 Ts = T/over;
6 A = 4;
7 a = 0.5;

```

Η προσομοίωση έδωσε την ακόλουθη απεικόνιση για $K=500$ δείγματα:



Η προσέγγιση είναι επίσης καλή ωστόσο παρατηρούμε ότι το εύρος φάσματος είναι περιορισμένο σε σχέση με αυτό του ερωτήματος A3. Αυτό ήταν αναμενόμενο αφού σύμφωνα με τον τύπο $BW = \frac{1+a}{2T}$, ένας ενδεχόμενος διπλασιασμός της περιόδου επιφέρει υποδιπλασιασμό του εύρους φάσματος.

Ερώτημα A6

Αν θέλατε να στείλετε δεδομένα όσο το δυνατό ταχύτερα έχοντας διαθέσιμο το ίδιο εύρος φάσματος, θα επιλέγατε 2-PAM ή 4-PAM, και γιατί?

Με στόχο την αποστολή περισσότερων δεδομένων στο ίδιο εύρος φάσματος κατάλληλη είναι η 4-PAM αφού συμπιέζονται περισσότερα bits πληροφορίας στο ίδιο φάσμα σε σχέση με την 2-PAM.

Αν το διαθέσιμο εύρος φάσματος είναι πολύ ακριβό, θα επιλέγατε περίοδο συμβόλου T ή $T' = 2T$, και γιατί?

Εαν από την άλλη το εύρος φάσματος είναι πολύ ακριβό κατάλληλη επιλογή ως προς την περίοδο είναι η $T' = 2T$, αφού με διπλασιασμό της περιόδου υποδιπλασιάζεται το απαιτούμενο εύρος φάσματος.

Μέρος B

Έστω

$$Y(t) = X \cos(2\pi F_0 t + \Phi), \quad (1)$$

όπου $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $\Phi \sim \mathcal{U}[0, 2\pi)$, και X , Φ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Ερώτημα B1

Να σχεδιάσετε σε κοινό plot 5 υλοποιήσεις της. Ο κώδικας που προσομοιώνει και σχεδιάζει σε κοινό plot 5 υλοποιήσεις της $Y(t)$:

```

1 //partB.m
2 %Specify the constants of the case
3 F0 = 1; % Frequency
4 t = linspace(0, 1, 1000); % Time vector
5 % Generate 5 random samples
6 numSamples = 5;
7 X = randn(numSamples, 1); % Normally distributed random numbers
8 Phi = 2*pi*rand(numSamples, 1); % Uniformly distributed random numbers between 0 and 2pi
9 % Evaluate the equation for each sample
10 Y = X .* cos(2*pi*F0*t + Phi);
11 % Plot the results
12 figure;
13 hold on;
14
15 for i = 1:numSamples
16     plot(t, Y(i, :));
17 end
18
19 xlabel('Time');
20 ylabel('Y(t)');
21 title('Multiple Implementations of Y(t) = X cos(2*pi*F0*t + \Phi)');
22 legend('Sample 1', 'Sample 2', 'Sample 3', 'Sample 4', 'Sample 5');
23 hold off;

```

Ερώτημα B2

Να υπολογίσετε τις ποσότητες $\mathcal{E}[Y(t)]$ και $R_{YY}(t + \tau, t) = \mathcal{E}[(Y(t + \tau)Y(t))]$. Τι διαπιστώνετε?

- Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής της $Y(t)$ είναι λόγω ανεξαρτησίας των X, Φ :

$$\mathcal{E}[Y(t)] = \mathcal{E}[X \cdot \cos(2\pi f_0 t + \Phi)] = \mathcal{E}[X] \cdot \mathcal{E}[\cos(2\pi f_0 t + \Phi)]$$

Γνωρίζουμε ότι $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ άρα $\mathcal{E}[X] = 0$, επομένως:

$$\mathcal{E}[Y(t)] = 0 \cdot \mathcal{E}[\cos(2\pi f_0 t + \Phi)] = 0$$

- Για τον υπολογισμό της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης είναι:

$$R_{YY}(t + \tau, t) = \mathcal{E}[Y(t + \tau)Y(t)]$$

Αντικαθιστώντας την $Y(t)$:

$$R_{YY}(t + \tau, t) = \mathcal{E}[(X \cos(2\pi F_0(t + \tau) + \Phi))(X \cos(2\pi F_0 t + \Phi))]$$

Επειδή X, Φ είναι ανεξάρτητες είναι:

$$R_{YY}(t + \tau, t) = \mathcal{E}[X^2] \cdot \mathcal{E}[\cos(2\pi F_0(t + \tau) + \Phi) \cos(2\pi F_0 t + \Phi)]$$

Ισχύει πως $\mathcal{E}[X^2] = 1$, άρα η σχέση γίνεται:

$$R_{YY}(t + \tau, t) = \mathcal{E}[\cos(2\pi F_0(t + \tau) + \Phi) \cos(2\pi F_0 t + \Phi)]$$

Μέσω της σχέσης:

$$\cos(A) \cdot \cos(B) = \frac{\cos(A - B) + \cos(A + B)}{2}$$

Η αρχική σχέση γίνεται:

$$R_{YY}(t + \tau, t) = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{E}[\cos(2\pi F_0 \tau) + \cos(4\pi F_0 t + 2\pi F_0 \tau + 2\Phi)]$$

Η αναμενόμενη τιμή του συνημιτόνου μιας ομοιόμορφα κατανεμημένης τυχαίας μεταβλητής πάνω από το $[0, 2\pi)$ είναι μηδέν, οπότε ο δεύτερος όρος τείνει στο μηδέν. Ο πρώτος όρος είναι σταθερός και δεν εξαρτάται από το t ή το Φ , επομένως η αναμενόμενη τιμή του είναι απλώς ο ίδιος ο όρος:

$$R_{YY}(t + \tau, t) = 0.5 \cos(2\pi F_0 \tau)$$

Επομένως η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της σ.διαδικασίας $Y(t) = X \cos(2\pi F_0 t + \Phi)$ είναι ένα συνημίτονο με περίοδο που καθορίζεται από τη συχνότητα F_0 και δεν εξαρτάται από το χρόνο t . Αυτό είναι χαρακτηριστικό των στατικών διεργασιών, οι οποίες έχουν στατιστικές ιδιότητες που δεν αλλάζουν με την πάροδο του χρόνου.

Ερώτημα Β3

Να υπολογίσετε τη φασματική πυκνότητα ισχύος, $S_Y(F)$.

$$\begin{aligned} S_Y(F) &= \int R_{YY}(\tau) e^{-j2\pi F\tau} d\tau \\ &= \int 0.5 \cos(2\pi F_0\tau) e^{-j2\pi F\tau} d\tau \\ &= 0.5 \int (e^{j2\pi F_0\tau} + e^{-j2\pi F_0\tau}) e^{-j2\pi F\tau} d\tau \\ &= 0.5 \int (e^{j2\pi(F_0-F)\tau} + e^{-j2\pi(F_0+F)\tau}) d\tau \\ S_Y(F) &= 0.5[\delta(F - F_0) + \delta(F + F_0)] \end{aligned}$$